北海道大学理学院 入試問題 解答例

ひとみさん

令和元年 8 月 17 日

第 1 章　平成 31 年度

1.1　問題 1

第 2 章　平成 30 年度

2.1　問題 1

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1

質量 m の質点が、原点 O から距離 r の位置にあるとき、そのポテンシャルエネルギーが

$$U(r) = -\frac{C}{\alpha - 1}\frac{m}{r^{\alpha-1}}$$

で与えられる中心力場を考える。ここで、 C と α は $C > 0, \alpha > 1$ を満たす定数である。このとき、以下のようにして質点の軌道を求めよ。

1-1. この質点が運動する平面内で、上図のような座標系を考える。質点の位置ベクトルの大きさを r、位置ベクトルが x 軸となす角を θ とする。質点のラグランジアン $\mathscr{L} = \mathscr{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ を書き下せ。ただし $\dot{r} = dr/dt, \dot{\theta} = d\theta/dt$ とする。

1-2. 上で求めたラグランジアンから、r と θ に関する運動方程式を求めよ。また、角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ が保存することを示せ。

1-3. $L \neq 0$ の場合には、単位質量あたりの角運動量 $l = L/m$ を用いて、時間微分を θ に関する微分に変換することができる。その結果、r に関する運動方程式は

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(1 - r^{3-\alpha}\frac{C}{l^2}\right)\frac{1}{r} = 0 \tag{2.1}$$

と書けることを示せ。

1-4. $\alpha = 3$ の場合に、式 (2.1) の一般解を、C/l^2 の値に応じて 3 つの場合に分けて求めよ。

解答 1

1-1.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= T - U \qquad \text{(}T\text{ は運動エネルギー)} \\
&= \frac{1}{2}mv^2 - U(r) \\
&= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 - (r\dot{\theta})^2\right] + \frac{C}{\alpha-1}\frac{m}{r^{\alpha-1}} \\
&= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 - (r\dot{\theta})^2 + \frac{C}{(\alpha-1)r^{\alpha-1}}\right]
\end{aligned}
$$

1-2.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{r}} &= \frac{1}{2}m(2\dot{r}) = m\dot{r}, \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial r} &= -\frac{1}{2}\left[2\dot{\theta}^2 r + 2\dot{\theta}^2 r + (\alpha-1)\frac{C}{(\alpha-1)r^{\alpha}}\right]
\end{aligned}
$$

であるから、r についての運動方程式は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial r} &= 0 \\
\frac{d}{dt}(m\dot{r}) + \frac{1}{2}\left[2\dot{\theta}^2 r + 2\dot{\theta}^2 r + (\alpha-1)\frac{C}{(\alpha-1)r^{\alpha}}\right] &= 0 \\
m\ddot{r} + \frac{1}{2}m(\alpha-1)\frac{C}{(\alpha-1)r^{\alpha}} &= 0
\end{aligned}
$$