xPhO Summer Course 2025

Trưởng nhóm: *Carina*

Mục lục

Lời mở đầu

Đây là phần mở đầu.

Tuần 1

Mở Đầu Về Giải Tích

- Rơi tự do là sự thay đổi vị trí theo thời gian, đường cong là một hình thay đổi hướng. Đây là hai loại thay đổi chính thúc đẩy sự phát triển của giải tích, một môn toán học xoay quanh hai phép toán là đạo hàm và tích phân.

- Sự ra đời và phát triển của nó xoay quanh hình học và vật lý với muôn vàn vấn đề thú vị mà có thể nói tóm gọn: *Giải tích là toán học của sự thay đổi.*

- Các nhà toán học cổ đại (chủ yếu làm việc với hình học) đã luôn đau đầu vì hai bài toán: *tìm tiếp tuyến của một đường cong bất kỳ*, và *tính diện tích dưới một đường cong.* Archimedes đã có một số kết quả nổi bật với phương pháp vét cạn. Nhưng phải cho tới thế kỉ XVII, với đại số của Viéte, hình học giải tích của Descartes và Fermat cùng với mối quan tâm dâng cao về chuyển động của các thiên thể mới thúc đẩy mạnh mẽ việc khai thác mảnh đất hoang này với đỉnh cao là các công trình của Newton và Leibniz.

- Như vậy, một cách tự nhiên để tiếp cận giải tích là thông qua hình học giải tích, tức là hình học với các toạ độ, phương trình thay vì các lập luận logic thuần tuý như trong hình học Euclid cổ điển. Cụ thể hơn, các đối tượng hình học như điểm, đường thẳng, đường cong,... sẽ được mô tả bởi các hàm số cùng phương trình qua đó ta có thể thực hiện các phép toán đại số.

- Khái niệm về giới hạn (hàm số) đã sớm nảy nở từ thời cổ đại thông qua bài toán nghịch lý Archilles và con rùa của Zeno đã quá đỗi nổi tiếng.

- Trong khi đó, ý tưởng căn bản của phép toán đạo hàm và vi phân là khảo sát sự thay đổi thông qua phân nhỏ một đại lượng hữu hạn (độ dài, thời gian,...) ra thành vô số khoảng nhỏ. Chia một thành hai phần, chia hai phần thành bốn phần và tiếp diễn như vậy vô hạn lần: các khoảng thu được là rất rất nhỏ, không bằng 0 nhưng nhỏ hơn bất cứ số thực dương nào.

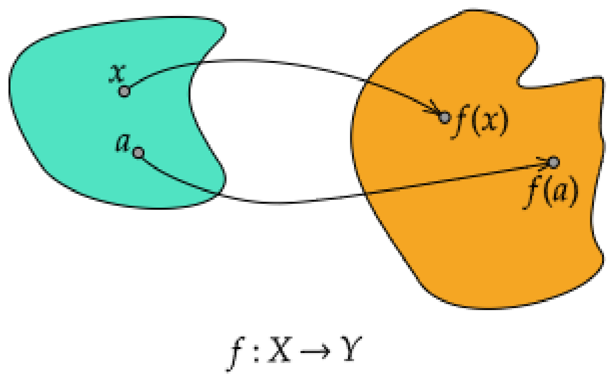
- Điều này lại có liên hệ gì với khái niệm giới hạn?

Trong tuần 1, chúng tôi sẽ trình bày nội dung về hàm số và giới hạn của hàm số, đạo hàm và vi phân cùng ứng dụng của chúng.

1.1 Hàm Số

Định nghĩa 1.1.1. *Hàm f là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc tập hợp X với một và chỉ một phần tử, kí hiệu $f(x)$, thuộc tập hợp Y.*

- X được gọi là tập hợp (miền) xác định của hàm f.
- Y được gọi là tập hợp giá trị của hàm f.
- Nếu X và Y là tập các số thực, khi đó hàm được gọi là hàm số.



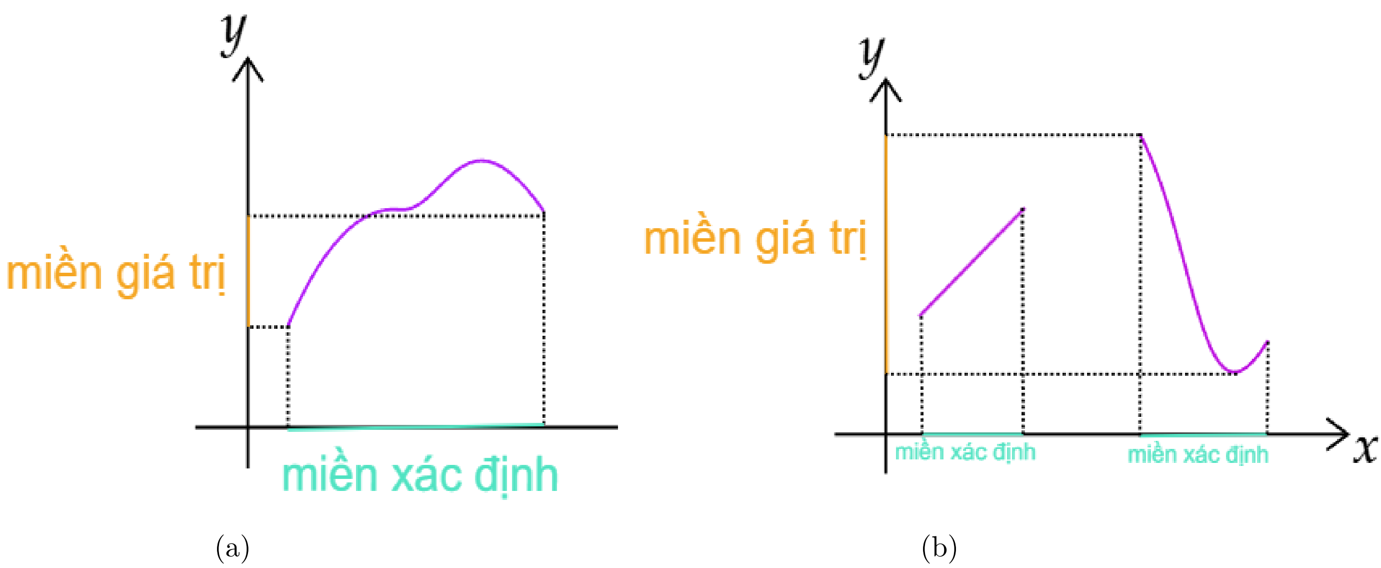
1.1.1 Đồ thị hàm số

Hàm số có thể được biểu diễn bằng công thức, bảng, đồ thị hoặc mô tả bằng lời nói. Trong đó trực quan nhất là biểu diễn thông qua đồ thị.

Định nghĩa 1.1.2. *Đồ thị của hàm số f có miền xác định X là tập hợp các cặp có thứ tự*

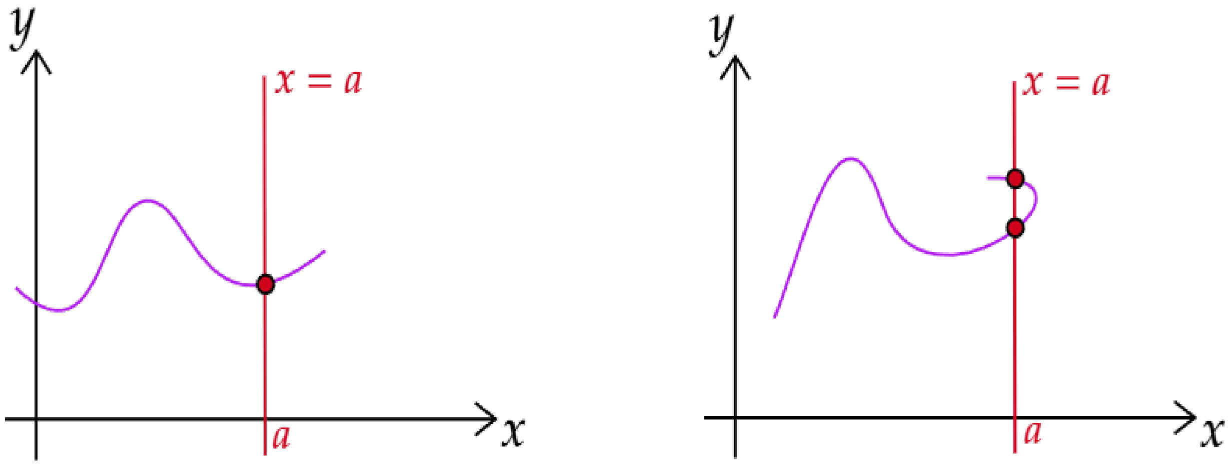
$$\{(x, f(x)) \,|x \in X\}.$$

Nói cách khác, đồ thị của f bao gồm mọi điểm (x, y) sao cho $y = f(x)$ với $x \in X$



Hình 1.1: Ví dụ về đồ thị hàm số

Các điểm này có thể là vô số, tạo thành những đường cong hoặc đường thẳng trên mặt phẳng, liên tục hoặc rời rạc. Song không phải mọi đường bất kỳ đều là đồ thị của một hàm số nào đó. Để là đồ thị của một hàm số, mỗi hoành độ x phải tương ứng với một tung độ y duy nhất. Nghĩa là không được có hai điểm khác nhau trên đồ thị có cùng hoành độ nhưng khác tung độ. Một cách trực quan, *không có đường thẳng thẳng đứng (vuông góc với trục hoành) nào cắt đồ thị của một hàm số nhiều hơn một lần.* (xem 1.1)



(a) Đồ thị hàm số

(b) Không phải đồ thị hàm số

Hình 1.2: So sánh

1.1.2 Các hàm thông dụng

Trong khi xử lý các bài toán, chúng ta thường gặp các hàm số có dạng tổng quát. Các hàm này được phân loại theo dạng biểu thức của chúng. Dưới đây là một số loại hàm số cơ bản:

- Hàm *tuyến tính* có dạng $f(x) = ax + b$, với a và b là các hằng số. Đồ thị của hàm tuyến tính là một đường thẳng.
  Ví dụ: $2x + 3$.

- Hàm *đa thức* có dạng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, với $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ là các hằng số và $n \in \mathbb{N}$ là bậc của đa thức.
  Ví dụ: $x^2 - 4x + 4; x^5 + 2x^2 - 5x + 1$; $3x + 2$.

- Hàm *luỹ thừa* có dạng $f(x) = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$ là một hằng số.
  Ví dụ: $x^2, x^{-3} = \frac{3}{x}, x^{5/2} = \sqrt{x^5} = (\sqrt{x})^5$.

- Hàm tỷ lệ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức. Ví dụ: $\frac{x^2+1}{x-2}$.

Trên đây được gọi chung là các hàm *đại số*, tức là các hàm có thể được biểu diễn bằng các toán tử đại số như cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa.
Ví dụ : $\frac{\left(x^5+x^3-x^2+4\right)^{3/2}}{x+\sqrt{x}}$.

Ta cũng liệt kê thêm một số hàm không thuộc loại trên.
Ví dụ như các hàm *siêu việt*:

- Hàm *lượng giác* là các hàm $\sin x, \cos x, \tan x, \cdots$ mà có thể được định nghĩa thông qua các điểm trên một đường tròn đơn vị.

- Hàm *mũ* và *lôgarit* lần lượt có dạng $f(x) = a^x$ và $f(x) = \log_a x$, với $a > 0$ là một hằng số. Cái sau là hàm *nghịch đảo* của cái trước, tức là $\log_a a^x = x$ và $a^{\log_a x} = x$.
  Ví dụ: 2^x và $\log_2 x$; e^x và $\ln x$.

Hay, hàm xác định từng phần là các hàm được xác định bởi các công thức khác nhau trên các miền khác nhau của tập xác định.
Ví dụ, hàm giá trị tuyệt đối $f(x) = |x|$ được định nghĩa là:

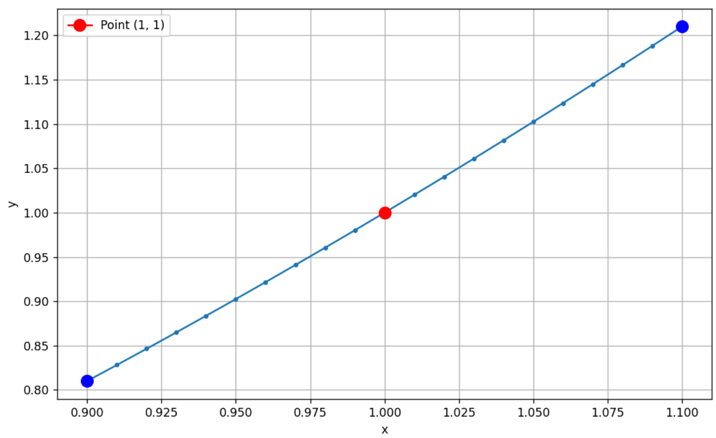
$$f(x) =$$

Trong tất cả những hàm vừa liệt kê lại có một số hàm có tính chất chung. Chẳng hạn như tính chẵn lẻ, tính đồng biến nghịch biến, tính liên tục,...
Trước khi sang phần tiếp theo, hãy nói qua thêm một khái niệm nữa, đó là *hàm hợp*. Ta biết rằng hàm số là một thứ mà ta cho vào một giá trị và sẽ cho ra một giá trị nào đó. Trên cơ sở này, hàm hợp là một hàm số mà đầu vào của nó là đầu ra của một hàm số khác.
Xét hai hàm $f(x)$ và $g(x)$, hàm hợp của chúng được ký hiệu là $f(g(x))$ và được đọc là "hàm f của hàm g tại x". Hàm hợp này sẽ nhận đầu vào là giá trị của hàm $g(x)$ và trả về giá trị của hàm f tại điểm đó.
Ví dụ: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ vậy $f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x$.

1.2 Giới Hạn Hàm Số

1.2.1 Ví dụ về giới hạn

Xét hàm số $y = x^2$, phóng to đồ thị vào gần điểm $(1; 1)$:



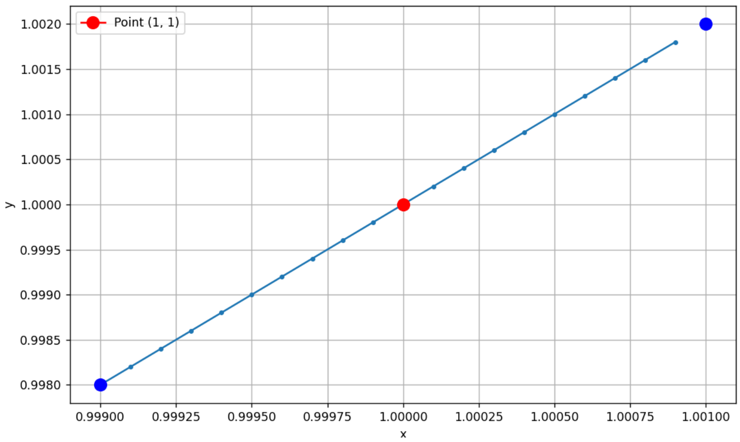
Hình 1.3: Đồ thị $y = x^2$ được phóng to trong khoảng $[0.9; 1.1]$

Hãy tưởng tượng có hai con bọ xuất phát từ hai điểm xanh và bò lại *gần* điểm màu đỏ trên con đường tạo thành từ đoạn đồ thị này. Để tiến tới đó, con bọ thứ nhất, xuất phát từ bên trái, phải đi qua các điểm nằm trong khoảng $[0.9; 0.999]$. Trong khi đó, con bọ thứ hai, xuất phát từ bên phải, phải trải qua các điểm nằm trong khoảng $[1.001; 1.1]$.
Ta thấy chúng quả thực đang tiến tới *gần* điểm $(1; 1)$ bởi không chỉ hoành độ mà tung độ của chúng cũng dần tiến đến giá trị bằng 1 (như được kiểm chứng trong bảng bên dưới).

Bảng 1.1: Bảng giá trị $y = x^2$ khi x tới gần 1

Bên trái		Bên phải	
x	y	x	y
0.900	0.8100	1.100	1.2100
0.925	0.8556	1.075	1.1556
0.950	0.9025	1.050	1.1025
0.975	0.9506	1.025	1.0506
0.990	0.9801	1.010	1.0201
0.995	0.9900	1.005	1.0100
0.999	0.9980	1.001	1.0020

Sau khi cả hai lần lượt tới điểm $(0.999; 0.9980)$ và $(1.001; 1.0020)$, chúng tiếp tục di chuyển và để quan sát quá trình tiếp theo, ta tiếp tục phóng to khoảng đồ thị nằm giữa chúng:



Hình 1.4: Khoảng $[0.999; 1.001]$ với hai vị trí ban đầu mới được đánh dấu

Như vậy sự phóng to này có thể tiếp tục vô hạn lần nữa trong khi khoảng cách giữa hai con bọ và điểm màu đỏ càng nhỏ dần. Dù vậy, ta biết rằng trong thực thế rồi chúng sẽ đến được điểm màu đỏ.[1]

Nhưng nếu giả sự tại hai điểm nào đó rất rất gần $(1; 1)$, đường bị gãy (và phía dưới chúng là vực sâu), hai chú bọ không thể tiến lên được nữa. Rồi vấn đề tiếp tục xảy đến rằng chỉ cần vị trí của các điểm này *luôn gần điểm* $(1; 1)$ *hơn chúng*, hai chú bọ đáng thương sẽ phải tiếp tục di chuyển với một quá trình "phóng to vô hạn" như vậy mãi mãi.

Định nghĩa 1.2.1. *Giả sử $f(x)$ xác định trong một khoảng (miền) giá trị nào đó của x có chứa a (có thể xác định hoặc không xác định tại a). Khi đó ta viết*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

và nói "giới hạn của $f(x)$, khi x tiến tới a, bằng L"
nếu chúng ta có thể lấy các giá trị $f(x)$ gần L một cách tuỳ ý bằng cách lấy các giá trị của x đủ gần a (từ bất cứ phía nào), nhưng không được bằng a.

Định nghĩa vừa đưa ra về giới hạn có vẻ khá trừu tượng và thiếu chặt chẽ. Dẫu thế trong khuôn khổ chương trình, ta sẽ không đào sâu vào vấn đề chặt chẽ trong lí luận giới hạn. Thay vào đó, hy vọng với ví dụ vừa rồi, các bạn có thể phần nào thu được trực giác về khái niệm này.

[1] Đoạn đường mà chúng trải qua sẽ nhỏ dần. Quãng đường chúng phải đi sẽ là một tổng có vô số hạng tử với các hạng tử phía sau ngày càng nhỏ mà may thay, tổng này có giá trị hữu hạn.

1.2.2 Giới hạn ở vô cùng và một số quy tắc tính giới hạn

Định nghĩa 1.2.2. *Ta viết*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

để nói rằng giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới a từ phía bên trái (tức là x nhỏ hơn a) bằng L.

Tương tự, với $x > a$, ta viết

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Định lý 1.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L, \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Nghĩa là nếu giới hạn trái và phái khi $x \to a$ cùng bằng nhau thì giới hạn của hàm số tại điểm đó là tồn tại. Ta cũng thừa nhận nếu hàm số tồn tại giới hạn tại điểm nào đó, giới hạn đó là duy nhất. Như đã thể hiện thông qua ví dụ ở trên.

Định nghĩa 1.2.3. *Ta viết*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

nếu f(x) có thể nhận các giá trị lớn tuỳ ý khi cho x nhận các giá trị đủ gần a, nhưng không được bằng a.

Điều này dễ hiểu nếu xét hàm $1/x$ với $a = 0$: lấy 1 chia 100, rồi lấy 1 chia 10, chia 0.1, 0.01, ... kết quả thu được sẽ ngày càng lớn. Nếu lấy 1 chia $1/10^6$, sẽ có được 10^6. Và cứ thế. Chú ý rằng vô hạn không phải một con số. Nó, ở đây, là một giới hạn.
Ta cũng có thể có điều ngược lại:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

để diễn tả khi x nhận các giá trị lớn tuỳ ý (tiến tới vô cùng) thì $f(x)$ tiến tới gần giá trị xác định L một cách tuỳ ý. Trong trường hợp hàm số là $1/x$, ý của ta là tương đương với cho x nhận một giá trị nào đó đủ lớn $(10^2, 10^3, 10^4, 10^n...)$ sao cho có thể coi $1/x = 10^{-n} \approx 0$.
Cũng có thể viết

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

để nói rằng $f(x)$ có thể nhận các giá trị lớn tuỳ ý khi x đủ lớn.

Để kết thúc phần này, ta thừa nhận và tổng kết những tính chất sau: Giả sử c là một hằng số, $\lim_{x \to a} f(x) = A$ và $\lim_{x \to a} g(x)$=B

- $\lim_{x \to a} c = c.$
- $\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B.$
- $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB.$
- $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = A/B, B \neq 0.$
- $\lim_{x \to a} cf(x) = cA.$
- $\lim_{x \to a}(f(x))^{m/n} = A^{m/n}.$
- Nếu $f(x) = g(x)$ *khi* $x \neq a$, $A = B$.

1.3 Đạo Hàm

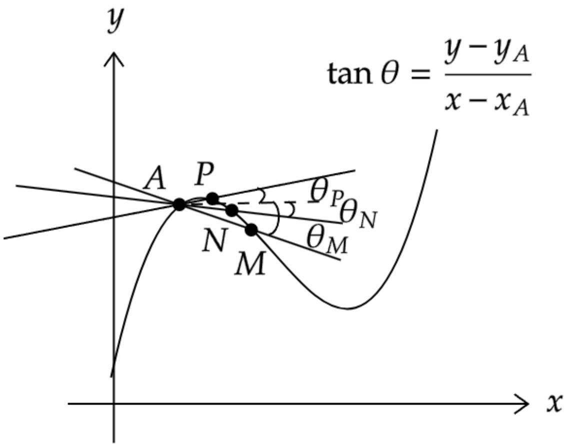
1.3.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.3.1. ***Đạo hàm*** *của hàm số f tại giá trị a, kí hiệu bởi $f'(a)$, là*

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

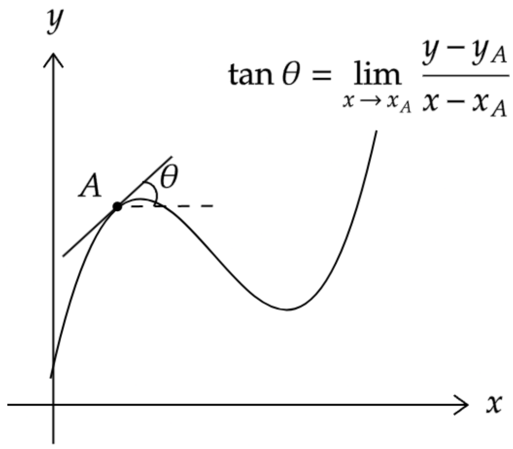
nếu giới hạn này tồn tại.

Ý nghĩa hình học trực quan của đạo hàm là nó thể hiện độ dốc của đồ thị và tốc độ biến thiên của hàm số. Ta xét độ dốc của các đường cát tuyến đi qua A:[2]



Hình 1.5: Độ dốc của các đường cát tuyến đi qua A (các góc θ_M, θ_N, θ_P)

Nếu các điểm M, N, P tiến gần đến điểm A, độ dốc của các đường cát tuyến này sẽ tiến gần đến một giá trị nhất định, chính là độ dốc của tiếp tuyến. Độ dốc này chính là đạo hàm của hàm số tại điểm A:



Hình 1.6: Liên hệ giữa đạo hàm và độ dốc (độ lớn góc θ) của đồ thị

Cũng từ hình vẽ trên, ta có thể thấy đạo hàm chính là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị. Vì thế, ta có thể biểu diễn phương trình của đường tiếp tuyến tại $x = a$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.2}$$

Một ví dụ Vật Lý có thể kể đến là chuyển động của một vật. Nếu ta xét hàm số $s(t)$ là quãng đường vật đi được theo thời gian t, thì đạo hàm của nó tại thời điểm t chính là vận tốc của vật tại thời điểm đó, kí hiệu là $v(t) = s'(t)$.

1.3.2 Một số quy tắc đạo hàm

Dưới đây là đạo hàm của một số hàm thông dụng:

[2] Ở đây góc θ_M và θ_N có giá trị âm.

- *Đạo hàm của hàm đa thức*:
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{1.3}$$

- *Đạo hàm của các hàm lượng giác*:
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x & \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x & \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \end{aligned}$$

- *Đạo hàm của hàm mũ và hàm logarit*:
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \tag{1.4}$$

Tương tự như giới hạn, đạo hàm cũng có một số tính chất quan trọng:

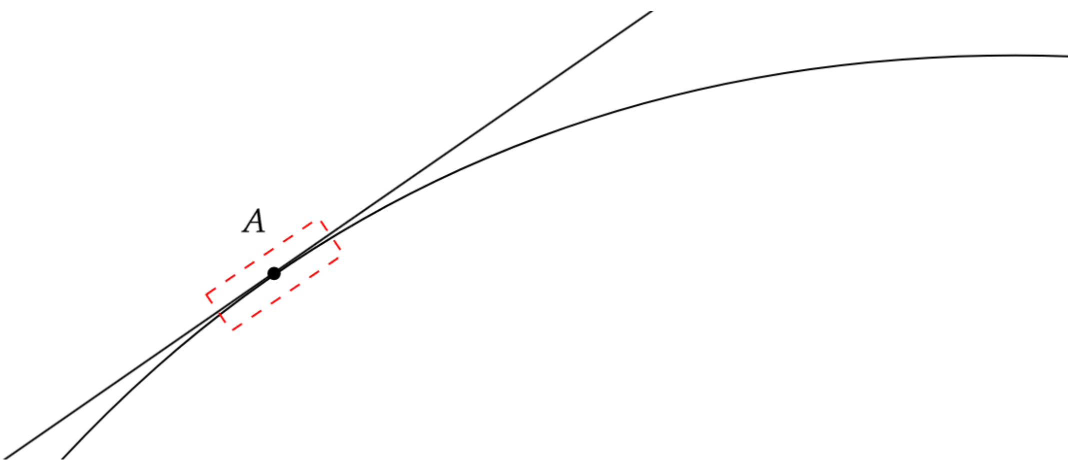
- *Tính chất tuyến tính*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, và c là một hằng số, thì
$$(cf + g)' = cf' + g' \tag{1.5}$$

- *Quy tắc nhân*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, thì
$$(fg)' = fg' + f'g \tag{1.6}$$

- *Quy tắc chia*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, với $g(x) \neq 0$, thì
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{1.7}$$

1.3.3 Xấp xỉ tuyến tính và vi phân

Tiếp theo ta sẽ nói về một ứng dụng quan trọng khác của đạo hàm. Nếu phóng to đồ thị tại điểm $x = a$, ta có thể thấy đồ thị hàm số trông khá gần với tiếp tuyến của nó tại điểm này.



Hình 1.7: Phóng to đồ thị hàm số tại điểm $x = a$

Từ quan sát trên, ta có thể nghĩ tới một phép xấp xỉ.

Định nghĩa 1.3.2. *Ở lân cận điểm $x = a$, ta có thể xấp xỉ hàm số $f(x)$ bằng phương trình đường tiếp tuyến tại điểm này:*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.8}$$

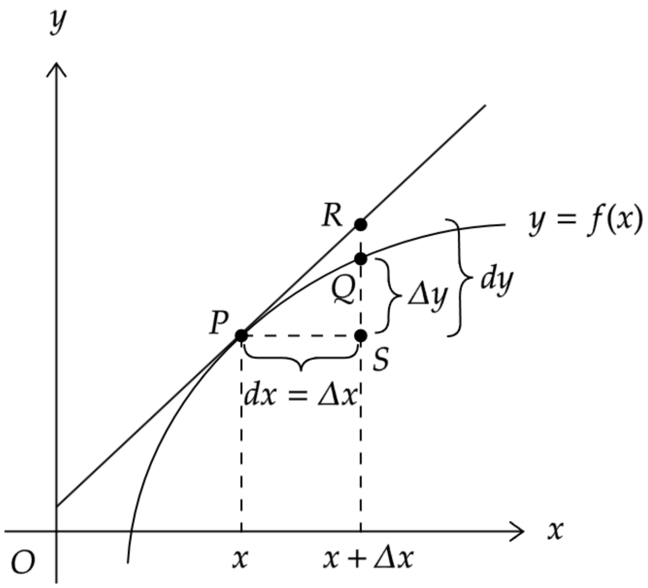
*đây được gọi là **xấp xỉ tuyến tính**.*

Ý tưởng đằng sau phép xấp xỉ tuyến tính đôi khi được phát biểu bằng **phép lấy vi phân**.

Định nghĩa 1.3.3. *Nếu $y = f(x)$, **vi phân** dx là một biến độc lập. Lúc đó **vi phân** dy được xác định theo dx bởi phương trình:*

$$dy = f'(x)dx \tag{1.9}$$

và **phép lấy vi phân** trên có ý nghĩa hình học như hình vẽ:



Hình 1.8: Ý nghĩa hình học của phép lấy vi phân

Từ kí hiệu bên trên, ta có thể viết lại đạo hàm theo cách khác:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{1.10}$$

Đây được gọi là **kí hiệu Leibniz cho đạo hàm**.

1.3.4 Quy tắc đạo hàm hợp

Đối với một hàm số $f(x)$ có dạng phức tạp theo x, ta có thể viết lại nó dưới dạng hàm hợp $f(g(x))$ sao cho $f(g)$ và $g(x)$ có dạng đơn giản hơn, sau đó áp dụng quy tắc sau để thực hiện phép đạo hàm:

Định lý 2. *Quy tắc đạo hàm hợp*: *Nếu f là hàm số có đạo hàm tại $g(x)$, và g là hàm số có đạo hàm tại x, thì đạo hàm của hàm hợp $f(g(x))$ được tính theo công thức:*

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1.11}$$

Ví dụ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ có thể được viết lại dưới dạng hàm hợp $f(g(x))$ với $g(x) = x^2 + 1$.
Lưu ý: Quy tắc đạo hàm hợp không đơn giản chỉ là khử đi tử và mẫu số giống như phép nhân phân số vì ý nghĩa của kí hiệu Leibniz không hoàn toàn giống với phân số thông thường. Việc chứng minh quy tắc này sẽ phức tạp hơn và sẽ là nhiệm vụ của bạn trong bài tập ....

1.4 Ứng Dụng Của Đạo Hàm Và Vi Phân

1.4.1 Giá trị cực đại và cực tiểu

Đạo hàm có một ứng dụng quan trọng trong việc xác định các **cực đại địa phương** và **cực tiểu địa phương**. Trước hết, ta sẽ tìm hiểu về hai khái niệm này.

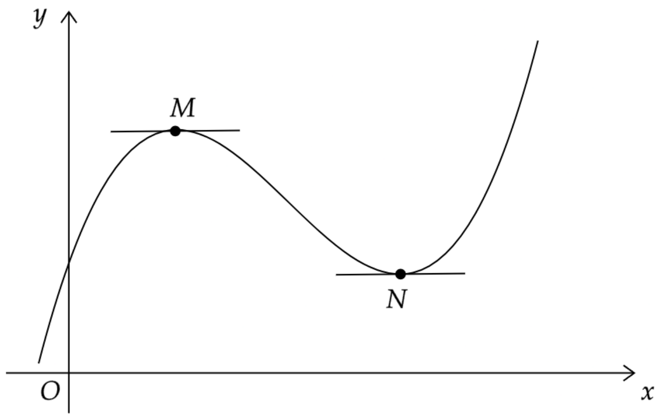
Định nghĩa 1.4.1. ***Cực đại địa phương*** *của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = a$ là giá trị $f(a)$ nếu tồn tại một khoảng mở $(a - \delta, a + \delta)$ với $\delta > 0$ sao cho:*

$$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$$

Định nghĩa 1.4.2. ***Cực tiểu địa phương*** *của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = a$ là giá trị $f(a)$ nếu tồn tại một khoảng mở $(a - \delta, a + \delta)$ với $\delta > 0$ sao cho:*

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$$

Và các điểm trên được gọi chung là **cực trị** của hàm số $f(x)$.

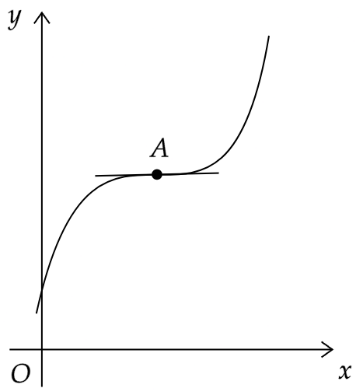


Hình 1.9: Cực đại địa phương (điểm M) và cực tiểu địa phương (điểm N)

Từ hình vẽ trên, ta có thể thấy tại các điểm cực trị, tiếp tuyến của đồ thị nằm ngang. Từ đó, ta có định lý sau:

Định lý 3. ***Định lý Fermat****: Nếu hàm số f có cực trị tại a, thì $f'(a) = 0$ nếu đạo hàm này tồn tại.*

Tuy nhiên, định lý đảo của định lý trên không đúng.



Hình 1.10: Điểm uốn A của đồ thị hàm số

Từ hình vẽ trên, ta có thể thấy đạo hàm của hàm số tại điểm A bằng 0 nhưng đây không phải là điểm cực trị. Điểm này được gọi là **điểm uốn** của đồ thị hàm số.
Một cách để xác định điểm cực trị là cực đại hay cực tiểu địa phương là sử dụng định lý sau:

Định lý 4. *Xét hàm f có đạo hàm bằng 0 tại điểm a, nếu:*

- $f''(a) > 0$, *thì $f(a)$ là cực tiểu địa phương.*
- $f''(a) < 0$, *thì $f(a)$ là cực đại địa phương.*

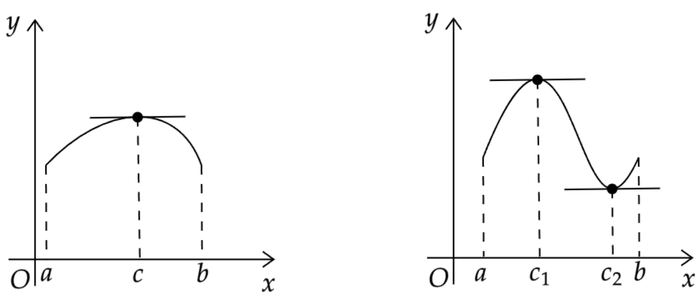
Nếu $f''(a) = 0$, ta không thể kết luận được gì về điểm này. Trong trường hợp đó, ta sẽ cần sử dụng các phương pháp sẽ được bàn luận trong các bài tập...

1.4.2 Định lý giá trị trung bình

Định lý giá trị trung bình là một trong những định lý quan trọng của giải tích. Nhưng trước khi đến với định lý này, ta sẽ cần giới thiệu một định lý khác:

Định lý 5. ***Định lý Rolle***: *Nếu hàm số f là liên tục và khả vi trên khoảng $[a, b]$, và $f(a) = f(b)$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chúng ta có thể nhìn vào đồ thị của các hàm số thỏa mãn điều kiện trên để thấy được ý nghĩa trực quan của điểm c:



Hình 1.11: Định lý Rolle

Việc chứng minh chặt chẽ sẽ là nhiệm vụ của bạn trong bài tập....
Định lý giá trị trung bình là một mở rộng của định lý Rolle. Định lý này phát biểu như sau:

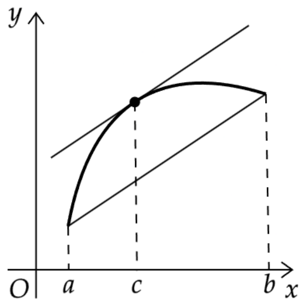
Định lý 6. ***Định lý giá trị trung bình***: *Nếu hàm số f là liên tục và khả vi trên khoảng $[a, b]$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1.12}$$

hay

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{1.13}$$

Khi này, độ dốc của tiếp tuyến tại điểm c bằng với độ dốc của cát tuyến nối giữa hai điểm a và b:



Hình 1.12: Định lý giá trị trung bình

Chứng minh định lý này sẽ là nhiệm vụ của bạn trong bài tập....

1.4.3 Xấp xỉ đa thức của hàm số

Trong thực tế, chúng ta thường cần tính giá trị của một hàm số tại một điểm nào đó. Tuy nhiên, việc tính toán trực tiếp có thể phức tạp hoặc không khả thi. Do đó, chúng ta thường sử dụng các đa thức xấp xỉ để ước lượng giá trị của hàm số.

Định lý 7. *Nếu f có một khai triển bằng chuỗi lũy thừa tại a, tức là nếu*

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \tag{1.14}$$

thì các hệ số của nó được cho bởi công thức sau

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{1.15}$$

trong đó $f^{(n)}(a)$ là đạo hàm bậc n của hàm số f tại điểm a.
Chuỗi lũy thừa này được gọi là ***chuỗi Taylor*** *của hàm số f tại điểm a.*

Khi ta chỉ lấy một vài số hạng của chuỗi, ta thu được một phép xấp xỉ:

Định nghĩa 1.4.3. ***Khai triển Taylor bậc*** *n của hàm số f tại điểm a:*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \tag{1.16}$$

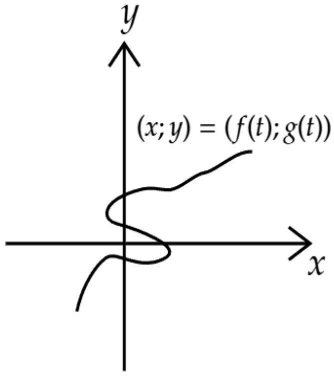
Càng lấy tới bậc càng cao, độ chính xác của phép xấp xỉ càng cao.

1.5 Phương Trình Tham Số

Định nghĩa 1.5.1. *Giả sử hai toạ độ x, y trên mặt phẳng toạ độ lần lượt là các hàm của một biến thứ ba, t (gọi là* tham số*) được biểu diễn qua các phương trình:*

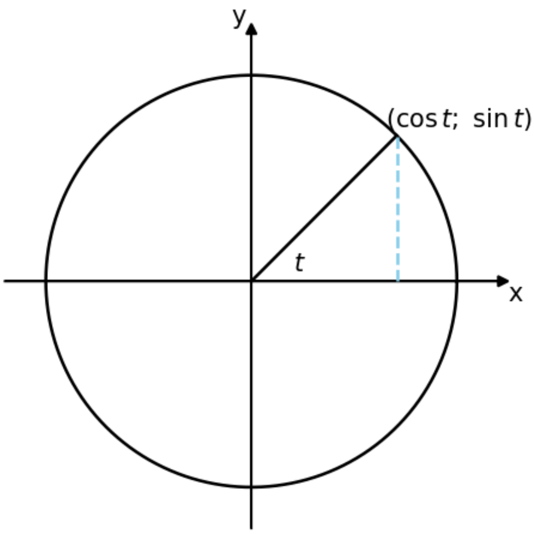
$$x = f(t),\ y = g(t),$$

gọi là các phương trình tham số*. Mỗi một giá trị của t xác định một điểm $(x; y)$. Khi tham số thay đổi, điểm $(x; y)$ thay đổi và vẽ ra một đường cong trên mặt phẳng toạ độ gọi là* đường cong tham số*.*

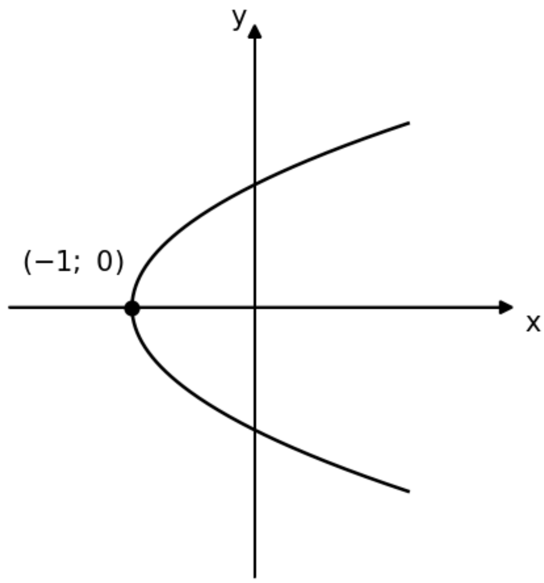


Hình 1.13: Đường cong tham số

Về tổng quát, đường cong với phương trình tham số $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$ có điểm đầu $(f(a), g(a))$ và điểm cuối $(f(b), g(b))$.
Sau đây là một số ví dụ cụ thể:



(a) Đường tròn đơn vị
$x = \cos t, \quad y = \sin t$
$0 \leq t \leq 2\pi$



(b) Parabol nằm ngang
$x = t^2 - 1, \quad y = t$
$-1 \leq t \leq 1$

Hình 1.14

Thông thường khi tiếp cận các bài toán về chuyển động, tham số t thường xuất hiện một cách tự nhiên thông qua các đại lượng. Trong đó điển hình là thời gian.
Xét một điểm chuyển động trên mặt phẳng toạ độ, *hệ phương trình chuyển động* của nó có dạng:
Hệ phương trình chuyển động này mô tả sự phụ thuộc của các toạ độ của điểm theo thời gian và đồng thời bao hàm cả quỹ đạo của nó nếu biết các điều kiện đầu và cuối.

Định nghĩa 1.5.2.

$$v_x(v_y) = \frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \tag{1.17}$$

được gọi là thành phần vận tốc *của điểm đó trên trục* $Ox(Oy)$.

Định nghĩa 1.5.3.

$$a_x(a_y) = \frac{dv_x}{dt}\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) \tag{1.18}$$

được gọi là thành phần gia tốc *của điểm đó trên trục $Ox(Oy)$.*

1.6 Hướng Dẫn Học

1.7 Bài tập

Hàm số

Bài 1.1: Tìm miền xác định của các hàm số sau

(a) $\frac{\ln(1+x)}{x-1}$

(b) $\sqrt{1-2x} + 3\arcsin\left(\frac{3x-1}{2}\right) \quad (\sin x = y \leftrightarrow x = \arcsin y)$

(c) $\frac{1}{xe^x}$

(d) $\ln(3x+1) + 2\ln(x+1)$

Bài 1.2: Tìm tập hợp giá trị của các hàm số sau

(a) $x^2 - 6x + 5$

(b) $2 = 3\sin x$

(c) $|x| + x + 1 = y + |y|$

(d) 4^{-x^2}

Bài 1.3: Chứng minh

(a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

(b) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

Gợi ý: Định lý Ptoleme

Vẽ đồ thị của hàm

Chú ý: Ta có thể vẽ đồ thị của hàm có dạng $y = Af(k(x-a)) + b$ theo đồ thị của hàm $f(x)$

- $y = f(x-a)$: đồ thị ban đầu được tịnh tiến theo trục Ox một đại lượng a.
- $y = f(x) + b$: đồ thị ban đầu được tịnh tiến theo trục Oy một đại lượng b.
- $y = Af(x)$: đồ thị xuất phát được giãn ra A lần theo trục Oy.
- $y = f(kx)$: đồ thị xuất phát được giãn ra $1/k$ lần theo trục Ox.

Bài 1.4: Vẽ đồ thị các hàm số trong hai bài tập ở trên bằng
a. Desmos

b. Python (đối với hàm tuần hoàn thì vẽ trong khoảng $[-\pi;\pi]$; đối với các hàm khác, lựa chọn điểm đầu và cuối sao cho thu được mọi miền của hàm)

Bài 1.5: Vẽ một hình tam/tứ/ngũ/lục giác đều bằng Desmos và Python.

Bài 1.6: Giải các phương trình sau thông qua việc vẽ đồ thị bằng Python

(a) $\tan x = x$.

(b) $\ln x = x - 2$.

(c) $x^3 - 15x = 4$.

(d) $x^5 - 4x^2 + 3 = 0$.

Hàm hợp

Bài 1.7: Các hàm số trong phần là hàm hợp của những hàm nào? Hãy phân tích cụ thể thứ tự của chúng.

Bài 1.8: Nguyên lý quy nạp

Cho S_n là một phát biểu về số nguyên dương n. Giả sử rằng:

- S_1 đúng.
- S_{k+1} đúng khi S_k đúng.

Khi đó S_n đúng với tất cả các số nguyên dương n.
Sử dụng điều này để giải các bài toán sau:

(a) Nếu $f_0(x) = x/(x+1)$ và $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$, tìm một công thức cho $f_n(x)$.

(b) Nếu $f_0(x) = x^2$ và $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$, tìm một công thức cho $f_n(x)$.

Giới hạn hàm số

Bài 1.9: Chứng minh

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828....$$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m$.

Bài 1.10: Tính các giới hạn sau

(a)
$$\lim_{x\to 4} \frac{5x+2}{2x+3}.$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{2x+7}.$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}.$$

(d)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}.$$

1.8 Lời giải

Tuần 2

Vector & Đại Số Tuyến Tính

2.1 Vector

2.1.1 Giới thiệu

2.1.2 Các Phép Toán với Vector

2.1.3 Cơ sở Vector và Hệ Toạ Độ

2.1.4 Hàm Vector

2.2 Động Học

2.2.1 Toạ Độ Cong

2.2.2 Các Thông Số Động Học

2.3 Nhập môn Đại Số Tuyến Tính

2.3.1 Giới thiệu về Ma Trận

2.3.2 Phép biến đổi tuyến tính

2.3.3 Các phép toán trên ma trận

Tuần 3

Chuyển Động Của Chất Điểm Trong Mặt Phẳng

3.1 Tích phân

3.1.1 Ý tưởng

3.1.2 Định lý cơ bản của giải tích

3.2 Phương trình vi phân (thường)

3.3 Chuyển động trong mặt phẳng

3.3.1 Bài toán ném xiên

3.3.2 Định lý cộng vận tốc giữa các hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến so với nhau

3.3.3 Định lý cộng gia tốc giữa các hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến so với nhau

3.3.4 Tiếp cận bài toán chuyển động

Tuần 4

Cơ Động Lực Học Chất Điểm

4.1 Ba Định Luật Newton

4.1.1 Định luật thứ nhất

4.1.2 Định luật thứ hai

4.1.3 Định luật thứ ba

4.1.4 Một số "loại" động lượng khác

4.2 Nguyên lý tương đối Galileo

4.2.1 Phép biến đổi Galileo

4.2.2 Luận bàn

4.3 Các lực cơ học

4.4 Liên kết

4.4.1 Các ràng buộc hình học

4.4.2 Vai trò của các loại lực liên kết

4.5 Phương pháp tiếp cận một bài toán động lực học

Tuần 5

Dao Động

Tuần 6

Phương Pháp Số Trong Mô Phỏng

Tuần 7

Mở Đầu Về Giải Tích Vector & Các Định Luật Bảo Toàn

Tuần 8

Năng Lượng

Tuần 9

Nhập Môn Cơ Học Giải Tích

9.1 Liên kết động học

9.1.1 Bậc tự do

9.1.2 Liên kết Holonom và liên kết phi Holonom

9.1.3 Lực bị động trong bài toán liên kết Holonom

9.1.4 Ứng dụng đạo hàm toàn phần và ma trận Jacobian trong bài toán liên kết Holonom

9.2 Cơ học Lagrange

9.2.1 Nguyên lý tác dụng tối thiểu

9.2.2 Phương trình Lagrange loại II

9.2.3 Phương trình Lagrange loại I

9.2.4 Động lượng suy rộng

9.2.5 Định lý Noether

9.2.6 Giải phương trình chuyển động bằng phương pháp Runge-Kutta 4

9.2.7 Tính toán lực bị động dựa trên phương trình Lagrange loại 2

9.3 Các lý thuyết cơ học giải tích khác

9.3.1 Cơ học Hamilton

9.3.2 Nguyên lý Gauss về liên kết tối thiểu

9.3.3 Phương trình Appell cho cơ hệ phi Holonom

Tuần 10

Bàn Về Giải Một Bài Toán Cơ Học

10.1 Động lực học hệ 1 bậc tự do

10.1.1 "Khối lượng hiệu dụng" trong hệ 1 bậc tự do

10.1.2 Thành phần "gia tốc hướng tâm" đối với hệ tọa độ suy rộng

10.2 Động lực học hệ đa bậc tự do và Robotic

10.2.1 Ma trận quán tính

10.2.2 Phương trình tổng quát trong điều khiển hệ đa vật và ma trận Christoffel

10.3 Điều khiển Robot công nghiệp

10.3.1 Mô phỏng và giải hệ phương trình vi phân trong Robotic

10.3.2 Điều khiển Robot bằng thuật toán PID bù trọng trường

10.4 Động học Robotic

10.4.1 Động học thuận và bảng Denavit-Hartenberg

10.4.2 Động học nghịch Robotic

10.4.3 Thay thế ma trận Christoffel bằng ma trận hướng tâm/Coriolis

Tuần 11

Đo Lường & Xử Lý Số Liệu

11.1 Phân tích thứ nguyên và dự đoán quy luật vật vật lý

11.2 Bài toán hồi quy và hồi quy tuyến tính

11.2.1 Bài toán hồi quy trong học máy

11.2.2 Hồi quy hàm đơn biến, hàm mất mát và hệ số tương quan

11.2.3 Hồi quy hàm đa biến

11.2.4 Hồi quy đa thức

11.3 Tối ưu hàm mất mát

11.3.1 Thuật toán Gradient descent

11.3.2 Các thuật toán tối ưu khác: Newton, Gauss-Newton, Lenvenberg-Marquardt

11.4 Học sâu và mạng Neural

11.4.1 Bài toán phân loại trong học máy

11.4.2 Mô hình mạng Neural

11.4.3 Thuật toán lan truyền ngược

Tuần 12
Tổng Kết

A

Python Cơ Bản

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Giới thiệu

Python là một ngôn ngữ lập trình phổ biến, được tạo ra bởi Guido van Rossum. Với tính đơn giản và dễ đọc, đây là ngôn ngữ thích hợp để nhập môn lập trình. Để bắt đầu, ta có thể tải trực tiếp Python từ trang chủ:Python Download . Sau khi cài đặt, ta có thể sử dụng Python thông qua các IDE như PyCharm, Visual Studio Code hoặc đơn giản là sử dụng terminal. Chi tiết, hãy tra mạng.
Các bạn có thể dễ dàng tự học Python thông qua các tài nguyên có sẵn trực tuyến như các khoá học trên Youtube hay qua các trang web,chẳng hạn như,W3School . Các bạn cũng có thể tham khảo các khoá học trên Udemy, Coursera, edX,... hay đọc sâu thêm trên SciPy.

B

Phân Tích Thứ Nguyên

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.