

Propriétés :

n et m sont premiers entre eux

$\Leftrightarrow \text{PGCD}(n,m) = 1$

\Leftrightarrow Il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}$ tels que $nu + mv = 1$

Concepts :

Algorithme d'Euclide : $\text{PGCD}(a,b)$ = dernier reste non nul de la division euclidienne

Conjecture de Golbach : Tout entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers

Conjecture de Fermat : $Fer(n) = 2^{2^n} + 1$ est premier $\forall n \in \mathbb{N}$ (c'est faux!)

Théorème de Bezout : Deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$

Corollaire du théorème de Bezout : si d est le PGCD de deux entiers a et b , alors il existe des entiers u et v tel que $au + bv = d$

Exercices travaillés :

- Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ la propriété : « L'entier $(2n + 1)^2 - 1$ est divisible par 8 ».
Démontrer que cette propriété est vraie sur \mathbb{N} .
Deux possibilités : par disjonction des cas ou par récurrence.
- En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, déterminer le nombre de diviseurs d'un nombre.
- Expliquer pourquoi les nombres ... ont le même nombre de diviseurs.
- Vérifier que les entiers suivants sont des multiples de 37.
- L'équation $5x + 3y = 34$ a-t-elle une solution avec x et y entiers ?
- L'équation $5x + 10y = 17$ a-t-elle une solution avec x et y entiers ?
- Les entiers 1981 et 1815 sont-ils premiers entre eux ?

Programmes à connaître :

```
def nbpremier(n):  
    c=1  
    for i in range (2,n+1):  
        if n%i==0:  
            c=c+1  
    if c==2:  
        return True  
    else:  
        return False
```

```
def eratosthene(n):  
    Liste=[]
```

```
for i in range (2,n+1):
    if nbpremier(i) :
        Liste.append(i)
return Liste
```

```
def fermat(n):
    Fer = 2**(2**n)+1
    i=2
    while Fer%i!=0 and i<Fer :
        i=i+1
    if i!=Fer :
        return(False)
    else :
        return(True)
```

```
#Programme principal
```

```
i=0
```

```
while fermat(i)==True :
```

```
    i=i+1
```

```
print("La conjecture de Fermat est fausse pour l'entier n égal à ",i)
```
