



# GIỚI THIỆU VÀ MỞ ĐẦU VỀ GIẢI TÍCH

Người trình bày: Võ Anh Tuệ



## 1. Giới thiệu chung

### 1.1 Về khoá học

### 1.2 Toán và Vật Lý

### 1.3 Ứng dụng của lập trình

## 2. Mở đầu về giải tích

### 2.1 Các ý tưởng đầu tiên

### 2.2 Hàm số và Giới hạn

### 2.3 Đạo hàm

### 2.4 Ứng dụng của đạo hàm và vi phân



# Giới thiệu chung

fdjdh

## 1. Giới thiệu chung

### 1.1 Về khoá học

### 1.2 Toán và Vật Lý

### 1.3 Ứng dụng của lập trình

## 2. Mở đầu về giải tích

### 2.1 Các ý tưởng đầu tiên

### 2.2 Hàm số và Giới hạn

### 2.3 Đạo hàm

### 2.4 Ứng dụng của đạo hàm và vi phân



## Định nghĩa

Hàm  $f$  là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử  $x$  thuộc tập hợp  $D$  với một và chỉ một phần tử, kí hiệu  $f(x)$ , thuộc một tập hợp  $E$ .

- ▶  $D$  được gọi là *miền xác định* của hàm số.
- ▶  $E$  được gọi là *miền giá trị* của hàm số.

(hình vẽ)

# Hàm số và Đồ thị

Cách phổ biến nhất để minh hoạt một hàm số là thông qua đồ thị của nó.

Nếu  $f$  là một hàm với miền xác định là  $D$ , đồ thị của nó là một tập hợp các cặp số

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}$$





# Các hàm thông dụng

(hàm tuyến tính)

(hàm đa thức)

(hàm phân thức)

(hàm đại số)

...





## Định nghĩa

**Đạo hàm** của hàm số  $f$  tại giá trị  $a$ , kí hiệu bởi  $f'(a)$ , là

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (1)$$

nếu giới hạn này tồn tại.

## Các định lý của đạo hàm:

### Định lý

Nếu  $f$  khả vi tại  $a$ , thì  $f$  liên tục tại  $a$ .

*Lưu ý: Mệnh đề đảo của định lý này là sai, có các hàm liên tục nhưng không khả vi.  
Ví dụ, hàm  $f(x) = |x|$  là hàm liên tục nhưng không khả vi.*

## Định lý

Nếu  $f$  và  $g$  khả vi

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + g'f, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g + g'f}{g^2} \text{ với } g(x) \neq 0.$$

## Định lý đạo hàm hợp

Nếu  $g$  khả vi tại  $x$  và  $f$  khả vi tại  $g(x)$ , thì hàm hợp  $F = f \circ g \equiv f(g(x))$  khả vi tại  $x$  và  $F'$  được xác định bởi tích

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (2)$$

Theo ký hiệu của Leibniz, nếu  $y = f(u)$  và  $u = g(x)$  đều là hàm khả vi, thì

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (3)$$

## Tiếp tuyến và tốc độ biến thiên

Xét đường cát tuyến của đường cong có phương trình  $y = f(x)$  đi qua 2 điểm  $P(a, f(a))$  và  $Q(x, f(x))$  với  $x \neq a$ . Hệ số góc của đường cát tuyến PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (4)$$

(Hình vẽ)



## Định nghĩa

**Tiếp tuyến** của đường cong  $y = f(x)$  tại điểm  $P(a, f(a))$  là đường thẳng đi qua  $P$  với hệ số góc

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad (5)$$

Nếu giới hạn này tồn tại.

Đạo hàm  $f'(a)$  chính là hệ số góc của đường tiếp tuyến của đường cong  $y = f(x)$  tại  $x = a$ .

# Tiếp tuyến và tốc độ biến thiên

Giả sử  $y$  là đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác  $x$ . Khi đó ta viết  $y = f(x)$ . Nếu  $x$  biến thiên từ  $x_1$  đến  $x_2$  tương ứng với  $y$  biến thiên từ  $y_1$  đến  $y_2$ , tỷ sai phân

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (6)$$

được gọi là **tốc độ biến thiên trung bình** của  $y$  tương ứng với  $x$ .

Giới hạn

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) \quad (7)$$

được gọi là **tốc độ biến thiên tức thời** của  $y$  tương ứng với  $x$ .





Đạo hàm  $f'(a)$  là tốc độ biến thiên tức thời của  $y = f(x)$  tại  $x = a$ .

Nếu  $f(x)$  là quãng đường đi được của một vật,  $x$  là thời gian đi, đạo hàm  $f'(a)$  chính là **vận tốc tức thời** của vật tại thời điểm  $x = a$ .



# Đạo hàm của các hàm thông dụng

Đạo hàm của hàm đa thức:

Quy tắc lũy thừa

Nếu  $n$  là số thực tùy ý, thì

$$\frac{d}{dx} = nx^{n-1} \quad (8)$$

# Đạo hàm của các hàm thông dụng

Đạo hàm của các hàm lượng giác:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

# Đạo hàm của các hàm thông dụng

Đạo hàm hàm mũ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} a^x &= a^x \ln a \\ \frac{d}{dx} \log_a x &= \frac{1}{x \ln a}\end{aligned}\tag{9}$$

# Xấp xỉ tuyến tính và vi phân

Các giá trị của hàm  $y = f(x)$  tại các điểm gần  $P(a, f(a))$  rất gần với giá trị của hàm  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  là tiếp tuyến của đường cong  $y = f(x)$  tại điểm  $P$ .

(Hình vẽ)



## Định nghĩa

Phép tính xấp xỉ

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (10)$$

được gọi là **xấp xỉ tuyến tính**.

Hàm tuyến tính mà đồ thị của nó là tiếp tuyến này

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (11)$$

được gọi là **tuyến tính hóa** của  $f$  tại  $a$ .

# Xấp xỉ tuyến tính và vi phân

Khi  $x$  càng tiến lại gần  $a$ :

$$f'(x)\Delta x \longrightarrow f(x) - f(a) \equiv \Delta y \quad (12)$$

## Định nghĩa

Khi  $\Delta x \rightarrow 0$ , ta kí hiệu  $\Delta x = dx$ , lúc này,  $f'(x)dx$  được gọi là **vi phân** của hàm  $f$ , kí hiệu:

$$dy = f'(x)dx \quad (13)$$

## Định lý

Vi phân của hàm số phụ thuộc vào cách ta chọn biến độc lập:

$$df(g(x)) = (f \circ g)' dx = f'(g)g'(x)dx = f'(g)dg \quad (14)$$



## Đạo hàm bậc cao

Nếu  $f$  là hàm khả vi,  $f'$  cũng là hàm khả vi, vậy có thể có đạo hàm của  $f'$ , được gọi là **đạo hàm bậc hai** của  $f$ , kí hiệu là  $f''$ . Quá trình tương tự có thể tiếp diễn: **Đạo hàm bậc  $n$**  thường được kí hiệu là  $f^{(n)}$  và thu được bằng cách lấy đạo hàm của  $f$   $n$  lần.

## Vi phân bậc cao

Nếu  $f$  là hàm khả vi,  $f'$  cũng là hàm khả vi, vậy  $f'(x)dx$  có thể có vi phân của nó, được gọi là **vi phân bậc hai** của  $f$ , kí hiệu bằng  $d^2f$ . Quá trình tương tự có thể tiếp diễn: **vi phân bậc  $n$** , thường được kí hiệu là  $d^n f$  và thu được bằng cách lấy vi phân của  $f$   $n$  lần,  $d^n f = f^{(n)} df^n$ .

## Công thức Leibniz

...

# Xấp xỉ tuyến tính của một số hàm thông dụng

