שאלה 1

א. (i)

התפלגות מטרה f - $Beta(3, 1/2)$ $\qquad f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \mathbb{1}_{\{0\le x\le 1\}}$

התפלגות מוצעת g - $U(0,1)$ $\qquad g(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{0\le x\le 1}$

נחשב את הקבוע c המתאים: נשים לב ש $0\le x\le 1$

$$c = \max_x \{f(x)/g(x)\} = \max_x \left\{ \frac{\frac{x^{3-1}\cdot(1-x)^{\frac12 - 1}}{B(3,\frac12)}}{1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{B(3,\frac12)} \max_x \{ x^2 \cdot (1-x)^{-1/2} \} = \frac{1}{B(3,\frac12)} \max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x(1-x)^{-1/2} + \tfrac12 x^2 (1-x)^{-3/2} = \frac{2x}{(1-x)^{1/2}} + \frac{x^2}{2(1-x)^{3/2}} = \frac{4x(1-x)^{3/2} + x^2(1-x)^{1/2}}{2(1-x)^2}$$

$$= \frac{(1-x)^{1/2}[4x(1-x)+x^2]}{2(1-x)^2} = \frac{4x+3x^2}{2(1-x)^{3/2}}$$

נשווה ל-0

$$\frac{4x+3x^2}{2(1-x)^{3/2}} = 0 \Rightarrow 4x+3x^2 = 0 \Rightarrow x = 4/3$$

נשים לב ש $1 < 4/3$ ולכן $0 < x \le 1$ הנגזרת חיובית ממש ומתאפסת רק כאשר $x=0$. לכן $h(x)$ מקבלת את המקסימום שלה בקטע $[0,1]$ בנק׳ $x=1$.

לכן, $c = \frac{f(1)}{g(1)} = f(1) = \frac{1}{B(3,\frac12)\cdot\sqrt{1-1}}$ לא מוגדר

כלומר נסיק שעבור $b = 1/2$ לא קיים c שבאמצעותו נוכל לדגום מתפלגות המטרה $Beta(3, 1/2)$ ע״י התפלגות מוצעת $U(0,1)$

א. (ii)

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathbb{1}\{0\le x\le 1\}$$
התפלגות מטרה f - $Beta(3,4)$

$$g(x)=1\cdot\mathbb{1}\{0\le x\le 1\}$$
התפלגות מוצעת g - $U(0,1)$

נחשב את הקבוע c המתאים: שים לב ש $0\le x\le 1$

$$c=\max_x\{f(x)/g(x)\}=\max_x\left\{\frac{\frac{x^{3-1}\cdot(1-x)^{4-1}}{B(3,4)}}{1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{B(3,4)}\max_x\{x^2\cdot(1-x)^3\}=\frac{1}{B(3,4)}\max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{1}{B(3,4)}\left(2x(1-x)^3-3x^2(1-x)^2\right)=\frac{1}{B(3,4)}\left((1-x)^2\left[2x(1-x)-3x^2\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{B(3,4)}(1-x)^2(2x-5x^2)=x(1-x)^2(2-5x)\cdot\frac{1}{B(3,4)}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=0,\ x=1,\ x=0.4$

x	0	0.2	0.4	0.5	1
$h(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

לכן בקטע $[0,1]$ $h(x)$ מקבלת מקסימום כאשר $x=0.4$

לכן

$$c=\frac{f(0)}{h(0)}=f(0.4)=\frac{0.4^2\cdot 0.6^3}{B(3,4)}=\frac{0.16\cdot 0.216}{B(3,4)}=\frac{0.03456}{B(3,4)}=2.0736$$

$$B(3,4)=\frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(7)}=\frac{2!\cdot 3!}{6!}=\frac{2\cdot 6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{1}{3\cdot4\cdot5}=\frac{1}{60}$$

ב. (i)

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathbb{1}_{\{0\le x\le 1\}}$$ התפלגות מטרה f - $Beta(3, ½)$

$$g(x)=\alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}$$ התפלגות מוצעה g - $kumaraswamy(3, ½)$

נחשב את הקבוע c המתאים: שים לב ש $0\le x\le 1$

$$c=\max_x\{f(x)/g(x)\}=\max_x\left\{\frac{\frac{\cancel{x^{3-1}}\cdot(1-x)^{\frac12-1}}{B(3,\frac12)}}{3\cdot\frac12\,\cancel{x^{3-1}}(1-x^3)^{\frac12-1}}\right\}=$$

$$\max_x\frac{(1-x)^{-1/2}}{1.5\cdot B(3,\frac12)(1-x^3)^{-1/2}}=\max_x\frac{\frac{1}{(1-x)^{1/2}}}{\frac{1.5\cdot B(3,\frac12)}{(1-x^3)^{1/2}}}=\frac{(1-x^3)^{1/2}}{1.5\cdot B(3,\frac12)\cdot(1-x)^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{1.5B(3,\frac12)}\cdot\max_x\frac{(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}}=\frac{1}{1.5\cdot B(3,\frac12)}\max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\frac12(1-x^3)^{-1/2}(-3x^2)(1-x)^{1/2}-\frac12(1-x)^{-1/2}\cdot(-1)\cdot(1-x^3)^{1/2}}{1-x}=$$

$$=\frac{-1.5x^2(1-x^3)^{-1/2}(1-x)^{1/2}+\frac12(1-x)^{-1/2}(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)}$$

$$\frac{-1.5x^2(1-x^3)^{-1/2}(1-x)^{1/2}+\frac12(1-x)^{-1/2}(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)}=0\quad\Rightarrow$$ משווה ל 0

$$\Rightarrow\frac{-1.5x^2(1-x)^{1/2}}{(1-x^3)^{1/2}}+\frac{\frac12(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}}=0\Rightarrow\frac{-1.5x^2(1-x)+\frac12(1-x^3)}{(1-x^3)^{1/2}(1-x)^{1/2}}=0$$

$$\Rightarrow -1.5x^2+1.5x^3+\frac12-\frac12x^3=0\Rightarrow x^3-1.5x^2+\frac12=0\Rightarrow$$

נשים לב שעבור $x=1$ יש פתרון

$$\begin{array}{l}
\quad x^2-0.5x-0.5\\
\hline
x^3-1.5x^2+0.5 \;\big|\;(x-1)\\
-\;x^3-x^2\\
\hline
\quad -0.5x^2\\
-\;-0.5x^2+0.5x\\
\hline
\quad\quad -0.5x+0.5\\
-\;-0.5x+0.5\\
\hline
\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2-0.5x-0.5)=0$$

$$x_{2,3}=\frac{0.5\pm\sqrt{0.25+2}}{2}=\frac{0.5\pm\sqrt{2.25}}{2}=\frac{0.5\pm1.5}{2}\ \begin{cases}1\\-\frac12\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x+\tfrac12)=0$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	max
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0

לכן בקטע $[0,1]$ $h(x)$ מקבל מקסימום בנק' $x=1$.

נשים לב שאם נציב $x=1$ ב $c=\frac{f(x)}{g(x)}$ נקבל c לא מוגדר

$$c=\frac{1}{1.5B(3,\frac{1}{2})}\cdot\sqrt{\frac{1-x^3}{1-x}}=\frac{1}{1.5B(3,\frac{1}{2})}\cdot\sqrt{x^2+x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & \\ \hline -x^3+0x^2+0x+1 & -x+1 \\ -(-x^3+x^2) & \\ \hline -x^2+0x & \\ -(-x^2+x) & \\ \hline -x+1 & \\ -(-x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

נציב 1 ונקבל

$$c=\frac{\sqrt{3}}{1.5B(3,\frac{1}{2})}$$

$$B(3,\tfrac{1}{2})=\int_0^1 x^2(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[\begin{matrix}u=x^2 & v'=(1-x)^{-\frac{1}{2}}\\ u'=2x & v=\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{-0.5}\end{matrix}\right]=$$

$$=-2x^2(1-x)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1-4x(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx=4\int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{2}}=\left[\begin{matrix}u=x & v'=(1-x)^{\frac{1}{2}}\\ u'=1 & v=\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{-3/2}\end{matrix}\right]=$$

$$=-\tfrac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{4}{3/2}\int_0^1(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{8}{3}\int_0^1(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{8}{3}\cdot\frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1=$$

$$\frac{8}{3\cdot\frac{5}{2}}\cdot 1^{\frac{5}{2}}=\frac{16}{15}$$

לכן

$$c=\frac{\sqrt{3}}{1.5\cdot\frac{16}{15}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{1.5\cdot 16}=1.082$$

ב. (ii)

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathbb{1}\{0\le x\le 1\}$$

ההתפלגות המטרה f - Beta$(3,4)$

$$g(x)=\alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}$$

ההתפלגות המציעה g - Kumaraswamy$(3,4)$

נחשב את הקבוע c המתאים: נשים לב ש $0\le x\le 1$

$$c=\max_x\{f(x)/g(x)\}=\max_x\left\{\frac{\frac{\cancel{x^{3-1}}\cdot(1-x)^{4-1}}{B(3,4)}}{3\cdot 4\,\cancel{x^{3-1}}(1-x^3)^{4-1}}\right\}=$$

תרגיל ארוך מסעיף קודם

$$\max_x\left\{\frac{(1-x)^3}{12\cdot B(3,4)(1-x^3)^3}\right\}=\frac{1}{12\cdot B(3,4)}\max_x\cdot\left\{\left(\frac{1-x}{1-x^3}\right)^3\right\}=\frac{1}{12\cdot B(3,4)}\cdot\max_x\left\{\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

הנגזרת שלילית בכל התחום $[0,1]$

כלומר $h(x)$ יורדת בכל התחום $[0,1]$ ולכן המקסימום בתחום מתקבל ב $x=0$

לכן

$$C=\frac{1}{12\cdot B(3,4)}=\frac{1}{12\cdot\frac{2!\,3!}{7!}}=\frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\cancel{6}}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}}\;5$$