

数字逻辑设计

Digital Logic Design

张春慨

School of Computer Science

ckzhang@hit.edu.cn

Unit 3-2——

布尔代数的应用及最大项最小项表达式



- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

组合逻辑电路的设计方法

组合逻辑电路的设计目标

- 实现逻辑功能
- 满足性能指标
- 综合考虑各项因素：
 规模、功耗、价格、可靠性、
 速度、易实现、易维修、美观等



设计不唯一，最佳设计方案应随新技术的不断推出而变化

布尔代数的应用

怎样设计组合逻辑电路？



■方法1：直接转换（简单情况下）

将文字描述的功能直接转换为逻辑表达式

■方法2：真值表转换

由真值表可以直接写出两种标准形式的逻辑表达式

布尔代数的应用

 **方法1.** 将文字描述的功能直接转换为表达式

Example

逻辑关系

Mary watches TV **if** it is Monday night **and** she has finished her homework



Define:

$F=1$: 看电视; **$F=0$** : 没看电视.

$A=1$: 周一晚上; **$A=0$** : 不是周一晚上.

$B=1$: 完成作业; **$B=0$** : 没完成作业

$$F = A \cdot B$$

布尔代数的应用



方法1. 将文字描述的功能直接转换为表达式

Example

The alarm will ring if the alarm switch is turned on and the door is not closed, or it is after 6 P.M. and the window is not closed.

布尔代数的应用

Example

$$Z = AB' + CD'$$

The alarm will ring **if** the alarm switch is on **and**

Z

A

the door is not closed **or** it is after 6 P.M. **and**

B'

C

the window is not closed

D'

布尔代数的应用

怎样设计组合逻辑电路？

■方法1：直接转换（简单情况下）

将文字描述的功能直接转换为真值表或表达式

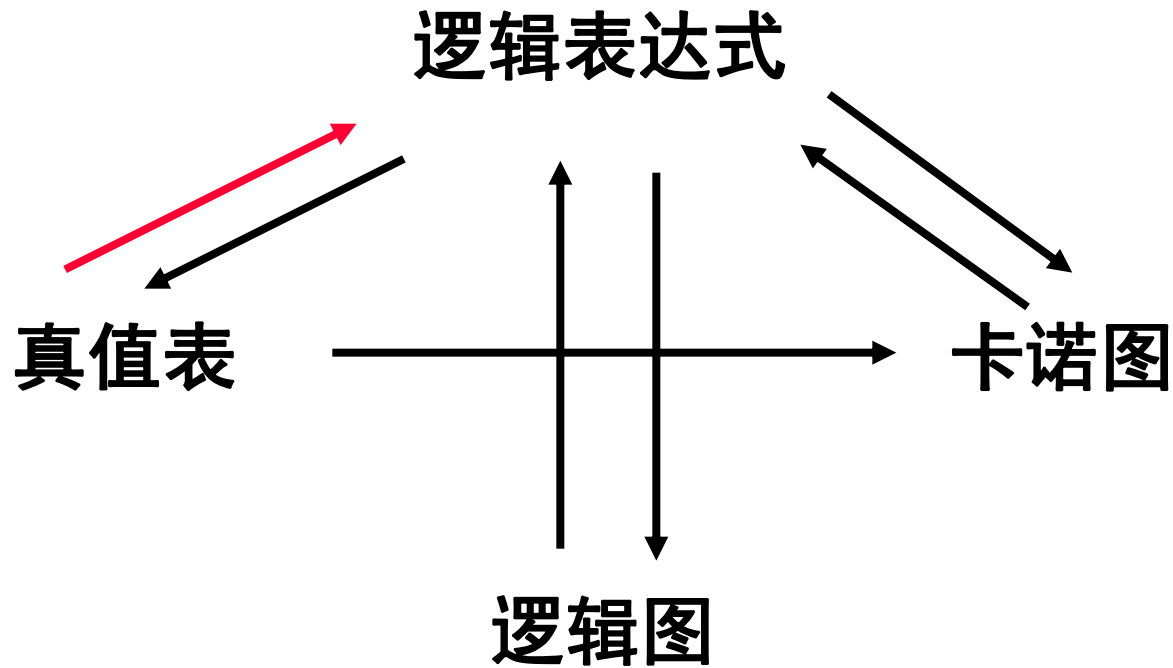
■方法2：真值表转换

由真值表可以直接写出两种标准形式的逻辑表达式

- 标准与或式（最小项表达式：and-or）
- 标准或与式（最大项表达式：or-and）

布尔代数中的应用

逻辑函数的表示方法



使用真值表设计组合逻辑电路

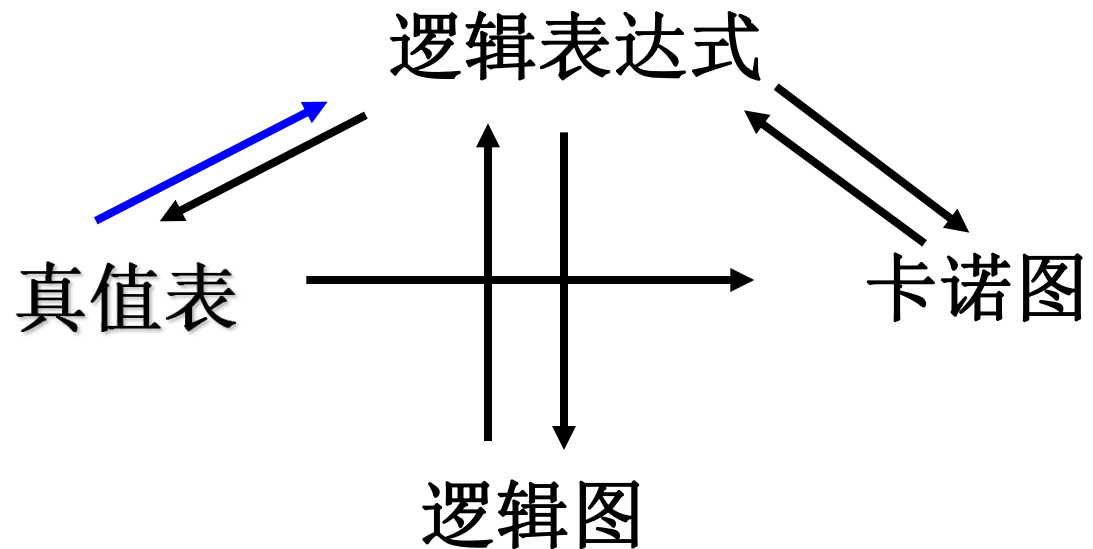
真值表 \longrightarrow 表达式

Truth table

AB C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

① 写出标准与或式（乘积之和）

关注表中输出值为1的所有输入取值组合



使用真值表设计组合逻辑电路

真值表 \longrightarrow 表达式

Truth table

AB C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1 ✓
1 0 0	0
1 0 1	1 ✓
1 1 0	1 ✓
1 1 1	1 ✓

① 写出标准与或式（乘积之和）

关注表中输出值为1的所有输入取值组合

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

输入取值组合中

1——原变量

0——反变量

使用真值表设计组合逻辑电路

真值表 \longrightarrow 表达式

Truth table

AB C	F
0 0 0	0 ✓
0 0 1	0 ✓
0 1 0	0 ✓
0 1 1	1
1 0 0	0 ✓
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

②写出标准或与式（和之积）

关注表中输出值为0的所有输入取值组合

输入取值组合中

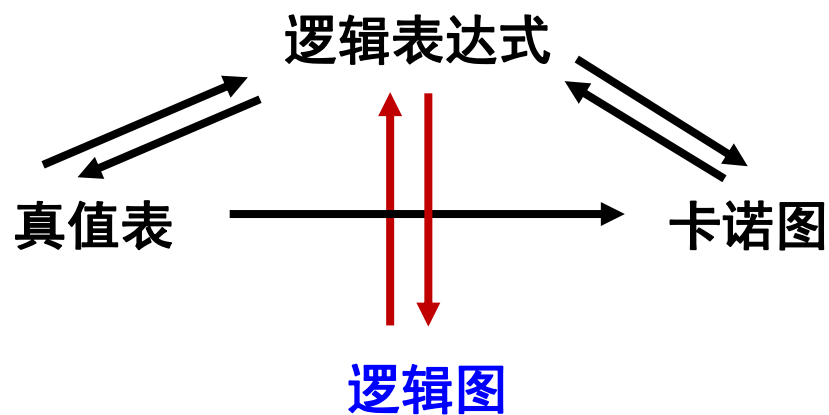
0——原变量

1——反变量

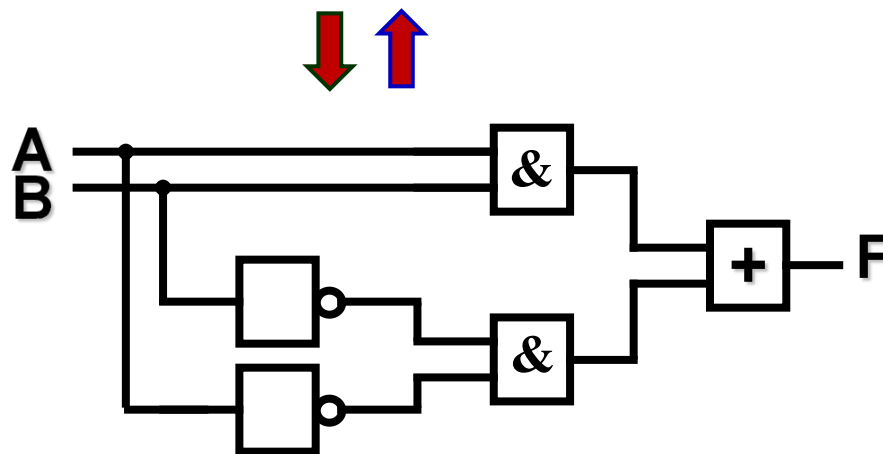
$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

逻辑函数的表示方法——逻辑图

2. 逻辑图



$$F = AB + \bar{A}\bar{B}$$



- 每个表达式都直接对应一个逻辑电路图

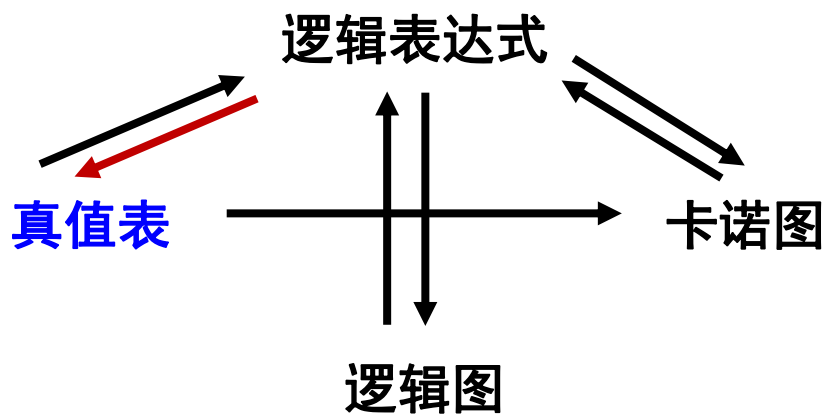
逻辑函数的表示方法——真值表

3. 真值表

$$F = AB + \bar{A}\bar{B}$$

真值表

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



- n 个输入变量有 2^n 种取值组合

布尔代数的应用

Example

某电路有三个输入端 A, B, C , 当 $ABC \geq 011$ 时, 输出 $f=1$, 否则 $f=0$.

步骤:

1. 根据设计要求确定 —— 真值表
2. 根据真值表 —— 卡诺图(表达式)
3. 化简
4. 按设计要求, 变换逻辑表达式
5. 画出逻辑图



布尔代数的应用

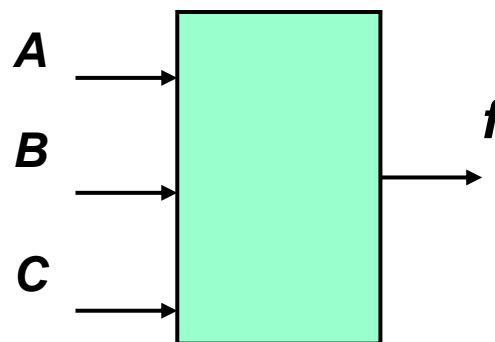
Example

某电路有三个输入端 A, B, C , 当 $ABC \geq 011$ 时, 输出 $f=1$, 否则 $f=0$.

① True Table

穷举法

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



布尔代数的应用

② Algebraic Expression

$$f = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

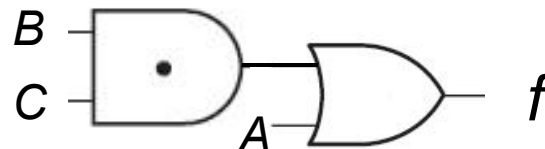
③ Simplification

$$f = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$

$$= A'BC + AB' + AB$$

$$= A'BC + A = BC + A$$

④ Logic Circuit



Unit 3——

布尔代数的应用及最大项最小项表达式

- 布尔代数的应用



- 最大项、最小项表达式

- 不完全给定函数

最大项、最小项表达式

1. Minterm and Maxterm的定义

Row No.	A B C	Minterms	Maxterms
0	0 0 0	$A'B'C' = m_0$	$A + B + C = M_0$
1	0 0 1	$A'B'C = m_1$	$A + B + C' = M_1$
2	0 1 0	$A'BC' = m_2$	$A + B' + C = M_2$
3	0 1 1	$A'BC = m_3$	$A + B' + C' = M_3$
4	1 0 0	$AB'C' = m_4$	$A' + B + C = M_4$
5	1 0 1	$AB'C = m_5$	$A' + B + C' = M_5$
6	1 1 0	$ABC' = m_6$	$A' + B' + C = M_6$
7	1 1 1	$ABC = m_7$	$A' + B' + C' = M_7$

- n 个变量组成的最小项 m_i ：是一个与项（包含 n 个变量）
- n 个变量组成的最大项 M_i ：是一个或项（包含 n 个变量）
- 每个变量或者以原变量的形式、或者以反变量的形式出现，并且只出现一次。因子：原变量或反变量
- n 个变量能组成的最小（大）项的个数是 2^n
- $M_i = m_i'$

最大项、最小项表达式

2、最小项和最大项的性质

1. 最小项的反是最大项，最大项的反是最小项；

$$\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = \overline{m_0} = A + B + C = M_0$$

$$\overline{A + \overline{B} + \overline{C}} = \overline{M_3} = \overline{A}BC = m_3$$

2. 全部最小项之和恒等于“1”；

$$m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

3. 全部最大项之积恒等于“0”；

$$M_0 M_1 M_2 M_3 = 0$$

4. 一部分最小项之和的反等于其余所有最小项之和；

$$\overline{m_1 + m_2} = m_0 + m_3 \qquad \overline{m_0} = m_1 + m_2 + m_3$$

最大项、最小项表达式

2、最小项和最大项的性质

5. 两个不同的最小项之积恒等于“0”；

例如： $ABC \cdot ABC\bar{C} = 0$

6. 两个不同的最大项之和恒等于“1”；

例如： $(A + B + C) + (A + B + \bar{C}) = 1$

7. 与或标准型

$$Y = \sum m_i = \sum m(0, 1, 4, 6, 7) = m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_7$$

8. 或与标准型

$$Y = \prod M_i = \prod M(0, 1, 4, 6, 7) = M_0 M_1 M_4 M_6 M_7$$

最小项性质

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

$$\textcircled{2} \quad m_i \cdot m_j = 0$$

③
For any input combinations, there is only one minterm will be 1 ($m_i = 1$);

	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
000	1	0	0	0	0	0	0	0
001	0	1	0	0	0	0	0	0
010	0	0	1	0	0	0	0	0
011	0	0	0	1	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	0	0	0
101	0	0	0	0	0	1	0	0
110	0	0	0	0	0	0	1	0
111	0	0	0	0	0	0	0	1



最大项性质

	--- A+B+C	--- A+B+C	--- A+B+C	--- A+B+C	--- A+B+C	--- A+B+C	--- A+B+C	--- A+B+C
000	1	1	1	1	1	1	1	0
001	1	1	1	1	1	1	0	1
010	1	1	1	1	1	0	1	1
011	1	1	1	1	0	1	1	1
100	1	1	1	0	1	1	1	1
101	1	1	0	1	1	1	1	1
110	1	0	1	1	1	1	1	1
111	0	1	1	1	1	1	1	1

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

$$M_i + M_j = 1$$

For any input combinations, there is only one maxterm will be 0 ($M_i = 0$)



最大项表达式、最小项表达式

3、最小项表达式

Example

$$\begin{aligned} & \quad 011 \quad 101 \quad 110 \quad 111 \\ F &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC \\ &= m_3 + m_5 + m_6 + m_7 \\ &= \Sigma m(3, 5, 6, 7) \end{aligned}$$



最小项表达式：标准与或式

Minterm list: list of “1”



最大项、最小项表达式

4、最大项表达式

Example

000

001

010

100

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4$$

$$= \prod M(0, 1, 2, 4)$$



最大项表达式： 标准或与式.

Maxterm list : list of 0

最大项、最小项表达式

	Minterm Expansion of f	Maxterm Expansion of f	Minterm Expansion of f'	Maxterm Expansion of f'
$f =$ $\Sigma m(3, 4, 5, 6, 7)$	_____	$\Pi M(0, 1, 2)$	$\Sigma m(0, 1, 2)$	$\Pi M(3, 4, 5, 6, 7)$
$f =$ $\Pi M(0, 1, 2)$	$\Sigma m(3, 4, 5, 6, 7)$	_____	$\Sigma m(0, 1, 2)$	$\Pi M(3, 4, 5, 6, 7)$

最大项、最小项表达式

logic function

$$F = \overline{A}B + B\overline{C} + A\overline{B}C$$

反函数

$$\overline{F} = \sum m(0, 1, 4, 7)$$

相同标号

$$\overline{F} = \prod M(2, 3, 5, 6)$$

$$F = \sum m(2, 3, 5, 6)$$

$$F = \prod M(0, 1, 4, 7)$$

对偶函数

$$F^D = \sum m(7, 6, 3, 0)$$

标号对7求补

$$F^D = \prod M(5, 4, 2, 1)$$



Unit 3——

布尔代数的应用及最大项最小项表达式

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数



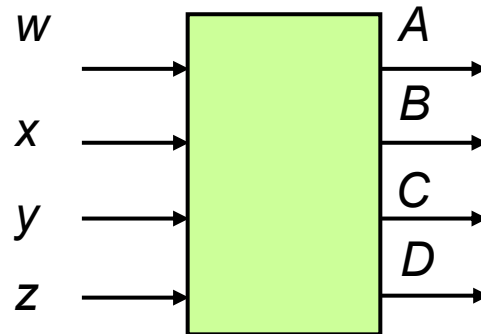
Incompletely Specified Functions

1. 无关项 (Don't care terms) ——

- 1) 不可能存在的输入取值组合
- 2) 所有的输入取值组合都存在，但是对于某些输入取值，我们并不关心它们导致的输出结果是0还是1，因为没有意义。

Example

将输入的
8421BCD码转
换为余3码



W	X	Y	Z	A	B	C	D
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
.
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	X	X	X	X
.
1	1	1	1	X	X	X	X

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	1

输入: 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 对于8421BCD码是无意义

Incompletely Specified Functions

2. 不完全给定函数

$$F = \sum m(0, 3, 7) + \sum d(1, 6)$$

$$F = \prod M(2, 4, 5) \cdot \prod D(1, 6)$$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	1



Unit 3-2——

布尔代数的应用及最大项最小项表达式

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

