逻辑设计基础

Fundamentals of Logic Design

张春慨

School of Computer Science

ckzhang@hit.edu.cn

Unit 3-3 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

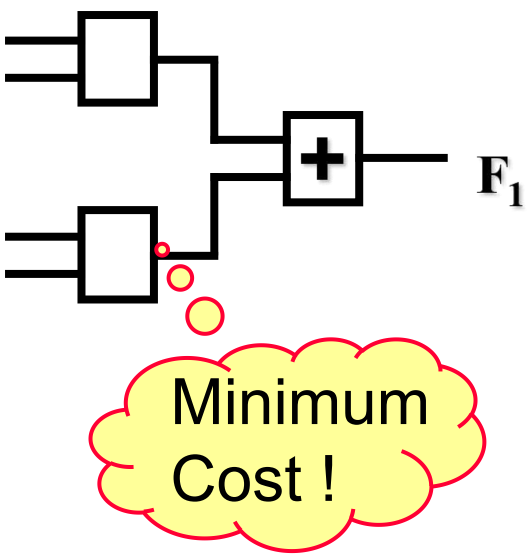
开关函数的最简形式

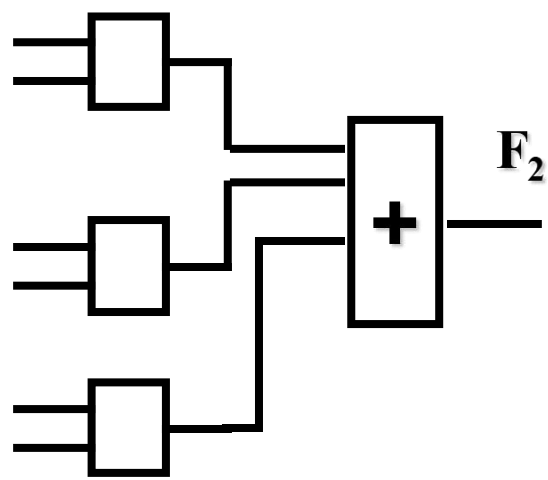
- When a function is realized using **AND** and **OR** gates, the cost of realizing the function is directly related to the number of gates and gate inputs used.

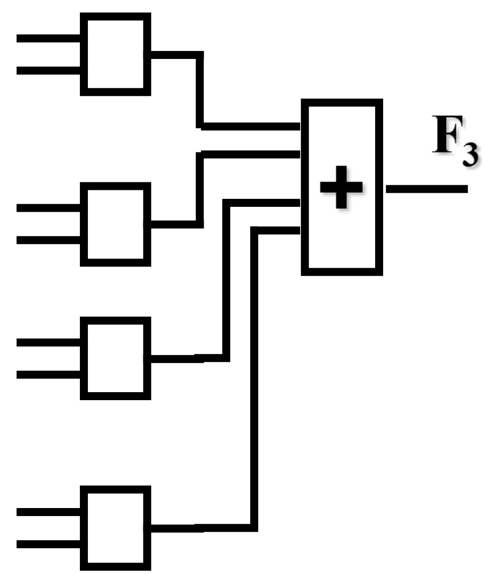
$$F=AB+\bar{A}C \quad \text{..........①}F_1$$

$$=AB+\bar{A}C+BC \quad \text{..........②}F_2$$

$$=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C \quad \text{..........③}F_3$$





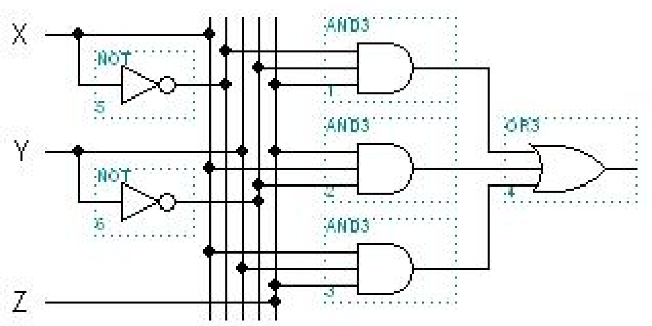


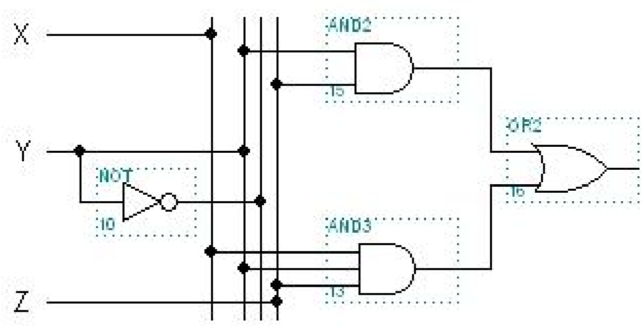
开关函数的最简形式

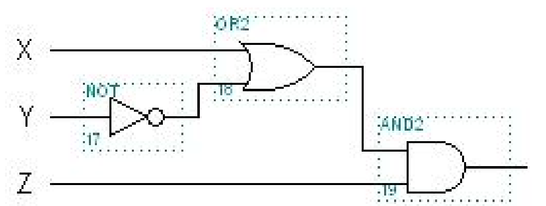
$$F=\sum_{XYZ}(1,5,7)=x'y'z+xy'z+xyz$$

$$F=(x'y'z+xy'z)+xyz=y'z+xyz$$

$$F=(y'+xy)z=(y'+x)z$$







开关函数的最简形式

一个最简表达式中

① 逻辑门的数量最少

② 逻辑门的输入个数最少

与最小项（最大项）表达式不同

- 最简表达式不一定是唯一的.
- 但最简表达式的实现代价是相同的（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

Unit 4 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

Properties of neighbor cells

- 卡诺图通常为正方形或矩形均匀分成2^n个小格，每个小格代表一个最小项。
- 单元格对应的最小项按格雷码摆放
- 任何两个相邻单元格对应的最小项只有一个变量取值不同

1. 两变量 K. Map

F=f(AB)

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

(a)

$A \backslash B$	0	1
0	0 0 $_0$	0 1 $_1$
1	1 0 $_2$	1 1 $_3$

(b)

A \ B	0	1
0	0	1
1	2	3

Properties of neighbor cells

2. 三变量 K. Map

$F=f(ABC)$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Properties of neighbor cells

3. 四变量 K. Map

F=f(ABCD)

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

4. 五变量 K. Map

$$F=f(ABCDE)$$

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

卡诺图的特征

- 卡诺图上几何相邻的最小项逻辑上也相邻。
- 几何相邻
  - 相接
  - 行或列首尾相接
- 逻辑相邻—两个最小项中只有一个变量出现的形式不同

Unit 4 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

填写卡诺图

① 已知真值表

Truth Table

A B C	F
0 0 0	0 √
0 0 1	0 √
0 1 0	0 √
0 1 1	1 √
1 0 0	0 √
1 0 1	1 √
1 1 0	1 √
1 1 1	1 √

② 已知标准与或式:与项是最小项时，按最小项编号的位置直接填入。

③ 已知标准或与式

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$F = \Sigma m^3 (3, 5, 6, 7)$$

$$F = \Pi M^3 (0, 1, 2, 4)$$

Example

填写卡诺图

$$F=AB+BC+AC$$

$$=AB(C+\overline{C})+BC(A+\overline{A})+AC(B+\overline{B})$$

$$=ABC+AB\overline{C}+ABC+\overline{A}BC+ABC+A\overline{B}C$$

$$7 \quad 6 \quad 7 \quad 3 \quad 7 \quad 5$$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Example

$$F = (\overline{A \oplus B})(C+D)$$

$$= \overline{A \oplus B} + \overline{(C+D)}$$

$$= \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{C}\bar{D}$$

$$\bar{A}\bar{B} = \underset{0}{\underline{00}00} + \underset{1}{\underline{00}01} + \underset{2}{\underline{00}10} + \underset{3}{\underline{00}11}$$

$$AB = \underset{12}{\underline{11}00} + \underset{13}{\underline{11}01} + \underset{14}{\underline{11}10} + \underset{15}{\underline{11}11}$$

$$\bar{C}\bar{D} = \underset{0}{00\underline{00}} + \underset{4}{01\underline{00}} + \underset{8}{10\underline{00}} + \underset{12}{11\underline{00}}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	0	0	0

Example

$$F=\overline{A\oplus C\bullet\overline{\bar{B}(A\bar{C}\bar{D}+\bar{A}C\bar{D})}}$$

$$F=\overline{A\oplus C}+\bar{B}(A\bar{C}\bar{D}+\bar{A}C\bar{D})$$

$$=A\odot C+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$$

$$=AC+\bar{A}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$$

$$=\underline{1}0\underline{1}0+\underline{1}0\underline{1}1+\underline{1}1\underline{1}0+\underline{1}1\underline{1}1+\underline{0}0\underline{0}0+\underline{0}0\underline{0}1+\underline{0}1\underline{0}0+$$

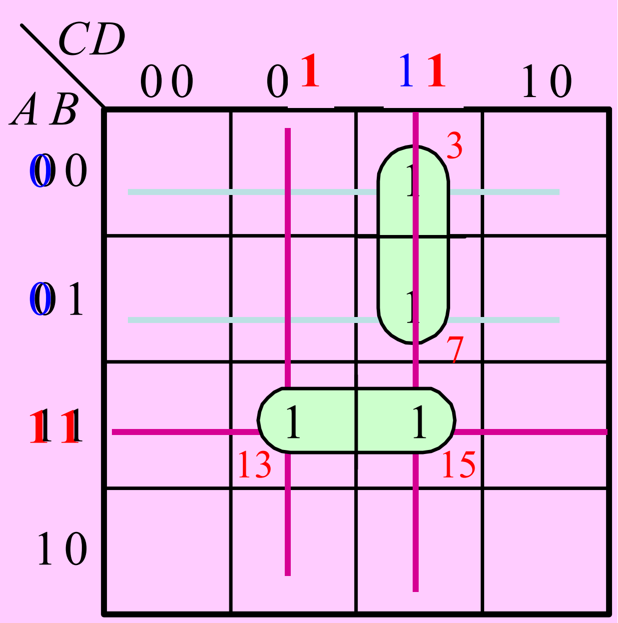
$$\underline{0}1\underline{0}1+1000+0010$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

④ 与项不是最小项的形式

与项不是最小项的形式，按邻接关系直接填入卡诺图。例如

$$P(A,B,C,D)=\overline{A}CD+ABD$$



先填 $\overline{A}CD$ ， 这是 $\overline{A}$ ， 这是CD;

所以$\overline{A}CD$ 处于第一第二行和第三列的交点上（二行一列）。

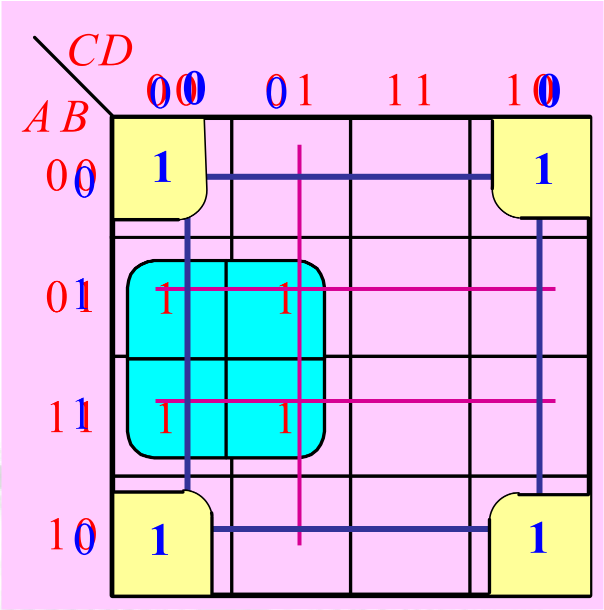
再填 ABD， 这是AB， 这是D 。

所以ABD处于第三行和第二、第三列的交点上（一行二列）。

$$\overline{A}CD=\overline{A}(B+\overline{B})CD$$

$$=\overline{A}BCD+\overline{A}\,\overline{B}CD$$

例：将逻辑式$P = B\overline{C} + \overline{B}\overline{D}$ 填入卡诺图



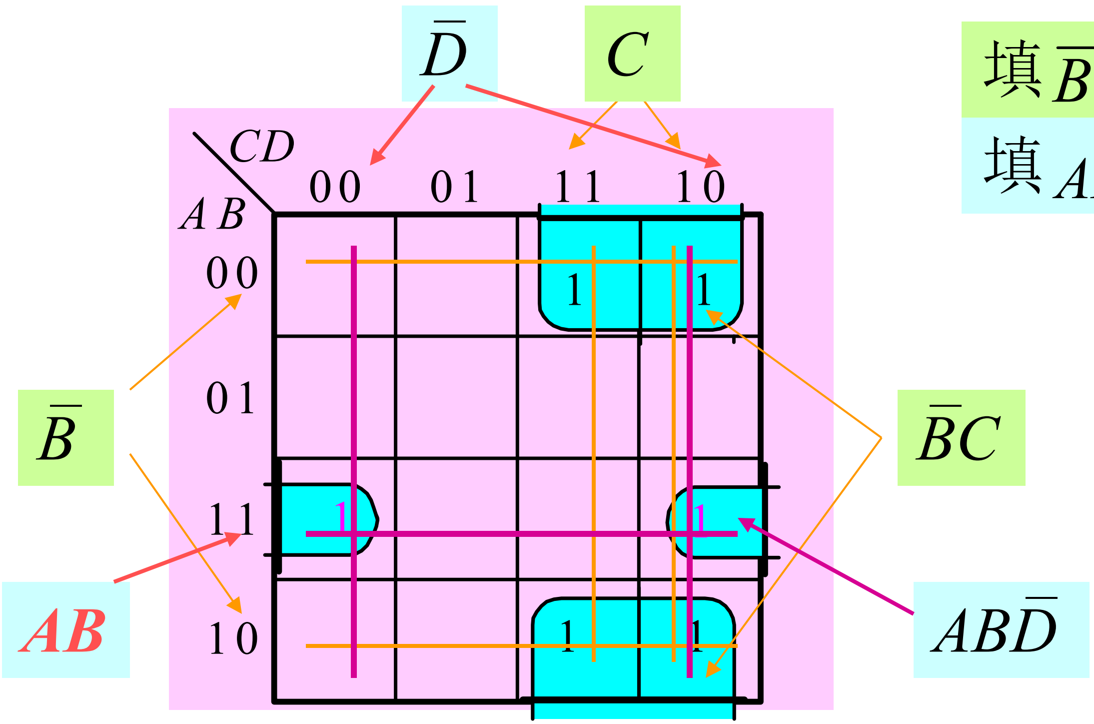
先填$B\overline{C}$，这是B，这是$\overline{C}$；

$B\overline{C}$ 这一与项处于第二、第三行和第一、第二列的交点处（二行二列）。

再填$\overline{B}\overline{D}$，这是$\overline{B}$，这是$\overline{D}$。

$\overline{B}\overline{D}$ 这一与项处于第一、第四行和第一、第四列的交点处（二行二列）。

例：将逻辑式 $P = \overline{B}C + AB\overline{D}$ 填入卡诺图



填 $\overline{B}C$

填 $AB\overline{D}$

Properties of K. maps

■ 基于卡诺图的逻辑运算

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0

$+$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	0	1

$=$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

$\cdot$ $=$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0

$\oplus$ $=$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1

对应的小方格进行逻辑运算

Properties of K. maps

F

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1		

X·F

C \ AB	00	01	11	10
0		X	X	
1	X	X		

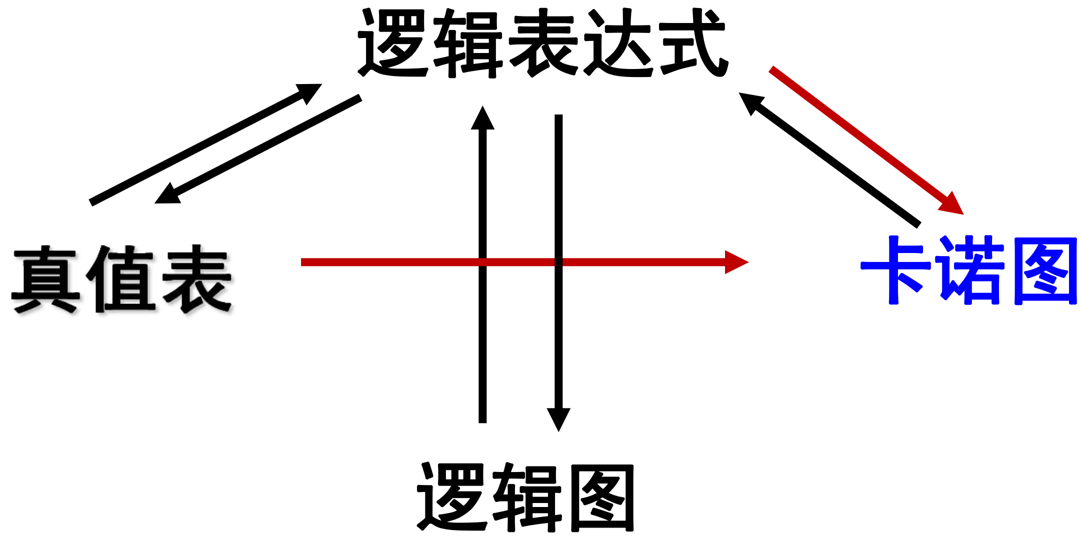
A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

F

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	0	0	1

$\overline{\mathbf{F}}$

Representation methods of logical function



- K. map is an especially useful tool for simplifying and manipulating switching functions of three or four variables.

Unit 4 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

卡诺图化简法

Methods

- 代数法
- 卡诺图法——
  - 图形法化简逻辑函数

$$F(A,B,C)=\overline{A}BC+ABC=BC(\overline{A}+A)=BC$$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0

卡诺图化简法

从一个卡诺图中可以读取:

- 最简与或式（AND-OR ）
- 最简或与式（OR-AND ）
- 最简与或非式（AND-OR-NOT ）

如何从卡诺图读最简与或式

Step ①: 画圈

- a).将相邻为1的小方格圈在一起。(小方格的个数必须为 2^m , m=0,1,2…)
- b).圈越大越好
- c).小方格可以重复使用

Adjacent:紧靠在一起的、行列首尾的、对称的

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

如何从卡诺图读最简与或式

Step ②：每个圈代表一个与项

观察

Left
Top } 变量取值不同——消去

变量取值相同 { 1: 原变量
0:反变量

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

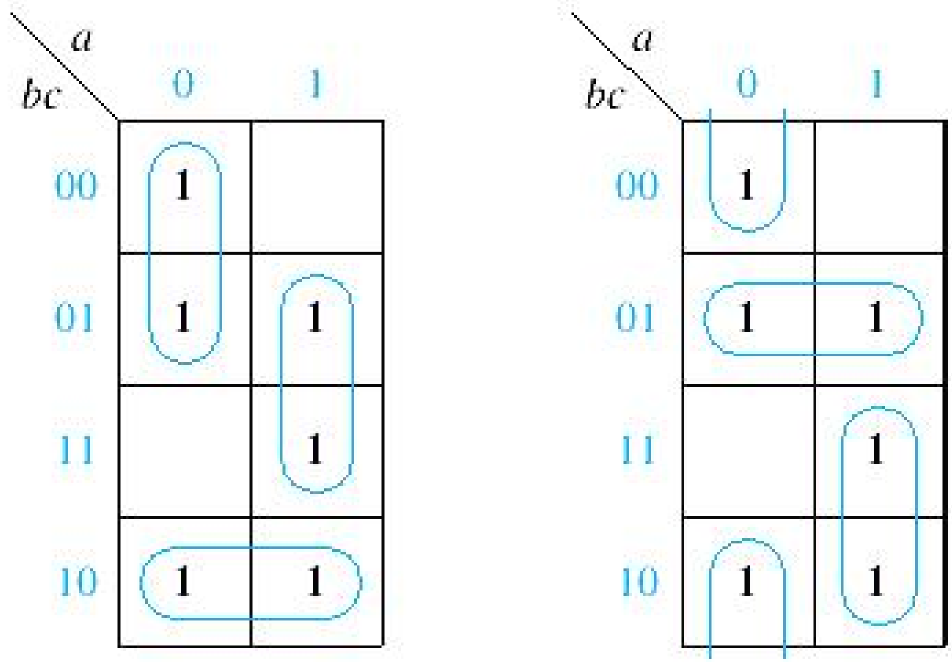
如何从卡诺图读最简与或式

Step ③: 将所有的与项相加

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

$$F=\bar{A}\bar{C}+AC+\bar{B}\bar{D}$$

如何从卡诺图读最简与或式



$F = a'b' + bc' + ac$

$F = a'c' + b'c + ab$

The two minimum solutions For *F*

如何从卡诺图读最简与或式

从卡诺图中读取:

- 最简与或式（**AND-OR** ）
- 最简或与式（**OR-AND** ）
- 最简与或非式（**AND-OR-NOT** ）

如何从卡诺图读最简或与式

Step ①: 画圈

a).将相邻为0的小方格圈在一起。(小方格的个数必须为 2^m , m=0,1,2…)

b).圈越大越好

c).小方格可以重复使用

Adjacent:紧靠在一起的、行列首尾的、对称的

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

如何从卡诺图读最简或与式

Step ②：每个圈代表一个和项

观察

Left
Top

变量取值不同——消去

变量取值相同

0: 原变量

1: 反变量

AB\CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

AB\CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

如何从卡诺图读最简或与式

Step ③: 将所有的和项相乘

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	1
11	1	1	0	0
10	0	1	0	0

$$F = (A+C)\cdot(\bar{A}+\bar{C})\cdot(B+D)$$

卡诺图化简法

从卡诺图中读取

- 最简与或式（AND-OR）
- 最简或与式（OR-AND）
- 最简与或非式（AND-OR-NOT）

如何从卡诺图读最简与或非式

Step ①：读 $\overline{F}$的与或式

Method：same as Minimum AND-OR expression,
but focus on **“0”**

Step ②：对$\overline{F}$求反

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$F = (A+B)(B+C)(A+C)$$

Minimum OR-AND Expressions

$$\overline{F} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C} \Rightarrow F = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}}$$

进一步讨论——更多变量卡诺图

* 展开定理

一个n变量的逻辑函数可以对变量X_i展开为两个n-1变量的逻辑函数

1. $f(x_1x_2....x_i....x_n)$

$= x_i \bullet f(x_1x_2....1....x_n) + \overline{x_i} \bullet f(x_1x_2....0....x_n)$

......................对x_i展开为与或式

2. $f(x_1x_2....x_i....x_n)$

$= [\overline{x_i} + f(x_1x_2...1....x_n)] \bullet [x_i + f(x_1x_2....0....x_n)]$

......................对x_i展开为或与式

进一步讨论——更多变量卡诺图

$F=f(x_1x_2x_3x_4x_5)$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_1 = 0$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

$x_1 = 1$

$$F = \Sigma\, m(0,1,4,5,6,11,12,14,16,20,22,28,30,31)$$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

$x_1 = 1$

BC \ DE	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	1	0

A= 0

BC \ DE	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	1	1
10	0	0	0	0

A = 1

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{D}\bar{E} + ABCD + \bar{A}B\bar{C}DE + C\bar{E}$$

Example

ABC \ DEF	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1	1			1
001		1	1					
011				1				1
010	1			1	1			1
110	1			1	1		1	1
111		1	1					
101		1	1					
100	1			1	1			1

$$F = C'F' + B'CD'F + ACD'F + A'BD'EF' + A'BDE'F' + ABC'DE'$$

卡诺图化简法

进一步讨论——

- 带无关项的卡诺图化简

带无关项的卡诺图化简

Example

A=1 (staff)，A=0(not staff) ; B=1(female)， B=0 (male); C=1(Has a ticket)， C=0 (Has no ticket); F=1(enter) ， F=0 (no enter)

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	×
0	1	0	0
0	1	1	×
1	0	0	0
1	0	1	×
1	1	0	0
1	1	1	1

无关项——

不存在的或无意义的取值组合

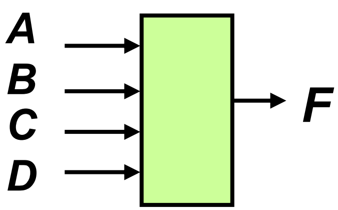
A \ BC	00	01	11	10
0	0	×	×	0
1	0	×	1	0

$$F = C$$

带无关项的卡诺图化简

Example

输入信号X为 8421BCD码,设计组合逻辑电路，当X≥5，输出 F=1。



CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	×	1
01	0	1	×	1
11	0	1	×	×
10	0	1	×	×

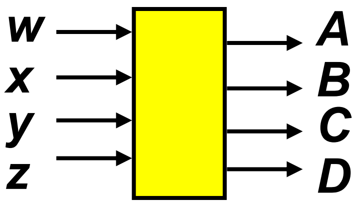
$F=A+BD+BC$

A B C D	F	A B C D	F
0 0 0 0	0	1 0 0 0	1
0 0 0 1	0	1 0 0 1	1
0 0 1 0	0	1 0 1 0	×
0 0 1 1	0	1 0 1 1	×
0 1 0 0	0	1 1 0 0	×
0 1 0 1	1	1 1 0 1	×
0 1 1 0	1	1 1 1 0	×
0 1 1 1	1	1 1 1 1	×

Example

带无关项的卡诺图化简

设计一个能将4位 二进制数转换为余3码的电路



二进制数 W X Y Z	余三码 A B C D	二进制数 W X Y Z	余三码 A B C D
0 0 0 0	0 0 1 1	1 0 0 0	1 0 1 1
0 0 0 1	0 1 0 0	1 0 0 1	1 1 0 0
0 0 1 0	0 1 0 1	1 0 1 0	×
0 0 1 1	0 1 1 0	1 0 1 1	×
0 1 0 0	0 1 1 1	1 1 0 0	×
0 1 0 1	1 0 0 0	1 1 0 1	×
0 1 1 0	1 0 0 1	1 1 1 0	×
0 1 1 1	1 0 1 0	1 1 1 1	×

带无关项的卡诺图化简

A：

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$$A=W+XZ+XY$$

B：

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	0	0
11	×	×	×	×
10	0	1	×	×

$$B=\overline{X}Z+\overline{X}\,Y+X\overline{Y}\overline{Z}$$

带无关项的卡诺图化简

C：

WX \ YZ	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$C=\overline{Y}\,\overline{Z}+YZ$$

D：

WX \ YZ	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$D=\overline{Z}$$

Unit 4 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法