Exercies 3 - Alon Goodman & Ran Hassid

Q1

a

a.1

```
knitr::include_graphics("1.a.1.png")
```

א. (i)

התפלגות מטרה f - $Beta(3, \frac{1}{2})$ $\quad f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \mathbb{1}\{0 \le x \le 1\}$

התפלגות מוצעת g - $U(0,1)$ $\quad g(x) = 1 \cdot \mathbb{1}\{0 \le x \le 1\}$

נמצא את הקבוע c המתאים: נשים לב ש $0 \le x \le 1$

$$c = \max_x \{f(x)/g(x)\} = \max_x \left\{ \frac{\frac{x^{3-1}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}-1}}{B(3,\frac{1}{2})}}{1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{B(3,\frac{1}{2})} \max_x \{ x^2 \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \} = \frac{1}{B(3,\frac{1}{2})} \max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x(1-x)^{-1/2} + \tfrac{1}{2}x^2(1-x)^{-3/2} = \frac{2x}{(1-x)^{1/2}} + \frac{x^2}{2(1-x)^{3/2}} = \frac{4x(1-x)^{3/2} + x^2(1-x)^{1/2}}{2(1-x)^2}$$

$$= \frac{(1-x)^{1/2}[4x(1-x)+x^2]}{2(1-x)^2} = \frac{4x+3x^2}{2(1-x)^{3/2}}$$

נשווה ל0

$$\frac{4x+3x^2}{2(1-x)^{3/2}} = 0 \Rightarrow 4x+3x^2 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{4}{3}$$

נשים לב ש $1 < \frac{4}{3}$ אולם $0 < x \le 1$ התחום הנדרש מינוס

והנגזרת רק כאשר $x=0$. לכן $h(x)$ מקבלת את המקסימום שלה בקצה $[0,1]$ בנק' $x=1$.

לכן, $c = \frac{f(1)}{g(1)} = f(1) = \frac{1}{B(3,\frac{1}{2}) \cdot \sqrt{1-1}}$ לא מוגדר

כלומר עבור $b = \frac{1}{2}$ לא קיים c שמבטיח שנוכל לדגום מתוך התפלגות הבטא $Beta(3,\frac{1}{2})$ מהתפלגות מוצעת $U(0,1)$

a.2

```
knitr::include_graphics("1.a.2.png")
```

א. (ii)

התפלגות מטרה f - $Beta(3, 4)$ $\quad f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \mathbb{1}\{0 \le x \le 1\}$

התפלגות מוצעת g - $U(0,1)$ $\quad g(x) = 1 \cdot \mathbb{1}\{0 \le x \le 1\}$

נמצא את הקבוע c המתאים: נשים לב ש $0 \le x \le 1$

$$c = \max_x \{f(x)/g(x)\} = \max_x \left\{ \frac{\frac{x^{3-1}\cdot(1-x)^{4-1}}{B(3,4)}}{1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{B(3,4)} \max_x \{ x^2 \cdot (1-x)^3 \} = \frac{1}{B(3,4)} \max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{B(3,4)}\left(2x(1-x)^3 - 3x^2(1-x)^2\right) = \frac{1}{B(3,4)}\left((1-x)^2[2x(1-x) - 3x^2]\right) =$$

$$= \frac{1}{B(3,4)}(1-x)^2(2x-5x^2) = x(1-x)^2(2-5x) \cdot \frac{1}{B(3,4)}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=0,\ x=1,\ x=0.4$

x	0	0.2	0.4	0.5	1
$h(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	
$h'(x)$	0	+	0	-	0

לכן בקטע $[0,1]$ $h(x)$ מקבלת מקסימום כאשר $x=0.4$

לכן $c = \frac{f(0)}{h(0)} = f(0.4) = \frac{0.4^2 \cdot 0.6^3}{B(3,4)} = \frac{0.16 \cdot 0.216}{B(3,4)} = \frac{0.03456}{B(3,4)} = 2.0736$

$$B(3,4) = \frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{2!\cdot 3!}{6!} = \frac{2\cdot 6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = \frac{1}{3\cdot4\cdot5} = \frac{1}{60}$$

b

b.1

```r
knitr::include_graphics(c("1.b.1.1.png","1.b.1.2.png"))
```

ב. (i)

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \mathbb{1}_{\{0\le x\le 1\}}$$ התפלגות מטרה f - $Beta(3, 1/2)$

$$g(x) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}$$ התפלגות מוצעת g - $kumaraswamy(3, 1/2)$

נמצא את הקבוע c המינימלי: שים לב ש $0 \le x \le 1$

$$c = \max_x \{f(x)/g(x)\} = \max_x \left\{ \frac{\frac{\cancel{x^{3-1}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}-1}}{B(3,\frac{1}{2})}}{3\cdot\frac{1}{2}\,\cancel{x^{3-1}}(1-x^3)^{\frac{1}{2}-1}} \right\} =$$

$$\max_x \frac{(1-x)^{-1/2}}{1.5\cdot B(3,1/2)(1-x^3)^{-1/2}} = \max_x \frac{\frac{1}{(1-x)^{1/2}}}{\frac{1.5\cdot B(3,1/2)}{(1-x^3)^{1/2}}} = \frac{(1-x^3)^{1/2}}{1.5\cdot B(3,1/2)\cdot(1-x)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{1.5\,B(3,1/2)}\cdot\max_x \frac{(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}} = \frac{1}{1.5\cdot B(3,1/2)}\max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}(1-x^3)^{-1/2}(-3x^2)(1-x)^{1/2} - \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}\cdot(-1)\cdot(1-x^3)^{1/2}}{1-x} =$$

$$= \frac{-1.5x^2(1-x^3)^{-1/2}(1-x)^{1/2} + \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)}$$

נשווה ל 0

$$\frac{-1.5x^2(1-x^3)^{-1/2}(1-x)^{1/2} + \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-1.5x^2(1-x)^{1/2}}{(1-x^3)^{1/2}} + \frac{\frac{1}{2}(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}} = 0 \Rightarrow \frac{-1.5x^2(1-x) + \frac{1}{2}(1-x^3)}{(1-x^3)^{1/2}(1-x)^{1/2}} = 0$$

$$= -1.5x^2 + 1.5x^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^3 = 0 \Rightarrow x^3 - 1.5x^2 + 1/2 = 0 \Rightarrow$$

שים לב לשורש $x=1$ לכן

$$\begin{array}{l} \quad x^2 - 0.5x - 0.5 \\ \hline x^3 - 1.5x^2 + 0.5 \;\big|\; (x-1) \\ -\underline{x^3 - x^2} \\ \quad -0.5x^2 \\ \quad -\underline{-0.5x^2 + 0.5x} \\ \qquad -0.5x + 0.5 \\ \qquad -\underline{-0.5x + 0.5} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 0.5x - 0.5) = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25+2}}{2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{2.25}}{2} = \frac{0.5 \pm 1.5}{2} \quad \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x+1/2) = 0$$

x	-1	$-1/2$	0	1
$h(x)$	↘		↗	max
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0

לכן בקטע $[0,1]$ $h(x)$ מקבל מקסימום בנק׳ $x=1$.

שים לב שאם נציב $x=1$ ב $c = \frac{f(x)}{g(x)}$ נקבל c לא מוגדר

$$c = \frac{1}{1.5\,B(3,1/2)}\cdot\sqrt{\frac{1-x^3}{1-x}} = \frac{1}{1.5\,B(3,1/2)}\cdot\sqrt{x^2+x+1}$$

$$\begin{array}{l} \quad x^2 + x + 1 \\ \hline -x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \;\big|\; -x+1 \\ -\underline{-x^3 + x^2} \\ \quad -x^2 + 0x \\ \quad -\underline{-x^2 + x} \\ \qquad -x + 1 \\ \qquad -\underline{-x + 1} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

נציב 1 ונקבל ש $c = \frac{\sqrt{3}}{1.5\,B(3,1/2)}$

$$B(3,1/2) = \int_0^1 x^2(1-x)^{-1/2}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & v' = (1-x)^{-1/2} \\ u' = 2x & v = \frac{(1-x)^{1/2}}{-0.5} \end{bmatrix} =$$

$$= -2x^2(1-x)^{1/2}\Big|_0^1 - \int_0^1 -4x(1-x)^{1/2}\,dx = 4\int_0^1 x(1-x)^{1/2} = \begin{bmatrix} u = x & v' = (1-x)^{1/2} \\ u' = 1 & v = \frac{(1-x)^{3/2}}{-3/2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\tfrac{2}{3}x(1-x)^{3/2}\Big|_0^1 + \frac{4}{3/2}\int_0^1 (1-x)^{3/2}\,dx = \frac{8}{3}\int_0^1 (1-x)^{3/2}\,dx = \frac{8}{3}\cdot\frac{(1-x)^{5/2}}{-5/2}\Big|_0^1 =$$

$$\frac{8}{3\cdot 5/2}\cdot 1^{5/2} = \frac{16}{15}$$

לכן $c = \frac{\sqrt{3}}{1.5\cdot\frac{16}{15}} = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{1.5\cdot 16} = 1.082$

b.2

```r
knitr::include_graphics("1.b.2.png")
```

ב. (ii)

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} 1_{\{0\le x\le 1\}}$$ f - Beta(3,4) התפלגות מטרה

$$g(x) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}$$ g - Kumaraswamy(3,4) התפלגות מוצעת

נחשב את הקבוע c המתאים: שים לב ש $0\le x\le 1$

$$c = \max_x \{f(x)/g(x)\} = \max_x \left\{ \frac{\frac{\cancel{x^{3-1}}\cdot(1-x)^{4-1}}{B(3,4)}}{3\cdot 4\, \cancel{x^{3-1}}(1-x^3)^{4-1}} \right\} =$$

חילוק ארוך משפט קודם

$$\max_x \left\{ \frac{(1-x)^3}{12\cdot B(3,4)(1-x^3)^3} \right\} = \frac{1}{12\cdot B(3,4)} \max_x \left\{ \left(\frac{1-x}{1-x^3}\right)^3 \right\} = \frac{1}{12\cdot B(3,4)} \cdot \max_x \left\{ \frac{1}{x^2+x+1} \right\}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

הנגזרת שלילית בכל התחום $[0,1]$

כלומר $h(x)$ יורדת בכל התחום $[0,1]$ ולכן המקסימום בתחום יתקבל ב $X=0$

$$C = \frac{1}{12\cdot B(3,4)} = \frac{1}{12\cdot \frac{2!\,3!}{7!}} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\cancel{6}}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}} 5$$ [illegible]

C

Sample from Kumaraswamy(alpha,beta) Inverse Function Method

```
func_kumaraswamy <- function(alpha,beta){
  inverse_func <- function(u,alpha,beta){
    (1-(1-u)^(1/beta))^(1/alpha)
    } # Lets compute the inverse function: F(x)=u, u~U(0,1).
  u <- runif(n = 1,min = 0,max = 1)
  y <- inverse_func(u,alpha,beta) # For any u in U we compute the x value.
  y
  }
```

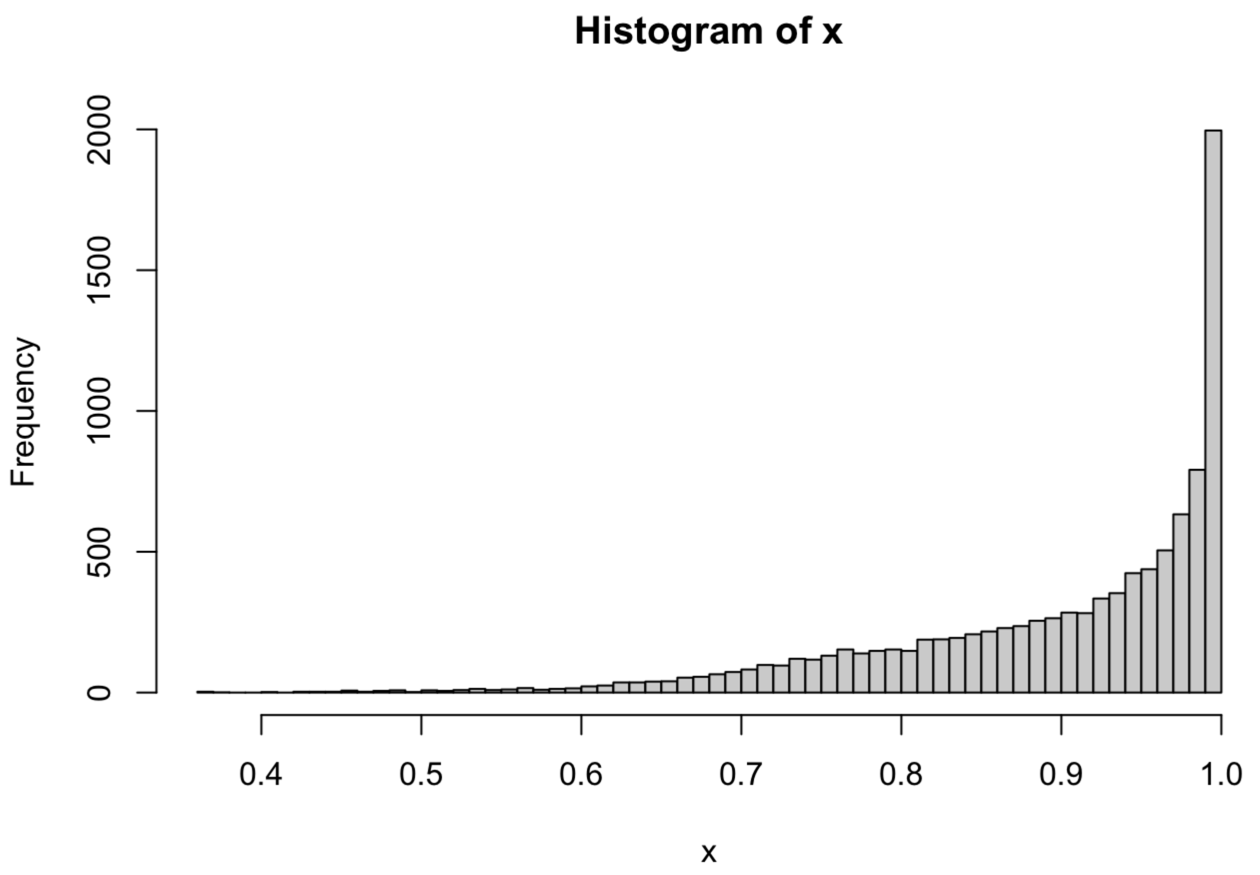
c.1 - beta = 0.5

Samples from Beta(3.0.5) Distribution Accept-Reject Method

We will use Kumaraswamy(3,0.5) Distribution because C is undefined for U(0,1) Distribution.

```
func_1.c.1 <- function(alpha,beta,c){
  x <- vector()
  while(length(x)<10000){
    u <- runif(n = 1,min = 0,max = 1) # we take one sample from U(0,1)
    y <- func_kumaraswamy(alpha = alpha,beta = beta) # we take one sample from kumaraswamy(alpha,beta) like previ
ous exercie
    a <- (15/16)*(y^(alpha-1))*((1-y)^(beta-1)) # Density function of Beta(alpha, beta)
    b <- alpha*beta*y^(alpha-1)*(1-y^alpha)^(beta-1) # Density function of kumaraswamy(alpha,beta)
    if ((a/c*b)>=u){
      x <- c(x,y)
    }
  }
  hist(x,50)
  summary(x)
}
```

```
func_1.c.1(alpha = 3,beta = 0.5, c = (15*sqrt(3))/(1.5*16))
```




```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  0.3606  0.8370  0.9344  0.8972  0.9840  1.0000
```

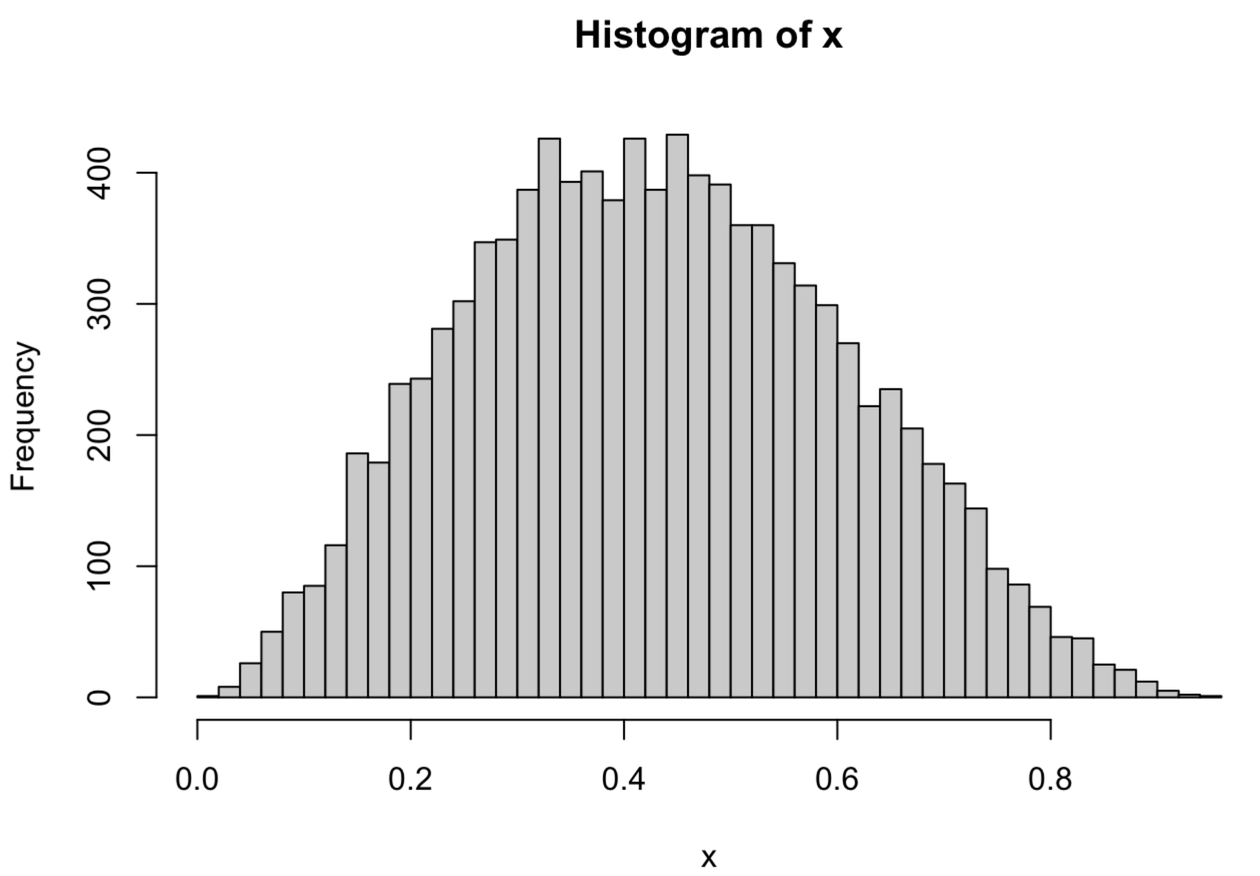
c.2 - beta = 4

Samples from Beta(3,4) Distribution Accept-Reject Method

We will use U(0,1) Distribution because C is lower then the C we get from Kumaraswamy(3,4) Distribution.

```
func_1.c.2 <- function(alpha,beta,c){
  x <- vector()
  while(length(x)<10000){
    u <- runif(n = 1,min = 0,max = 1) # we take one sample from U(0,1)
    y <- runif(n = 1,min = 0,max = 1) # we take one sample from U(0,1)
    a <- (60)*(y^(alpha-1))*((1-y)^(beta-1)) # Density function of Beta(alpha,beta)
    b <- 1 # Density function of U(0,1)
    if ((a/c*b)>=u){
      x <- c(x,y)
    }
  }
  hist(x,50)
  summary(x)
}
```

```
func_1.c.2(alpha = 3,beta = 4, c = 5)
```



```
##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
## 0.01402 0.30033 0.42528 0.43100 0.55624 0.95519
```

Q2

Cauchy Distibution

```
knitr::include_graphics(c("2.1.1.png","2.1.2.png","2.1.3.png"))
```

שאלה 2

(i) התפלגות מטרה $N(0,1)$ $\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

התפלגות מציעה $Cauchy(0,s)$ $\quad g(x)=\frac{1}{\pi s}\cdot\left(\frac{s^2}{(x-\mu)^2+s^2}\right)$

נמצא את $c=\max_x\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$ כפונקציה של s.

נמצא את ה-s שממזער את c.

ראשית נציין שבהשוואה להתפלגות קושי היא לא ביושר המיוחד כמו זו של התפלגות הנורמלית

$$c=\max_x\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\max_x\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{\pi s}\left(\frac{s^2}{x^2+s^2}\right)}\right\}=\max_x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi(x^2+s^2)}{s}=$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{2}}\cdot\max_x\left\{e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(x^2+s^2)\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{s\cdot\sqrt{2}}\cdot\max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-xe^{-\frac{x^2}{2}}(x^2+s^2)+e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot 2x=-xe^{-x^2}\left[x^2+s^2-2\right]$$

נשווה ל-0

$$-e^{-x^2}\cdot x\cdot\left[x^2+s^2-2\right]=0$$

נקבל שהנקודות החשודות הן: $x_1=0 \quad x_2=\sqrt{2-s^2} \quad x_3=-\sqrt{2-s^2}$

חשוב לציין שעבור $s\ge\sqrt{2}$ x_2,x_3 לא מוגדרות ולכן הנקודה החשודה שיש לנו היא $x=0$

x	-1	0	1
$h(x)$	↗		↘
$h'(x)$	$+$	0	$-$

ועבור $h(x)$ נקודת מקסימום ב $x=0$ ולכן נקבל ש

$$c=\frac{e^{-\frac{0^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi(0^2+s^2)}{s}=\frac{\sqrt{\pi}\,s}{\sqrt{2}}$$

עבור $0<s<\sqrt{2}$

x	$-2\sqrt{2-s^2}$	$-\sqrt{2-s^2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2-s^2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2-s^2}$	$\sqrt{2-s^2}$	$2\sqrt{2-s^2}$
$h(x)$	↗		↘		↗		↘
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

עבור $x=\pm\sqrt{2-s^2}$ נקבל את אותו ערך של c והוא

$$c=\frac{e^{\frac{s^2-2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi(2-s^2+s^2)}{s}=\frac{\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{s^2-2}{2}}}{s}$$

סיכום ביניים:

$s\ge\sqrt{2} \Leftarrow c=\frac{s\cdot\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \Leftarrow$ ה-c המינימלי הוא כאשר $s=\sqrt{2}$ $c=\sqrt{\pi}$

$0<s<\sqrt{2} \Leftarrow c=\frac{\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{s^2-2}{2}}}{s}$

נבדוק מהו ה-s שממזער את c למינימום

$$\frac{\partial c}{\partial s}=\frac{s^2\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{s^2-2}{2}}-\sqrt{2\pi}e^{\frac{s^2-2}{2}}}{s^2}=\frac{\sqrt{2\pi}e^{\frac{s^2-2}{2}}(s^2-1)}{s^2}=0 \Rightarrow s=1$$

s	$\frac{1}{2}$	1	1.5
$c(s)$	↘		↗
$c'(s)$	$-$	0	$+$

כלומר עבור $s=1$ נקבל ה-c המינימלי

ולכן $c=\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$

עבור $s\ge\sqrt{2}$ ה-c המינימלי הוא $\sqrt{\pi}\cong 1.77$

עבור $0<s<\sqrt{2}$ ה-c המינימלי הוא $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cong 1.52$

לכן נעדיף לבחור שה s האופטימלי שיתן לנו תוחלת מס' הדגימות המינימלית היא $s=1$.

We got s=1 and C ~ 1.52

Double Exponential Distibution

```
knitr::include_graphics(c("2.2.1.png","2.2.2.png","2.2.3.png"))
```

(ii) התפלגות מטרה $N(0,1)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

התפלגות מציעה $doubleexp(0,s)$

$$g(x)=\frac{1}{2s}e^{-\frac{|x-\mu|}{s}}$$

נבטא את $c=\max_x\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$ כפונקציה של s.

נחפש את ה-s שמביא למינימום את c.

ראשית ניתן להבחין כי התוחלת של ההתפלגויות היא 0 כי שתי הפונקציות סימטריות כמו כן כי ההתפלגויות הרציפות

$$c=\max_x\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\max_x\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{2s}\cdot e^{\frac{-|x|}{s}}}\right\}=\max_x\left\{\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{|x|}{s}-\frac{x^2}{2}}\right\}=$$

$$\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\max_x\left\{e^{\frac{|x|}{s}-\frac{x^2}{2}}\right\}=\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\left(\frac{Sign(x)}{s}-x\right)\cdot e^{\frac{|x|}{s}-\frac{x^2}{2}}=\begin{cases}\left(\frac{1}{s}-x\right)\left(e^{\frac{|x|}{s}-\frac{x^2}{2}}\right) & x>0\\ \left(-\frac{1}{s}-x\right)\left(e^{\frac{|x|}{s}-\frac{x^2}{s}}\right) & x<0\end{cases}$$

עבור $x>0$ הנגזרת מתאפסת כאשר $x=\frac{1}{s}$

ועבור $x<0$ הנגזרת מתאפסת כאשר $x=-\frac{1}{s}$

x	$-\frac{2}{s}$	$-\frac{1}{s}$	$-\frac{0.5}{s}$	$\frac{0.5}{s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{2}{s}$
$h(x)$	↗		↘	↗		↘
$h'(x)$	+	0	−	+	0	−

$h(x)$ מקבלת מקסימום כאשר $x=\frac{1}{s}$ או $x=-\frac{1}{s}$.

$$C=\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2s^2}}=\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{\frac{1}{2s^2}}$$

נבדוק מהו ה-s שמביא את c למינימום

$$\frac{\partial c}{\partial s}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{\frac{1}{2s^2}}-\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{s^3}\cdot e^{\frac{1}{2s^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{1}{2s^2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{s^2}e^{\frac{1}{2s^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{\frac{1}{2s^2}}\cdot\left[1-\frac{1}{s^2}\right]$$

נשווה ל 0 ונקבל שהנגזרת מתאפסת כאשר $s=\pm1$

ומכיוון ש $s>0$ ניקח בחשבון רק $s=1$ ונבדוק שה-s זה מביא את c למינימום.

s	$\frac{1}{2}$	1	2
$C(s)$	↘	min	↗
$C'(s)$	−	0	+

לסיכום:

ה s האופטימלי שיתן לנו תוחלת מס' הדגימות המינימלית היא $s=1$.

We got s=1 and C ~ 1.315

So we will prefere use the Double Exponential Distibution (location = 0, scale = 1)

Q3

```
knitr::include_graphics(c("3.1.png","3.2.png"))
```

שאלה 3

C_1^* - בהתחלה → $C_1^* = 1$

U_1 - דגימה ראשונה ~ $U(0,1)$

X_1 - דגימה ראשונה מהתפלגות ההצעה

נקבל את X_1 אם $U_1 \cdot 1 \le \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$

נדחה את X_1 אם $U_1 \cdot 1 > \frac{f(x_1)}{g(x_1)}$

אם נקבל עבור דגימה נוספת X_i מהתפלגות ההצעה $\frac{f(x_i)}{g(x_i)} > 1$ נקבל מס׳ מקסימלי חדש
כלומר $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ <= נעדכן את C^* להיות $\frac{f(x_i)}{g(x_i)}$.

* אם נשמור את כל הדגימות מההתפלגות האחידה $\{U_i\}$ שבעזרתן קיבלנו/דחינו את הדגימות מהתפלגות ההצעה. התיקון שנבצע הוא לשמור רק את הדגימות X_i כך ש

$$\frac{f(x_i)}{g(x_i)} \ge U_i C^*$$

U_i שאיתו קיבלנו קודם את X_i

הערך המקסימלי המעודכן ביותר של C

Screenshot

* אם לא נשמור את הדגימות $\{U_i\}$

רק את C הרלוונטי היינו דוגמים אחידות U_i חדשות ולעשות השוואה מחדש ולשמור את הדגימות X_i שמקיימות $\frac{f(x_i)}{g(x_i)} \ge U_i C^*$, C^* הערך המקסימלי המעודכן ביותר של C.

התיקון נוסף שאפשר עליו לחשוב הוא שנשמור את הדגימות X_i שמקיימות

$\frac{f(x_i)}{g(x_i)} \ge C^*$, C^* הערך המקסימלי המעודכן ביותר של C.

בנקודה זו נחזור ונבדוק את 6 הדגימות שקיבלנו עד עכשיו ונבצע בדיקה נוספת עם $U=1$, הדגימות הקודמות שעוברות יקבלו מההתפלגות אחידה סופית.