北海道大学理学院 入試問題 解答例

ひとみさん

令和元年 8 月 20 日

第 1 章　平成 31 年度

1.1　問題 1

第 2 章　平成 30 年度

2.1　問題 1

2.1.1　問 1

1-1.

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= T - U \qquad (T\ \text{は運動エネルギー}) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 - (r\dot{\theta})^2\right] + \frac{C}{\alpha - 1}\frac{m}{r^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

1-2. r についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{r}} &= \frac{1}{2}m(2\dot{r}) \\ &= m\dot{r}, \\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial r} &= -\frac{1}{2}\left[2\dot{\theta}^2 r + (\alpha-1)\frac{C}{(\alpha-1)r^\alpha}\right] \\ &= m\dot{\theta}^2 r - \frac{m}{2}\frac{C}{r^\alpha}\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial r} = 0$$

$$m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r + m\frac{C}{r^\alpha} = 0$$
$$\ddot{r} + Cr^{-\alpha} - \dot{\theta}^2 r = 0.$$

θ についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}m(2r^2\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta},$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = 0$$

であるから、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}[mr^2\dot{\theta}] = 0.$$

ここで、角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ を用いると、θ についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

とかけるので、角運動量は保存する。

1-3. $l = L/m = r^2\dot{\theta}$ であるから、$d\theta/dt = l/r^2$ である。これを用いて、d^2/dt^2 を計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = l\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r},\\
\frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt}\\
&= \frac{d}{dt}\left[-l\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\right]\\
&= -l\frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\\
&= -l\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\right)\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\\
&= -l\frac{l}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}\\
&= -\frac{l^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}
\end{aligned}$$

これを r についてのラグランジュの運動方程式に代入すると、

$$\frac{d^2r}{dt^2} + Cr^{-\alpha} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$$
$$-\frac{l^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} + Cr^{-\alpha} - \left(\frac{l}{r^2}\right)^2 r = 0$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}+C\frac{r^{2-\alpha}}{l^2}-\frac{1}{r}=0$$
$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\left(1-r^{3-\alpha}\frac{C}{l^2}\right)\frac{1}{r}=0 \tag{2.1}$$

となる。

1-4. $\alpha=3$ のとき、$C/l^2=\gamma, r^{-1}=R$ とおくと、式 (2.1) は次のようにかける。

$$\frac{d^2R}{d\theta^2}-(\gamma-1)R=0 \tag{2.2}$$

ここで、二次方程式 $\lambda^2-(\gamma-1)=0$ の解は、$\lambda=\pm\sqrt{\gamma-1}$ である。
$\gamma=1$ のとき、$\lambda=0$ となって、(2.2) の解は、$R=c_1\theta+c_2$ となる (c_1, c_2 は任意定数)。
$\gamma\neq 1$ のとき、(2.2) の解は、$R=c_1\exp[\sqrt{\gamma-1}\,\theta]+c_2\exp[-\sqrt{\gamma-1}\,\theta]$ となる。
さらに、$\gamma<1$ のとき、$\sqrt{1-\gamma}=\beta$ とおいてさらに式を変形して、

$$\begin{aligned}
R &= c_1\exp[\sqrt{\gamma-1}\,\theta]+c_2\exp[-\sqrt{\gamma-1}\,\theta]\\
&= c_1\exp[i\beta\theta]+c_2\exp[-i\beta\theta]\\
&= \frac{d_1-id_2}{2}\exp[i\beta\theta]+\frac{d_1+id_2}{2}\exp[-i\beta\theta] \qquad (d_1, d_2 \text{ は任意定数})\\
&= d_1\frac{e^{i\beta\theta}+e^{-i\beta\theta}}{2}-id_2\frac{e^{i\beta\theta}-e^{-i\beta\theta}}{2}\\
&= d_1\frac{e^{i\beta\theta}+e^{-i\beta\theta}}{2}+d_2\frac{e^{i\beta\theta}-e^{-i\beta\theta}}{2i}\\
&= d_1\cos[\beta\theta]+d_2\sin[\beta\theta]
\end{aligned}$$

以上を整理して、一般解は、

$$r^{-1}=\begin{cases}
c_1\cos\left[\sqrt{1-\frac{C}{l^2}}\,\theta\right]+c_2\sin\left[\sqrt{1-\frac{C}{l^2}}\,\theta\right] & C/l^2<1 \text{ の場合}\\
c_1+c_2\theta & C/l^2=1 \text{ の場合}\\
c_1\exp\left[\sqrt{\frac{C}{l^2}-1}\,\theta\right]+c_2\exp\left[-\sqrt{\frac{C}{l^2}-1}\,\theta\right] & C/l^2>1 \text{ の場合}
\end{cases} \tag{2.3}$$

である。

2.1.2 問 2

2-1. 惑星に働く万有引力は $F=GmM/r^2$ である。惑星の運動の速さを v とすると、円運動をしているので、$F=mv^2/r$ が成り立つ。

惑星の運動エネルギーは、

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}rF=\frac{GmM}{2r}$$

2-2.はじめの角速度を ω とすると、

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{F}{mr}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{mr}\cdot G\frac{mM}{r^2}} \\
&= \frac{1}{r}\sqrt{G\frac{M}{r}}.
\end{aligned}
$$

恒星質量が変化した後の角速度を ω' とすると、

$$
\begin{aligned}
\omega' &= \sqrt{\frac{F'}{m(r+dr)}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{m(r+dr)}\cdot G\frac{m(M+dM)}{(r+dr)^2}} \\
&= \frac{1}{r+dr}\sqrt{G\frac{M+dM}{r+dr}}.
\end{aligned}
$$

角運動量が保存するので、

$$
\begin{aligned}
mr^2\omega &= m(r+dr)^2\omega' \\
r^2\frac{1}{r}\sqrt{G\frac{M}{r}} &= (r+dr)^2\frac{1}{r+dr}\sqrt{G\frac{M+dM}{r+dr}} \\
\sqrt{Mr} &= \sqrt{(M+dM)(r+dr)} \\
Mr &= (M+dM)(r+dr) \\
Mr &= Mr + rdM + Mdr \qquad \text{（dM と dr の積を無視した）} \\
\frac{dM}{dr} &= -\frac{M}{r}.
\end{aligned}
$$

2-3.十分ゆっくりと質量が変化し、つねに $dM/dr = -M/r$ が成り立っているので、dM を $\Delta M = -M_0/2$ と置き換えることができる。この場合、

$$
\begin{aligned}
\frac{dM}{dr} \sim \frac{\Delta M}{\Delta r} &= -\frac{M_0}{r_0} \\
\frac{-M_0/2}{\Delta r} &= -\frac{M_0}{r_0} \\
\Delta r &= \frac{r_0}{M_0}\cdot\frac{M_0}{2} = \frac{r_0}{2}
\end{aligned}
$$

となって、r の変分は $\Delta r = r_0/2$ である。したがって、軌道半径は r_0 の $3/2$ 倍になる。

2-4.恒星質量が瞬間的に減少した場合、惑星に働く向心力が減少し、惑星が軌道の外側に向かって弾き飛ばされる。

2.2 問題 II

2.2.1 問 1

1-1. 導体盤の面電荷密度を σ とする。このとき、導体盤 A に直交して、底面積が A であるような円筒面 S についてガウスの法則を適用すると、導体盤 A から発生する電場 E_A について、

$$2AE_A = \int_S \mathbf{E}_A \cdot d\mathbf{s} = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

が成り立つ。

同様に、導体盤 B についても、$E_B = A\sigma/(2\epsilon_0)$ であり、導体盤 A, B 間に発生する電場はいずれも向きが等しいので、$E = E_A + E_B = \sigma/\epsilon_0$ の電場が生じる。

このとき、コンデンサーには $Q = \sigma\pi a^2$ の電荷が帯電しており、A, B 間の電位差は $V = Ed$ なので、$Q = CV$ の関係から、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma\pi a^2}{\sigma d/\epsilon_0} = \pi\epsilon_0\frac{a^2}{d}$$

と求まる。

1-2. コンデンサーがすでに $\pm q$ に帯電しているとき、A B 間をさらに微小電荷 dq を移動させるのに必要な仕事は、$dW = Vdq = qdq/C$ である。両辺を 0 から Q まで積分すると、$W = Q^2/2C$ となるので、

$$U = W = \frac{Q^2}{2C}$$

である。

1-3. コンデンサーが $\pm Q$ に帯電しているときに、導体盤を Δr だけ z 方向に移動させたときに生じる静電エネルギーの差は、

$$\begin{aligned} U + \Delta U &= \frac{Q^2}{2(C+\Delta C)} \\ &= \frac{Q^2}{2}\frac{d+\Delta r}{\epsilon_0\pi a^2} \\ &= \frac{Q^2}{2}\frac{d}{\epsilon_0\pi a^2}\left(1+\frac{\Delta r}{d}\right) \\ &= \frac{Q^2}{2C}\left(1+\frac{\Delta r}{d}\right) \end{aligned}$$

より、$\Delta U = (Q^2/2C)(\Delta r/d)$ である。

一方、導体間に働く力を F とすると、$\Delta W = F\Delta r$ の仕事が必要になる。$\Delta U = \Delta W$ であるから、

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\Delta W}{\Delta r} \\
&= \frac{\Delta U}{\Delta r} \\
&= \frac{Q^2}{2C}\frac{\Delta r}{d}\cdot\frac{1}{\Delta r} \\
&= \frac{Q^2}{2Cd} \\
&= \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \pi a^2}.
\end{aligned}
$$

1-4. コイルから生じる起電力は、$V_L = -L\,dI/dt$ である。一方、コンデンサーから生じる起電力は、$V_C = Q/C$ である。回路が閉じているので、それぞれの起電力は等しくなる。

$$
\begin{aligned}
V_C &= V_L \\
\frac{Q}{C} &= -L\frac{dI}{dt} \\
\frac{Q}{C} &= -L\frac{d^2Q}{dt^2} \\
LC\frac{d^2Q}{dt^2} + Q &= 0. \qquad (I = dQ/dt \text{ の関係を用いた})
\end{aligned}
$$

$Q = e^{\lambda t}$ とおいて、上の微分方程式を解く。

$$
\begin{aligned}
LC\frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} + e^{\lambda t} &= 0 \\
LC\lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} &= 0 \\
\lambda &= \sqrt{\frac{1}{LC}}i
\end{aligned}
$$

ゆえに、一般解は $Q[t] = c_1\exp[\sqrt{1/LC}\,it] + c_2\exp[-\sqrt{1/LC}\,it]$ である。初期条件より、$Q[0] = Q, I[0] = dQ/dt[0] = 0$ であるから、$c_1 = c_2 = Q/2$。ゆえに、

$$
\begin{aligned}
Q[t] &= \frac{Q}{2}\exp\left[\sqrt{\frac{1}{LC}}\,it\right] + \frac{Q}{2}\exp\left[-\sqrt{\frac{1}{LC}}\,it\right] \\
&= Q\cos\left[\frac{t}{\sqrt{LC}}\right] \\
I[t] &= -\frac{Q}{\sqrt{LC}}\sin\left[\frac{t}{\sqrt{LC}}\right]
\end{aligned}
$$