מתרגל: ניר קרת
סמסטר ב' תשפ"א

תרגיל 9

- יש לענות על כל השאלות.
- הגשת התרגילים היא **בזוגות קבועים**.
- שאלות המסומנות ב-** הן שאלות רשות.
- את התרגילים יש להגיש לתיבת ההגשה במודל.
- יש להגיש הכל בקובץ PDF אחד, למשל על ידי שימוש ב Rmarkdown.

1) פתרו את שאלת שיעורי הבית בשקופית 37 במצגת 7: דגמו מהתפלגות *Rayleigh* על ידי *MH*, והסבירו למה הדוגמא "אינה חינוכית". הגרילו וקטור באורך 1000, כאשר $\sigma = 2$. בדקו האם המדגם שקיבלתם אכן נראה שמגיע מהתפלגות זו על ידי היסטוגרמה ושרטוט פונקציית הצפיפות. לא לשכוח את שלב ה burn-in (כלומר, צרו 1000 תצפיות **לאחר** burn-in).

2) בחרו התפלגות אפוסטריורית כלשהי שקשה לדגום ממנה ישירות, ודגמו ממנה על ידי *MH* עם מימוש ב-*R*. מיצאו אומדן לתוחלת האפוסטריורית של הפרמטר אותו אנו מעוניינים לאמוד.

כלומר, עליכם:

א. להגדיר מה ההתפלגות שממנה באים הנתונים, ולדגום את הנתונים האלה ב-*R*.
ב. להגדיר התפלגות אפריורית על הפרמטר שאנו רוצים לאמוד.
ג. לכתוב ביטוי פרופורציונלי לצפיפות האפוסטריורית.
ד. לדגום מהתפלגות אפוסטריורית זו, על ידי בחירה של התפלגות מציעה וערך התחלתי.
ה. לחשב אומדן לתוחלת האפוסטריורית. לא לשכוח לבצע דיאגנוסטיקה ולבצע את שלב ה *Burn-in*.

3) עירכו השוואה קונספטואלית בין אלגוריתם *accept-reject* ובין *MH*. עמדו על הדומה והשונה בין שני האלגוריתמים.

4) רגרסיה לוגיסטית בייזיאנית:

נרצה לחשב אומדים לוקטור הפרמטרים ברגרסיה לוגיסטית על ידי תוחלת אפוסטריורית, כאשר נניח התפלגות אפריורית על מקדמי הרגרסיה.

נניח את ההתפלגות האפריורית הבאה:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \sim N\left(\mathbf{0}\,, 2\boldsymbol{I}_p\right)$$

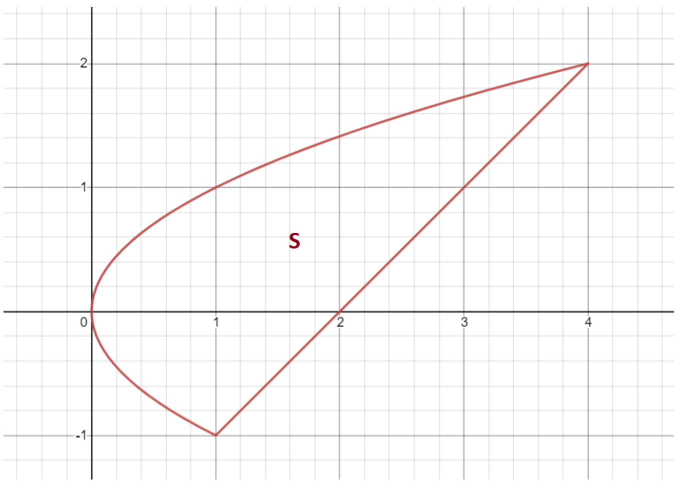
$$\beta_0 \sim U(-5,5)$$

$$\beta_0 \text{ \textit{and the other coefficients are independent}}$$

השתמשו באלגוריתם *MH* על מנת לדגום תצפיות מההתפלגות האפוסטריורית, וחשבו אומד לתוחלת. עשו זאת על ידי התפלגות מציעה נורמלית, שוקטור התוחלות שלה הוא וקטור התצפיות מן השלב הקודם, ומטריצת השונויות היא cI_{p+1}.

א. כתבו את השלבים הדרושים לצורך מימוש אלגוריתם *MH*.
ב. בצעו זאת על הנתונים *ex9data* שבמודל. לצורך ביצוע דיאגנוסטיקה, אתם יכולים לקחת בכל שלב את ממוצע המקדמים (למשל) כך שתוכלו לשרטט שרשרת אחת בצורה גרפית ולחשב אוטוקורלציות. על סמך הדיאגנוסטיקות שאתם יוצרים, נסו לכוון את הפרמטר *c* של ההתפלגות המציעה.
ג. השוו את התוצאות מסעיף ב' לתוצאות המתקבלות מהרצת רגרסיה לוגיסטית "רגילה" (אתם רשאים להשתמש בחבילה *glm* ב-*R*)

5) נתונה קבוצה *S* המתוארת בתרשים הבא:



$$S = \{(x,y)\ s.t\ \ y^2 \le x\ and\ \ y > x-2\}$$

אנו מעוניינים לדגום תצפיות באופן אחיד בתוך *S*.

כלומר:

$$f(x,y) \propto I\big((x,y) \in S\big)$$

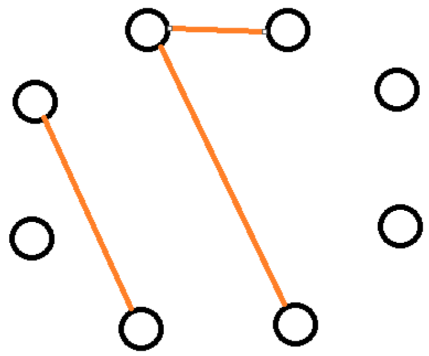
תארו כיצד נוכל לקבל דגימה מקורבת מהתפלגות דו-מימדית זו על ידי *Gibbs sampling*. פרטו את השלבים באופן מדוייק.

**6) שאלת רשות:

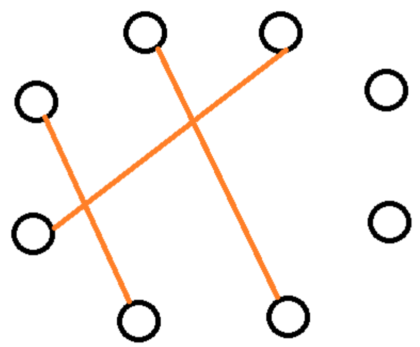
נתון לוח של שמונה זיזים המסודרים במעגל. יש ברשותנו שלושה מיתרים אשר ניתנים למתיחה בין זיזים אלו.

אנו מעוניינים לדגום סידורים אפשריים עבור המיתרים, כך שהם לא יחצו זה את זה.

דוגמא לסידור תקין:



דוגמא לסידור שאינו תקין:



היינו רוצים לדגום באופן אחיד מתוך מרחב הסידורים האפשריים. חישוב של מרחב מצבים זה באופן מלא הינו מסובך.

הציעו כיצד נוכל להשתמש ב MH על מנת לבצע את הדגימה.

עליכם להסביר כיצד תעברו ממצב למצב, איך תחשבו את ההסתברות לקבלה או דחייה, ומדוע השרשרת שבחרתם היא לא מחזורית ובלתי-פריקה.

**7) שאלת רשות:

יהיו X ו-Y שני מ"מ עם צפיפות משותפת פרופורציונלית ל:

$$p(x,y) \propto e^{-xy} I(|x-y|<c) I(x>0) I(y>0)$$

כאשר *c* קבוע חיובי כלשהו.

ברצוננו לאמוד את הביטוי: $E(g(X,Y))$ $\quad g(x,y)=\ln(x+e^y)$

נעשה זאת על ידי ממוצע של דגימות מההתפלגות המשותפת, כאשר הדגימה תתבצע באמצעות *Gibbs sampling*.

א. מצאו מהן ההתפלגויות המותנות $X|Y, Y|X$, וממשו את הדגימה באמצעות *Gibbs*. מהו אומד לביטוי הנ"ל? לא לשכוח להיפטר מתצפיות ה *burn-in*. בסעיף זה קחו *c=2*. הציגו, בנוסף, גרף ניטור להתכנסות של האומד (הציגו גרף של האומד כפונקצייה של מספר זוגות התצפיות שהוגרלו. כדאי להשתמש בפונקציה *cumsum*). לפי הגרף, מתי נראה שהאומד "מתייצב"?

ב. מה יקרה כאשר ניקח את *c* להיות קטן? למשל *c=0.01*? איזו בעיה תיגרם?
חיזרו על סעיף א' עבור ערך זה של *c*. האם האומד מתייצב אחרי 10,000 דגימות? מה לגבי 100,000, 1,000,000?

ג. על מנת לפתור את הבעיה הנגרמת מ-*c* קטן, נשתמש בהחלפת המשתנים:

$$A=\frac{X+Y}{2}, \qquad B=\frac{X-Y}{2}$$

ג(1). הביעו כעת את הביטוי הפרופורציונלי לצפיפות המשותפת של *A,B*. השתמשו לשם כך בנוסחת הטרנספורמציה.

ג(2). מצאו את הביטויים הפרופורציונליים לצפיפויות המותנות: *p(A|B)*, *p(B|A)*.

ג(3). חיזרו על התהליך מסעיפים א' ו-ב' באמצעות דגימה מ-*A* ו-*B*. (לאחר שאתם מקבלים צמד תצפיות *B,A*, עליכם לתרגם אותן חזרה למונחי *X* ו-*Y*, לפני שתציבו אותן בפונקצייה *g*.)

<u>הנחיות:</u>

(1) עבור הדגימה של $A|B$: בשביל לדגום מהתפלגות נורמלית קטומה מותר לכם להיעזר בפונקציות *pnorm,qnorm* ב-*R* (אולם אסור

להשתמש בחבילה הדוגמת ישירות מנורמלית קטומה). לחלופין, אתם יכולים להיעזר בשיטת קבלה-דחייה.

(2) עבור הדגימה של $B|A$: תצטרכו להשתמש בפונקצייה *erfi = imaginary error function* המוגדרת באופן הבא:

$$erfi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt$$

באפשרותכם להוריד את החבילה *pracma* ב-*R* אשר מחשבת פונקציה זו. פונקציה זו מחזירה ערך ממשי עבור כל ארגומנט ממשי שמציבים בה. עם זאת, הפונקצייה ב-*R* מחזירה משתנה מטיפוס מרוכב (עם 0 לפני החלק המדומה), ולכן עליכם להפעיל *as.numeric* על הפלט של פונקצייה זו.

בנוסף, יהיה עליכם להשתמש בשיטת *NR* למציאת שורש של משוואה.

ג(4) האם בשיטה זו אנו עדיין סובלים מבעיה כאשר *c* קטן?