

华中科技大学数学学院 备课纸 _____ 系 _____ 专业

Ex 2:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$r_2: r_2 - \lambda r_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$r_3: r_3 - r_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<1> 如果 $\lambda = 1$, 矩阵变为

<2> 如果 $\lambda \neq 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow \frac{1}{1-\lambda} r_2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 - (1+\lambda)r_2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda+2 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

华侨大学数学学院 备课纸 _____ 系 _____ 专业

<2>₁ : 如果 $\lambda = -2$, 那么矩阵最后一行对应的方程是:

$$0 = 1.$$

所以方程组无解

<2>₂ $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda+2 & (\lambda+1)^2 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 - \lambda r_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1+\lambda & \lambda(\lambda+1) \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 + r_3} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 - (1+\lambda)r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) - \frac{(\lambda+1)^3}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} - \lambda \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array} \right)$$

方程组有唯一解.