

Algorithmen und Datenstrukturen

Sommersemester 2024

Prof. Dr. F.Kuhn, M.Fuchs, G.Schmid

Ayiza Muzaffar-5136283, Henry Juncker-5605330, Berthold Dominique Buri-4744252

UNI
FREIBURG

Blatt-02

30.04.2024

Aufgabe 1

(a) Ist wahr. Sei $n_0 = 1$ und $c = 3$, so gilt $n^4 \geq n^2 \geq 1$ bei $n \geq n_0$ und daher:

$$2n^3 - 5n^2 + 1 \leq 2n^3 + 1 \leq 2n^4 + n^4 = c * n^4$$

(b) Ist falsch. Sei $c \geq \frac{1}{\log_5 n}$ dann gilt $\log_3 n \leq c \log_5 n$ nicht, denn:

$$c \geq \frac{\log_3 n}{\log_5 n} = \frac{\frac{\log_5 n}{\log_5 3}}{\log_5 n} = \frac{1}{\log_5 3}$$

(c) Ist wahr. Sei $c = 2^{-1} = 0,5$ und $n_0 \geq 2$ dann gilt:

$$n! = n * (n-1) * \dots * 2 \geq 2 * 2 * \dots * 2 = 2^{n-1} = c * 2^n$$

(d) Ist falsch, da gilt $\log_2(n^2) = 2 \log_2 n$ und somit $\log_2(n^2) \geq c(\log_2 n)^2$ nicht für alle c gilt:

$$c \leq \frac{2 \log_2 n}{(\log_2 n)^2} = \frac{2}{\log_2 n}$$

(e) Ist wahr. Sei $c_1 < 0.5, c_2 > 1$, so gilt für nicht negative Funktionen (dürfen auch 0 sein):

$$c_1 * (f(n) + g(n)) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq c_2 * (f(n) + g(n))$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} 12\sqrt{\log_2 n} &< o 21 \log_2(\sqrt{n}) = o \log_2(n^n) = o \log_2(n^3) < o 27n < o \sqrt{n} n^{\frac{3}{2}} < o 100n^{100} < o 4^{\frac{n}{2}} \\ &< o 3^n < o (n-1)! < o \frac{1}{4}n! < o n^n \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$T(n, k) \leq k * T\left(\frac{n}{k}, k\right) + bn$$

b)

Vermutung: $T(n, k) \leq n * T(1, k) + bn \log_k n \leq bn (1 + \log_k n)$

Induktionsanfang: $n = k = 1$
 $T(1, 1) \leq b * 1 * (1 + \log_1 1) = b$

Induktionsvoraussetzung: Vermutung gilt für Werte $k < n$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq k \cdot T\left(\frac{n}{k}\right) + bn \\ &\leq k \cdot \left(b \frac{n}{k} \cdot \left(1 + \log_k \frac{n}{k}\right)\right) + bn \\ &\leq bn \cdot \left(1 + \log_k \frac{n}{k}\right) + bn \\ &\leq bn (1 + \log_k n - \log_k k) + bn \\ &= bn (1 + \log_k n - 1) + bn \\ &\leq bn \cdot \log_k n + bn \\ &\leq bn (1 + \log_k n) \quad \square \end{aligned}$$

c)

$$T(n, 2) = O(2n \log_2(n))$$

$$T(n, 3) = O(3n \log_3(n))$$

$$T(n, \log_2(n)) = O(n \log_2(n) \log_{\log_2(n)}(n))$$

$$T\left(n, \frac{n}{4}\right) = O\left(\frac{n^2}{4} \log_{\frac{n}{4}}(n)\right)$$