מתרגל: ניר קרת
סמסטר ב' תשפ"א

# חישוב סטטיסטי - תרגיל 1

- יש לענות על כל השאלות.
- הגשת התרגילים היא **בזוגות**.
- שאלות המסומנות ב-** הן שאלות רשות.
- את התרגילים יש להגיש לתיבת ההגשה במודל.
- יש לצרף שני קבצים: קובץ קוד R וקובץ עם חישובים ופתרונות לשאלות, לפי הנדרש (אם בכתב יד, אז **ברור**). ניתן גם להגיש הכל יחד בקובץ אחד, למשל על ידי שימוש ב Rmarkdown.

**בתרגיל זה הפונקצייה replicate יכולה להיות שימושית מאוד. לימדו כיצד להשתמש בה.**

## סימולציות

**1**) קוף מקיש באקראי על מקלדת באנגלית, עד אשר לראשונה מתקבלת מילה כלשהי בת 3 אותיות לבחירתכם (dog, cat, tau, yay, abc…. You name it)

**א**. חשבו אנליטית מהי תוחלת מספר האותיות שיקיש הקוף עד אשר יעצור. שימו לב שהתשובה תלויה במילה שבחרתם.

**ב**. בצעו סימולצייה בת 10000 חזרות ב-R המדמה את המקרה הנ"ל. מה האומד הנקודתי המתקבל מהסימולציה? האם זה עולה בקנה אחד עם חישוביכם מסעיף א'?

**ג**. X הינו מ"מ הסופר את מספר האותיות שיקיש הקוף עד שיעצור. הסבירו באמצעות אינטואיציה האם E(X) צריכה להיות גדולה/קטנה מ Median(X).

**2**) בעזרת סימולציה בת 10000 חזרות, מצאו אומדן ורווח סמך בר"ס 95% להסתברות שאם נדגום בצורה אקראית שלוש נקודות בתוך ריבוע ששטחו 1, ונחבר את הנקודות, נקבל משולש קהה-זווית.

מהי ההסתברות לקבל משולש ישר-זווית? האם תוצאות הסימולציה תומכות בכך?.

**3**) ברצוננו לבצע בדיקת השערות על הפרמטר μ של התפלגות נורמלית עם שונות ידועה 1. כידוע, פרמטר זה מציין גם את התוחלת וגם את החציון של ההתפלגות. בהינתן מדגם $x_1, \dots, x_n$ מההתפלגות הנורמלית, אנו מעוניינים לבדוק האם הפרמטר שווה ל-0, על סמך **החציון** המדגמי ולא על סמך הממוצע, כפי שלמדתם במבוא לסטטיסטיקה.

הניחו כי יש לנו מדגם בגודל 500, ועלינו לבדוק

$$H_0:\ \mu = 0$$

$$H_1: \mu\ \neq 0$$

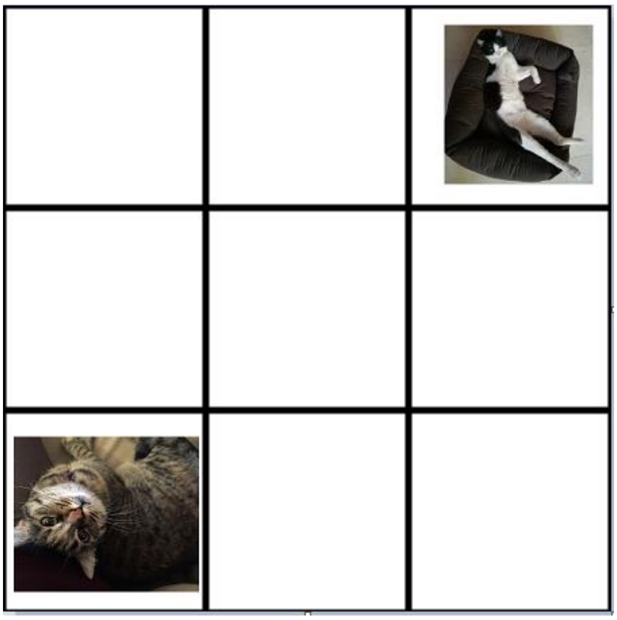
הציעו סטטיסטי מבחן על-סמך החציון המדגמי ובצעו סימולצייה בת 10000 חזרות על מנת למצוא אומד נקודתי לערך הקריטי של מבחן בר"מ 0.05.

חשבו על ידי סימולציה דומה אומדן לעוצמה תחת ההנחה ש $\mu = 0.1$.

השוו את העוצמה שהתקבלה לעוצמה שהיינו מקבלים ממבחן "רגיל" על סמך הממוצע (על ידי חישוב אנליטי). איזה מבחן נראה עדיף?

*הפונקצייה quantile ב-R יכולה לעזור.

**4)**



א. פישקֶ'ה וחתואלה מנמנמים על משטח ריבועי המחולק ל 3X3 אריחים. בכל יום, כל אחד מן החתולים בוחר לרבוץ על אחד האריחים הסמוכים לאריח בו היה ביום הקודם, בהסתברות אחידה. החתולים יכולים לזוז במאוזן, במאונך או באלכסון, ותזוזותיהם בלתי תלויות האחד בשנייה. אמדו על ידי סימולציה של 1000 ימים מהי ההסתברות שביום כלשהו שני החתולים שוכבים באותה משבצת. הערה: התוצאה צריכה להיות רלוונטית ל-"טווח הארוך", כלומר כך שמיקומם ההתחלתי של החתולים אינו משפיע. לצורך כך, היפטרו מ-50 הימים הראשונים של הסימולציה וחשבו את האומד רק מהיום ה-51 והלאה (כך שבפועל דיגמו 1050 ימים, והאומד יחושב על סמך ימים 51 ועד 1050).

**ב. חשבו הסתברות זו באופן אנליטי (הערה: ידע בסיסי בשרשראות מרקוב יועיל כאן).

**5)** מהמרת מגיעה לקזינו ומשחקת משחק הימורים כאשר ההסתברות להצלחה בכל סיבוב היא p, והסיבובים הינם ב"ת. בכל סיבוב ניתן להמר על סכום מסויים, ובמידה וזוכים מרוויחים את סכום ההימור ובמידה ומפסידים, סכום ההימור אובד. המהמרת החליטה לנקוט באסטרטגיה הבאה: בכל סיבוב היא תהמר על סכום קבוע b, עד אשר היא מתרוששת לחלוטין, או עד אשר היא מגיעה לסכום a. המהמרת לא יכולה להמר על יותר ממה שיש לה בכיס, וגם לא תהמר על יותר מן הדרוש על מנת להגיע ל-a, ולכן בפועל בכל סיבוב היא תהמר על $\min(b, x, a-x)$, כאשר x הינו סכום הכסף בכיסה של המהמרת.

א. על סמך 10000 חזרות, מצאו אומדים נקודתיים להסתברות להצלחה (להגיע ל-a) עבור התרחישים:

מתרגל: ניר קרת
סמסטר ב' תשפ"א

1. $a = 5, x_0 = 2, b = 0.1,0.5,1,2, p = 0.6$

2. $a = 10, x_0 = 4, b = 0.1,0.5,1,2, p = 0.4$

כאשר $x_0$ מציין את הונה ההתחלתי של המהמרת.

איזו אסטרטגיה (איזה b) אופטימלית עבור כל אחד מהתרחישים?

ב. חישבו על אסטרטגיה משלכם ובידקו אותה עבור התרחישים לעיל (עבור a,$x_0, p$ הנתונים). השוו את האסטרטגיה שלכם לאסטרטגיות מהסעיף הקודם.

ג. נסו "לשחק" עם צירופים שונים של a,$x_0, b, p$. מה מסתמן כאסטרטגיה האופטימלית עבור $p < 0.5, p > 0.5$? מה קורה כאשר $p = 0.5$? מה ההסבר האינטואיטיבי לתוצאות אלו?

**ד. (סעיף קשה יותר): מצאו ביטוי אנליטי להסתברות להצלחה עבור b=1, כפונקציה של $x_0, p, a$.