

在第一讲中我们介绍了一些预备知识，但是在正式开始我们的学习旅程前，我希望在这里先讨论一些和知识本身关系不大的话题，也就是一些学习这门课的一些数学思想的准备，目的主要是给刚刚进入大学的同学一个思维上升的台阶，以便更好地接受接下来抽象的内容。

1ε.1 数学证明初探

我想我们很有必要在入门课程的开头简要介绍一些关于数学证明的问题。因为我们高中阶段很多时候的证明不过是计算性的验证——例如证明圆锥曲线的一些结论，或是导数题的证明，很多时候都只是通过计算验证这一结论是否正确，而非从定义出发对命题进行“证明”。我们举一个简单的例子：

例 1ε.1

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点（ A, B 不是左右顶点），且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点。求证：直线 l 过定点。
2. 设 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是 X 的子集。证明：
$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$
（其中集合上一横代表对全集 X 的补集）。

第一题一定是各位再熟悉不过的经典高中圆锥曲线习题了。这一证明过程我们只需要联立方程，结合已知条件不断计算即可得出结论，事实上虽是证明题确更偏向于计算性验证，与第二题的风格相去甚远。我们来分析并书写一下第二题的证明：