שאלה 1

א.

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

נשים לב של $x=1$ יש נק' אי הגדרה של הפונקציה.

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{1-x}\ , \quad x=1-t^2 \\ dx=-2t\,dt \end{bmatrix} =$$

$$\int_1^0 \frac{\cos(1-t^2)}{\cancel{\sqrt{1-x}}\sqrt{1+x}}\cdot -2\cancel{\sqrt{1-x}}\,dt = \int_1^0 \frac{-2\cos(1-t^2)}{\sqrt{2-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{2\cos(1-t^2)}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$$

וכעת אין נק' בעייתית.

ב.

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

נשים לב שהבעיה כאן היא באינסוף ולא בנק' כלשהי קירבנו לכן
כדי לגרום לה להיות סופית.

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \begin{bmatrix} t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}\,dt \end{bmatrix} = \int_1^0 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\cdot -\frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^4}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

וכעת אין לנו בעיה.

ג.

$X \sim beta(2,3)$

$$E\left[\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right] = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{B(2,3)} \cdot x^{2-1} \cdot (1-x)^{3-1}\,dx =$$

$$\frac{1}{B(2,3)} \cdot \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{\Gamma(2+3)}{\Gamma(2)\cdot\Gamma(3)} \cdot \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{4!}{1!\,2!}\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{12\,x(1-x)}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

ד.

$X \sim exp(1/4),\ x \le 5$

k קבוע שמנרמל את הצפיפות

$$f_X(t) = \begin{cases} k \cdot \frac{1}{4} e^{-1/4\, t} & t \le 5 \\ 0 & t \ge 5 \end{cases}$$

$$1 = \int_0^5 k\left(\frac{1}{4} e^{-1/4\, x}\right)dx \Rightarrow \quad \frac{4}{k} = \int_0^5 e^{-1/4\, x}\,dx = -4e^{-1/4\, x}\Big|_0^5 = -4\left(e^{-5/4} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} = 1 - e^{-5/4} \Rightarrow \quad k = \frac{1}{1-e^{-5/4}}$$

$$E[X^2 \cdot \sin(X)] = \int_0^5 x^2 \cdot \sin(x) \cdot \frac{1/4\, e^{-1/4\, x}}{1-e^{-5/4}}\,dx$$

שאלה 2

א.

$H_0: \lambda = 3 \qquad H_1: \lambda > 3 \qquad \alpha = 0.05 \qquad n = 15 \qquad X \sim Pois(\lambda)$

עלפי הקירוב הנורמלי:

$$\frac{\bar{X} - \lambda_0}{\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}} \sim N(0,1) \quad \Leftarrow \quad \bar{X} \overset{H_0}{\sim} N\left(\lambda_0, \frac{\lambda_0}{n}\right)$$

לכן נדחה את H_0 אם

$$\frac{\bar{X} - 3}{\sqrt{\frac{2}{15}}} \geq Z_{1-\alpha} = 1.645$$

לכן עבור 15 תצפיות נדחה H_0 אם

$$\bar{X} = 3 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{3}{15}} = 3.73$$

שאלה 3

א) $x_1,\dots,x_n \sim U(0,1)$, $n=1000$

נרצה לאמוד את $E(e^{x^2})$ באמצעות שיטת MCI כלומר:

כך ש:

$$\theta = E(e^{x^2}) \rightarrow \hat{\theta}_{MCI} = \frac{1}{n}\sum e^{x_i^2}$$

כאשר את x_i נדגום מהתפלגות $U(0,1)$.

ב) נתון

$$g_x(x) \propto (x+1)^2 \quad , \quad x \in [0,1]$$

$$g_x(x) = c\cdot(x+1)^2 \quad , \quad x \in [0,1]$$

נמצא את c:

$$\int_0^1 c\cdot(x+1)^2\,dx = c\cdot\int_0^1 (x^2+2x+1)\,dx = c\cdot\left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x\Big|_0^1\right] =$$

$$= c\cdot\left[\frac{1}{3}+1+1-(0)\right] = 2\tfrac{1}{3}c \underset{\text{נדרש}}{=} 1 \longrightarrow c=\frac{3}{7}$$

קיבלנו:

$$g_x(x) = \frac{3}{7}(x+1)^2 \quad , \quad x \in [0,1]$$

$$E_f(e^{x^2}) = \int_0^1 e^{x^2}\cdot 1\,dx = \int_0^1 e^{x^2}\,\frac{g_x(x)}{g_x(x)}\,dx =$$

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{g_x(x)}\,g_x(x)\,dx = E_g\left[\frac{e^{x^2}}{g_x(x)}\right] = E_g\left[\frac{e^{x^2}}{\frac{3}{7}(x+1)^2}\right] = \hat{\theta}_{IS}$$

נדרש $1=g$

על מנת לדגום 1000 תצפיות מההתפלגות $g_x(x)$

נשתמש בשיטת ITS:

$$g_x(x) = \frac{3}{7}(x+1)^2$$

$$G_x(x) = \int_0^x \frac{3}{7}(x+1)^2\,dx = \frac{3}{7}\cdot\left[\frac{(x+1)^3}{3}\Big|_0^x\right] = \frac{3}{7}\left[\frac{(x+1)^3-1}{3}\right] = \frac{(x+1)^3-1}{7}$$

$$\frac{(x+1)^3-1}{7} = u$$

$$(x+1)^3 = 7u+1$$

$$x = (7u+1)^{\frac{1}{3}} - 1$$

זה החלק השני שאתה צריך להעתיק:

המוטיבציה היא שלרצה פונ' דומה לפונ' e^{x^2}.

בגרף ניתן לראות שעבור $x \in [0,1]$ הפונ' $(x+1)^2$ דומה יותר ל- e^{x^2} מאשר התפלגות אחידה $(y=1)$.

שאלה 4

ב' נסמן

$$f_x(x) = N(0,1)$$

$$g_x(x) = \text{double exponent}(0,1)$$

לפי שיטת הקבלה-דחייה נגריל x מההתפלגות g,

נגריל u מההתפלגות אחידה סטנדרטית.

נקבל את ההגרלה אם:

$$\frac{f_x(x)}{c \cdot g_x(x)} \geq u$$

אחרת, נדחה את ההגרלה.

נמצא את c:

$$c = \max \frac{f_x(x)}{g_x(x)} = \max_x \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{2} e^{-|x|}} =$$

$$= \max_x \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}_{\text{קבוע}} \cdot e^{|x| - \frac{x^2}{2}} = \max_x \ln e^{|x| - \frac{x^2}{2}} = \max_x |x| - \frac{x^2}{2}$$

נגזור:

$$\frac{\partial \left(|x| - \frac{x^2}{2}\right)}{\partial x} = \begin{cases} 1 - x & x \geq 0 \\ -1 - x & x < 0 \end{cases}$$

נשווה ל-0:

$$x \geq 0: \quad 1 - x \equiv 0 \rightarrow x = 1$$

$$x < 0: \quad -1 - x \equiv 0 \rightarrow x = -1$$

נגזור שוב כדי לבדוק מקסימום:

$$\frac{\partial^2 \left(|x| - \frac{x^2}{2}\right)}{\partial^2 x} = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \rightarrow$$

שלילי בשני המקרים ולכן $x = 1, -1$ הן מקסימום.

$$c = \frac{f(x^*)}{g(x^*)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{|x^*| - \frac{x^{*2}}{2}} = \begin{cases} x^*=1: & \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{|1| - \frac{1^2}{2}} = 1.315 \\ x^*=-1: & \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{|-1| - \frac{(-1)^2}{2}} = 1.315 \end{cases}$$

קיבלנו $c \approx 1.315 \left(= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{0.5}\right)$

$$E_f(\cos x^3) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^3)\cdot f_x(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^3)\cdot f_x(x)\, \frac{g_x(x)}{g_x(x)}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^3)\cdot \frac{f_x(x)}{g_x(x)}\cdot g_x(x)\, dx =$$

$$= E_g\left[\cos(x^3)\cdot\frac{f_x(x)}{g_x(x)}\right] = E_g \cos(x_i^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{|x_i| - \frac{x_i^2}{2}}$$

$$\hat{\theta}_{IS} = \frac{1}{n}\sum \cos(x_i^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{|x_i| - \frac{x_i^2}{2}} \rightarrow x_1,\dots,x_n \sim D.E(0,1)$$

ג'

I) איזה מן האומדים עדיף מבחינת כמות הדגימות מהתפלגות שנתונה?

בשיטת IS אנו דוגמים 10,000 תצפיות מ- D.E ועוד R דוגם מהתפלגות אחידה.

בשיטת קבלה - דחיה אנו משתמשים ב- 10,000 דגימות מ- D.E ועוד 10,000 דגימות של משתנה לבחור בין קבלה לדחייה של התצפית.

לכן, שיטת IS עדיפה מבחינת דגימה מהתפלגות אחידה.

II) איזה מהאומדים עדיף מבחינת שונות?