LOIS USUELLES DISCRETES (ET DENOMBREMENTS)
LOIS CONTINUES (ET CALCUL INTEGRAL)

PRESENTATION DU NIVEAU 2

Deux objectifs dans ce deuxième niveau :

- **Les lois usuelles discrètes** : il s'agit de bien appréhender les situations dans lesquelles les lois usuelles peuvent être utilisées. Il ne sera pas nécessaire de mémoriser les formules relatives à ces dernières, mais de comprendre d'où elles viennent. Pour cela, nous aurons besoin des **outils de dénombrements.**
- **Les lois continues** : il ne s'agit pas d'être expert dans les calculs sur les lois continues mais d'assimiler le vocabulaire de base. Là encore, la compréhension de ce vocabulaire passe par un outil très important de l'analyse, le **calcul intégral**.

Pas d'inquiétude pour les étudiants qui n'ont pas abordé, durant leur scolarité, les outils de dénombrements ou le calcul intégral. Dans ce niveau, ils ne seront pas évalués sur leur aisance à manipuler ces concepts. Ce sera l'objet du dernier niveau.

PARTIE I : RAPPELS DE DENOMBREMENTS

Nous avons vu que, sous l'hypothèse d'équiprobabilité, le calcul de la probabilité d'un événement E revenait à un calcul d'un quotient de cardinaux :

$$p(E) = \frac{card\ E}{card\ \Omega}$$

Jusqu'à présent, nous n'avons pas eu de difficulté à calculer ces cardinaux, car les ensembles que nous cherchions à dénombrer étaient simples : ensemble d'étudiants, ensemble de faces d'un dé…

Il y a des situations où ces ensembles sont plus complexes, il suffit par exemple, au lieu de jeter **un** dé ou de choisir **un** individu dans une population, d'effectuer **plusieurs** jets ou **plusieurs** tirages.
Comment décrire, par exemple, l'univers Ω lorsque l'expérience consiste en un choix de **deux** individus dans une population ? que se passe-t-il si le tirage se fait avec remise ? sans remise ?

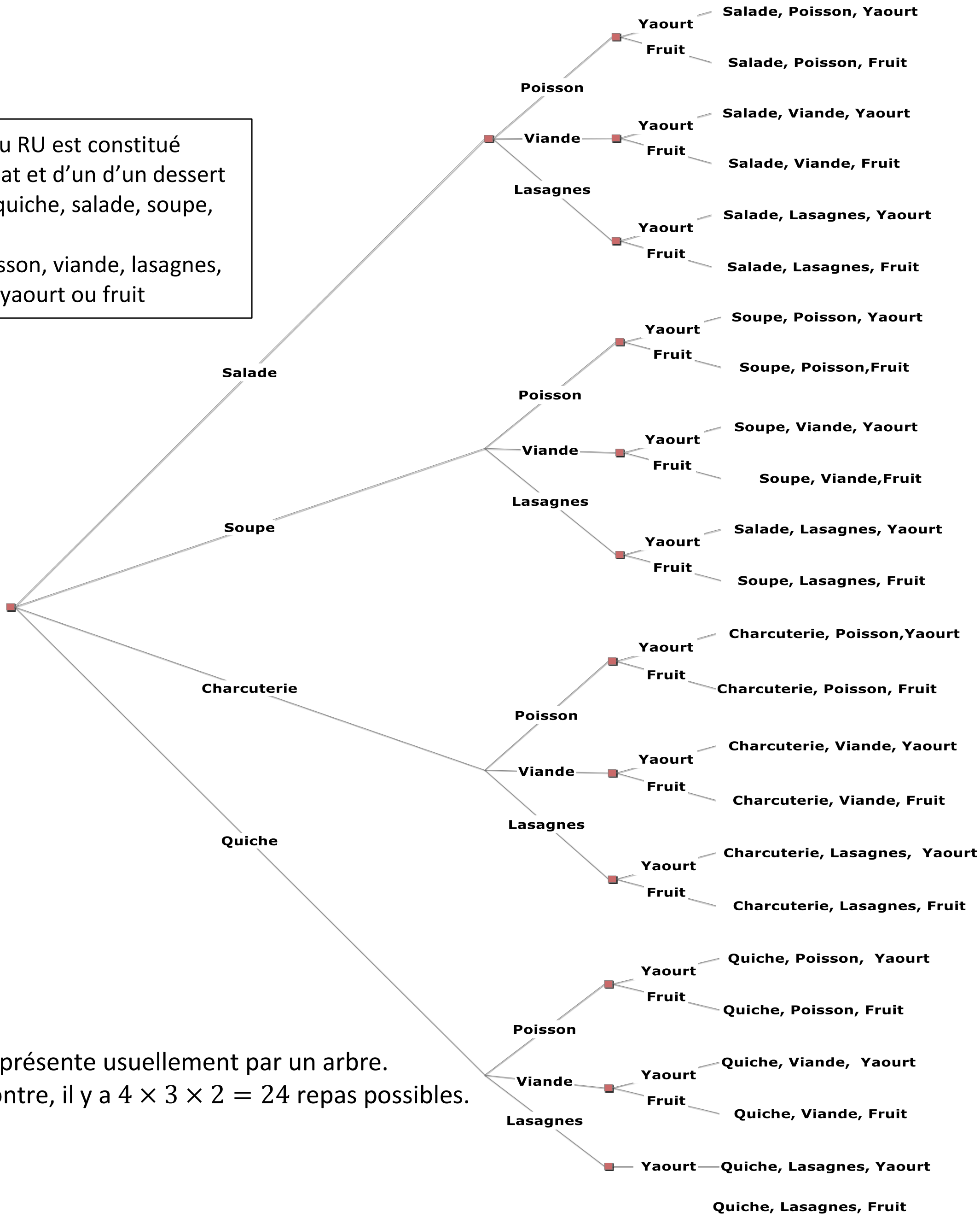
Dans ces situations, il peut être intéressant d'utiliser des outils particuliers, les **outils de dénombrements**. Ces outils sont très utiles en probabilité mais aussi, de façon générale, pour dénombrer des situations complexes.

Les pages suivantes (2 à 6) sont des rappels des notions abordées en S1, mais qui n'avaient pas été approfondies. On peut parcourir ces pages assez rapidement (mais il faut quand même les lire !). Pour Le niveau 1, il s'agit d'un rappel nécessaire à la compréhension des lois usuelles, il n'y aura pas d'évaluation sur la facilité à manipuler les outils de dénombrements.

PRINCIPE DES CHOIX SUCCESSIFS

Quand on fait p choix successifs, s'il y a n_1 possibilités pour le premier choix, n_2 pour le deuxième,…, n_p pour le dernier, alors il y a en tout $n_1 n_2 \ldots n_p$ possibilités d'enchaîner, l'un après l'autre, ces p choix.

Exemple : un repas du RU est constitué d'une entrée, d'un plat et d'un d'un dessert
- **5 entrées** : quiche, salade, soupe, charcuterie,
- **3 plats** : poisson, viande, lasagnes,
- **2 desserts** : yaourt ou fruit



Cette situation se représente usuellement par un arbre.
Dans l'exemple ci-contre, il y a $4 \times 3 \times 2 = 24$ repas possibles.

PRINCIPE DES CHOIX SUCCESSIFS APPLICATION – CORRIGE P31

- Combien de mots **binaires de 5 caractères** peut-on écrire ?
- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 3 caractères** peut-on écrire ?
- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 3 caractères distincts** peut-on écrire ?
- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 5 caractères** peut-on écrire ?
- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 5 caractères distincts** peut-on écrire ?

Outils de denombrements

Les outils classiques de dénombrement sont les listes, les arrangements et les combinaisons. On les associe aux objets que l'on souhaite dénombrer.
Nous cherchons à dénombrer des mots, des nombres, des résultats d'une expérience aléatoire…
Quelle structure (outil de dénombrement) les représente ? une liste ? un arrangement ? une combinaison ? En associant ces objets à une structure connue, on arrive ainsi à les dénombrer.

P-LISTE

Listes : ordre et repetition

Une **liste de p éléments (ou p-liste)** d'un ensemble E à n éléments est un élément de E^p c'est-à-dire une suite ordonnée *avec répétition possible* de p éléments de E.

« Avec répétition possible » : on pourrait ne rien préciser, cela signifie qu'il n'y a pas de contrainte sur la répétition des éléments dans la liste

Dénombrement : Il y a n^p **p-listes** ou **listes à p éléments** d'un ensemble à n éléments

Comment utiliser les listes ?

- **A partir des 5 lettres A, B, C, D et E combien de mots de 3 caractères peut-on écrire ?**
  Dans un mot de trois caractères, comme par exemple le mot ABA, les lettres peuvent **se répéter** et sont **ordonnées** entre elles.
  Le mot ABA peut être identifié à la 3-liste (A,B,A).
  Il y a donc autant de mots de 3 lettres sur l'alphabet {A,B,C,D,E} que de 3-listes sur l'ensemble {A,B,C,D,E} : 5^3 mots possibles.

- **A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de mots de 5 caractères peut-on écrire ?**
  Un mot de 5 caractères pris dans {A,B,C,D,E} peut être identifié à une 5-liste de {A,B,C,D,E} : il y donc 5^5 mots possibles.

- **On jette deux dés, un rouge et un bleu. Comment décrire l'ensemble des résultats possibles Ω ? quel est le cardinal de cet ensemble ?**
  Comme les dés sont de couleurs distinctes, le résultat est **ordonné** : « obtenir 1 avec le dé bleu et 6 avec le dé rouge » est un événement différent de « obtenir 6 avec le dé bleu et 1 avec le dé rouge » : $(1,6) \neq (6,1)$
  Il y a bien sûr **répétition** possible, l'événement « obtenir 1 avec les deux dés » est réalisable, on peut le noter $(1,1)$
  Bilan : l'univers Ω est l'ensemble des 2-listes d'éléments de {1,2,3,4,5,6} et card $\boldsymbol{\Omega = 6^2}$

- **On choisit, par un tirage avec remise, deux étudiants dans une population de 60 étudiants. Comment décrire l'ensemble des résultats possibles Ω ? quel est le cardinal de cet ensemble ?**
  Les tirages sont distincts, il y a un premier tirage et un deuxième : « obtenir $Pierre$ au premier tirage et $Paul$ au deuxième » est un événement différent de « obtenir $Paul$ au premier tirage et $Pierre$ au deuxième »: $(Pierre, Paul) \neq (Paul, Pierre)$
  Il y a bien sûr **répétition** possible, l'événement « obtenir $Pierre$ aux deux tirages » est réalisable, on peut le noter $(Pierre, Pierre)$
  Bilan : l'univers Ω est l'ensemble des 2-listes d'éléments pris dans l'ensemble des étudiants et card $\boldsymbol{\Omega = 60^2}$

ARRANGEMENT

ARRANGEMENTS : ORDRE SANS REPETITION

Un arrangement de p éléments d'un ensemble E à n éléments est une suite **ordonnée** de p éléments **distincts** de E.

Dénombrement : Il y a $\boldsymbol{n(n-1)\dots(n-p+1)}$ arrangements à $\boldsymbol{p}$ éléments d'un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments. Ce nombre se note aussi $\boldsymbol{A_n^p}$

$$A_n^p = \underbrace{\boldsymbol{n(n-1)\dots(n-p+1)}}_{\boldsymbol{p\ termes}}$$

AUTRE EXPRESSION DE $\boldsymbol{A_n^p}$ EN UTILISANT LA NOTATION FACTORIELLE

Factorielle (« rappel »)
On note $\boldsymbol{n}!$ et on nomme **« factorielle n »** ou **« n factorielle »** le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n.

$$n\,! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

*Une **convention** qui permet d'étendre des formules à certains cas particulier (nous le verrons tout de suite avec A_n^p) :* $\boldsymbol{0! = 1}$

La notation factorielle, nous donne une autre expression de A_n^p :

$$\boldsymbol{n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1}}$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\boldsymbol{(n-p)(n-p-1)\dots 2\times 1}$

$$\boldsymbol{n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\dots 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)\dots 2\times 1}}$$

$$\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Que se passe-t-il si $\boldsymbol{p = n}$?
Un **arrangement de $\boldsymbol{n}$ éléments** d'un ensemble E à $\boldsymbol{n}$ **éléments** est une suite **ordonnée** de $\boldsymbol{n}$ éléments **distincts** de $\boldsymbol{E}$:

- C'est donc une façon d'ordonner les $\boldsymbol{n}$ éléments de $\boldsymbol{E}$
- $\boldsymbol{A_n^n} = ?$

$$\boldsymbol{A_n^n = n(n-1)\dots(n-n+1) = n!}$$

$$\boldsymbol{A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!}$$

Un exemple de situation où la convention $\boldsymbol{0! = 1}$ *permet d'étendre une formule à un cas particulier*

PERMUTATION

PERMUTATIONS : ARRANGEMENT DE N ELEMENTS PRIS PARMI N

Une façon d'ordonner les $\boldsymbol{n}$ éléments d'un ensemble $\boldsymbol{E}$ s'appelle une **permutation de $\boldsymbol{E}$**. Une permutation est aussi un **arrangement** de $\boldsymbol{n}$ éléments d'un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments.

Dénombrement : il y a $\boldsymbol{n}!$ permutations dans un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments.

Comment utiliser les arrangements et les permutations ?

- **A partir des 5 lettres A, B, C, D et E combien de mots de 3 caractères distincts peut-on écrire ?**
  Dans un mot de trois caractères, comme par exemple le mot BAC, les lettres **ne peuvent pas se répéter** et sont **ordonnées** entre elles.
  Un mot de 3 caractères pris dans {A,B,C,D,E} peut donc être identifié à un **arrangement** de 3 éléments de l'ensemble {A,B,C,D,E}, il y a donc $\boldsymbol{A_5^3 = 5 \times 4 \times 3}$ mots possibles.

- **A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de mots de 5 caractères peut-on écrire ?**
  Un mot de 5 caractères pris dans {A,B,C,D,E} peut être identifié à une **permutation** de {A,B,C,D,E} : il y donc $\mathbf{5}!$ mots possibles.

- **On choisit, par un tirage successif SANS remise, deux étudiants dans une population de 60 étudiants. Comment décrire l'ensemble des résultats possibles Ω ? quel est le cardinal de cet ensemble ?**
  Les tirages sont distincts et successifs, il y a un premier tirage et un deuxième : « obtenir $Pierre$ au premier tirage et $Paul$ au deuxième » est un événement différent de « obtenir $Paul$ au premier tirage et $Pierre$ au deuxième »: $(Pierre, Paul) \neq (Paul, Pierre)$
  Il y n'y a pas remise donc pas de **répétition** possible, l'événement « obtenir $Pierre$ aux deux tirages » est impossible
  Bilan : l'univers Ω est l'ensemble des arrangements de deux éléments pris dans l'ensemble des étudiants et card Ω $= \boldsymbol{A_{60}^2 = 60 \times 59}$

Combinaisons : ni ordre, ni repetition

Exemple preliminaire

Combien y a-t-il de façons de choisir 3 lettres dans l'ensemble {A,B,C,D,E} ?

Nous devons donc dénombrer tous les **sous-ensembles** de trois éléments de {A,B,C,D,E} : {A,B,C}, {A,B,D}, {A,B,E}…

Ce que nous savons dénombrer jusqu'à présent, ce sont des sous-ensembles ordonnés, c'est-à-dire des **arrangements** : (A,B,C), (A,C,B), (B,A,C)… il y en a $\boldsymbol{A_5^3}$

Nous remarquons : il y a $\mathbf{3}!$ façons d'ordonner les lettres du sous-ensemble {A,B,C}. Il y a donc $\mathbf{3}!$ arrangements utilisant les lettres A, B et C.

$$\{A,B,C\} \left\{ \begin{array}{l} (A,B,C) \\ (A,C,B) \\ (B,A,C) \\ (B,C,A) \\ (C,A,B) \\ (C,B,A) \end{array} \right. \qquad \mathbf{3! = 6} \textbf{ arrangements avec les lettres de \{A,B,C\}}$$

Généralisation : à chaque sous-ensemble de trois lettres, il est donc possible d'associer 6! arrangements.
Il y a donc $\mathbf{6}!$ **fois plus d'arrangements que de sous-ensembles de 3 éléments :** le nombre de sous-ensembles de **3** éléments de {A,B,C,D,E} est donc : $\boldsymbol{A_5^3}/\mathbf{3}!$

COMBINAISON

Une **combinaison** de $\boldsymbol{p}$ éléments d'un ensemble $\boldsymbol{E}$ à $\boldsymbol{n}$ éléments est un **sous-ensemble** de $\boldsymbol{E}$ à $\boldsymbol{p}$ éléments.
Il y a $\boldsymbol{p}$! fois plus d'arrangements à $\boldsymbol{p}$ éléments que de combinaisons à $\boldsymbol{p}$ éléments.
Dénombrement : Le nombre de combinaisons à $\boldsymbol{p}$ éléments se note $\boldsymbol{C_n^p}$ ou $\boldsymbol{\binom{n}{p}}$ (qui se prononce « p parmi n »)

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

COMMENT UTILISER LES COMBINAISONS ?

- **On choisit, par un tirage simultané, deux étudiants dans une population de 60 étudiants. Comment décrire l'ensemble des résultats possibles Ω ? quel est le cardinal de cet ensemble ?**
  Le tirage est « simultané », ce qui signifie qu'il n'y a pas de premier et de deuxième tirage. Un événement élémentaire est, par exemple, « Obtenir $Pierre$ et $Paul$ » :
  $$\{Pierre, Paul\} = \{Paul, Pierre\}$$
  Il y n'y a bien sûr pas de **répétition.**
  Bilan : l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de deux éléments pris dans l'ensemble des étudiants et card $\Omega = C_{60}^2 = \frac{60!}{2!58!} = \frac{60\times59}{2}$

- **Combien a-t-on de mots binaires de 5 caractères avec uniquement 3 chiffres 1 et 2 chiffres 0 ?**
  Cette exemple est très important pour comprendre la loi binomiale.
  Ecrivons quelques mots binaires satisfaisant cette contrainte : $00111, 01011, 01101, \dots$
  Finalement, choisir un tel mot binaire, revient à choisir les emplacements des 1 (ou des 0) dans le mot :
  - $00111 \to$ emplacements 3,4 et 5 $\to \{3,4,5\}$
  - $01011 \to$ emplacements 2,4 et 5 $\to \{2,4,5\}$
  - $01101 \to$ emplacements 2,3 et 5 $\to \{2,3,5\}$
  - $01110 \to$ emplacements 2,3 et 4 $\to \{2,3,4\}$
  - …

  Les emplacements ne sont pas ordonnés, choisir 3,4 et 5 ou 5,4 et 3 donnera le même mot 00111

  Il y a donc autant de mots binaires que de façons de choisir 3 emplacements parmi 5, c'est-à-dire que de combinaisons à trois éléments de {1,2,3,4,5} : $\boldsymbol{C_5^3}$ **mots binaires avec 3 chiffres 1.**

SYNTHESE

	SUITES (ORDONNEES) DE P ELEMENTS	SOUS-ENSEMBLES (NON ORDONNES) DE P ELEMENTS
AVEC REPETITION	n^p liste à p-éléments dans un ensemble à n éléments	*Combinaisons avec répétition*
SANS REPETITION	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons de p éléments dans un ensemble à n éléments

PETIT EXERCICE RECAPITULATIF - CORRIGE P32

En utilisant les chiffres 1,…, 9 :

1. Combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres ?
2. Combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres distincts.
3. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres contenant 3 fois le chiffre 1 ?
4. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres contenant exactement trois chiffres identiques ?
5. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?
6. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, tels que le premier chiffre est le plus petit et le dernier le plus grand ?

PARTIE II : LOIS USUELLES

INTRODUCTION

Jeter des dés, choisir des cartes dans un jeu, des individus dans une population, ces expériences paraissent bien différentes, mais soulèvent souvent des questions similaires : combien de « pile » ? de « pique » ? de garçons ? combien d'essais nécessaires pour obtenir un premier « pile » ? un premier « pique » ? un premier garçon ?
Les réponses numériques à ces questions sont des valeurs de variables aléatoires qui présentent des similitudes, leur loi seront comparables. On utilisera le terme de **lois usuelles.**
Les lois usuelles se manifestent donc dans situations courantes, très souvent lors de répétitions **d'expériences de Bernoulli**. Nous allons préciser ces situations par la suite.

VARIABLE, EXPERIENCE ET LOI DE BERNOULLI

Que l'on jette une pièce, un dé, que l'on choisisse une carte au hasard, ou un individu dans une population, si on s'intéresse aux événements « avoir un Pile », « obtenir un 6 », « obtenir un pique», « obtenir un garçon », ces événements sont différents. Mais si on se préoccupe uniquement de **leur réalisation**, la réponse sera la même : « oui, l'événement est réalisé » ou « non, l'événement n'est pas réalisé ».
Il est donc possible d'associer, à chacune de ces expériences, une variable aléatoire de **Bernoulli** X **:**

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si l'événement est réalisé} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

VOCABULAIRE : EXPERIENCE, VARIABLE ET LOI DE BERNOULLI

- On appelle **expérience de Bernoulli**, une expérience à l'issue de laquelle on s'intéresse à la **réalisation d'un événement** particulier, qu'on appelle parfois **succès** (dans les exemples précédents : « avoir un Pile », « obtenir un 6 », « obtenir un pique», « obtenir un garçon », peuvent être des **succès**)
- A toute expérience de Bernoulli, on peut associer une **variable de Bernoulli** X :

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si l'événement (succès) est réalisé} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

  Si p est la probabilité de l'événement (du succès), on connaît la **loi de X** : $\{(1, p), (0,1-p)\}$

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
Notation : $X \sim B(p)$

Petit exercice corrigé p32 : montrer que E(X)=p et varX=p(1-p)

LOIS USUELLES ASSOCIEEES A LA REPETITION D'UNE EXPERIENCE DE BERNOULLI

EXPERIENCE

On répète, de façon indépendante, une expérience de Bernoulli au cours de laquelle un événement **S**, appelé "succès", peut se réaliser avec une probabilité **p**.

Exemples : on jette 10 fois un dé (succès : « obtenir un six »), on fait un tirage avec remise dans une population (succès : « obtenir un garçon »)…

Loi Binomiale

Une variable binomiale se définit comme étant le nombre de succès obtenu(s) au cours de n expériences. Si on note **N ce nombre de succès :**

N suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Notation : $\boldsymbol{N \sim B(n, p)}$

> Exemple : on jette 10 fois un dé, on s'intéresse à l'obtention de 6.
> On compte donc à l'issu de l'expérience *le nombre de 6*.
> La variable N représentant ce nombre suit *une loi binomiale de paramètres 10 et 1/6 :* $\boldsymbol{N \sim B(10, {}^{1}/_{6})}$

Cours loi binomiale

Expression de la loi binomiale

Exemple

Population de 100 étudiants : 60 filles et 40 garçons.

On choisit 10 étudiants au hasard, par un tirage avec remise.

- Il y a **10** tirages indépendants (10 expériences de Bernoulli)
- À chaque tirage : probabilité **0,4** d'avoir un garçon
- $\boldsymbol{X}$ est le nombre de garçons(s) parmi les **10** étudiants choisis. $\quad \Rightarrow \; X \sim B(\mathbf{10}; \mathbf{0,4})$

Déterminons la loi de X

- $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1, \dots, 10\}}$: le tirage étant avec remise, il est possible de n'avoir que des filles ou que des garçons parmi les 10 étudiants obtenus.
- Calculons par exemple $p(X = 3)$, la probabilité d'avoir 3 garçons dans l'échantillon.

$$p(X = 3) = \frac{\text{card}(X = 3)}{\text{card } \Omega}$$

→ **card $\boldsymbol{\Omega}$**

Le tirage étant avec remise, un résultat de l'expérience est une 10-liste d'étudiants :
Ω est l'ensemble de ces 10-listes et **card $\boldsymbol{\Omega = 100^{10}}$**

→ **card$\boldsymbol{(X = 3)}$**

Combien a-t-on de de 10-listes avec 3 garçons ?

- Il faut choisir une 3-liste de garçons : 40^3 choix possibles,
- également une 7-liste de filles : 60^7choix possibles,
- il reste à imbriquer ces listes entre elles, c'est-à-dire, par exemple à choisir, parmi les 10, les 3 tirages donnant un garçon, ce qui revient à choisir 3 tirages parmi 10 : $\boldsymbol{C_{10}^3}$ choix possibles

$$\Rightarrow \textbf{card}\boldsymbol{(X = 3) = C_{10}^3 40^3 60^7}$$

$$\Rightarrow p(X = 3) = \frac{C_{10}^3 40^3 60^7}{100^{10}} = \frac{C_{10}^3 40^3 60^7}{100^3 100^7} = C_{10}^3 \left(\frac{40}{100}\right)^3 \left(\frac{60}{100}\right)^7$$

$$\Rightarrow p(X = 3) = C_{10}^3 0{,}4^3 0{,}6^7$$

De façon générale : $p(X = k) = C_{10}^k 0{,}4^k 0{,}6^{10-k}$

Generalisation : expression de la loi binomiale $\boldsymbol{B(n, p)}$

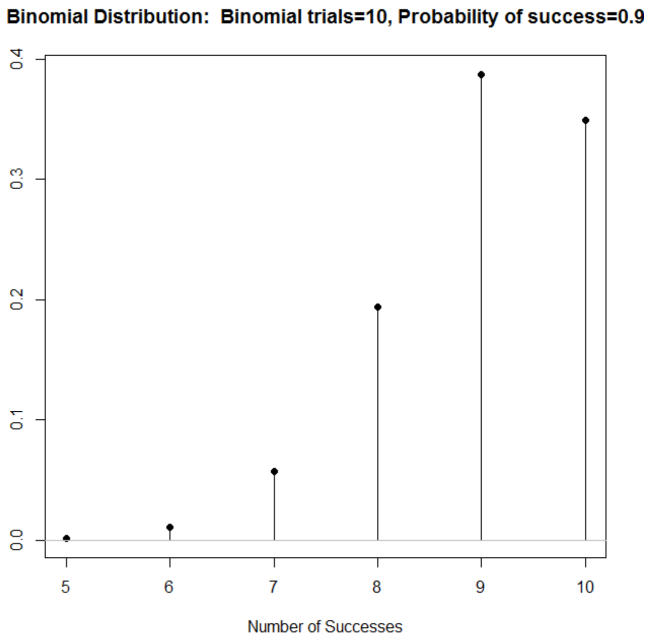
$$N \sim B(n, p) \Rightarrow \begin{cases} N(\Omega) = \{0,1, \dots, n\} \\ p(N = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad k \in \{0,1, \dots, n\} \end{cases}$$

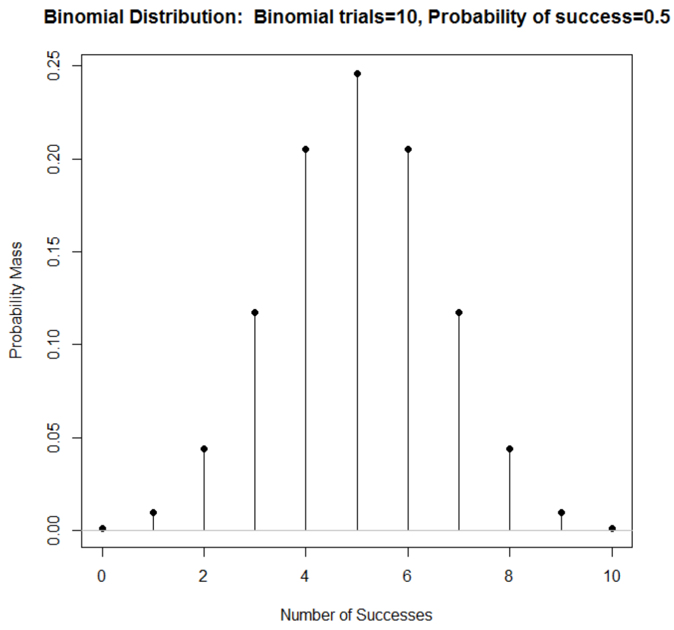
Moments (esperance et variance) : $E(N) = np$ et $Var(N) = np(1 - p)$

Ecriture de la loi $\boldsymbol{B(n, p)}$ sous forme ensembliste : $\boldsymbol{\{(k,\ C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}),\ \ k \in \{0, 1, \dots, n\}\}}$

EXEMPLES DE REPRESENTATIONS DE LA LOI BINOMIALE

Ces diagrammes, permettant de représenter les lois discrètes, sont appelés « diagrammes en bâtons » : en abscisse, les valeurs possibles de la variable et en ordonnée la probabilité de ces valeurs.





REMARQUE : VARIABLE BINOMIALE, SOMME DE VARIABLES DE BERNOULLI

Puisque l'expérience est une répétition d'expériences de Bernoulli, il est possible d'associer à chacune de ces expériences, une variable X_i de loi de Bernoulli et donc un vecteur $(X_1, X_2 \dots X_{10})$ de variables de Bernoulli.

> EXEMPLE : on jette 10 fois un dé, on s'intéresse à l'obtention de 6.
> A chaque jet on associe une variable X_i de loi $\boldsymbol{B(1/6)}$: $X = 1$ si six, 0 sinon.
> On associe donc un vecteur $(X_1, X_2 \dots X_{10})$ à succession de 10 jets.
> Une réalisation de $(X_1, X_2 \dots X_{10})$: $(0{,}0{,}1{,}1{,}0{,}0{,}0{,}1{,}0{,}0)$

Sur l'exemple précédent si on note N, le nombre de 6 obtenue au cours des 10 jets : $N \sim B(10{,}1/6)$
Si une réalisation de $(X_1, X_2 \dots X_{10})$ est $(0{,}0{,}1{,}1{,}0{,}0{,}0{,}1{,}0{,}0)$, alors une réalisation de N est 3.
On remarque que : $3 = 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0$
De façon générale : $N = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

BILAN

Une loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$ peut toujours s'écrire comme somme de $\boldsymbol{n}$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètres $\boldsymbol{p}$

$$N \sim B(n, p) \quad \Longrightarrow \quad N = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad avec\ X_i \sim B(p)$$

Autre remarque, en prenant les valeurs 1 ou 0, une variable de Bernoulli peut être aussi considérée comme une variable de binomiale, ces valeurs 1 et 0 correspondant aussi au nombre de succès au cours d'une seule expérience : La loi de Bernoulli $\boldsymbol{B(p)}$ correspond à la loi binomiale $\boldsymbol{B(1, p)}$

EXERCICES : VARIABLES ALEATOIRES – LOIS USUELLES (BERNOULLI ET BINOMIALE)

EXERCICE I – CORRIGE P33

Lors d'élections municipales dans le département des Landes, les résultats suivants ont été obtenus :

- 331 maires ont été élus,
- 15% des maires sont des femmes,

A. On choisit un maire parmi les 331.
   a. Introduire une variable de Bernoulli associée à cette expérience.
   b. Quelle est sa loi précisément ?

B. On choisit 20 maires par un tirage avec remise dans la population des 331 maires.
   a. Quelles variables, de lois usuelles, peut-on introduire ?
   b. Que peut-on dire du nombre de femmes dans l'échantillon obtenu ?
   c. Que peut-on dire de la proportion de femmes dans l'échantillon obtenu ?
   d. 15% des maires de l'échantillon sont des femmes. Vrai ou faux ?

EXERCICE II – CORRIGE P33

On s'intéresse à la fidélité des clients d'une agence de voyage.
Une enquête a été menée auprès des 6542 clients qui ont effectués leur premier séjour avec cette agence en 2010.
Une première étude a montré que 70% de ces clients étaient satisfaits ou très satisfaits de leur premier séjour.

1. **On choisit un client au hasard parmi les 6542**.Définir, sur cette expérience, une variable aléatoire de loi de Bernoulli. Préciser sa loi et son espérance
2. **On choisit un échantillon de 10 clients au hasard par un tirage sans remise**
   a. On s'intéresse au nombre de personnes, dans l'échantillon, satisfaites du premier séjour. Que peut-on dire de ce nombre ? (Constante ? variable ? loi ?)
   b. Il y a une probabilité 0,65 qu'au moins la moitié des clients de l'échantillon soit satisfaite du premier séjour.
      - Expliquer comment a été calculée cette probabilité :
      - Interpréter cette probabilité en pourcentage (on évitera « 65% ***de chance*** », on sera plus précis que « dans 65% ***des cas*** »…)

LOIS GEOMETRIQUES

Les lois géométriques, sont des lois qui, comme la loi binomiale, peuvent être associée à une répétition d'expériences de Bernoulli. Au lieu de compter le nombre de succès, nous allons nous intéresser à la première réalisation d'un succés

RAPPEL DE L'EXPERIENCE

On répète, de façon indépendante, une expérience de Bernoulli au cours de laquelle un événement S (appelé "succès") peut se réaliser avec une probabilité p.
Exemples : on jette plusieurs fois un dé (succès : « obtenir un six »), on fait un tirage avec remise dans une population (succès : « obtenir un garçon »)…

Cours lois géométriques

LOI GEOMETRIQUE SUR $\mathbb{N}^*$

Au lieu de s'intéresser au nombre de succès au cours de n expériences, comme nous le faisions avec la loi binomiale, on s'intéresse à la réalisation du premier succès : soit **la variable T représentant le nombre d'essais (tentatives) nécessaires pour l'obtention du premier succès**

LOI DE T ?

Prenons comme exemple, la répétition d'un jet de dé : T la variable représentant le nombre d'essais nécessaires pour l'obtention d'un premier six.

- $\boldsymbol{T(\Omega) = \{1, \dots\}}$: il n'est possible de donner une valeur maximale pour $\boldsymbol{T}$. A priori, au-delà de 50 jets, normalement on est à peu près certain d'avoir obtenu un six. Cependant, les essais étant indépendants, il n'est pas impossible, même si c'est très peu probable, d'obtenir une face différente de six au cours des 50 premiers essais.
  L'ensemble des valeurs possibles pour T est donc infini : $\boldsymbol{T(\Omega)} = \mathbb{N}^*$
  Comme $\boldsymbol{T(\Omega)}$ est toujours un ensemble dénombrable, on dit que la variable $\boldsymbol{T}$ est une variable **discrète infinie.**

  Cela ne signifie pas pour autant que T prenne plus de valeurs qu'une variable finie. Si p est proche de 1, le succès se réalisera très rapidement et la variable T ne prendra, dans la réalité que trois ou quatre valeurs (0,1,2,..)

- **Probabilités :** $p(T = k) = \ ?$
  Pour déterminer les probabilités $p(T = k)$, on utilise les événements et notations suivantes :
  - → $\boldsymbol{S_k}$ **: un six a été obtenu au k$^{\text{ème}}$ essai :** $\boldsymbol{p(S_k) = {}^{1}\!/_{6}}$
  - → $\boldsymbol{\overline{S}_k}$ **: une face différente de six a été obtenue au k$^{\text{ème}}$ essai :** $\boldsymbol{p(\overline{S}_k) = {}^{5}\!/_{6}}$

  L'événement $T = k$ signifie qu'une face différente de six a été obtenue au $k - 1$ premiers essais et six a été obtenu au $k^{\text{ème}}$ essai.
  L'événement $T = k$ peut donc s'écrire sous la forme :
  $$(T = k) = \bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_{k-1} \cap S_k$$
  Les événements $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_{k-1}, S_k$ étant indépendants :
  $$p(T = k) = p(\bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_{k-1} \cap S_k) = p(\bar{S}_1) \dots p(\bar{S}_{k-1})p(S_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$$

  Généralisation pour un événement (succès) de probabilité p : $\boldsymbol{p(T = k) = (1 - p)^{k-1} p}$

LOI GEOMETRIQUE SUR $\mathbb{N}^*$

LOI GEOMETRIQUE SUR $\mathbb{N}^*$

Soit T le nombre d'essais (tentatives) nécessaires pour l'obtention du premier succès

LOI DE PROBABILITE

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $p(T = k) = (1-p)^{k-1}p \quad k \in \mathbb{N}^*$

T suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p.
$\boldsymbol{T \sim G_{\mathbb{N}^*}(p)}$

Moments : $E(T) = \frac{1}{p}$ et $var(T) = \frac{1-p}{p^2}$

Ecriture de la loi $\boldsymbol{G_{\mathbb{N}^*}(p)}$ sous forme ensembliste : : $\boldsymbol{\{(k, (1-p)^{k-1}p),\ k \in \mathbb{N}^*\}}$

LOI GEOMETRIQUE SUR $\mathbb{N}$

Au lieu de nous intéresser au **nombre d'essais (tentatives) nécessaires pour l'obtention du premier succès,** nous aurions pu compter le nombre d'échecs **précédant** le premier succès. La variable E obtenue est liée à T par la relation : $\boldsymbol{E = T - 1}$

La variable E peut prendre la valeur 0 dans le cas où le succès est obtenu au premier tirage : $\boldsymbol{E(\Omega)} = \mathbb{N}$

Par ailleurs , pour que $E = k$ se réalise, il faut k échecs et un succès : $p(E = k) = (1-p)^k p$

On dit que E suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$: $E \sim G_{\mathbb{N}}(p)$

LOI GEOMETRIQUE SUR $\mathbb{N}^*$

LOI GEOMETRIQUE SUR $\mathbb{N}$

Soit E le nombre d'échecs précédant le premier succès

LOI DE PROBABILITE

- $E(\Omega) = \mathbb{N}$
- $p(E = k) = (1-p)^k p \quad k \in \mathbb{N}$

E suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p.
$\boldsymbol{E \sim G_{\mathbb{N}}(p)}$

Moments : $E(T) = \frac{1}{p} - 1$ et $var(T) = \frac{1-p}{p^2}$

Ecriture de la loi $\boldsymbol{G_{\mathbb{N}}(p)}$ sous forme ensembliste : : $\boldsymbol{\{(k, (1-p)^{k}p),\ k \in \mathbb{N}\}}$

BILAN : LOIS USUELLES SUR UNE REPETITION D'EXPERIENCES DE BERNOULLI

Réalisation d'un succès (Oui/Non) au cours d'une expérience : **loi de Bernoulli**
Nombre de succès au cours de n expériences : **loi Binomiale**
Nombre d'essais nécessaires pour l'obtention d'un premier succès : **loi Géométrique sur** $\mathbb{N}^*$
Nombre d'échecs précédent le premier succès : **loi Géométrique sur** $\mathbb{N}$

Autres lois (hors programme) …
*Nombre d'essais nécessaires à l'obtention de plusieurs (un nombre déterminé) succès : **loi de Pascal***
*Nombre d'echecs nécessaires à l'obtention de plusieurs (un nombre déterminé) succès : **loi binomiale négative***

LA LOI HYPERGEOMETRIQUE

TIRAGE SANS REMISE - REPETITION D'EXPERIENCES DE BERNOULLI **NON** INDEPENDANTES

Vidéo : Lois hypergéométrique

LOI HYPERGEOMETRIQUE : TIRAGE SANS REMISE DANS UNE POPULATION

Tirage sans remise de $\boldsymbol{n}$ individus dans une population P de $\boldsymbol{N}$ individus dans laquelle $\boldsymbol{a}$ individus possèdent le caractère S (proportion $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}/\boldsymbol{n}$).

Variable : soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'individus possédant le caractère S dans l'échantillon.

Loi de probabilité

- $X(\Omega) = \{max(0; n + a - N), \dots, min(a, n)\}$
- $p(X = k) = \frac{C_a^k C_{N-a}^{n-k}}{C_N^n} \quad k\epsilon\{max(0; n + a - N), \dots, min(a, n)\}$

Notation : X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et $= \frac{a}{N}$, notée H(N,n,p)
Remarque : la loi est la même que le tirage se fasse de façon successive ou simultanée
Moments : $E(X) = np$ et $Var(X) = np(1 - p)\frac{N-n}{N-1}$
(le coefficient $\frac{N-n}{N-1}$ est appelé coefficient d'exhaustivité)

APPROXIMATION (NON FACULTATIF) !

APPROXIMATION DE LA LOI HYPERGEOMETRIQUE PAR LA LOI BINOMIALE

Dans le cas de tirages d'échantillons de petite taille dans une population nombreuse ($n < 0{,}1N$), la loi hypergéométrique $H(N, n, p)$ peut être approchée par la loi binomiale $B(n, p)$.

EXERCICES LOIS USUELLES DISCRETES

EXERCICE III – CORRIGE P34

L'entreprise Tubex fabrique des tubes de verre. D'après le département Qualité, la proportion de tubes de verre défectueux se situe à 5%. On contrôle successivement les tubes de verres par un tirage avec remise.

1. Combien de tubes doit-on contrôler, en moyenne, pour observer un tube défectueux?
2. Quelle est la probabilité que sur 20 tubes contrôlés 3 soient défectueux?
3. Quelle est la probabilité que les 10 premiers tubes choisis soient bons?
4. Quelle est la probabilité d'avoir 10 tubes bons avant le premier défectueux?

EXERCICE IV – CORRIGE P34

Une entreprise fabrique des disquettes. Un lot de 100 disquettes fabriquées par cette entreprise comprend 4% de disquettes défectueuses.

1. Donnez une expérience aléatoire à partir de laquelle on peut définir une variable X de loi de Bernoulli.
2. Donnez une expérience aléatoire à partir de laquelle on peut définir définie une variable X de loi hypergéométrique.
3. Donnez une expérience aléatoire à partir de laquelle on peut définir définie une variable X de loi binomiale.
4. Donnez une expérience aléatoire à partir de laquelle on peut définir définie une variable X de loi géométrique (définir clairement X et les paramètres de la loi).

EXERCICE V – CORRIGE P35

On reprend la dernière question de l'EXERCICE II page 13 : si le tirage se faisait sans remise, la probabilité de l'événement* sera-t-elle supérieure ? inférieure ? ou égale à 0,65 ? Justifiez votre réponse.
***** *Il s'agit bien sûr de l'événement « la moitié ces clients est satisfaite du premier séjour »*

EXERCICE VI – CORRIGE P35

Une maladie affecte 2% des personnes d'une population. On choisit au hasard, sans remise, un échantillon de 20 personnes. Soit X le nombre de personnes malades de cet échantillon. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 10% de personnes malades dans l'échantillon ?

Vidéo : tirage dans une population, espérance.

Vidéo : test d'entrainement, lois usuelles

PARTIE III : PRIMITIVES ET INTEGRALES

L'objectif de cette partie du cours est de rappeler et de **justifier** certains résultats du calcul intégral, comme notamment l'utilisation de ce dernier pour les calculs d'aires sous des courbes. Il s'agit de bien comprendre les outils sans forcément acquérir une aisance calculatoire. Si vous souhaitez approfondir ce domaine, vous pouvez vous référer au cours ***Primitives et Intégrales.pdf*** disponible sur Elearn.

PRIMITIVES D'UNE FONCTION

On dit qu'une fonction **F est une primitive d'une fonction f** sur un intervalle I si :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

c'est-à-dire si la fonction f **est la dérivée de la fonction F** sur l'intervalle I.

EXEMPLES

- $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de la fonction $f(x) = x$ car :
$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2}(2x) = x = f(x)$$
- $F(x) = \frac{x^2}{2} + 8$ est aussi une primitive de la fonction $f(x) = x$ car :
$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 8\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' + 0 = x = f(x)$$
- $F(x) = e^x$ est une primitive de la fonction $f(x) = e^x$ car : $(e^x)' = e^x$
- $F(x) = e^{2x}$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2e^{2x}$ car : $(e^{2x})' = 2e^{2x}$
- $F(x) = e^{2x} + 8$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2e^{2x}$ car : $(e^{2x} + 8)' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$

IMPORTANT : pour la suite du cours, il faudra maîtriser les primitives des fonctions puissance et exponentielles, ainsi que les propriétés suivantes :

- → Si F est une primitive de f alors toute fonction de la forme $\boldsymbol{x \to F(x) + C}$, où C désigne une constante réelle quelconque est aussi une primitive de f.
- → **Primitives des fonctions puissance**

  Pour $\boldsymbol{n \neq 1}$ les primitives de la fonction puissance $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ s'écrivent sous la forme :

  $$\boldsymbol{F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

  Exemples particuliers :

  - Primitives de la fonction constante $f(x) = a \left(= a\boldsymbol{x^0}\right)$: $F(x) = ax + C$
  - Primitives de la fonction carrée $f(x) = x^2$: $F(x) = {x^3}/{3} + C$
  - Primitives de la fonction $f(x) = {1}/{x^2} = x^{-2}$:

  $$F(x) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -{1}/{x} + C$$

  Remarque : pour $n = 1$, les primitives de la fonction $f(x) = {1}/{x}$ sont de la forme : $F(x) = \ln x + C$ (hors programme du cours de proba)
- → **Primitives des fonctions exponentielles**

  Les primitives de fonctions exponentielles $\boldsymbol{f(x) = e^{ax+b}}$ s'écrivent sous la forme :

  $$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C}$$
- → **Propriétés des primitives**

  Notations préliminaires : G est une primitive de g : $G' = g$, F est une primitive de f : $F' = f$

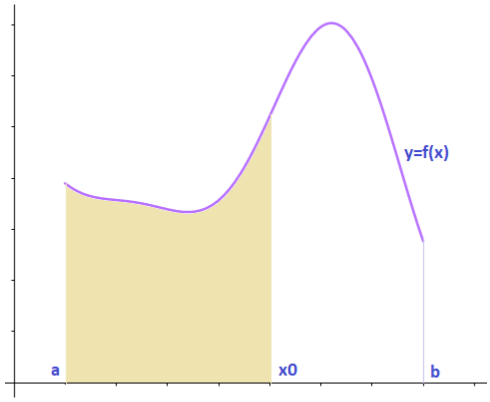
  - $\boldsymbol{af(x)}$ a pour primitives : $\boldsymbol{aF(x) + C}$
  - $\boldsymbol{f(x) + g(x)}$ a pour primitives : $\boldsymbol{F(x) + G(x) + C}$
  - $\boldsymbol{f(ax+b)}$ a pour primitives : $\boldsymbol{\frac{1}{a} F(ax+b) + C}$

PETIT EXERCICE – CORRIGE P35

Pour chaque fonction f définie ci-dessous, déterminer ses primitives F :

1. $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$
2. $f(x) = 3e^{-x}$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$
4. $f(x) = 3e^{2x} + 4$

PRIMITIVES D'UNE FONCTION ET AIRE SOUS LA COURBE



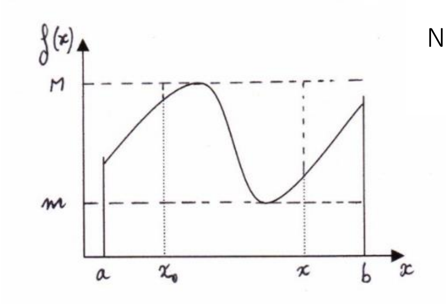
$\boldsymbol{f}$ étant une fonction continue et positive

On note $\boldsymbol{A(x_0)}$ l'aire délimitée par la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{f}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $\boldsymbol{x = a}$ et $\boldsymbol{x = x_0}$.

Résultat très important : la fonction A est une primitive de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle$]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$

*La démonstration qui suit, n'est pas à retenir mais à comprendre, des explications pourront être apportées pendant les séances, n'hésitez pas à poser des questions. **Si vous bloquez sur cette démonstration, vous pouvez avancer dans le cours en admettant le résultat (A primitive de f).***

Nous allons donc démontrer que la fonction $\boldsymbol{A}$ **est une primitive de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle**$]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[$**.**
Pour cela il faut revenir à la définition d'une primitive, en montrant que cette fonction A admet pour dérivée la fonction f, en tout point x_0 de l'intervalle $]a,b[$.



Nous devons donc démontrer que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$

Rappel : définition de la dérivée :
$$A'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0}$$

Notons respectivement m et M le minimum et le maximum de la fonction f entre x_0 et x.
Nous pouvons alors écrire : $\boldsymbol{m(x-x_0) \leq A(x)-A(x_0) \leq M(x-x_0)}$

L'aire du rectangle de hauteur $\boldsymbol{m}$ entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x_0}$ est $\boldsymbol{m(x-x_0)}$
L'aire du rectangle de hauteur $\boldsymbol{M}$ entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x_0}$ est $\boldsymbol{M(x-x_0)}$
L'aire sous la courbe entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x_0}$ est comprise entre les aires de ces rectangles et est égale à $\boldsymbol{A(x)-A(x_0)}$

d'où, en divisant chaque membre de l'inégalité par $\boldsymbol{x-x_0}$: $\boldsymbol{m \leq \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} \leq M}$

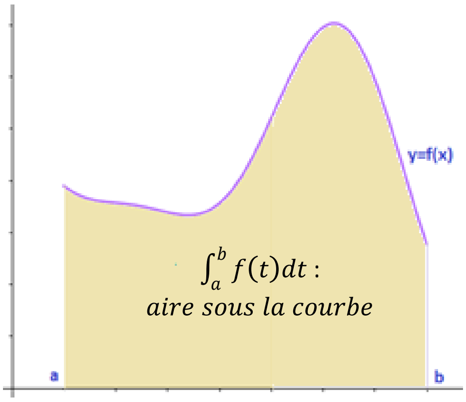
Quand $\boldsymbol{x \to x_0}$ alors $\boldsymbol{m \to f(x_0)}$ et $\boldsymbol{M \to f(x_0)}$. On peut donc en déduire que : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} = \boldsymbol{f(x_0)}$

Or, par définition de la dérivée : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} = \boldsymbol{A'(x_0)}$

On a donc $A'(x_0) = f(x_0)$: la fonction A est donc une primitive de f, plus précisément la primitive de f qui s'annule en a (qui prend la valeur 0 pour $x = a$)

L'INTEGRALE, UNE NOUVELLE NOTATION

POUR UNE FONCTION POSITIVE

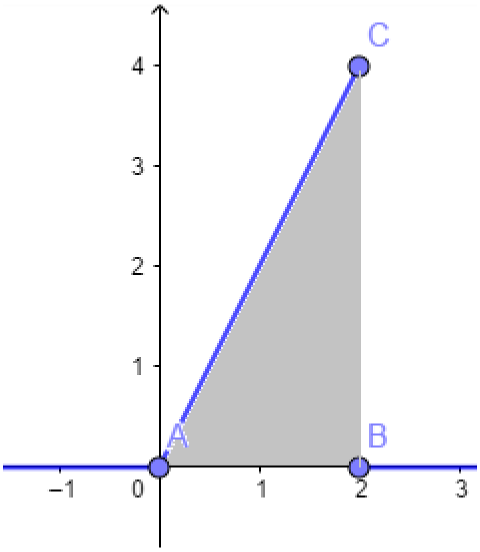


$\boldsymbol{f}$ étant une fonction continue et positive sur]a,b[
On appelle intégrale de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]a,b[$ l'aire* délimitée par la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{f}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $\boldsymbol{x = a}$ et $\boldsymbol{x = b}$.

$$Notation : \int_a^b f(t)dt$$

**Pour aller plus vite par la suite, on simplifiera en disant « l'aire sous la courbe entre a et b »*

EXEMPLE



On considère la fonction f, représentée ci-contre et définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ \ si \ \ x\epsilon[0,2] \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

L'aire sous la courbe entre 0 et 2 est 4, est l'aire du triangle ABC.

$$Aire\ de\ ABC = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

Nous devrions préciser 4 « Unités d'aires » : l'unité d'aire étant ici l'aire du carré (ou du rectangle) de base et de hauteur 1

D'après la définition précédente :

$$\int_0^2 f(t)dt = 4$$

Remarque : dans cet exemple la fonction f est nulle en dehors de l'intervalle [0,2]. L'aire sous la courbe entre 0 et 2 est la même que l'aire sous la courbe entre 1 et 3 ou entre -5 et 5…

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_1^3 f(t)dt = \int_{-5}^5 f(t)dt = \cdots = 4$$

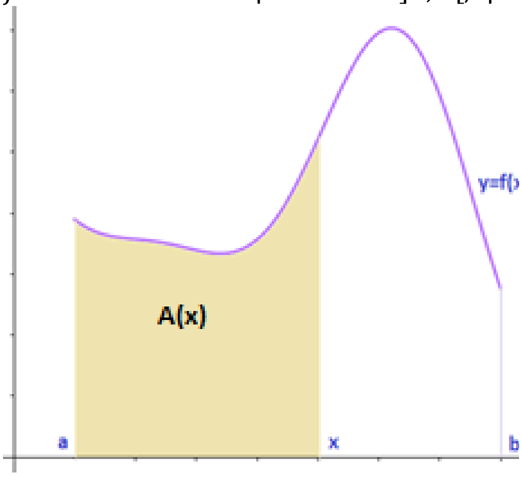
$$Nous\ verrons\ dans\ la\ suite\ du\ cours\ la\ notions\ d'intégrale\ généralisée : \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 4$$

CALCUL D'UNE INTEGRALE

Dans l'exemple précédent l'aire sous la courbe, $\int_0^2 f(t)dt$, est l'aire d'un triangle.
Comment fait-on pour calculer une aire sous **une courbe quelconque** ?
Nous allons utiliser le résultat précédent, montrant que l'aire sous la courbe d'équation $y = f(x)$ est **une primitive de f.**

LIEN ENTRE INTEGRALE ET PRIMITIVE

f étant une fonction positive sur $]a, b[$, que savons-nous $A(x)$ l'aire sous la courbe entre a et x ?



- D'après la définition précédente de l'intégrale, $\int_a^b f(t)dt$ est aire sous la courbe entre a et b, donc

$$\boldsymbol{A(x) = \int_a^x f(t)dt}$$

- $A(a)$ s'annule en a (aire entre a et a) :

$$A(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

- $A(x)$ est une primitive de f

Bilan : $\boldsymbol{A(x) = \int_a^x f(t)dt}$ est **LA** primitive de f qui s'annule en a

Si on considère F une **autre** primitive de f, nous savons que :

$$A(x) = F(x) + k \quad avec\ k\epsilon\mathbb{R}$$

On a alors : $A(x) - A(a) = (F(x) + k) - (F(a) + k) = F(x) + k - F(a) - k = F(x) - F(a)$

$$\boldsymbol{A(x) - A(a) = F(x) - F(a)}$$

Or $A(a) = 0$ donc :

$\boldsymbol{A(x)}$**,LA** primitive de f qui s'annule en a **s'exprime sous la forme**

$$\boldsymbol{A(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)}$$

avec $\boldsymbol{F}$ primitive quelconque de $\boldsymbol{f}$

Donc $\int_a^x \boldsymbol{f(t)dt = F(x) - F(a)}$ **et, de façon générale :**

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

On note habituellement la différence $\boldsymbol{F(b) - F(a)}$ sous la forme $\boldsymbol{[F(t)]_a^b}$ comme étape intermédiaire dans le calcul :

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

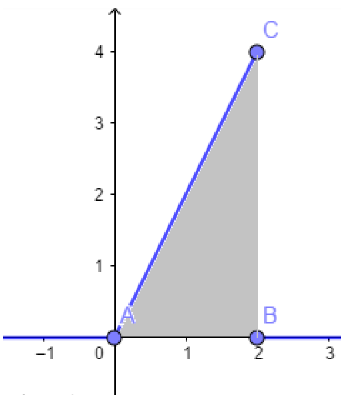
EXEMPLE 1

Revenons à la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ \ si \ \ x\epsilon[0,2] \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

La fonction $F(x) = x^2$ est **une** primitive de f sur l'intervalle $[0,2]$

$(x^2 + 1, x^2 - 85, x^2 + 79 \ sont\ aussi\ des\ primitives\ de\ f\ sur\ [0,2])$



D'après le résultat précédent :

$$\boldsymbol{\int_0^2 f(t)dt = [F(t)]_0^2 = \left[t^2\right]_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4}$$

*Les résultats que nous venons d'obtenir grâce à une interprétation de l'intégrale comme une aire sous la courbe d'une **fonction positive** se généralisent à une fonction quelconque. Dans le cours de Proba, nous ne manipulerons que des fonctions positives*

RECAPITULATIF

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ et F une primitive de f :

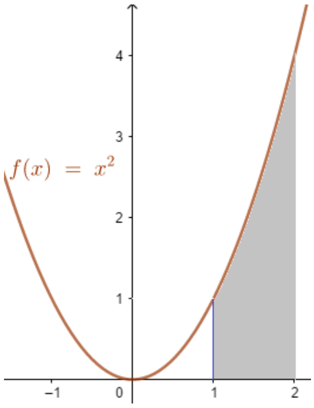
$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{la fonction } x \to \int_a^x f(t)dt \text{ est LA primitive de f qui s'annule en a}$$

Remarque : dans la notation, $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable « muette », la valeur de l'intégrale ne dépendant pas de t.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

EXEMPLE 2



$\boldsymbol{f(x) = x^2}$

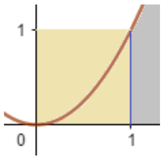
On veut calculer l'aire sous la courbe entre 1 et 2 c'est-à-dire $\int_1^2 \boldsymbol{f(t)dt}$

$$\int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 t^2 dt$$

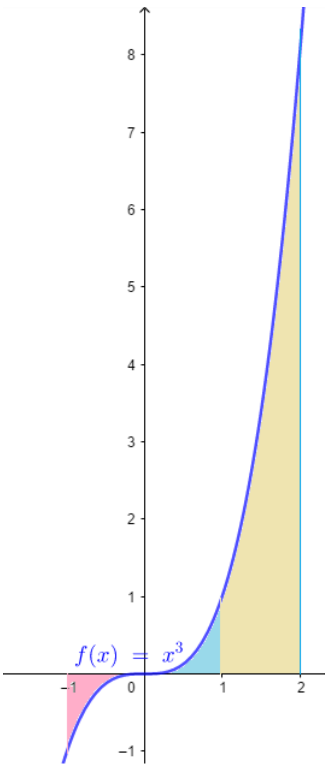
La fonction $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de x^2

$$\int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

L'aire sous la courbe est égale à $\frac{7}{3} = 2{,}33$ unités d'aires



EXEMPLE 3



$\boldsymbol{f(x) = x^3}$

1. Calculer l'aire sous la courbe entre 1 et 2, $\int_1^2 \boldsymbol{f(t)dt}$

La fonction $F(x) = \frac{x^4}{4}$ est une primitive de x^3

$$\int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$$

2. Calculer l'aire sous la courbe entre 0 et 1, $\int_0^1 \boldsymbol{f(t)dt}$

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

3. Calculer l'aire sous la courbe entre 0 et 2. Que remarque-t-on ?

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{16}{4}$$

$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt$ **:** Cette propriété est appelée relation de Chasles

4. Calculer $\int_{-1}^0 f(t)dt$. Que remarque-t-on ?

$\int_{-1}^0 f(t)dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^0 = \frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = -\frac{1}{4}$

Pour des questions de parités l'aire coloriée en rose est égale à l'aire en bleue. L'intégrale donne l'opposé de l'aire car ici la fonction est négative (aire au-dessus de la courbe)

PROPRIETES DU CALCUL INTEGRAL

On suppose que f et g sont des fonctions continues sur $]a, b[$

RELATION DE CHASLES

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \qquad c \in]a, b[$$

LINEARITE

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad k\epsilon\mathbb{R}$$

POSITIVITE L'EST AUSSI :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

ORDRE

Pour tout réel x de $[a; b]$ si $g(x) \leq f(x)$ alors $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

AUTRES PROPRIETES

SI f EST POSITIVE SUR $]a, b[$ $(a < b)$ ALORS L'INTEGRALE DE f

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b 0\ \mathrm{d}x = 0$$

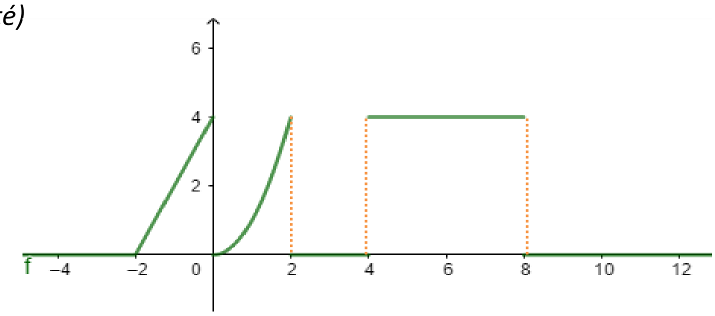
REMARQUE : CONTINUITE, INTEGRABILITE ET EXISTENCE D'UNE PRIMITIVE

Nous avons donné dans ce cours les définitions de la primitive et de l'intégrale d'une fonction **continue**. Toute fonction continue n'est pas forcément intégrable et n'admet pas forcément de primitive et une fonction discontinue peut-être intégrable et admettre une primitive…
Quelques exemples :

UNE FONCTION NON CONTINUE PEUT ETRE INTEGRABLE

- Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 \ si\ x \in [-2,0] \\ x^2 si\ x \in [0,2] \\ 4\ si\ x \in [4,8] \\ 0\ sinon \end{cases}$

  f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais elle est continue sur $\mathbb{R} - \{-2,0,4,8\}$ *(on dit aussi que f présente 4 points de discontinuité)*



La fonction f n'est pas continue sur [-2,8] (par exemple), mais on peut calculer sa primitive et l'aire sous la courbe en l'intégrant « par morceaux » :

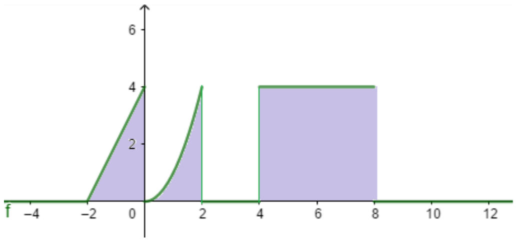
Une primitive de $\boldsymbol{f}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 4x \ \text{ si } x \in [-2,0] \\ \dfrac{x^3}{3} \text{ si } x \in [0,2] \\ 4x \text{ si } x \in [4,8] \\ k \text{ sinon} \end{cases}$$

On écrit habituellement k pour la primitive d'une constante, mais ici, on pourrait tout à fait prendre 0. Pour intégrer, nous n'avons besoin que d'une primitive particulière de f

$$\int_{-2}^{8} f(t)dt = \int_{-2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{8} f(t)dt$$

$$= \int_{-2}^{0} (2t+4)dt + \int_{0}^{2} t^2dt + \int_{2}^{4} 0dt + \int_{4}^{8} 4dt$$

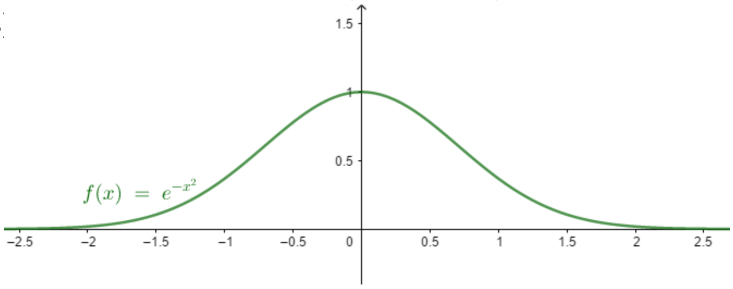


$$= [t^2 + 4t]_{-2}^{0} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + [k]_2^4 + [4t]_4^8 = 0 - (-2)^2 - 4(-2) + \frac{2^3}{3} - 0 + k - k + 4 \times 8 - 4 \times 4 = \frac{68}{3}$$

Bilan : une fonction discontinue peut admettre une primitive et être intégrable

Une fonction integrable peut ne pas admettre de primitive

Il existe des fonctions continues qui sont intégrables (il est possible de calculer l'aire sous la courbe) mais qui n'admettent pas de primitive. Une des plus connue est la fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{e^{-x^2}}$ **qui n'admet pas de primitive** mais dont l'aire sous la courbe peut être cependant être calculée (en utilisant d'autres méthodes



Il y a un lien étroit entre cette fonction et la densité de la loi normale (Prochain niveau !).

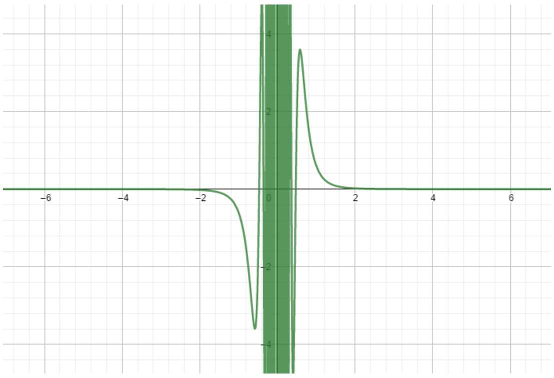
On peut montrer, même si la fonction $x \to e^{-x^2}$ n'admet pas de primitive, que l'aire sous la courbe est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (*Les plus intéressés pourront chercher « intégrale de Gauss » sur Internet après avoir étudié le chapitre sur les intégrales généralisées…)*

Une fonction admettant une primitive n'est pas toujours integrable (mais c'est rare !)

Il existe aussi des fonctions qui admette une primitive mais qu'on ne peut pas intégrer….

ex : $f(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$

Cette fonction admet une primitive $F(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$ mais n'est pas intégrable (notamment au voisinage de 0). Voir Geogebra pour mieux visualiser cette fonction.



Pas d'inquiétude… dans la suite du cours, nous ne traiterons que des fonctions continues ou discontinues en un nombre fini de points, admettant des primitives et intégrables sur leur domaine de définition…

Petits exercices sur le calcul integral – corrige p36

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)dx.$
2. $\int_0^1 e^{-3x}\, dx$
3. $\int_{-1}^1 |t| dt$

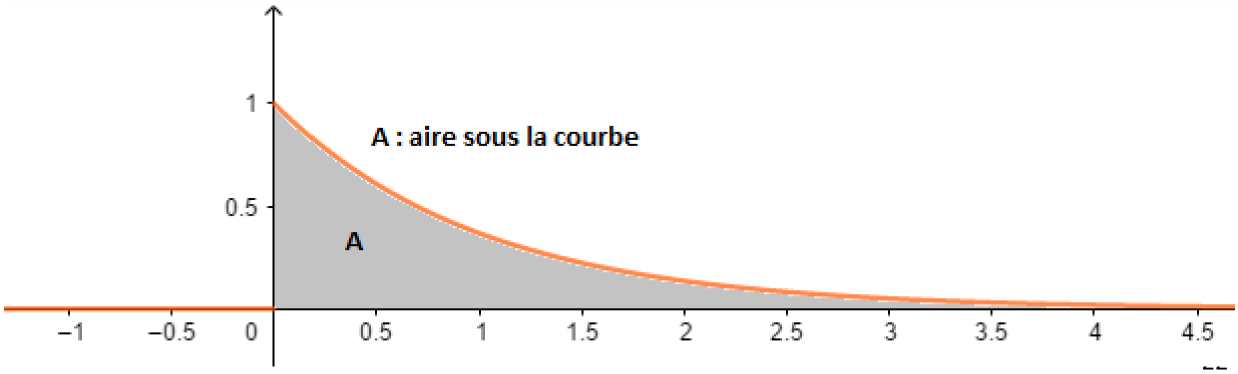
Integrales generalisees

La notion d'intégrale généralisée permet d'étendre la notion d'intégrale au cas suivants :

- **Lorsque l'intervalle d'intégration a au moins une borne infinie**
- Lorsque la fonction admet une limite infinie sur au moins l'une des deux bornes d'intégration (nous n'aborderons pas ce point qui ne nous intéresse par pour le calcul de probabilités)

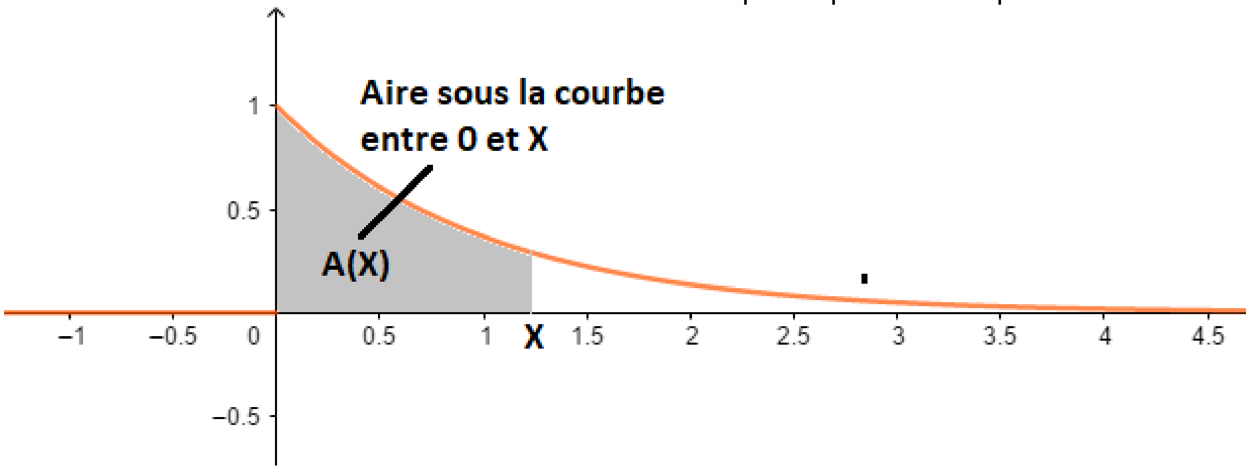
Exemple

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} 0\ si\ x < 0 \\ e^{-x}\ sinon \end{cases}$



On s'intéresse à **A**, l'aire sous la courbe : l'axe des abscisses étant une asymptote horizontale, cette aire « s'étend » sur une zone infinie (indéfiniment vers la droite) puisque lorsque $x > 0$, $f(x)$ est toujours strictement positive.
Nous allons montrer que malgré cette extension infinie, **l'aire A est finie**
(Cela peut paraître paradoxal pour certains… de même, une somme d'un nombre infini de termes peut être finie)

Nous savons calculer l'aire sous la courbe entre 0 et n'importe quelle valeur positive X :



$$A(X) = \int_0^X f(x)dx = \int_0^X e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^X = 1 - e^{-X}$$

Intuitivement, pour calculer A, l'aire sous la courbe, nous devons prendre X le plus grand possible…

$$A = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X f(x)dx = \lim_{X \to +\infty} (1 - e^{-X}) = 1$$

Conclusion : l'aire sous la courbe est égale à 1, cette aire se note aussi

$$\boldsymbol{A = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X f(x)dx} \quad \textbf{(Intégrale généralisée)}$$

On peut définir de même une aire à droite « à l'infini » :

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{X \to -\infty} \int_X^a f(x)dx}$$

Ou, tout simplement une aire sous la courbe :

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx}$$

PETITS EXERCICES SUR LES INTEGRALES GENERALISEES – CORRIGE P36

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ ; \ g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \ ; \ \int_1^{+\infty} g(x)dx$$

PARTIE IV : VARIABLES CONTINUES

RAPPELS : VARIABLE **STATISTIQUE** QUANTITATIVE DISCRETE ET CONTINUE

En statistique, une variable est quantitative s'il est possible de faire des calculs sur cette variable et si ceux-ci ont du sens (par exemple, calcul de la moyenne).
Si la variable prend un grand nombre de valeurs, il devient plus intéressant de regrouper ces valeurs dans des classes, on considèrera la variable comme **continue**, sinon (petit nombre de valeurs), on considère la variable comme **discrète**.

GRAPHIQUEMENT

Les variables **discrètes** sont représentées par des **diagrammes en barres**, la **hauteur** de chaque barre étant proportionnelle à l'effectif de la valeur correspondante.

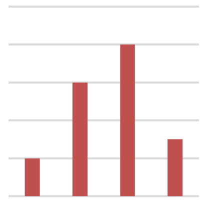
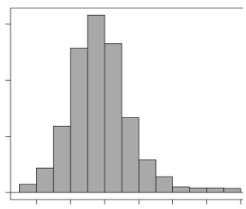


DIAGRAMME EN BARRES

Les variables statistiques **continues** sont représentées par des **histogrammes** constitués de rectangles dont les **aires** sont proportionnelles aux effectifs (ou aux fréquences).



HISTOGRAMME

EXEMPLE

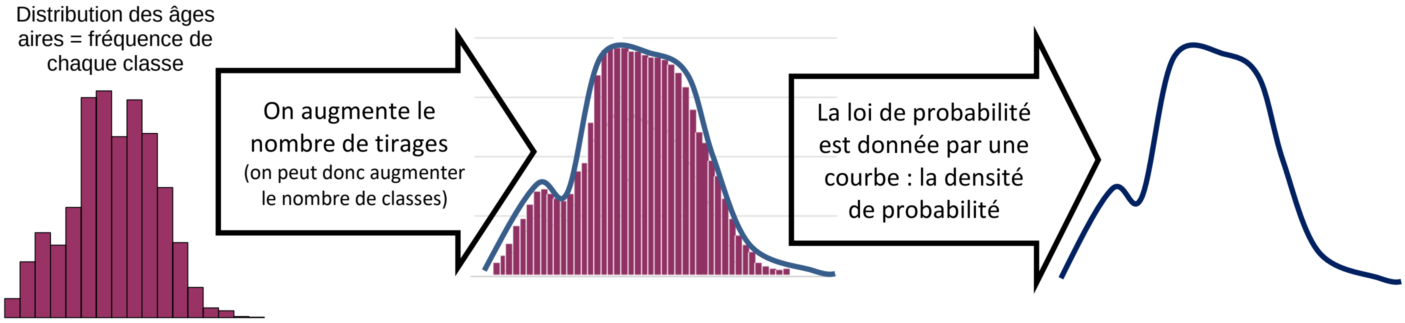
On considère la variable : âge d'un individu d'une population :

- S'il s'agit une population d'étudiants d'IUT, la variable peut être considérée comme **discrète** : l'ensemble des valeurs étant par exemple limité à $\{17,18,19,20,21,24,30\}$.
- Si le tirage se fait dans la population française, la variable peut être considérée comme **continue** : l'ensemble des valeurs étant $\{0,1,2,3 \dots 114\}$
  Il y a un grand nombre de valeurs, en général on ne s'intéressera pas à des questions du type : *quelle est la proportion d'individus de 30 ans ?* mais plutôt : *quelle est la proportion d'individus de moins de 30 ans ? entre 30 et 35 ans ?*

VARIABLES CONTINUES EN PROBABILITE

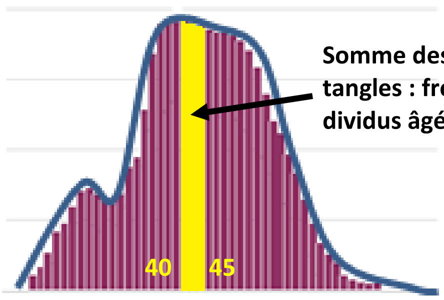
En probabilité, une variable est considérée **continue** si l'ensemble de ses valeurs est **un intervalle** ou une réunion d'intervalles. Ainsi l'âge d'un individu X choisi dans la population française aura pour ensemble de valeurs $X(\Omega) = [0,115]$: on considère que les âges $0,1,2,3 \dots 114$ sont des arrondis de valeurs de l'intervalle $[0,115]$.

Toutes les valeurs de l'intervalle étant possibles, en augmentant le nombre de tirages dans la population, on pourra prendre des classes d'amplitudes plus petites : 6 mois, 1 mois, 1 semaine, 1 jour, 1h… On peut imaginer réduire l'amplitude des classes à des valeurs infinitésimales… il en restera une courbe, représentant la loi de la variable âge et appelée densité de probabilité.

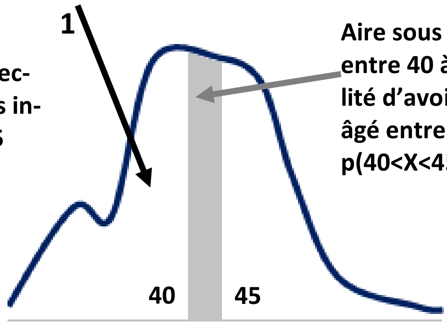


REMARQUES

- Les aires des rectangles peuvent représenter l'effectif, le pourcentage ou la proportion (nombre entre 0 et 1) de chaque classe.
- Si l'aire des rectangles représente la proportion, la somme totale des aires des rectangles est égale à 1, cela signifie aussi que l'aire sous la courbe est égale à 1
- ***Rappel : Loi des grands nombres** : la probabilité est la fréquence qu'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'expérience*.
  Si on augmente le nombre de rectangles tout en diminuant leur amplitude, la somme des aires des rectangles correspondant, par exemple, à des âges compris entre 40 et 45 ans va tendre vers l'aire sous la courbe entre 40 et 45, c'est-à-**dire la probabilité d'avoir un individu âgé entre 40 et 45 ans**.



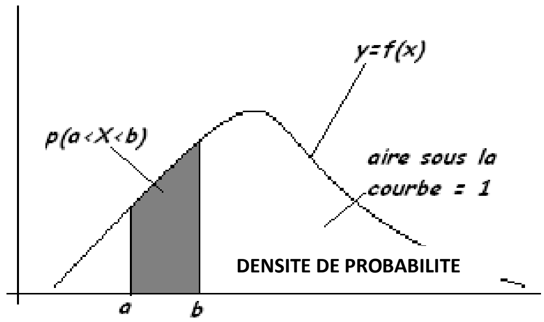
Somme des aires des rectangles : fréquence des individus âgés de 40 à 45



Aire sous la courbe entre 40 à 45 : probabilité d'avoir un individu âgé entre 40 et 45 ans, p(40<X<45)

BILAN : VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE

Une variable aléatoire X est **continue** si l'ensemble des valeurs prises par X est **un intervalle** ou une **réunion d'intervalles**. La loi de X est alors définie par une fonction appelée **densité** de probabilité. Sur le graphe de la densité (toujours positive), la probabilité se représente par une aire sous la courbe.
L'aire totale sous la courbe est donc égale à 1.



f doit être positive pour que l'on puisse parler d'aire sous la courbe

f ne doit pas être « trop » discontinue pour que l'on puisse calculer l'aire sous la courbe

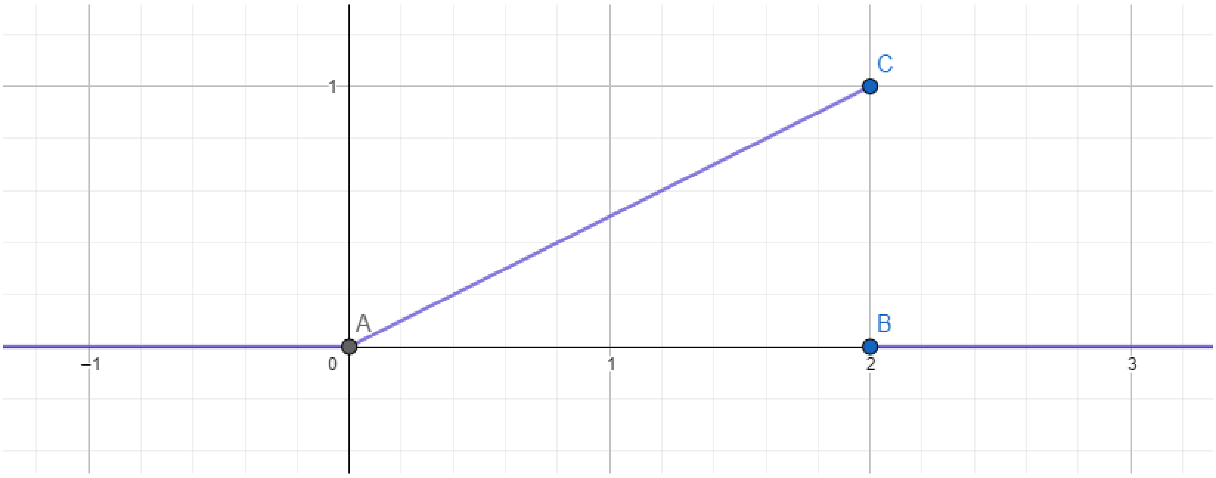
Densité de probabilité
Une fonction f est une densité de probabilité si :

- f est positive sur IR
- f est continue sur IR sauf éventuellement en un nombre fini de points
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

L'aire sous la courbe est égale à 1

EXEMPLE

Considérons la fonction : $f(x) = \begin{cases} x/2 & si \quad x\epsilon[0,2] \\ 0 \, sinon \end{cases}$



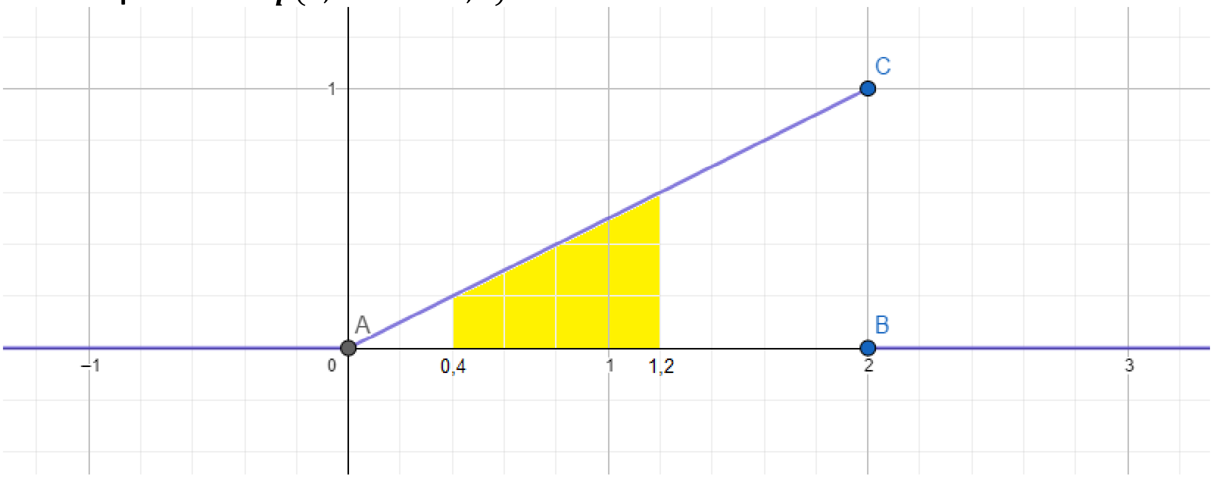
***f* est bien une densité de probabilité :**

- f est positive
- f est continue sur $\mathbb{R} - \{2\}$
- L'aire sous la courbe est égal à 1 :

  Raisonnement géométrique : $Aire(ABC) = \dfrac{AB \times BC}{2} = 1$

  Calcul intégral : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^2 \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{4} = 1$

Calcul de probabilité : $\boldsymbol{p(0,4 < X < 1,2)}$?



$$p(0{,}4 < X < 1{,}2) = \int_{0,4}^{1,2} f(t)dt = \int_{0,4}^{1,2} \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_{0,4}^{1,2} = \frac{1{,}2^2}{4} - \frac{0{,}4^2}{4} = \frac{1{,}44 - 0{,}16}{4} = \frac{1{,}28}{4} = 0{,}32$$

Fonction de repartition

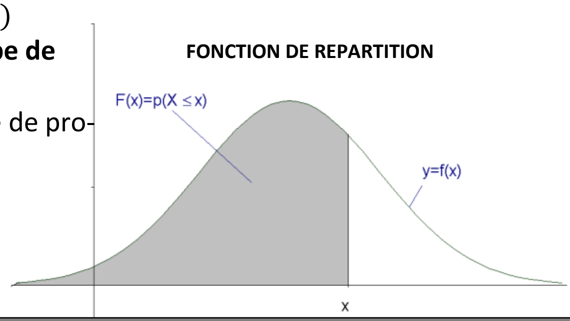
La fonction de répartition d'une variable aléatoire est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F(x) = p(X \leq x)}$$

Si la variable est continue, $\boldsymbol{F(x)}$ **représente l'aire sous la courbe de densité à gauche de $\boldsymbol{x}$.**

La fonction de répartition F d'une variable continue de densité de probabilité f s'exprime donc sous la forme :

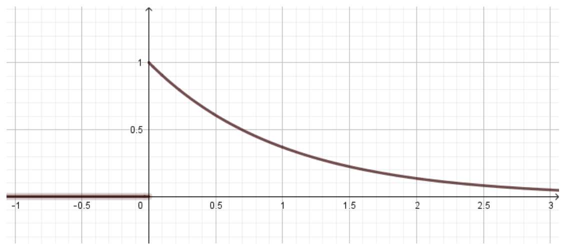
$$\boldsymbol{F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$



IMPORTANT : F(x) est l'aire sous la courbe à gauche de x

Exemple

Considérons la fonction : $f(x) = \begin{cases} e^{-x} \ si \ x \geq 0 \\ 0 \ \ sinon \end{cases}$



1. f est bien une densité de probabilité car : f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$et

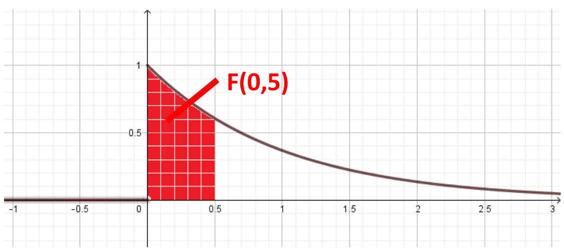
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} e^{-t}dt$$

$$\int_{0}^{x} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}$$

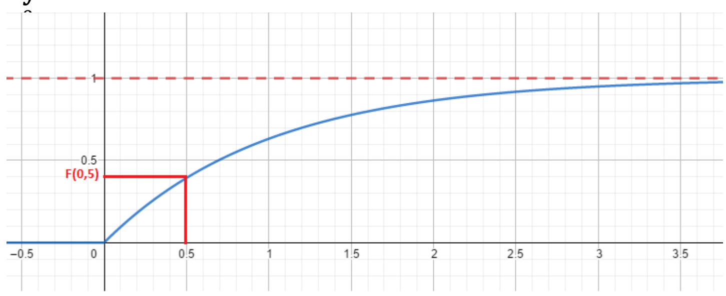
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} (1 - e^{-x}) = 1 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(t)dt = 1}$$

2. La fonction de répartition de F a été déjà été calculée dans les calculs précédents :

$$F(x) = \int_{0}^{x} e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$$



F représentation de F(0,5) comme aire sur le graphe de la densité



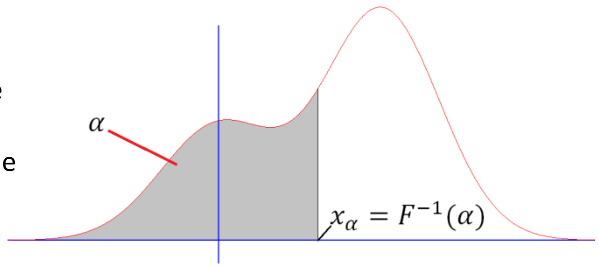
Représentation de F(0,5) sur le graphe de la fonction de répartition

IMPORTANT : on utilise plus souvent la densité pour représenter, **par des aires**, des probabilités ou des valeurs de $\boldsymbol{F}$. La représentation graphique de la fonction de répartition $\boldsymbol{F}$ est moins utilisée, elle permet cependant d'illustrer trois propriétés **évidentes** de cette fonction :

- F est croissante
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

FRACTILES

On s'en tiendra à une définition dans le cas d'une variable continue.
Soit X une variable continue de densité f et de fonction de répartition F. Le réel $\boldsymbol{x_\alpha = F^{-1}(\alpha)}$ est appelé **fractile d'ordre α de la loi de X.**
Il est aussi défini par la relation **:** $\boldsymbol{p(X \leq x_\alpha) = \alpha}$



FRACTILE

IMPORTANT : x_α est la valeur sur l'axe des abscisses telle que l'aire à gauche de cette valeur soit égale à α

REMARQUE

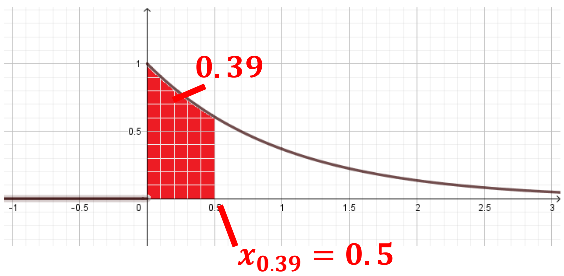
La fonction de répartition est bijective de $\mathbb{R}$ *dans* $]0,1[$. F^{-1} *est la réciproque de cette fonction.*

EXEMPLE

Reprenons la densité de probabilité : $f(x) = \begin{cases} e^{-x} \; si \; x \geq 0 \\ 0 \;\; sinon \end{cases}$

On suppose que f est la densité de probabilité d'une variable X. F est sa fonction de répartition.

$$\boldsymbol{F(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow F(0.5) = 0.39 \Rightarrow 0.5 = F^{-1}(0.39) = x_{0.39}}$$



0.5 est le fractile d'ordre 0.39 de X

ESPERANCE

Pour une variable continue l'espérance se calcule de la façon suivante : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$

VARIANCE ET ECART-TYPE

Ils se calculent, pour une variable continue de la façon suivante : $varX = \int_{-\infty}^{+\infty}(t - E(X))^2 f(t)dt$

REMARQUE

Espérance et variance s'interprètent comme dans le cas discret : il s'agit de la moyenne (resp. la variance) que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'expérience aléatoire

EXERCICES LOIS CONTINUES

EXERCICE I – CORRIGE P37

Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & si\ x \in [1,2] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Représenter la densité f.
2. En utilisant un raisonnement graphique *(faire un dessin et expliquer)* et sans calcul d'intégrale :
    a. Montrer que f est une densité de probabilité
    b. Calculer et représenter graphiquement $F(1,5)$
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Calculer $E(X)$

EXERCICE II – CORRIGE P38

Soit X une variable aléatoire continue de densité : $f(x) = \begin{cases} x\ si\ x \in [0,1[\\ 2 - x\ si\ x \in [1,2[\\ 0\ sinon \end{cases}$

1. Représenter f graphiquement.
2. Montrer que f est une densité de probabilité :
    a. En utilisant un raisonnement graphique
    b. Par un calcul d'intégrale
3. Déterminer sans calcul, par un raisonnement graphique (faire un dessin explicite pour justifier les résultats) :
    a. $F(1,5)$
    b. Le fractile d'ordre $0,125$ de X.
4. Calculer l'espérance de X

EXERCICE III – CORRIGE P39

Soit X une variable aléatoire de densité : $f(x) = \begin{cases} k & si\ x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$

Calculer k.

On pose désormais $a = 1$ et $b = 5$. Représenter f.

1. Calculer et représenter le fractile d'ordre $0,5$ de la loi de X.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition de X.
3. Calculer et représenter : $p(1 < X < 2)$, $p(3 < X < 4)$; Interprétation.

PAUSE VIDEO

Exercice récapitulatif
Loi continue

EXERCICE IV – CORRIGE P 39

Soit X une variable aléatoire de densité : $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & si\, x \geq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. Calculer k.
2. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$
3. Calculer et représenter : $p(X < 2), p(3 < X < 4)$

EXERCICE V : FACULTATIF - LOI NORMALE CENTREE REDUITE – CORRIGE P40

Une loi normale centrée réduite a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
On ne connait pas de primitive de la fonction f mais il est quand même possible de montrer que l'aire sous la courbe est égale à 1.
Soit X une variable de densité f :

1. Une variable centrée, est une variable d'espérance nulle : montrer X est centrée
2. Une variable réduite et une variable de variance égale à 1 : montrer que X est réduite.

Test d'entrainement
Loi continue

C'est le moment de valider le niveau 2.

Avant, il est fortement conseillé de revoir :

- ***Les conditions d'application des lois usuelles (Bernoulli, binomiale, géométriques, hyper-géométrique). Sans nécessairement retenir les formules.***
  Attention à l'usage du vocabulaire : savoir définir une expérience aléatoire, une variable aléatoire, un événement.
- ***Les lois continues (densité, fonction de répartition, fractiles) et notamment la vidéo sur l'exercice récapitulatif***

CORRIGES EXERCICES

PARTIE I – DENOMBREMENTS

PRINCIPE DES CHOIX SUCCESSIFS APPLICATION –P2

- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 3 caractères** peut-on écrire ?
- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 3 caractères distincts** peut-on écrire ?
- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 5 caractères** peut-on écrire ?
- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 5 caractères distincts** peut-on écrire ?

PRINCIPE DES CHOIX SUCCESSIFS APPLICATION

- Combien de mots binaires de 5 caractères peut-on écrire ?

Exemple : 10011

→ 2 choix pour le premier caractère

→ 2 choix pour le deuxième

→ …

→ 2 choix pour le cinquième

Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$

- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de mots de 3 caractères peut-on écrire ?

Exemple : AEA

→ 5 choix pour le premier caractère

→ 5 choix pour le deuxième

→ 5 choix pour le troisième

Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $\mathbf{5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125}$

- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de mots de 3 caractères distincts peut-on écrire ?

Exemple : AEB

→ 5 choix pour le premier caractère

→ 4 choix pour le deuxième

→ 3 choix pour le troisième

Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $\mathbf{5 \times 4 \times 3 = 120}$

Remarque : $5 \times 4 \times 3 = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{5!}{2!}$

- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de mots de 5 caractères peut-on écrire ?

Exemple : $AEABB$

→ 5 choix pour le premier caractère

→ 5 choix pour le deuxième

→ …

→ 5 choix pour le cinquième

Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $\mathbf{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5}$

- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de mots de 5 caractères distincts peut-on écrire ?

Exemple : $AECBD$

→ 5 choix pour le premier caractère

→ 4 choix pour le deuxième

→ …

Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $\mathbf{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5}!$

PETIT EXERCICE RECAPITULATIF (P6)

En utilisant les chiffres 1,…, 9 :

1. Combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres ?
   Un nombre de 5 chiffres peut être représenté par une 5-liste de chiffres de {1,…,9} Il y a donc 9^5 nombres possibles.

2. Combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres distincts.
   Un nombre de 5 chiffres distincts peut être représenté par un arrangement de chiffres de {1,…,9} Il y a donc A_9^5 nombres possibles.

3. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres contenant 3 fois le chiffre 1 ?
   → **Choix de la 2-liste pour les 2 autres chiffres : 8^2 choix possibles**
   → **Choix des 2 emplacements (parmi 5) pour ces deux chiffres : C_5^2 possibilités**
   $\Rightarrow$ **$C_5^2 8^2$ nombres possibles**

4. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres contenant exactement trois chiffres identiques ?
   → **Choix du chiffre répété trois fois : 9 choix possibles**
   → **Choix de la 2-liste pour les 2 autres chiffres : 8^2 choix possibles**
   → **Choix des 2 emplacements (parmi 5) pour ces deux chiffres : C_5^2 possibilités**
   $\Rightarrow$ **$C_5^2 \times 8^2 \times 9$ nombres possibles**

5. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?
   → **Choix de 5 chiffres distincts : C_9^5 choix possibles**
   → **Nombre de façons de les ordonner par ordre croissant : 1 seule !**
   $\Rightarrow$ **C_9^5 nombres possibles**

6. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, tels que le premier chiffre est le plus petit et le dernier le plus grand ?
   → **Choix de 5 chiffres distincts : C_9^5 choix possibles**
   → **Le plus petit et le plus grand sont placés en premier et dernier**
   → **Il reste à placer les trois autres chiffres sur les emplacements 2,3 et 4 : $3!$ possibilités**
   $\Rightarrow$ **$C_5^9 \times 3!$ nombres possibles**

ESPERANCE ET VARIANCE D'UNE LOI DE BERNOULLI - P7

$$X \sim B(p) \Longrightarrow \quad loi\ de\ X : \ \{(1,p),(0,1-p)\}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

$$var(X) = \sum_{i=1}^{2} (x_i - E(X))^2 p_i = (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times (1-p)$$

on factorise par $p(1-p)$: $var(X) = p(1-p)(1-p+p) = p(1-p)$

PARTIE II – LOIS USUELLES

EXERCICE I – P10

Lors d'élections municipales dans le département des Landes, les résultats suivants ont été obtenus :

- 331 maires ont été élus,
- 15% des maires sont des femmes,

A. On choisit un maire parmi les 331.
   a. Introduire une variable de Bernoulli associée à cette expérience.
   Y : variable de Bernoulli associée au sexe du maire choisi (Y=1 si le maire est une femme)
   b. Quelle est sa loi précisément ?
   $\boldsymbol{Y \sim B(0,15)}$
   Loi de Y : $\{(\mathbf{1}\,;\mathbf{0,15}),(\mathbf{0}\,;\mathbf{0,85})\}$

B. On choisit 20 maires par un tirage avec remise dans la population des 331 maires.
   a. Quelles variables, de lois usuelles, peut-on introduire ?
   On peut introduire des variables de Bernoulli : X_i représente la variable de Bernoulli associée au $i^{ème}$ maire choisi : $X_i = 1$ si le maire est une femme et $X_i = 0$ sinon, $X_i \sim B(0,15)$
   On peut aussi introduire une variable binomiale :
   N le nombre de femme dans l'échantillon :

$$N \sim B(20, 0,15) \;\; et \;\; N = \sum_{i=1}^{20} X_i$$

   b. Que peut-on dire du nombre de femmes dans l'échantillon obtenu ?

$$N \sim B(20, 0,15) \;\; et \;\; N = \sum_{i=1}^{20} X_i$$

   c. Que peut-on dire de la proportion de femmes dans l'échantillon obtenu ?
   La proportion de femmes dans l'échantillon obtenu est la variable aléatoire $P = \frac{N}{20}$
   On connait donc la loi de P :
   - $N(\Omega) = \{0;1;\dots;20\}$ **donc** $P(\Omega) = \left\{\frac{0}{20};\frac{1}{20};\dots;\frac{20}{20}\right\} = \{0;0,05;0,1;\dots;1\}$
   - $p\left(P = \frac{k}{20}\right) = p(N = k) = C_{20}^{k} 0,15^{k} 0,85^{10-k}$

   d. 15% des maires de l'échantillon sont des femmes. Vrai ou faux ?
   Faux : la proportion de femmes dans l'échantillon varie selon l'échantillon (c'est une variable aléatoire)

EXERCICE II – P10

On s'intéresse à la fidélité des clients d'une agence de voyage.
Une enquête a été menée auprès des 6542 clients qui ont effectués leur premier séjour avec cette agence en 2010.
Une première étude a montré que 70% de ces clients étaient satisfaits ou très satisfaits de leur premier séjour.

1. **On choisit un client au hasard parmi les 6542**.Définir, sur cette expérience, une variable aléatoire de loi de Bernoulli. Préciser sa loi et son espérance

   On définit la variable Y de Bernoulli suivante :

$$Y = \begin{cases} \textbf{1 si le client choisi est satisfait de son premier séjour} \\ \textbf{0 sinon} \end{cases}$$

$$Y \sim B(0,7) \;\; et \;\; E(Y) = 0,7$$

Loi de Y : $\{(\mathbf{1}\,;\mathbf{0,7}),(\mathbf{0}\,;\mathbf{0,3})\}$

2. **On choisit un échantillon de 10 clients au hasard par un tirage sans remise**
   a. On s'intéresse au nombre de personnes, dans l'échantillon, satisfaites du premier séjour. Que peut-on dire de ce nombre ? (Constante ? variable ? loi ?)
   Le nombre de clients satisfaits dans l'échantillon est une variable aléatoire N.
   Le tirage se faisant avec remise, N$\sim \boldsymbol{B(10;0,7)}$
   b. Il y a une probabilité 0,65 qu'au moins la moitié des clients de l'échantillon soit satisfaite du premier séjour.
      - Expliquer comment a été calculée cette probabilité :

$$\boldsymbol{0,65 = P(N \geq 5) = p(N=5) + \dots + p(N=10)}$$

$$\boldsymbol{0,65 = C_{10}^{5} 0,7^{5} 0,3^{5} + C_{10}^{6} 0,7^{6} 0,3^{4} + \dots + C_{10}^{10} 0,7^{10} 0,3^{0}}$$

      - Interpréter cette probabilité en pourcentage (on évitera « 65% ***de chance*** », on sera plus précis que « dans 65% ***des cas*** »…)
      Dans 65% des échantillons de 10 personnes, la moitié des clients est satisfaite du premier séjour.

EXERCICE III –P13

L'entreprise Tubex fabrique des tubes de verre. D'après le département Qualité, la proportion de tubes de verre défectueux se situe à 5%. On contrôle successivement les tubes de verres par un tirage avec remise.

1. Combien de tubes doit-on contrôler, en moyenne, pour observer un tube défectueux ?
   Soit X le nombre de tubes à contrôler pour en avoir un premier défectueux : : $\boldsymbol{X \sim G_{IN*}(0,05)}$

$$\boldsymbol{E(X) = {}^{1}/_{p} = {}^{1}/_{0,05} = 20}$$

   En moyenne (sur un très grand nombre d'expérience), il faut contrôler 20 tubes pour en observer un défectueux.
2. Quelle est la probabilité que sur 20 tubes contrôlés 3 soient défectueux ?
   Soit X le nombre de tubes défectueux obtenus au cours de 20 tirages : $\boldsymbol{X \sim B(20;0,05)}$

$$\boldsymbol{p(X=3) = C_{20}^{3} 0,05^{3} 0,95^{17} \approx 0,06}$$

3. Quelle est la probabilité que les 10 premiers tubes choisis soient bons ?
   Soit X le nombre de tubes défectueux obtenus au cours de 10 tirages : $\boldsymbol{X \sim B(10;0,05)}$

$$\boldsymbol{p(X=0) = C_{20}^{0} 0,05^{0} 0,95^{20} = 0,95^{20} \approx 0,6}$$

4. Quelle est la probabilité d'avoir 10 tubes bons avant le premier défectueux ?
   Soit X le nombre de tubes à contrôler pour en avoir un premier défectueux : $\boldsymbol{X \sim G_{IN*}(0,05)}$
   Y le nombre de tubes bons avant le premier défectueux : $\boldsymbol{Y = X - 1}$

$$\boldsymbol{p(Y=10) = p(X=11) = 0,95^{10} 0,05 \approx 0,03}$$

EXERCICE IV – P13

Une entreprise fabrique des disquettes. Un lot de 100 disquettes fabriquées par cette entreprise comprend 4% de disquettes défectueuses.

1. Donnez une expérience aléatoire à partir de laquelle on peut définir une variable X de loi de Bernoulli.
   On choisit une disquette au hasard dans le lot et on introduit la variable X :
   X=1 si la disquette est défectueuse et 0 sinon : $\boldsymbol{X \sim B(0,04)}$

2. Donnez une expérience aléatoire à partir de laquelle on peut définir définie une variable X de loi hypergéométrique.
   Tirage sans remise de 5 disquettes dans le lot.
   X : nombre de disquettes défectueuses dans l'échantillon obtenu
   $\Rightarrow \boldsymbol{X \sim H(100;5;0,04)}$

3. Donnez une expérience aléatoire à partir de laquelle on peut définir définie une variable X de loi binomiale.
   Tirage avec remise de 5 disquettes dans le lot.
   X : nombre de disquettes défectueuses dans l'échantillon obtenu
   $\Rightarrow \boldsymbol{X \sim B(5; 0,04)}$

4. Donnez une expérience aléatoire à partir de laquelle on peut définir définie une variable X de loi géométrique (définir clairement X et les paramètres de la loi).
   Tirage avec remise de disquettes dans le lot.
   X : nombre de tirages nécessaires pour l'obtention d'une première disquette défectueuse
   $\Rightarrow \boldsymbol{X \sim G_{IN*}(0,04)}$

EXERCICE V – P14

On reprend la dernière question de l'exo 2 page 7 : si le tirage se faisait sans remise, la probabilité de l'événement* sera-t-elle supérieure ? inférieure ? ou égale à 0,65 ? Justifiez votre réponse.
***** *Il s'agit bien sûr de l'événement « la moitié ces clients est satisfaite du premier séjour »*

Le nombre de clients satisfaits dans l'échantillon est une variable aléatoire N.
Si le tirage est avec remise : $\boldsymbol{N \sim B(10; 0,7)}$
Si le tirage est sans remise : $\boldsymbol{N \sim H(6542; 10; 0,7)}$
On remarque que $\boldsymbol{10 < \frac{6542}{10}}$
La loi $\boldsymbol{H(6542; 10; 0,7)}$ **peut donc être approchée par une loi** $\boldsymbol{B(10; 0,7)}$
La probabilité de l'événement N=5 sera donc à peu près la même dans les deux situations.

EXERCICE VI – CORRIGE P23

Une maladie affecte 2% des personnes d'une population. On choisit au hasard, sans remise, un échantillon de 20 personnes. Soit X le nombre de personnes malades de cet échantillon. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 10% de personnes malades dans l'échantillon ?

On fait un tirage sans remise de 20 individus dans une population de N (N inconnu) individus dans laquelle 2% des individus sont atteints d'une certaine maladie. On note X le nombre de personne(s) malade(s) dans l'échantillon.
Le tirage se faisant sans remise : $\boldsymbol{X \sim H(N; 20; 0,02)}$
On ne connait pas N, par contre, si on suppose que $\boldsymbol{N > 10 \times n}$**, c'est-à-dire que** $\boldsymbol{N > 200}$**, alors la loi hypergéométrique** $\boldsymbol{H(N; 20; 0,02)}$ **peut-être approchée par la loi binomiale** $\boldsymbol{B(20; 0,02)}$
Avoir au moins 10% de personnes malades dans l'échantillon : $\boldsymbol{X \geq 0,1 \times 20 \Leftrightarrow X \geq 2}$

$$\boldsymbol{p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0,98^{20} - 20 \times 0,98^{19} \times 0,02 \approx 0,06}$$

PARTIE III : PRIMITIVES ET INTEGRALES

EXERCICES PRIMITIVES – P16

Fonction f	**Primitives F $(k \in \mathbb{R})$**
$f(x) = 3x^2 - 7x + 4$	$F(x) = x^3 - 7\frac{x^2}{2} + 4x + k$
$f(x) = 3e^{-x}$	$F(x) = -3e^{-x} + k$
$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + k$
$f(x) = 3e^{2x} + 4$	$F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + 4x + k$

EXERCICES CALCUL INTEGRAL – P22

1. $\int_1^2(-x^2 + 4x - 3)dx.$

$$\int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^2 = -\frac{2^3}{3} + 4\frac{2^2}{2} - 3 \times 2 + \frac{1^3}{3} - 4\frac{1^2}{2} + 3 \times 1 = \frac{2}{3}$$

2. $\int_0^1 e^{-3x}\,dx$

$$\int_0^1 e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{3}$$

3. $\int_{-1}^1 |t|dt$

$$|t| = \begin{cases} t \text{ si } t > 0 \\ -t \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 |t|dt = \int_{-1}^0 |t|dt + \int_0^1 |t|dt = \int_{-1}^0 (-t)dt + \int_0^1 t\,dt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{0^2}{2} + \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$
$$= 1$$

EXERCICES INTEGRALES GENERALISEES – P24

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x} \;;\; g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \;;\; \int_1^{+\infty} g(x)dx$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x}dx = \lim_{X\to+\infty} [\ln x]_1^X = \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x^2}dx = \lim_{X\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^X = \lim_{X\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{X}\right) = 1$$

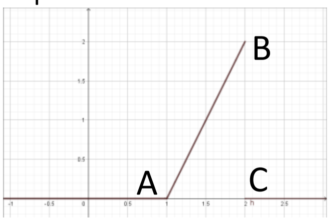
PARTIE IV : LOIS CONTINUES

EXERCICE I – P30

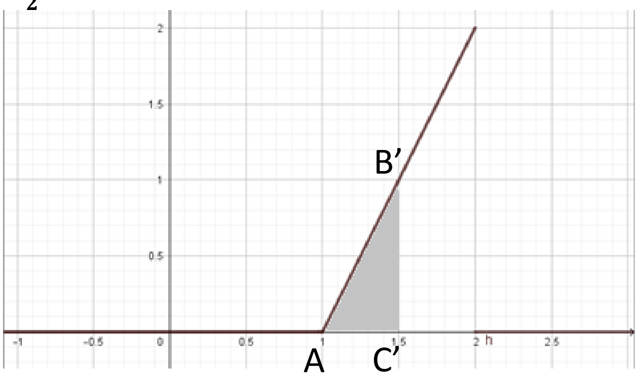
Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-2 & si\ x \in [1,2] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Représenter la densité f.



2. En utilisant un raisonnement graphique *(faire un dessin et expliquer)* et sans calcul d'intégrale :
   a. Montrer que f est une densité de probabilité
   f est positive et continue sur IR-{2}
   $$\textbf{Aire sous la courbe} = \textbf{aire du triangle ABC} = \frac{\textbf{base} \times \textbf{hauteur}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{AC \times BC}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1 \times 2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$$
   b. Calculer et représenter graphiquement F(1,5)
   F(1,5) est l'aire sous la courbe à gauche de 1,5 : aire du triangle AB'C'= $\frac{\mathbf{AC' \times B'C'}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{0{,}5 \times 1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0{,}25}$



3. Déterminer la fonction de répartition de X.
   $\boldsymbol{F(x) = p(X \le x)}$
   - **Si** $\boldsymbol{x \le 1 : F(x) = p(X \le x) = 0}$
   - **Si** $\boldsymbol{1 < x \le 2 : F(x) = p(X \le x) = \frac{(x-1)\times(2x-2)}{2} = (x-1)^2}$
   - **Si** $\boldsymbol{x > 2 : F(x) = 1}$

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 1 \\ (x-1)^2 & si\ 1 < x \le 2 \\ 1 & si\ \ x > 2 \end{cases}}$$

4. Calculer $E(X)$

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt}$$

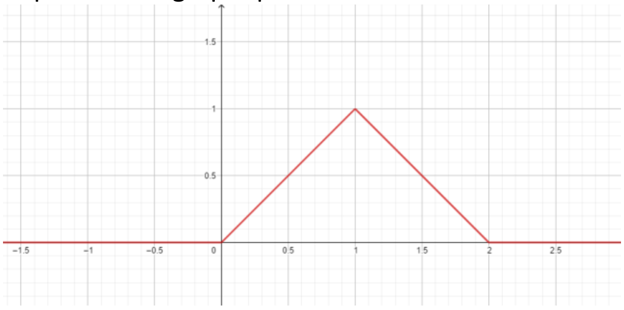
$$\boldsymbol{= \int_{-\infty}^{1} t \times 0dt + \int_{1}^{2} t \times (2t-2)dt + \int_{2}^{+\infty} t \times 0dt = \int_{1}^{2} (2t^2 - 2t)dt = \left[2\frac{t^3}{3} - t^2\right]_1^2}$$

$$\boldsymbol{= \frac{2^4}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{16 - 12 - 2 + 3}{3} = \frac{5}{3}}$$

EXERCICE II – P16

Soit X une variable aléatoire continue de densité : $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1[\\ 2 - x \text{ si } x \in [1,2[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

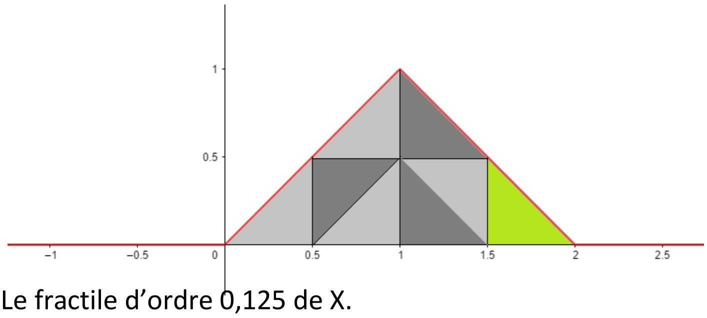
1. Représenter f graphiquement.



2. Montrer que f est une densité de probabilité :
   a. En utilisant un raisonnement graphique
   Aire du triangle sous la courbe : $\frac{\textbf{base} \times \textbf{hauteur}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2\times1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$
   b. Par un calcul d'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (2-t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

3. Déterminer sans calcul, par un raisonnement graphique (faire un dessin explicite pour justifier les résultats) :
   a. F(1,5)
   L'aire à droite de 1,5 est l'aire d'un triangle qui représente 1/8ème de l'aire totale



   a. Le fractile d'ordre 0,125 de X.
   $x_{0.125} = 0.5$

2. Calculer l'espérance de X

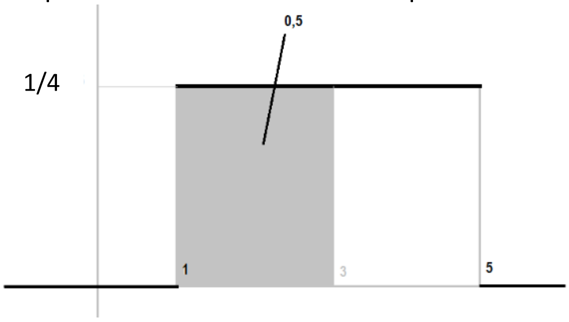
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^1 t^2dt + \int_1^2 (2-t)tdt = \int_0^1 t^2dt + \int_1^2 (2t - t^2)tdt$$

$$E(X) = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[2\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 1$$

EXERCICE III – P30

Soit X une variable aléatoire de densité : $f(x) = \begin{cases} k & si\ x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. Calculer k.
   L'aire sous la courbe de f est un rectangle de base (b-a) et de hauteur k. Pour que f soit une densité de probabilité, il faut donc que cette aire soit égale à 1 :
   $$k \times (b-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad k = {}^{1}\!/_{b-a}$$
   On pose désormais a=1 et b=5. Représenter f.



2. Calculer et représenter la fonction de répartition de X.
   $$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 1 \\ \dfrac{x-1}{4} & si\ 1 \leq x < 5 \\ 1 & si\ \ x \geq 5 \end{cases}}$$

3. Calculer et représenter $p(1 < X < 2), p(3 < X < 4)$; Interprétation.
   Les probabilités $p(1 < X < 2)$ et $p(3 < X < 4)$ correspondent graphiquement à des aires de rectangles de base 1 et de hauteur 1/5 : $p(1 < X < 2) = p(3 < X < 4) = {}^{1}\!/_{4}$

4. Calculer $E(X)$.
   On traite cette question dans le cas général (a et b quelconque) :
   $$\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_a^b \frac{t}{b-a}dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}}$$
   $$\boldsymbol{= \frac{a+b}{2}}$$
   $E(X) = \frac{a+b}{2}$: centre de l'intervalle [a,b]

EXERCICE IV –P30

Soit X une variable aléatoire de densité : $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & si\ x \geq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$

4. Calculer k.
   $$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_1^{+\infty} \frac{k}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{k}{t^2}dt}$$
   $$\boldsymbol{\int_1^x \frac{k}{t^2}dt = \left[-\frac{k}{t}\right]_1^x = k - \frac{k}{x}}$$
   $$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{k}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\left(k - \frac{k}{x}\right) = k}$$
   $$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \Rightarrow k = 1}$$

5. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- Si $x < 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

- Si $x \geq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{x} \frac{k}{t^2}dt = \int_{1}^{x} \frac{k}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$$

Bilan

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} \; sinon \end{cases}$$

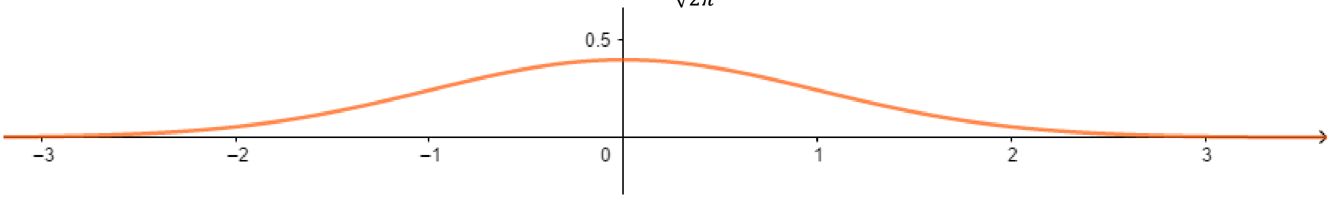
6. Calculer et représenter : $p(X < 2), p(3 < X < 4)$

$$p(X < 2) = F(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p(3 < X < 4) = F(4) - F(3) = 1 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

EXERCICE V : LOI NORMALE CENTREE REDUITE – P31

Une loi normale centrée réduite a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.



On ne connait pas de primitive de la fonction f mais il est quand même possible de montrer que l'aire sous la courbe est égale à 1.
Soit X une variable de densité f :

1. Une variable centrée, est une variable d'espérance nulle : montrer X est centrée.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

La fonction $x \to x$ est impaire et la fonction $x \to f(x)$ est impaire, la fonction $x \to xf(x)$ est donc aussi impaire. Donc :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0$$

2. Une variable réduite et une variable de variance égale à 1 : montrer que X est réduite.

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Intégration par partie

$u(x) = x$ $\quad$ $u'(x) = 1$

$v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad$ $v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$Var(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1$$

Conclusion : X est un variable réduite
La loi normale centrée réduite est souvent notée N(0,1)