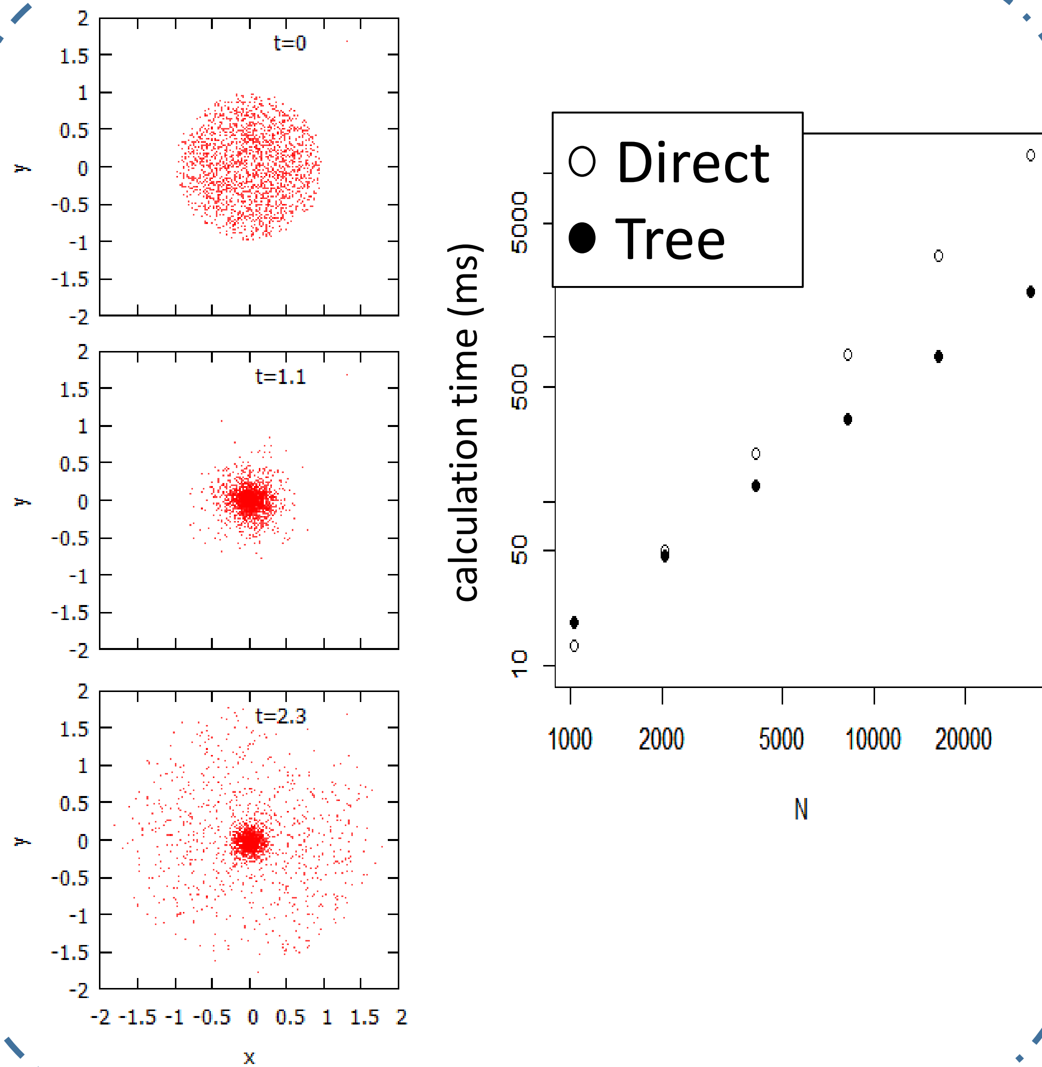
銀河形成シミュレーションに向けて

筑波大学 理工学群 物理学類4年 藤原隆寛

銀河形成シミュレーション

- N体重力計算
  - Tree法
- 流体計算
  - SPH法
- 放射冷却
- 星形成
- 超新星爆発



流体の基礎方程式(ラグランジュ形式)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} P$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$P = (\gamma - 1)\rho u$$

ρ: 密度
$\boldsymbol{v}$: 速度
P: 圧力
u: 単位質量当たりの内部エネルギー
γ: 比熱比

SPH法

Smoothed Particle Hydrodynamics

SPH法

- 粒子法的な流体計算法
- ラグランジュ的描像
- 宇宙物理学の分野で幅広く使用されている

今回参考にした論文等

- **Monaghan (1992)**
- Hernquist & Katz (1989)
- Springel (2010)

SPH法の長所と短所

- 長所
  - 高密度領域で高解像度
  - N体重力計算との組み合わせが容易
  - アルゴリズムが易しい
  - 多次元化が容易
- 短所
  - 低密度領域で低解像度
  - 不連続面が適切に扱えない
  - 計算が破綻しにくいので間違っていても気づきにくい

定式化

- ある位置$\boldsymbol{r}$における物理量$F_s(\boldsymbol{r})$を, カーネル関数$W(\boldsymbol{r}, h)$を用いて, 次のように表す.

$$F_s(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}'\, F(\boldsymbol{r}')W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', h)$$

- 離散化 $\Delta\boldsymbol{r}_i \sim m_i/\rho_i$

$$F_s(\boldsymbol{r}) \cong \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} F_i W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i, h), \qquad F_i = F(\boldsymbol{r}_i)$$

- 密度

$$\rho_s(\boldsymbol{r}) \cong \sum_i m_i W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i, h)$$

微分

$$\boldsymbol{\nabla} F_s(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}' \{\boldsymbol{\nabla}' F(\boldsymbol{r}')\} W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', h)$$

$|\boldsymbol{r}| \to \infty$で$W(\boldsymbol{r}, h) \to 0$

$$= -\int d\boldsymbol{r}' F(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{\nabla}' W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', h)$$

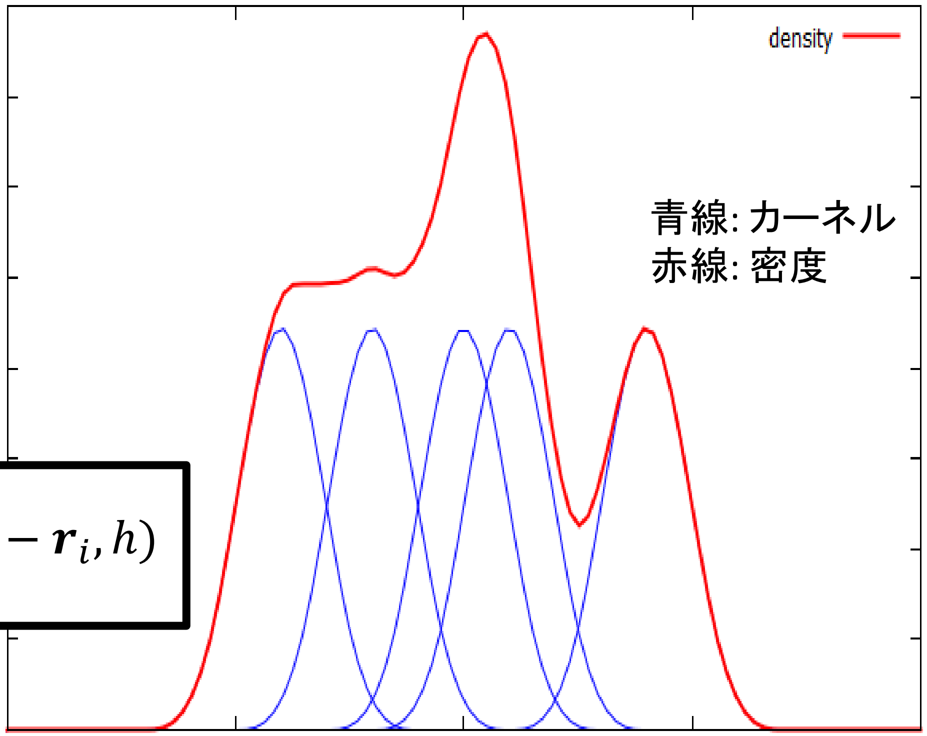
$$= \int d\boldsymbol{r}' F(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', h)$$

=> $\boldsymbol{\nabla} F_s(\boldsymbol{r}) \cong \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} F_i \boldsymbol{\nabla} W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i, h)$

カーネル関数$W(\boldsymbol{r}, h)$

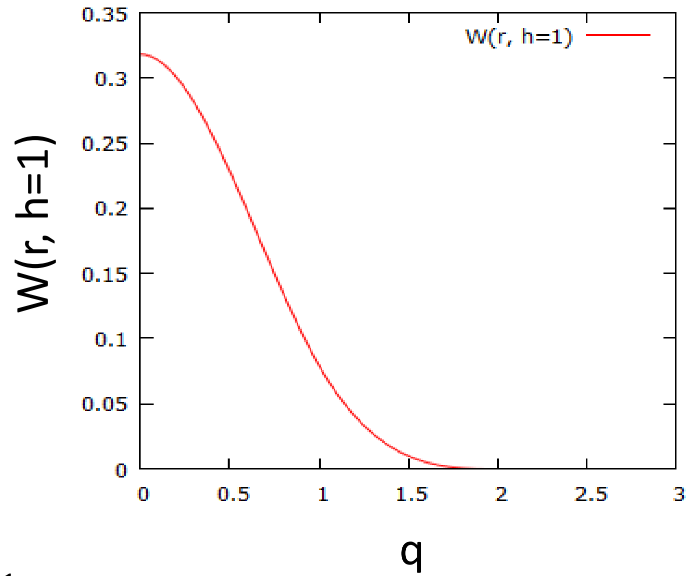
- 個々のSPH粒子の広がりを表す
- h: smoothing length. カーネル関数の広がりを表すパラメータ
- $h \to 0$で$W(\boldsymbol{r}, h) \to \delta^3(\boldsymbol{r})$
- $|\boldsymbol{r}| \to \infty$で$W(\boldsymbol{r}, h) \to 0$
- $\int d\boldsymbol{r}\, W(\boldsymbol{r}, h) = 1$

$$\boxed{\rho_s(\boldsymbol{r}) \cong \sum_i m_i W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i, h)}$$



カーネル関数$W(\boldsymbol{r}, h)$

- 球対称 ($W(\boldsymbol{r}, h) = W(|\boldsymbol{r}|, h)$)
- Gauss関数やSpline関数を使用



- *cubic spline (3D)*

$$W(\boldsymbol{r}, h) = \frac{3}{2\pi h^3}\begin{cases} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3 & (0 \le q < 1) \\ \frac{1}{6}(2-q)^3 & (1 \le q < 2) \\ 0 & (q \ge 2) \end{cases}$$

$$q = \frac{|\boldsymbol{r}|}{h}$$

流体の基礎方程式(ラグランジュ形式)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i m_i W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i, h)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} P \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{P}{\rho}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \\ P &= (\gamma - 1)\rho u \end{aligned}}$$

ρ: 密度
$\boldsymbol{v}$: 速度
P: 圧力
u: 単位質量当たりの内部エネルギー
γ: 比熱比

- 運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P = -\left(\frac{P}{\rho^2}\boldsymbol{\nabla}\rho + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right)\right)$$

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left\{\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2}\right\} \boldsymbol{\nabla}_i W(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, h)}$$

対称性. 作用反作用

- エネルギー方程式

$$\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = -\frac{P}{\rho^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) + \frac{P}{\rho^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho$$

$$\boxed{\frac{du_i}{dt} = \frac{P_i}{\rho_i^2}\sum_j m_j(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)\cdot\boldsymbol{\nabla}_i W(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, h)}$$

人工粘性(Artificial Viscosity)

- 衝撃波を扱うために必要な散逸を記述
- 粒子の突き抜けを防ぐ

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\right|_{visc} = -\sum_j m_j \Pi_{ij} \boldsymbol{\nabla}_i W(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, h)$$

$$\left.\frac{du_i}{dt}\right|_{visc} = \frac{1}{2}\sum_j m_j \Pi_{ij} (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot \boldsymbol{\nabla}_i W(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, h)$$

これらの項を
方程式に追加

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} (-\alpha c_{ij}\mu_{ij} + \beta\mu_{ij}^2)/\rho_{ij}, & (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)\cdot(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) < 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu_{ij} = \frac{h(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)\cdot(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 + \epsilon h^2}$$

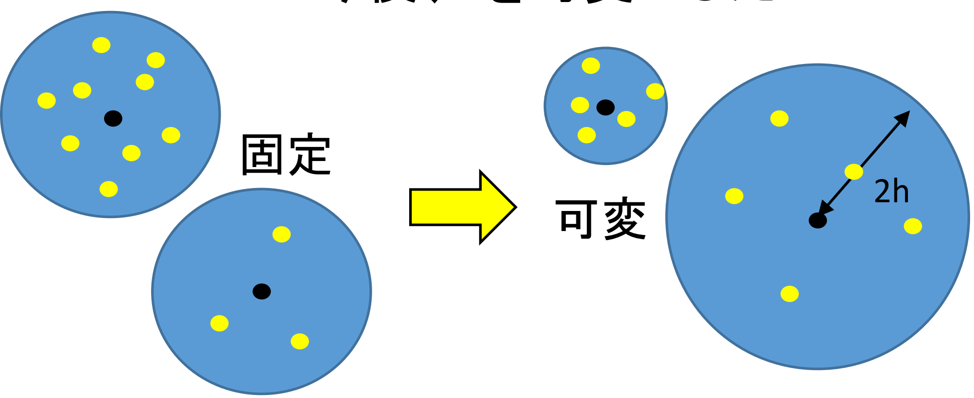
c_{ij}, ρ_{ij}: 音速, 密度の平均値
α, β, ϵ: パラメータ
$\alpha = 1.0, \quad \beta = 2\alpha,$
$\epsilon = 0.01$

その他

- Smoothing length: h
  - 今回は時間的・空間的に固定のhを使用

  ⇒ 高密度領域で近傍粒子数大, 低密度領域で近傍粒子数小となってしまう.

  ⇒ 今後、hを可変にしたい



- 時間ステップ
  - 波によって情報が伝わるため, 粒子が近傍粒子からの情報を受けとる時間より, 短い時間ステップΔtにする必要がある (Courant条件)

$$\Delta t = \min\{C_{CFL} \frac{h}{c_i}\},$$

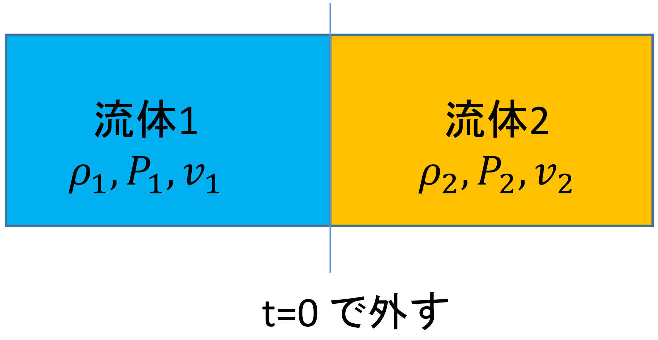
c_i: 音速

$$C_{CFL} = 0.3$$

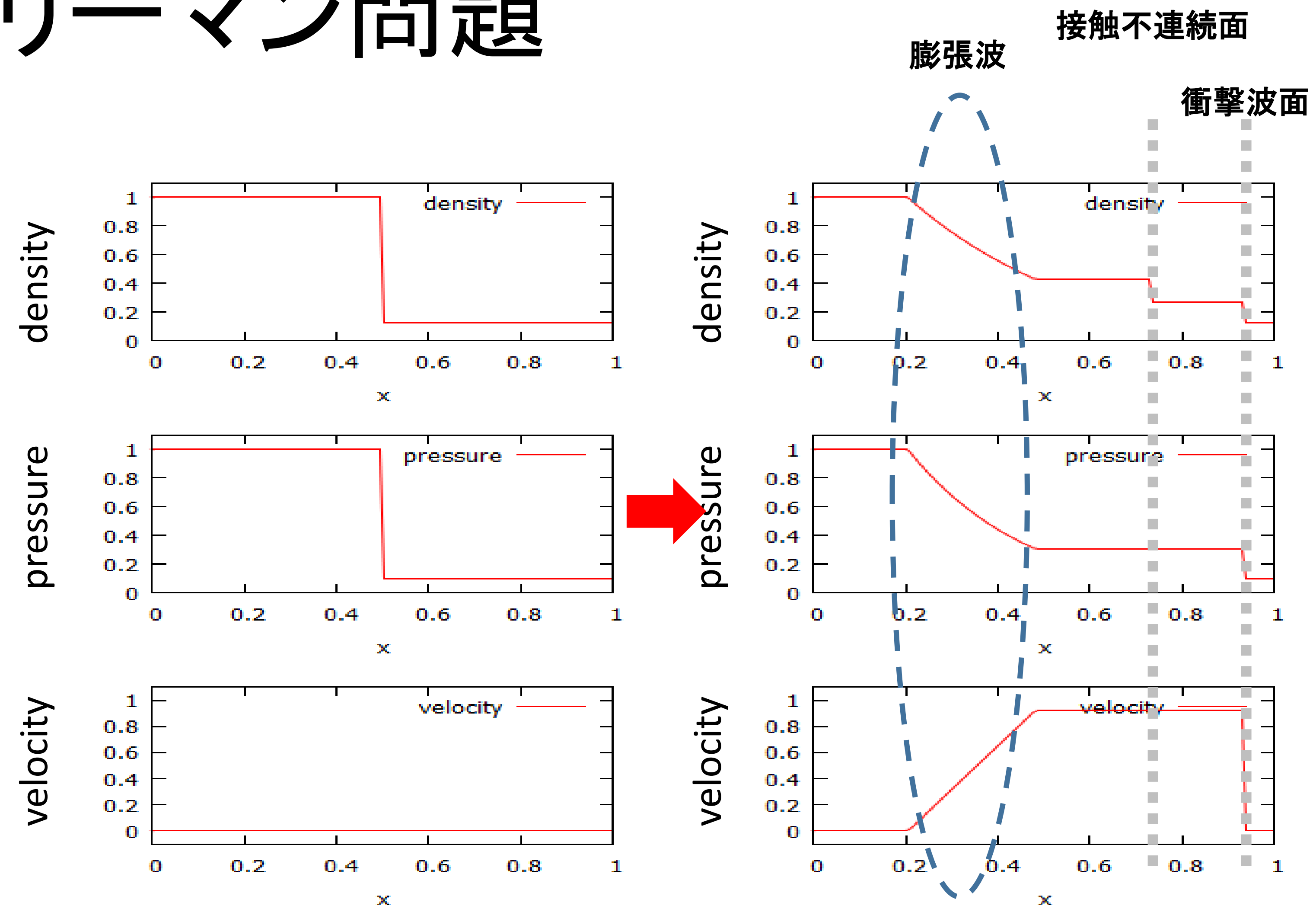
- 時間積分
  - 2次のRunge-Kutta法を使用

1D Test Problems

- リーマン問題
  - 異なる密度, 圧力, 速度を持つ流体1と流体2が薄膜で仕切られている.
  - t=0 でその仕切りを外したあとの, 流体の時間発展は厳密に求めることができる.



リーマン問題



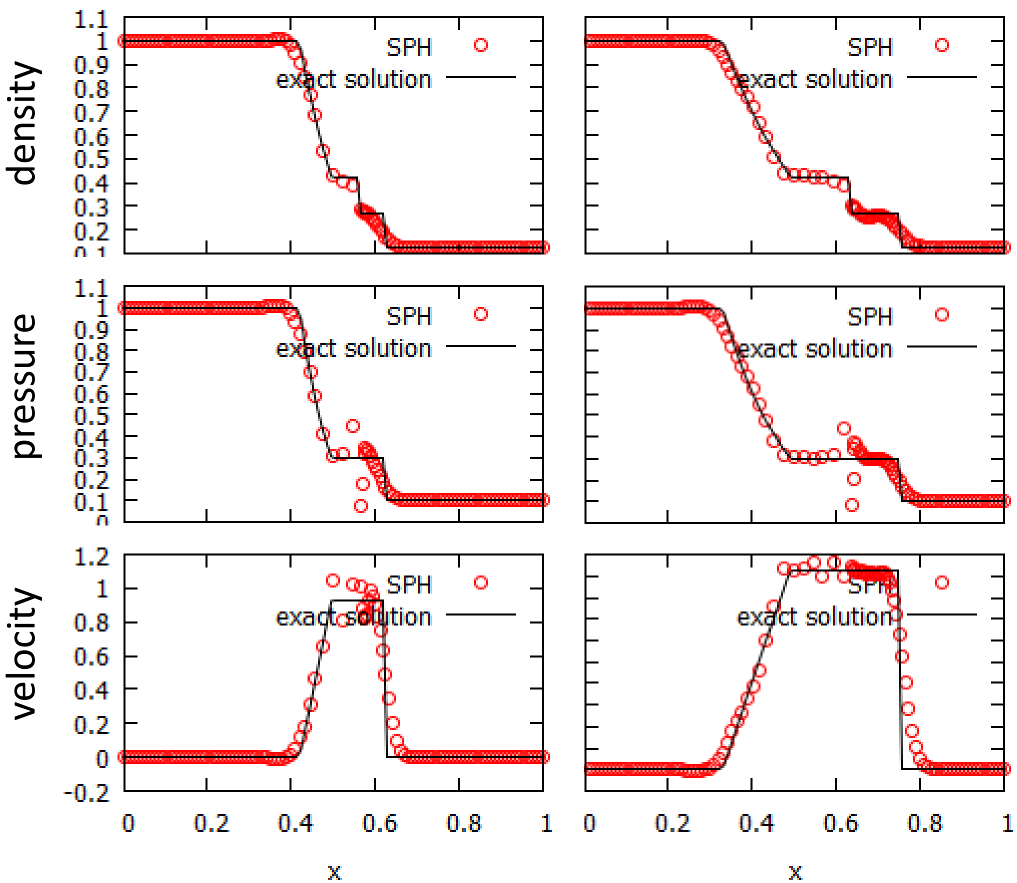
Problem 1 (弱い衝撃波)

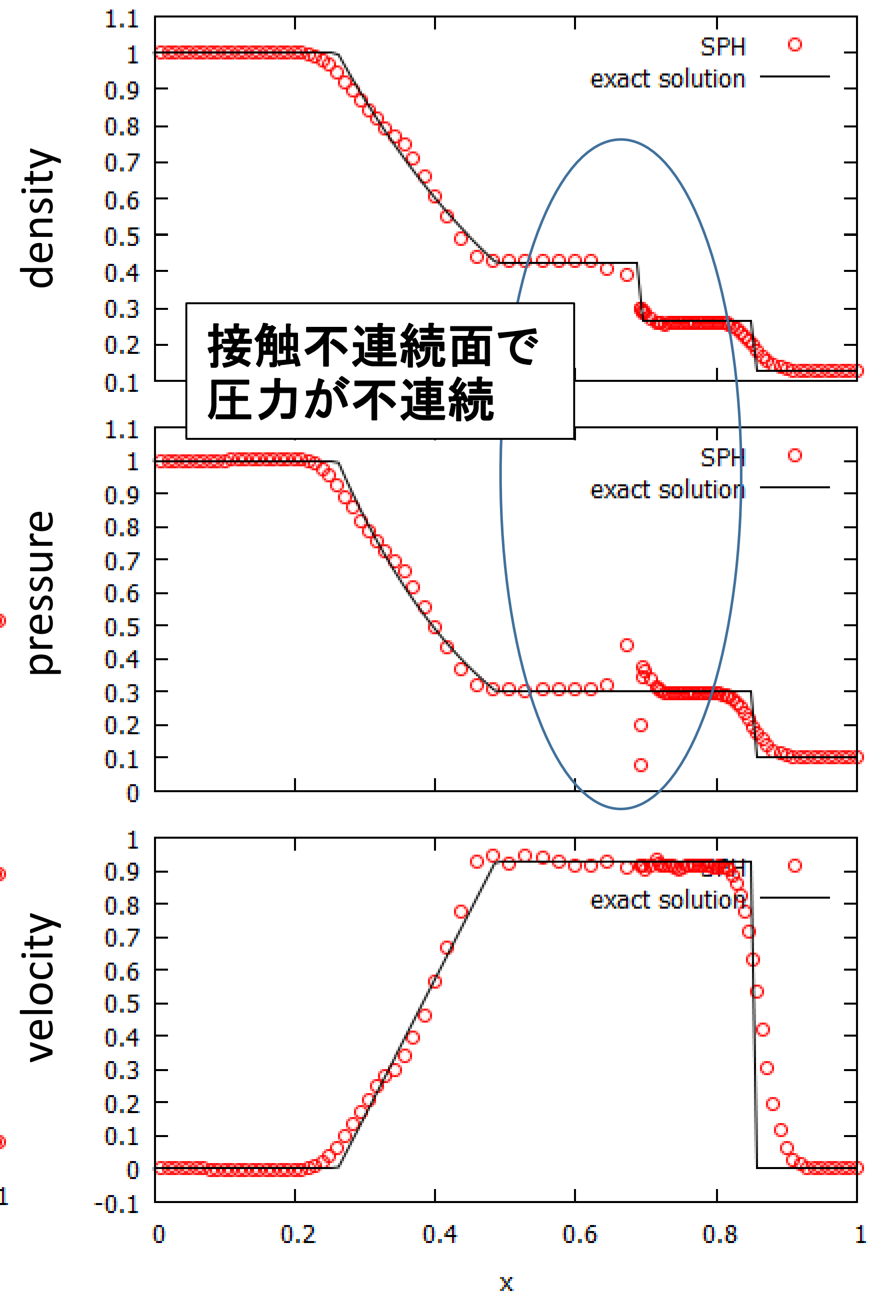
	LEFT	RIGHT
密度	1.0	0.125
圧力	1.0	0.1
速度	0.0	0.0

$\gamma = 1.4$

<u>左から</u>

<u>t = 0.068, 0.14, 0.20</u>



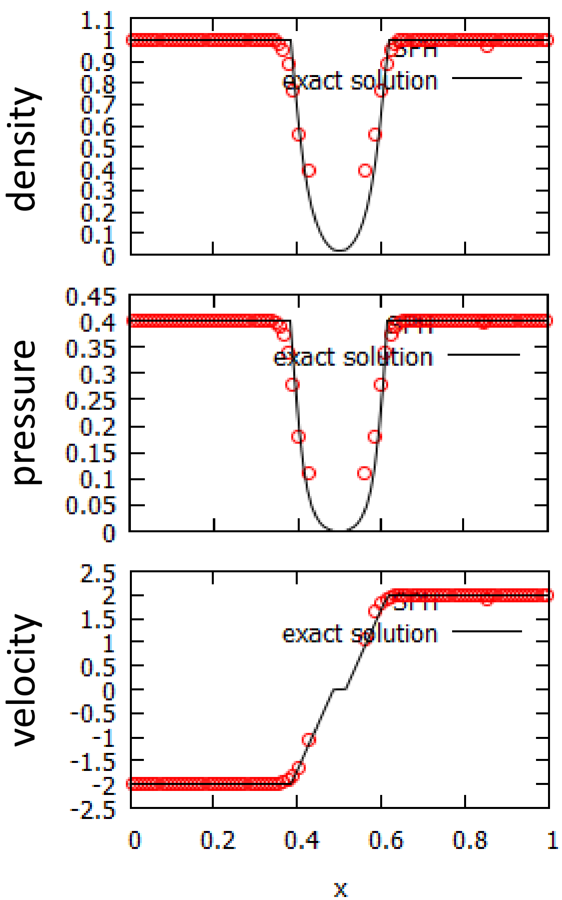


Problem 2 (流体を引き裂く)

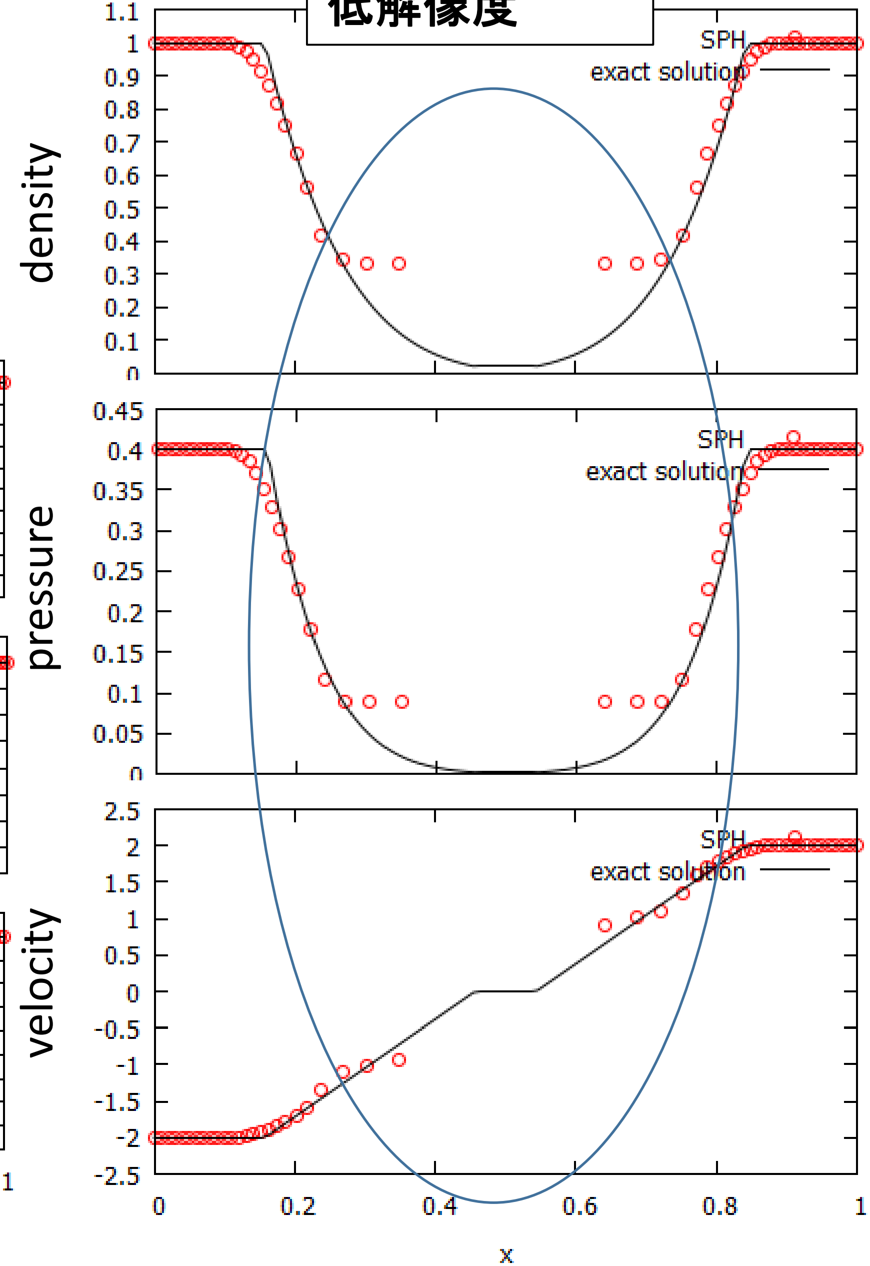
	LEFT	RIGHT
密度	1.0	1.0
圧力	0.4	0.4
速度	-2.0	2.0

$\gamma = 1.4$

左から
t = 0.041, 0.079, 0.12



低密度領域で
低解像度



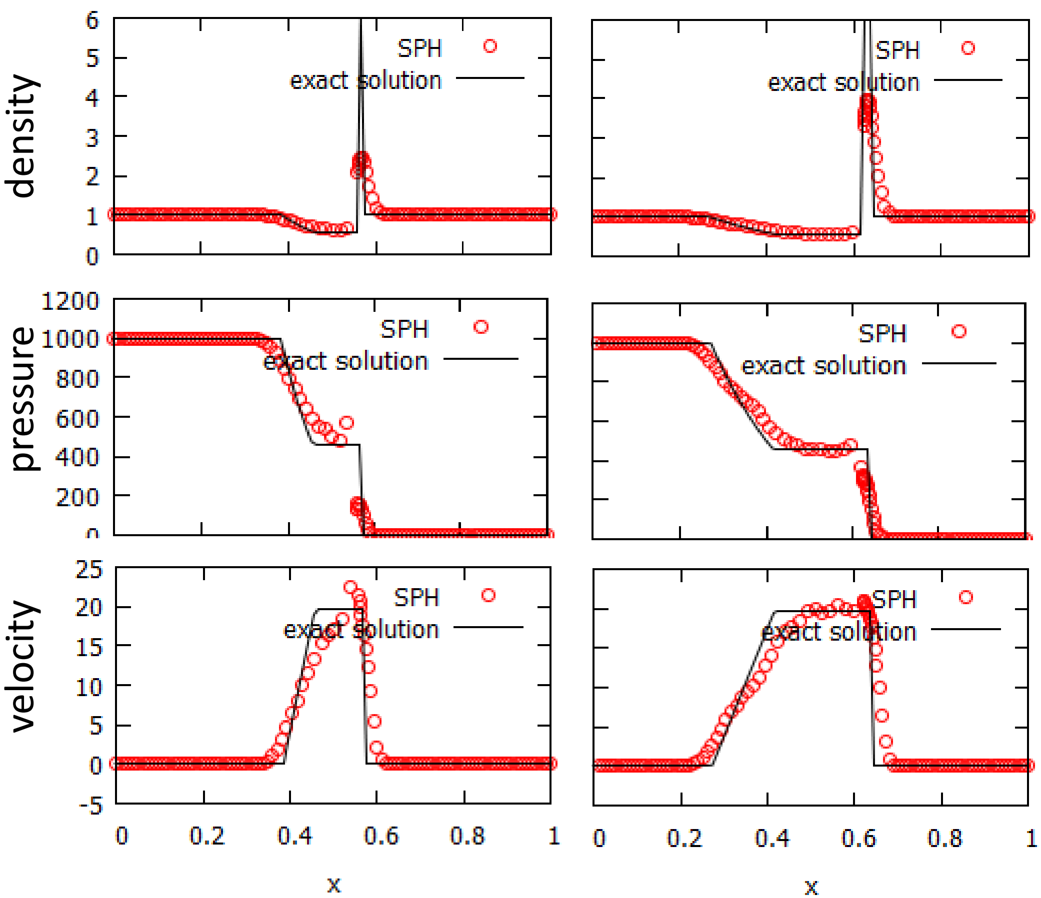
Problem 3 (強い衝撃波)

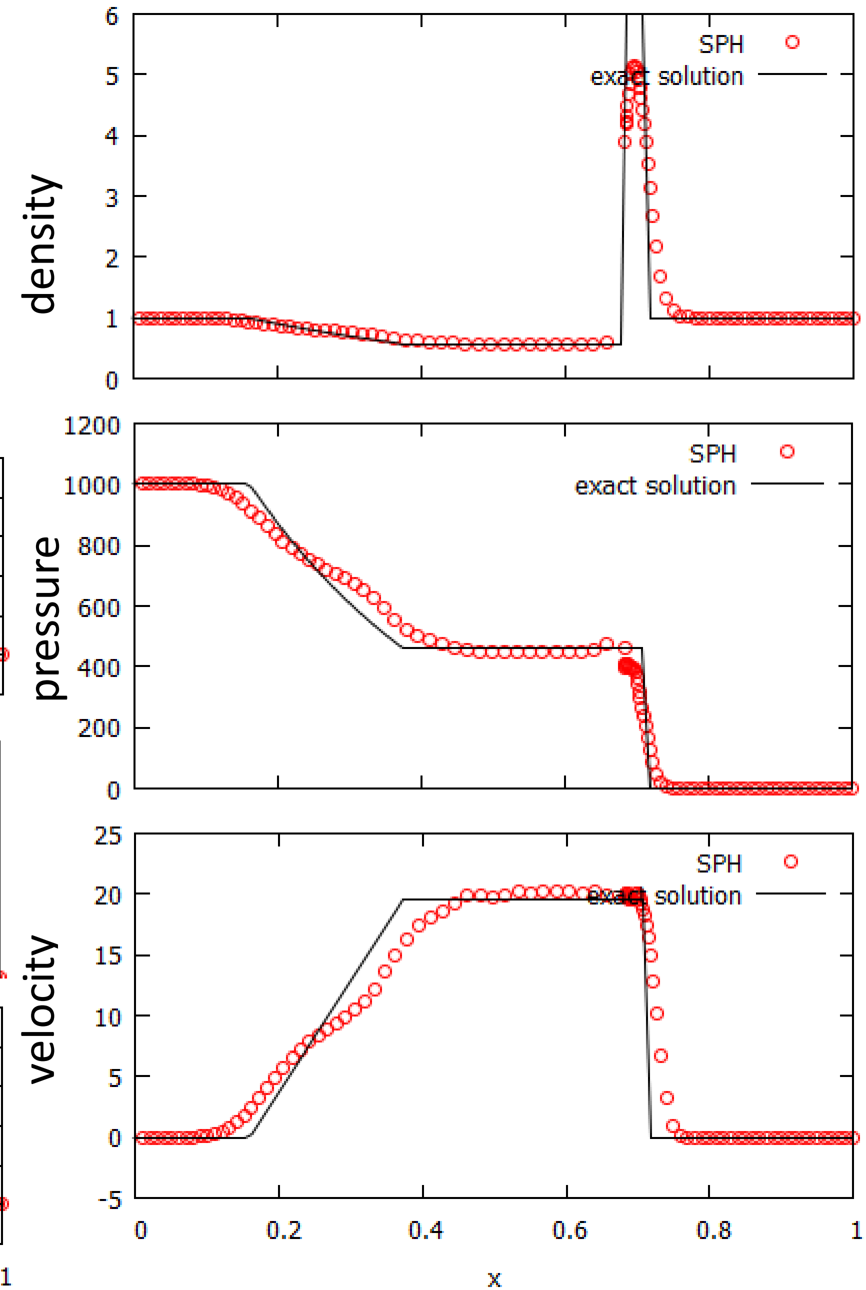
	LEFT	RIGHT
密度	1.0	1.0
圧力	1000	0.01
速度	0.0	0.0

$\gamma = 1.4$

左から

t = 0.0031, 0.0061, 0.0091

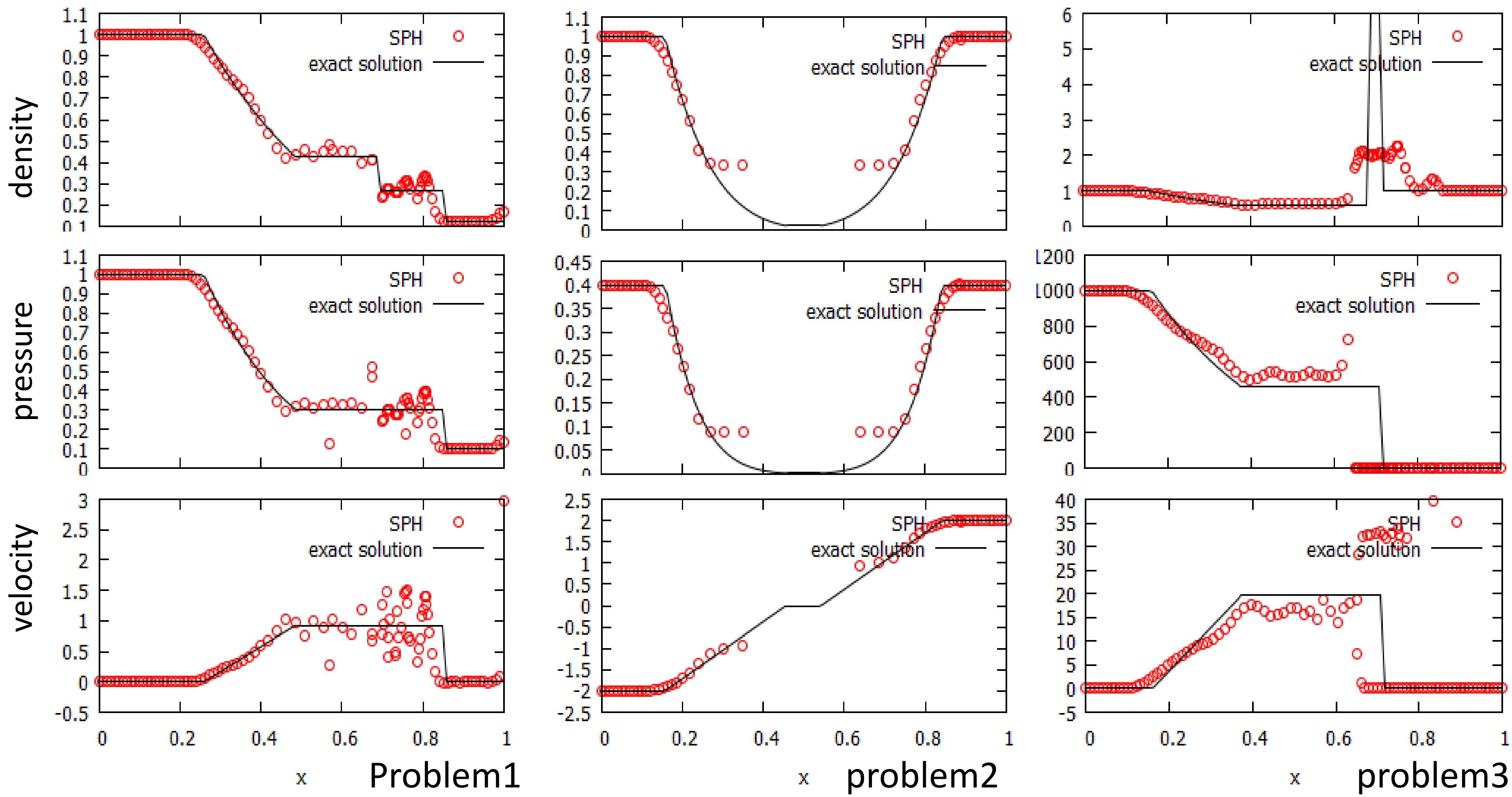




Test1: 人工粘性を外す

	Problem1 LEFT	Problem1 RIGHT	problem2 LEFT	problem2 RIGHT	problem3 LEFT	problem3 RIGHT
密度	1.0	0.125	1.0	1.0	1.0	1.0
圧力	1.0	0.1	0.4	0.4	1000	0.01
速度	0.0	0.0	-2.0	2.0	0.0	0.0

$$\gamma = 1.4$$



Test2: 粒子数で初期密度を変化

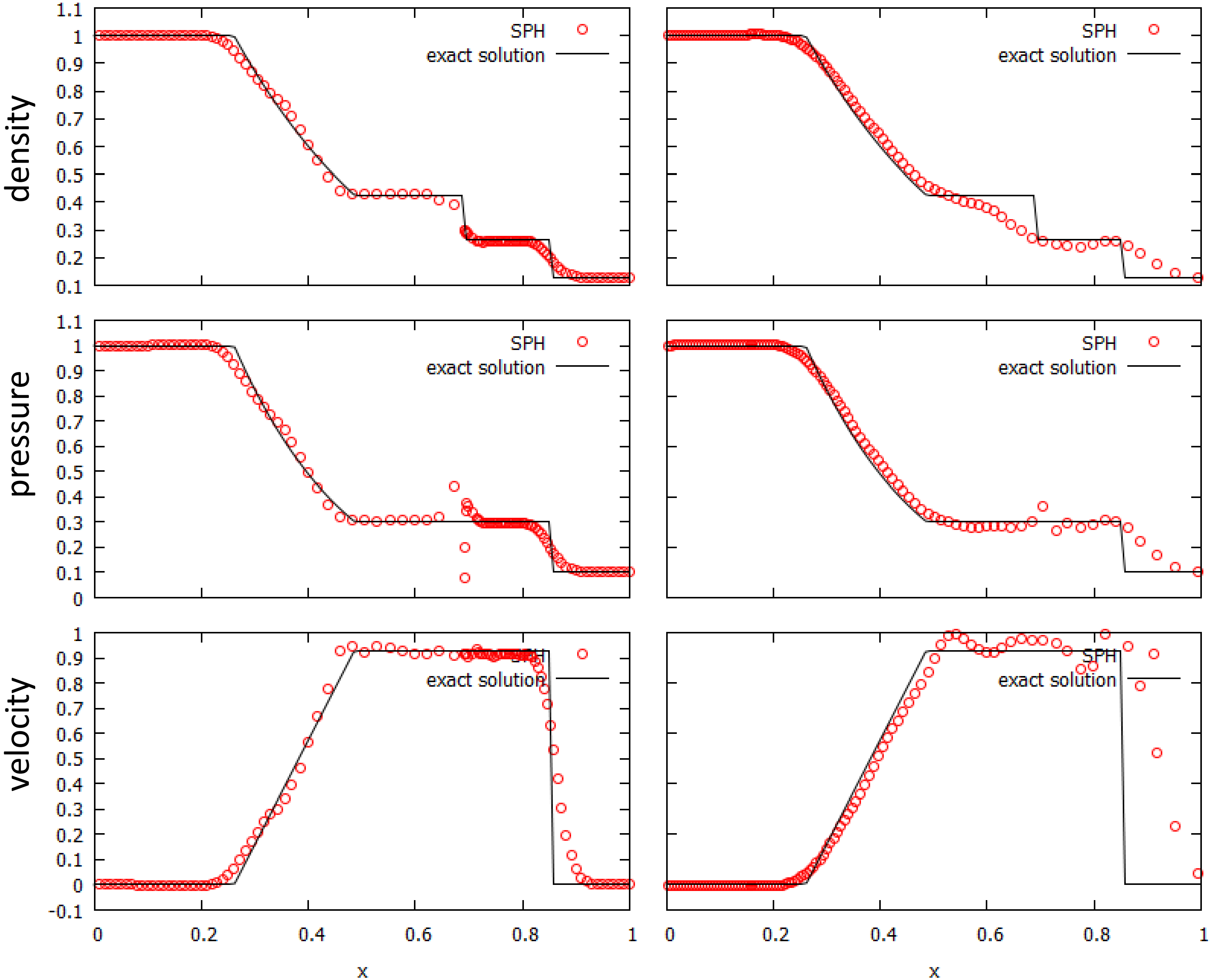
- Problem1(弱い衝撃波) はSPH粒子の持つ質量で密度を設定していた

⇒それぞれのSPH粒子の持つ質量を一定にし, 粒子間隔を変えて密度を設定

⇒LEFTの粒子間隔をRIGHTの1/8

	LEFT	RIGHT
密度	1.0	0.125
圧力	1.0	0.1
速度	0.0	0.0

$\gamma = 1.4$



3D Test Problem

- Evrard collapse

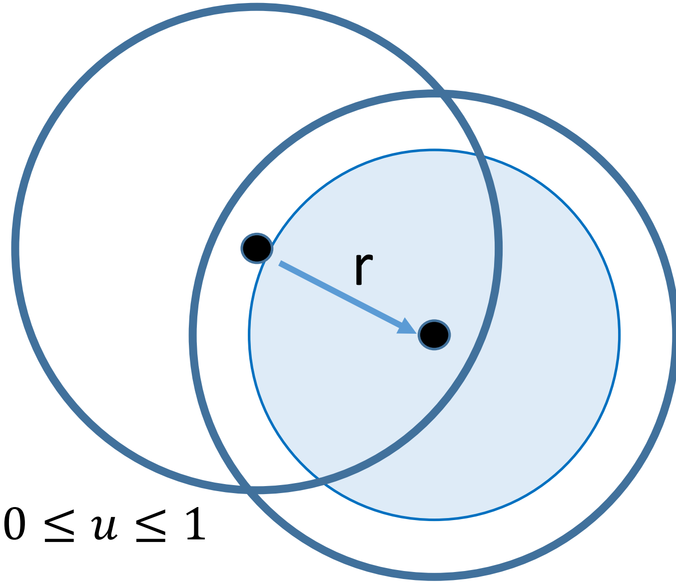
$$\rho = \frac{M_T}{2\pi R^2}\frac{1}{r}, \qquad u = \frac{0.05 G M_T}{R}, \qquad \gamma = \frac{5}{3}$$

$$N = 4096, \qquad \epsilon = 0.1$$

ρ: 密度
u: 単位質量当たり熱エネルギー
γ: 比熱比
N: 粒子数
M_T: 全質量
R: ガス球の半径
ϵ: ソフトニングパラメータ

$$\boxed{G = M_T = R = 1}$$

重力ソフトニング



- カーネル関数を用いてソフトニング

$$\boldsymbol{a}_{grav} = \begin{cases} -\dfrac{Gm\boldsymbol{r}}{\epsilon^3} \cdot 4\pi \displaystyle\int_0^r dr'\, r'^2 W(\boldsymbol{r}', h), & 0 \le u \le 1 \\ -\dfrac{Gm\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot 4\pi \displaystyle\int_0^r dr'\, r'^2 W(\boldsymbol{r}', h), & u > 1 \end{cases}$$

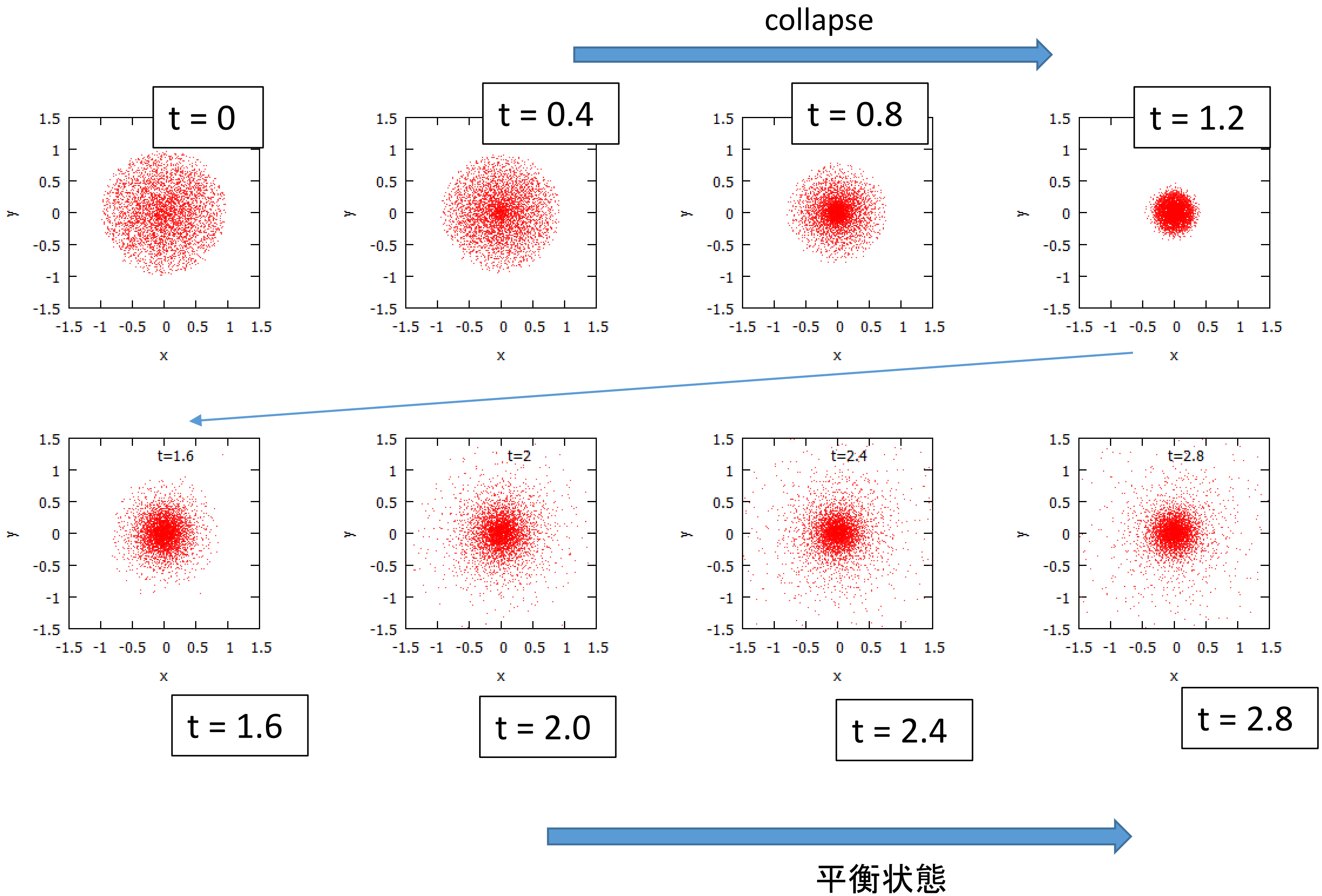
$$= \begin{cases} -\dfrac{Gm\boldsymbol{r}}{\epsilon^3}\left[\dfrac{4}{3} - \dfrac{6}{5}u^2 + \dfrac{1}{2}u^3\right], & 0 \le u \le 1 \\ -\dfrac{Gm\boldsymbol{r}}{r^3}\left[-\dfrac{1}{15} + \dfrac{8}{3}u^3 - 3u^4 + \dfrac{6}{5}u^5 - \dfrac{1}{6}u^6\right], & 1 < u \le 2 \\ -\dfrac{Gm\boldsymbol{r}}{r^3}, & u > 2 \end{cases}$$

Hernquist & Katz (1988)

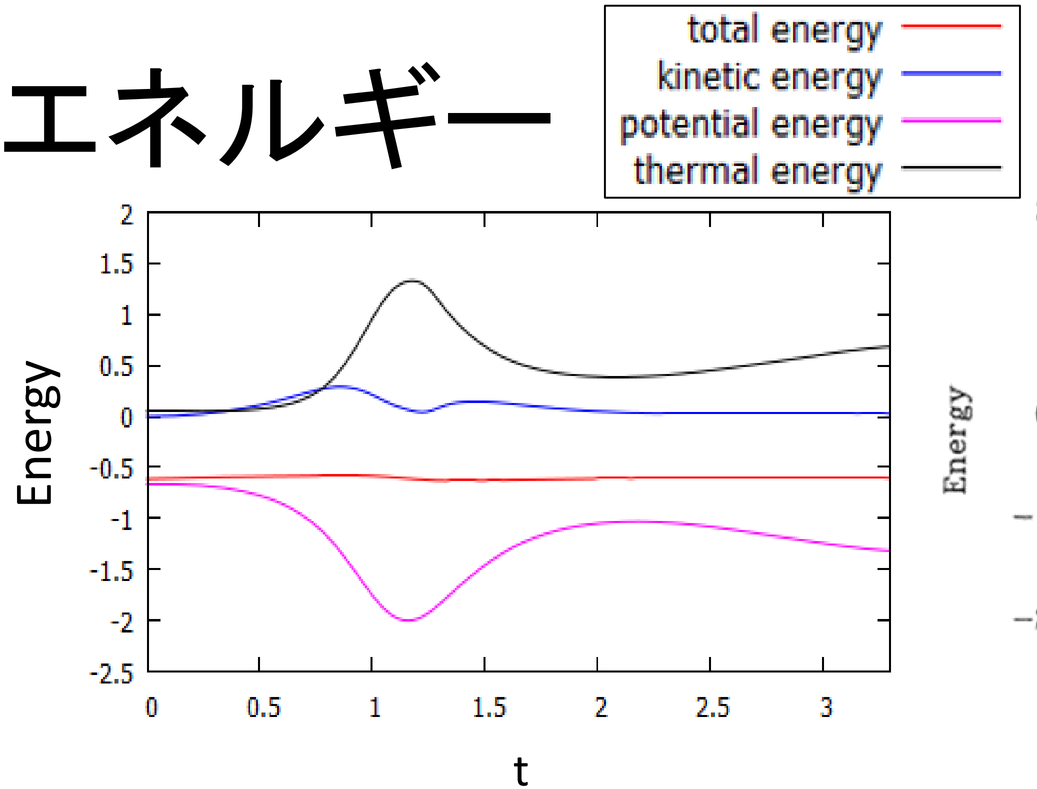
$$\boxed{u = r/\epsilon}$$

ポテンシャルも同様に

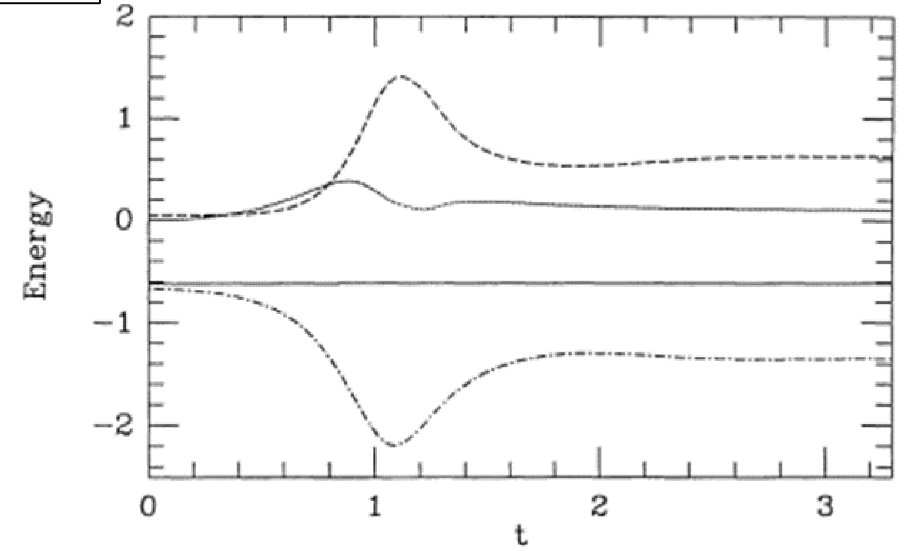
Evrard collapse

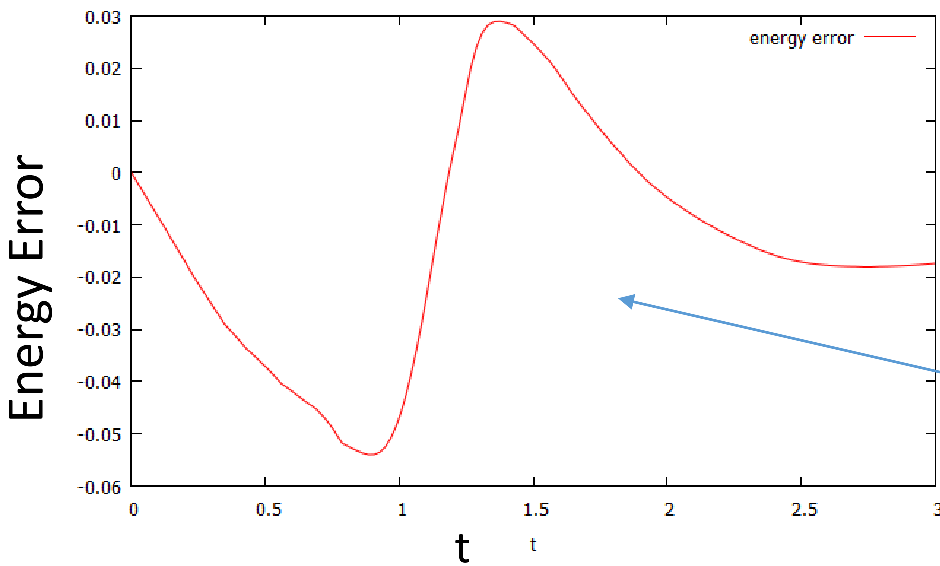


エネルギー



Hernquist & Katz (1988)



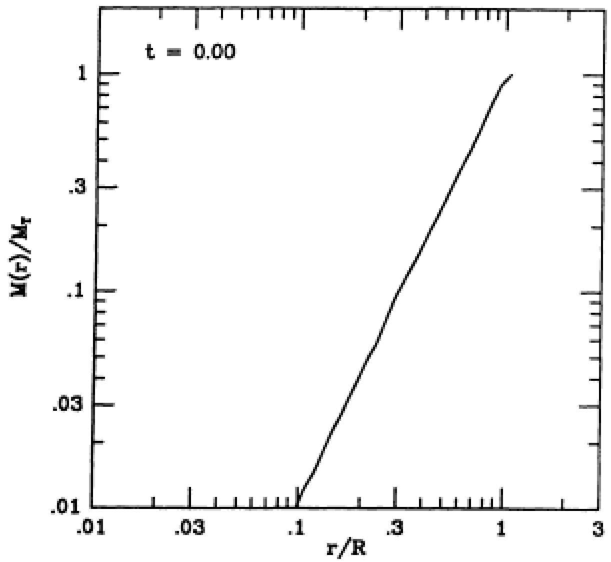


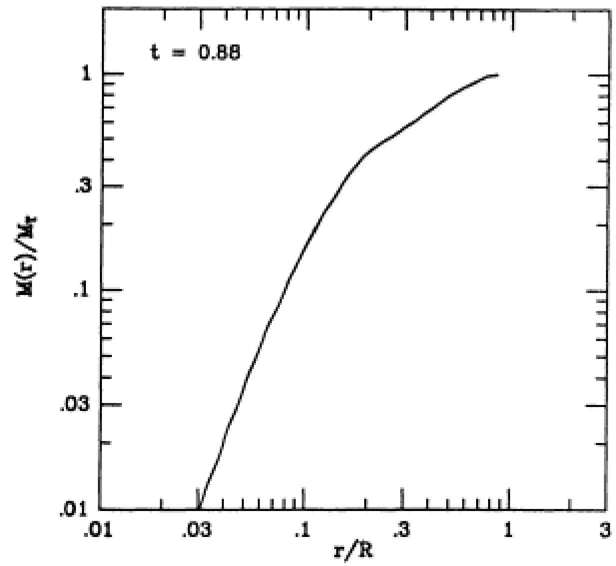
Collapseの前後で誤差が大きくなっている

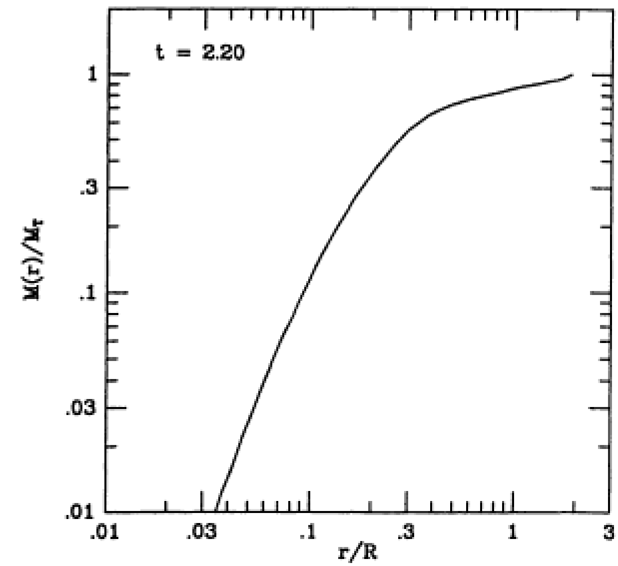
質量

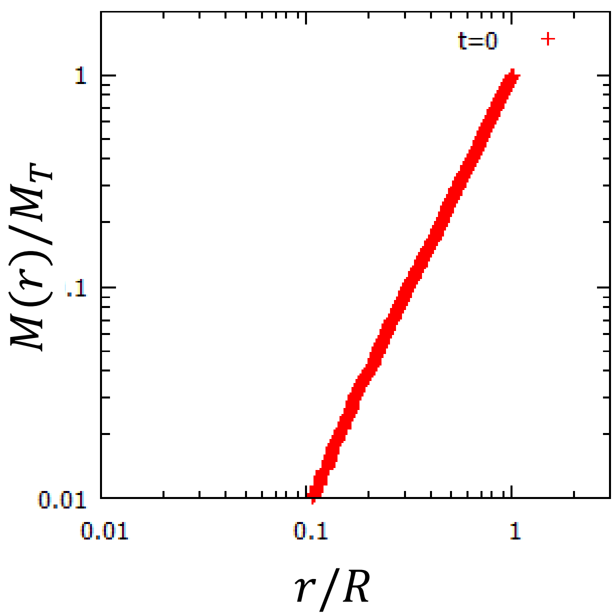
上段: Hernquist & Katz (1988)
下段: 自分

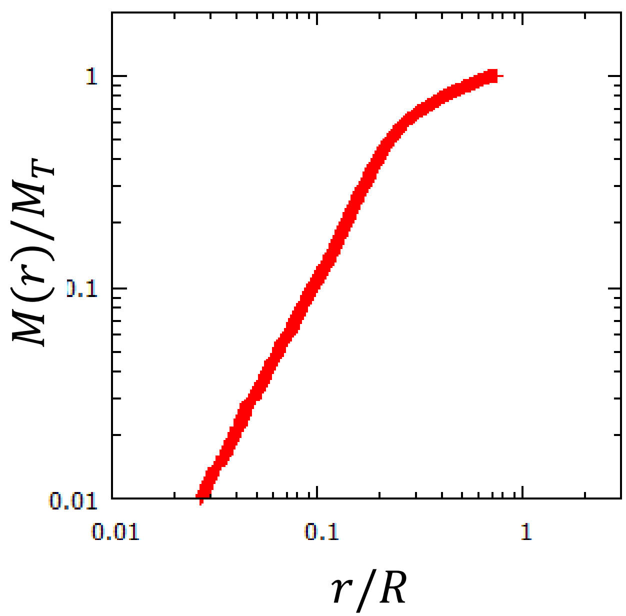
左から t=0, 0.88, 2.20.
ただし t は自由落下時間 $t_{ff} = (\pi^2/8)^{1/2}$ で割って規格化

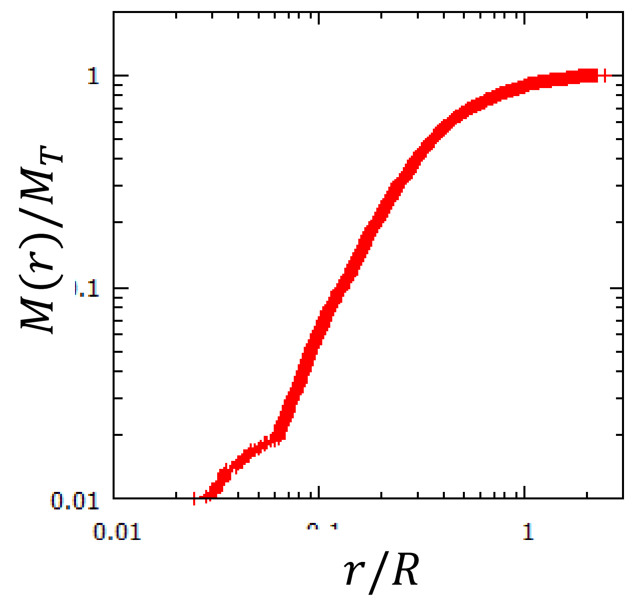








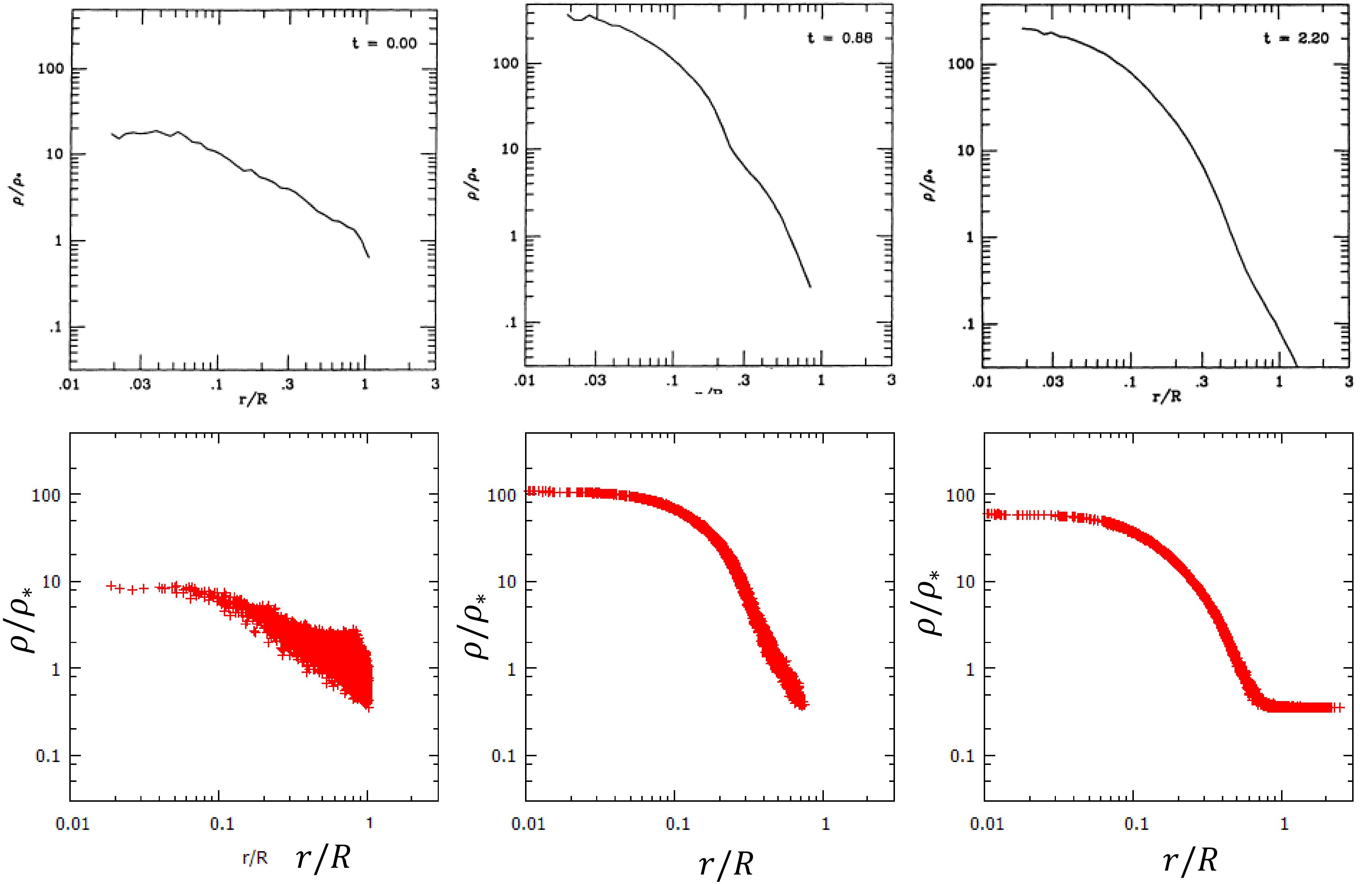




密度

$\rho_* = 3M_T/4\pi R^2$

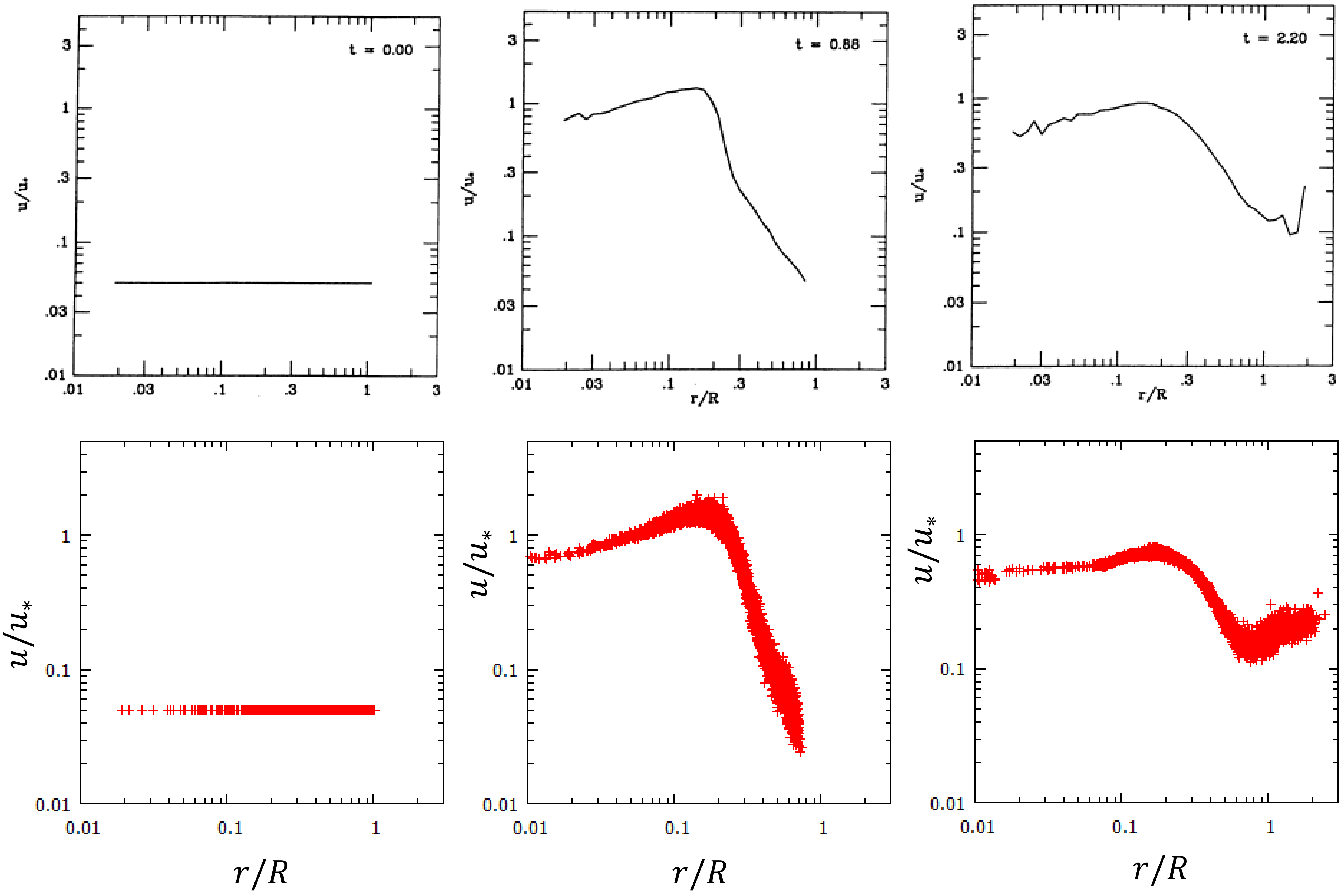
左から t=0, 0.88, 2.20.
ただし t は自由落下時間 $t_{ff} = (\pi^2/8)^{1/2}$ で割って規格化



熱エネルギー

$u_* = GM_T/R$

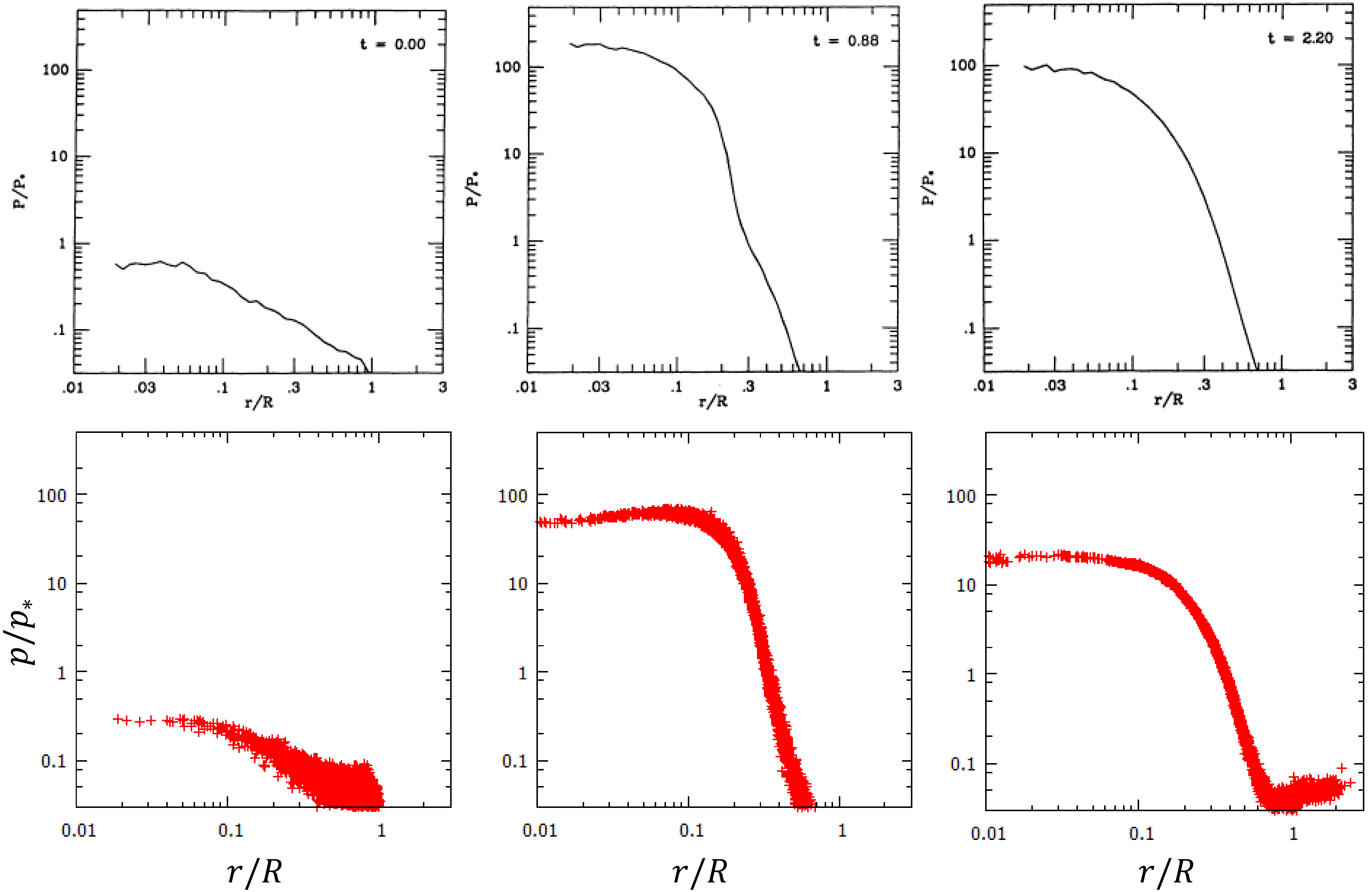
左から t=0, 0.88, 2.20.
ただし t は自由落下時間 $t_{ff} = (\pi^2/8)^{1/2}$ で割って規格化



圧力

$p_* = \rho_* u_*$

左から t=0, 0.88, 2.20.
ただし t は自由落下時間 $t_{ff} = (\pi^2/8)^{1/2}$ で割って規格化



Smoothing length

- 時間的・空間的に可変
- $\rho_i h_i^{\nu} = const.$ (ν: 次元) をNewton法で解く.

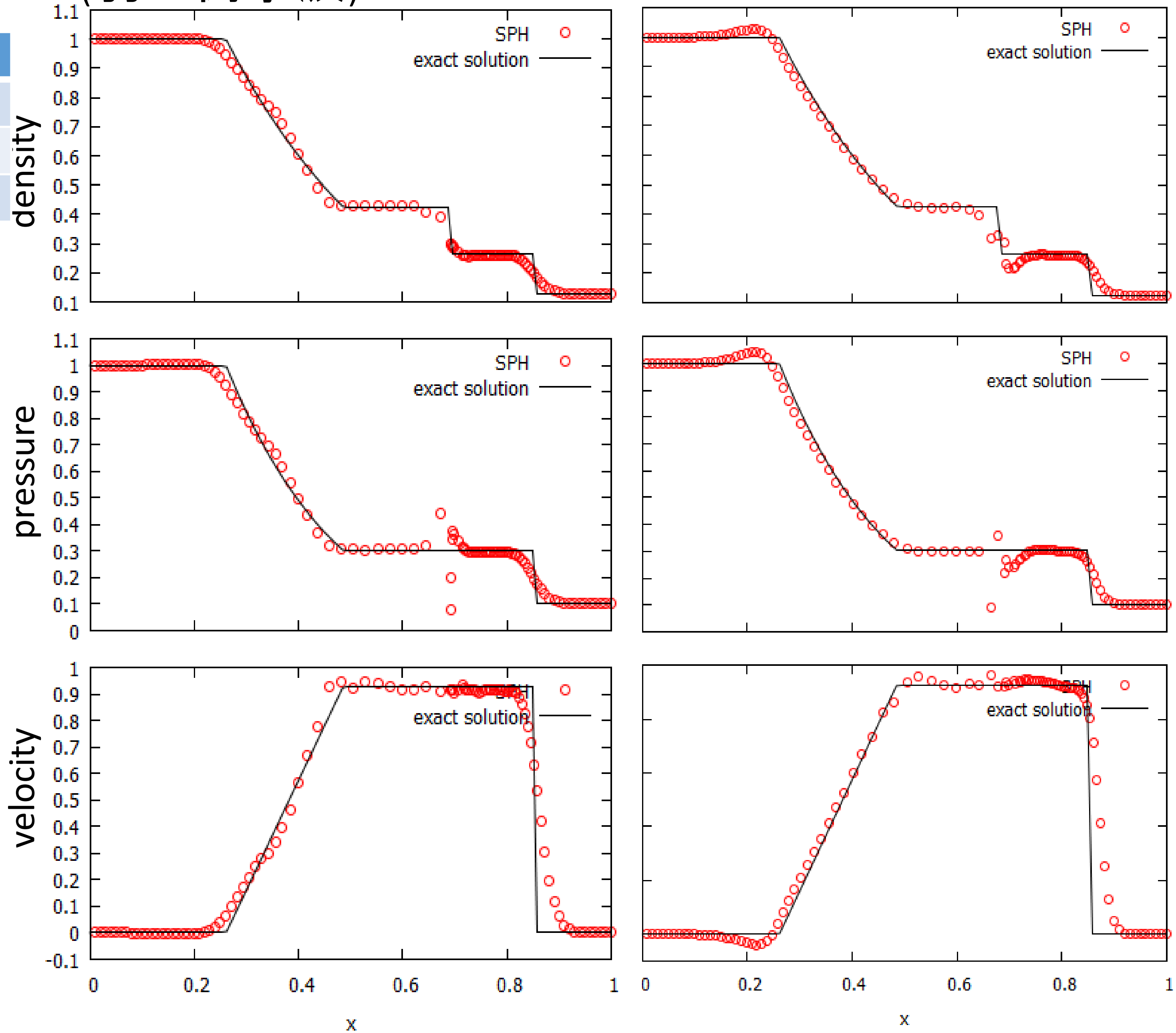
Problem 1 (弱い衝撃波)

	LEFT	RIGHT
密度	1.0	0.125
圧力	1.0	0.1
速度	0.0	0.0

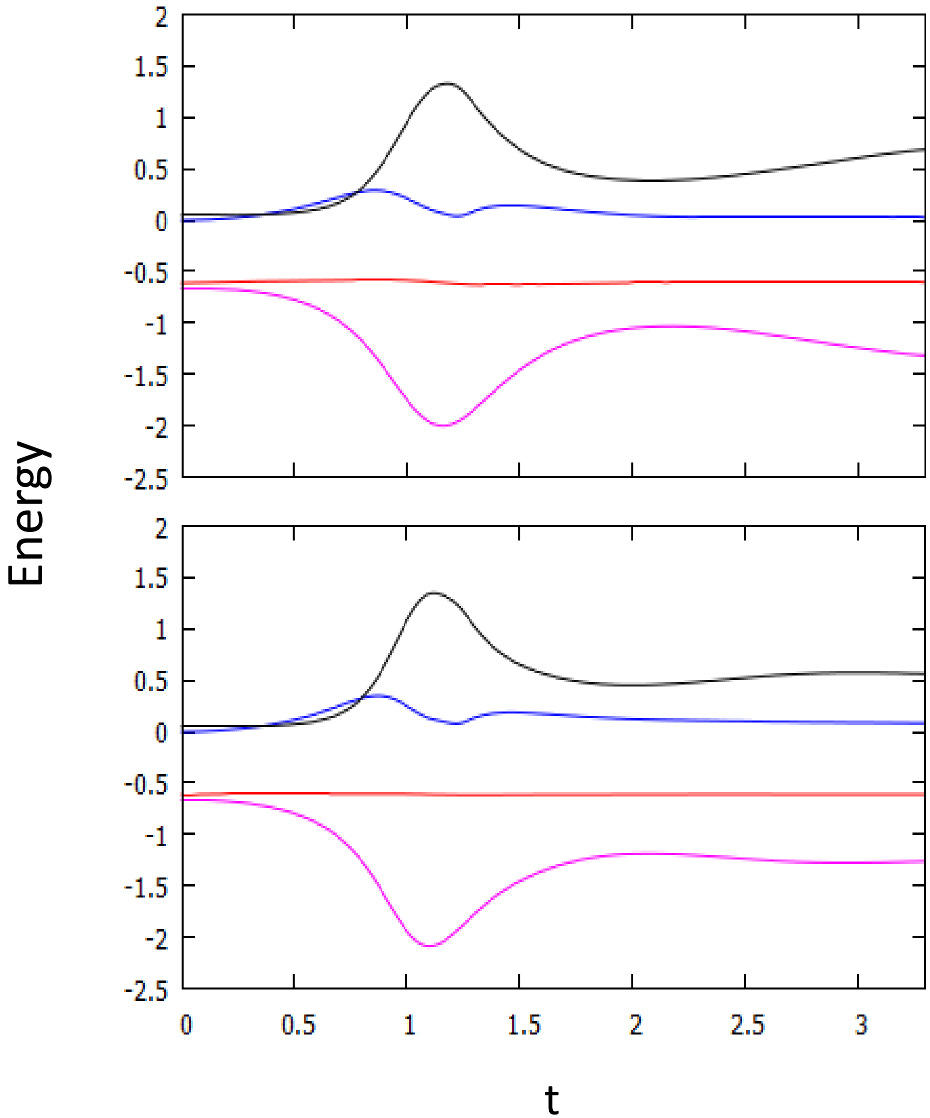
$\gamma = 1.4$

左: h 固定

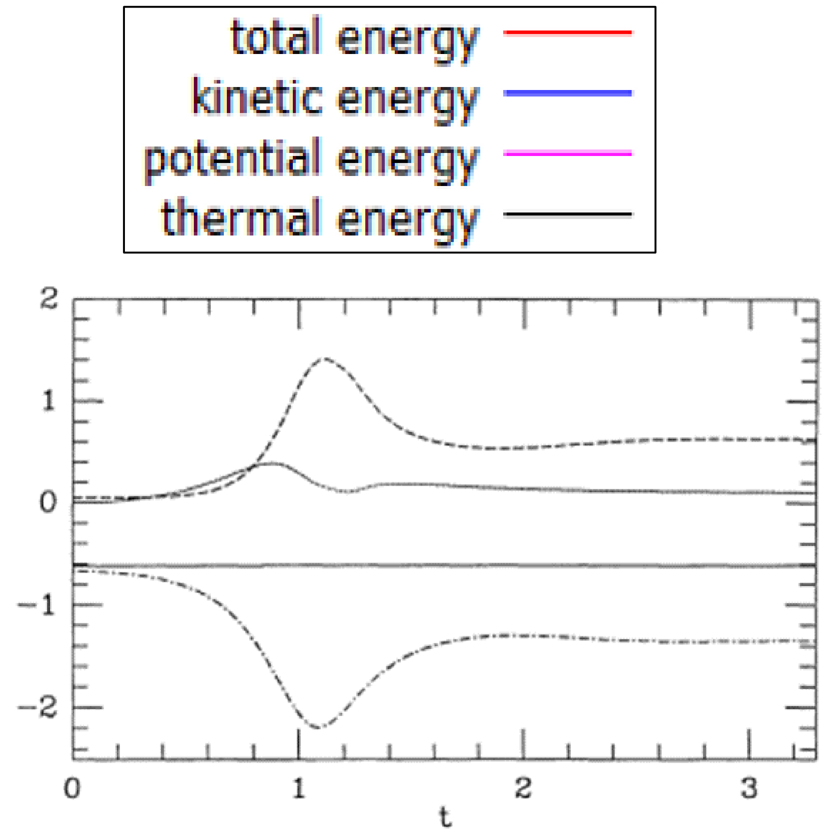
右: h 可変



Evrard collapse



上: h 固定
下: h 可変



Hernquist & Katz (1988)

Summary

- SPH法を用いて, 概ね正しく流体の運動を記述することができた. ただし, 課題も.

- 今後の課題
  - ◆(smoothing length を時間的・空間的に固定から可変にする.)
  - ◆時間ステップの見直し
  - ◆近傍粒子の探索にTreeを使用して計算量を抑える.
    - ◆計算量をO(N^2)からO(N logN)に
  - ◆SPH法 + N体重力計算
  - ◆銀河形成シミュレーション