北海道大学理学院 入試問題 解答例

ひとみさん

令和元年 8 月 18 日

第1章　平成31年度

1.1　問題1

第2章　平成30年度

2.1　問題1

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1

質量 m の質点が、原点 O から距離 r の位置にあるとき、そのポテンシャルエネルギーが

$$U(r) = -\frac{C}{\alpha - 1}\frac{m}{r^{\alpha-1}}$$

で与えられる中心力場を考える。ここで、 C と α は $C > 0, \alpha > 1$ を満たす定数である。このとき、以下のようにして質点の軌道を求めよ。

1-1. この質点が運動する平面内で、上図のような座標系を考える。質点の位置ベクトルの大きさを r、位置ベクトルが x 軸となす角を θ とする。質点のラグランジアン $\mathscr{L} = \mathscr{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ を書き下せ。ただし $\dot{r} = dr/dt, \dot{\theta} = d\theta/dt$ とする。

1-2. 上で求めたラグランジアンから、r と θ に関する運動方程式を求めよ。また、角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ が保存することを示せ。

1-3. $L \neq 0$ の場合には、単位質量あたりの角運動量 $l = L/m$ を用いて、時間微分を θ に関する微分に変換することができる。その結果、r に関する運動方程式は

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(1 - r^{3-\alpha}\frac{C}{l^2}\right)\frac{1}{r} = 0 \tag{2.1}$$

と書けることを示せ。

1-4. $\alpha = 3$ の場合に、式 (2.1) の一般解を、C/l^2 の値に応じて 3 つの場合に分けて求めよ。

解答 1

1-1.

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= T - U \qquad (T\ \text{は運動エネルギー}) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 - (r\dot{\theta})^2\right] + \frac{C}{\alpha-1}\frac{m}{r^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

1-2. r についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{r}} &= \frac{1}{2}m(2\dot{r}) \\ &= m\dot{r}, \\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial r} &= -\frac{1}{2}\left[2\dot{\theta}^2 r + (\alpha-1)\frac{C}{(\alpha-1)r^\alpha}\right] \\ &= m\dot{\theta}^2 r - \frac{m}{2}\frac{C}{r^\alpha}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial r} &= 0 \\ m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r + m\frac{C}{r^\alpha} &= 0 \\ \ddot{r} + Cr^{-\alpha} - \dot{\theta}^2 r &= 0.\end{aligned}$$

θ についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{1}{2}m(2r^2\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta}, \\ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} &= 0\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}[mr^2\dot{\theta}] &= 0.\end{aligned}$$

ここで、角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ を用いると、θ についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

とかけるので、角運動量は保存する。

1-3. $l = L/m = r^2\dot{\theta}$ であるから、$d\theta/dt = l/r^2$ である。これを用いて、d^2/dt^2 を計算する。

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = l\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}, \\
\frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left[-l\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\right] \\
&= -l\frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r} \\
&= -l\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\right)\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r} \\
&= -l\frac{l}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} \\
&= -\frac{l^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

これを r についてのラグランジュの運動方程式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} + Cr^{-\alpha} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= 0 \\
-\frac{l^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} + Cr^{-\alpha} - \left(\frac{l}{r^2}\right)^2 r &= 0 \\
\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} + C\frac{r^{2-\alpha}}{l^2} - \frac{1}{r} &= 0 \\
\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(1 - r^{3-\alpha}\frac{C}{l^2}\right)\frac{1}{r} &= 0
\end{aligned}
$$

となり、式 (2.1) が得られた。

1-4. $\alpha = 3$ のとき、$C/l^2 = \gamma, r^{-1} = R$ とおくと、式 (2.1) は次のようにかける。

$$
\frac{d^2R}{d\theta^2} - (\gamma - 1)R = 0 \tag{2.2}
$$

ここで、二次方程式 $\lambda^2 - (\gamma - 1) = 0$ の解は、$\lambda = \pm\sqrt{\gamma - 1}$ である。

$\gamma = 1$ のとき、$\lambda = 0$ となって、(2.2) の解は、$R = c_1\theta + c_2$ となる（c_1, c_2 は任意定数)。

$\gamma \neq 1$ のとき、(2.2) の解は、$R = c_1\exp[\sqrt{\gamma - 1}\,\theta] + c_2\exp[-\sqrt{\gamma - 1}\,\theta]$ となる。

さらに、$\gamma < 1$ のとき、$\sqrt{1 - \gamma} = \beta$ とおいてさらに式を変形して、

$$
\begin{aligned}
R &= c_1\exp[\sqrt{\gamma - 1}\,\theta] + c_2\exp[-\sqrt{\gamma - 1}\,\theta] \\
&= c_1\exp[i\beta\theta] + c_2\exp[-i\beta\theta] \\
&= \frac{d_1 - id_2}{2}\exp[i\beta\theta] + \frac{d_1 + id_2}{2}\exp[-i\beta\theta] \qquad (d_1, d_2 \text{ は任意定数})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= d_1 \frac{e^{i\beta\theta} + e^{-i\beta\theta}}{2} - i d_2 \frac{e^{i\beta\theta} - e^{-i\beta\theta}}{2} \\
&= d_1 \frac{e^{i\beta\theta} + e^{-i\beta\theta}}{2} + d_2 \frac{e^{i\beta\theta} - e^{-i\beta\theta}}{2i} \\
&= d_1 \cos(\beta\theta) + d_2 \sin(\beta\theta)
\end{aligned}
$$

以上を整理して、一般解は、

$$
r^{-1} = \begin{cases}
c_1 \cos\left(\sqrt{1 - \frac{C}{l^2}}\,\theta\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{1 - \frac{C}{l^2}}\,\theta\right) & \frac{C}{l^2} < 1 \text{ の場合} \\
c_1 + c_2\theta & \frac{C}{l^2} = 1 \text{ の場合} \\
c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{C}{l^2} - 1}\,\theta\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{C}{l^2} - 1}\,\theta\right) & \frac{C}{l^2} > 1 \text{ の場合}
\end{cases} \tag{2.3}
$$

である。