1. 令 $a=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$。计算 $a\cdot b, a\times b$。这个问题在书中的另一种表述方式是：令 $a=i+2j+k, b=-i-2j+k$，计算 $a\cdot b, a\times b$。其中 i,j,k 为 $\mathbb{R}^3$ 中的三个单位向量。

2. a,b 同上题，$c=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$。计算 a,b 张成的平行四边形的面积，a,b,c 张成的平行六面体的体积。

3. 四面体 ABCD 的顶点坐标为 $A(0,0,0)$,$B(1,2,1)$,$C(-1,-2,1)$,$D(1,0,1)$。计算 ABCD 的体积。

4.$a,b,c\in\mathbb{R}^3$。已知 $(a\times b)\times c=\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix}, (b\times c)\times a=\begin{bmatrix}2\\-2\\-3\end{bmatrix}$, 计算 $(c\times a)\times b, (b\times a)\times c$。

5. 令 $a,b\in\mathbb{H}$。已知 $ab=i+j, a=1+i$，求 $\bar{b}\bar{a}, b$。在这个问题中，$1,i,j$ 均为四元数。

6. 正方形 X 的四个顶点沿顺时针标记为 1,2,3,4。沿对角线 13 的翻转可以用置换的符号表示为 $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\?&?&?&?\end{smallmatrix}\right)$。先沿对角线 13 的翻转，再绕中心顺时针旋转 $\pi/2$，这样得到的 X 到自身的映射用置换的符号表示，是 $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\?&?&?&?\end{smallmatrix}\right)$。

7. D_4, S_3 中的元素个数分别为多少？方程 $x^3=e$ 在 D_4, S_3 中的解的个数分别为多少？（在后续课程中，我们会学到，在一个有限群 G 中求解方程 $x^n=e$，解的个数是 n 的约数，也同时是 $|G|$ 的约数。）

8. $\mathbb{R}^*$ 作用在 $\mathbb{R}^2$ 上。如果作用的方式是 $(t,(x,y))\mapsto(tx,ty)$，描述所有的轨道。如果作用的方式是 $(t,(x,y))\mapsto(tx,t^{-1}y)$，写出通过 $(2,-1)$ 的轨道。如果作用的方式是 $(t,(x,y))\mapsto(t^3x,t^2y)$，写出通过 $(2,-1)$ 的轨道。

9. 考虑 $GL(2,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的自然作用 $GL(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$:

$$\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)\mapsto\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

求圆 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ 在矩阵 $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right]$ 作用下的像的方程。求双曲线 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=1\}$ 在矩阵 $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right]$ 作用下的像的方程。

10. 平面的点位式方程，三点式方程。见解析几何教材 p68 页。在答题时要把行列式计算出来。不可以只写出行列式的表达式。

11. 计算线形映射的矩阵。见 Lay 的教材第一章 §9，以及第一章 §9 课后习题 1-12。

12. 令 $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 6 个向量。如果它们之间满足关系

$$(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

找出 3×3 矩阵 A，满足

$$(f_1, f_2, f_3)A = (e_1, e_2, e_3)$$

证明 f_1, f_2, f_3 线性无关当且仅当 e_1, e_2, e_3 线性无关。证明 $span\{e_1, e_2, e_3\} = span\{f_1, f_2, f_3\}$。

13. 给出线性变换 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，计算 $ker(T), im(T)$ 的基。这类问题在 Lay 的教材中的表述为：给出 $m \times n$ 阶矩阵 A，计算 $Col(A), Nul(A)$ 的基。参考 Lay 的教材第二章 §8 以及相应课后习题。

14. 正方形 X 的四个顶点沿顺时针标记为 1,2,3,4。映射 $T : X \to X$ 满足性质：X 内的任意两点间的距离在映射 T 作用前后不发生改变。证明 T 一定是课堂上描述的 D_4 的 8 个元素中的一个。

15. 在 $\mathbb{R}$ 中, 方程 $x^2 = -1$ 无解。在 $\mathbb{C}$ 中, $x^2 = -1$ 有两个解。在 $\mathbb{H}$ 中, $x^2 = -1$ 的解是哪些四元数？证明你的结论。

16. 考虑映射

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

验证：如果 $a,b\in\mathbb{R}^3$，则 $\phi(a\times b)=\frac{1}{2}\Big(\phi(a)\phi(b)-\phi(b)\phi(a)\Big)$。（方法：向量的外积 $a\times b$ 的计算利用解析几何教材 p37 页公式 1.8-9。四元数的乘积则按照乘法分配率以及关系 $i^2=-1, ij=k,\ldots$ 进行计算。）

17. 考虑 3×3 的实矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

如果线性映射

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

$$x\mapsto Ax$$

满足条件 $T(x)\cdot T(y)=x\cdot y$ 对任意 $x,y\in\mathbb{R}^3$ 成立（这里 $\cdot$ 表示向量的内积），证明 T 是保长映射（即对于 $\mathbb{R}^3$ 中任意两点 p_1,p_2 我们有 $d(T(p_1),T(p_2))=d(p_1,p_2)$，这里 $d(-,-)$ 表示两点间的距离。提示：需要用到内积与两点间距离的关系。见 lecture 16 ppt 第 16 页，或 Lay 的教材第 6 章第 1 节。）

18. 继续考虑 17 题。条件 $T(x)\cdot T(y)=x\cdot y$ 表现在矩阵 A 中数字 a_{ij} 的选取上，意味着这些 a_{ij} 需要满足什么条件？（提示：首先考虑条件 $T(e_1)\cdot T(e_1)=e_1\cdot e_1=1$。这意味着矩阵 A 的第一列需要满足什么关系？其次对于 $i,j=1,2,3$ 类似地考虑 $T(e_i)\cdot T(e_j)=e_i\cdot e_j$。）满足 17 题条件的矩阵叫做正交矩阵。参考 12 月 5 日上传的影印抽象代数教材的例 1.8。证明正交矩阵的行列式等于 1 或-1。

19. 令 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为任意一个 $\mathbb{R}^2$ 到自身的保长映射。（这里我们并没有假设 T 是线性映射，也没有假设 T 是双射。我们只是假设了对于平面上任意两点 P_1,P_2 都有 $d(P_1,P_2)=d(T(P_1),T(P_2))$）如果平面上存在一个点 P，满足 $T(P)=P$（这个点叫做映射 T 的不动点），证明 T 一定是平面围绕点 P 的某个旋转。

20. 考虑平面上的一个正五边形 X。如果映射 $T:X\to X$ 满足条件：对任意 $P_1,P_2\in X$ 都有 $d(P_1,P_2)=d(T(P_1),T(P_2))$，则称 T 为 X 到自身的一个保长映射。

所有的 X 到自身的保长映射构成一个集合，记做 D_5。找出 10 个属于 D_5 的保长映射。证明 D_5 中的映射必然把 X 的顶点映射到顶点，边映射到边，中心映射到中心。从而证明 D_5 中的映射全部都是双射。