שאלה 1

א. (i)

התפלגות מטרה f - $Beta(3,\frac{1}{2})$

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\cdot \mathbb{1}_{\{0\le x\le 1\}}$$

התפלגות מוצעת g - $U(0,1)$

$$g(x)=1\cdot \mathbb{1}_{0\le x\le 1}$$

נחשב את הקבוע c המתאים: שים לב ש $0\le x\le 1$

$$c=\max_x\{f(x)/g(x)\}=\max_x\left\{\frac{\frac{x^{3-1}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}-1}}{B(3,\frac{1}{2})}}{1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{B(3,\frac{1}{2})}\max_x\{x^2\cdot(1-x)^{-1/2}\}=\frac{1}{B(3,\frac{1}{2})}\max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=2x(1-x)^{-1/2}+\frac{1}{2}x^2(1-x)^{-3/2}=\frac{2x}{(1-x)^{1/2}}+\frac{x^2}{2(1-x)^{3/2}}=\frac{4x(1-x)^{3/2}+x^2(1-x)^{1/2}}{2(1-x)^2}$$

$$=\frac{(1-x)^{1/2}[4x(1-x)+x^2]}{2(1-x)^2}=\frac{4x-3x^2}{2(1-x)^{3/2}}$$

נשווה ל 0

$$\frac{4x-3x^2}{2(1-x)^{3/2}}=0 \Rightarrow 4x-3x^2=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

נשים לב ש $1<\frac{4}{3}$ ולכן $0<x\le 1$ הנגזרת חיובית ממש

ומתאפסת רק כאשר $x=0$. לכן $h(x)$ מקבלת את המקסימום שלה בקטע $[0,1]$ בנק' $x=1$.

לכן, $c=\frac{f(1)}{g(1)}=f(1)=\frac{1}{B(3,\frac{1}{2})\cdot\sqrt{1-1}}$ לא מוגדר

כלומר עבור $b=\frac{1}{2}$ לא קיים c שבעזרתו נוכל לדגום תצפיות

מהתפלגות המטרה $Beta(3,\frac{1}{2})$ ע"פ התפלגות מוצעת $U(0,1)$

א. (ii)

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathbb{1}\{0\le x\le 1\}$$ הפילוג מטרה $f - Beta(3,4)$

$$g(x)=1\cdot\mathbb{1}\{0\le x\le 1\}$$ הפילוג מציעה $g - U(0,1)$

נחשב את הקבוע c המתאים: שים לב ש $0\le x\le 1$

$$c=\max_x\{f(x)/g(x)\}=\max_x\left\{\frac{\frac{x^{3-1}\cdot(1-x)^{4-1}}{B(3,4)}}{1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{B(3,4)}\max_x\left\{x^2\cdot(1-x)^3\right\}=\frac{1}{B(3,4)}\max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{1}{B(3,4)}\left(2x(1-x)^3-3x^2(1-x)^2\right)=\frac{1}{B(3,4)}\left((1-x)^2\left[2x(1-x)-3x^2\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{B(3,4)}(1-x)^2(2x-5x^2)=x(1-x)^2(2-5x)\cdot\frac{1}{B(3,4)}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=0,\ x=1,\ x=0.4$

x	0	0.2	0.4	0.5	1
$h(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	
$h'(x)$	0	+	0	-	0

לכן בקטע $[0,1]$ $h(x)$ מקבלת מקסימום כאשר $x=0.4$

לכן $$c=\frac{f(0)}{h(0)}=f(0.4)=\frac{0.4^2\cdot 0.6^3}{B(3,4)}=\frac{0.16\cdot 0.216}{B(3,4)}=\frac{0.03456}{B(3,4)}=2.0736$$

$$B(3,4)=\frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(7)}=\frac{2!\cdot 3!}{6!}=\frac{2\cdot 6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{1}{3\cdot4\cdot5}=\frac{1}{60}$$

ב. (i)

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathbb{1}\{0\le x\le 1\}$$ ההתפלגות המטרה f - Beta$(3,\frac{1}{2})$

$$g(x)=\alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}$$ ההתפלגות המוצעת g - kumaraswamy$(3,\frac{1}{2})$

נחשב את הקבוע c המתאים: נשים לב ש $0\le x\le 1$

$$c=\max_x\{f(x)/g(x)\}=\max_x\left\{\frac{\frac{\cancel{x^{3-1}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}-1}}{B(3,\frac{1}{2})}}{3\cdot\frac{1}{2}\,\cancel{x^{3-1}}\,(1-x^3)^{\frac{1}{2}-1}}\right\}=$$

$$\max_x\frac{(1-x)^{-1/2}}{1.5\cdot B(3,\frac{1}{2})(1-x^3)^{-1/2}}=\max_x\frac{\frac{1}{(1-x)^{1/2}}}{\frac{1.5\cdot B(3,\frac{1}{2})}{(1-x^3)^{1/2}}}=\frac{(1-x^3)^{1/2}}{1.5\cdot B(3,\frac{1}{2})\cdot(1-x)^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{1.5B(3,\frac{1}{2})}\cdot\max_x\frac{(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}}=\frac{1}{1.5\cdot B(3,\frac{1}{2})}\max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\frac{1}{2}(1-x^3)^{-1/2}(-3x^2)(1-x)^{1/2}-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}\cdot(-1)\cdot(1-x^3)^{1/2}}{1-x}=$$

$$=\frac{-1.5x^2(1-x^3)^{-1/2}(1-x)^{1/2}+\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)}$$

נשווה ל 0

$$\frac{-1.5x^2(1-x^3)^{-1/2}(1-x)^{1/2}+\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)}=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-1.5x^2(1-x)^{1/2}}{(1-x^3)^{1/2}}+\frac{\frac{1}{2}(1-x^3)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{-1.5x^2(1-x)+\frac{1}{2}(1-x^3)}{(1-x^3)^{1/2}(1-x)^{1/2}}=0$$

$$\Rightarrow -1.5x^2+1.5x^3+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^3=0\quad\Rightarrow\quad x^3-1.5x^2+\frac{1}{2}=0\quad\Rightarrow$$

נשים לב שעבור $x=1$ פתרון

$$\begin{array}{l}\quad x^2-0.5x-0.5\\ \hline x^3-1.5x^2+0.5\ \big|\,(x-1)\\ -\ \underline{x^3-x^2}\\ \quad -0.5x^2\\ -\ \underline{-0.5x^2+0.5x}\\ \qquad -0.5x+0.5\\ \quad -\ \underline{-0.5x+0.5}\\ \qquad\qquad 0\end{array}$$

$$\Rightarrow(x-1)(x^2-0.5x-0.5)=0$$

$$x_{2,3}=\frac{0.5\pm\sqrt{0.25+2}}{2}=\frac{0.5\pm\sqrt{2.25}}{2}=\frac{0.5\pm1.5}{2}\ \begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x-1)^2(x+\tfrac{1}{2})=0$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	max
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0

לכן בקטע $[0,1]$ $h(x)$ מקבלת מקסימום בנק' $x=1$.

נשים לב שהיחס נמוך ב $x=1$ ב $C=\frac{f(x)}{g(x)}$ נקח C את מוגדר

$$C=\frac{1}{1.5B(3,\frac{1}{2})}\cdot\sqrt{\frac{1-x^3}{1-x}}=\frac{1}{1.5B(3,\frac{1}{2})}\cdot\sqrt{x^2+x+1}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+x+1 & \\ \hline -x^3+0x^2+0x+1 & -x+1 \\ -(-x^3+x^2) & \\ \hline -x^2+0x & \\ -(-x^2+x) & \\ \hline -x+1 & \\ -(-x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

נציב 1 ונקבל ש $C=\frac{\sqrt{3}}{1.5B(3,\frac{1}{2})}$

$$B(3,\tfrac{1}{2})=\int_0^1 x^2(1-x)^{-1/2}\,dx=\begin{bmatrix} u=x^2 & v'=(1-x)^{-1/2} \\ u'=2x & v=\frac{(1-x)^{1/2}}{-0.5}\end{bmatrix}=$$

$$=-2x^2(1-x)^{1/2}\Big|_0^1-\int_0^1-4x(1-x)^{1/2}\,dx=4\int_0^1 x(1-x)^{1/2}=\begin{bmatrix} u=x & v'=(1-x)^{1/2} \\ u'=1 & v=\frac{(1-x)^{3/2}}{-3/2}\end{bmatrix}=$$

$$=-\tfrac{2}{3}x(1-x)^{3/2}\Big|_0^1+\frac{4}{3/2}\int_0^1(1-x)^{3/2}\,dx=\frac{8}{3}\int_0^1(1-x)^{3/2}\,dx=\frac{8}{3}\cdot\frac{(1-x)^{5/2}}{-5/2}\Big|_0^1=$$

$$\frac{8}{3\cdot 5/2}\cdot 1^{5/2}=\frac{16}{15}$$

לכן $C=\frac{\sqrt{3}}{1.5\cdot\frac{16}{15}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{1.5\cdot 16}=1.082$

ב. (ii)

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} 1\{0 \le x \le 1\}$$

התפלגות מטרה f - Beta$(3,4)$

$$g(x) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}$$

התפלגות מציעה g - Kumaraswamy$(3,4)$

נחשב את הקבוע c המתאים: נשים לב ש $0 \le x \le 1$

$$c = \max_x \{f(x)/g(x)\} = \max_x \left\{ \frac{\frac{\cancel{x^{3-1}} \cdot (1-x)^{4-1}}{B(3,4)}}{3 \cdot 4 \; \cancel{x^{3-1}} (1-x^3)^{4-1}} \right\} =$$

חילוק ארוך מספיק קודם

$$\max_x \left\{ \frac{(1-x)^3}{12 \cdot B(3,4)(1-x^3)^3} \right\} = \frac{1}{12 \cdot B(3,4)} \max_x \left\{ \left(\frac{1-x}{1-x^3} \right)^3 \right\} = \frac{1}{12 \cdot B(3,4)} \cdot \max_x \left\{ \frac{1}{x^2+x+1} \right\}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

הנגזרת שלילית בכל הקטע $[0,1]$

כלומר $h(x)$ יורדת בכל הקטע $[0,1]$ ולכן המקסימום בקטע מתקבל ב $x=0$

לכן

$$c = \frac{1}{12 \cdot B(3,4)} = \frac{1}{12 \cdot \frac{2! \, 3!}{7!}} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{6}}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} \quad 5$$

שאלה 2

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad g(x)=\frac{1}{\pi s}\cdot\left(\frac{s^2}{(x-\mu)^2+s^2}\right)$$

(i) התפלגות מטרה $N(0,1)$

התפלגות מציעה $Cauchy(0,s)$

נמצא את $c=\max_x\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$ כפונקציה של s.

נחפש את הs שמביא למינימום את c.

ראשית נציין שהמעבר של התפלגות קושי הוא לא ביחס מינימלי כמו גם של התפלגות הנורמלית

$$c=\max_x\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\max_x\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{\pi s}\left(\frac{s^2}{x^2+s^2}\right)}\right\}=\max_x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi(x^2+s^2)}{s}=$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{s\sqrt{2}}\cdot\max_x\left\{e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(x^2+s^2)\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{s\cdot\sqrt{2}}\cdot\max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-xe^{-\frac{x^2}{2}}(x^2+s^2)+e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot 2x=-xe^{-x^2}\left[x^2+s^2-2\right]$$

נשווה ל0

$$-e^{-x^2}\cdot x\cdot\left[x^2+s^2-2\right]=0$$

נקודות שהנגזרת מתאפסת בהן: $x_1=0 \qquad x_2=\sqrt{2-s^2} \qquad x_3=-\sqrt{2-s^2}$

חשוב לציין שעבור $s\geq\sqrt{2}$ x_2,x_3 לא מוגדרות ולכן הנקודה שיש לנו היא $x=0$

x	-1	0	1
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
$h'(x)$	$+$	0	$-$

ל $h(x)$ נקודת מקסימום ב $x=0$ ולכן נקבל ש

$$c=\frac{e^{-\frac{0^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi(0^2+s^2)}{s}=\frac{\sqrt{\pi}\,s}{\sqrt{2}}$$

עבור $0<s<\sqrt{2}$

x	$-2\sqrt{2-s^2}$	$-\sqrt{2-s^2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2-s^2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2-s^2}$	$\sqrt{2-s^2}$	$2\sqrt{2-s^2}$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

עבור $x=\pm\sqrt{2-s^2}$ נקבל את אותו ערך של C והוא

$$C=\frac{e^{\frac{s^2-2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi\left(2-s^2+s^2\right)}{s}=\frac{\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{s^2-2}{2}}}{s}$$

סיכום ביניים:

$s\geq\sqrt{2} \Leftarrow C=\frac{s\cdot\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \Leftarrow$ ה-C המינימלי הוא כאשר $s=\sqrt{2}$ $C=\sqrt{\pi}$

$0<s<\sqrt{2} \Leftarrow C=\frac{\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{s^2-2}{2}}}{s}$

נבדוק מהו ה s שעבורו C מינימלי

$$\frac{\partial C}{\partial s}=\frac{s^2\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{s^2-2}{2}}-\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{s^2-2}{2}}}{s^2}=\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{s^2-2}{2}}\left(s^2-1\right)}{s^2}=0 \Rightarrow s=1$$

s	$1/2$	1	1.5
$C(s)$	$\searrow$		$\nearrow$
$C'(s)$	$-$	0	$+$

כלומר עבור $s=1$ מתקבל ה-C המינימלי

והוא $C=\sqrt{2\pi}\cdot e^{-1/2}$

עבור $s\geq\sqrt{2}$ ה-C המינימלי הוא $\sqrt{\pi}\cong 1.77$

עבור $0<s<\sqrt{2}$ ה-C המינימלי הוא $\sqrt{2\pi}\cdot e^{-1/2}\cong 1.52$

לכן נגלה לבסוף שה s האופטימלי שייתן לנו תוצאה עם הקבועים המינימליים הוא $s=1$.

(ii)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\qquad N(0,1)$ $\qquad$ התפלגות מטרה

$g(x) = \frac{1}{2s} e^{-\frac{|x-\mu|}{s}}$ $\qquad$ double exp $(0,s)$ $\qquad$ התפלגות מוצעת

נחשב את $c = \max_x \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}$ כפונקציה של s.

נחפש את ה-s שמביא למינימום את c.

ראשית נציין שהמקסימום של התפלגות קיים היות ול-g ביותר כבדות כמו גם של התפלגות הנורמלית

$$c = \max_x \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \max_x \left\{ \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{2s} \cdot e^{\frac{-|x|}{s}}} \right\} = \max_x \left\{ \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{|x|}{s} - \frac{x^2}{2}} \right\} =$$

$$\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \max_x \left\{ e^{\frac{|x|}{s} - \frac{x^2}{2}} \right\} = \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \max_x h(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{\mathrm{Sign}(x)}{s} - x\right) \cdot e^{\frac{|x|}{s} - \frac{x^2}{2}} = \begin{cases} \left(\frac{1}{s} - x\right)\left(e^{\frac{|x|}{s} - \frac{x^2}{2}}\right) & x > 0 \\ \left(-\frac{1}{s} - x\right)\left(e^{\frac{|x|}{s} - \frac{x^2}{s}}\right) & x < 0 \end{cases}$$

עבור $x > 0$ הנגזרת מתאפסת כאשר $x = \frac{1}{s}$

ועבור $x < 0$ בשלילה מתאפסת כאשר $x = -\frac{1}{s}$

x	$-\frac{2}{s}$	$-\frac{1}{s}$	$-\frac{0.5}{s}$	$\frac{0.5}{s}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{2}{s}$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$
$h'(x)$	+	0	−	+	0	−

$h(x)$ מקבלת מקסימום כאשר $x = \frac{1}{s}$ או $x = -\frac{1}{s}$.

$$C = \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2s^2}} = \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2s^2}}$$

נבדוק מהו ה s שנותן את c המינימלי

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2s^2}} - \frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{}{s^3} \cdot e^{\frac{1}{2s^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2s^2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{s^2} e^{\frac{1}{2s^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2s^2}} \cdot \left[1 - \frac{1}{s^2}\right]$$

נשווה ל 0 ונקבל שהנגזרת מתאפסת כאשר $s = \pm 1$

ונקבל ש ה s הרלוונטי הוא $s=1$ נבדוק שזה נותן את c המינימלי.

s	$\frac{1}{2}$	1	2
$c(s)$	↘	min	↗
$c'(s)$	$-$	0	$+$

לסיכום:

ה s האופטימלי שיתן לנו תוחלת מס׳ הדגימות המינימלית היא $s=1$.

שאלה 3

C_1^* - בהתחלה ⇐ $C_1^* = 1$

U_1 - דגימה ראשונה מ- $U(0,1)$

X_1 - דגימה ראשונה מתוך התפלגות ההצעה

נקבל את X_1 אם $U_1 \cdot 1 \le \frac{f(X_1)}{g(X_1)}$

נדחה את X_1 אם $U_1 \cdot 1 > \frac{f(X_1)}{g(X_1)}$

אם נקבל עבור דגימה נוספת X_i מהתפלגות ההצעה $\frac{f(X_i)}{g(X_i)} > 1$ נקבל חסם תחתון חדש

ל-C ולכן $\frac{f(X_1)}{g(X_1)}$ ⇐ נעדכן את C^* להיות $\frac{f(X_i)}{g(X_i)}$.

* אם נשמור את כל הדגימות מהתפלגות האחידה $\{U_i\}$ שבעזרתן קיבלנו/דחינו את הדגימות מהתפלגות ההצעה. התיקון שנבצע הוא לשמור רק את הדגימות X_i כך ש

$$\frac{f(X_i)}{g(X_i)} \ge U_i C^*$$

U_i שאיתו קיבלנו קודם את X_i

החסם העליון המעודכן ביותר של C

* אם לא נשמור את הדגימות $\{U_i\}$

רק את ה-C הרלוונטי היה לקחת אחרים U_i חדשים ולעשות הגרלה מחדש ולשמור את הדגימות X_i שמקיימות $\frac{f(X_i)}{g(X_i)} \ge U_i C^*$, C^* החסם העליון המעודכן ביותר של C.

הדבר נוסף שאפשר לעשות הוא שנשמור את הדגימות X_i שמקיימות $\frac{f(X_i)}{g(X_i)} \ge C^*$, C^* החסם העליון המעודכן ביותר של C.

במקרה זה נחזור ונבדוק את 6 הדגימות שקיבלנו עד עכשיו ונבצע בדיקה נוספת עם $U=1$, הדגימה הנקודתית שניתן לקבל מהתפלגות אחידה סטנדרטית.