Baccalauréat général série S

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

10 juillet 2018

Ce document est un corrigé détaillé des cinq exercices, incluant celui de spécialité, composant l'épreuve de Mathématiques du Baccalauréat ayant eu lieu le 22 Juin 2018. L'objectif est d'expliquer comment parvenir au résultat avec des arguments du programme de lycée.

Suit un rapide descriptif des exercices proposés :
- L'exercice 1 est un classique des études de fonctions, l'exercice est très complet et balaye toutes les notions clefs du programme sur l'analyse de fonctions.
- L'exercice 2 ne présente pas de questions difficiles à première vue, seulement des questions simples sur les probabilités. Il est plus que nécessaire de savoir comment utiliser sa calculatrice à bon escient dans la partie B.
- L'exercice 3 propose une élégante propriété géométrique à travers une série de questions qui restent souvent très basiques. Connaître ses propriétés sur le bout des doigts est la clef de la réussite.
- L'exercice 4 de tronc commun est très technique et calculatoire, et la dernière question laissera du fil à retordre à plus d'un candidat.
- L'exercice 4 de spécialité concerne les nombres puissants. Bien qu'assez abordable, il demande une certaine maîtrise de tous les points du programme !

NB : je ne maîtrise pas encore LaTeX à la perfection, il se peut donc qu'il y ait quelques coquilles. Toutefois, je pense avoir fait du mieux possible pour rendre l'ensemble du document lisible.

Exercice 1 : (6 points) Commun à tous les candidats

1. La largeur de l'arc de chaînette correspond à une longueur de $2x$. Sa hauteur correspond à l'ordonnée des points M et M' c'est-à-dire $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right)$

   Le problème peut donc se ramener à l'équation suivante : $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - 2\right) = 2x$
   que l'on exprime directement sous la forme

$$e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$$

2. (a) Soit $x > 0$

   Comme $x \neq 0$ on peut factoriser l'expression $e^x - 4x$ par x ce qui donne $x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right)$

   On obtient alors

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$$

   (b) On rappelle une limite usuelle du cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

   Par conséquent, par produit de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) = +\infty$$

   Autre limite importante de l'exponentielle : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

   D'où finalement :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. (a) Soit $x > 0$
   On rappelle que la dérivée de l'exponentielle est elle-même.

   De même, on a $\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + (-1)e^{-x} - 4 \\ &= e^x - e^{-x} - 4 \end{aligned}$$

(b) On a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rrcll} & f'(x) & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & e^x - e^{-x} - 4 & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & e^{x+x} - e^{-x+x} - 4e^x & = & 0 & \text{(multiplication par } e^x\text{)} \\ \Leftrightarrow & e^{2x} - 4e^x - 1 & = & 0 & \text{(simplification)} \\ \Leftrightarrow & (e^x)^2 - 4e^x - 1 & = & 0 & \text{(car } e^{2x} = (e^x)^2\text{)} \end{array}$$

(c) On pose $X \ = e^x$

$(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$ donne alors $X^2 - 4X - 1 = 0$

On note Δ le discriminant du polynôme obtenu.

On a alors $\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ &= 20 \end{aligned}$

Le polynôme admet donc deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{4 - \sqrt{4 \times 5}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$$

$$X_2 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2 \times 1} = \frac{4 - \sqrt{4 \times 5}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$

On cherche donc x tel que $e^x = X_1$ ou $e^x = X_2$

Or, par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$ on peut affirmer que $2 < \sqrt{5}$ donc $X_1 < 0$

On en conclut qu'il n'existe pas de x tel que $e^x = X_1$ car l'exponentielle est toujours positive sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, si x est solution de l'équation $f'(x) = 0$ alors $e^x = X_2$

alors $\ln(e^x) = \ln(X_2)$

alors $x = \ln(X_2)$

alors $x = \ln(2+\sqrt{5})$

En conclusion, l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0$ est $\ln(2+\sqrt{5})$.

4. (a) L'essentiel du travail est fait grâce au tableau de signes. Il reste à calculer les bornes du tableau, soit $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a $f(0) = e^0 + e^0 - 4 \times 0 - 2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ d'après la question 2.b)

On obtient alors le tableau suivant :

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\ln(2+\sqrt{5}))$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) On peut remarquer à la calculatrice, en calculant une valeur approchée de $f(\ln(2+\sqrt{5}))$, que celle-ci est négative.
Autre justification possible : on sait que $f(0) = 0$ et f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \ln(2+\sqrt{5})]$, donc il est clair que $f(\ln(2+\sqrt{5})) < 0$.

Attention, vous n'avez pas le droit d'utiliser directement le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle de type $[\lambda; +\infty]$ où $\lambda < 0$. Ce résultat est correct mais il s'agit d'une extension du théorème des valeurs intermédiaires que l'on ne voit pas en TS.

Pour le faire proprement :
Par stricte croissante de f sur $[\ln(2+\sqrt{5});+\infty[$, il existe un certain $x_0 \in [\ln(2+\sqrt{5});+\infty[$ tel que $f(x_0) > 0$.
Dès lors, pour tout $x \in [x_0;+\infty[$, $f(x) \geqslant f(x_0)$ ce qui justifie que $f(x) \neq 0$

Or, f est continue sur $[\ln(2+\sqrt{5});x_0]$ par opérations sur des fonctions continues ($x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto e^{-x}$), et elle y est également strictement croissante.

Par conséquent, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[\ln(2+\sqrt{5});x_0]$.

NB : on note cette solution α pour la suite du sujet.

5. (a) Le tableau suivant se lit de haut en bas et de gauche à droite. Il convient de vérifier la condition $b - a > 0,1$ à chaque début de tour de boucle.

m	a	b	$b-a$	Justifications
	2	3	1	
2,5	2	2,5	0,5	Ici $e^{2,5} + e^{-2,5} - 4 \times 2,5 - 2 > 0$ donc $b \leftarrow m$ et a reste inchangé
2,25	2,25	2,5	0,25	On commence par calculer m : $m = \frac{2+2,5}{2} = 2,25$ et on a $e^{2,25} + e^{-2,25} - 4 \times 2,25 - 2 < 0$ donc $a \leftarrow m$ et b reste inchangé
2,375	2,375	2,5	0,125	On commence par calculer m : $m = \frac{2,25+2,5}{2} = 2,375$ et on a $e^{2,375} + e^{-2,375} - 4 \times 2,375 - 2 < 0$ donc $a \leftarrow m$ et b reste inchangé
2,4375	2,4375	2,5	0,0625	On commence par calculer m : $m = \frac{2,375}{2,5} = 2,4375$ et on a $e^{2,4375} + e^{-2,4375} - 4 \times 2,4375 - 2 < 0$ donc $a \leftarrow m$ et b reste inchangé

Stop ! $b - a = 0,0625 < 0,1$ donc on peut s'arrêter.

En sortie de cet algorithme, $a = 2,4375$ et $b = 2,5$

(b) Grâce à $m = \dfrac{a+b}{2}$ on reconnaît ici un algorithme de dichotomie.

La condition $e^m + e^{-m} - 4m - 2 > 0$ permet d'assurer que l'on s'intéresse au lieu d'annulation de f.

La condition $b - a > 0,1$ permet d'assurer que l'on obtiendra un résultat à une précision d'un dixième.

En conclusion, cet algorithme permet de déterminer un encadrement à 0,1 près de α.

6. On pose $x = \dfrac{t}{39}$.

   On rappelle qu'on a montré à la question précédente que la solution positive x de (E) est telle que $2,4375 \leqslant x \leqslant 2.5$

   Comme $t = 39x$, on obtient donc que $39 \times 2,4375 \leqslant t \leqslant 39 \times 2,5$ c'est-à-dire $95,0625 \leqslant t \leqslant 97,5$

   D'après l'énoncé, la largeur de l'arc est égale au double de la solution strictement positive de (E') qui n'est autre que t, donc elle est comprise entre $2 \times 95,0625$ et $2 \times 97,5$ c'est-à-dire entre 190,125 et 195

   On rappelle enfin que l'on a supposé que la hauteur de l'arc était égale à sa largeur.

   Conclusion : la hauteur de la *Gateway Arch* de Saint-Louis est comprise entre 190,125 et 195 mètres.

Exercice 2 : (4 points) Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. (a) Attention à ne pas chercher trop compliqué. Il est dit explicitement que 20% de la population a contracté la grippe.

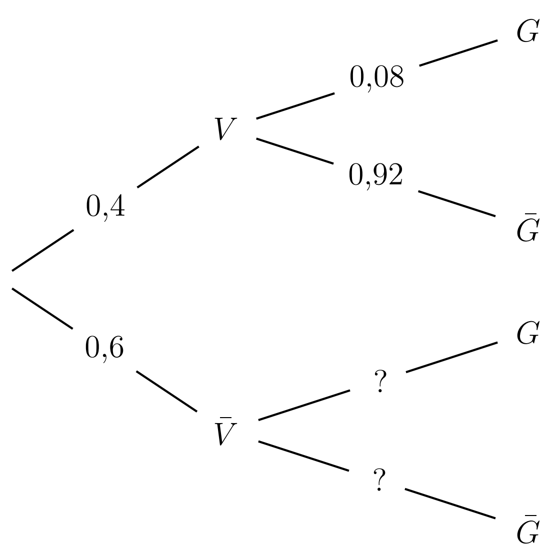
    Par conséquent, $\mathbb{P}(G) = 0,2$

   (b) 40% de la population est vaccinée, ce qui donne $\mathbb{P}(V) = 0,4$ et directement $\mathbb{P}(\bar{V}) = 1 - \mathbb{P}(V) = 0,6$

    8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe, donc $\mathbb{P}_V(G) = 0,08$ (c'est-à-dire que la probabilité qu'une personne attrape la grippe alors qu'elle est vaccinée est de 8%)

    $\mathbb{P}_V(\bar{G}) = 1 - \mathbb{P}_V(G) = 0,92$
    Si cela n'est pas clair, rappelez-vous que de la même façon que $\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(\bar{V}) = 1$, on doit avoir la somme des probabilités des branches découlant de V qui doit être égale à 1, autrement dit, on doit avoir $0,08 + \mathbb{P}_V(\bar{G}) = 1$ d'où le résultat.

    Les probabilités représentées par des ? ne sont pas encore connues et seront calculées dans la suite du sujet, elles n'étaient donc pas demandées ici.



2. La probabilité que la personne soit vaccinée et attrape la grippe correspond à la probabilité du chemin le plus haut de l'arbre ci-dessus. On l'appelle $\mathbb{P}(G \cap V)$ car c'est la probabilité que les deux événements G et V se réalisent en même temps.

   En se plaçant dans l'arbre de probabilité, il suffit de multiplier les probabilités des "chemins". On retrouve cette idée avec la formule $\mathbb{P}(G \cap V) = \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(G)$

   On trouve $\mathbb{P}(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$

   La probabilité qu'une personne soit vaccinée et qu'elle attrape la grippe est donc de $3,2\%$.

3. On sait que la personne n'est pas vaccinée (donc que l'événement $\bar{V}$ est réalisé), et on veut connaître la probabilité que cette personne attrape la grippe, donc on veut déterminer $\mathbb{P}_{\bar{V}}(G)$

   C'est le moment de rappeler un résultat important : $\mathbb{P}(G)$ correspond dans l'arbre à la probabilité cumulée des deux chemins pouvant mener à G

   Donc $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(G) + \mathbb{P}(\bar{V}) \times \mathbb{P}_{\bar{V}}(G)$

   Donc $\mathbb{P}(\bar{V}) \times \mathbb{P}_{\bar{V}}(G) = \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(G)$

   Donc $\mathbb{P}(\bar{V}) \times \mathbb{P}_{\bar{V}}(G) = 0,2 - 0,4 \times 0,08 = 0,168$

   Donc $\mathbb{P}_{\bar{V}}(G) = \dfrac{0,168}{0,6} = 0,28$

   La probabilité que la personne choisie, non vaccinée, ait contracté la grippe est bien de 0,28.

PARTIE B

1. Si l'on considère une expérience isolée : il n'y a que deux issues possibles, soit la personne est vaccinée, soit elle ne l'est pas. De plus, le fait qu'une autre personne soit vaccinée (ou non) n'a pas d'influence sur le fait qu'elle-même soit vaccinée (ou non). Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$

   On a donc la répétition de n épreuves de Bernoulli. On en déduit directement que X suit une loi Binomiale de paramètres n et $p = 0,4$.

2. (a) On rappelle une formule importante pour une variable X suivante une loi binomiale de paramètres (n, p) : $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-p}$

   On calcule $P(X = 15)$. D'après la formule, on a $\mathbb{P}(X = 15) = \binom{40}{15} \cdot 0,4^{15} \cdot 0,6^{40-15}$

   Pour une calculatrice Casio : *Menu STAT* $\rightarrow$ *DIST* $\rightarrow$ *BINM* $\rightarrow$ *Bpd* $\rightarrow$ Paramètres : $x = 15$, Numtrial $= 40$, $p = 0,4$ $\rightarrow$ *Exécuter*

   Pour une calculatrice TI : *binomFdP* $\rightarrow$ $x = 15$, Nb essais : 40, $p = 0,4$

   Dans les deux cas, on trouve $\mathbb{P}(X = 15) \simeq 0,123$.

   La probabilité que 15 personnes parmi les 40 interrogées soient vaccinées est donc d'environ 0,123.

   (b) On cherche à déterminer $\mathbb{P}(X \geqslant 20)$. Pour se faciliter la tâche, on passe par l'événement contraire : $\mathbb{P}(X \geqslant 20) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 19)$
   Ici pas de surprise, il faut calculer $\mathbb{P}(X = 1), \cdots, \mathbb{P}(X = 19)$ à la calculatrice :

   Pour une calculatrice Casio : *Menu STAT* $\rightarrow$ *DIST* $\rightarrow$ *BINM* $\rightarrow$ *Bcd* $\rightarrow$ Paramètres : $x = 19$, Numtrial $= 40$, $p = 0,4$ $\rightarrow$ *Exécuter*

   Pour une calculatrice TI : *binomFRep* $\rightarrow$ $x = 19$, Nb essais : 40, $p = 0,4$

   Dans les deux cas, on trouve $\mathbb{P}(X \leqslant 19) \simeq 0,870$ d'où $\mathbb{P}(X \geqslant 20) \simeq 0,130$.

   La probabilité qu'au moins la moitié des 40 personnes interrogées soit vaccinée est donc d'environ 0,130.

3. On cherche à déterminer $P(1450 \leqslant X \leqslant 1550)$. Il faut alors remarquer :

$$\begin{aligned} P(1450 \leqslant X \leqslant 1550) &= P\left(\frac{1450-1500}{30} \leqslant \frac{X-1500}{30} \leqslant \frac{1550-1500}{30}\right) \\ &= P\left(-\frac{5}{3} \leqslant Z \leqslant \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

Or, Z suit une loi normale centrée réduite, on prend donc comme paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. On utilise ensuite la calculatrice :

Pour une calculatrice Casio : *Menu STAT* $\rightarrow$ *DIST* $\rightarrow$ *NORM* $\rightarrow$ *Ncd* $\rightarrow$ Paramètres : *Lower* $= -1.6666667$, *Upper* $= 1.6666667$, $\sigma = 1$, $\mu = 0 \rightarrow$ *Exécuter*

Pour une calculatrice TI : *normFrep* $\rightarrow$ Paramètres : borne inférieure : -1.6666667, borne supérieure : 1.6666667, $\sigma = 1$, $\mu = 0$

Dans les deux cas, on trouve $P\left(-\frac{5}{3} \leqslant Z \leqslant \frac{5}{3}\right) = P\left(1450 \leqslant X \leqslant 1550\right) \simeq 0,904$.

La probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 vaccinés est d'environ 0,904.

Exercice 3 : (5 points) Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. (a) Rappel : la hauteur "issue" de E est la droite passant par le point E et coupant perpendiculairement la face opposée, qui n'est autre que (ABC), il s'agit donc de la droite (EA).

   De même, la hauteur "issue" de C est la droite passant par le point C et coupant perpendiculairement la face opposée, qui n'est autre que (ABE), il s'agit donc de la droite (BC).

   (b) Il suffit ici d'exhiber un contre-exemple. On vient de considérer les droites (EA) et (BC), qui ne sont clairement pas concourantes.

   On en déduit directement que les quatre hauteurs du tétraèdre $ABCE$ ne sont pas concourantes.

2. (a) Il y a plusieurs façons de procéder ici. En voici une assez naïve :

   Soit $ax + by + c + d = 0$ l'équation du plan (ACH). Déterminons a, b, c et d.

   A appartient au plan (ACH) donc ses coordonnées, $(0; 0; 0)$, vérifient l'équation du plan, ce qui donne automatiquement $d = 0$.

   Le point C appartient également au plan (ACH) donc ses coordonnées, $(1; 1; 0)$, vérifient l'équation du plan, ce qui donne $a + b = 0$.

   Enfin, le point H appartient également à ce plan donc ses coordonnées, $(0; 1; 1)$, vérifient l'équation du plan, ce qui donne $b + c = 0$.

   On a un système de 2 équations à 3 inconnues. Pour retrouver l'équation proposée par l'énoncé, on peut vouloir choisir arbitrairement une valeur pour a ou pour c.

   On décide de fixer $a = 1$. On trouve alors que $b = -a = -1$ puis que $c = -b = 1$.

   En conclusion, $x - y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (ACH).

(b) Si on en croit la définition de la hauteur passant par F, il faut montrer que (FD) est perpendiculaire, ou plutôt normale, au plan (ACH).

Les coordonnées de $\overrightarrow{DF}$ sont $(1;0;1)-(0;1;0)=(1;-1;1)$

D'autre part, pour un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, on peut déterminer automatiquement un vecteur normal à ce plan : par exemple celui de coordonnées $(a;b;c)$. Donc un vecteur normal au plan (ACH) a par exemple pour coordonnées $(1;-1;1)$. Ce sont les coordonnées de $\overrightarrow{DF}$!

On en déduit que $\overrightarrow{DF}$ est normal, ou perpendiculaire, au plan (ACH). Or c'est une droite passant naturellement par F donc il s'agit bien de la hauteur du tétraèdre $ACHF$ issue de F.

(c) Il faut ici remarquer que (FD) est une grande diagonale du cube. C'est aussi, d'après la question précédente, la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.

Par analogie, en utilisant la symétrie du cube, on peut ainsi dire que chaque hauteur issue de l'un des sommets du tétraèdre est également la grande diagonale du cube, issue du sommet en question.

Ainsi donc, (EC) est la hauteur issue de C, (AG) est la hauteur issue de A et (BH) est la hauteur issue de H.

Or, les diagonales du cube se coupent. Ici le résultat est admis par l'énoncé, mais il faut bien voir que c'est un résultat intuitif. Le cube étant parfaitement symétrique, ses grandes diagonales se coupent en son centre.

Les quatre hauteurs du tétraèdre $ACHF$ sont donc concourantes.

PARTIE B

1. (a) (PQ) appartient au plan (NPQ). Or, on voit bien que la droite (MK) est perpendiculaire au plan (NPQ). Par conséquent, (MK) est perpendiculaire à toutes les droites du plan (NPQ), y compris (PQ).
Donc les droites (PQ) et (MK) sont orthogonales.

(PQ) appartient au plan (MPQ). Or, (NK) est perpendiculaire au plan (MPQ), donc à toute droite de ce plan, donc en particulier à (PQ).
Donc (PQ) et (NK) sont orthogonales.

(b) Les droites (MK) et (NK) n'étant pas parallèles, elles sont donc sécantes et engendrent un plan unique : le plan (MNK).

D'après la question précédente, (PQ) est orthogonale à (MK) et (NK), qui sont deux droites non parallèles du plan (MNK).

(PQ) est donc orthogonale au plan (MNK).

2. D'après la question précédente, (PQ) est orthogonale au plan (MNK), donc (PQ) est orthogonale à toute droite du plan (MNK).

   En particulier, (MN) appartient au plan (MNK).

   Donc (PQ) est orthogonale à (MN).

PARTIE C

Pour simplifier la tâche, il peut être utile de dessiner un tétraèdre au brouillon. On veut ici vérifier que les arêtes $[RS]$ et $[TU]$ sont orthogonales. Puis de même, on vérifiera l'orthogonalité des arêtes $[RT]$ et $[SU]$ puis $[TS]$ et $[RU]$.

Coordonnées de $\overrightarrow{RS}$: $(1; 4; -2) - (-3; 5; 2) = (4; -1; -4)$

Coordonnées de $\overrightarrow{TU}$: $(4; 7; 3) - (4; -1; 5) = (0; 8; -2)$

La façon la plus simple de vérifier l'orthogonalité de deux vecteurs lorsque l'on peut avoir leurs coordonnées est de calculer leur produit scalaire :

$\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{TU} = 4 \times 0 + (-1) \times 8 + (-4) \times (-2) = 0$

Les arêtes $[RS]$ et $[TU]$ sont donc orthogonales. On peut continuer.

Coordonnées de $\overrightarrow{RT}$: $(4; -1; 5) - (-3; 5; 2) = (7; -6; 3)$

Coordonnées de $\overrightarrow{SU}$: $(4; 7; 3) - (1; 4; -2) = (3; 3; 5)$

$\overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{SU} = 7 \times 3 + (-6) \times 3 + 3 \times 5 = 18 \neq 0$

Les arêtes $[RT]$ et $[SU]$ ne sont donc pas orthogonales. On peut s'arrêter là et conclure, mais on peut s'assurer du résultat avec le dernier calcul...

Coordonnées de $\overrightarrow{TS}$: $(1; 4; -2) - (4; -1; 5) = (-3; 5; -7)$

Coordonnées de $\overrightarrow{RU}$: $(4; 7; 3) - (-3; 5; 2) = (7; 2; 1)$

$\overrightarrow{TS} \cdot \overrightarrow{RU} = (-3) \times 7 + 5 \times 2 + (-7) \times 1 = -18 \neq 0$

Les arêtes $[TS]$ et $[RU]$ ne sont donc pas orthogonales.

Le tétraèdre $RSTU$ n'est donc pas orthocentrique.

Exercice 4 : (5 points) Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) On cherche à déterminer la forme exponentielle de $\frac{3-i\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$. On commence par calculer son module :

$$\left|\frac{3-i\sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+3}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soit θ l'argument du complexe étudié.

On a alors

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 \times 2}{4 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 2}{4 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3} \times 2}{4 \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

On en déduit directement que $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

Si vous n'êtes pas convaincus, pensez à dessiner rapidement le cercle trigonométrique au brouillon pour vous en convaincre !

On obtient donc

$$\frac{3-i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{6}}$$

(b) D'après la question précédente et la relation de récurrence donnée par l'énoncé :

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{6}} \\ &= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{i\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= z_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \\
&= 4\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \\
&= 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \\
&= 2\sqrt{3}^2 \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \\
&= 6 \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= z_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \\
&= 6 \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \\
&= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \\
&= 3\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} \\
&= -3\sqrt{3}\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

z_3 est donc un imaginaire pur, de partie imaginaire $-3\sqrt{3}$.

(c) Pour la représentation des points, ne pas oublier les points suivants :

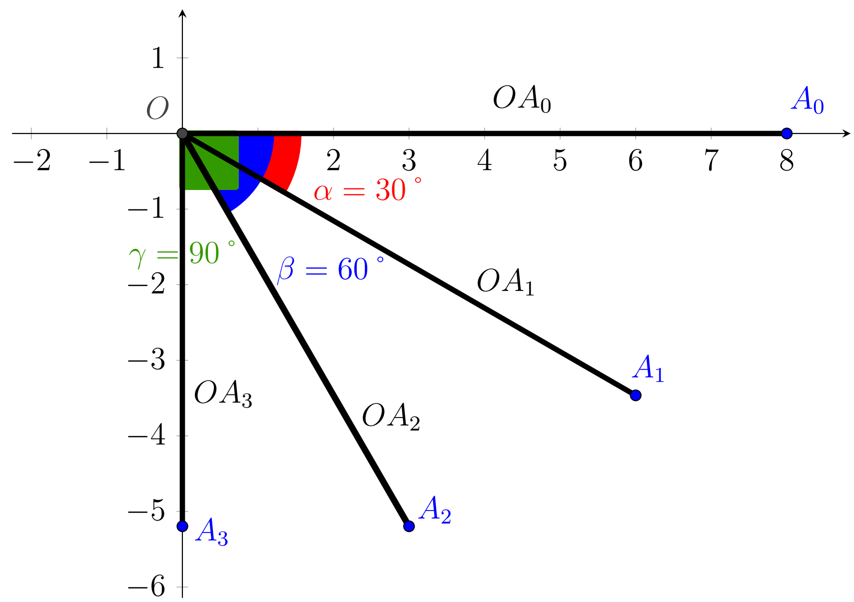
- Le module d'un nombre complexe donne sa distance au point O
- Un argument (il n'est pas unique) d'un nombre complexe donne l'angle entre l'axe des abscisses et le segment OA (où A est le point considéré)

- Un argument de $-\frac{\pi}{6}$ correspond à un angle de 30 ˚ (dans le sens négatif !)

- Un argument de $-\frac{\pi}{3}$ correspond à un angle de 60 ˚ (dans le sens négatif !)

- Un argument de $-\frac{\pi}{2}$ correspond à un angle de 90 ˚ (dans le sens négatif !)

Représentation des points A_0, A_1, A_2, A_3 dans le plan complexe.



2. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}n\pi}{6}}$

<u>Initialisation</u> : $(n = 0)$

$8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 \cdot e^0 = 8 = z_0$

La propriété est donc vérifiée au rang initial $(n = 0)$.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n.

$$
\begin{aligned}
z_{n+1} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \cdot z_n \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \cdot 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}n\pi}{6}} \\
&= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6} - \frac{\mathrm{i}n\pi}{6}} \\
&= 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \cdot e^{\frac{\mathrm{i}(n+1)\pi}{6}}
\end{aligned}
$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cdot e^{-\dfrac{in\pi}{6}}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que z_n est un nombre complexe exprimée sous forme exponentielle. Par conséquent, on a directement que $u_n = |z_n| = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Or $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite convergente, de limite nulle.

Vous pouviez également voir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une suite géométrique, comme suit :

Rappelons que d'après 1.a) $\left|\frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\ z_n\right| = \left|\frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right|\ |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u_n$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique, de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ comprise entre 0 et 1, elle converge donc vers 0.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$z_{k+1} - z_k = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_k - z_k = \left(\frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} - 1)\right) z_k = \left(\frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right) z_k$$

Or, $z_{k+1} \neq 0$

Donc $\dfrac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = \dfrac{\left(\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right) z_k}{\left(\dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right) z_k} = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{3-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{3-\mathrm{i}\sqrt{3}} \times \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}$

Donc $\dfrac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = \dfrac{-3-3\mathrm{i}\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{3}-\mathrm{i}^2\sqrt{3}^2}{3^2-\mathrm{i}^2\sqrt{3}^2} = \dfrac{-3-4\mathrm{i}\sqrt{3}-(-1)\cdot 3}{9-(-1)\cdot 3}$

Donc $\dfrac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = \dfrac{-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{12} = -\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\dfrac{3\mathrm{i}}{3\sqrt{3}} = -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$

Or A_k est le point du plan d'affixe z_k et l'on peut voir la différence $z_{k+1}-z_k$ comme la distance A_kA_{k+1}

De plus, $z_{k+1} = z_{k+1} - 0$ ce qui correspond à la distance OA_{k+1}

La relation trouvée précédemment donne $\dfrac{A_kA_{k+1}}{OA_{k+1}} = \left|-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{i}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

On obtient alors $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ OA_{k+1}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned} l_n &= A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}OA_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}OA_2 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3}}OA_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n} OA_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n} |z_k| \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n} u_k \end{aligned}$$

On somme les termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3} \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Donc

$$l_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 4\sqrt{3} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ comme vu précédemment car $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} l_n &= 4 \times \frac{1 - 0}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{4}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{8}{2 - \sqrt{3}} \\
&= \frac{8}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\
&= \frac{8(2 + \sqrt{3})}{2^2 - \sqrt{3}^2} \\
&= \frac{16 + 8\sqrt{3}}{4 - 3} \\
&= 16 + 8\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Exercice 4 : (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

1. Le couple $(1;0)$ est trivialement solution de (E) : $1^2 - 8 \cdot 0^2 = 1$

   On pouvait facilement remarquer que le couple $(3;1)$ est solution : $3^2 - 8 \cdot 1^2 = 1$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le couple $(x_n; y_n)$ est solution de (E).

   Initialisation : $(n = 0)$

   On a déjà vu que le couple $(1;0)$ était solution, donc le couple $(x_0; y_0)$ est bien solution de (E). La propriété donc vraie au rang 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que le couple $(x_n; y_n)$ est solution de (E).

   On a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + 8y_n \\ x_n + 3y_n \end{pmatrix}$ par produit matriciel.

$$\begin{aligned} {x_{n+1}}^2 - 8{y_{n+1}}^2 &= (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2 \\ &= 9{x_n}^2 + 48x_ny_n + 64{y_n}^2 - 8{x_n}^2 - 48x_ny_n - 72{y_n}^2 \\ &= {x_n}^2 - 8{y_n}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Le couple $(x_{n+1}; y_{n+1})$ est donc solution de (E) car x_{n+1} et y_{n+1} sont des entiers naturels. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, le couple $(x_n; y_n)$ est solution de (E).

(b) Ici l'énoncé donne une hypothèse qui permet d'alléger le travail : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 8y_n$.

L'énoncé laisse supposer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)\, n \in \mathbb{N}$ sont bien définies, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n sont des entiers naturels. Donc $y_n \geqslant 0$

Par hypothèse, $x_n > 0$ donc $x_{n+1} - x_n > 0$ d'où le résultat.

Les hypothèses de l'énoncé facilitent le travail mais ne sont en rien nécessaires à la réussite de cette question : on pouvait facilement montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ et $y_n \geqslant 0$.

3. D'après 2.a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, le couple $(x_n; y_n)$ est solution de (E).

   D'après 2.b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} > x_n$ donc $x_n \neq x_{n+1}$

   Par conséquent, les couples $(x_n; y_n)$ sont distincts deux à deux, c'est-à-dire qu'ils sont assurément tous différents. Il y en a donc une infinité.

   Il y a donc une infinité de solutions à l'équation (E).

PARTIE B

1. Les nombres 8 et 9 sont des nombres puissants. De plus, ce sont des entiers naturels consécutifs et ils vérifient la propriété :

   - 8 a pour diviseurs $1, 2, 4, 8$. Seul 2 est premier, et 2^2 divise bien 8.
   - 9 a pour diviseurs $1, 3, 9$. Seul 3 est premier, et 3^2 divise bien 9.

2. Soit $n = a^2b^3$. Soit p un diviseur premier de n.

   p est donc dans la décomposition en facteurs premiers de n. Il est donc dans la décomposition en facteurs premiers de a^2 ou de b^3 ou des deux en même temps.

Mais comme p est premier, s'il est dans la décomposition en facteurs premiers de a^2, il est nécessairement dans celle de a. De même, s'il est dans la décomposition en facteurs premiers de b^3 alors il est nécessairement dans celle de b.
Il est donc nécessairement dans celle de a ou de b, il peut être aussi dans les deux.
Cela signifie donc que p divise soit a, soit b, soit les deux.

Donc si p divise a, alors p^2 divise a^2 et donc divise n.
Si p divise b, alors p^2 divise b^2 et donc b^3 et divise donc n.

Dans tous les cas, si p est un diviseur premier de n, p^2 divise n également. On peut donc en conclure que n est puissant.

3. Soit $(x; y)$ un couple solution de (E). x et y sont donc des entiers naturels.

   On commence par écrire que $x^2 = x^2\ 1^3$. On rentre donc dans le cadre de la question précédente, ce qui permet directement de dire que x^2 est puissant. En réalité, il l'est toujours du moment qu'il est entier naturel, car on peut toujours écrire que $x^2 = x^2\ 1^3$.

   $(x; y)$ étant un couple solution de (E), on a $x^2 - 8y^2 = 1$ que l'on écrit $x^2 - 1 = 8y^2$

   Il faut alors remarquer que x étant entier naturel, et non nul par hypothèse, il est évident que $x^2 - 1$ l'est aussi. De plus, on a $8 = 2^3$.

   On a alors $x^2 - 1 = y^2\ 2^3$ et on utilise la question précédente, car y et 2 sont des entiers naturels, pour déduire que $x^2 - 1$ est puissant.

   x^2 et $x^2 - 1$ sont donc des entiers puissants consécutifs.

4. D'après la question 3) de la partie A, il existe une infinité de solutions à l'équation (E) : ce sont les couples $(x_n; y_n)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

   D'après la question précédente, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n; y_n)$ est solution de (E), ${x_n}^2$ et ${x_n}^2 - 1$ sont puissants. Les couples $({x_n}^2; {x_n}^2 - 1)$ sont distincts deux à deux, il y en a donc une infinité.

   On a bien montré qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

   Pour répondre à la dernière question, on calcule les premiers valeurs de x_n et y_n et l'on s'arrête lorsqu'on trouve un n tel que ${x_n}^2 > 2018$.

On utilise les relations de récurrence pour déterminer x_0, x_1, x_2, x_3

n	x_n	y_n	${x_n}^2$	${x_n}^2 > 2018$
0	1	0	1	FAUX
1	3	1	9	FAUX
2	17	6	289	FAUX
3	99	35	9801	VRAI

On voit alors que ${x_3}^2 = 9801$ et ${x_3}^2 - 1 = 9800$ sont deux nombres entiers consécutifs puissants d'après ce qui précède, et ce sont des nombres supérieurs à 2018.

— **FIN** —