29/3/18

TD4 – JORDANISATION (SUITE)

Exercice 1

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) (a) $\chi_u(t) = \det(u - tI)$

$$= \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-t & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-t & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -t \end{vmatrix}$$

$$= (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & -2 \\ 1 & 2-t & -1 \\ 2 & 1 & -t \end{vmatrix} - 0 \cdot |\dots| + 0 \cdot |\dots| - 0 \cdot |\dots|$$

$$= (1-t)\left[(4-t) \begin{vmatrix} 2-t & -1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -t \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2-t \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= (1-t)\left[(4-t)(t^2 - 2t + 1) + (t-2) - 2(1 + 2t - 4) \right]$$

$$= (1-t)\left[(4-t)(t-1)^2 - 3t + 4 \right]$$

$$= (1-t)(4-t)(t-1)^2 \underbrace{+3t^2 - 4t - 3t + 4}_{= (3t-4)(t-1)}$$

$$= (t-1)^3(t-4) + (t-1)(3t-4)$$

ça ne factorise pas ~~tout de suite~~ tout de suite ...

$$= (t-1)\left[(t-1)^2(t-4) + (3t-4)\right]$$

$$= (t-1)\left[t^3-2t^2+t-4t^2+8t-4+3t-4\right]$$

$$= (t-1)\left[\underbrace{t^3-6t^2+12t-8}\right]$$

$= (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$
donc, au moins, il faut que $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 8$
donc essayer $\lambda_1 = 2$ (qui divise 8)

$$= (t-1)(t-2)\left[t^2-4t+4\right]$$

$$= (t-1)(t-2)^3$$

(b) $E_1 := \ker(u-\lambda_1 I)$ $\quad\begin{pmatrix}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = 2\end{pmatrix}$
$E_2 := \ker(u-\lambda_2 I)$

$$u - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où $(u-I)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = b$
(troisième et quatrième lignes)

mais si on prend $a=b=0$ alors on a besoin de c et d t.q.

$$c-2d=0$$
$$\text{et } c-d=0$$

qui a une seule solution : $a=b=c=d=0$ X

Donc on prend $a=b=1$, d'où $c=-4$, $d=-1$

i.e.
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \underbrace{E_1 = \langle v_1 \rangle}$$

$1 \leq$ mult$_{geom}$ $\leq$ mult$_{alg}$
$\Rightarrow \dim E_1 = 1$

$$U-2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et $(U-2I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$
$a=0$ (1ière ligne)
$b=d$ (3ième ligne)
$c=0$ (2ième ligne)

donc $\ker(U-2I) = \langle v_2 \rangle$ où $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

—— // ——

(c) U n'est pas diagonalisable car il n'y a pas quatre vecteurs propres — il n'y a que deux vecteurs propres

~~[illegible]~~

Mais $\chi_u(t)$ est scindé dans $\mathbb{R}[t]$
donc ~~ce~~ u est triangularisable

— || —

~~(i)~~ ~~(c)~~ 2) Il faut calculer $m_u(t)$ pour savoir les degrées dans la definition ~~de~~ de F_i.

$$m_u(t) = (t-1)(t-2)^k \qquad \text{pour } k=1,2, \text{ ou } 3$$

Mais on sait que si $m_u(t) = (t-1)(t-2)$ alors u est diagonalisable, qui n'est pas le cas.
En fait, nous avons le "pire cas" — la multiplicité géométrique de λ_2 est minimale (c'est-à-dire 1) donc la multiplicité du polynôme minimal est maximal :

$$\begin{array}{ccc}
k=1 & k=2 & k=3 \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
u \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} & u \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} & u \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\
\text{trois vecteurs propres pour } \lambda_2=2 & \text{deux vecteurs propres pour } \lambda_2=2 & \text{une vecteur propre pour } \lambda_2=2
\end{array}$$

Donc $m_u(t) = (t-1)(t-2)^3$, d'où

$$F_1 := \operatorname{Ker}(u-I) = E_1$$

$$F_2 := \operatorname{Ker}(u-2I)^3.$$

Alors, $(u-2I)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^3$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=(u-2I)^2}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis $(u-2I)^3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ $a = 0$, b, c, d libre

i.e. $\operatorname{Ker}(u-2I)^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

— x —

Pour β_1, on voit que

$(u-I)|_{\operatorname{Ker}(u-I)} = 0$ par définition et alors $\beta_1 = 1$.

~~Pour~~ Pour β_2, $(u-2I)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \neq 0$ (voir p.3)

$\Rightarrow u-2I \neq 0$ sur F_2

$(u-2I)^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \neq 0$ (voir p.5)

$\Rightarrow (u-2I)^2 \neq 0$ sur F_2

mais forcement $(u-2I)^3 = 0$ sur $F_2 = \ker(u-2I)^3$
donc $\beta_2 = 3$.

---

3) $v \in F_2$ et $v \notin \ker(u-2I)^2$

$v_1 := (u-2I)^2 v$
$v_2 := (u-2I) v$
$v_3 := v$

On définit $\varphi = (u-2I) : F_2 \longrightarrow F_2$.

<u>Indépendance:</u> $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \varphi^2 v_1 + \lambda_2 \varphi^2 v_2 + \lambda_3 \varphi^2 v_3 = \underset{=0}{\varphi^2(0)}$

$= \lambda_1 \varphi^4 v + \lambda_2 \varphi^3 v + \lambda_3 \varphi^2 v$

$(\varphi^3 = 0)$ $\quad = \lambda_3 \varphi^2 v \Rightarrow \lambda_3 = 0$

Le même avec φ au lieu de φ^2 nous

donne que $\lambda_2 = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$ aussi.
Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement indépendant mais aussi de taille trois — un ensemble libre du même taille que la dimension de l'espace est une base.

— " —

4)
$$T = \Big(\underbrace{u(v_1) \quad u(v_2) \quad u(v_3) \quad u(v_4)}_{\text{exprimés dans la base } \mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}} \Big)$$

$$\begin{aligned} u(v_1) &= u(u-2I)^2 v \\ &= (u-2I)^3 v + 2I v_1 \\ &= 0 + 2v_1 = 2v_1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} &u = u - 2I + 2I \\ &\Rightarrow u(v_i) = (u-2I)v_i + 2v_i \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} u(v_2) &= u(u-2I)v \\ &= (u-2I)^2 v + 2I v_2 \\ &= v_1 + 2v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(v_3) &= uv \\ &= (u-2I)v + 2v_3 \\ &= v_2 + 2v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(v_4) &= (u-I)v_4 + v_4 \\ &= v_4 \end{aligned} \qquad (v_4 \in F_1 = \ker(u-I))$$

donc
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Jordanisation $\Rightarrow$ <u>existence</u> d'une décomposition de Dunford
(N.B. l'unicité dans le théorème de Dunford est la vraie difficile à montrer)

parce que
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$$

et D diagonale $\Rightarrow ND = DN$
et ~~N32~~ $N^2 = 0$ (on sait que c'est nilpotente parce que c'est <u>strictement</u> triangulaire supérieure)

Maintenant,

$$T^5 = (D+N)^5 \overset{\substack{\text{(parce que} \\ ND=DN) \; ⚠}}{=} D^5 + 5D^4N + 10D^3N^2 + 10D^2N^3 + 5DN^4 + N^5$$

$$\overset{(N^2=0)}{=} D^5 + 5D^4N$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & & & \\ & 32 & & \\ & & 32 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 16 & & & \\ & 16 & & \\ & & 16 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = (3-t)\begin{vmatrix} 2-t & 0 \\ -2 & -t \end{vmatrix}$$

$$-(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -t \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2-t \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (3-t)(t^2-2t) + t - (2+3t-6)$$

$$= 3t^2 - 6t - t^3 + 2t^2 + t + 4 - 3t$$

$$= -(t^3 - 5t^2 + 8t - 4)$$

(on peut oublier les signes globals)

$$= (t-2)(t^2-3t+2)$$

$$= (t-2)^2(t-1)$$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$(A-I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \implies a=b=c$

donc $\ker(A-I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$(A-2I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \implies a=0$ et $b=-c$

donc $\ker(A-2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

et on cherche une troisième vecteur pour une base — on a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on veut ~~un~~ v_3 t.q. $(A-2I)v_3 = v_2$

i.e. $v_3 \in \ker(A-2I)^2$ i.e. v_3 t.q. $Av_3 = v_2 + 2v_3$.

$(A-2I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies$

$$\begin{aligned} b+c &= a \\ a &= -1 \\ 3a-2b-2c &= -1 \end{aligned}$$

$\implies b+c = a = -1$ e.g. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =: v_3$

Matrice de passage est

$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: J$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

N.B. $A^k = (PJP^{-1})^k = PJ^kP^{-1}$

mais aussi
$$J^k = (D+N)^k$$

où
$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

$$DN = ND, \quad \text{et} \quad N^2 = 0 \qquad \boxed{\text{pour } k \geq 2}$$

$$\Rightarrow (D+N)^k = D^k + kD^{k-1}N + \underbrace{0 + \dots + 0}_{\text{contient } N^2 \text{ ou plus}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^k & \\ & & 2^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^{k-1} & \\ & & 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

puis $A^k = PJ^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1}$ ~~e.g. élimination Gaussienne~~

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2^k+2^{k-1} & -2^{k-1} & 2^k+2^{k-1} \\ 2^k & -2^k & 2^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^k+2^k+2^{k-1}-1 & 1-2^k-2^{k-1} & 2^k+2^k+2^{k-1}-2 \\ 2^{k-1} & 2^k-2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 1-2^k & 2^k-1 & 2-2^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{k+1}+2^{k-1}-1 & 1-2^k-2^{k-1} & 2^{k+1}+2^{k-1}-2 \\ 2^{k-1} & 2^k-2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 1-2^k & 2^k-1 & 2-2^k \end{pmatrix}$$

(pour $\underline{\underline{k \geq 2}}$)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B(t) = (1-t)\left(t^2-2t+1\right) = -(t-1)^3 \sim (t-1)^3$$

$$(B-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(rang de lignes $=1$
p.q. $1^{\text{ière}} = 0$
$2^{\text{ième}} = -3^{\text{ième}}$)
$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(B-I) = 2$

$$\ker(B-I) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

et $(B-I)^2 = 0$ ... ~~on choisit~~
mais on voit que (par exemple)

$$(B-I)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

donc $v_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

et alors $Q = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

les colonnes sont les nouvelles vecteurs (v_i) exprimé dans les anciens $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{~~etc~~}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

d'où $Q^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

et $K = Q^{-1} B Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

— || —

$B^k = Q K^k Q^{-1}$ mais (pour $k \geq 2$)

$$K = \underbrace{I}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}}_{N} \Rightarrow K^k = I^k + k I^{k-1} N = I + kN = \begin{pmatrix}1 & k & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow N^2 = 0$

alors $QK^kQ^{-1} = Q\begin{pmatrix}1 & k & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}Q^{-1}$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & k & k+1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-k & -k\\ 0 & k & k+1\end{pmatrix} = B^k \quad \text{pour } \underline{k \geq 2}$$

$$C = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\chi_C(t) = -t\big((1-t)(2-t)-1\big)$$
$$-(-2+t+1)$$
$$+(-1+1-t)$$

$$= -t(2-3t+t^2-1) - t + 1 - t$$
$$= -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$
$$= -(t-1)(t^2 - 2t + 1)$$
$$= -(t-1)^3 \sim (t-1)^3$$

$$C - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(C-I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(C-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\Rightarrow m_C(t) = \chi_C(t) = (t-1)^3 \right)$$

$$\Longrightarrow F_1 = \operatorname{Ker}(C-I)^3$$

On peut faire le même que dans Exercise 1 Partie 3 — $v \in \operatorname{Ker}(C-I)^3$ t.q. $(C-I)^2 v \neq 0$.

e.g. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \underbrace{(C-I)^3}_{=0} = \mathbb{R}^3$

mais
$$(C-I)^2 v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Donc on choisit

$$v_1 = (C-I)^2 v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$v_2 = (C-I) v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$v_3 = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } R = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } L = R^{-1} C R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}} \quad = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^k = R L^k R^{-1} \quad \text{et} \quad L = I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$$

$$\text{où } N^3 = 0 \,,\ N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

donc, pour $\underline{k \geqslant 3}$,

$$L^k = I + kN + \binom{k}{2} N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(on écrit $\tau(k) := \frac{k(k-1)}{2}$) (ou τ_k)

$$C^k = R L^k R^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & \tau_k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_k & 1-k & -1-\tau_k \\ k & -1 & -k \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-k-\tau_k & k & \tau_k + k \\ -k & 1 & k \\ -k-\tau_k & k & 1+k+\tau_k \end{pmatrix}$$

(soit on peut arrêter ici soit on peut écrire $k + \tau_k = \frac{k(k+1)}{2} = \tau_{k+1}$)

— // —

$\boxed{\text{Exercise 3}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = (1-t) \begin{vmatrix} -t & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3-t \end{vmatrix}$$

$$- (-1) \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & \cdots & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{vmatrix}$$

$+ \ldots$

(toutes les matrices dans les autres termes ont cette colone de 0s, donc ~~tout~~ les determinants sont 0.)

$$= (1-t) \left[(-t) \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & -2 \\ 0 & 2 & -3-t \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & -2 \\ 0 & 2 & -3-t \end{vmatrix} \right.$$

(même astuce ici)

$$+\begin{vmatrix} -1 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3-t \end{vmatrix}$$

$$-0 \cdot \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} \Bigg]$$

$$= (t-1)\Big[\, t(2-t)\big[(1-t)(-3-t)+4\big]$$
$$-(1-t)(-3-t)+4 \,\Big]$$

$$= (t-1)\Big[-(t-1)(t+3)+4$$
$$\cancel{= t(2-t)[} \; -t(t-2)(t-1)(t+3)$$
$$-\,4t(t-2)\,\Big]$$

$$= (t-1)\Big[-t^2 - 2t+3+4 - t^4 - 2t^3 + 3t^2$$
$$+2t^3 + 4t^2 - 6t - 4t^2 + 8t\Big]$$

$$\cancel{= (t-1)\big[-t^4 + 4t^2 - 4t + \ldots + 1\big]}$$

inutile

$$\cancel{= -(t^5 - 4t^3 + 4t^2 - 3t}$$
$$\cancel{-t^4 + 4t^2 - 4t + 3)}$$

$$\cancel{= -(t^5 - t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 7t + 3)}$$

$$\cancel{= (t-1)(t^4 - 4t^2 + 4t - 3)}$$

$$\cancel{t(t-1)}$$

~~à un signe près~~

~~il y a une erreur avec une signe qq. part mais je vois pas où~~ ...

woops

~~je devrais avoir~~

$$\chi_A(t) = -(t-1)\left(t^4 - \cancel{4t^2}\,2t^2 + 1\right)$$

$$= -(t-1)\,(t-1)^2\,(t+1)^2$$

$$= -\,(t-1)^3\,(t+1)^2$$

donc $\underline{\lambda_1 = 1}$, $\underline{\lambda_2 = -1}$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\dim \ker(A - I) = 2$ (soustraire 3ième ligne du 1ière ligne et soustraire $[2\cdot(2^{ième} - 3^{ième}) + 4^{ième}]$ du 5ième)

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in Ker(A-I)$

et ils sont indépendent

$$\Rightarrow Ker(A-I) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

donc il manque une vecteur

astuce: $M \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = i^{ième}$ colonne de M ← $i^{ième}$ ligne

$$\Rightarrow (A-I)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc on choisit e.g.

$$\underbrace{v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

($\{a,b\}$ une base
$\Rightarrow \{a, a+b\}$ aussi une base)

d'où $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & & -1 & ? \\ & & & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Maintenant, on étudie $\ker(A+I)$:

$$(A+I)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\Rightarrow a\neq 0,\ d=e}$$
$$\cancel{b+c=-b+c=a \Rightarrow b=0,\ c=e}$$
$$\cancel{\Rightarrow \ker(A+I)}$$

$$\Rightarrow d=e=-(b+c)=-2a$$

$$\Rightarrow \ker(A+I) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}}_{=:v_4} \right\rangle$$

alors on cherche v_5 t.q. $(A+I)v_5 = v_4$

$$\rightsquigarrow v_5 = \begin{pmatrix}-3/4\\-5/4\\-3/4\\1\\0\end{pmatrix}$$

et $P = (v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5)$

et
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&&&\\&1&1&&\\&&1&0&\\&&&-1&1\\&&&&-1\end{pmatrix}$$

et $\chi_A(t) = (t-1)^3 (t+1)^2$

$\Rightarrow m_A(t) = (t-1)^i (t+1)^j$

avec $1 \leq i \leq 3$

$1 \leq j \leq 2$

mais $\dim \mathrm{Ker}(A+I) = 1 \Rightarrow j = 2$

et $\dim \mathrm{Ker}(A-I) = 2 \Rightarrow i = 2$

i.e. $m_A(t) = (t-1)^2 (t+1)^2$

—— || ——

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B(t) = -t \begin{vmatrix} -t & 4 & 0 \\ 1 & -t & 3 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & -t & 3 \\ -1 & 1 & -t \end{vmatrix}$$

$$- 2 \begin{vmatrix} -3 & -t & 4 \\ 0 & 1 & -t \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= t^2 \begin{vmatrix} -t & 3 \\ 1 & -t \end{vmatrix} + 4t \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -t \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -t & 3 \\ 1 & -t \end{vmatrix}$$

$$+ 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -t \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-2t \begin{vmatrix} 0 & -t \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= t^2(t^2-3) + 4t(-t)$$
$$+ 3(t^2-3) + 4(3)$$
$$+ 6(1) - 2t(-t) - 8(1)$$

$$= t^4 - 3t^2 - 4t^2$$
$$+ 3t^2 - 9 + 12$$
$$+ 6 + 2t^2 - 8$$

$$= t^4 - 2t^2 + 1 = (t-1)^2(t+1)^2$$

$$(B-I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^\ell \mapsto 3^\ell + 4^\ell - 1^\ell} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc rang $= 3$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} = 1$

$$(B+I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^\ell \mapsto 3^\ell - 4^\ell - 1^\ell}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} = 1$

(les autres lignes sont indépendant)

d'où $\operatorname{Ker}(B-I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $=: v_1$

$\operatorname{Ker}(B+I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $=: v_3$

On cherche v_2 t.q. $(B-I)v_2 = v_1$

et v_4 t.q. $(B+I)v_{\cancel{4}} = v_3$

$$\rightsquigarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

est t.q. $Q^{-1} B Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et alors $m_B(t) = (t-1)^2 (t+1)^2$