

デジタルメディア処理2

担当: 井尻 敬

Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開とフーリエ変換
- 離散フーリエ変換とその性質
- 周波数フィルタリング

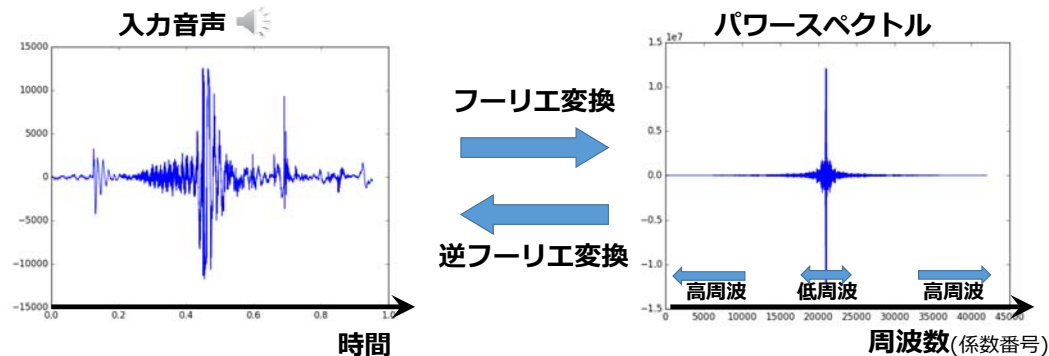
本講義では、フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます。
証明と導出は扱いません。

詳しく知りたい人は「金谷先生: これなら分かる応用数学教室」を強くお勧めします。

フーリエ変換とは

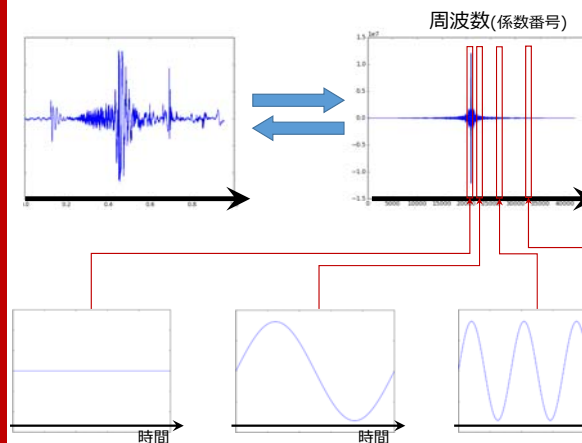
FourierSound.py

- 横軸が時間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法



フーリエ変換とは

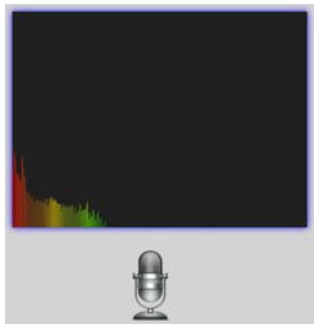
FourierSound.py



- フーリエ変換後の関数は元信号に含まれる正弦波の量を示す
- 中央に近いほど低周波, 外ほどが高周波
- 中央 (最も低周波) は, 定数項で直流成分と呼ばれる
 - 直流成分があるので正弦波の組み合わせでも平均値が0でない信号を作れる

※下の波はイメージ
※本来はもっともっと細かいです。

音の実時間フーリエ変換



データ量に依存するが1D/2Dのフーリエ変換は高速
実時間解析可能

SpectorAnalyzer
by Hidetomo Kataoka @ 立命館大

フーリエ変換とは（画像）

- 横軸が時間/空間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法

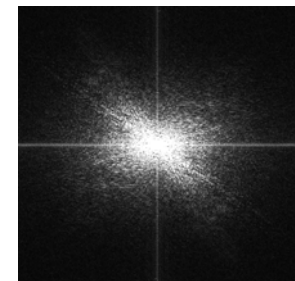


画像
(2D空間に画素が並ぶ)

フーリエ変換

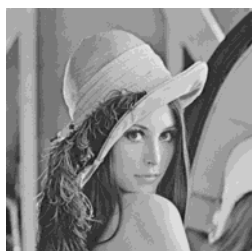


逆フーリエ変換

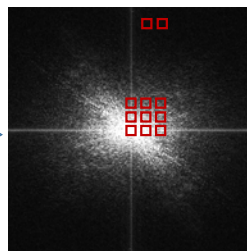


周波数画像
(画素は特定周波数の大きさを示す)

フーリエ変換とは（画像）

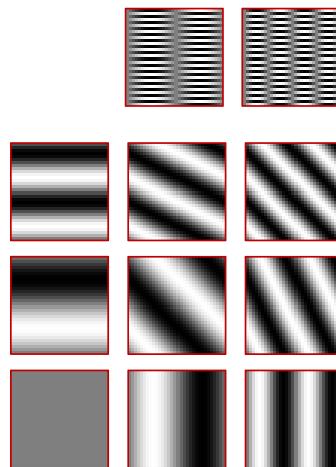


フーリエ
変換



- フーリエ変換後の画像の画素は元信号に含まれる正弦波の量を示す
- 中央付近が低周波、外側が高周波
- 中央画素は、定数項（直流成分）

→ 任意の画像はしましま画像の和で表現できる



この図はイメージです
本来は現画像と同サイズで
もっと細かいです

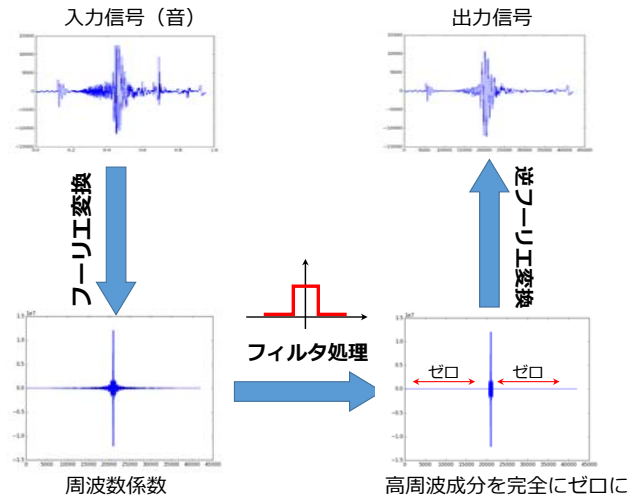
フーリエ変換とは（画像）

FourierPaint.py

FourierPaint.py をデモする

周波数フィルタリング（音）

FourieSound.py



フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

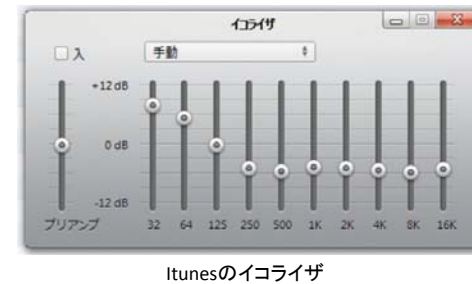
1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

周波数フィルタリング（音）

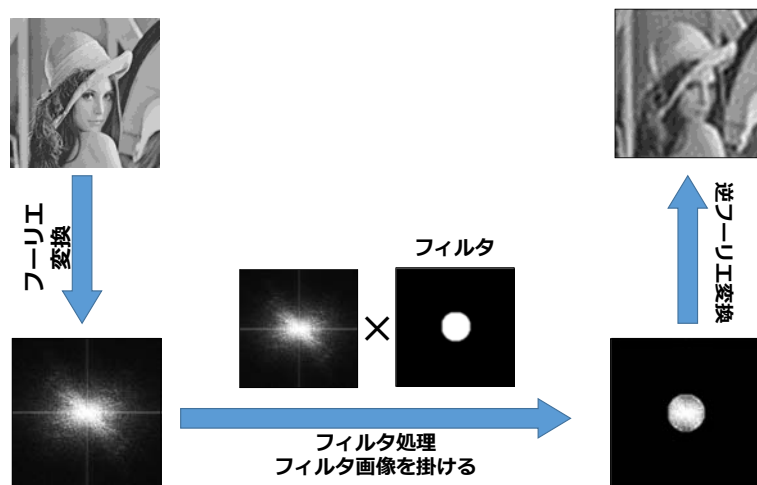
イコライザ

周波数ごとにボリュームを調整する音質調整器

1. 音源をフーリエ変換し
2. 周波数ごとにフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

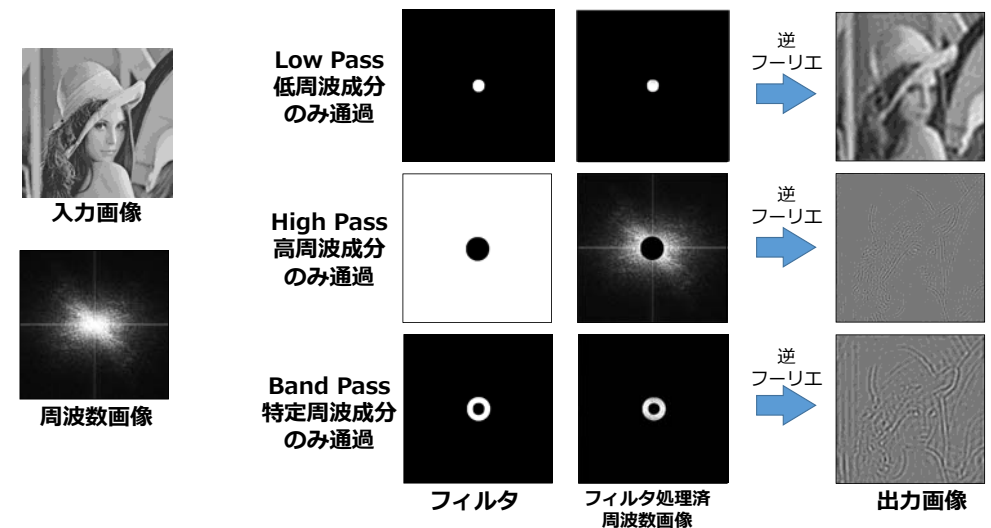


周波数フィルタリング（画像）



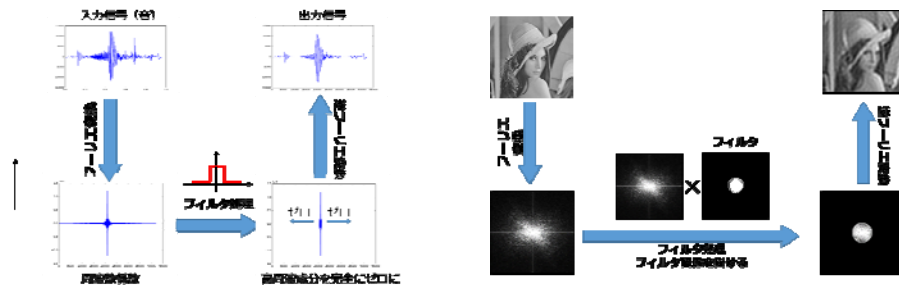
説明のためLowpassの半径を大きくかしかしたけど本当はもっと小さい

周波数フィルタリング（画像）



まとめ（フーリエ変換（概念））

- フーリエ変換は、横軸時間の関数を横軸周波数の関数に変換する
 - 逆フーリエ変換も定義される
 - 2次元フーリエ変換は画像へ適用できる
 - 周波数空間でフィルタ処理すると、周波数に特化した信号処理が可能



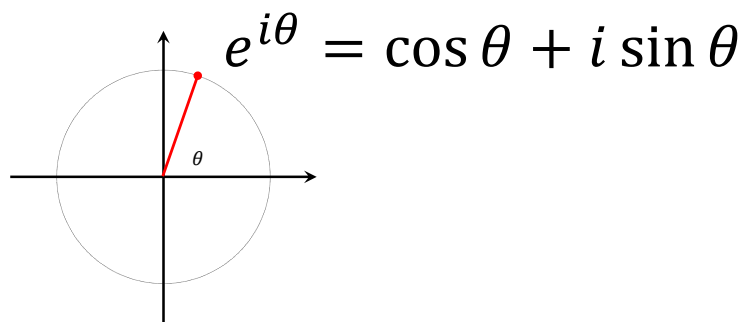
Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開とフーリエ変換**
- 離散フーリエ変換とその性質
- 周波数フィルタリング

本講義では、フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます。
証明と導出は（少しだけしか）扱いません。

詳しく知りたい人は「[金谷先生:これなら分かる応用数学教室](#)」を強くお勧めします。

オイラーの式



$e^{i\theta}$ はガウス平面における単位円に乘る

これはもうこういう表記法だと思って覚えてください

練習

三角関数を合成せよ

- $a \sin \theta + b \cos \theta$

複素数の積を求めよ

- $a (\cos \theta + i \sin \theta) * b (\cos \phi + i \sin \phi)$

以下の関係を証明せよ

- $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$

- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

- $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

- $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

フーリエ級数

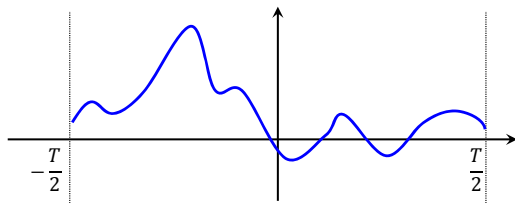
区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} : \text{基本周波数}$$



フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a_1 \cos 1\omega_0 t + b_1 \sin 1\omega_0 t$$

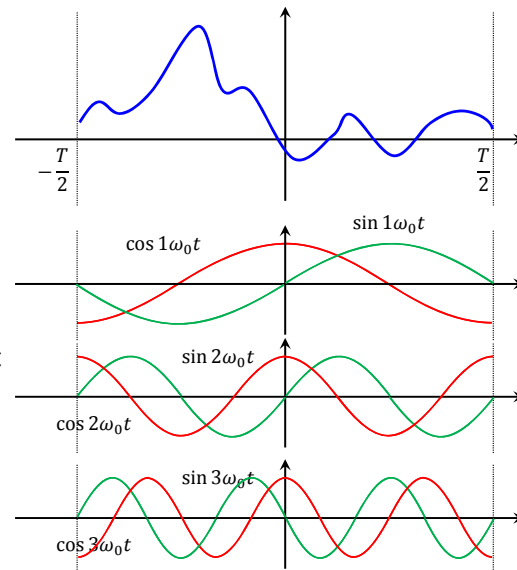
$$+ a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t$$

$$+ a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t$$

$$+ \dots$$

基本周波数

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a'_1 \sin(1\omega_0 t + \phi_1)$$

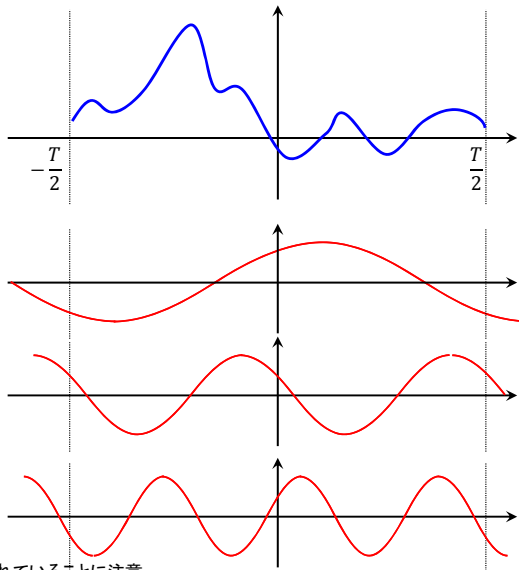
$$+ a'_2 \sin(2\omega_0 t + \phi_2)$$

$$+ a'_3 \sin(3\omega_0 t + \phi_3)$$

$$+ \dots$$

\sin と \cos の振幅を変えて足すとも思えるが、
 a_k と b_k で振幅と位相ずれを制御する、とも見られる

位相がずれても、 $-\frac{T}{2}$ と $\frac{T}{2}$ における位置は同じなので、周期性は保たれていることに注意



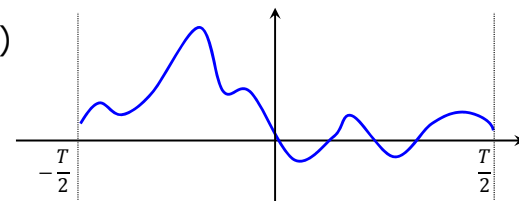
フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}$$

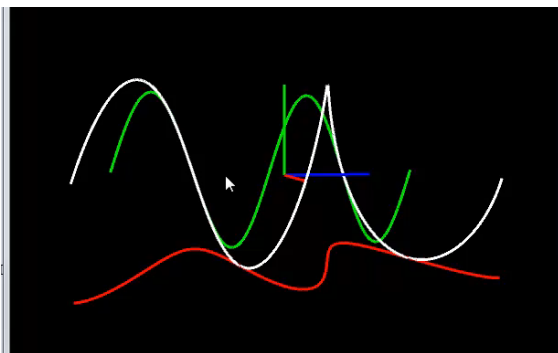
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

この複素数表記された
正弦波を重ね合わせていることは分かるんだけど、
 $\cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t$ に比べてイメージしにくい



フーリエ級数(複素数表記)

$f(t) = e^{ik\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t$
この正弦波は何なのか？



赤が実軸
緑が虚軸
青が時間軸

<https://www.youtube.com/watch?v=YjEkBjDhbr4>

フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

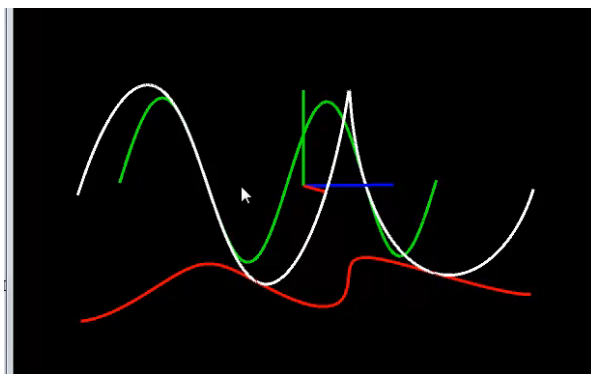
$$\begin{aligned} f(t) = & C_0 \\ & + C_1 e^{i1\omega_0 t} - C_{-1} e^{-i1\omega_0 t} \\ & + C_2 e^{i2\omega_0 t} - C_{-2} e^{-i2\omega_0 t} \\ & + C_3 e^{i3\omega_0 t} - C_{-3} e^{-i3\omega_0 t} \\ & + \dots \end{aligned}$$

複素数の掛け算 $C e^{i\omega t}$ は
 $C = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ とすると、
 $C e^{i\omega t} = r e^{i\omega t + \phi}$ となる

つまり、 C を掛けるというのは、
 $e^{i\omega t}$ に対し位相を θ ずらして r 倍する
操作だといえる

フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。



動画の後半参照 or FourieViz.pdeをprocessingで実行してみてください。

$$\begin{aligned} f(t) = & C_0 \\ & + C_1 e^{i1\omega_0 t} - C_{-1} e^{-i1\omega_0 t} \\ & + C_2 e^{i2\omega_0 t} - C_{-2} e^{-i2\omega_0 t} \\ & + C_3 e^{i3\omega_0 t} - C_{-3} e^{-i3\omega_0 t} \\ & + \dots \end{aligned}$$

まとめ: フーリエ級数展開

※今回は導出と証明を省きました
詳しく知りたい人は教科書参照

• オイラーの式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

• フーリエ級数展開: 周期 T を持つ関数は正弦波の重ね合せで表現可

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t), \quad a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

• フーリエ級数展開 (複素数表現):

上式にオイラーの式を代入すると以下のように変形できる

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

練習: 下の式(1)-(3)より, 式(4)(5)を導け

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t) \dots (1)$$

$$a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \dots (2)$$

$$b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \dots (3)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (4)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (5)$$

練習の解答

以下のフーリエ級数展開が成り立つものとする,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t), \dots (1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt, \dots (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt. \dots (3)$$

一方オイラーの式より,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \dots (4)$$

が得られる.

式(4)を式(1)へ代入し整理すると,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k (e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}) - i b_k (e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k - i b_k) e^{ik\omega_0 t} + b_k (a_k + i b_k) e^{-ik\omega_0 t} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (5) \end{aligned}$$

ただし,

$$C_k = \begin{cases} \frac{a_k - i b_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases} \dots (6)$$

と置いた.

また, 式(6)に式(2)(3)を代入し整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{a_k - i b_k}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt - i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (7) \\ \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos -k\omega_0 t \, dt + i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin -k\omega_0 t \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (8) \end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i0\omega_0 t} \, dt \dots (9)$$

上記(5,6,7,8,9)より,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (10)$$

フーリエ級数展開の複素数表現が得られる.

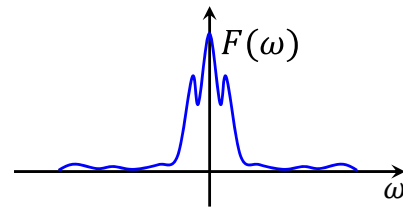
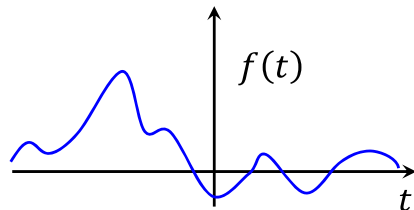
フーリエ変換とは

フーリエ変換:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

逆フーリエ変換:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$



- 時間 t の関数 $f(t)$ を、周波数 ω の関数 $F(\omega)$ に変換する
- $f(t)$ と $F(\omega)$ は複素数関数である ($f(t)$ は実数関数のことが多い)
- フーリエ級数展開において $T \rightarrow \infty$ とすると導出できる

フーリエ変換の導出 - これなら分かる応用数学教室, 金谷健一先生著 より

フーリエ変換の導出.

周期 T の関数 $f(t)$, $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ は, 以下の通りフーリエ級数に展開できる,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (1)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (2)$$

ここで, $\omega_k = k\omega_0$, $\Delta\omega = \omega_0 = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$, $C_k = \frac{F(\omega_k)}{T}$ と置くと, (1)より,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} \Delta\omega \dots (3) \end{aligned}$$

が得られる. また, 式(2)より

$$F(\omega_k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} \, dt \dots (4)$$

が得られる. ここで周期 T を $T \rightarrow \infty$ とすると, $\Delta\omega \rightarrow 0$ であり, 式(3)(4)より下式が得られる,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} \, d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \dots (5)$$

この左式を逆フーリエ変換, 右式をフーリエ変換と呼ぶ. ただし, 式(4)から式(5)の変形に以下の関係を用いた,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) \, dx$$

ただし, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ は区間 $[a, b]$ を, N 等分する点. |

Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開とフーリエ変換
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

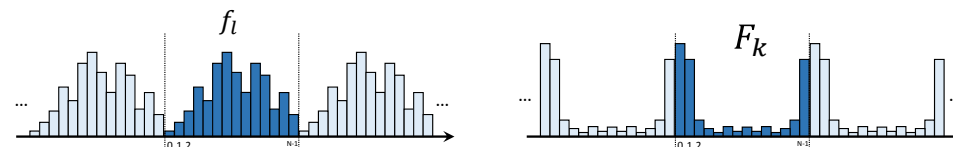
本講義では、フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます。
証明と導出は扱いません。

詳しく知りたい人は「金谷先生：これなら分かる応用数学教室」を強くお勧めします。

離散フーリエ変換（1D）

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}}$$

$$\text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



- 周期 N の離散値 f_l を周期 N の離散値 F_k に変換する
- f_l と F_k は複素数（ただし f_l は実数列のことが多い）
- f_l が実数の場合 $F_k = \overline{F_{-k}}$ が成り立つ（ $F_{-k} = F_{N-k}$ ）

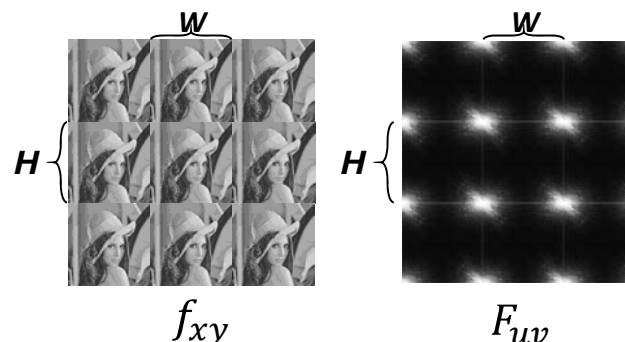
離散フーリエ変換（2D）

フーリエ変換：

$$F_{uv} = \frac{1}{WH} \sum_{y=0}^{H-1} \sum_{x=0}^{W-1} f_{xy} e^{-\frac{2\pi x u}{W}} e^{-\frac{2\pi y v}{H}}$$

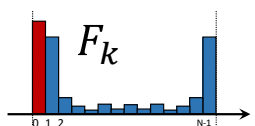
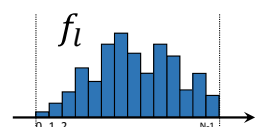
逆フーリエ変換：

$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\frac{2\pi x u}{W}} e^{\frac{2\pi y v}{H}}$$



縦横方向に周期 H/W で繰り返す
離散値 f_{xy} を、離散値 F_{uv} に変換
 f_{xy} と F_{uv} は複素数列（ f_{xy} は画像-
実数列-のことが多い）

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



$$F_0 \times e^{i \frac{2\pi l}{N} \cdot 0}$$

$$F_1 \times e^{i \frac{2\pi l}{N} \cdot 1}$$

$$F_2 \times e^{i \frac{2\pi l}{N} \cdot 2}$$

⋮

$$F_{N-1} \times e^{i \frac{2\pi l}{N} \cdot (N-1)}$$

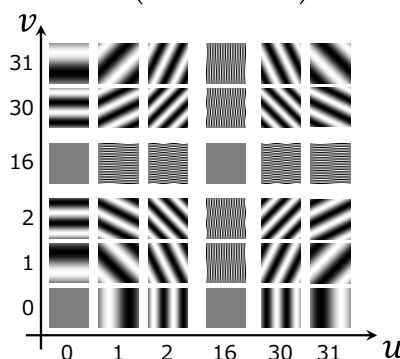
※グラフは全て複素数

- F_0 は定数（直流成分）に対応
- F_k は $[0, N-1]$ 区間において N 回振動する正弦波に対応
- $K=N/2$ がもっとも高周波で、 $k=N-1$ は $k=1$ の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

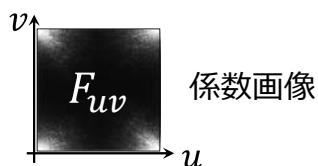


$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{i \left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H} \right)}$$

$$W=H=32 \text{ のときの } \sin \left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H} \right)$$



$F_{u,v}$ は上の (u, v) 番目の画像の係数
実際は $F_{u,v}$ は複素数画像



- $F_{0,0}$ は定数（直流成分）の係数
- $F_{u,v}$ は、画像区間において『縦に u 回・横に v 回振動する正弦波画像』の係数
- $U=v=N/2$ がもっとも高周波で、 $u=N-1$ は $u=1$ の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

離散フーリエ変換の計算例

$N = 8$ のとき

入力： $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi kl}{N}}$$

↑ 複素数とかでできて
ややこしいけど
ただの和分

$$F_0 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) \right]$$

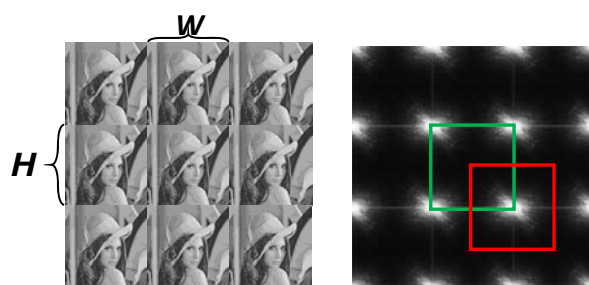
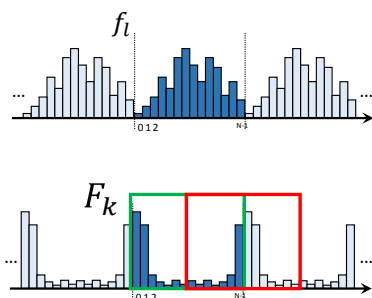
$$F_1 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 1}{8} + i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 1}{8} + i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 7}{8} + i \sin \frac{2\pi 7}{8} \right) \right]$$

$$F_2 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 2}{8} + i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 2}{8} + i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 14}{8} + i \sin \frac{2\pi 14}{8} \right) \right]$$

$$F_3 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 3}{8} + i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 3}{8} + i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 21}{8} + i \sin \frac{2\pi 21}{8} \right) \right]$$

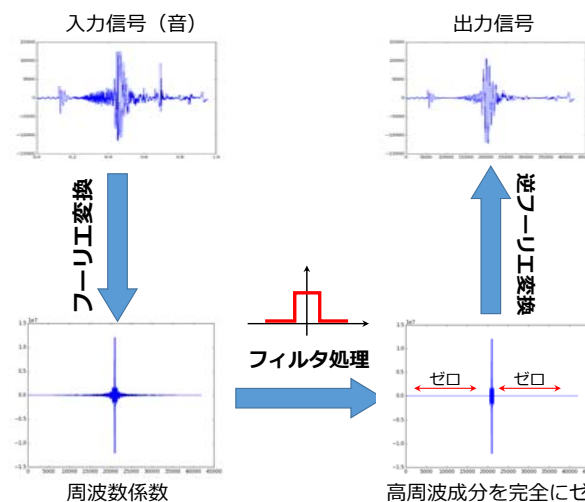
⋮

Shiftの話



- フーリエ変換を実装すると、ピークが端に来る変換結果になる
 - 上図緑四角：これは間違いじゃない
 - 低周波成分を中心においたほうが分かりやすいので 上図赤四角の位置を出力することが多い
 - このshiftを行なう関数が用意されていることも → `np.fft.ifftshift()`

周波数フィルタリング（音）

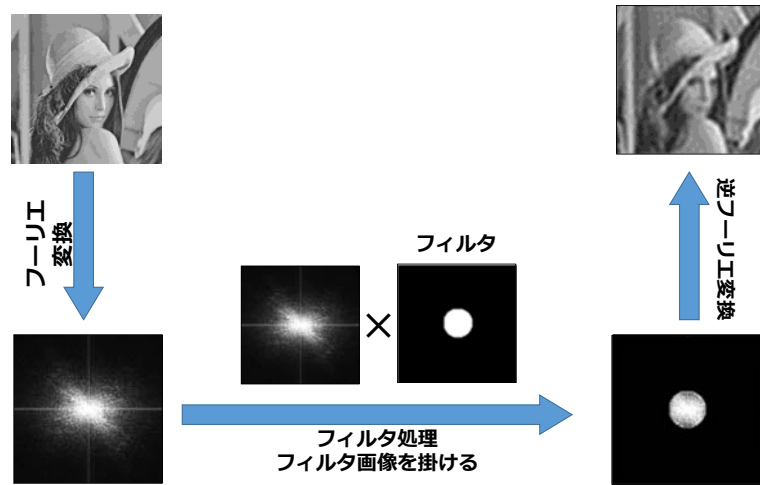


フーリエ変換により周波数を
考慮したfilterが設計できる

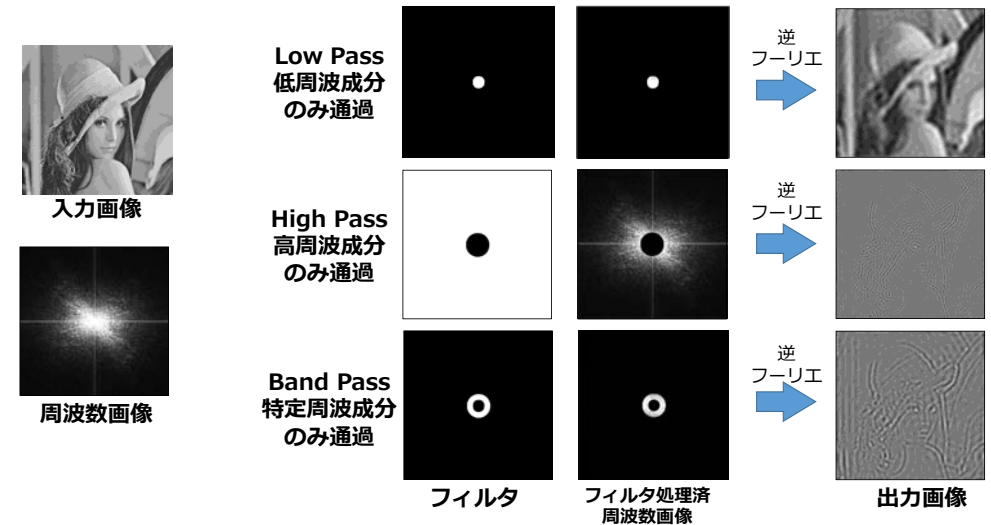
1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

さっきのスライドです！

周波数フィルタリング（画像）

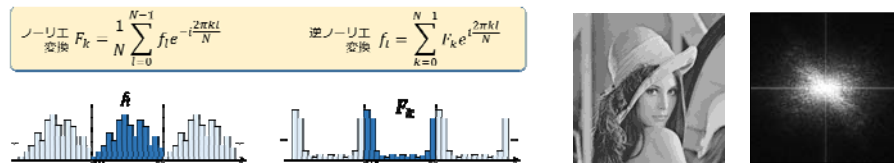


周波数フィルタリング（画像）

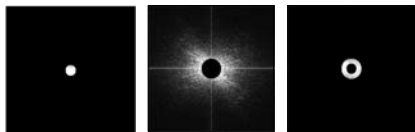


まとめ：離散フーリエ変換と周波数フィルタ

離散フーリエ変換（1D/2D）の実装方法を解説した



周波数空間でマスクを掛ける周波数フィルタを紹介した



畳み込み積分とフーリエ変換

関数の直行性（補足資料）

区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x), g(x)$ は、以下を満たすとき直行するという。

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

区間上 $[-\pi, \pi]$ で、関数 $\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx$ は、互いに直行する。

証明例) $\cos kx$ と $\sin lx$ について、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l)x - \sin(k-l)x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(k+l)x}{k+l} - \frac{\cos(k-l)x}{k-l} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

直行関数展開（補足資料）

関数 $f(x)$ を区間 $[a, b]$ 上の直行関数 $\phi_0(x), \dots, \phi_{n-1}(x)$ により線形結合近似するとき、

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n-1} c_i \phi_i(x)$$

各係数 c_i は以下の通り与えられる、

$$c_i \approx \frac{\int_a^b f(x) \phi_i(x) dx}{\int_a^b \phi_i(x) dx}.$$