数字逻辑设计
Digital Logic Design

张春慨

School of Computer Science

ckzhang@hit.edu.cn

Unit 3　Boolean Algebra

- 逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法


George Boole

各种逻辑运算

- **基本逻辑运算**（Basic Operations）
  - 与（AND）
  - 或（OR）
  - 非（NOT）
- **复合逻辑运算**（Other Operations）

基本运算（Basic Operations）

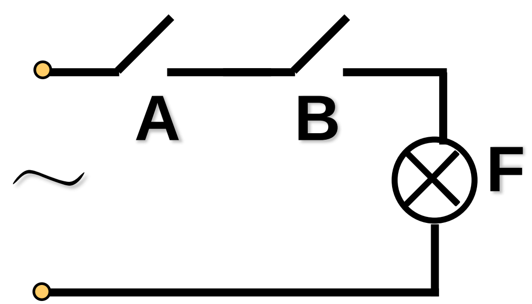
1. AND（逻辑“与”）

$$F=A\bullet B$$

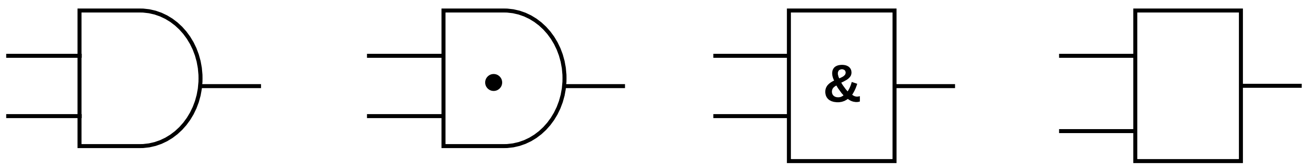
Truth Table

AB	F
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

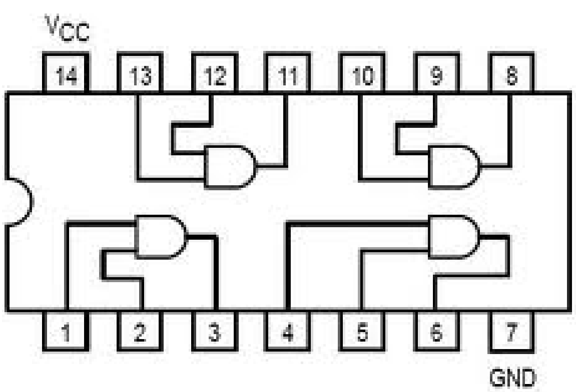
① 也称为： 逻辑“乘”

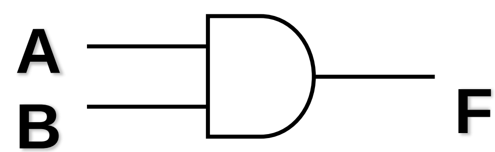


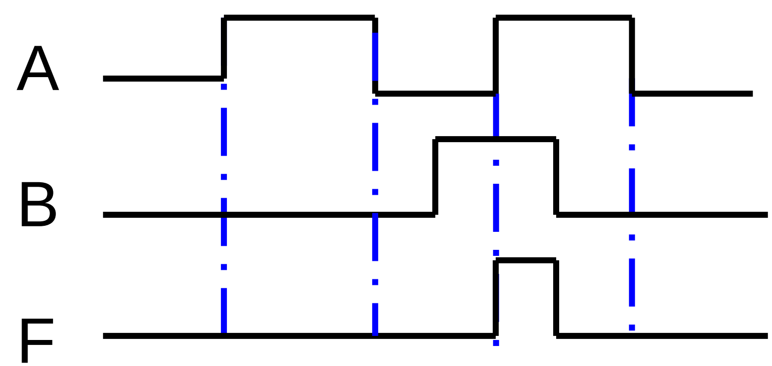
② AND gate（与门）逻辑符号



③ Typical Chip: 74LS08





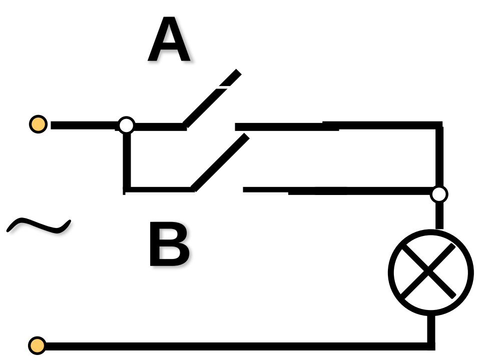


基本运算（Basic Operations）

2. OR（逻辑“或”）

$$F=A+B$$

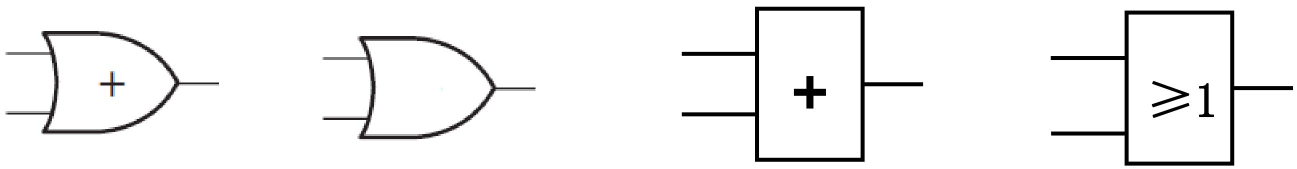
①也称为：逻辑“加”



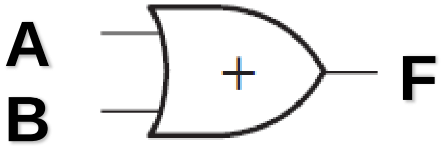
Truth Table

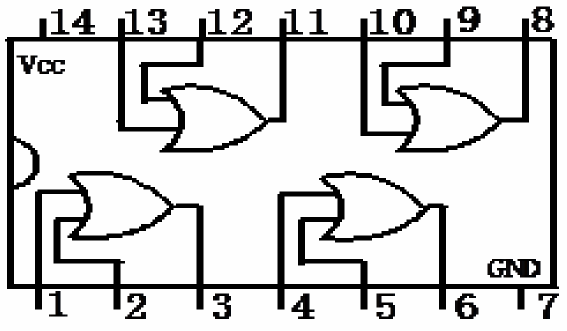
AB	F
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

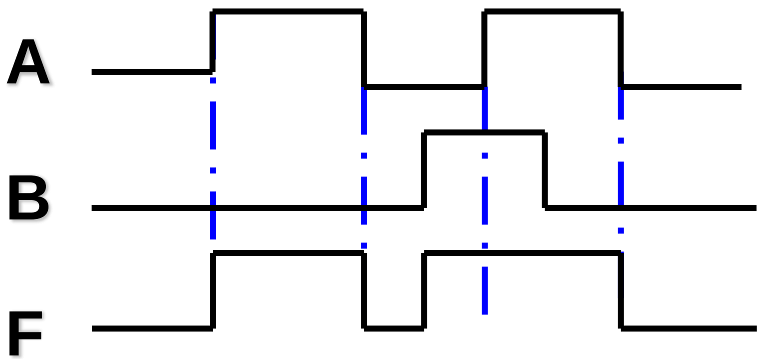
② OR gate（或门）逻辑符号



③ Typical Chip: 74LS32







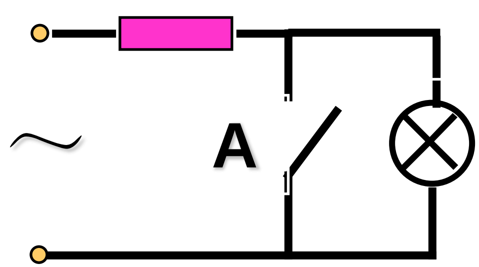
基本运算（Basic Operations）

3. NOT（逻辑“非”）

$$F=\overline{A}$$

$$(\, or \; F=A')$$

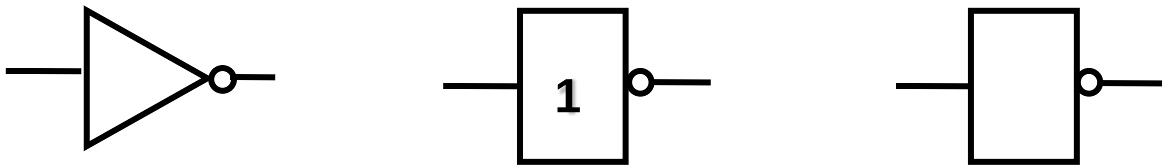
①也称为：反相器



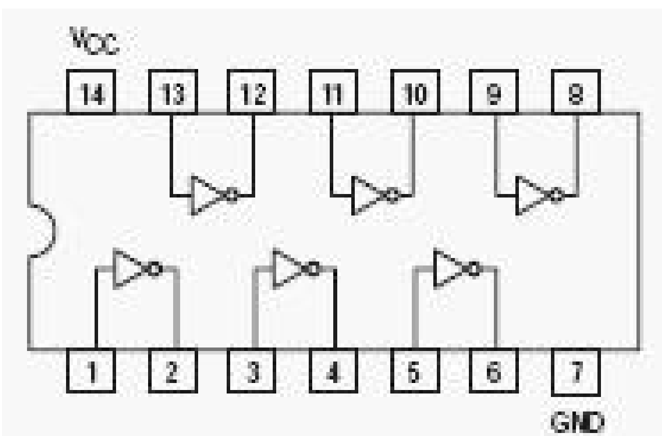
True table

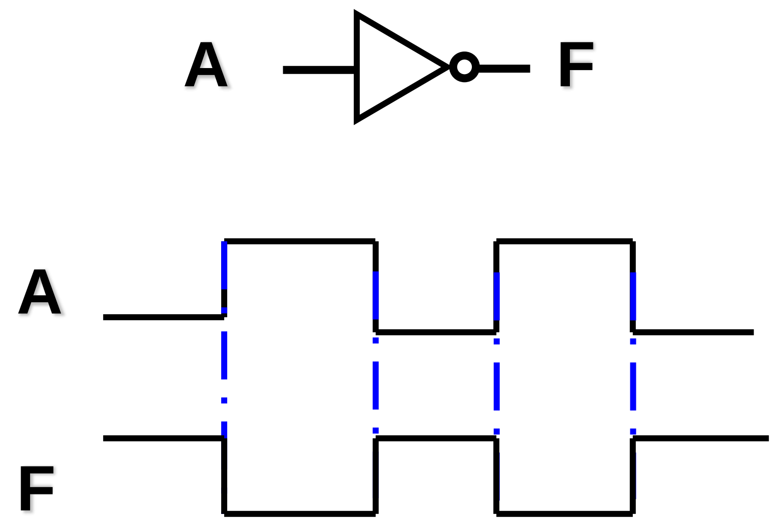
A	F
0	1
1	0

② NOT gate（非门）逻辑符号



③ Typical Chip: 74LS04





复合运算（Other Operations）

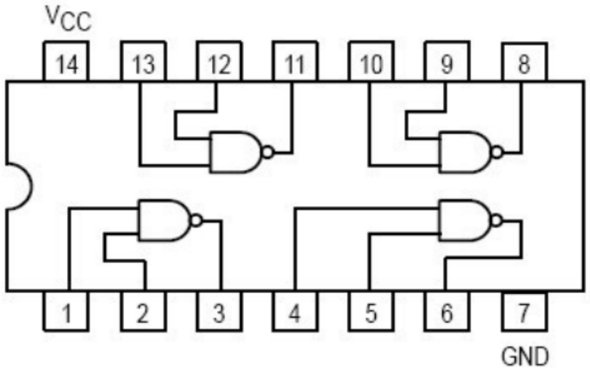
- **基本逻辑运算**（Basic Operations）
  - 与（AND）
  - 或（OR）
  - 非（NOT）
- **复合逻辑运算**（Other Operations）

复合运算（Other Operations）

4. 与非门（NAND gate）

$$F= \overline{AB}$$

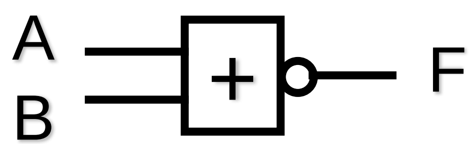
- **Typical Chip: 74LS00**

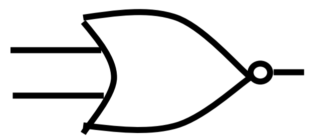


复合运算（Other Operations）

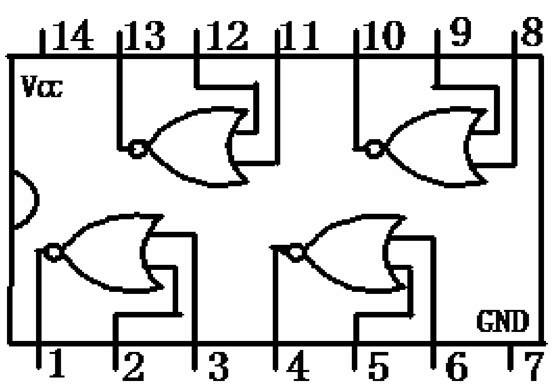
5. 或非门（NOR gate）

$$F = \overline{A+B}$$





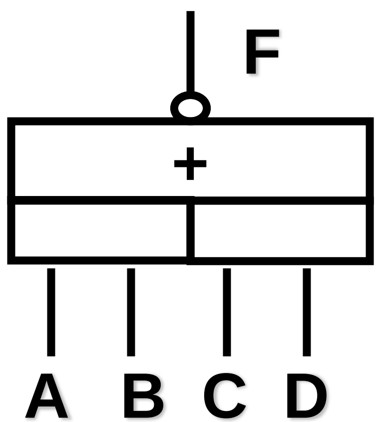
- Typical Chip: 74LS02

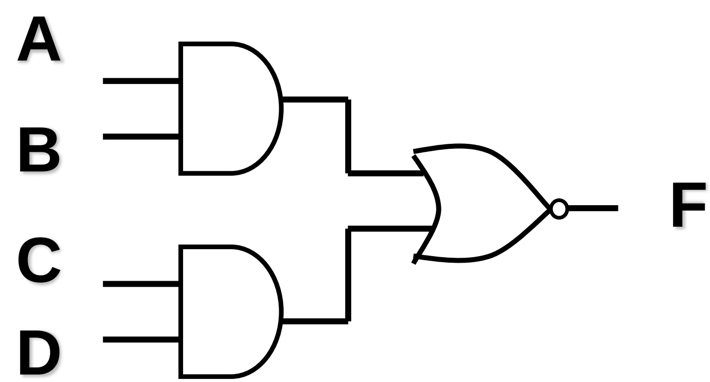


复合运算（Other Operations）

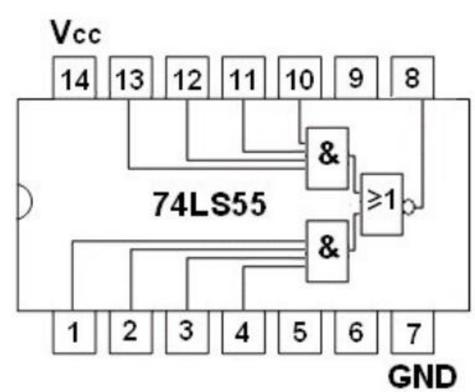
6. 与或非门（AND-OR-NOT gate)

$$F=\overline{AB+CD}$$





- Typical Chip: 74LS51,74LS55



复合运算（Other Operations）

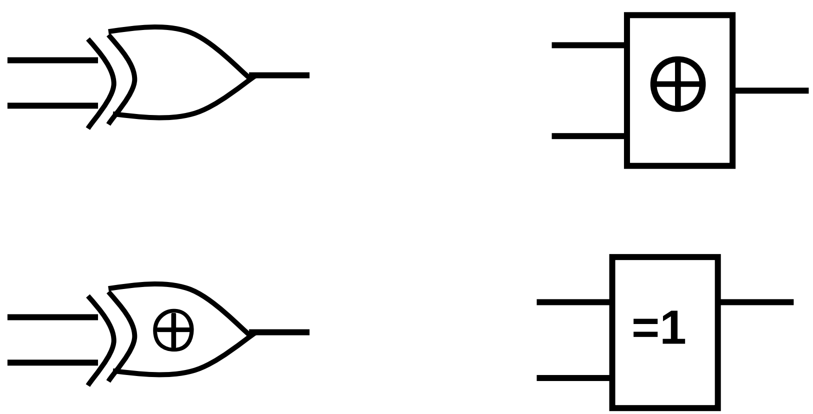
7. 异或门 (⊕，Exclusive-OR operation)

$$F = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$$

Truth Table

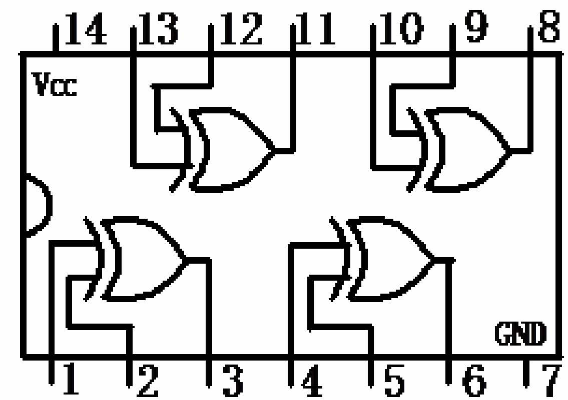
AB	F
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

① 逻辑符号



复合运算（Other Operations）

② Typical Chip: 74LS86

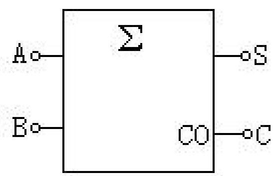


③ Applications

- 全加器（Full adder）
- 半加器（Half-adder）

复合运算（Other Operations）

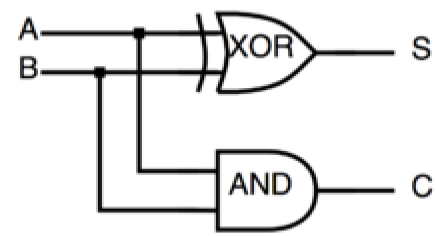
■ 半加器（Half-adder）



半加器逻辑符号

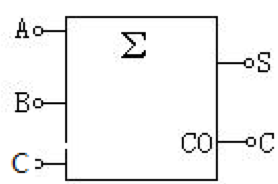
输入		输出	
A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

逻辑表达式：$S = A \oplus B$；$C = A \cdot B$。



半加器的逻辑实现

■ 全加器（Full adder）

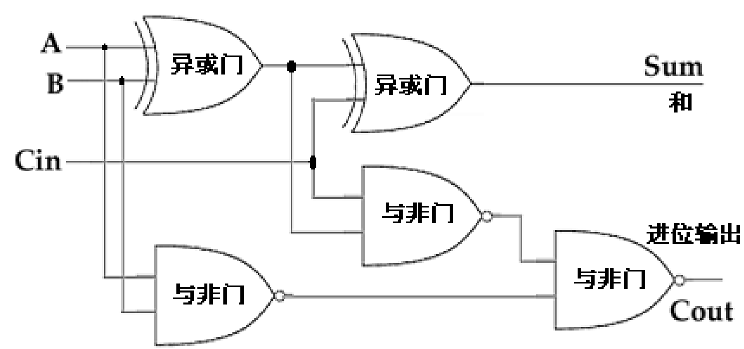


全加器逻辑符号

输入			输出	
Ci-1	Ai	Bi	Si	Ci
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$S = A \oplus B \oplus C_{in}$$

$$C_{out} = (A \cdot B) + (C_{in} \cdot (A \oplus B))$$



复合运算（Other Operations）

8. 同或门 (⊙ or ≡, Equivalence operation)

$$F= A\equiv B$$

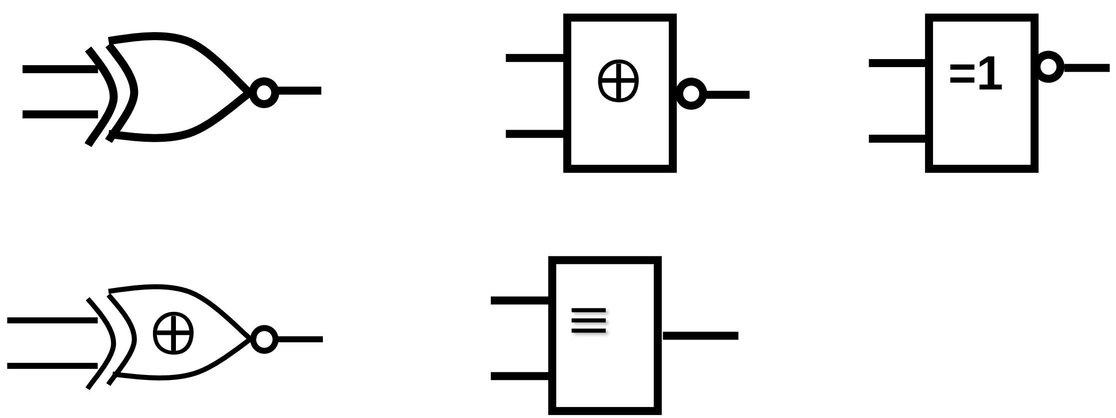
or

$$F= A\odot B= \bar{A}\bar{B}+AB$$

Truth Table

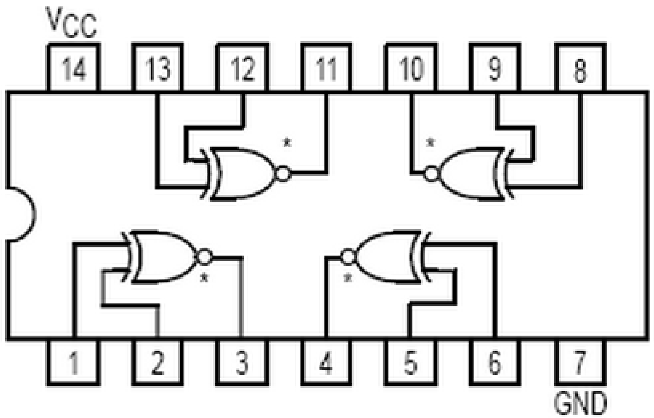
AB	F
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

① 逻辑符号



复合运算（Other Operations）

② Typical Chip: 74LS266



如何构造1位等值比较器？？

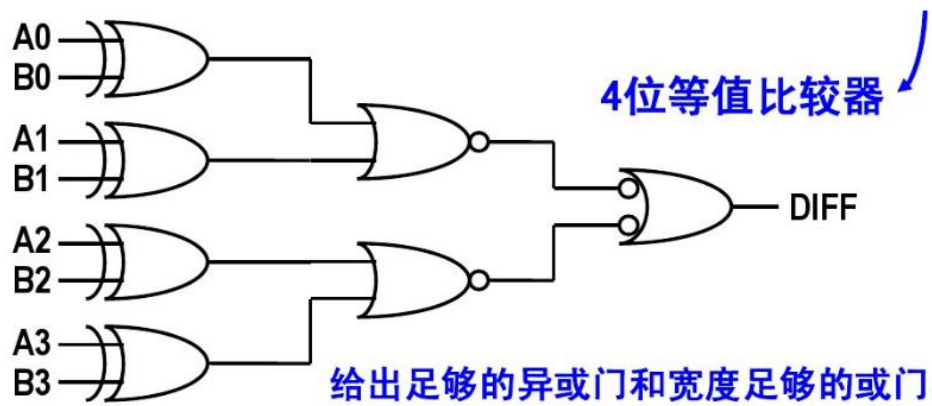
—— 利用异或门（同或门）

DIFF : different

EQ : equal

③ Applications

- 等值比较器



给出足够的异或门和宽度足够的或门，
可以搭建任意输入位数的等值比较器。

复合运算（Other Operations）

④ 性质

$A \oplus 1 = \overline{A}$　　　$A \odot 1 = A$

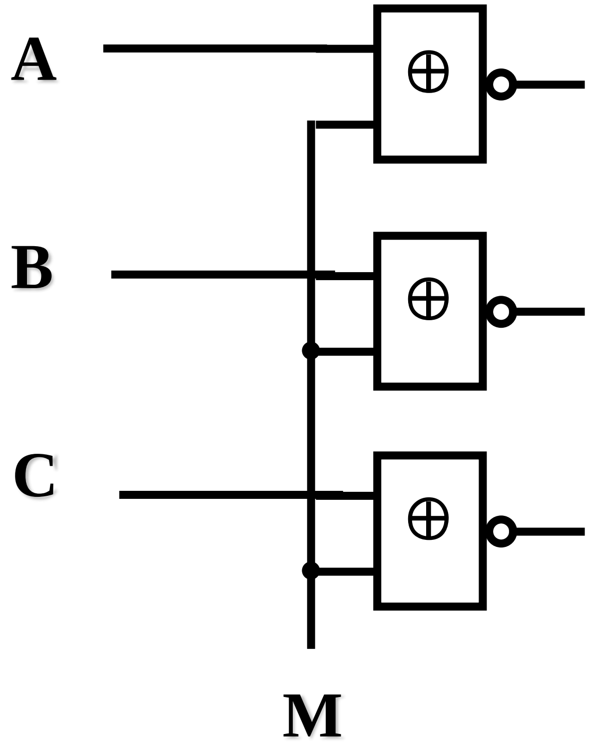
$A \oplus 0 = A$　　　$A \odot 0 = \overline{A}$

$A \oplus A = 0$　　　$A \odot A = 1$

$A \oplus \overline{A} = 1$　　　$A \odot \overline{A} = 0$

复合运算（Other Operations）

Applications



Unit 2 Boolean Algebra

- 各种逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

布尔表达式和真值表

1. 布尔表达式（Boolean Expressions）

Example $$F = AB + \bar{A}\bar{B}$$

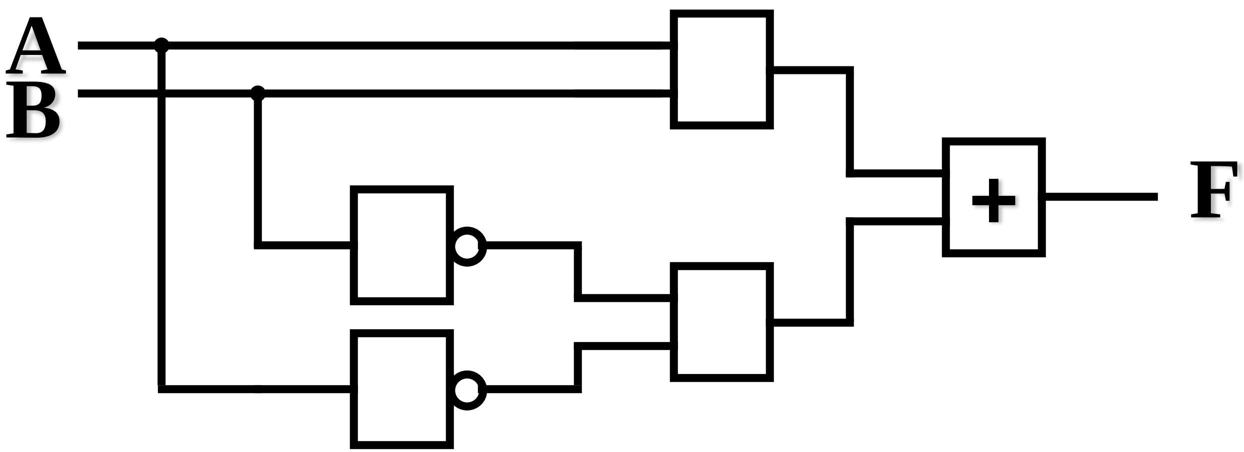
$$F = [A(C+D)]' + BE$$

- *Boolean expressions* are formed by application of the basic operations (and, or, not) to one or more variables or constants.

布尔表达式和真值表

逻辑图

Example $F = AB + \bar{A}\bar{B}$



- Each expression corresponds directly to a circuit of logic gates

布尔表达式和真值表

2. 真值表（Truth Table）

Example $F = AB + \bar{A}\bar{B}$

Truth Table

AB	F
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

- A *truth table* specifies the values of a Boolean expression for every possible combination of values of the variables in the expression.
- **n** 个输入变量有 **2^n** 种取值组合

布尔表达式和真值表

- 如果两个逻辑表达式的真值表相等，则这两个逻辑表达式相等.

适用情况：逻辑表达式简单，逻辑变量较少

$$AB'+C = (A+C)(B'+C)$$

A	B	C	$AB'+C$	$(A+C)(B'+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Unit 2　Boolean Algebra

- 各种逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

Laws and Theorems

1. 公理（Axiom）

(1) $0 \cdot 0 = 0$ (1)' $0+0=0$

(2) $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ (2)' $1+0 = 0+1 = 1$

(3) $1 \cdot 1 = 1$ (3)' $1+1 = 1$

(4) $\overline{0} = 1$ (4)' $\overline{1} = 0$

(5) If $A \neq 0$ then $A=1$ (5)' If $A \neq 1$ then $A=0$

Laws and Theorems

2. 基本定理（Basic Theorems）

- *single variable is involved*

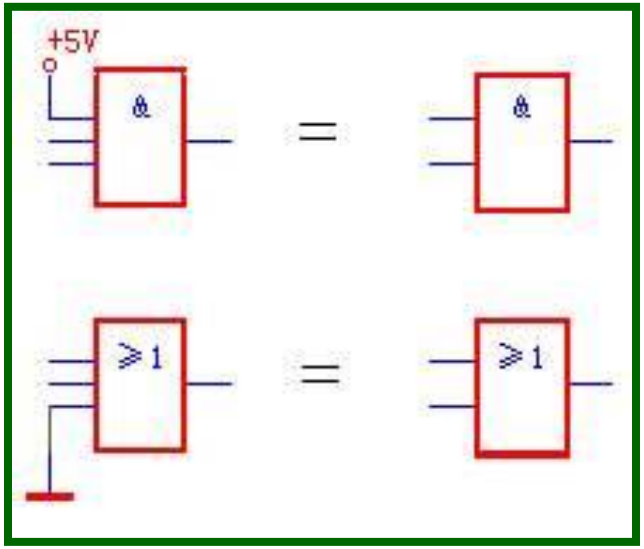
(6)	$A+0=A$	(6)'	$A\cdot 0=0$	0 - 1 律
(7)	$A+1=1$	(7)'	$A\cdot 1=A$	
(8)	$A+\overline{A}=1$	(8)'	$A\cdot \overline{A}=0$	互补律
(9)	$A+A=A$	(9)'	$A\cdot A=A$	重叠率

Laws and Theorems

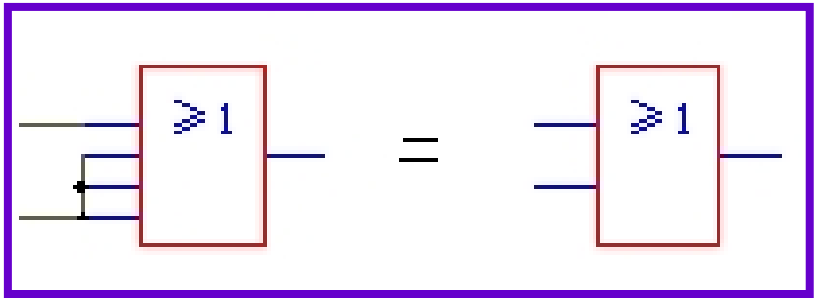
2. 基本定理（Basic Theorems）

Applications——

0 - 1 律



重叠率



Laws and Theorems

- ***与普通代数相似的定理***

交换律

(10) $A+B=B+A$　　　(10)' $A \cdot B = B \cdot A$

结合律

(11) $(A+B)+C=A+(B+C)$　　　(11)' $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

分配律

(12) $A \cdot (B+C) = AB+AC$　　　(12)' $A+BC=(A+B) \cdot (A+C)$

普通代数不支持

第二分配律

Laws and Theorems

- *第二分配律证明*

$(A+B)\cdot(A+C)$

$= A\cdot(A+C)+B\cdot(A+C)$ 分配律

$=A+AC+AB+BC$

$=A\cdot 1+AC+AB+BC$ 0-1律

$=A\cdot(1+C+B)+BC$ 分配律

$=A+BC$ 0-1律

Laws and Theorems

- *第二分配律证明（第2种证明）*

(A+B) • (A+C)

= A•(A+C)+B•(A+C) 分配律

=A+AC+AB+BC

=A+A+AC+AB+BC 重叠率

= (A+AC)+(A+AB)+BC 交换律

=A(1+C)+A(1+B)+BC 分配律

=A+A +BC **0-1**律

=A+BC

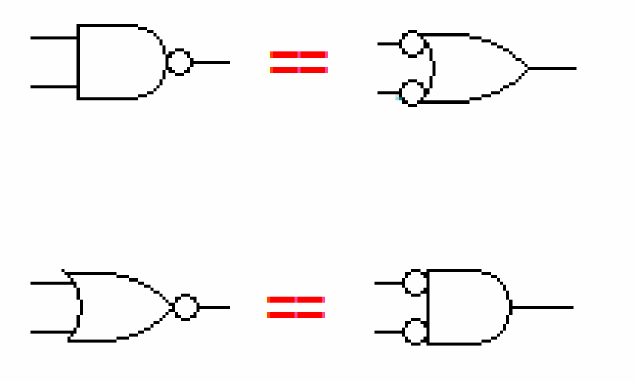
Laws and Theorems

- *特殊定理*

德摩根定理（DeMorgan's Laws）

(13) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ (13)' $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

(14) $\overline{\overline{A}} = A$



Laws and Theorems

- *特殊定理*

DeMorgan's Laws

- **Applications:** 表达式化简

（1） $\overline{X_1 X_2 \ \cdots \ X_n} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \cdots + \overline{X}_n$

（2） $\overline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} = \overline{X}_1 \overline{X}_2 \ \cdots \ \overline{X}_n$

Laws and Theorems

- *特殊定理*

对偶规则

- **Applications:** Algebraic Simplification

变量: 不变

运算符:

$$\cdot \longrightarrow +$$

$$+ \longrightarrow \cdot$$

$$\oplus \longrightarrow \odot$$

$$\odot \longrightarrow \oplus$$

不能改变原来的优先级

Laws and Theorems

- *特殊定理*

对偶规则

Example

$$F=A\cdot(B+C) \xrightarrow{\text{对偶}} (F)^D = A+B\cdot C$$

$$F=A\cdot\overline{B}+AC \xrightarrow{\text{对偶}} (F)^D = (A+\overline{B})\cdot(A+C)$$

$$F=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B\cdot\overline{C}}} \xrightarrow{\text{对偶}} (F)^D = \overline{\overline{A}+\overline{B+\overline{C}}}$$

Laws and Theorems

- *特殊定理*

Inference of Dual Rule

① $F \xleftrightarrow{\text{Dual Rule}} (F)^D$

② 两个逻辑表达式相等，它们的对偶也相等

Example $A+BCD = (A+B)(A+C)(A+D)$

$\Downarrow$ Dual Rule $\qquad \Downarrow$ Dual Rule

$A \cdot (B+C+D) = AB+AC+AD$

Laws and Theorems

3. 常用公式

⒂ $AB+A\overline{B}=A$（合并律）

⒃ $A+AB=A$（吸收律）

⒄ $A+\overline{A}B=A+B$（消除律）

⒅ $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$（蕴含律）

⒅' $AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$

⒅'' $(A+B)(B+C)(A'+C)=(A+B)(A'+C)$

From（18）：

$A+\overline{A}B$ 第二分配律

$=(A+\overline{A})(A+B)$

$=A+B$

$=AB+\overline{A}C$

Laws and Theorems

(19) $\overline{A\bar{B}+\bar{A}B}=\bar{A}\,\bar{B}+AB$

$$\overline{A\bar{B}+\bar{A}B}$$

$$=\overline{A\bar{B}}\cdot\overline{\bar{A}B}$$

$$=(\bar{A}+B)\cdot(A+\bar{B})$$

$$=\bar{A}\bar{B}+AB$$

Unit 2 Boolean Algebra

- 各种逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

Algebraic Simplification

■ 一个逻辑函数有多种不同的表达式

$F=AB+A\bar{C}$ .....与-或

$=\overline{\overline{AB+A\bar{C}}}$

$=\overline{\overline{AB}\cdot\overline{A\bar{C}}}$ .....与非-与非

$=\overline{(\bar{A}+\bar{B})\cdot(\bar{A}+C)}$ .....或-与非

$=\overline{(\bar{A}+\bar{B})}+\overline{(\bar{A}+C)}$ .....或非-或

$F=(A+B)\cdot(A+\bar{C})$ .....或-与

$=\overline{\overline{(A+B)\cdot(A+\bar{C})}}$

$=\overline{\overline{(A+B)}+\overline{(A+\bar{C})}}$ .....或非-或非

$=\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}+\bar{A}\cdot C}$ .....与-或非

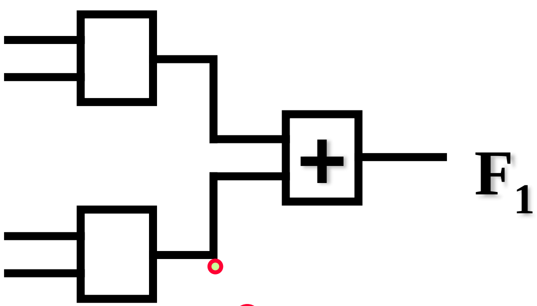
$=\overline{\bar{A}\,\bar{B}}\cdot\overline{\bar{A}C}$ .....与非-与

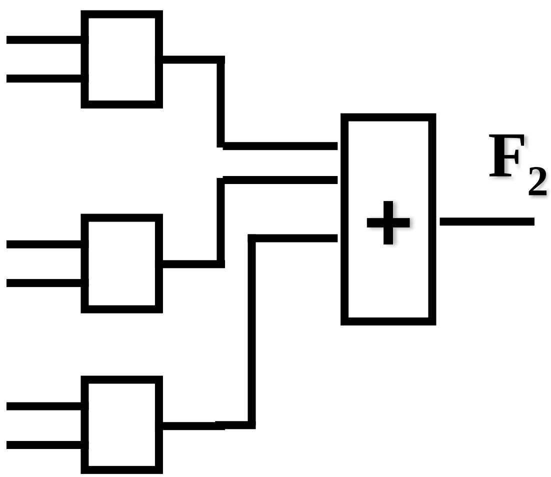
■ 同一类型的表达式也不是唯一的

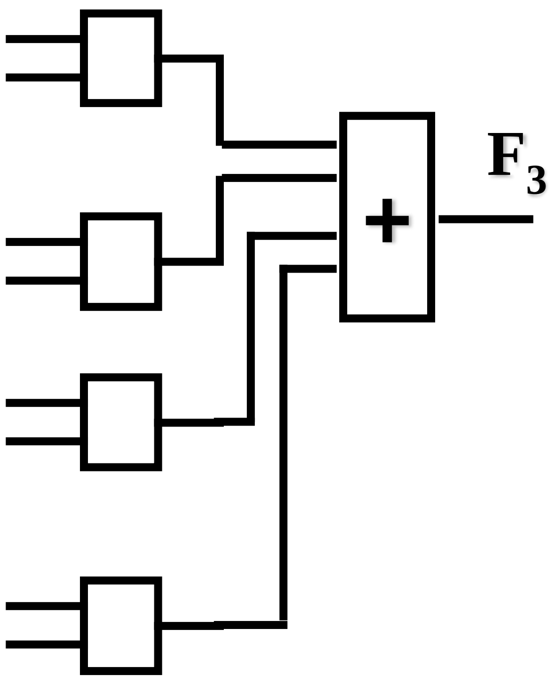
$$F=AB+\bar{A}C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \; F_1$$

$$=AB+\bar{A}C+BC \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ② \; F_2$$

$$=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \; F_3$$







最简，元件少，可靠

Algebraic Simplification

最简（**Minimum Expressions**）？

① 与项（和项）的个数最少

② 每个与项（和项）中变量的个数最少

minimum cost

① 逻辑门的数量最少

② 逻辑门的输入个数最少

目的：

① 降低成本

② 提高可靠性

Methods
- 代数法（**Algebraic techniques**）
- 卡诺图法（**K. map method**）

代数化简法

example

$$F = A + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}CD + \overline{C}E + \overline{D}E$$

$$= A + \overline{A}CD + \overline{C}E + \overline{D}E$$

$$= A + CD + \overline{C}E + \overline{D}E$$

$$= A + CD + E(\overline{C} + \overline{D})$$

$$= A + CD + E\overline{CD}$$

$$= A + CD + E$$

example

$$F = AB + A\bar{C} + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + ADE(F+G)$$

$$= A(\overline{\bar{B}C}) + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + ADE(F+G)$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + ADE(F+G)$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + C\bar{D}$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + \cancel{B\bar{D}} + C\bar{D}$$

$$= A + \cancel{\bar{B}C} + B\bar{C} + \bar{B}D + C\bar{D}$$

$$= A + B\bar{C} + \bar{B}D + C\bar{D}$$

Simplification Methods

example

$$F = (\overline{B}+D)(\overline{B}+D+A+G)(C+E)(\overline{C}+G)(A+E+G)$$

Dual Rule:

$$J = \overline{B}D+\overline{B}DAG+CE+\overline{C}G+AEG$$

$$= \overline{B}D+CE+\overline{C}G+AEG$$

$$= \overline{B}D+CE+\overline{C}G$$

Dual Rule:

$$F = (\overline{B}+D)(C+E)(\overline{C}+G)$$

example

$$F = A+AB+\overline{A}C+BD+ACEF+\overline{B}E+DEF$$

$$= A+C+BD+\overline{B}E$$

代数化简法

优点——

- 不受变量数目的约束；
- 对公理、定理和规则十分熟练时，化简较方便。

缺点——

- 技巧性强
- 在很多情况下难以判断化简结果是否最简

Unit 2 Boolean Algebra

- 各种逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法