Concours Communs Polytechniques – 2016

Filière MP – Maths 1

EXERCICE I

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

I.1. Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

EXERCICE II

II.1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

II.2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) vérifie :

$$\text{pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{P}(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

II.2.a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

II.2.b. Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

II.2.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

PROBLÈME : Fonction Digamma

Partie préliminaire

III.1.

III.1.a. Soit $x \in]0,+\infty[$, démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

III.1.b. On note, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ (fonction Gamma d'Euler).

Démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) > 0$.

III.1.c. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

III.2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{n}$.

III.2.a. Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge.

III.2.b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* (γ est appelée la constante d'Euler). Dans la suite de ce problème, on définit pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. Pour $x \in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\text{pour tout } t \in]0,n],\ f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et pour tout } t \in]n,+\infty[,\ f_n(t) = 0.$$

III.3.a. Démontrer que pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $t \in]0,+\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}$.

III.3.b. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

III.4. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u$.

III.4.a. Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

III.4.b. En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

III.4.c. Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$ (formule de Gauss).

III.5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note toujours $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que pour $n \geq 1$ et $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right]$, démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right]$ (formule de Weierstrass).

III.6.

III.6.a. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

III.6.b. On pose, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$. Démontrer que l'application g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

III.6.c. En déduire que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{-1}{x} - \gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$. On rappelle que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.7.

III.7.a. Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

III.7.b. Calculer, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x+1)-\psi(x)$ puis démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\psi(n) = -\gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

III.7.c. On pose, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ et k entier naturel, $j_k(y) = \dfrac{1}{k+y+1} - \dfrac{1}{k+y+x}$.

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\psi(x+n)-\psi(1+n))$.

III.8. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$,
- pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{x}$,
- pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(f(x+n)-f(1+n)) = 0$.

Autour de la fonction Digamma

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On effectue un premier tirage d'un boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne
avec k nouvelles boules toutes numérotées k.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k, $P(Y=k) = \dfrac{1}{n}\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)+\dfrac{k}{n+k}\right)$.

III.9.c. Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n\,(\psi(2n+1)-\psi(n+1)).$$

Fin de l'énoncé

Corrigé

Nicolas Fédou

20 avril 2020

Le sujet est calculatoire, ce qui n'est pas spécialement surprenant pour une épreuve de ce concours. Il vaut sans doute mieux prendre un peu son temps pour ne pas se tromper dans les calculs. En revanche l'avantage est que la rédaction est assez légère, on peut faire le sujet en étant concis et en allant droit au but.
À CCP, où on est très pointilleux sur la rédaction, je conseillerais de bien rappeler toutes les hypothèses d'un théorème avant de le citer.

Il se peut qu'il y ait encore quelques coquilles malgré les relectures, n'hésitez pas à m'en faire part.

Pour me contacter :

- Mail : nicolas.fedou@u-psud.fr / nicolas.fedou@universite-paris-saclay.fr
- Twitter : @R3alHiro

Exercice I – Équation différentielle

Pas trop le choix ici, on prend une telle fonction solution et on regarde ce qu'on peut en dire. Généralement dans ce genre d'exercice, développer la solution en série entière nous amène à discuter sur les coefficients (valeurs, relation de récurrence, ...). On prend bien son temps pour ne pas se tromper lorsqu'on somme (en faisant attention aux indices), mais il faut quand même ne pas perdre trop de temps et garder à l'esprit qu'il y a un problème qui nous attend.

I. Soit f une solution de (E) développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ où $r > 0$. En notant $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des coefficients (réels) correspondant, on écrira :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

f est deux fois dérivable en tant que fonction développable en série entière et si $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned}
x^2 f''(x) + (x^2 - x) f'(x) + 2f(x) = &\quad x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x^2 - x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
= &\quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
= &\quad \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
= &\quad \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) - n + 2] a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)a_{n-1} x^n \\
= &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n + 2) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n \\
= &\quad 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - 2n + 2)a_n + (n-1)a_{n-1}] x^n \\
= &\quad 0
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on trouve donc $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(n^2 - 2n + 2)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0$ ce qu'on réécrit (puisque pour $n \in \mathbf{N}^*$, $n^2 - 2n + 2 \neq 0$) $a_n = \dfrac{1-n}{n^2 - 2n + 2} a_{n-1}$. On s'aperçoit donc que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = 0$ et donc $f = 0$.

Il est clair que la fonction nulle répond au problème. On a ainsi montré qu'il n'existe pas de solution **non nulle** à (E) qui soit définie et développable en série entière sur un intervalle de type $]-r, r[$, $r > 0$.

Exercice II – Probabilités, familles sommables

On pense bien à fixer une première variable pour sommer une première fois, et surtout de calculer cette première somme pour faciliter le calcul final. Pour ce qui est des "astuces de calcul" (qui ne consistent ici qu'à multiplier par 2), vous pouvez les repérer au brouillon lorsque vous faites vos calculs.

II. (1) Fixons $i \in \mathbf{N}$. Par croissances comparées, on a $\dfrac{i+j}{2^{i+j}} \underset{j\to\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{j^2}\right)$

Par comparaison de séries à termes positifs,

$$S_i := \sum_{j\in\mathbf{N}} \frac{i+j}{2^{i+j}} < +\infty$$

Calculons $2S_i$:

$$\begin{aligned}
2S_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i+j}{2^{i+j-1}} = \frac{i}{2^{i-1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i+j}{2^{i+j-1}} &= \frac{i}{2^{i-1}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i+j+1}{2^{i+j}} \\
&= \frac{i}{2^{i-1}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} \\
&= \frac{i}{2^{i-1}} + S_i + \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
S_i &= \frac{i}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i-1}} \\
S_i &= \frac{i+1}{2^{i-1}}
\end{aligned}$$

Une fois encore par croissances comparées, $S_i \underset{i\to\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{i^2}\right)$ si bien que par comparaison à termes positifs,

$$S := \sum_{i\in\mathbf{N}} S_i = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}}\right) < +\infty$$

En reprenant la même idée que précédemment, calculons $2S$:

$$\begin{aligned}
2S = 2\sum_{i=0}^{\infty} S_i = 2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{2^{i-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{2^{i-2}} &= \frac{1}{2^{-2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+1}{2^{i-2}} \\
&= 4 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+2}{2^{i-1}} \\
&= 4 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{2^{i-1}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \\
&= 4 + S + 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\text{la famille } \left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} \text{ est sommable}}$ et l'on a :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}}\right) = 8$$

Pour prouver que l'on a bien une loi conjointe, il suffit de vérifier que la famille $(P(X=i,Y=j))_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable, de somme 1. Pour le reste il faut bien sûr garder à l'esprit ce qu'on a fait en I. Pour l'indépendance, c'est toujours bien de tester avec des valeurs triviales pour sentir les choses. Ici, au vu des expressions, on peut rapidement avoir une idée de la réponse.

---

a. Soient $i, j \in \mathbf{N}$ et posons $p_{i,j} := P(X=i, Y=j) = \dfrac{i+j}{2^{i+j+3}} = \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{i+j}{2^{i+j}}$.
D'après I), la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable, de somme

$$\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} p_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}\frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{1}{8}\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}\frac{i+j}{2^{i+j}} = \frac{1}{8}\cdot 8 = 1$$

$\boxed{\text{La relation de l'énoncé définit donc bien une loi conjointe.}}$

b. Fixons $i \in \mathbf{N}$ et calculons $P(X=i)$ grâce au travail fourni en I) :

$$P(X=i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=i, Y=j) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} = \frac{1}{8}\frac{i+1}{2^{i-1}} = \frac{i+1}{2^{i+2}}$$

Si $j\in\mathbf{N}$, le même calcul donne $P(Y=j) = \dfrac{j+1}{2^{j+2}}$, par symétrie.
$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent donc une même loi}}$ et l'on a :

$$\forall k\in\mathbf{N},\ P(X=k) = P(Y=k) = \frac{k+1}{2^{k+2}}.$$

c. D'une part $P(X=0, Y=0) = P((X=0)\cap(Y=0)) = \dfrac{0+0}{2^3} = 0$.
D'autre part, $P(X=0)\times P(Y=0) = \dfrac{0+1}{2^2}\times\dfrac{0+1}{2^2} = \dfrac{1}{16}$.
Ainsi $P((X=0)\cap(Y=0)) \neq P(X=0)P(Y=0)$:
$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont donc pas indépendantes.}}$

Problème – Fonction Digamma

Préliminaires

Une première partie sur la fonction Gamma d'Euler et la série harmonique. Si le premier point fait partie du cours, le second est plus à ranger dans les "classiques à savoir refaire".
Les questions portant sur Γ sont à savoir faire impeccablement et rapidement. Pour la domination locale, on peut utiliser l'astuce de majorer par la somme des dérivées partielles en deux points (les deux extrémités du segment). On retrouve la même astuce dans le cas $\mathcal{C}^k$ et l'étude est la même.

III. (1) a. Soit $x > 0$ fixé.

- $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est positive et continue sur $]0, +\infty[$,
- Étude en 0 : $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$

Comme $1 - x < 1$, $t \mapsto t^{x-1}$ est une fonction de Riemann intégrable sur un voisinage de 0 (à droite). Ainsi par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0 (à droite), disons par exemple sur $]0, 2]$,

- Étude en $+\infty$: $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est une fonction de Riemann intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$, par exemple sur $[2, +\infty[$.

En résumé, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ t \mapsto e^{-t}t^{x-1} \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[}$.

b. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue et **strictement** positive sur $]0, +\infty[$. Ainsi $\boxed{\Gamma(x) > 0}$.

c. Commençons par poser $\gamma : (t, x) \in]0, +\infty[^2 \to e^{-t}t^{x-1}$ de sorte que pour tout $x > 0$, on ait

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \gamma(t, x)\,\mathrm{d}t$$

- $\forall x > 0$, $t \mapsto \gamma(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après a),
- γ admet une dérivée partielle selon sa seconde variable et l'on a pour tous $t, x \in \mathbf{R}^{+*}$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(t, x) = e^{-t}t^{x-1}\ln(t)$$

- Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}(t, x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbf{R}^{+*}$,
- Pour tout $t > 0$, $x \mapsto \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}(t, x)$ est continue sur $\mathbf{R}^{+*}$,
- Considérons enfin un segment $[a, b] \subset \mathbf{R}^{+*}$. Si $t > 0$, $x \in [a, b]$,

$$\left|\frac{\partial \gamma}{\partial x}(t, x)\right| = e^{-t}t^{x-1}|\ln(t)| \leq \begin{cases} e^{-t}t^{a-1}|\ln(t)| & \text{si } 0 < t < 1 \\ e^{-t}t^{b-1}\ln(t) & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,x)\right| &\leq \quad e^{-t}t^{a-1}|\ln(t)| + e^{-t}t^{b-1}\ln(t)\\ &\leq \quad \left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,a)\right| + \left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,b)\right| =: \varphi(t)\end{aligned}$$

φ est clairement positive, continue (par morceaux) sur $\mathbf{R}^{+*}$, il reste à voir son intégrabilité. Soit donc $x \in [a,b]$,

• Étude en 0 : $t^{-\frac{x}{2}+1}\left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,x)\right| = t^{-\frac{x}{2}+1}e^{-t}t^{x-1}|\ln(t)| = t^{\frac{x}{2}}e^{-t}|\ln(t)| \to 0$ par croissances comparées.
On a donc $\left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,x)\right| \underset{t\to 0^+}{=} O\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\right)$. Or, comme $1-\frac{x}{2} < 1$, $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}$ est une fonction de Riemann intégrable sur un voisinage de 0 à droite, par exemple sur $]0,2]$. Par comparaison de fonctions positives, il en va de même pour $t \mapsto \left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,x)\right|$ et donc pour φ.

• Étude en $+\infty$: par croissances comparées,

$$t^2\left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,x)\right| = \underbrace{\frac{|\ln(t)|}{t}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0} \cdot \underbrace{t^{x+2}e^{-t}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent, $\left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,x)\right| \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc par comparaison avec une fonction de Riemann intégrable au voisinage de $+\infty$, $t \mapsto \left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,x)\right|$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$, par exemple sur $[2,+\infty[$ et il en va de même pour φ.

φ est donc positive et intégrable sur $]0,+\infty[$, d'où l'hypothèse de domination locale recherchée.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $\boxed{\Gamma \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}^{+*}}$.
Par ailleurs, si $x > 0$,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

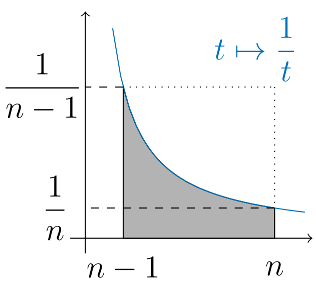
Les questions qui suivent sont classiques et consistent à montrer l'existence de γ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$$

γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.
La première question nous refait faire la comparaison série-intégrale de laquelle découle ce résultat, n'hésitez surtout pas à faire un dessin pour renforcer votre raisonnement. Un dessin, aussi concis soit-il, ne peut que valoriser la copie.
NB : on demande une "justification" donc on a le droit de penser que le simple fait de citer le théorème de comparaison série-intégrale suffit, sans spécialement avoir à refaire tout le raisonnement comme je fais ci-dessous...

---

(2) a. Soit $n \geq 2$ fixé, par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$:



on sait que si $n-1 < t < n$, alors $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{n-1}$

Il ne nous reste qu'à intégrer entre $n-1$ et n pour

retrouver l'encadrement que l'on peut observer sur la figure.

On obtient l'encadrement :

$$\frac{1}{n} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} < \frac{1}{n-1}$$

On en déduit finalement l'encadrement qui nous intéresse :

$$0 < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n} = u_n < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Finalement, par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n\geq 2} u_n < +\infty$$

b. Si $n \geq 2$, alors :

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 1 = -H_n + 1$$

Ainsi on aboutit à la formule suivante, qui coïncide également en $n = 1$:

$$H_n = 1 - \sum_{k=2}^{n} u_k$$

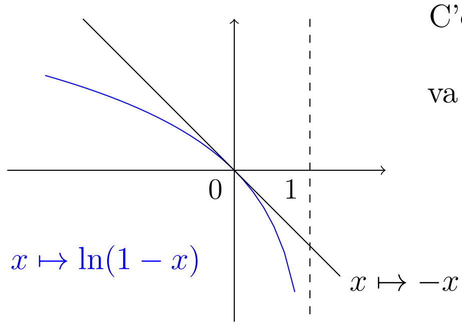
Il résulte de l'étude précédente que $\boxed{\text{la suite } (H_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge.}}$

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

La question qui suit a pour but de montrer une inégalité classique. Reconnaître ce genre d'inégalités peut vous donner la puce à l'oreille quant à la marche à suivre. Ici, le raisonnement qui vous fera gagner le plus de temps est celui de l'inégalité de concavité. C'est aussi, selon moi, le plus élégant.
Il peut être utile de faire un dessin pour bien voir ce qu'il se passe, et le correcteur appréciera sans doute une nouvelle figure dans la copie !

---

(3) a. Commençons par réaliser une figure, pour bien voir de quoi on parle :



C'est bien la concavité de $x \mapsto \ln(1-x)$ que l'on va utiliser avec la bonne tangente, celle en 0.

La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est deux fois dérivable sur $]-\infty, 1[$, de dérivée seconde $x \mapsto -\dfrac{1}{(1-x)^2}$, qui est négative sur $]-\infty, 1[$.

$x \mapsto \ln(1-x)$ est donc concave $]-\infty, 1[$, et par inégalité de convexité (ou plutôt de concavité ici), est toujours en-dessous de toutes ses tangentes.
En particulier, elle est toujours sous sa tangente en 0, qui a pour équation

$$x \mapsto -\frac{1}{1-0}x + \ln(1-0) = -x$$

De ceci, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x < 1,\ \ln(1-x) \leq -x}$.

Soient $n \geq 1$, $x > 0$. Si $t \in [n, +\infty[$, comme $t^{x-1} > 0$, on a bien

$$0 \leq f_n(t) = 0 \leq e^{-t}t^{x-1}$$

Si $t \in]0, n[$, alors $\dfrac{t}{n} \in]0, 1[$ donc d'après ce qui précède (et par croissance de exp) :

$$0 \leq f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1} \leq e^{-n\frac{t}{n}}t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1}$$

Finalement, on a bien montré que pour tous $n \leq 1$, $x > 0$ et $t > 0$,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}$$

La question est un peu piégeuse. Le théorème de convergence dominée ne nous donnera que la convergence de l'intégrale des f_n sur un même intervalle (ici $\mathbf{R}^{+*}$). Or, on veut faire apparaître une limite qui porte à la fois sur l'intégrande et sur une borne. C'est là qu'il faut bien lire l'énoncé car c'est la définition des f_n qui nous guidera pour la fin.

---

b. Soit $x > 0$ et posons $f : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$, qui est continue (par morceaux) sur $\mathbf{R}^{+*}$.
Si $t > 0$ est fixé, pour n assez grand, i.e $n > t$,

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} = e^{n\ln(1-\frac{t}{n})}t^{x-1} \underset{n\to\infty}{=} e^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}t^{x-1} \underset{n\to\infty}{=} e^{-t+o(1)}t^{x-1}$$

Il résulte de la continuité de l'exponentielle que $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f$.

D'après la question qui précède, pour tous $n \geq 1$ et $t > 0$, $0 \leq f_n(t) \leq f(t)$. Or, d'après l'étude réalisée sur Γ, on sait que f est intégrable sur $\mathbf{R}^{+*}$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

Il faut alors remarquer que, à n fixé, comme f_n est nulle sur $[n, +\infty[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{n} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut donc écrire que pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

La question suivante requiert un peu de précision et de prudence. Déjà, il faut penser à faire une étude en 0 à droite pour montrer la bonne définition des intégrales. Ensuite, et vous pouvez repérer ceci au brouillon, il nous faudra prendre un peu de précaution lorsqu'on fera notre intégration par parties. En effet, comme on intègre sur $]0, 1]$, il peut être judicieux d'intégrer sur $[\varepsilon, 1]$ avant de faire tendre ε vers 0. Le problème, s'il y en a un, se situe au deuxième terme qui résulte du crochet, la question se posant étant : ce terme admet-il une limite finie lorsque $\varepsilon \to 0$? On verra que oui.

---

(4) a. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x > 0$.
La fonction $h : u \mapsto (1 - u)^n u^{x-1}$ est définie, positive et continue sur $]0, 1]$.
Étude en 0 : $h(u) \underset{u\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{u^{1-x}}$. Or $1 - x < 1$ donc $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1-x}}$ est une fonction intégrable sur $]0, 1]$ par critère de Riemann.
Par comparaison de fonctions positives, h est intégrable sur $]0, 1]$ si bien que l'intégrale $\boxed{I_n(x) \text{ est bien définie}}$.

On suppose désormais que n est non nul. On se donne $0 < \varepsilon < 1$

Les fonctions $u \mapsto (1-u)^n$ et $u \mapsto \dfrac{u^x}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ ce qui nous permet de faire l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\varepsilon^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u & = & \displaystyle\left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 (-n(1-u)^{n-1})\frac{u^x}{x}\,\mathrm{d}u \\ & = & \displaystyle 0-(1-\varepsilon)^n\frac{\varepsilon^x}{x} + \frac{n}{x}\int_\varepsilon^1 (1-u)^{n-1}u^{x+1-1}\,\mathrm{d}u \\ & = & \displaystyle -(1-\varepsilon)^n\frac{\varepsilon^x}{x} + \frac{n}{x}I_{n-1}(x+1) \\ & \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} & \displaystyle \frac{n}{x}I_{n-1}(x+1) \end{array}$$

On en retire finalement que $\boxed{I_n(x) = \dfrac{n}{x}I_{n-1}(x+1).}$

La récurrence peut paraître simple, mais quoi qu'il en soit il faut la rédiger. Dans un concours comme celui-ci, le correcteur n'acceptera jamais de "par récurrence immédiate", d'autant plus celle-ci n'est pas longue à rédiger, alors mieux vaut assurer vos points !

---

b. Soit $x > 0$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n(x) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.

Pour $n = 0$,

$$I_0(x) = \int_0^1 (1-u)^0 u^{x-1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x}$$

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbf{N}$ quelconque. D'après ce qui précède, et par hypothèse de récurrence (qu'on utilise en $(*)$),

$$I_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}I_n(x+1) \overset{(*)}{=} \frac{n+1}{x}\cdot\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k+1)} = \frac{(n+1)!}{x\cdot\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1}(x+k)}$$

On a ainsi montré que $\boxed{\text{pour tous } n \in \mathbf{N},\ x>0,\ I_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.}$

La seule chose à faire ici est de bien justifier le changement de variable. Ça ne coûte pas grand chose et ça vous assure la précision de votre rédaction.

---

c. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{n}$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,n]$ dans $]0,1]$.

Le changement de variable $u = \dfrac{t}{n}$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{n}$, est donc licite et on obtient :

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \overset{t=nu}{=} \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n\,\mathrm{d}u = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u = n^x I_n(x)$$

D'après III.3.b), le terme de gauche tend vers $\Gamma(x)$ lorsque $n \to \infty$. Finalement :

$$\lim_{n\to\infty} n^x I_n(x) \overset{\text{III.4.b)}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x)$$

Il est préférable de montrer l'indication. Puisqu'il s'agit de le "remarquer", ce n'est a priori qu'un simple jeu d'écritures. Le reste n'est que du calcul, il faut (et il suffit !) d'y aller lentement, en utilisant bien tout ce qu'il y a à notre disposition. La formule que l'on obtient est dite de Weierstrass.

---

(5) Soient $n \geq 1$ et $x > 0$.

$$\exp(xH_n) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{x}{k} - x\ln(n)\right) = n^{-x} \prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{x}{k}\right)$$

Il en résulte l'indication fournie :

$$n^{-x} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k}\right]$$

D'après la formule obtenue à la question précédente, on a que

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod\limits_{k=0}^n (x+k)}{n^x n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n^x} \cdot \frac{\prod\limits_{k=1}^n (x+k)}{\prod\limits_{k=1}^n k} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{x}{k}\right)$$

L'indication tout juste établie nous donne alors l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} x \cdot e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k}\right]$$

Or on a montré dans la partie préliminaire que $H_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$ donc par continuité de l'exponentielle, on a finalement :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k}\right]$$

(6) a. Pour tout $k \geq 1$, on pose $g_k : x \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}$ définie sur $\mathbf{R}^{+*}$.

Commençons par réécrire le résultat précédent :

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\Gamma(x)xe^{\gamma x}}$$

Par continuité de $x \mapsto \ln(x)$,

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right] = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{1}{\Gamma(x)xe^{\gamma x}}\right) = -\ln\left(\Gamma(x)xe^{\gamma x}\right)$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\ln\left(\Gamma(x)xe^{\gamma x}\right)$$

En particulier, on a ainsi montré $\boxed{\text{la convergence simple de la série } \sum_{k\geq 1} g_k \text{ sur } \mathbf{R}^{+*}.}$

Il n'y a pas grand chose de particulier à faire, si ce n'est suivre les hypothèses du théorème à appliquer. Gardons à l'esprit qu'une majoration est toujours plus pratique à faire sur un segment.

---

b. • Pour tout $k \geq 1$, g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^{+*}$.

• Pour tous $k \geq 1$, $x > 0$, $g_k'(x) = \dfrac{1}{k\left(1+\frac{x}{k}\right)} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k+x} - \dfrac{1}{k} = -\dfrac{x}{k(k+x)}$

• Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}^{+*}$, $x \in [a, b]$ et $k \geq 1$.

$|g_k'(x)| = \dfrac{x}{n(n+x)} \leq \dfrac{x}{n^2} \leq \dfrac{b}{n^2}$. Or $\sum_{k\geq 1} \frac{b}{k^2}$ est une série de Riemann convergente donc par majoration, la série $\sum_{k\geq 1} g_k$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, b]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}^{+*}}$ et l'on obtient sa dérivée en dérivant terme à terme :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k}\right)$$

c. On a montré en a) que pour tout $x > 0$,

$$g(x) = -\ln\left(\Gamma(x)xe^{\gamma x}\right) = -\ln\left(\Gamma(x)\right) - \ln(x) - \gamma x$$

En dérivant cette relation, on trouve que pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{x} - \gamma = -\psi(x) - \frac{1}{x} - \gamma$$

Or d'après la question précédente, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} \right) = -\psi(x) - \frac{1}{x} - \gamma$$

ce qui donne finalement pour tout $x \in \mathbf{R}^{+*}$:

$$\psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

(7) a. Dans la formule précédente, par somme télescopique :

$$\psi(1) = -\frac{1}{1} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = -1 - \gamma + 1 = -\gamma$$

On sait aussi que $\psi(1) = \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$. On voit que l'intégrale qui nous intéresse correspond à $\Gamma'(1)$, donc calculons d'abord $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t = \left[-e^{-t} \right]_0^{\infty} = 1$$

On a donc finalement

$$\psi(1) = \Gamma'(1) \overset{\text{III.1.c)}}{=} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} \ln(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) \, \mathrm{d}t = -\gamma$$

Pour cette question, le calcul brut fonctionne mais une approche plus subtile peut être envisagée. Il s'agirait d'écrire $\psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \dfrac{d}{dx}\left(\ln \left(\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} \right) \right)$ *en utilisant le fait, à redémontrer dans ce cas, que* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *pour tout* $x > 0$.

---

b. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\psi(x+1) - \psi(x) &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x} \right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\psi(k+1) - \psi(k) = \dfrac{1}{k}$. En sommant cette relation pour k allant de 1 à $n-1$, pour $n \geq 2$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\psi(k+1) - \psi(k)] = \psi(n) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Ainsi quelque soit $n \geq 2$,

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

c. Soient $k \in \mathbf{N}$, $x, y > 0$,

$$|j_k(y)| = \left| \frac{x-1}{(k+y+1)(k+y+x)} \right| \leq \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$$

Cette majoration valant pour tout $y > 0$, on en déduit que j_k est bornée sur $\mathbf{R}^{+*}$ et

$$||\, j_k \,||_\infty \leq \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)} \underset{k \to \infty}{\sim} \frac{|x-1|}{k^2}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{k \geq 0} \dfrac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$ est convergente et donc par majoration, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k \geq 0} j_k \text{ converge normalement et donc uniformément sur } \mathbf{R}^{+*}.}$

Maintenant si $n \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\psi(x+n) - \psi(1+n) = \quad & -\frac{1}{x+n} + \frac{1}{1+n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+n} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1+n} \right) \\
= \quad & \frac{1}{1+n} - \frac{1}{x+n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+n} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1+n} \right) \\
= \quad & \frac{1}{1+n} - \frac{1}{x+n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1+n} - \frac{1}{k+x+n} \right) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1+n} - \frac{1}{k+x+n} \right) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{\infty} j_k(n)
\end{aligned}$$

À $k \in \mathbf{N}$ fixé, $j_k(n) = \dfrac{1}{k+n+1} - \dfrac{1}{k+n+x} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et comme il y a convergence uniforme sur $\mathbf{R}^{+*}$, on peut utiliser le théorème de la double limite :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \to \infty} j_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

On obtient que, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ \psi(x+n) - \psi(1+n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$.

Il est clair que l'on doit ici procéder par analyse-synthèse, la phase d'analyse étant cruciale. On peut aussi se douter, au vu des résultats précédents, que seule ψ répond au problème et l'enjeu est donc de montrer l'unicité de cette solution.
Je passe ici par les sommes partielles pour ne pas m'encombrer d'une notation de limite tout le long. La convergence de la série de gauche (qui autorise le passage à la limite) a déjà été justifiée plus tôt.

---

(8) **Analyse** : soit $f : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$ solution du problème.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, vérifions que f vérifie la même égalité (III.6.c) que ψ.
Utilisons d'abord le fait que pour tout $x > 0$, $f(x+1) - f(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) &= \sum_{k=1}^{n} \left[f(k+1) - f(k) - (f(k+x+1) - f(k+x)) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[f(k+1) - f(k) \right] + \sum_{k=1}^{n} \left[f(k+x) - f(k+x+1) \right] \\
&= f(n+1) - f(1) + f(1+x) - f(n+x+1)
\end{aligned}$$

Comme $f(1) = -\gamma$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (f(n+1) - f(n+x+1)) = 0$, et en utilisant le fait que $f(1+x) = f(x) + \dfrac{1}{x}$, en passant à la limite dans l'expression précédente, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) = \gamma + f(x) + \frac{1}{x} \text{ et donc } f(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \overset{\text{III.6.c)}}{=} \psi(x)$$

L'égalité étant valable pour tout $x > 0$, on a donc $f = \psi$.

Synthèse : d'après les questions III.7.a), b) et c), ψ est solution du problème.

$\boxed{\text{Finalement la seule et unique solution au problème est donc } \psi.}$

Autour de la fonction Digamma

Une petite application probabiliste pour terminer. Il n'est pas précisé dans l'énoncé que les boules sont indiscernables lorsqu'on effectue le tirage mais cela semble être une hypothèse raisonnable. Il peut être bon de le signaler au début, au cas où il s'agirait d'un oubli délibéré.

---

(9) a. On peut raisonnablement supposer que les boules sont indiscernables au moment d'effectuer le tirage. On a $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$.
Avec cette hypothèse, $\boxed{X \text{ suit la loi uniforme sur } \{1, ..., n\}}$ et l'on a donc pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
On en déduit par la même occasion son espérance :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$

Bien penser à exhiber le système complet d'événements qu'on utilise pour la formule des probabilités totales. Bien penser aussi à lire l'énoncé, il va falloir utiliser le fait que si l'on tire le numéro k, on remet au total $k+1$ boules du même numéro dans l'urne. Enfin il faut préciser qu'il y a une légère erreur dans l'énoncé, il faut bien sûr vérifier l'égalité donnée pour $1 \leq k \leq n$ et non pas pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

---

b. Il est à nouveau clair que $Y(\Omega) = \{1, ..., n\}$. Soit donc $1 \leq k \leq n$.
On considère le système complet d'événements $((X = k))_{1 \leq k \leq n}$, si bien que par la formule des probabilités totales :

$$P(Y = k) = \sum_{i=1}^{n} P_{(X=i)}(Y = k) \cdot P(X = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_{(X=i)}(Y = k)$$

Pour calculer la somme de droite, il faut distinguer deux cas :

• Si $i = k$, c'est-à-dire si on tire une première fois le numéro k, on remet en tout $k+1$ boules portant le numéro k. On tire alors une boule parmi $n+k$ boules indiscernables, dont $k+1$ portant le numéro k.
• Si $i \neq k$, on remet en tout $i+1$ boules du numéro i dans l'urne. On tire alors une boule parmi $n+i$ boules indiscernables, dont une seule porte le numéro k.

On obtient donc :

$$P(Y = k) = \frac{1}{n} \left(P_{(X=k)}(Y = k) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} P_{(X=i)}(Y = k) \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{k+1}{n+k} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{n+i} \right)$$

Finalement,

$$P(Y=k) = \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n+k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}\right)$$

Par ailleurs,

$$\psi(2n+1) - \psi(n+1) \overset{\text{III.7.b)}}{=} -\gamma + \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - \left(-\gamma + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$$

On a donc bien vérifié que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$P(Y=k) = \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n+k} + \psi(2n+1) - \psi(n+1)\right)$$

Allez on tient le bon bout, un dernier calcul et on s'en va...

---

c. On part de la formule de l'espérance et on utilise l'indication fournie.

$$\begin{aligned}
E(Y) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = & \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n+k} + \psi(2n+1) - \psi(n+1)\right) \\
= & \frac{\psi(2n+1)-\psi(n+1)}{n} \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} \\
= & \frac{\psi(2n+1)-\psi(n+1)}{2}(n+1) + \frac{1-n}{2} + n\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\right) \\
= & \frac{1-n}{2} + \left(n + \frac{n+1}{2}\right)\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\right) \\
E(Y) = & \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2}\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\right)
\end{aligned}$$

On pourra toutefois remarquer que l'indication fournie n'était pas spécialement plus dure à montrer, à condition de repérer les bonnes astuces, mais c'est un gain de temps pour la fin du sujet.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k}{n+k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k-n}{n+k} & = \frac{n+1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{n}{n+k}\right) \\
& = \frac{n+1}{2} - n + n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
& \overset{\text{III.9.b)}}{=} \frac{1-n}{2} + n\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\right)
\end{aligned}$$

Pour finir, quelques conseils et remarques en ce qui concerne les concours. Vous le savez, c'est un marathon bien plus qu'un 100 mètres, tout donner la première semaine n'est pas la meilleure option. Tâchez autant que possible de garder un rythme sain.

Ne vous forcez pas à faire des révisions de dernière minute quand vous pouvez vous reposer, faites confiance à vos capacités et au travail que vous avez fourni pendant ces deux ou trois dernières années. Gardez à l'esprit que personne n'arrive vraiment prêt aux concours et que toutes et tous vivent la même pression que vous. Il n'y a pas de raison de croire que ça se passera mal. J'ajouterais que même lorsque vous pensez avoir raté une épreuve, votre impression n'est pas nécessairement proche de la réalité et vous pourriez bien avoir des notes surprenantes, gardez le moral jusqu'au bout.

Vous vivez une situation inédite qui prolonge considérablement une année déjà très intense. J'espère que vous pourrez passer les concours dans de bonnes conditions et que vous décrocherez ce qui vous correspond. Tenez bon et travaillez bien !