<u>שאלה 1</u>

.1

$$f(x)=\frac{1}{-\ln p}\cdot\frac{\beta(1-p)e^{-\beta x}}{1-(1-p)e^{-\beta x}}$$

$$F(t)=\int_0^t\frac{1}{-\ln p}\cdot\frac{\beta(1-p)e^{-\beta x}}{1-(1-p)e^{-\beta x}}\,dx=\frac{\beta(1-p)}{-\ln p}\int_0^t\frac{e^{-\beta x}}{1-(1-p)e^{-\beta x}}\,dx=\left[\begin{array}{l}e^{-\beta x}=s\\ -\beta e^{-\beta x}dx=ds\\ dx=\frac{-1}{\beta e^{-\beta x}}ds\end{array}\right]$$

$$=\frac{\beta(1-p)}{-\ln p}\int_1^{e^{-\beta t}}\frac{1}{-\beta s}\,\frac{s}{1-(1-p)s}\,ds=-\frac{(1-p)}{\ln p}\int_{e^{-\beta t}}^{1}\frac{1}{1-(1-p)s}\,ds=\left[\begin{array}{l}1-(1-p)s=k\\ -(1-p)ds=dk\\ ds=-\frac{1}{(1-p)}dk\end{array}\right]$$

$$=-\frac{(1-p)}{\ln p}\int_{1-(1-p)e^{-\beta t}}^{p}\frac{1}{-(1-p)}\,\frac{1}{k}\,dk=\frac{1}{\ln p}\cdot\ln(k)\Big|_{1-(1-p)e^{-\beta t}}^{p}$$

$$\frac{1}{\ln p}\cdot\left[\ln(p)-\ln\left(1-(1-p)e^{-\beta t}\right)\right]=1-\frac{\ln\left(1-(1-p)e^{-\beta t}\right)}{\ln p}$$

לכן

$$F(x)=1-\frac{\ln\left(1-(1-p)e^{-\beta x}\right)}{\ln p}$$

$$F(x)=u$$

$$1-\frac{\ln\left(1-(1-p)e^{-\beta x}\right)}{\ln p}=u\ \Rightarrow\ (1-u)\ln p=\ln\left(1-(1-p)e^{-\beta x}\right)$$

$$e^{(1-u)\ln p}=1-(1-p)e^{-\beta x}\ \Rightarrow\ e^{-\beta x}=\frac{1-p^{1-u}}{1-p}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -\beta x=\ln\left(\frac{1-p^{1-u}}{1-p}\right)\ \Rightarrow\ x=\frac{-\ln\left(\frac{1-p^{1-u}}{1-p}\right)}{\beta}=\frac{-\ln\left(\frac{p^{1-u}-1}{p-1}\right)}{\beta}$$

$f(x) = ab\,x^{a-1}(1-x^a)^{b-1}$ .3

$$F(t) = \int_0^t ab\,x^{a-1}(1-x^a)^{b-1}\,dx = \begin{bmatrix} x^a = s \\ ax^{a-1}dx = ds \\ dx = \frac{ds}{ax^{a-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{t^a} \frac{ab\,x^{a-1}}{a\,x^{a-1}}(1-s)^{b-1}\,ds = \int_0^{t^a} b(1-s)^{b-1}\,ds = -(1-s)^b\Big|_0^{t^a} =$$

$$= -(1-t^a)^b - \left(-(1-0)^b\right) = 1-(1-t^a)^b$$

$F(x) = 1-(1-x^a)^b$

$F(x) = u$

$1-(1-x^a)^b = u \Rightarrow 1-u = (1-x^a)^b \Rightarrow (1-u)^{1/b} = 1-x^a$

$x^a = 1-(1-u)^{1/b} \Rightarrow x = \left(1-(1-u)^{1/b}\right)^{1/a}$

$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ .4

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = s & x = s^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = ds & dx = 2\sqrt{x}\,ds \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \frac{2}{\pi}\arcsin s\Big|_0^{\sqrt{t}} = \frac{2}{\pi}\cdot(\arcsin\sqrt{t} - 0)$$

$F(x) = \frac{2\cdot\arcsin(\sqrt{x})}{\pi}$

$F(x) = u \quad \frac{2\arcsin(\sqrt{x})}{\pi} = u \Rightarrow \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi u}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \sin\frac{\pi u}{2}$

$\Rightarrow x = \left(\sin\frac{\pi u}{2}\right)^2$

ה.

א.

$$F(x)=e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-a}}$$

$$F(x)=u \Rightarrow e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-a}}=u \Rightarrow -\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-a}=\ln(u)=$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\ln(u)}=\left(\frac{x-m}{s}\right)^{a} \Rightarrow m+s\cdot\left(-\frac{1}{\ln u}\right)^{1/a}=x$$

ב. בהינתן דגימה מ $\text{fréchet}(\alpha,10)$ (כלומר $x=\left(\frac{-1}{\ln u}\right)^{1/\alpha}$

כדי להגיע ל $\text{fréchet}(\alpha,s,m)$ נכפיל את x ב s ונוסיף m

ונקבל $x=m+s\cdot\left(\frac{-1}{\ln u}\right)^{1/a}$

<u>שאלה 2</u>

ב.

$X\sim exp(\mu)$ $f_X(s)=\mu e^{-\mu s}$ $Y\sim exp(\theta)$ $f_Y(r)=\theta e^{-\theta r}$

$Z=X-Y$

$f_{X,Y}(s,r)=\mu\cdot e^{-\mu s}\cdot\theta\cdot e^{-\theta r}$ $\Leftarrow$ ב"ת X,Y

$F_Z(t)=P(Z\le t)=P(X-Y\le t)=1-P(X-Y>t)=1-P(Y<X-t)=$ $(0\le t)$

$=1-\int_t^\infty\int_0^{s-t}\mu\cdot e^{-\mu s}\cdot\theta\cdot e^{-\theta r}\,dr\,ds=1+\int_t^\infty\mu\cdot e^{-\mu s}\cdot e^{-\theta r}\Big|_0^{s-t}ds=$

$1+\mu\int_t^\infty e^{-\mu s}\left[e^{-\theta(s-t)}-1\right]=1+\mu\int_t^\infty e^{-(\mu+\theta)s-\theta t}ds-\int_t^\infty\mu e^{-\mu s}ds$

$1-\frac{\mu}{\mu+\theta}e^{-\mu\theta}+e^{-\mu s}\Big|_t^\infty=1-\frac{\mu}{\mu+\theta}e^{-\mu t}+0-e^{-\mu t}=1-\frac{\theta}{\mu+\theta}e^{-\mu t}$

$F_Z(t)=P(Z\le t)=P(X-Y\le t)=P(Y\ge X-t)=$ $t<0$

$\int_0^\infty\int_{s-t}^\infty\mu\cdot e^{-\mu s}\cdot\theta\cdot e^{-\theta r}\,dr\,ds=-\int_0^\infty\mu e^{-\mu s}e^{-\theta r}\Big|_{s-t}^\infty ds=$

$-\mu\int_0^\infty e^{-\mu s}\cdot\left[0-e^{-\theta(s-t)}\right]ds=\mu\int_0^\infty e^{-(\mu+\theta)s-\theta t}ds=-\frac{\mu}{\mu+s}e^{-(\mu+\theta)s+\theta t}\Big|_0^\infty$

$=\frac{\mu}{\mu+\theta}e^{\theta t}$

$$F_Z(t)=\begin{cases}\frac{\mu}{\mu+\theta}e^{\theta t} & t<0\\ 1-\frac{\theta}{\theta+\mu}\cdot e^{-\mu t} & t\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}t=\frac{\ln\left(\frac{(\mu+\theta)}{\mu}\cdot u\right)}{\theta}<0 & u<\frac{\mu}{\mu+\theta}\\ t=\frac{-\ln\left(\frac{(\theta+\mu)(1-u)}{\theta}\right)}{\mu} & u\ge\frac{\mu}{\mu+\theta}\end{matrix}$$

שאלה 3

א. $X \sim exp(\theta)$

$$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \le x) = (P(exp\,\theta \le x))^n = (1-e^{-\theta x})^n = u$$

$u \sim U(0,1)$

$$1-e^{-\theta x} = \sqrt[n]{u} \Rightarrow 1-\sqrt[n]{u} = e^{-\theta x} \Rightarrow x = -\frac{\ln(1-\sqrt[n]{u})}{\theta}$$

ב. נזכור את הצפיפות של סטטיסטי הסדר ה k מהתפלגות כללית כפי שראינו בכיתה

$$\underset{\text{סטטיסטי הסדר}}{f(x)} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot f_G(x) \cdot (F_G(x))^{k-1} \cdot [1-F_G(x)]^{n-k}.$$

ראינו במקרה של סטטיסטי הסדר ה k של התפלגות אחידה מתפלג $Beta(k, n-k+1)$

א. נדגום דגימה מהתפלגות סטטיסטי הסדר ה k בהתפלגות אחידה

ב. נפעיל את הפונקציה ההופכית של ההתפלגות הרצויה שלנו

ג. נקבל את הדגימה שרצינו בדומה לשעשינו בב' ואז נקבל תצפית מסטטיסטי הסדר ה k בהתפלגות הרצויה.

ג. א. $U_{max} \sim Beta(n,1)$

$$U_{max}(u) = \int_0^u \frac{1}{B(n,1)} \cdot x^{n-1} \cdot (1-x)^{1-1}\,dx = \int_0^u n x^{n-1}\,dx = x^n\Big|_0^u = u^n$$

לכן $u = \sqrt[n]{u^*}$ $\quad u^* \sim U(0,1)$

$$F_{exp(\theta)}(t) = 1-e^{-\theta t} = u \Rightarrow t = -\frac{\ln(1-u)}{\theta}$$

כעת נציב את u ב t ונקבל ש $t = -\frac{\ln(1-\sqrt{u^*})}{\theta}$

כמו שקיבלנו בסעיף א'.

.$Z \sim geom(1-e^{-\lambda})$ <u>שאלה 4</u>

א. $Y \sim exp(\lambda)$ $\quad Z = \lceil Y \rceil$

$$P(Z=z) = P(\lceil Y \rceil = z) = P(z-1 \le Y \le z) = P(Y \le z) - P(Y \le z-1)$$

$$1-e^{-\lambda z} - (1-e^{-\lambda(z-1)}) = 1-e^{-\lambda z} - 1 + e^{-\lambda(z-1)} = e^{-\lambda z} \cdot e^{\lambda} - e^{-\lambda z}$$

$$= e^{-\lambda z}(e^{\lambda}-1) = e^{-\lambda z+\lambda} - e^{-\lambda z} = e^{-\lambda z+\lambda} - e^{-\lambda z+\lambda-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda(z-1)} \cdot (1-e^{-\lambda}) = (1-(1-e^{-\lambda}))^{z-1} \cdot (1-e^{-\lambda})$$

$$\Rightarrow Z \sim Geom(1-e^{-\lambda})$$

ב. ניתן לדגום מהתפלגות $exp(\lambda)$ ע"י שיטת ההופכית כמו לדגום מהתפלגות גיאומטרית עם p כי אקספוננציאלי Y ניתן לעגל $\lceil Y \rceil$ כאשר $\lambda = -\ln(1-p)$.

דגימה של $exp(\lambda)$ ע"י פונקציה הופכית:

$$F_{exp(\lambda)}(t) = 1-e^{-\lambda t} = u \Rightarrow e^{-\lambda t} = 1-u \Rightarrow t = \frac{-\ln(1-u)}{\lambda} \Rightarrow t = \frac{\ln(1-u)}{\ln(1-p)}$$

כאשר נדגום דגימה מהתפלגות אחידה נעגל את t ונקבל ערך שלם עליון.

ג. קיבלנו תוצאה דומה לזו שראינו בכיתה שבה דגמנו בעזרת פונקציה הופכית מוכללת.