ANALYSE – M2202 – NIVEAU 3 – COMPLEMENTS SUR L'INTEGRATION

INTEGRATION PAR PARTIE ET INTEGRALES GENERALISEES

TABLE DES MATIERES

INTEGRATION PAR PARTIE

L'intégration par partie est une technique utilisée pour intégrer certains produits de fonctions.

La technique est issue de la formule de dérivation d'un produit de fonctions :

$$(uv)' = u'v + v'u$$

De laquelle on déduit la relation : $\boldsymbol{u'v = (uv)' - v'u}$

En partant de cette relation nous allons obtenir la formule de l'intégration par partie. Commençons par étudier deux exemples.

EXEMPLE 1

On considère les fonctions $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$

$$(uv)' = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x$$

On a donc la relation **:** $\boldsymbol{2x \ln x = (x^2 \ln x)' - x}$

On s'intéresse au calcul de : $\int_1^2 2x \ln x \, dx$

D'après la relation précédente :

$$\int_1^2 2x \ln x \, dx = \int_1^2 ((x^2 \ln x)' - x) dx = \int_1^2 (x^2 \ln x)' dx - \int_1^2 x dx$$

$$\int_1^2 2x \ln x \, dx = [x^2 \ln x]_1^2 - \int_1^2 x dx \quad \text{car } x^2 \ln x \text{ est une primitive de } (x^2 \ln x)'$$

On peut terminer le calcul : $\int_1^2 2x \ln x \, dx = [x^2 \ln x]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 4\ln 2 - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 4\ln 2 - \frac{3}{2}$

Ce qui nous intéresse ici, c'est plutôt d'analyser la formule obtenue :

$$\int_1^2 2x \ln x \, dx = [x^2 \ln x]_1^2 - \int_1^2 x dx \quad \text{qui correspond à}$$

$$\int_1^2 u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x) dx$$

FORMULE GENERALE

$$\int_a^b \boldsymbol{u'(x)v(x)} dx = [\boldsymbol{u(x)v(x)}]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} - \int_a^b \boldsymbol{u(x)v'(x)} dx$$

EXEMPLE 2

On souhaite calculer $\int_0^1 xe^{2x}dx$

La fonction $\boldsymbol{xe^{2x}}$n'a pas de primitive « évidente ». On remarque cependant qu'elle est **un produit** de deux fonctions « simples » et bien connues, la fonction $\boldsymbol{x}$ d'une part et la fonction $\boldsymbol{e^{2x}}$ d'autre part.

Utiliser une intégration par partie consiste à aller « un peu plus loin » et remarquer ici que la fonction xe^{2x} s'écrit sous la forme d'un produit $\boldsymbol{u'(x)v(x)}$ *(ou $v(x)u'(x)$ c'est pareil)* dont on ne connais pas la primitive, mais qui est tel que la primitive $\boldsymbol{u(x)v'(x)}$ est connue (ou plus facile à calculer).

Si on pose ici $v(x) = x$, la dérivée $v'(x) = 1$ est simple…
On remarque également qu'en posant $u'(x) = e^{2x}$, comme nous connaissons la primitive de e^{2x} :

$$u(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

Appliquons la formule de l'intégration par partie avec les deux fonctions u et v ainsi définies :

$$u(x) = \frac{e^{2x}}{2} \ ; \quad v(x) = x$$

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \int_0^1 \boldsymbol{v(x)u'(x)}dx = [\boldsymbol{u(x)v(x)}]_0^1 - \int_0^1 \boldsymbol{u(x)v'(x)}dx$$

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \times x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} \times 1dx = \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx$$

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

Remarque : l'intégration par partie a permis ici, dans la fonction xe^{2x}, de neutraliser le facteur x qui nous génait pour le calcul de la primitive, on est passé du calcul de la primitive de $\boldsymbol{xe^{2x}}$ à celui, plus simple, de la primitive $\boldsymbol{\frac{e^{2x}}{2}}$:

$$\int_0^1 \boldsymbol{xe^{2x}dx} = \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \boldsymbol{\frac{e^{2x}}{2}dx}$$

On pourrait imaginer une double intégration par partie (deux intégrations par parties successives) qui nous permettrait de « neutraliser le facteur x^2 » et ainsi de suite… (nous verrons des exemples dans les exercices)

BILAN

$$\int_a^b \boldsymbol{u'(x)v(x)}dx = [\boldsymbol{u(x)v(x)}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{u(x)v'(x)}dx$$

CONSEILS POUR LE CHOIX DE u' ET v

1. Identifier dans la fonction de départ **un facteur dont on connaît la primitive et que l'on pourra identifier comme étant u'**

   Dans l'exemple précédent, $f(x) = xe^{2x}$, nous connaissons la primitive de x comme celle de e^{2x}. Nous avons donc deux candidats naturels* pour u' : $u'(x) = x$ ou $u'(x) = e^{2x}$

   On pourrait imaginer d'autres candidats, moins « naturels » : $u'(x) = 1$ (et $v(x) = xe^{2x}$), $u'(x) = 1/x$ (et $v(x) = x^2e^{2x}$)...

2. Le produit uv' doit être « plus facile » à intégrer que $u'v$: on doit connaître sa primitive (ou alors il nous donne une expression plus simple pour éventuellement recommencer une intégration par partie)

   Dans l'exemple précédent, $f(x) = xe^{2x}$, nous avions deux candidats naturels pour u' : $u'(x) = x$ ou $u'(x) = e^{2x}$.

   - Si on choisit $u'(x) = x$ on obtient $v(x) = e^{2x}$:

     $u(x) = \frac{x^2}{2}$; $v'(x) = 2e^{2x}$; $2uv' = \frac{x^2}{2} \times 2e^{2x} = x^2e^{2x}$

     La formule de l'intégration par partie donne : $\boldsymbol{\int_0^1 xe^{2x}dx} = \left[\frac{x^2e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 x^2e^{2x}dx$?

   - Si on choisit $u'(x) = e^{2x}$ on obtient $v(x) = x$: $uv' = \frac{e^{2x}}{2} \times 1 = \frac{e^{2x}}{2}$

     La formule de l'intégration par partie donne : $\boldsymbol{\int_0^1 xe^{2x}dx} = \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 - \boldsymbol{\int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx}$

   Le deuxième choix est plus intéressant, la fonction uv' obtenue étant plus facile à intégrer que la fonction $u'v$ dans ce deuxième cas.

EXERCICES - INTEGRATION PAR PARTIE - CORRIGES P12

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx \; ; \; J = \int_0^\pi x \cos x \, dx \; ; \; K = \int_0^1 xe^x dx \quad et \quad L = \int_0^1 x^2e^x dx$$

$$M = \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx \; ; \; N = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$$

INTEGRALES GENERALISEES

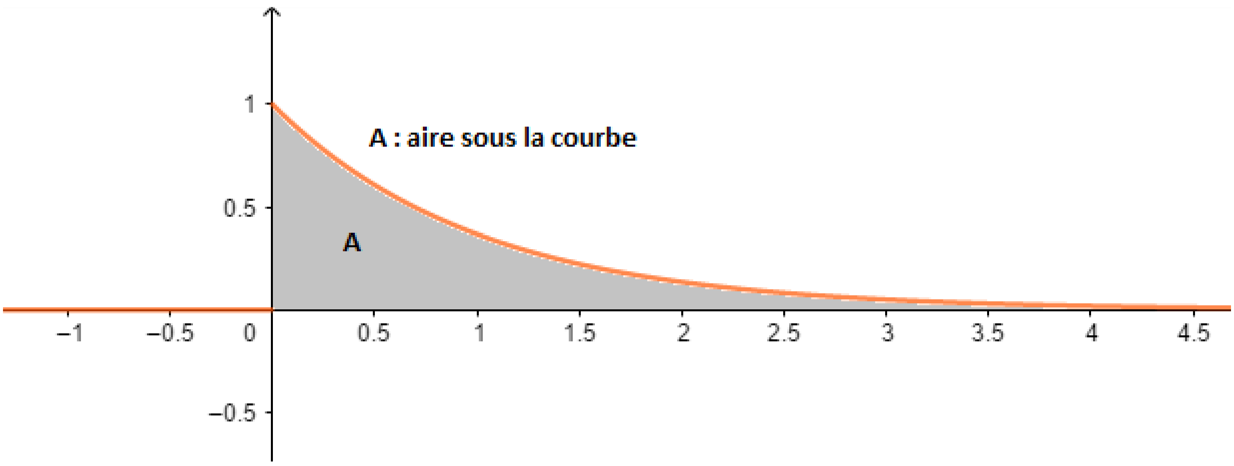
La notion d'intégrale généralisée permet d'étendre la notion d'intégrale au cas suivants :

- Lorsque l'intervalle d'intégration a au moins une borne infinie
- Lorsque la fonction admet une limite infinie sur au moins l'une des deux bornes d'intégration

EXEMPLES D'INTRODUCTION

EXEMPLE 1

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < 0 \\ e^{-x} \ sinon \end{cases}$

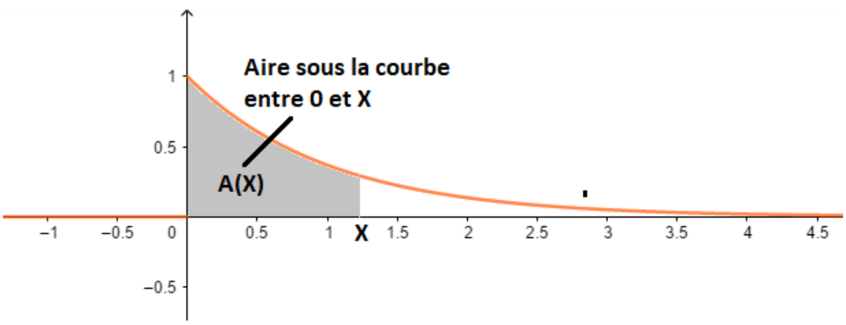


On s'intéresse à **A**, l'aire sous la courbe : l'axe des abscisses étant une asymptote horizontale, cette aire « s'étend » sur une zone infinie (indéfiniment vers la droite) puisque lorsque $x > 0, f(x)$ est toujours strictement positive.

Nous allons montrer que malgré cette extension infinie, **l'aire A est finie**

(Cela peut paraître paradoxal pour certains… de même, une somme d'un nombre infini de termes peut être finie)

Nous savons calculer l'aire sous la courbe entre 0 et n'importe quelle valeur positive X :



$$A(X) = \int_0^X f(x)dx = \int_0^X e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^X = 1 - e^X$$

Intuitivement, pour calculer A, l'aire sous la courbe, nous devons prendre X le plus grand possible…

$$A = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X f(x)dx = \lim_{X\to+\infty} (1 - e^{-X}) = 1$$

Conclusion : l'aire sous la courbe est égale à 1, cette aire se note aussi

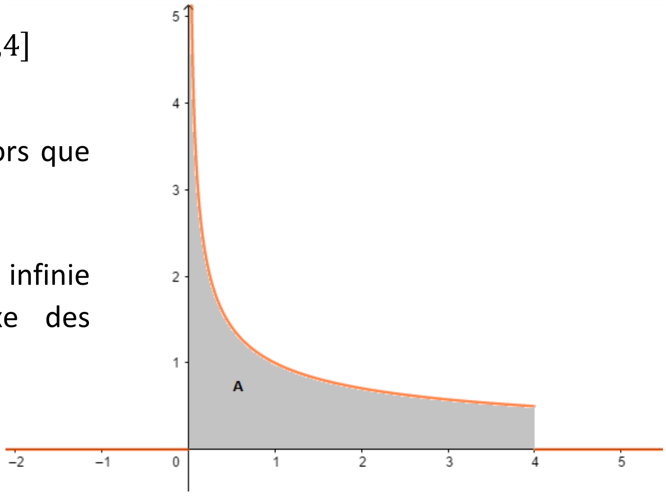
$$\boldsymbol{A = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X f(x)dx} \quad \textbf{(Intégrale généralisée)}$$

EXEMPLE 2

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \; si\ x \in \,]0,4] \\ 0 \; sinon \end{cases}$

On souhaite calculer l'aire sous la courbe, alors que $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

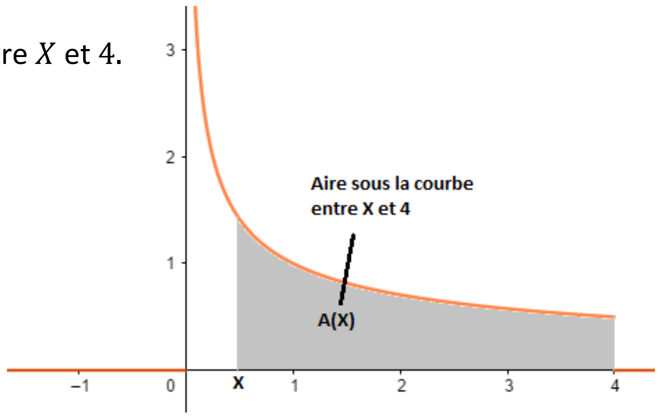
Là encore, cette aire « s'étend » sur une zone infinie (indéfiniment vers le haut), puisque l'axe des ordonnées est une asymptote verticale.



On peut calculer l'aire $\boldsymbol{A(X)}$ sous la courbe entre X et 4.

$$\boldsymbol{A(X) = \int_X^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_X^4}$$

$$\boldsymbol{A(X) = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{X} = 4 - 2\sqrt{X}}$$



Intuitivement, pour calculer A, l'aire sous la courbe, nous devons prendre X le plus petit possible…

$$A = \lim_{X\to 0+} \int_X^4 f(x)dx = \lim_{X\to 0+} \left(4 - 2\sqrt{X}\right) = 4$$

Conclusion : l'aire sous la courbe est égale à 4, cette aire se note aussi

$$\boldsymbol{A = \int_0^4 f(x)dx = \lim_{X\to 0+} \int_0^4 f(x)dx} \quad \textbf{(Intégrale généralisée)}$$

DEFINITIONS

- **Cas d'une fonction admettant une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = l}$: $\boldsymbol{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l}$**

Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle de la forme $[\mathrm{a}, +\infty[$, où a désigne un réel quelconque, alors :

Si $\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx = L$ on dit que l'intégrale $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)dx}$ **converge**, sinon on dit que $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)dx}$ **diverge.**

$$\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx}$$

De même, pour f définie sur $]-\infty, a]$

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_A^a f(x)dx}$$

Et pour f définie sur $\mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx}$$

- **Cas d'une fonction admettant une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{x = a}$: $\boldsymbol{\lim_{x \to a\pm} f(x)} = \pm\infty$**

Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle de la forme $]a, b]$, où a et b désignent des réels quelconques, et si $\boldsymbol{\lim_{x \to a+} f(x)} = \pm\infty$ alors :

Si $\lim_{X \to a+} \int_X^b f(x)dx = L$ on dit que l'intégrale $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ **converge**, sinon on dit que $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ **diverge.**

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim_{X \to a+} \int_X^b f(x)dx}$$

De même, pour f définie sur $[a, b[$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim_{X \to b+} \int_a^X f(x)dx}$$

EXERCICES – INTEGRALES GENERALISEES (CORRIGE P14)

EXERCICE 1

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x} \;;\; g(x) = \frac{1}{x^2} \;;\; h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

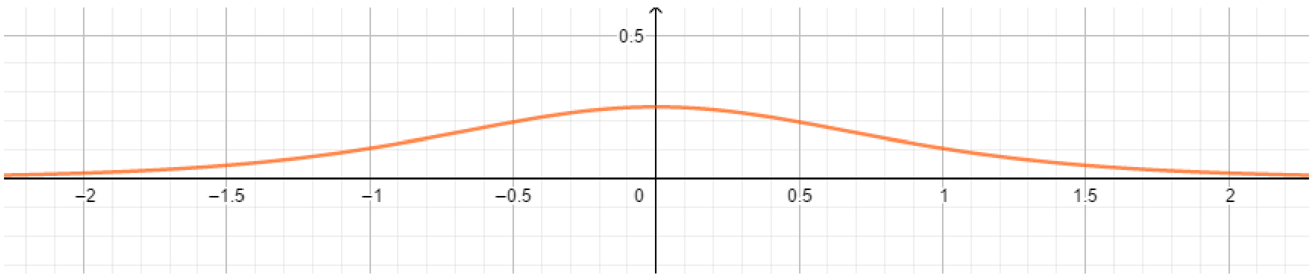
$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \;;\; \int_1^{+\infty} g(x)dx \;;\; \int_1^{+\infty} h(x)dx$$

2. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 f(x)dx \;;\; \int_0^1 g(x)dx \;;\; \int_0^1 h(x)dx$$

EXERCICE 2

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$



1. Montrer que f est paire
2. Calculer l'aire sous la courbe

EXERCICE 3

Etudier la convergence des intégrales ci-dessous (on pourra, dans chacun des cas, représenter préalablement la fonction sur calculatrice graphique ou en utilisant Geogebra)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x} dx \;;\; \int_0^{+\infty} (x-1)\, e^{-2x} dx \;;\; \int_0^1 \ln x \; dx \;;\; \int_0^{1/3} \frac{1}{(3x-1)^2} dx$$

APPLICATION EN PROBABILITES –VARIABLES CONTINUES

Selon votre spécialité de Bac, la notion de variable aléatoire continue a été plus ou moins abordée et approfondie au lycée. Certains l'ont peut-être aussi oubliée… L'assimilation de cette notion n'est pas indispensable pour les calculs demandés dans ce chapitre. Les notions de variables aléatoires et de lois continues seront revues en S3 dans le module M3201- Proba/Stat.

Voici un résumé succinct des notions que nous allons utiliser, ceux qui sont intéressés trouverons, en fin de document, une présentation un peu plus détaillée des concepts mis en jeux.

VARIABLES CONTINUES EN PROBABILITE – LOI DE PROBABILITE – DENSITE

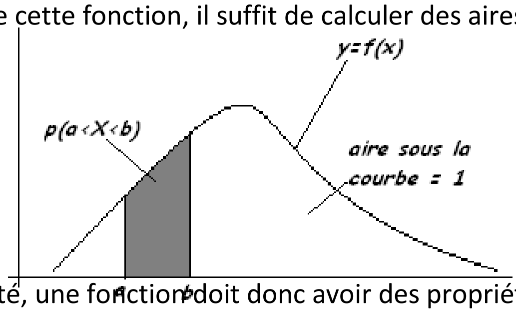
En probabilité, on s'intéresse à une **variable aléatoire** quand on associe une valeur numérique au résultat d'une expérience aléatoire.

Exemple : on choisit un individu au hasard dans une population (**expérience aléatoire**), on s'intéresse à son âge. L'âge, qui peut prendre un certain nombre de valeurs, est une **variable aléatoire** ; on utilise une lettre majuscule pour la représenter, A par exemple, et on adopte les notations suivantes :

- $A = 10$: *événement « l'individu choisi a 10 ans »
- $A > 15$: événement « l'individu choisi a plus de 15 ans »
- $11 < A < 15$: événement « l'individu choisi a plus de 11 ans et moins de 15 ans »
- $p(A = 10)$: probabilité que l'individu choisi ait 10 ans
- $p(A > 15)$: probabilité que l'individu choisi ait plus de 15 ans
- $p(11 < A < 15)$: probabilité que l'individu choisi ait plus de 11 ans et moins de 15 ans

Rappel de vocabulaire : une **expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Un **événement** est une propriété du résultat obtenu. Le résultat d'un tirage dans une population (expérience aléatoire) est ici un individu (l'individu choisi au hasard), « avoir 10 ans » est bien une propriété de l'individu choisi : « l'individu choisi a 10 ans » est un événement*

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire permet de calculer des probabilités sur cette variable. Dans le cas d'une variable **continue**, la loi de probabilité est donnée par une fonction appelée **densité de probabilité**. Pour calculer des probabilités à partir de cette fonction, il suffit de calculer des aires sous la courbe de la densité.



Pour être une densité de probabilité, une fonction doit donc avoir des propriétés particulières

f doit être positive pour que l'on puisse parler d'aire sous la courbe

f ne doit pas être « trop » discontinue pour que l'on puisse calculer l'aire sous la courbe

Densité de probabilité (définition à retenir)

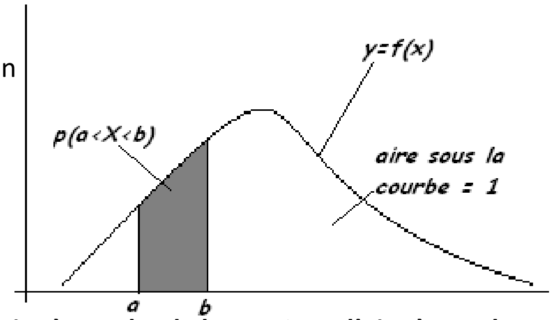
Une fonction f est une densité de probabilité si :

- f est positive sur IR
- f est continue sur IR sauf éventuellement en un nombre fini de points
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

L'aire sous la courbe est égale à 1

La probabilité $p(a < X < b)$ étant une aire, on peut la calculer en utilisant une intégrale :

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



Mais on remarquera aussi que **« l'aire entre a est b »** est aussi **« l'aire à gauche de b »** moins **« l'aire à gauche de a »**

Si on note $\boldsymbol{F(x)}$ **l'aire à gauche de x**, on obtient : $\boldsymbol{p(a < X < b) = F(b) - F(a)}$
La fonction F, très importante en probabilités, est appelée **fonction de répartition** de x.

FONCTION DE REPARTITION

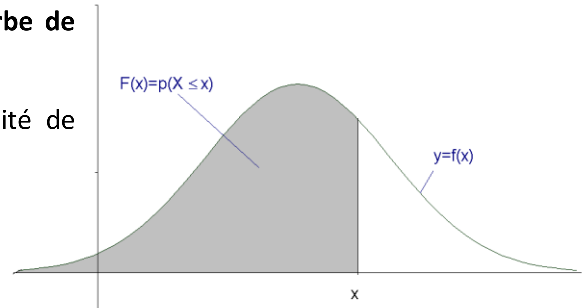
La fonction de répartition d'une variable aléatoire est la fonction définie sur IR par :

$$\boldsymbol{F(x) = p(X \leq x)}$$

Si la variable est continue, $\boldsymbol{F(x)}$ **représente l'aire sous la courbe de densité à gauche de x.**

La fonction de répartition F d'une variable continue de densité de probabilité f s'exprime sous la forme :

$$\boldsymbol{F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$



FONCTION DE REPARTITION

INDICATEURS : ESPERANCE ET VARIANCE

L'espérance et la variance permettent de donner une vision synthétique de la variable aléatoire.

L'espérance donne **une valeur moyenne** : plus précisément l'espérance est la moyenne que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'expérience aléatoire.

La variance est un indicateur de la **dispersion** des valeurs de la variable.

Les notions d'espérance et de variance seront revues l'année prochaines, notamment leur interprétation. Pour l'instant nous retiendrons les formules de calculs suivantes et nous entrainerons sur quelques exemples

ESPERANCE

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

VARIANCE

$$VarX = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt$$

EXERCICES - DENSITES DE PROBABILITES – CORRIGES P17

EXERCICE 1

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} e^{-x}\ si\ x \geq 0 \\ 0\ \ sinon \end{cases}$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de X
3. Calculer $p(1 < X < 2)$
4. Calculer $E(X)$

EXERCICE 2

Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2\ \ si\ x \in [1,2] \\ 0\ \ sinon \end{cases}$$

1. Représenter f.
2. En utilisant un raisonnement graphique *(faire un dessin et expliquer)* et sans calcul d'intégrale :
   a. Montrer que f est une densité de probabilité
   b. Calculer et représenter graphiquement *F(1,5)*
3. Déterminer la fonction de répartition F.
4. Calculer $E(X)$

EXERCICE 3 : LOI UNIFORME

Soit X une variable aléatoire de densité : $f(x) = \begin{cases} k\ \ si\ x \in [a, b] \\ 0\ \ sinon \end{cases}$

1. Calculer k.
2. On pose désormais $a = 1$ et $b = 5$. Représenter f.
3. Calculer et représenter la fonction de répartition de X.
4. Calculer et représenter : $p(1 < X < 2), p(3 < X < 4)$; Interprétation.
5. Calculer $E(X)$

EXERCICE 4

Soit X une variable aléatoire de densité : $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2}\ \ si\ x \geq 1 \\ 0\ \ sinon \end{cases}$

1. Calculer k.
2. Déterminer la fonction de répartition F.
3. Calculer et représenter : $p(X < 2),\ \ p(3 < X < 4)$

EXERCICE 5 : LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Une loi normale centrée réduite a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On ne connait pas de primitive de la fonction f mais il est quand même possible de montrer que l'aire sous la courbe est égale à 1.

Soit X une variable de densité f :

1. Une variable centrée, est une variable d'espérance nulle : montrer X est centrée
2. Une variable réduite et une variable de variance égale à 1 : montrer que X est réduite.

CORRIGE EXERCICES SUR L'INTEGRATION PAR PARTIE

- $I = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx$

  On pose :

  $\boldsymbol{u(x) = \ln x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u'(x) = \frac{1}{x}}$

  $\boldsymbol{v'(x) = x^2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = \frac{x^3}{3}}$

$$\boldsymbol{I = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \times \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} \times \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3} dx}$$

$$\boldsymbol{I = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \times \ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \frac{8}{3} \times \ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} \times \ln 2 - \frac{7}{9}}$$

- $J = \int_0^\pi x \cos x \, dx$

  On pose :

  $\boldsymbol{u(x) = x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u'(x) = 1}$

  $\boldsymbol{v'(x) = cos\, x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = sin\, x}$

$$\boldsymbol{J = \int_0^\pi x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = [x \sin x]_0^\pi - [-\cos x]_0^\pi = 2}$$

- $K = \int_0^1 x e^x dx$

  On pose :

  $\boldsymbol{u(x) = x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u'(x) = 1}$

  $\boldsymbol{v'(x) = e^x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = e^x}$

$$\boldsymbol{K = \int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - 0 - (e - 1) = 1}$$

- $L = \int_0^1 x^2 e^x dx = \int_0^1 x^2 e^x dx$

  On pose :

  $\boldsymbol{u(x) = x^2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u'(x) = 2x}$

  $\boldsymbol{v'(x) = e^x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = e^x}$

$$\boldsymbol{L = \int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2\int_0^1 x e^x \, dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2K = e - 2}$$

- $M = \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$

  On pose :

  $\boldsymbol{u(x) = x^2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u'(x) = 2x}$

  $\boldsymbol{v'(x) = cos\, x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = sin\, x}$

$$\boldsymbol{M = \int_0^\pi x^2 cos\, x dx = [x^2 sinx]_0^\pi - 2\int_0^\pi x\, sinx\ \, dx = -2\int_0^\pi x\, sinx\ \, dx}$$

Nouvelle intégration par partie pour calculer $\mathbf{2\int_0^{\pi} x\, sinx\ dx}$

On pose :

$\boldsymbol{u(x) = x}$ $\boldsymbol{u'(x) = 1}$

$\boldsymbol{v'(x) = sin\, x}$ $\boldsymbol{v(x) = -cos\, x}$

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = [-x\cos x]_0^{\pi} - [\sin x]_0^{\pi} = \pi$$

Conclusion $\boldsymbol{M = -2\pi}$

- $N = \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$

On pose :

$\boldsymbol{u(x) = sin\, x}$ $\boldsymbol{u'(x) = cos\, x}$

$\boldsymbol{v'(x) = e^x}$ $\boldsymbol{v(x) = e^x}$

$$N = \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx = -\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$$

Nouvelle intégration par partie pour calculer $\int_0^{\pi} \boldsymbol{e^x \cos x\, dx}$

On pose :

$\boldsymbol{u(x) = cos\, x}$ $\boldsymbol{u'(x) = -sin\, x}$

$\boldsymbol{v'(x) = e^x}$ $\boldsymbol{v(x) = e^x}$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx = [e^x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = -e^{\pi} - 1 + N$$

Conclusion :

$$N = -(-e^{\pi} - 1 + N) = e^{\pi} + 1 - N$$

$$N = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

CORRECTION EXERCICES INTEGRALES GENERALISEES

EXERCICE 1

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ ; \ g(x) = \frac{1}{x^2} \ ; \ h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x} dx = \lim_{X\to+\infty} [\ln x]_1^X = \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x^2} dx = \lim_{X\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^X = \lim_{X\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{X}\right) = 1$$

$$\int_1^{+\infty} h(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{X\to+\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^X = \lim_{X\to+\infty} \left(2\sqrt{X} - 2\right) = +\infty$$

4. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

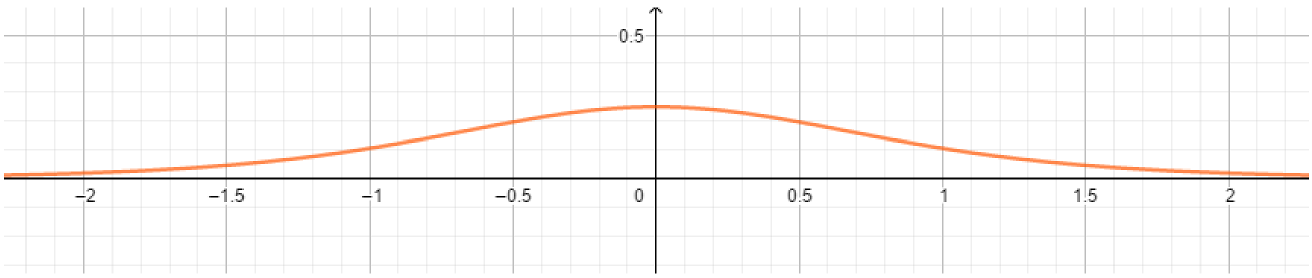
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{X\to 0} \int_X^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{X\to 0} [\ln x]_X^1 = \lim_{X\to 0} (1 - \ln X) = +\infty$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{X\to 0} \int_X^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{X\to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_X^1 = \lim_{X\to 0} \left(\frac{1}{X} - 1\right) = +\infty$$

$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{X\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_X^1 = \lim_{X\to 0} \left(2 - 2\sqrt{X}\right) = 2$$

EXERCICE 2

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$



3. Montrer que f est paire
   $e^{2x} = (e^x)^2$ donc $e^{-2x} = (e^{-x})^2$=$(e^x)^2$=e^{2x}
   Donc $f(-x) = f(x)$: f est paire
4. Calculer l'aire sous la courbe
   Aire sous la courbe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\,dx$$
$$= \lim_{X\to+\infty} 2\int_0^{X} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\,dx = \lim_{X\to+\infty} 2\left[-\frac{1}{2(e^{2x}+1)}\right]_0^X$$
$$= \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{2X}+1}\right) = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 3

Etudier la convergence des intégrales ci-dessous (on pourra, dans chacun des cas, représenter préalablement la fonction sur calculatrice graphique ou en utilisant Geogebra)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x}\,dx = \lim_{X\to-1}\int_X^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \lim_{X\to-1}[\ln(1+x)]_X^1 = \lim_{X\to-1}(\ln 2 - \ln(1+X)) = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} (x-1)\,e^{-2x}dx = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X (x-1)e^{-2x}dx$$

Pour calculer $\int_1^X (x-1)e^{-2x}dx$, on fait une intégration par partie :

$u(x) = x - 1$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-2x}$ $\qquad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\int_0^X (x-1)e^{-2x}dx = [(x-1)e^{-2x}]_0^X + \frac{1}{2}\int_0^X e^{-2x}\,dx = \left[\frac{(x-1)e^{-2x}}{-2}\right]_0^X + \left[-\frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^X$$
$$= \frac{(X-1)e^{-2X}+1}{-2} - \frac{e^{-2X}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{(X-1)e^{-2X}}{-2} - \frac{e^{-2X}}{4} - \frac{1}{4}$$
$$\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{(X-1)e^{-2X}}{-2} - \frac{e^{-2X}}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$
$$\textit{Donc}\quad \int_0^{+\infty} (x-1)\,e^{-2x}dx = -\frac{1}{4}$$

$$\int_0^{1/3} \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx = \lim_{X\to1/3}\int_0^X \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx = \lim_{X\to+\infty}\left[-\frac{1}{3(3x-1)}\right]_0^X = \lim_{X\to1/3}\left(-\frac{1}{3(3X-1)}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\int_0^{1/3} \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx = +\infty$$

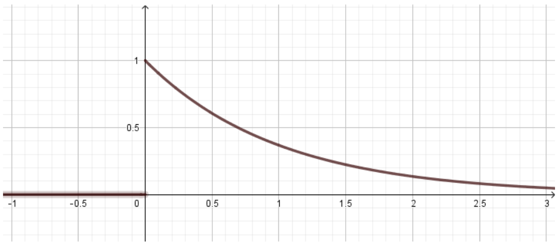
L'intégrale $\int_0^{1/3} \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx$ diverge

CORRECTION EXERCICES SUR LES DENSITES DE PROBABILITES

EXERCICE 1

On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} e^{-x} \; si \; x \geq 0 \\ 0 \;\; sinon \end{cases}$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de X
3. Calculer $p(1 < X < 2)$
4. Calculer $E(X)$



1. f est bien une densité de probabilité car : f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} e^{-t}dt$$

$$\int_{0}^{x} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{0}^{x} e^{-t}dt = \lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(t)dt = 1}$$

2. La fonction de répartition de F a été déjà été calculée dans les calculs précédents :

$$F(x) = \int_{0}^{x} e^{-t}dt = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ 1 - e^{-x} \;\; sinon \end{cases}$$

3. $p(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} = e^{-1} - e^{-2}$
4. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{0} tf(t)dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{+\infty} te^{-t}dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-t}dt = \lim_{X \to +\infty} \int_{0}^{X} te^{-t}dt}$$

On fait une intégration par partie pour calculer $\boldsymbol{\int_0^X te^{-t}dt}$

$\boldsymbol{u(x) = x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u'(x) = 1}$

$\boldsymbol{v'(x) = e^{-x}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = -e^{-x}}$

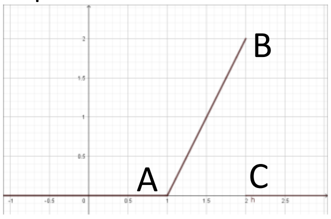
$$\int_0^X te^{-t}dt = \int_0^X te^{-t}dt = [-te^{-t}]_0^X + \int_0^X e^{-t}\,dt = [-te^{-t}]_0^X + [-e^{-t}]_0^X = -Xe^{-X} - e^{-X} + 1$$

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X te^{-t}dt = \lim_{X\to+\infty} \left(-Xe^{-X} - e^{-X} + 1\right)$$

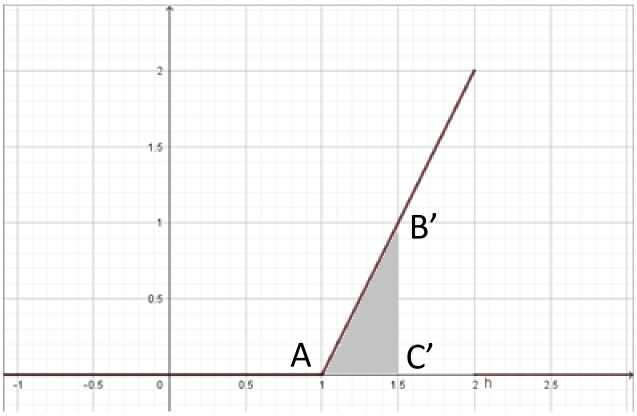
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = 1$$

EXERCICE 2

1. Représenter la densité f.



2. En utilisant un raisonnement graphique *(faire un dessin et expliquer)* et sans calcul d'intégrale :
   c. Montrer que f est une densité de probabilité
   f est positive et continue sur IR-{2}
   $$\textbf{Aire sous la courbe} = \textbf{aire du triangle ABC} = \frac{\textbf{base} \times \textbf{hauteur}}{2} = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{1\times 2}{2} = 1$$
   d. Calculer et représenter graphiquement F(1,5)
   F(1,5) est l'aire sous la courbe à gauche de 1,5 : aire du triangle AB'C'= $\frac{AC' \times B'C'}{2} = \frac{0{,}5\times 1}{2} = 0{,}25$



3. Déterminer la fonction de répartition de X.

$$F(x) = p(X \le x)$$

- **Si** $x \le 1 : F(x) = p(X \le x) = 0$
- **Si** $1 < x \le 2 : F(x) = p(X \le x) = \frac{(x-1)\times(2x-2)}{2} = (x-1)^2$
- **Si** $x > 2 : F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad si\ x \le 1 \\ (x-1)^2 si\ 1 < x \le 2 \\ 1 \quad si \quad x > 2 \end{cases}$$

4. Calculer $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{1} t \times 0dt + \int_{1}^{2} t \times (2t-2)dt + \int_{2}^{+\infty} t \times 0dt = \int_{1}^{2} (2t^2 - 2t)dt = \left[2\frac{t^3}{3} - t^2\right]_1^2$$

$$= \frac{2^4}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{16 - 12 - 2 + 3}{3} = \frac{5}{3}$$

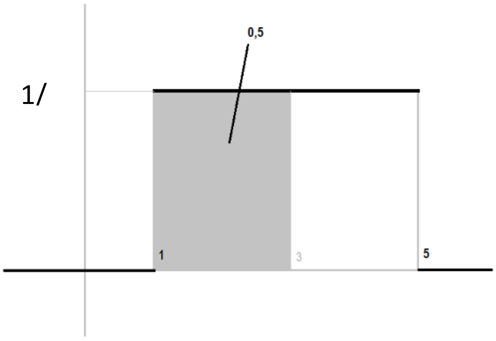
EXERCICE 3 : LOI UNIFORME

1. Calculer k.

   L'aire sous la courbe de f est un rectangle de base (b-a) et de hauteur k. Pour que f soit une densité de probabilité, il faut donc que cette aire soit égale à 1 :

$$k \times (b-a) = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = {}^{1}/_{b-a}$$

   On pose désormais a=1 et b=5. Représenter f.



2. Calculer et représenter la fonction de répartition de X.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x < 1 \\ \dfrac{x-1}{4} \quad si\ 1 \leq x < 5 \\ 1 \quad si \ x \geq 5 \end{cases}$$

3. Calculer et représenter $p(1 < X < 2), p(3 < X < 4)$; Interprétation.

   Les probabilités $p(1 < X < 2)$ et $p(3 < X < 4)$ correspondent graphiquement à des aires de rectangles de base 1 et de hauteur 1/5 : $p(1 < X < 2) = p(3 < X < 4) = {}^{1}/_{4}$

4. Calculer $E(X)$.

   On traite cette question dans le cas général (a et b quelconque) :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{a}^{b} \frac{t}{b-a} dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

   $E(X) = \frac{a+b}{2}$: centre de l'intervalle [a,b]

EXERCICE 4

Soit X une variable aléatoire de densité : $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} \; si \; x \geq 1 \\ 0 \;\; sinon \end{cases}$

1. Calculer k.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{+\infty} \frac{k}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} \frac{k}{t^2}dt$$

$$\int_{1}^{x} \frac{k}{t^2}dt = \left[-\frac{k}{t}\right]_1^x = k - \frac{k}{x}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} \frac{k}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \left(k - \frac{k}{x}\right) = k$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \Rightarrow k = 1$$

2. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- Si $x < 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

- Si $x \geq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{x} \frac{k}{t^2}dt = \int_{1}^{x} \frac{k}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$$

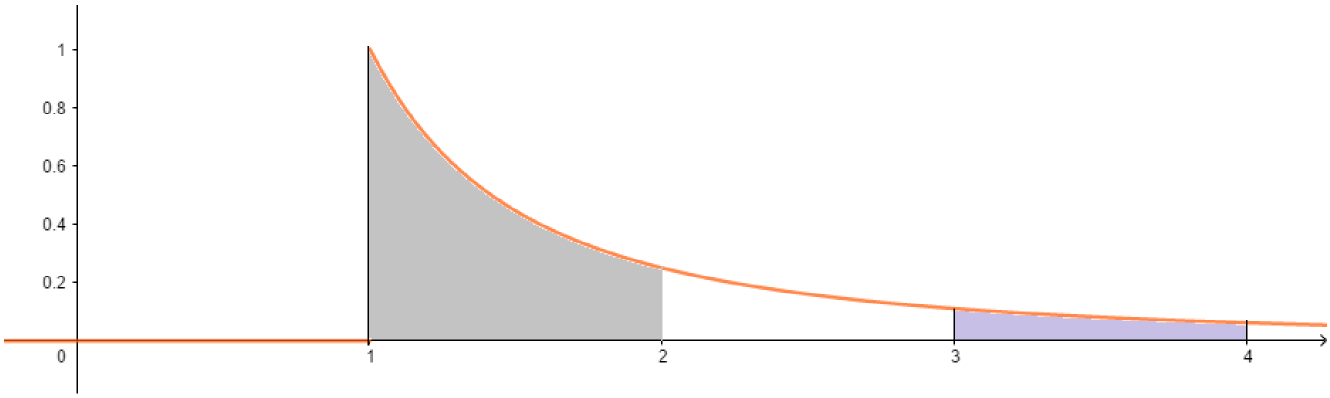
Bilan

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} \;\; sinon \end{cases}$$

3. Calculer et représenter : p(X<2), p(3<X<4)

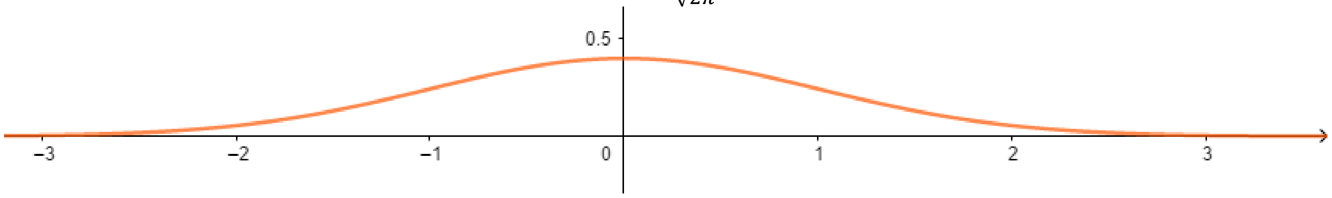
$$p(X < 2) = F(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p(3 < X < 4) = F(4) - F(3) = 1 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$



*EXERCICE 5 : LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Une loi normale centrée réduite a pour densité $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.



On ne connait pas de primitive de la fonction f mais il est quand même possible de montrer que l'aire sous la courbe est égale à 1.
Soit X une variable de densité f :

1. Une variable centrée, est une variable d'espérance nulle : montrer X est centrée.

$$\boldsymbol{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}$$

La fonction $x\to x$ est impaire et la fonction $x\to f(x)$ est impaire, la fonction $x\to xf(x)$ est donc aussi impaire. Donc :

$$\boldsymbol{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=0}$$

2. Une variable réduite et une variable de variance égale à 1 : montrer que X est réduite.

$$\boldsymbol{Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx}$$

Intégration par partie

$\boldsymbol{u(x)=x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u'(x)=1}$

$\boldsymbol{v'(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}}$

$$\boldsymbol{Var(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0+\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=0+1=1}$$

Conclusion : X est un variable réduite
La loi normale centrée réduite est souvent notée N(0,1)

FACULTATIF : COMPLEMENTS SUR LA DELICATE NOTION DE VARIABLE CONTINUE QUI SERA REVUE EN S3…

D'ABORD UN PEU DE STATISTIQUE

La statistique étudie des populations d'individus décrits par un certain nombre de caractéristiques appelées **variables statistiques** : nom, âge, taille, poids, code postal du domicile, nombre d'enfants…
Une variable statistique est dite **quantitative** s'il est possible de faire des calculs sur cette variable et si ceux-ci ont du sens (on prend en général le calcul de la moyenne) :

- **L'âge d'un individu est une variable quantitative :** le calcul de l'âge moyen de la population est possible et son résultat a du sens, il donne une valeur « centrale » de la série des âges (même s'il y a d'autres calculs possibles pour cette valeur centrale).
- Le **code postal** du domicile d'un individu, bien qu'exprimé numériquement, n'est pas une variable quantitative : un code postal moyen peut être calculé mais ne signifie rien. **La variable « code postal » n'est pas quantitative, on dira qu'elle est qualitative.**

Si une variable quantitative prend un grand nombre de valeurs dans la population étudiée, il devient plus intéressant de regrouper ces valeurs dans des classes, on considèrera alors la variable comme **continue**, sinon (petit nombre de valeurs), on considère la variable comme **discrète**.

GRAPHIQUEMENT

Les variables **discrètes** sont représentées par des **diagrammes en barres**, la hauteur de chaque barre étant proportionnelle à l'effectif de la valeur correspondante.

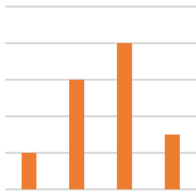
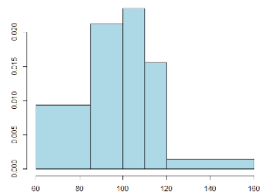


DIAGRAMME EN BARRES

Les variables statistiques **continues** sont représentées par des **histogrammes** constitués de rectangles dont **les aires** sont proportionnelles aux effectifs (ou aux fréquences).



HISTOGRAMME

REMARQUE : LA STATISTIQUE DESCRIPTIVE EST UNE DEMARCHE EMPIRIQUE…

La statistique descriptive est la branche de la statistique regroupant les méthodes permettant de décrire, c'est-à-dire de résumer, visualiser de façon synthétique les données d'une population. A la différence d'autres branches qui chercheront à modéliser, prévoir, inférer…

En statistique descriptive, selon la taille de la population, une même variable pourra être traitée comme discrète ou continue… Cela dépend …

Par exemple, la variable **âge** dans une population :

- S'il s'agit une population d'étudiants d'IUT, la variable peut être considérée comme **discrète** : l'ensemble des valeurs étant par exemple limité à $\{17,18,19,20,21,24,30\}$.
- Si le tirage se fait dans la population française, le nombre de valeurs est plus grand $\{0,1,2,3 \dots 114\}$
  En général on ne s'intéressera pas à des questions du type : *quelle est la proportion d'individus de 30 ans ?* mais plutôt : *quelle est la proportion d'individus de moins de 30 ans ? entre 30 et 35 ans ?*
  Dans ce cas, la variable sera traitée comme une variable **continue.**

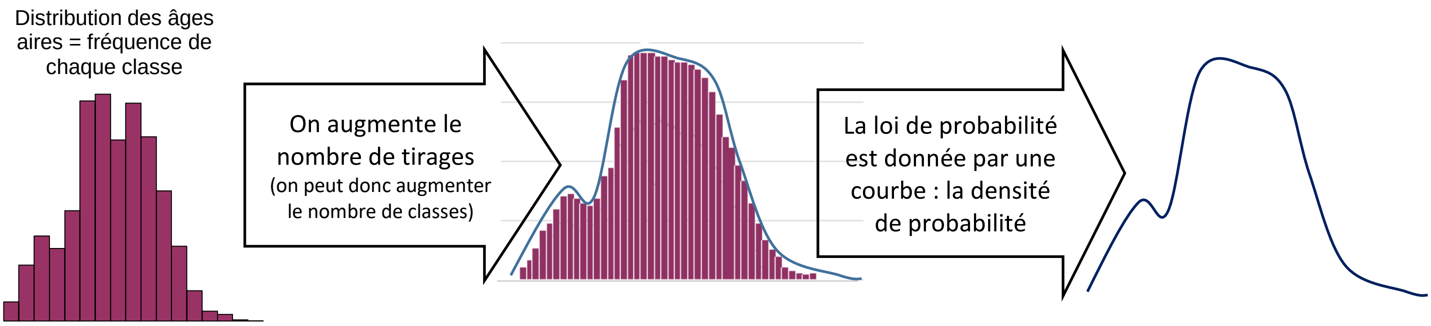
VARIABLES CONTINUES EN PROBABILITE

Vous avez vu au lycée qu'une probabilité est la fréquence que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'expérience aléatoire (loi des grands nombres)…

En probabilité, une variable est considérée **continue** si l'ensemble de ses valeurs est **un intervalle** ou une réunion d'intervalles. Ainsi l'âge d'un individu X choisi dans la population française aura pour ensemble de valeurs $X(\Omega) = [0{,}115]$

Quand un individu dit qu'il a 35ans, cela signifie que son âge est dans l'intervalle [35 ;36[

On peut alors imaginer que toutes les valeurs de l'intervalle sont possibles.
Si on revient aux statistiques, imaginons une population de taille importante (pour avoir un grand nombre de valeurs possibles), dans laquelle on fait un très grand nombre de tirages.
En augmentant le nombre de tirages dans la population, on pourra prendre des classes d'amplitudes plus petites, par exemple pour des âges : 6 mois, 1 mois, 1 semaine, 1 jour, 1h…
On peut imaginer réduire l'amplitude des classes à des valeurs infinitésimales… il en restera une courbe représentant la loi de la variable âge et **appelée densité de probabilité.**



Remarques

- Dans un histogramme, les aires des rectangles peuvent représenter l'effectif, le pourcentage ou la fréquence (rapport entre 0 et 1) de chaque classe. Si l'aire des rectangles représente **la fréquence**, la somme totale des aires des rectangles est égale à 1, cela signifie aussi que **l'aire sous la courbe est égale à 1**
- ***Rappel : Loi des grands nombres*** *: la probabilité est la fréquence qu'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'expérience.*
  Si on augmente le nombre de rectangles tout en diminuant leur amplitude, la somme des aires des rectangles correspondant, par exemple, à des âges compris entre 40 et 45 ans va tendre vers l'aire sous la courbe entre 40 et 45, c'est-à-dire **la probabilité d'avoir un individu âgé entre 40 et 45 ans**.