שאלה 1

א. 1500 נערים ונערות.

n_i מס' הנערים שעשו עבירה i פעמים.

X_j - כמות הסנים שעשה j זרק

$$X_j \sim Pois(\lambda)$$

$$L(x,\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda^{x_j} e^{-\lambda}}{x_j!} = \frac{\lambda^{\sum x_j} e^{-n\lambda}}{\prod x_j!}$$

$$l(x,\lambda) = \ln(L(n,\lambda)) = \sum x_j \cdot \ln\lambda - n\lambda - \sum \ln(x_j!)$$

$$\frac{\partial l(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\sum x_j}{\lambda} - n \qquad \frac{\partial^2 l(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{-\sum x_j}{\lambda^2} < 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_{MLE} = \frac{\sum x_j}{n}$$

לא כולל השינויים המשוערים הסנים שנכתבו הם $0,1,\dots 16$

לכן $\hat{\lambda}_{MLE} = \frac{\sum_{i=0}^{16} i \cdot n_i}{1500}$

ב. נחלק לג' קבוצות:

קבוצה I: מקבלת 0. סיכוי α להיות שייך לקבוצה זו

קבוצה II: מתפלגת פואסון עם λ_1 סיכוי β להיות שייך לקבוצה זו

קבוצה III: מתפלגת פואסון עם λ_2 סיכוי $1-\alpha-\beta$ להיות שייך לקבוצה זו

$$P(X_j=0) = \alpha + \beta \cdot P_r(Pois(\lambda_1)=0) + (1-\alpha-\beta)\cdot P_r(Pois(\lambda_2)=0) \qquad (i)$$

$$i \neq 0 \quad P(X_j = i) = \beta \cdot P_r(Pois(\lambda_1)=i) + (1-\alpha-\beta)\cdot P_r(Pois(\lambda_2)=i)$$

(ii) נסמן ב n_0 את מס' האנשים שקיבלו 0

n_i את מס' האנשים שקיבלו i

$$L(\lambda_1,\lambda_2)_{obs} = \prod_{j=1}^{1500} P(X_j = x_j) = P(X_j=0)^{n_0} \cdot \prod_{i=1}^{16} P(X_j = i)^{n_i} = \quad \frac{\lambda^{x_j} e^{-\lambda}}{x_j!}$$

$$= \left(\alpha + \beta \cdot P_r(pois(\lambda_1)=0) + (1-\alpha-\beta)\cdot P_r(pois(\lambda_2)=0)\right)^{n_0} \cdot$$

$$\prod_{i=1}^{16} \left(\beta \cdot P_r(pois(\lambda_1)=i) + (1-\alpha-\beta)\cdot P_r(pois(\lambda_2)=i)\right)^{n_i} =$$

$$= \left[\left(\alpha + \beta \cdot e^{-\lambda_1} + (1-\alpha-\beta)\cdot e^{-\lambda_2}\right)\right]^{n_0} \cdot \prod_{i=1}^{16} \left[\beta\left(\frac{\lambda_1^{i} \cdot e^{-\lambda_1}}{i!}\right) + (1-\alpha-\beta)\cdot\left(\frac{\lambda_2^{i}\cdot e^{-\lambda_2}}{i!}\right)\right] =$$

$$= \prod_{i=0}^{16} \left(\alpha \cdot \mathbb{1}\{i=0\} + \frac{\beta \lambda_1^{i} e^{-\lambda_1}}{i!} + \frac{(1-\alpha-\beta)\lambda_2^{i} e^{-\lambda_2}}{i!}\right)^{n_i}$$

קשה למצוא אותם בצורה מפורשת כי לוג הנראות שלהם נראה ולגזור אותו כפונקציה מאוד מסובכת לגזירה לפי $\alpha,\beta, \lambda_1,\lambda_2$. לכן עדיף לנו להשתמש באלגוריתם אחר למשל EM.

4. $X_1,\dots,X_{1500}$ מס' הפגישות של אדם עם סוכן

יש 3 קבוצות

קבוצה I: מקבלת 0. סיכוי α

קבוצה II: מתפלגת פואסון עם λ_1 סיכוי β

קבוצה III: מתפלגת פואסון ע' λ_2 סיכוי $1-\alpha-\beta$

הנראות המלאה היא

$$L(X,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2) = \prod_{j=1}^{1500} \alpha \cdot \mathbb{1}\{x_j=0\} + \beta \cdot \frac{\lambda_1^{x_j} e^{-\lambda_1}}{x_j!} + (1-\alpha-\beta)\cdot \frac{\lambda_2^{x_j} e^{-\lambda_2}}{x_j!}$$

$$\ell(X,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{j=1}^{1500} \ln\left\{\alpha \cdot \mathbb{1}\{x_j=0\} + \beta \cdot \frac{\lambda_1^{x_j} e^{-\lambda_1}}{x_j!} + (1-\alpha-\beta)\cdot \frac{\lambda_2^{x_j} e^{-\lambda_2}}{x_j!}\right\}$$

ניתן להסתכל על הבעיה כבעיית התפלגות מעורבת לפי הקבוצות הבאות

Z_1 - הגולשים שנכנסו לאתר אך נשארו 0

Z_2 - הגולשים - $Pois(\lambda_1)$

Z_3 הגולשים $Pois(\lambda_2)$

$\{Z_i\}_{i=1}^{1500}$ לא ידוע לאיזו קבוצה X_j שייך. $\Leftarrow$ $Z_i \sim multinomial(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$

לכן פונקציית הנראות תהיה כך

$$L(X,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2) = \prod_{j=1}^{1500} \alpha^{\mathbb{1}\{Z_j=1\}} \cdot \left(\beta \cdot \frac{\lambda_1^{X_j} e^{-\lambda_1}}{X_j!}\right)^{\mathbb{1}\{Z_j=2\}} \cdot \left((1-\alpha-\beta) \cdot \frac{\lambda_2^{X_j} e^{-\lambda_2}}{X_j!}\right)^{\mathbb{1}\{Z_j=3\}}$$

$$l(X,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{j=1}^{1500} \mathbb{1}\{Z_j=1\} \cdot \ln\alpha + \mathbb{1}\{Z_j=2\} \cdot \ln\left(\frac{\beta\lambda_1^{X_j} e^{-\lambda_1}}{X_j!}\right) + \mathbb{1}\{Z_j=3\} \cdot \ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)\lambda_2^{X_j} e^{-\lambda_2}}{X_j!}\right)$$

אך שמכיוון שלא ידוע לנו לאיזו קבוצה X_j שייך.

נשתמש באלגוריתם EM למציאת אומד ל $\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2$:

שלב E:

נחשב את הפונקציה $Q = E_{\underbrace{\alpha^{(k)},\beta^{(k)},\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)}}}[l(X,Z,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2) \mid h_i]$

בקיצור נסמן: $\theta^{(k)}$

$$Q = E_{\theta^{(k)}}\left[\sum_{j=1}^{1500} \mathbb{1}\{Z_j=1\} \cdot \ln\alpha + \mathbb{1}\{Z_j=2\} \cdot \ln\left(\frac{\beta\lambda_1^{X_j} e^{-\lambda_1}}{X_j!}\right) + \mathbb{1}\{Z_j=3\} \cdot \ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)\lambda_2^{X_j} e^{-\lambda_2}}{X_j!}\right) \Big| h_i\right]$$

המשתנה היחיד שלא ידוע הוא Z_j וכל שאר המשתנים הם קבועים.

לכן בעצם מה שצריך לחשב זה $E[\mathbb{1}\{Z_j = 1/2/3\} \mid h_i]$ וזה שווה להסתברות ש X_j

$$\mathbb{E}_{\theta^{(k)}}\left[\mathbb{1}\{z_j=1\} \mid x_j\right] = P(z_j=1 \mid x_j) =$$

$$\frac{\alpha^{k}\cdot\mathbb{1}(x_j=0)}{\alpha^{(k)}\mathbb{1}\{x_j=0\} + \frac{\beta^{(k)}\,{\lambda_1^{(k)}}^{x_j}\,e^{-\lambda_1^{(k)}}}{x_j!} + \frac{1-\alpha^{(k)}-\beta^{(k)}\cdot{\lambda_2^{(k)}}^{x_j}\,e^{-\lambda_2^{(k)}}}{x_j!}} \equiv C_{1j}^{(k)}$$

$$\mathbb{E}_{\theta^{(k)}}\left[\mathbb{1}\{z_j=2\} \mid x_j\right] = P(z_j=2 \mid x_j) =$$

$$\frac{\frac{\beta^{(k)}\,{\lambda_1^{(k)}}^{x_j}\,e^{-\lambda_1^{(k)}}}{x_j!}}{\alpha^{(k)}\mathbb{1}\{x_j=0\} + \frac{\beta^{(k)}\,{\lambda_1^{(k)}}^{x_j}\,e^{-\lambda_1^{(k)}}}{x_j!} + \frac{1-\alpha^{(k)}-\beta^{(k)}\cdot{\lambda_2^{(k)}}^{x_j}\,e^{-\lambda_2^{(k)}}}{x_j!}} \equiv C_{2j}^{(k)}$$

$$\mathbb{E}_{\theta^{(k)}}\left[\mathbb{1}\{z_j=3\} \mid x_j\right] = P(z_j=3 \mid x_j) =$$

$$\frac{\frac{1-\alpha^{(k)}-\beta^{(k)}\cdot{\lambda_2^{(k)}}^{x_j}\,e^{-\lambda_2^{(k)}}}{x_j!}}{\alpha^{(k)}\mathbb{1}\{x_j=0\} + \frac{\beta^{(k)}\,{\lambda_1^{(k)}}^{x_j}\,e^{-\lambda_1^{(k)}}}{x_j!} + \frac{1-\alpha^{(k)}-\beta^{(k)}\cdot{\lambda_2^{(k)}}^{x_j}\,e^{-\lambda_2^{(k)}}}{x_j!}} \equiv C_{3j}^{(k)}$$

$$Q = \sum_{j=1}^{1500} C_{1j}^{(k)} \ln(\alpha) + \sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)}\cdot\left(\ln(\beta) + x_j \ln\lambda_1 - \lambda_1 - \ln(x_j!)\right) + \sum_{j=1}^{1500} C_{3j}^{(k)}\cdot\left(\ln(1-\alpha-\beta) + x_j\ln\lambda_2 - \lambda_2 - \ln(x_j!)\right)$$

אז M - נרצה למקסם את Q לפי $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^{1500} \frac{C_{1j}^{(k)}}{\alpha} - \sum_{j=1}^{1500} \frac{C_{3j}^{(k)}}{1-\alpha-\beta} = 0 \Rightarrow (1-\alpha-\beta)\cdot\sum_{j=1}^{1500} C_{1j}^{(k)} - \alpha\sum_{j=1}^{1500} C_{3j}^{(k)} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^{k+1} = \frac{\left(1-\beta^{k+1}\right)\sum_{j=1}^{1500} C_{1j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{1500} C_{1j}^{(k)} + C_{3j}^{(k)}}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} = \sum \frac{-C_{1j}^{(k)}}{\alpha^2} - \sum \frac{C_{3j}^{(k)}}{(1-\alpha-\beta)^2} < 0 \qquad , \frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha\partial\lambda_1} = 0 \quad , \frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha\partial\lambda_2} = 0 \quad , \frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha\partial\beta} = -\sum \frac{C_{3j}}{(1-\alpha-\beta)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \sum_{j=1}^{1500} \frac{C_{2j}^{(k)}}{\beta} - \sum \frac{C_{3j}^{(k)}}{1-\alpha-\beta} = 0 \qquad (1-\alpha-\beta)\cdot\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)} - \beta \sum_{j=1}^{1500} C_{3j}^{(k)} = 0$$

$$\beta^{k+1} = \frac{\left(1-\alpha^{k+1}\right)\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)} + C_{3j}^{(k)}}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \beta} = \sum_{j=1}^{1500} \frac{-C_{2j}^{(k)}}{\beta^2} - \sum \frac{C_{3j}^{(k)}}{(1-\alpha-\beta)^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta \partial \lambda_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta \partial \lambda_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta \partial \alpha} = -\sum \frac{C_{3j}^{(k)}}{(1-\alpha-\beta)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_1} = \sum_{j=1}^{1500} \frac{C_{2j}^{(k)} X_j}{\lambda_1} - \sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)} = 0 \qquad \lambda_1^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)} X_j}{\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)}}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \lambda_1} = -\sum \frac{C_{2j}^{(k)} X_j}{\lambda_1^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_1 \partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_1 \partial \beta} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_2} = \sum_{j=1}^{1500} \frac{C_{3j}^{(k)} X_j}{\lambda_2} - \sum_{j=1}^{1500} C_{3j}^{(k)} = 0 \qquad \lambda_2^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{1500} C_{3j}^{(k)} X_j}{\sum_{j=1}^{1500} C_{3j}^{(k)}}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \lambda_2} = -\sum \frac{C_{3j}^{(k)} X_j}{\lambda_2^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_1 \partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_1 \partial \beta} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = 0$$

[illegible]

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} &
\begin{pmatrix}
-\sum \frac{C_{1j}^{(k)}}{\alpha^2} - \sum \frac{C_{3j}^{(k)}}{(1-\alpha-\beta)^2} & -\sum \frac{C_{3j}^{(k)}}{(1-\alpha-\beta)^2} & 0 & 0 \\
-\sum \frac{C_{3j}^{(k)}}{(1-\alpha-\beta)^2} & \sum_{j=1}^{1500} \frac{-C_{2j}^{(k)}}{\beta^2} - \sum \frac{C_{3j}^{(k)}}{(1-\alpha-\beta)^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sum \frac{C_{2j}^{(k)} X_j}{\lambda_1^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sum \frac{C_{3j}^{(k)} X_j}{\lambda_2^2}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

ניתן לשים לב שבנוסף המשוואה הנ"ל היא מעודכנת קיימת כי ל הנגזרת
המשוואות בה תלויות רק בנעלם הראשון מקבל שווה ולכן
ה $\lambda_1^{k+1}, \lambda_2^{k+1}, \alpha^{k+1}, \beta^{k+1}$ שמביאים למקסימום את Q.

$$\alpha^{k+1} = \frac{(1-\beta^{k+1})\sum_{j=1}^{1500} C_{1j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{1500} C_{1j}^{(k)} + C_{3j}^{(k)}} =$$

$$\frac{\left(1 - \frac{(1-\alpha^{k+1})\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)} + C_{3j}^{(k)}}\right)\sum C_{1j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{1500} C_{1j}^{(k)} + C_{3j}^{(k)}} = \frac{\left(\frac{\sum_{j=1}^{1500} \overbrace{C_{2j}^{(k)}}^{C_2} + \overbrace{C_{3j}^{(k)}}^{C_3} - \sum C_{2j}^{(k)} - \alpha^{k+1}\sum C_{2j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)} + C_{3j}^{(k)}}\right)\overbrace{\sum C_{1j}^{(k)}}^{C_1}}{\sum C_{1j}^{(k)} + C_{3j}^{(k)}} =$$

$$= \frac{(C_2 + C_3 - (1-\alpha)C_2)\,C_1}{(C_2+C_3)(C_1+C_3)} = \frac{C_1C_2 + C_1C_3 - C_2C_1(1-\alpha^{k+1})}{(C_2+C_3)(C_1+C_3)} = \frac{C_1C_2 + C_1C_3 - C_2C_1(1-\alpha)^{k+1}}{C_2C_1 + C_2C_3 + C_3C_1 + C_3C_3}$$

$$\alpha^{k+1}(\cancel{C_2}C_1 + C_2\cancel{C_3} + \cancel{C_3}C_1 + C_3\cancel{C_3}) = \cancel{C_1C_2} + C_1\cancel{C_3} - \cancel{C_2C_1} + \cancel{C_2C_1\alpha^{k+1}}$$

$$\alpha^{k+1} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = \sum_{j=1}^{1500} C_{1j}^{(k)} + C_{2j}^{(k)} + C_{3j}^{(k)} = \sum \left\{ \frac{\alpha^{(k)}\mathbb{1}\{x_j=0\} + \frac{\beta^{(k)}\lambda_1^{(k)x_j} e^{-\lambda_1^{(k)}}}{x_j!} + \frac{(1-\alpha^{(k)}-\beta^{(k)})\lambda_2^{(k)x_j} e^{-\lambda_2^{(k)}}}{x_j!}}{\alpha^{(k)}\mathbb{1}\{x_j=0\} + \frac{\beta^{(k)}\lambda_1^{(k)x_j} e^{-\lambda_1^{(k)}}}{x_j!} + \frac{(1-\alpha^{(k)}-\beta^{(k)})\lambda_2^{(k)x_j} e^{-\lambda_2^{(k)}}}{x_j!}} \right.$$

$$= \sum_{j=1}^{1500} 1 = 1500$$

$$\Rightarrow \alpha^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{1500} C_{1j}^{(k)}}{1500}, \quad \beta^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)}}{1500}$$

כסף בל הגאגי׳ם הר

$$\alpha^{k+1} = \sum_{j=1}^{1500} \frac{C_{1j}^{(k)}}{1500} \qquad \beta^{k+1} = \sum_{j=1}^{1500} \frac{C_{2j}^{(k)}}{1500}$$

$$\lambda_1^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)} X_j}{\sum_{j=1}^{1500} C_{2j}^{(k)}} \qquad \lambda_2^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{1500} C_{3j}^{(k)} X_j}{\sum_{j=1}^{1500} C_{3j}^{(k)}}$$

שאלה 2

$$X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2) \quad Y_i \sim N(\mu_2, \sigma^2) \qquad i=1 \dots 10000$$

$$O_i = \max(X_i, Y_i) \quad i=1 \dots 10000$$

נניח $i=1 \dots m$ מתקיים θ $\quad X_i \geq Y_i \quad \Rightarrow \quad O_i = X_i \quad j=1 \dots m$

$i=m+1 \dots 10000$ מתקיים ℓ $\quad Y_i > X_i \quad \Rightarrow \quad O_i = Y_i \quad i=m+1, \dots, 10000$

א.

$$f_O(t) = P(O_i = t) = \begin{cases} P(X_i = t) \cdot P(Y_i \leq t) & i=1 \dots m \\ P(Y_i = t) \cdot P(X_i < t) & i=m+1 \dots n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f_{X_i}(x_i) \cdot F_Y(x_i) & i=1 \dots m \\ f_{Y_i}(y_i) \cdot F_X(y_i) & i=m+1 \dots n \end{cases}$$

$$L(X, Y, \mu_1, \mu_2) = \prod_{i=1}^{m} f_X(x_i) \cdot F_Y(x_i) \cdot \prod_{i=m+1}^{n} f_Y(y_i) \cdot F_X(y_i)$$

$$\ell = \sum_{i=1}^{m} \ln f_X(x_i) + \ln F_Y(x_i) + \sum_{i=m+1}^{n} \ln f_Y(y_i) + \ln F_X(y_i)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \ln f_X(x_i)}{\partial \mu_1} + \frac{\partial \ln F_Y(x_i)}{\partial \mu_1}$$

$$\frac{\partial \ln f_X(x_i)}{\partial \mu_1} = \frac{\partial \ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}\right)}{\partial \mu_1} = \frac{\partial}{\partial \mu_1} - \frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2} = \frac{x_i - \mu_1}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln F_y(x_i)}{\partial \mu_1} = \frac{\frac{\partial}{\partial \mu_1} F_X(y_i)}{F_y(x_i)} = \frac{\frac{\partial}{\partial \mu_1} \int_{-\infty}^{y_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} dt}{F_y(x_i)} = \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{t-\mu_1}{\sigma} \Rightarrow t = \mu_1 + s\sigma \\ ds = \frac{1}{\sigma} dt \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial \frac{y_i-\mu_1}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\frac{y_i-\mu_1}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \cdot \frac{\partial \frac{y_i-\mu_1}{\sigma}}{\partial \mu_1}}{F_y(x_i)} = \frac{-\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}}{F_y(x_i)} = \frac{-f_X(y_i)}{F_y(x_i)}$$

במשפט היסודי לחדו"א

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i-\mu_1}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n_3} \frac{f_X(0_i)}{F_Y(0_i)} = S_1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial l}{\partial \mu_2} = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{y_i-\mu_2}{\sigma^2} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{f_Y(0_i)}{F_X(0_i)} = S_2$$

לא ניתן לבודד את μ_1 ו μ_2 באופן מפורש לכן נפתור באמצעות
לפי NR.

את הנגזרות השניות נחשב באופן נומרי:

$$\frac{\partial S_i}{\partial \mu_j} = \frac{S_i(\mu_j + d) - S_i(\mu_j + d)}{2d}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1^{j+1} \\ \mu_2^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1^{(j)} \\ \mu_2^{(j)} \end{pmatrix} - H(\mu_1^{(j)}, \mu_2^{(j)}) \cdot \begin{pmatrix} S_1(\mu_1^{(j)}) \\ S_2(\mu_2^{(j)}) \end{pmatrix}$$ נעדכן לפי NR

ב. בניסוי המלא

$$L(X,Y,\mu_1,\mu_2)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x)\cdot\prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}=$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{2n}\cdot e^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

לוג בניסוי המלא

$$\ell(X,Y,\mu_1,\mu_2)=-2n\ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}$$

$$=-2n\ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)-\frac{\sum X_i^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu_1\sum X_i}{\sigma^2}-\frac{n\mu_1^2}{2\sigma^2}-\frac{\sum Y_i^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu_2\sum Y_i}{\sigma^2}-\frac{n\mu_2^2}{2\sigma^2}$$

$$Q(\theta,\theta^{(j)})=E\left[\ell(X,Y,\theta)\mid \underline{O},\theta^{(j)}\right]\qquad \theta=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}$$

נחשב את התוחלות המותנות שתלויות ב μ_1 ו μ_2 כי רק הם נדרשים בנגזרה

$$\underline{\underline{X_i^{(j)}}}=E[X_i\mid O_i]=\begin{cases}X_i & i=1\dots m\\ E[X_i\mid Y=y_i] & i=m+1\dots n\end{cases}=\begin{cases}X_i & i=1\dots m\\ \mu_1^{(j)}-\sigma\dfrac{\phi\left(\frac{y_i-\mu_1^j}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{y_i-\mu_1^j}{\sigma}\right)} & i=m+1\dots n\end{cases}$$

$$\underline{\underline{Y_i^{(j)}}}=E[Y_i\mid O_i]=\begin{cases}E[Y_i\mid X=x_i] & i=1\dots m\\ Y_i & i=m+1\dots n\end{cases}=\begin{cases}\mu_2^{(j)}+\sigma\dfrac{\phi\left(\frac{x_i-\mu_2^j}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{x_i-\mu_2^j}{\sigma}\right)} & i=1\dots m\\ Y_i & i=m+1\dots n\end{cases}$$

$$Q(\theta,\theta^{(j)}) = -2n\ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) - \frac{\sum E[X_i^2|O_i]}{2\sigma^2} + \frac{\mu_1\sum E[X_i|O_i]}{\sigma^2} - \frac{n\mu_1^2}{2\sigma^2}$$

$$- \frac{\sum E[Y_i^2|O_i]}{2\sigma^2} + \frac{\mu_2\sum E[Y_i|O_i]}{\sigma^2} - \frac{n\mu_2^2}{2\sigma^2} \propto$$

(נשאר) רק מה שתלוי (נו) בפונקציה ו- μ_1 ו- μ_2

$$\propto \frac{\mu_1\sum X_i^{(j)}}{\sigma^2} - \frac{n\mu_1^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu_2\sum Y_i^{(j)}}{\sigma^2} - \frac{n\mu_2^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\mu_1} = \frac{\sum X_i^{(j)}}{\sigma^2} - \frac{n\mu_1}{\sigma^2} \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial^2\mu_1} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial\mu_1\partial\mu_2} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\mu_2} = \frac{\sum Y_i^{(j)}}{\sigma^2} - \frac{n\mu_2}{\sigma^2} \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial^2\mu_2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial\mu_2\partial\mu_1} = 0$$

$$\hat{\mu}_1^{(j+1)} = \frac{\sum X_i^{(j)}}{n} \qquad \mu_2^{(j+1)} = \frac{\sum Y_i^{(j)}}{n}$$

(נרשום את מטריצת ההסיאן $\begin{pmatrix} -n/\sigma^2 & 0 \\ 0 & -n/\sigma^2 \end{pmatrix}$ מוגדרת שלילית ולכן קיבלנו מקסימום

ג.

$$L(O,\mu_1,\mu_2)=\prod_{i=1}^{n} f_{O_i}(O_i)=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\left(\frac{(O_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right)}\cdot\prod_{i=m+1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\left(\frac{(O_i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}\right)}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{m}(O_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=m+1}^{n}(O_i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}$$

$$l(O,\mu_1,\mu_2)=-n\ln\sqrt{2\pi\sigma^2}-\frac{\sum_{i=1}^{m}(O_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}-\frac{\sum_{i=m+1}^{n}(O_i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\mu_1}=\frac{\sum_{i=1}^{m}O_i-m\mu_1}{\sigma^2}\qquad\frac{\partial^2 l}{\partial^2\mu_1}=-\frac{m}{\sigma^2}<0\qquad\frac{\partial^2 l}{\partial\mu_1\partial\mu_2}=0$$

$$\frac{\partial l}{\partial\mu_2}=\frac{\sum_{i=m+1}^{n}O_i-(n-m)\mu_2}{\sigma^2}\qquad\frac{\partial^2 l}{\partial^2\mu_2}=-\frac{(n-m)}{\sigma^2}<0\qquad\frac{\partial^2 l}{\partial\mu_2\partial\mu_1}=0$$

$$\hat{\mu}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}O_i}{m}\qquad\hat{\mu}_2=\frac{\sum_{i=m+1}^{n}O_i}{m-n}$$

מטריצת ההסיאן היא $\begin{pmatrix}-\frac{m}{\sigma^2} & 0\\ 0 & -\frac{(n-m)}{\sigma^2}\end{pmatrix}$ מוגדרת שלילית ולכן קיבלנו מקסימום

[illegible]