xPhO Summer Course 2025

Trưởng nhóm: *Carina*

Mục lục

Lời mở đầu

Đây là phần mở đầu.

Tuần 1

Mở Đầu Về Giải Tích

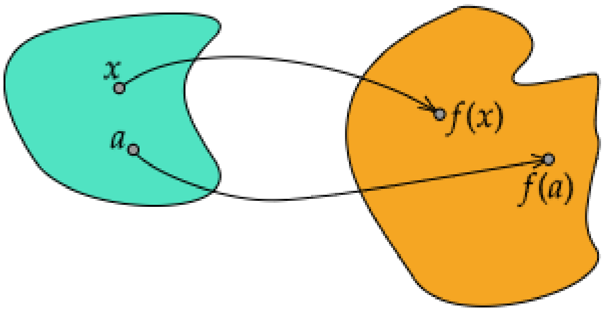
- Rơi tự do là sự thay đổi vị trí theo thời gian, đường cong là một hình thay đổi hướng. Đây là hai loại thay đổi chính thúc đẩy sự phát triển của giải tích, một môn toán học xoay quanh hai phép toán là đạo hàm và tích phân.
- Sự ra đời và phát triển của nó xoay quanh hình học và vật lý với muôn vàn vấn đề thú vị mà có thể nói tóm gọn: *Giải tích là toán học của sự thay đổi*.
- Các nhà toán học cổ đại (chủ yếu làm việc với hình học) đã luôn đau đầu vì hai bài toán: *tìm tiếp tuyến của một đường cong bất kỳ*, và *tính diện tích dưới một đường cong*. Archimedes đã có một số kết quả nổi bật với phương pháp vét cạn. Nhưng phải cho tới thế kỉ XVII, với đại số của Viéte, hình học giải tích của Descartes và Fermat cùng với mối quan tâm dâng cao về chuyển động của các thiên thể mới thúc đẩy mạnh mẽ việc khai thác mảnh đất hoang này với đỉnh cao là các công trình của Newton và Leibniz.
- Như vậy, một cách tự nhiên để tiếp cận giải tích là thông qua hình học giải tích, tức là hình học với các toạ độ, phương trình thay vì các lập luận logic thuần tuý như trong hình học Euclid cổ điển. Cụ thể hơn, các đối tượng hình học như điểm, đường thẳng, đường cong,... sẽ được mô tả bởi các hàm số cùng phương trình qua đó ta có thể thực hiện các phép toán đại số.
- Khái niệm về giới hạn (hàm số) đã sớm nảy nở từ thời cổ đại thông qua bài toán nghịch lý Archilles và con rùa của Zeno đã quá đỗi nổi tiếng.
- Trong khi đó, ý tưởng căn bản của phép toán đạo hàm và vi phân là khảo sát sự thay đổi thông qua phân nhỏ một đại lượng hữu hạn (độ dài, thời gian,...) ra thành vô số khoảng nhỏ. Chia một thành hai phần, chia hai phần thành bốn phần và tiếp diễn như vậy vô hạn lần: các khoảng thu được là rất rất nhỏ, không bằng 0 nhưng nhỏ hơn bất cứ số thực dương nào.
- Điều này lại có liên hệ gì với khái niệm giới hạn?

Trong tuần 1, chúng tôi sẽ trình bày nội dung về hàm số và giới hạn của hàm số, đạo hàm và vi phân cùng ứng dụng của chúng.

1.1 Hàm Số

Định nghĩa 1.1.1. *Hàm f là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc tập hợp X với một và chỉ một phần tử, kí hiệu $f(x)$, thuộc tập hợp Y.*

- X được gọi là miền xác định của hàm f.
- Y được gọi là miền giá trị của hàm f.
- Nếu X và Y là tập các số thực, khi đó hàm được gọi là hàm số.



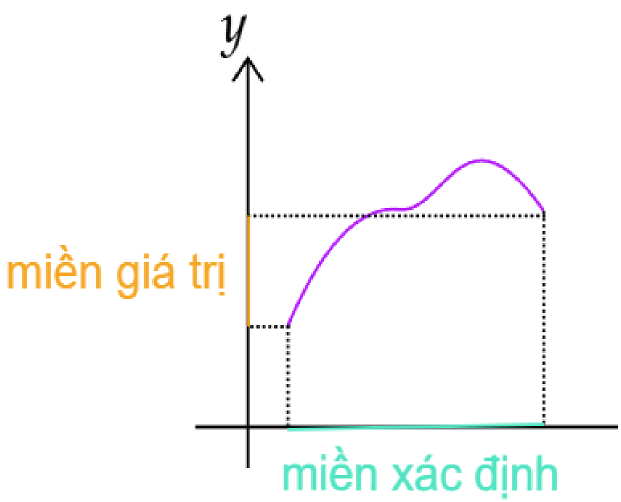
$f : X \to Y$

Hàm số có thể được biểu diễn bằng công thức, bảng, đồ thị hoặc mô tả bằng lời nói. Trong đó trực quan nhất là biểu diễn thông qua đồ thị.

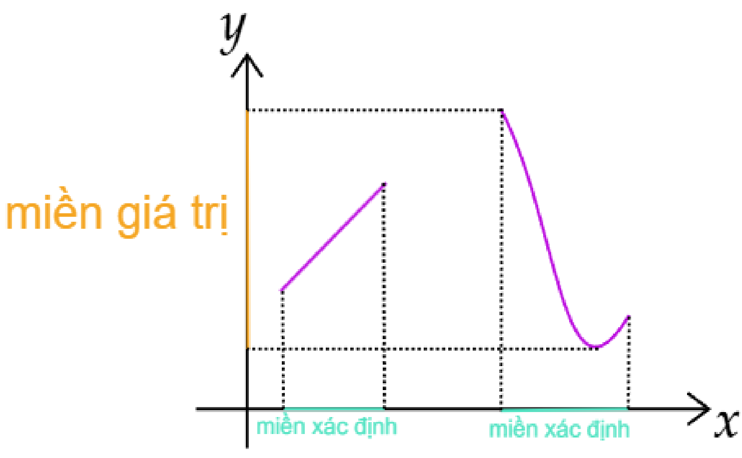
Định nghĩa 1.1.2. *Đồ thị của hàm số f có miền xác định X là tập hợp các cặp có thứ tự*

$$\{(x, f(x)) \,|x \in X\}.$$

Nói cách khác, đồ thị của f bao gồm mọi điểm (x, y) sao cho $y = f(x)$ với $x \in X$



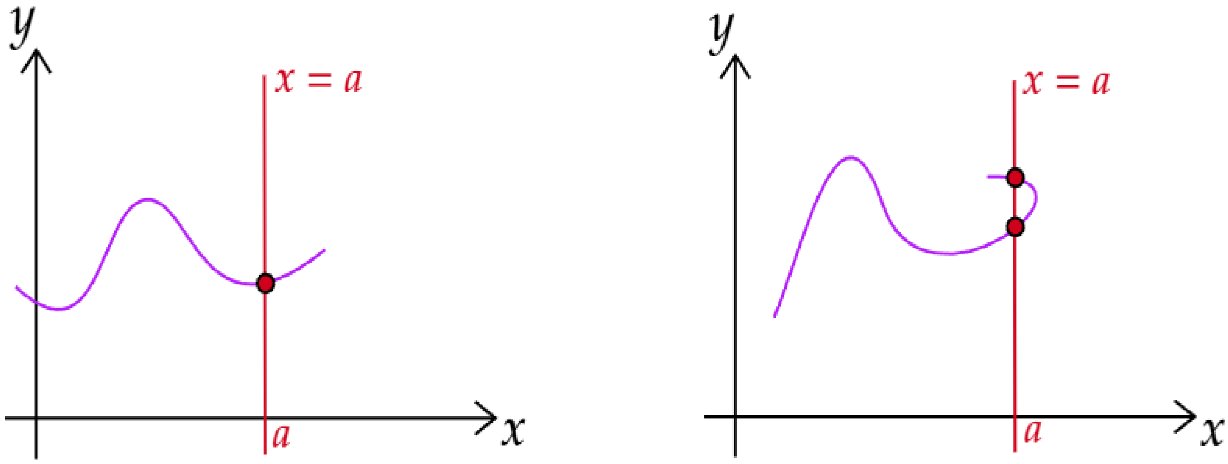
(a)



(b)

Hình 1.1: Ví dụ về đồ thị hàm số

Các điểm này có thể là vô số, tạo thành những đường cong hoặc đường thẳng trên mặt phẳng, liên tục hoặc rời rạc. Song không phải mọi đường bất kỳ đều là đồ thị của một hàm số nào đó.



(a) Đồ thị hàm số (b) Không phải đồ thị hàm số

Hình 1.2: So sánh

Để là đồ thị của một hàm số, mỗi hoành độ x phải tương ứng với một tung độ y duy nhất. Nghĩa là không được có hai điểm khác nhau trên đồ thị có cùng hoành độ nhưng khác tung độ. Một cách trực quan, *không có đường thẳng thẳng đứng (vuông góc với trục hoành) nào cắt đồ thị của một hàm số nhiều hơn một lần.* (xem 1.1)

Trong khi xử lý các bài toán, chúng ta thường gặp các hàm số có dạng tổng quát. Các hàm này được phân loại theo dạng biểu thức của chúng. Dưới đây là một số loại hàm số cơ bản:

- Hàm *tuyến tính* có dạng $f(x) = ax + b$, với a và b là các hằng số. Đồ thị của hàm tuyến tính là một đường thẳng.
  Ví dụ: $2x + 3$.

- Hàm *đa thức* có dạng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, với $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ là các hằng số và $n \in \mathbb{N}$ là bậc của đa thức.
  Ví dụ: $x^2 - 4x + 4$; $x^5 + 2x^2 - 5x + 1$; $3x + 2$.

- Hàm *luỹ thừa* có dạng $f(x) = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$ là một hằng số.
  Ví dụ: $x^2, x^{-3} = \frac{3}{x}, x^{5/2} = \sqrt{x^5} = (\sqrt{x})^5$.

- Hàm tỷ lệ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức. Ví dụ: $\frac{x^2+1}{x-2}$.

Trên đây được gọi chung là các hàm *đại số*, tức là các hàm có thể được biểu diễn bằng các toán tử đại số như cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa.
Ví dụ : $\frac{\left(x^5+x^3-x^2+4\right)^{3/2}}{x+\sqrt{x}}$.

Ta cũng liệt kê thêm một số hàm không thuộc loại trên.
Ví dụ như các hàm *siêu việt*:

- Hàm *lượng giác* là các hàm $\sin x, \cos x, \tan x, \cdots$ mà có thể được định nghĩa thông qua các điểm trên một đường tròn đơn vị.

- Hàm *mũ* và *lôgarit* lần lượt có dạng $f(x) = a^x$ và $f(x) = \log_a x$, với $a > 0$ là một hằng số. Cái sau là hàm *nghịch đảo* của cái trước, tức là $\log_a a^x = x$ và $a^{\log_a x} = x$.
  Ví dụ: 2^x và $\log_2 x$; e^x và $\ln x$.

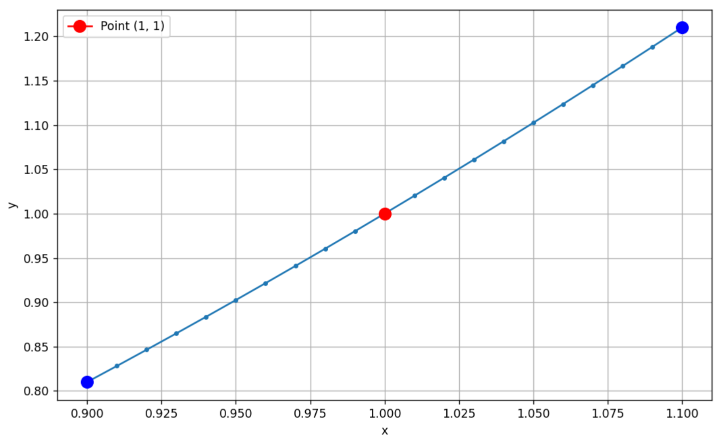
Hay, hàm xác định từng phần là các hàm được xác định bởi các công thức khác nhau trên các miền khác nhau của tập xác định.
Ví dụ, hàm giá trị tuyệt đối $f(x) = |x|$ được định nghĩa là:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{nếu } x \leq 0. \\ x, & \text{nếu } x \geq 0. \end{cases}$$

Trong tất cả những hàm vừa liệt kê lại có một số hàm có tính chất chung. Chẳng hạn như tính chẵn lẻ, tính đồng biến nghịch biến, tính liên tục,...
Trước khi sang phần tiếp theo, hãy nói qua thêm một khái niệm nữa, đó là *hàm hợp*. Ta biết rằng hàm số là một thứ mà ta cho vào một giá trị và sẽ cho ra một giá trị nào đó. Trên cơ sở này, hàm hợp là một hàm số mà đầu vào của nó là đầu ra của một hàm số khác.
Xét hai hàm $f(x)$ và $g(x)$, hàm hợp của chúng được ký hiệu là $f(g(x))$ và được đọc là "hàm f của hàm g tại x". Hàm hợp này sẽ nhận đầu vào là giá trị của hàm $g(x)$ và trả về giá trị của hàm f tại điểm đó.
Ví dụ: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ vậy $f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x$.

1.2 Giới Hạn Hàm Số

Xét hàm số $y = x^2$, phóng to đồ thị vào gần điểm $(1; 1)$:



Hình 1.3: Đồ thị $y = x^2$ được phóng to trong khoảng $[0.9; 1.1]$

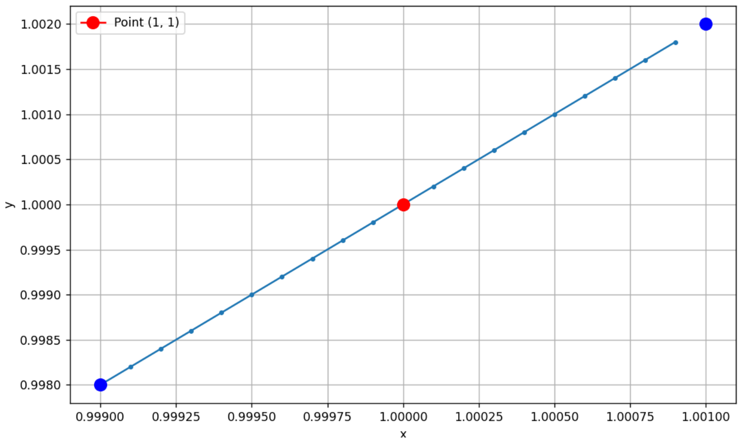
Hãy tưởng tượng có hai con bọ xuất phát từ hai điểm xanh và bò lại *gần* điểm màu đỏ trên con đường tạo thành từ đoạn đồ thị này. Để tiến tới đó, con bọ thứ nhất, xuất phát từ bên trái, phải đi qua các điểm nằm trong khoảng $[0.9; 0.999]$. Trong khi đó, con bọ thứ hai, xuất phát từ bên phải, phải trải qua các điểm nằm trong khoảng $[1.001; 1.1]$.

Ta thấy chúng quả thực đang tiến tới *gần* điểm $(1; 1)$ bởi không chỉ hoành độ mà tung độ của chúng cũng dần tiến đến giá trị bằng 1 (như được kiểm chứng trong bảng bên dưới).

Bảng 1.1: Bảng giá trị $y = x^2$ khi x tới gần 1

Bên trái		Bên phải	
x	y	x	y
0.900	0.8100	1.100	1.2100
0.925	0.8556	1.075	1.1556
0.950	0.9025	1.050	1.1025
0.975	0.9506	1.025	1.0506
0.990	0.9801	1.010	1.0201
0.995	0.9900	1.005	1.0100
0.999	0.9980	1.001	1.0020

Sau khi cả hai lần lượt tới điểm $(0.999; 0.9980)$ và $(1.001; 1.0020)$, chúng tiếp tục di chuyển và để quan sát quá trình tiếp theo, ta tiếp tục phóng to khoảng đồ thị nằm giữa chúng:



Hình 1.4: Khoảng $[0.999; 1.001]$ với hai vị trí ban đầu mới được đánh dấu

Như vậy sự phóng to này có thể tiếp tục vô hạn lần nữa trong khi khoảng cách giữa hai con bọ và điểm màu đỏ càng nhỏ dần. Dù vậy, ta biết rằng trong thực thế rồi chúng sẽ đến được điểm màu đỏ.[1]

Nhưng nếu giả sự tại hai điểm nào đó rất rất gần $(1; 1)$, đường bị gãy (và phía dưới chúng là vực sâu), hai chú bọ không thể tiến lên được nữa. Rồi vấn đề tiếp tục xảy đến rằng chỉ cần vị trí của các điểm này *luôn gần điểm* $(1; 1)$ *hơn chúng*, hai chú bọ đáng thương sẽ phải tiếp tục di chuyển với một quá trình "phóng to vô hạn" như vậy mãi mãi.

Định nghĩa 1.2.1. *Giả sử $f(x)$ xác định trong một khoảng (miền) giá trị nào đó của x có chứa a (có thể xác định hoặc không xác định tại a). Khi đó ta viết*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

và nói "giới hạn của $f(x)$, khi x tiến tới a, bằng L"
nếu chúng ta có thể lấy các giá trị $f(x)$ gần L một cách tuỳ ý bằng cách lấy các giá trị của x đủ gần a (từ bất cứ phía nào), nhưng không được bằng a.

Định nghĩa vừa đưa ra về giới hạn có vẻ khá trừu tượng và thiếu chặt chẽ. Dẫu thế trong khuôn khổ chương trình, ta sẽ không đào sâu vào vấn đề chặt chẽ trong lí luận giới hạn. Thay vào đó, hy vọng với ví dụ vừa rồi, các bạn có thể phần nào thu được trực giác về khái niệm này.

[1]Đoạn đường mà chúng trải qua sẽ nhỏ dần. Quãng đường chúng phải đi sẽ là một tổng có vô số hạng tử với các hạng tử phía sau ngày càng nhỏ mà may thay, tổng này có giá trị hữu hạn.

Định nghĩa 1.2.2. *Ta viết*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

để nói rằng giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới a từ phía bên trái (tức là x nhỏ hơn a) bằng L.

Tương tự, với $x > a$, ta viết

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Định lý 1.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L, \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Nghĩa là nếu giới hạn trái và phái khi $x \to a$ cùng bằng nhau thì giới hạn của hàm số tại điểm đó là tồn tại. Ta cũng thừa nhận nếu hàm số tồn tại giới hạn tại điểm nào đó, giới hạn đó là duy nhất. Như đã thể hiện thông qua ví dụ ở trên.

Định nghĩa 1.2.3. *Ta viết*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

nếu f(x) có thể nhận các giá trị lớn tuỳ ý khi cho x nhận các giá trị đủ gần a, nhưng không được bằng a.

Điều này dễ hiểu nếu xét hàm $1/x$ với $a = 0$: lấy 1 chia 100, rồi lấy 1 chia 10, chia 0.1, 0.01, ... kết quả thu được sẽ ngày càng lớn. Nếu lấy 1 chia $1/10^6$, sẽ có được 10^6. Và cứ thế. Chú ý rằng vô hạn không phải một con số. Nó, ở đây, là một giới hạn.
Ta cũng có thể có điều ngược lại:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

để diễn tả khi x nhận các giá trị lớn tuỳ ý (tiến tới vô cùng) thì $f(x)$ tiến tới gần giá trị xác định L một cách tuỳ ý. Trong trường hợp hàm số là $1/x$, ý của ta là tương đương với cho x nhận một giá trị nào đó đủ lớn $(10^2, 10^3, 10^4, 10^n ...)$ sao cho có thể coi $1/x = 10^{-n} \approx 0$.
Cũng có thể viết

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

để nói rằng $f(x)$ có thể nhận các giá trị lớn tuỳ ý khi x đủ lớn.

Để kết thúc phần này, ta thừa nhận và tổng kết những tính chất sau: Giả sử c là một hằng số, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ và $\lim_{x\to a} g(x)$=B

- $\lim_{x\to a} c = c$.
- $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.
- $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B, B \neq 0$.
- $\lim_{x\to a} cf(x) = cA$.
- $\lim_{x\to a}(f(x))^{m/n} = A^{m/n}$.
- Nếu $f(x) = g(x)$ *khi* $x \neq a$, $A = B$.

1.3 Đạo Hàm

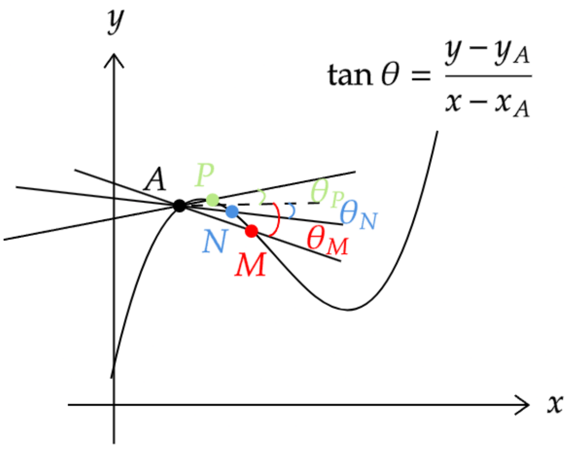
Tiếp theo ta sẽ làm quen với lý thuyết về đạo hàm.

Định nghĩa 1.3.1. ***Đạo hàm*** *của hàm số f tại giá trị a, kí hiệu bởi $f'(a)$, là*

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

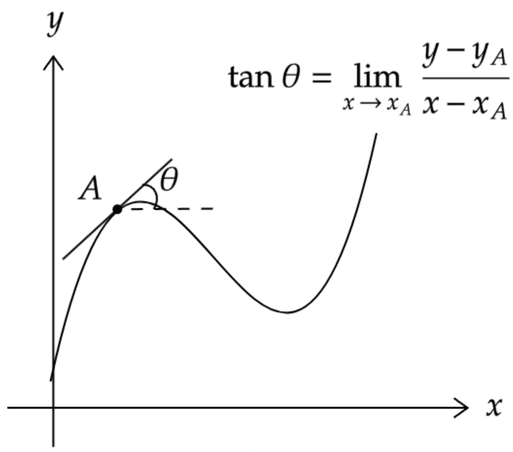
nếu giới hạn này tồn tại.

Một trong những ý nghĩa của đạo hàm là nó thể hiện độ dốc của đồ thị và tốc độ biến thiên của hàm số. Ta xét độ dốc của các đường cát tuyến đi qua A:[2]



Hình 1.5: Độ dốc của các đường cát tuyến đi qua A (các góc θ_M, θ_N, θ_P)

Nếu các điểm M, N, P tiến gần đến điểm A, độ dốc của các đường cát tuyến này sẽ tiến gần đến một giá trị nhất định, chính là độ dốc của tiếp tuyến. Độ dốc này chính là đạo hàm của hàm số tại điểm A:



Hình 1.6: Liên hệ giữa đạo hàm và độ dốc (độ lớn góc θ) của đồ thị

Một ví dụ Vật Lý có thể kể đến là chuyển động của một vật. Nếu ta xét hàm số $s(t)$ là quãng đường vật đi được theo thời gian t, thì đạo hàm của nó tại thời điểm t chính là vận tốc của vật tại thời điểm đó, kí hiệu là $v(t) = s'(t)$.
Cũng từ hình vẽ trên, ta có thể thấy đạo hàm chính là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị. Vì thế, ta có thể biểu diễn phương trình của đường tiếp tuyến tại $x = a$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.2}$$

Dưới đây là đạo hàm của một số hàm thông dung:

- *Đạo hàm của hàm đa thức*:
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{1.3}$$
- *Đạo hàm của các hàm lượng giác*:

[2] Ở đây góc θ_M và θ_N có giá trị âm.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

- *Đạo hàm của hàm mũ và hàm logarit*:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \tag{1.4}$$

Tương tự như giới hạn, đạo hàm cũng có một số tính chất quan trọng:

- *Tính chất tuyến tính*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, và c là một hằng số, thì

$$(cf + g)' = cf' + g' \tag{1.5}$$

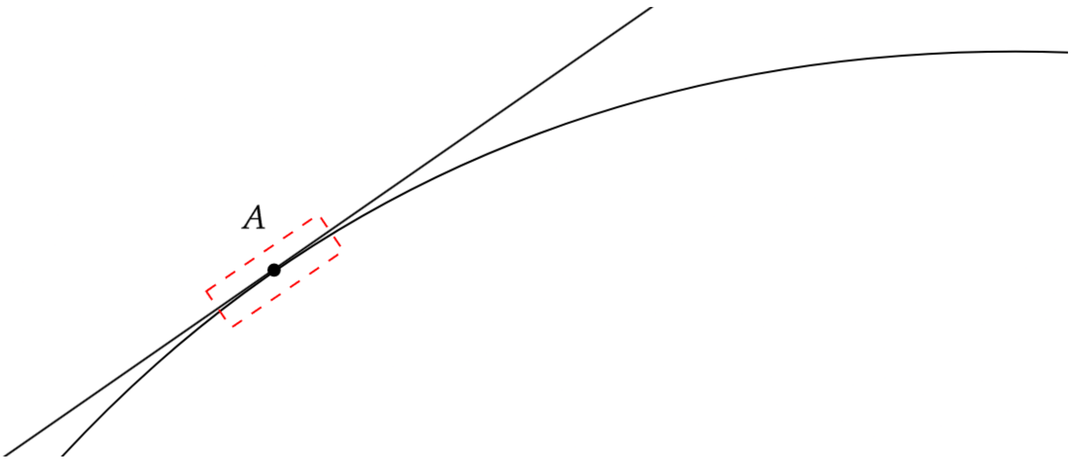
- *Quy tắc nhân*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, thì

$$(fg)' = fg' + f'g \tag{1.6}$$

- *Quy tắc chia*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, với $g(x) \neq 0$, thì

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{1.7}$$

Tiếp theo ta sẽ nói về một ứng dụng quan trọng khác của đạo hàm. Nếu phóng to đồ thị tại điểm $x = a$, ta có thể thấy đồ thị hàm số trông khá giống với tiếp tuyến của nó tại điểm này.



Hình 1.7: Phóng to đồ thị hàm số tại điểm $x = a$

Từ quan sát trên, ta có thể nghĩ tới một phép xấp xỉ.

Định nghĩa 1.3.2. *Ở lân cận điểm $x = a$, ta có thể xấp xỉ hàm số $f(x)$ bằng phương trình đường tiếp tuyến tại điểm này:*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.8}$$

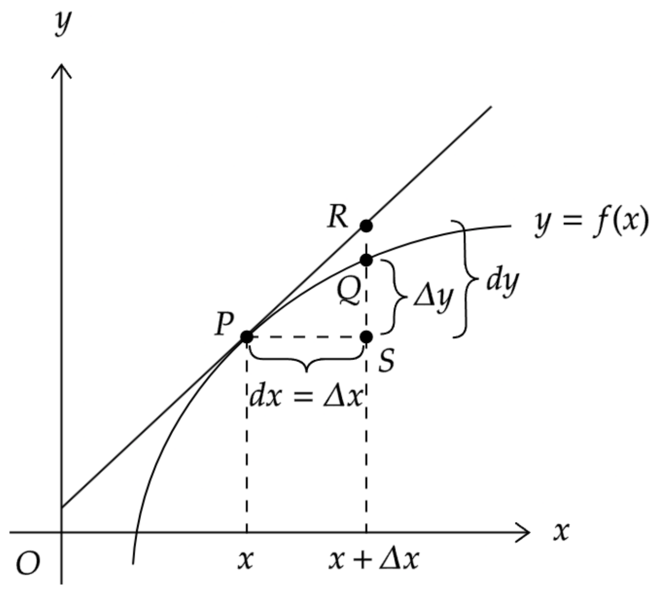
*đây được gọi là **xấp xỉ tuyến tính**.*

Ý tưởng đằng sau phép xấp xỉ tuyến tính đôi khi được phát biểu bằng **phép lấy vi phân**.

Định nghĩa 1.3.3. *Nếu* $y = f(x)$, ***vi phân*** dx *là một biến độc lập. Lúc đó* ***vi phân*** dy *được xác định theo* dx *bởi phương trình:*

$$dy = f'(x)dx \tag{1.9}$$

và **phép lấy vi phân** trên có ý nghĩa hình học như hình vẽ:



Hình 1.8: Ý nghĩa hình học của phép lấy vi phân

1.4 Vi Phân và Ứng Dụng Của Đạo Hàm

1.5 Hướng Dẫn Học

1.6 Bài tập

1.7 Lời giải

Tuần 2

Vector & Đại Số Tuyến Tính

Tuần 3

Chuyển Động Của Chất Điểm Trong Mặt Phẳng

Tuần 4

Cơ Động Lực Học Chất Điểm

Tuần 5

Dao Động

Tuần 6

Phương Pháp Số Trong Mô Phỏng

Tuần 7

Mở Đầu Về Giải Tích Vector & Các Định Luật Bảo Toàn

Tuần 8

Năng Lượng

Tuần 9

Nhập Môn Cơ Học Giải Tích

Tuần 10

Bàn Về Giải Một Bài Toán Cơ Học

Tuần 11

Đo Lường & Xử Lý Số Liệu

Tuần 12

Tổng Kết

A

Python Cơ Bản

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

B

Phân Tích Thứ Nguyên

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.