

北海道大学理学院 入試問題 解答例

ひとみさん

令和元年 8 月 18 日

第 1 章 平成 31 年度

1.1 問題 1

第 2 章 平成 30 年度

2.1 問題 1

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1

質量 m の質点が、原点 O から距離 r の位置にあるとき、そのポテンシャルエネルギーが

$$U(r) = -\frac{C}{\alpha-1} \frac{m}{r^{\alpha-1}}$$

で与えられる中心力場を考える。ここで、 C と α は $C > 0, \alpha > 1$ を満たす定数である。このとき、以下のようにして質点の軌道を求めよ。

1-1. この質点が運動する平面内で、上図のような座標系を考える。質点の位置ベクトルの大きさを r 、位置ベクトルが x 軸となす角を θ とする。質点のラグランジアン $\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ を書き下せ。ただし $\dot{r} = dr/dt, \dot{\theta} = d\theta/dt$ とする。

1-2. 上で求めたラグランジアンから、 r と θ に関する運動方程式を求めよ。また、角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ が保存することを示せ。

1-3. $L \neq 0$ の場合には、単位質量あたりの角運動量 $l = L/m$ を用いて、時間微分を θ に関する微分に変換することができる。その結果、 r に関する運動方程式は

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(1 - r^{3-\alpha} \frac{C}{l^2} \right) \frac{1}{r} = 0 \quad (2.1)$$

と書けることを示せ。

1-4. $\alpha = 3$ の場合に、式 (2.1) の一般解を、 C/l^2 の値に応じて 3 つの場合に分けて求めよ。

解答 1

1-1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - U \quad (T \text{ は運動エネルギー}) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - U(r) \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 - (r\dot{\theta})^2] + \frac{C}{\alpha-1} \frac{m}{r^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

1-2. r についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= \frac{1}{2}m(2\dot{r}) \\ &= m\dot{r}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= -\frac{1}{2}\left[2\dot{\theta}^2 r + (\alpha-1)\frac{C}{(\alpha-1)r^\alpha}\right] \\ &= m\dot{\theta}^2 r - \frac{m}{2} \frac{C}{r^\alpha}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= 0 \\ m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r + m\frac{C}{r^\alpha} &= 0 \\ \ddot{r} + Cr^{-\alpha} - \dot{\theta}^2 r &= 0.\end{aligned}$$

θ についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2}m(2r^2\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}[mr^2\dot{\theta}] &= 0.\end{aligned}$$

ここで、角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ を用いると、 θ についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

とかけるので、角運動量は保存する。

1-3. $l = L/m = r^2 \dot{\theta}$ であるから、 $d\theta/dt = l/r^2$ である。これを用いて、 d^2/dt^2 を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = l \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}, \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[-l \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right] \\ &= -l \frac{d}{dt} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \\ &= -l \left(\frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \right) \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \\ &= -l \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \\ &= -\frac{l^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r}\end{aligned}$$

これを r についてのラグランジュの運動方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{dt^2} + Cr^{-\alpha} - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= 0 \\ -\frac{l^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + Cr^{-\alpha} - \left(\frac{l}{r^2} \right)^2 r &= 0 \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + C \frac{r^{2-\alpha}}{l^2} - \frac{1}{r} &= 0 \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(1 - r^{3-\alpha} \frac{C}{l^2} \right) \frac{1}{r} &= 0\end{aligned}$$

となり、式 (2.1) が得られた。

1-4. $\alpha = 3$ のとき、 $C/l^2 = \gamma$, $r^{-1} = R$ とおくと、式 (2.1) は次のようにかける。

$$\frac{d^2 R}{d\theta^2} - (\gamma - 1)R = 0 \quad (2.2)$$

ここで、二次方程式 $\lambda^2 - (\gamma - 1) = 0$ の解は、 $\lambda = \pm\sqrt{\gamma - 1}$ である。

$\gamma = 1$ のとき、 $\lambda = 0$ となって、(2.2) の解は、 $R = c_1 \theta + c_2$ となる (c_1, c_2 は任意定数)。

$\gamma \neq 1$ のとき、(2.2) の解は、 $R = c_1 \exp[\sqrt{\gamma - 1} \theta] + c_2 \exp[-\sqrt{\gamma - 1} \theta]$ となる。

さらに、 $\gamma < 1$ のとき、 $\sqrt{1 - \gamma} = \beta$ とおいてさらに式を変形して、

$$\begin{aligned}R &= c_1 \exp[\sqrt{\gamma - 1} \theta] + c_2 \exp[-\sqrt{\gamma - 1} \theta] \\ &= c_1 \exp[i\beta \theta] + c_2 \exp[-i\beta \theta] \\ &= \frac{d_1 - id_2}{2} \exp[i\beta \theta] + \frac{d_1 + id_2}{2} \exp[-i\beta \theta] \quad (d_1, d_2 \text{ は任意定数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d_1 \frac{e^{i\beta\theta} + e^{-i\beta\theta}}{2} - i d_2 \frac{e^{i\beta\theta} - e^{-i\beta\theta}}{2} \\
&= d_1 \frac{e^{i\beta\theta} + e^{-i\beta\theta}}{2} + d_2 \frac{e^{i\beta\theta} - e^{-i\beta\theta}}{2i} \\
&= d_1 \cos(\beta\theta) + d_2 \sin(\beta\theta)
\end{aligned}$$

以上を整理して、一般解は、

$$r^{-1} = \begin{cases} c_1 \cos\left(\sqrt{1 - \frac{C}{l^2}} \theta\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{1 - \frac{C}{l^2}} \theta\right) & \frac{C}{l^2} < 1 \text{ の場合} \\ c_1 + c_2 \theta & \frac{C}{l^2} = 1 \text{ の場合} \\ c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{C}{l^2} - 1} \theta\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{C}{l^2} - 1} \theta\right) & \frac{C}{l^2} > 1 \text{ の場合} \end{cases} \quad (2.3)$$

である。

問 2

質量 m の惑星が、質量 M の恒星の周りを運動しており、恒星と惑星の間には万有引力が働いている。以下では万有引力定数を G とする。また、 m は M に比べて十分に小さく、この系の重心は恒星の位置と同じであるとする。

2-1 恒星が半径 r の等速円運動をしているとき、惑星の運動エネルギー T を M, m, r, G を用いて表わせ。

2-2 次に、恒星風などにより恒星の質量が減少する場合に、惑星の軌道がどのように変化するかを考える。はじめ恒星の質量は M であり、惑星の円軌道の半径は r であった。その後惑星の質量は、惑星の公転周期に比べて十分ゆっくりと微小変化し、 $M + dM$ になった。その結果、惑星の円軌道の半径が $r + dr$ に変化したとする。

この場合にも、問 1 と同様に中心力だけが働いているため、恒星質量が変化する前後で、惑星の角運動量が保存する。この事を用い、2 次以上の微小量を見捨てることで、 dM と dr の間に成り立つ関係式を求めよ。

2-3 初期の恒星質量を M_0 、惑星の軌道半径を r_0 とする。恒星の質量が、2-2 で求めた関係式が成り立つように、十分ゆっくりと $M_0/2$ まで減少した。その結果、惑星の軌道半径は r_0 の何倍になるか求めよ。

2-4 次に、質量変化が速い場合の極限を考える。恒星の質量が M_0 から $M_0/2$ に瞬間的に減少したとき、惑星の運動はどのように変化するか定性的に説明せよ。