

# **北海道大学理学院 入試問題 解答例**

**ひとみさん**

**令和元年 8 月 18 日**

## 第 1 章 平成 31 年度

### 1.1 問題 1

## 第 2 章 平成 30 年度

### 2.1 問題 1

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

#### 問 1

質量  $m$  の質点が、原点  $O$  から距離  $r$  の位置にあるとき、そのポテンシャルエネルギーが

$$U(r) = -\frac{C}{\alpha-1} \frac{m}{r^{\alpha-1}}$$

で与えられる中心力場を考える。ここで、 $C$  と  $\alpha$  は  $C > 0, \alpha > 1$  を満たす定数である。このとき、以下のようにして質点の軌道を求めよ。

1-1. この質点が運動する平面内で、上図のような座標系を考える。質点の位置ベクトルの大きさを  $r$ 、位置ベクトルが  $x$  軸となす角を  $\theta$  とする。質点のラグランジアン  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$  を書き下せ。ただし  $\dot{r} = dr/dt, \dot{\theta} = d\theta/dt$  とする。

1-2. 上で求めたラグランジアンから、 $r$  と  $\theta$  に関する運動方程式を求めよ。また、角運動量  $L = mr^2\dot{\theta}$  が保存することを示せ。

1-3.  $L \neq 0$  の場合には、単位質量あたりの角運動量  $l = L/m$  を用いて、時間微分を  $\theta$  に関する微分に変換することができる。その結果、 $r$  に関する運動方程式は

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \left( 1 - r^{3-\alpha} \frac{C}{l^2} \right) \frac{1}{r} = 0 \quad (2.1)$$

と書けることを示せ。

1-4.  $\alpha = 3$  の場合に、式 (2.1) の一般解を、 $C/l^2$  の値に応じて 3 つの場合に分けて求めよ。

### 解答 1

1-1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - U \quad (T \text{ は運動エネルギー}) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - U(r) \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 - (r\dot{\theta})^2] + \frac{C}{\alpha-1} \frac{m}{r^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

1-2.  $r$  についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= \frac{1}{2}m(2\dot{r}) \\ &= m\dot{r}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= -\frac{1}{2}\left[2\dot{\theta}^2 r + (\alpha-1)\frac{C}{(\alpha-1)r^\alpha}\right] \\ &= m\dot{\theta}^2 r - \frac{m}{2} \frac{C}{r^\alpha}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= 0 \\ m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r + m\frac{C}{r^\alpha} &= 0 \\ \ddot{r} + Cr^{-\alpha} - \dot{\theta}^2 r &= 0.\end{aligned}$$

$\theta$  についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2}m(2r^2\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}[mr^2\dot{\theta}] &= 0.\end{aligned}$$

ここで、角運動量  $L = mr^2\dot{\theta}$  を用いると、 $\theta$  についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

とかけるので、角運動量は保存する。

1-3.  $l = L/m = r^2 \dot{\theta}$  であるから、 $d\theta/dt = l/r^2$  である。これを用いて、 $d^2/dt^2$  を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = l \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}, \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ -l \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right] \\ &= -l \frac{d}{dt} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \\ &= -l \left( \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \right) \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \\ &= -l \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \\ &= -\frac{l^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r}\end{aligned}$$

これを  $r$  についてのラグランジュの運動方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{dt^2} + Cr^{-\alpha} - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= 0 \\ -\frac{l^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + Cr^{-\alpha} - \left( \frac{l}{r^2} \right)^2 r &= 0 \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + C \frac{r^{2-\alpha}}{l^2} - \frac{1}{r} &= 0 \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \left( 1 - r^{3-\alpha} \frac{C}{l^2} \right) \frac{1}{r} &= 0\end{aligned}$$

となり、式 (2.1) が得られた。

1-4.  $\alpha = 3$  のとき、 $C/l^2 = \gamma$ ,  $r^{-1} = R$  とおくと、式 (2.1) は次のようにかける。

$$\frac{d^2 R}{d\theta^2} - (\gamma - 1)R = 0 \quad (2.2)$$

ここで、二次方程式  $\lambda^2 - (\gamma - 1) = 0$  の解は、 $\lambda = \pm\sqrt{\gamma - 1}$  である。

$\gamma = 1$  のとき、 $\lambda = 0$  となって、(2.2) の解は、 $R = c_1 \theta + c_2$  となる ( $c_1, c_2$  は任意定数)。

$\gamma \neq 1$  のとき、(2.2) の解は、 $R = c_1 \exp[\sqrt{\gamma - 1} \theta] + c_2 \exp[-\sqrt{\gamma - 1} \theta]$  となる。

さらに、 $\gamma < 1$  のとき、 $\sqrt{1 - \gamma} = \beta$  とおいてさらに式を変形して、

$$\begin{aligned}R &= c_1 \exp[\sqrt{\gamma - 1} \theta] + c_2 \exp[-\sqrt{\gamma - 1} \theta] \\ &= c_1 \exp[i\beta \theta] + c_2 \exp[-i\beta \theta] \\ &= \frac{d_1 - id_2}{2} \exp[i\beta \theta] + \frac{d_1 + id_2}{2} \exp[-i\beta \theta] \quad (d_1, d_2 \text{ は任意定数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d_1 \frac{e^{i\beta\theta} + e^{-i\beta\theta}}{2} - i d_2 \frac{e^{i\beta\theta} - e^{-i\beta\theta}}{2} \\
&= d_1 \frac{e^{i\beta\theta} + e^{-i\beta\theta}}{2} + d_2 \frac{e^{i\beta\theta} - e^{-i\beta\theta}}{2i} \\
&= d_1 \cos(\beta\theta) + d_2 \sin(\beta\theta)
\end{aligned}$$

以上を整理して、一般解は、

$$r^{-1} = \begin{cases} c_1 \cos\left(\sqrt{1 - \frac{C}{l^2}} \theta\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{1 - \frac{C}{l^2}} \theta\right) & \frac{C}{l^2} < 1 \text{ の場合} \\ c_1 + c_2 \theta & \frac{C}{l^2} = 1 \text{ の場合} \\ c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{C}{l^2} - 1} \theta\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{C}{l^2} - 1} \theta\right) & \frac{C}{l^2} > 1 \text{ の場合} \end{cases} \quad (2.3)$$

である。

## 問 2

質量  $m$  の惑星が、質量  $M$  の恒星の周りを運動しており、恒星と惑星の間には万有引力が働いている。以下では万有引力定数を  $G$  とする。また、 $m$  は  $M$  に比べて十分に小さく、この系の重心は恒星の位置と同じであるとする。

2-1. 恒星が半径  $r$  の等速円運動をしているとき、惑星の運動エネルギー  $T$  を  $M, m, r, G$  を用いて表わせ。

2-2. 次に、恒星風などにより恒星の質量が減少する場合に、惑星の軌道がどのように変化するかを考える。はじめ恒星の質量は  $M$  であり、惑星の円軌道の半径は  $r$  であった。その後惑星の質量は、惑星の公転周期に比べて十分ゆっくりと微小変化し、 $M + dM$  になった。その結果、惑星の円軌道の半径が  $r + dr$  に変化したとする。

この場合にも、問 1 と同様に中心力だけが働いているため、恒星質量が変化する前後で、惑星の角運動量が保存する。この事を用い、2 次以上の微小量を無視することで、 $dM$  と  $dr$  の間に成り立つ関係式を求めよ。

2-3. 初期の恒星質量を  $M_0$ 、惑星の軌道半径を  $r_0$  とする。恒星の質量が、2-2 で求めた関係式が成り立つように、十分ゆっくりと  $M_0/2$  まで減少した。その結果、惑星の軌道半径は  $r_0$  の何倍になるか求めよ。

2-4. 次に、質量変化が速い場合の極限を考える。恒星の質量が  $M_0$  から  $M_0/2$  に瞬間的に減少したとき、惑星の運動はどのように変化するか定性的に説明せよ。