**1. Demostrar que las siguientes son transformaciones lineales.**

1.$T(x) = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \rightarrowtail (x,-y)$

Sean $u$ y $v$ vectores en $\mathbb{R}^2$, tal que:

$$u = (a,b) \qquad v = (c,d)$$

Sabemos que si $\alpha T(u) + T(v) = T(\alpha u + v)$ entonces nuestra transformación es lineal.

Primero vemos que obtenemos de $\alpha T(u) + T(v)$

Aplicamos la transformación a $u$ y $v$:

$$\alpha T(u) + T(v) = \alpha(a,-b) + (c,-d)$$

Luego aplicamos la suma y producto por escalar definidos en $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha(a,-b) + (c,-d) = (\alpha a, \alpha(-b)) + (c,d) = (\alpha a + c, \alpha(-b) - d)$$

Ahora veremos que obtenemos de operar $T(\alpha u + v)$

Aplicamos suma y producto por escalar definidos en $\mathbb{R}^2$:

$$T(\alpha(a,b) + (c,d)) = T((\alpha a, \alpha, b) + (c,d)) = T((\alpha a + c, \alpha b + d))$$

Aplicamos la transformación al vector resultante:

$$T((\alpha a + c, \alpha b + d)) = (\alpha a + c, -(\alpha b + d))$$

Por propiedades de los números reales:

$$(\alpha a + c, -(\alpha b + d)) = (\alpha a + c, \alpha(-b) - d)$$

Entonces podemos observar que $T(\alpha u + v) = (\alpha a + c, \alpha(-b) - d) = \alpha T(x) + T(v)$

$$\therefore T(x) \ es \ lineal \triangle$$

2.$T(x) = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \rightarrowtail y$

Siendo $u$ y $v$ vectores en $\mathbb{R}^2$, tales que:

$$u = (a,b) \qquad v = (c,d)$$

Sabemos que si $\alpha T(u) + T(v) = T(\alpha u + v)$ entonces $T(x)$ es lineal.

Primero observaremos el resultado de evaluar $\alpha T(u) + T(v)$

Aplicamos la transformación a los vectores:

$$\alpha T(u) + T(v) = \alpha T((a,b)) + T((c,d)) = \alpha b + d$$

Ahora observaremos el resultado de evaluar $T(\alpha u + v)$

Aplicamos la suma y producto por escalar definidos en $\mathbb{R}^2$:

$$T(\alpha u + v) = T(\alpha(a, b) + (c, d)) = T((\alpha a, \alpha b) + (c, d)) = T((\alpha a + c, \alpha b + d))$$

Ahora aplicamos la transformación a nuestro resultado:

$$T((\alpha a + c, \alpha b + d) = \alpha b + d$$

Podemos apreciar luego de evaluar que:

$$\alpha T(u) + T(v) = \alpha b + d = T(\alpha u + v)$$

$$\therefore T(x) \text{ } es \text{ } lineal.\triangle$$

3.$T(x) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \rightarrowtail (x, 0)$

Sean $u, v \in \mathbb{R}$ como espacio vectorial, sabemos que una transformación es lineal si $\alpha T(u) + T(v) = T(\alpha u + v)$.

Empezaremos evaluando $\alpha T(u) + T(v)$

Aplicamos la transformación a los vectores:

$$\alpha T(u) + T(v) = \alpha(u, 0) + (v, 0)$$

Aplicamos la suma y producto por escalar definidos en $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha(u, 0) + (v, 0) = (\alpha u, \alpha 0) + (v, 0) = (\alpha u + v, \alpha 0 + 0)$$

Aplicamos propiedades de $\mathbb{R}$:

$$(\alpha u + v, \alpha 0 + 0) = (\alpha u + v, 0)$$

Ahora evaluaremos $T(\alpha u + v)$

Notamos que $\alpha u + v$ ya es operable por si mismo, por lo cual sólo le aplicamos la transformación:

$$T(\alpha u + v) = (\alpha u + v, 0)$$

Podemos apreciar que:

$$\alpha T(u) + T(v) = (\alpha u + v, 0) = T(\alpha u + v)$$

$$\therefore T(x) \text{ } es \text{ } lineal.\triangle$$

**2. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal , entonces $T(0_v) = 0_w$**

Empezaremos la demostración suponiendo $\vec{x} \in V$ lo cual implica que $T(x) \in W$

Sabemos por propiedad de los espacios vectoriales que $0 * \vec{x} = 0_v$

Lo mismo aplica para $T(x)$, pues $W$ es un espacio vectorial, entonces se cumple que $0 * T(\vec{x}) = 0_w$

Y con esto se puede deducir que:

$$T(0_v) = T(0 * \vec{x})$$

Y como $T$ es lineal, entonces:

$$\Rightarrow T(0_v) = T(0 * \vec{x}) = 0 * T(\vec{x}) = 0_w$$

$$\therefore T(0_v) = 0_w \ cuando \ T \ es \ transformacion \ lineal \blacksquare$$

**4. Supón que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal con $T(1, 0) = (1, 4)$ y $T(1, 1) = (2, 5)$. Calcula $T(2, 3)$ y muestra si $T$ es inyectiva o no.**

Sabemos por el corolario del teorema de la dimensión que si $T : V \rightarrow W$ es lineal y tenemos una base de V tal que $\beta = \{x_1, ..., x_n\}$, entonces $R(T) = L(T(\beta)) = L(\{T(x_1), ..., T(x_n\}))$

Entonces sabiendo que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal con $T(1, 0) = (1, 4)$ y $T(1, 1) = (2, 5)$, podemos tomar (1,0) y (1,4) como elementos de la base de $\mathbb{R}^2$ y a su vez vemos que (1,4) y (2,5) son elementos de la base de $\mathbb{R}^2$

Entonces por ser bases, sabiendo que generan a $T((2, 3)$ buscamos $T((2, 3) = T(a(1, 0) + b(1, 1))$

Buscamos los escalares tales que $(2, 3) = a(1, 0) + b(1, 1) = (a, 0) + (b, b)$ con un sistema de ecuaciones:

$$2 = a + b$$

$$3 = 0 + b$$

De lo cual obtenemos que $a = -1$ y $b = 3$ por lo cual:

$$T((2, 3)) = T(-1(1, 0) + 3(1, 1))$$

$$= -1T((1, 0)) + 3T((1, 1)) = -1(1, 4) + 3(2, 5)$$

$$= (5, 11)$$

Ahora para ver si $T$ es inyectiva, sabemos que $T$ es inyectiva si $N(T) = \{0_v\}$

Recordando que {(1,0),(1,1)} es base de V, entonces buscamos la combinación tal que $T(x) = 0_w = (0, 0)$

Sabiendo que $T(x) = T(a(1,0) + b(1,1)) = a(T(1,0)) + b(T(1,1)) = a(1,4) + b(2,5)$

Buscamos los escalares tales que $(0,0) = a(1,4) + b(2,5) = (a, 4a) + (b, 5b)$ con un sistema de ecuaciones:

$$0 = a + 2b$$

$$0 = 4a + 5b$$

al cual le asociamos una matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

La cual al reducirla por Gauss-Jordan obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Por lo cual $a = 0$ y $b = 0$ por lo que $(0,0) = T(a(1,0) + b(1,1)) = T(0(1,0) + 0(1,1)) = T(0,0)$

$$\therefore T \text{ } \textit{es inyectiva} \triangle$$

**5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T((1,0,3)) = (1,1)$ y $T((-2,0-6)) = (2,1)$. ¿Puede T ser lineal?**

Vamos a suponer que $T$ es lineal, entonces sabemos que $T((1,0,3)) = (1,1)$ y $T((-2,0-6)) = (2,1)$

Aplicando producto por escalar se supone que si T es lineal, entonces pasa que $aT((1,0,3)) = T(a(1,0,3))$, de forma truculenta usaremos $a = -2$, primero evaluaremos $-2T(1,0,3)$:

$$-2T((1,0,3)) = -2(1,1) = (2,-2)$$

Ahora evaluaremos $T(-2(1,0,3))$:

$$T(-2(1,0,3)) = T((-2,0,6)) = (2,1)$$

Pero notamos que (2,1) $\neq$ (2,-2) por lo cual $T$ no es lineal.

$$\therefore T \text{ } \textit{no es lineal} \triangle$$

**6.Sea $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] : f \to f'$. Muestra que $T$ es lineal.**

Si $T$ es lineal, entonces $T(f+g) = T(f) + T(g)$ y $T(cf) = cT(f)$

Sabemos que $T(f+g) = (f+g)' = f' + g' = T(f) + T(g)$, por lo cual se cumple la primera condición.

Sabemos por calculus que $cT(f) = cf' = T(cf)$, por lo cual se cumple la segunda condición.

$$\therefore T \text{ } es \text{ } lineal \blacksquare$$

**7. Muestra que la anterior transformación $T$ (si es que lo es) no es inyectiva.**

Sabemos que si $T$ es inyectiva, entonces $N(T) = \{0_v\}$

En este caso el $0_v$ es el polinomio nulo, por lo cual buscamos el polinomio tal que $T(f) = 0_v = 0$

Sabemos que $T(f) = f' = 0$, por lo cual buscamos el polinomio tal que $f' = 0$

Por métodos básicos de integración sabemos que $f' = 0$ cuando $f = c$ con $c$ una constante, por lo cual $T(f) = 0$ cuando $f = c$

Eso implica que el núcleo de $T$ es el conjunto de todos los polinomios constantes, por lo cual $N(T) \neq \{0_v\}$

$$\therefore T \text{ } no \text{ } es \text{ } inyectiva \blacksquare$$

**8. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \to W$ lineal.**

**a) Si $dim(V) < dim(W)$ entonces $T$ no puede ser suprayectiva.**

Sabemos que si $T$ es suprayectiva, entonces $R(T) = W$

Lo cual implica que $dim(R(T)) = dim(W)$

Por el teorema del a dimensión sabemos que $dim(R(T)) = dim(V) - dim(N(T))$ por lo cual si suponemos que T es suprayectiva, entonces $dim(V) - dim(N(T)) = dim(W)$

Pero sabemos que $dim(V) < dim(W)$, por lo cual $dim(V) - dim(N(T)) < dim(W)(!)$

$$\therefore T \text{ } no \text{ } es \text{ } suprayectiva \blacksquare$$

**b) Si $dim(V) > dim(W)$ entonces $T$ no puede ser inyectiva.**

Sabemos que si $T$ es inyectiva, entonces $N(T) = \{0_v\}$

Suponiendo que $T$ es inyectiva, entonces $dim(N(T)) = 0$ y por el teorema de la dimensión sabemos que $dim(N(T)) = dim(V) - dim(R(T))$ lo cual implicaría que $dim(V) = dim(R(T))$

Pero sabemos que $dim(V) > dim(W)$, y sabemos que $dim(R(T)) \leq dim(W)$, por lo cual es una contradicción (!), entonces $dim(V) > dim(R(T))$.

$$\therefore T \textit{ no es inyectiva} \blacksquare$$

**10. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita y $W \leq V$, entonces existe una proyección sobre $W$**

Si $W \leq V$ entonces $\exists W' = (V - W) \cup \{0\}$ tal que $V = W \oplus W'$

Sea $v \in V$, entonces $v = w + w'$ con $w \in W$ y $w' \in W'$

Definimos $T : V \to V$ como $T(v) = w$, entonces $T(v) = w, w \in W$ y $T(v) = v - w', w' \in W'$

Por lo cual $T(v) = w$ es una proyección sobre $W$

$$\therefore \textit{ existe una proyección sobre } W \blacksquare$$

**11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineal demuestra que existen escalares $a, b, c$ tales que $T((x, y, z)) = ax + by + cz$ para toda $x, y, z \in \mathbb{R}^3$**

Sabemos que $T$ es lineal, por lo cual

$$T((x, y, z)) = T(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$= xT((1, 0, 0)) + yT((0, 1, 0)) + zT((0, 0, 1))$$

Y suponiendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $a = T((1, 0, 0)), b = T((0, 1, 0)), c = T((0, 0, 1))$ entonces:

$$T((x, y, z)) = xT((1, 0, 0)) + yT((0, 1, 0)) + zT((0, 0, 1)) = ax + by + cz$$

$$\therefore \textit{ existen escalares } a, b, c \textit{ tales que } T((x, y, z)) = ax + by + cz \blacksquare$$

**12. Muestra que si F es un campo, se puede generalizar lo anterior para cualquier transformación lineal $T : F^n \to F$**

Supongamos un vector $(x_1, x_2, ..., x_n) \in F^n$, entonces:

$$T((x_1, x_2, ..., x_n)) = T(x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, ..., 0) + ... + x_n(0, 0, ..., 1))$$

Y al $T$ ser lineal:

$$T((x_1, x_2, ..., x_n)) = x_1T((1, 0, ..., 0)) + x_2T((0, 1, ..., 0)) + ... + x_nT((0, 0, ..., 1))$$

Y suponiendo $a_1, a_2, ..., a_n \in F$ tal que
$a_1 = T((1, 0, ..., 0)), a_2 = T((0, 1, ..., 0)), ..., a_n = T((0, 0, ..., 1))$ entonces:

$$T((x_1, x_2, ..., x_n)) = x_1T((1, 0, ..., 0)) + x_2T((0, 1, ..., 0)) + ... + x_nT((0, 0, ..., 1))$$

$$= a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

$$\therefore \textit{ existen escalares } a_1, a_2, ..., a_n \textit{ tales que } T((x_1, x_2, ..., x_n))$$

$$= a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \blacksquare$$

**13. Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ lineal, diremos que $W \leq V$ es un subespacio $T$ invariante si $T(W) \subseteq W$**

**a) Prueba que los subespacios $\{0\}, V, N(T), R(T)$ son todos $T$ invariantes**

**Subespacio $\{0\}$:**

Sea $0 \in W = 0$ sabemos que $T(0_v) = 0_v y 0_v \in W$ por lo cual $T(W) \subseteq W$

**Subespacio $V$:**

En primera instancia tenemos por hipótesis que $V \leq W$ y que $W \leq V$, por lo cual $V = W$ y siendo una transformación de $V$ a $V$, entonces sea $v \in V$, sabemos que $R(T) \leq V$, por lo tanto $T(v) \in R(T)$ y $R(T) \leq V$, por lo cual $T(v) \in V$ y $T(W) \subseteq W$

**Subespacio $N(T)$:**

Sabemos por definición de la nulidad que $N(T) \leq V$, por lo cual sea $v \in N(T)$, entonces $T(v) = 0_v$ y $0_v \in N(T)$, pues en este caso y por ser T lineal, $T(0_v) = 0_v$ y $0_v \in N(T)$, por lo tanto $T(N(T)) \subseteq N(T)$

**Subespacio $R(T)$:**

Sabemos por definición del rango que $R(T) \leq V$, por lo cual sea $v \in R(T)$, entonces $T(v) = v'$ y $v' \in R(T)$, por lo tanto $T(R(T)) \subseteq R(T)\blacksquare$

**b) Si T es una proyección sobre W, muestra que W es un subespacio T invariante.**

Sabemos por definición de proyección que existe $W'|W \oplus W'$, y que $W = R(T)$, entonces como ya demostramos que $R(T)$ es $T$ invariante eso implica que $W$ es $T$ invariante.■

**c) Si $V = Im(T) \oplus W$ y $W$ es $T$ invariante, prueba que $W \subseteq N(T)$**

Sabemos que $T(v) \in Im(T)$ y por definición de $T$ invariante sabemos que $T(W) \subseteq W$, pero $T(w) \in Im(T), w \in W$, entonces $T(w) \in W \cap Im(T) = 0$

Entonces $T(w) = 0_v$ y $w \in N(T)$, por lo tanto $W \subseteq N(T)$■

**d) En "c" si $V$ es de dimensión finita, entonces $W = N(T)$.**

**14. Sean $V, W$ espacios $\mathbb{Q}$-vectoriales y $T : V \to W$. Muestra que basta con que $\forall x, y \in V$, $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para que $T$ sea lineal.**

Sea $x \in V$ y $a \in \mathbb{Q}$ y

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

Representaremos $\alpha \in \mathbb{Q}$ como $\alpha = m/n$ con $m, n \in \mathbb{Z}$

Sea $\frac{m}{n}T(x) = m(\frac{1}{n}T(x) =_{m\ veces} \{\frac{1}{n}T(x) + \frac{1}{n}T(x) + ... + \frac{1}{n}T(x)$

$$= T(_{m\ veces}\{\frac{1}{n}x + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}x) = T(\frac{m}{n}x)$$

Entonces se cumple que $\frac{m}{n}T(x) = T(\frac{m}{n}x)$

O sea que $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ y $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

Por lo tanto $T$ es lineal.■

**15. Sea $T$ una transformación lineal. Muestra que $T$ es inyectiva si y solo si la imagen de de cualquier subconjunto linealmente independiente bajo $T$ vuelve a ser linealmente independiente.**

**a) Supongamos que $T$ es inyectiva y sea $S$ un subconjunto linealmente independiente de $V$. Muestra que $T(S)$ es linealmente independiente.**