北海道大学理学院 入試問題 解答例

ひとみさん

令和元年 8 月 18 日

第 1 章　平成 31 年度

1.1　問題 1

第 2 章　平成 30 年度

2.1　問題 1

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1

質量 m の質点が、原点 O から距離 r の位置にあるとき、そのポテンシャルエネルギーが

$$U(r) = -\frac{C}{\alpha - 1}\frac{m}{r^{\alpha-1}}$$

で与えられる中心力場を考える。ここで、 C と α は $C > 0, \alpha > 1$ を満たす定数である。このとき、以下のようにして質点の軌道を求めよ。

1-1.この質点が運動する平面内で、上図のような座標系を考える。質点の位置ベクトルの大きさを r、位置ベクトルが x 軸となす角を θ とする。質点のラグランジアン $\mathscr{L} = \mathscr{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ を書き下せ。ただし $\dot{r} = dr/dt, \dot{\theta} = d\theta/dt$ とする。

1-2.上で求めたラグランジアンから、r と θ に関する運動方程式を求めよ。また、角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ が保存することを示せ。

1-3.$L \neq 0$ の場合には、単位質量あたりの角運動量 $l = L/m$ を用いて、時間微分を θ に関する微分に変換することができる。その結果、r に関する運動方程式は

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(1 - r^{3-\alpha}\frac{C}{l^2}\right)\frac{1}{r} = 0 \tag{2.1}$$

と書けることを示せ。

1-4. $\alpha = 3$ の場合に、式 (2.1) の一般解を、C/l^2 の値に応じて 3 つの場合に分けて求めよ。

解答 1

1-1.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= T - U \qquad (T \text{ は運動エネルギー}) \\
&= \frac{1}{2}mv^2 - U(r) \\
&= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 - (r\dot{\theta})^2\right] + \frac{C}{\alpha - 1}\frac{m}{r^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

1-2. r についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{r}} &= \frac{1}{2}m(2\dot{r}) \\
&= m\dot{r}, \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial r} &= -\frac{1}{2}\left[2\dot{\theta}^2 r + (\alpha - 1)\frac{C}{(\alpha-1)r^\alpha}\right] \\
&= m\dot{\theta}^2 r - \frac{m}{2}\frac{C}{r^\alpha}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial r} &= 0 \\
m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r + m\frac{C}{r^\alpha} &= 0 \\
\ddot{r} + Cr^{-\alpha} - \dot{\theta}^2 r &= 0.
\end{aligned}$$

θ についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2}m(2r^2\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta}, \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} &= 0
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{d}{dt}[mr^2\dot{\theta}] &= 0.
\end{aligned}$$

ここで、角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ を用いると、θ についてのラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

とかけるので、角運動量は保存する。

1-3. $l = L/m = r^2\dot{\theta}$ であるから、$d\theta/dt = l/r^2$ である。これを用いて、d^2/dt^2 を計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = l\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}, \\
\frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left[-l\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\right] \\
&= -l\frac{d}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r} \\
&= -l\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\right)\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r} \\
&= -l\frac{l}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} \\
&= -\frac{l^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}
\end{aligned}$$

これを r についてのラグランジュの運動方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} + Cr^{-\alpha} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= 0 \\
-\frac{l^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} + Cr^{-\alpha} - \left(\frac{l}{r^2}\right)^2 r &= 0 \\
\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} + C\frac{r^{2-\alpha}}{l^2} - \frac{1}{r} &= 0 \\
\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(1 - r^{3-\alpha}\frac{C}{l^2}\right)\frac{1}{r} &= 0
\end{aligned}$$

となり、式 (2.1) が得られた。

1-4. $\alpha = 3$ のとき、$C/l^2 = \gamma, r^{-1} = R$ とおくと、式 (2.1) は次のようにかける。

$$\frac{d^2R}{d\theta^2} - (\gamma - 1)R = 0 \tag{2.2}$$

ここで、二次方程式 $\lambda^2 - (\gamma - 1) = 0$ の解は、$\lambda = \pm\sqrt{\gamma - 1}$ である。

$\gamma = 1$ のとき、$\lambda = 0$ となって、(2.2) の解は、$R = c_1\theta + c_2$ となる (c_1, c_2 は任意定数)。

$\gamma \neq 1$ のとき、(2.2) の解は、$R = c_1 \exp[\sqrt{\gamma - 1}\,\theta] + c_2 \exp[-\sqrt{\gamma - 1}\,\theta]$ となる。

さらに、$\gamma < 1$ のとき、$\sqrt{1 - \gamma} = \beta$ とおいてさらに式を変形して、

$$\begin{aligned}
R &= c_1 \exp[\sqrt{\gamma - 1}\,\theta] + c_2 \exp[-\sqrt{\gamma - 1}\,\theta] \\
&= c_1 \exp[i\beta\theta] + c_2 \exp[-i\beta\theta] \\
&= \frac{d_1 - id_2}{2}\exp[i\beta\theta] + \frac{d_1 + id_2}{2}\exp[-i\beta\theta] \qquad (d_1, d_2 \text{ は任意定数})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d_1 \frac{e^{i\beta\theta} + e^{-i\beta\theta}}{2} - i d_2 \frac{e^{i\beta\theta} - e^{-i\beta\theta}}{2} \\
&= d_1 \frac{e^{i\beta\theta} + e^{-i\beta\theta}}{2} + d_2 \frac{e^{i\beta\theta} - e^{-i\beta\theta}}{2i} \\
&= d_1 \cos(\beta\theta) + d_2 \sin(\beta\theta)
\end{aligned}
$$

以上を整理して、一般解は、

$$
r^{-1} = \begin{cases}
c_1 \cos\left(\sqrt{1 - \frac{C}{l^2}}\,\theta\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{1 - \frac{C}{l^2}}\,\theta\right) & C/l^2 < 1 \text{ の場合} \\
c_1 + c_2\theta & C/l^2 = 1 \text{ の場合} \\
c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{C}{l^2} - 1}\,\theta\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{C}{l^2} - 1}\,\theta\right) & C/l^2 > 1 \text{ の場合}
\end{cases} \tag{2.3}
$$

である。

問 2

質量 m の惑星が、質量 m の恒星の周りを運動しており、恒星と惑星の間には万有引力が働いている。以下では万有引力定数を G とする。また、m は M に比べて十分に小さく、この系の重心は恒星の位置と同じであるとする。

2-1. 恒星が半径 r の等速円運動をしているとき、惑星の運動エネルギー T を M, m, r, G を用いて表わせ。

2-2. 次に、恒星風などにより恒星の質量が減少する場合に、惑星の軌道がどのように変化するかを考える。はじめ恒星の質量は M であり、惑星の円軌道の半径は r であった。その後惑星の質量は、惑星の公転周期に比べて十分ゆっくりと微小変化し、$M + dM$ になった。その結果、惑星の円軌道の半径が $r + dr$ に変化したとする。

この場合にも、問 1 と同様に中心力だけが働いているため、恒星質量が変化する前後で、惑星の角運動量が保存する。この事を用い、2 次以上の微小量を無視することで、dM と dr の間に成り立つ関係式を求めよ。

2-3. 初期の恒星質量を M_0、惑星の軌道半径を r_0 とする。恒星の質量が、2-2 で求めた関係式が成り立つように、十分ゆっくりと $M_0/2$ まで減少した。その結果、惑星の軌道半径は r_0 の何倍になるか求めよ。

2-4. 次に、質量変化が速い場合の極限を考える。恒星の質量が M_0 から $M_0/2$ に瞬間的に減少したとき、惑星の運動はどのように変化するか定性的に説明せよ。

解答

2-1. 惑星に働く万有引力は $F = GmM/r^2$ である。惑星の運動の速さを v とすると、円運動をしているので、$F = mv^2/r$ が成り立つ。

惑星の運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}rF = \frac{GmM}{2r}$$

2-2. はじめの角速度を ω とすると、

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{F}{mr}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{mr}\cdot G\frac{mM}{r^2}} \\ &= \frac{1}{r}\sqrt{G\frac{M}{r}}.\end{aligned}$$

恒星質量が変化した後の角速度を ω' とすると、

$$\begin{aligned}\omega' &= \sqrt{\frac{F'}{m(r+dr)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{m(r+dr)}\cdot G\frac{m(M+dM)}{(r+dr)^2}} \\ &= \frac{1}{r+dr}\sqrt{G\frac{M+dM}{r+dr}}.\end{aligned}$$

角運動量が保存するので、

$$\begin{aligned}mr^2\omega &= m(r+dr)^2\omega' \\ r^2\frac{1}{r}\sqrt{G\frac{M}{r}} &= (r+dr)^2\frac{1}{r+dr}\sqrt{G\frac{M+dM}{r+dr}} \\ \sqrt{Mr} &= \sqrt{(M+dM)(r+dr)} \\ Mr &= (M+dM)(r+dr) \\ Mr &= Mr + rdM + Mdr \qquad \text{（}dM\text{ と }dr\text{ の積を無視した）} \\ \frac{dM}{dr} &= -\frac{M}{r}.\end{aligned}$$

2-3. 十分ゆっくりと質量が変化し、つねに $dM/dr = -M/r$ が成り立っているので、dM を $\Delta M = -M_0/2$ と置き換えることができる。この場合、

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dr} \sim \frac{\Delta M}{\Delta r} &= -\frac{M_0}{r_0} \\ \frac{-M_0/2}{\Delta r} &= -\frac{M_0}{r_0}\end{aligned}$$

$$\Delta r = \frac{r_0}{M_0} \cdot \frac{M_0}{2} = \frac{r_0}{2}$$

となって、r の変分は $\Delta r = r_0/2$ である。したがって、軌道半径は r_0 の $3/2$ 倍になる。

2-4. 恒星質量が瞬間的に減少した場合、惑星に働く向心力が減少し、惑星が軌道の外側に向かって弾き飛ばされる。

2.2 問題 II

以下の問 1 から問 2 までのすべての設問に答えよ。

問 1

真空中に、半径 a の導体円盤 A, B が間隔 d で配置された平行平板コンデンサーがある。図 ?? に示すように座標軸を取り、導体 B の中心を原点 O とする。以下では、真空中の誘電率を ϵ_0、透磁率を μ_0 とする。また、$a \gg d$ であり、導体の端における電場の乱れは無視できるとする。

1-1. ガウスの法則を用い、導体間の電場の大きさ E とコンデンサーの静電容量 C を求めよ。

1-2. コンデンサーに蓄えられた静電エネルギー U は導体 A と B の電荷が 0 から、それぞれ $+Q$ と $-Q$ になるまで導体間で電荷を移動させるのに必要な仕事に等しい。コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは、$U = Q^2/2C$ となることを示せ。

1-3. 導体 A と B がそれぞれ $+Q, -Q$ に帯電しているとき、導体間に働く力の大きさを求めよ。

1-4. それぞれ $+Q, -Q$ に帯電した導体 A, B 間に、自己インダクタンス L のコイルを時刻 $t = 0$ に接続した。時刻 t における、導体 A の電荷 $Q(t)$ と導体 A から B へ流れる電流 $I(t)$ を求めよ。ただしコンデンサーの静電容量を C とし、コイル以外の回路のインダクタンスは無視できるものとする。

1-5. このときコイルに蓄えられたエネルギー $(1/2)LI^2$ とコンデンサーに蓄えられたエネルギー U との和が保存することを示せ。

1-6. つぎにコイルを外し、帯電していないコンデンサーに直流電源を接続して、交流電圧 $V(t) = V_0 \sin \omega t$ を加えた。導体間に生じる変位電流を求めよ。ただしコンデンサーの静電容量を C とする。

1-7. また、このとき導体 A と導体 B の間の位置 $(x, 0, d/2)$ における磁束密度 B を求めよ。ただし $0 < x < a$ とする。