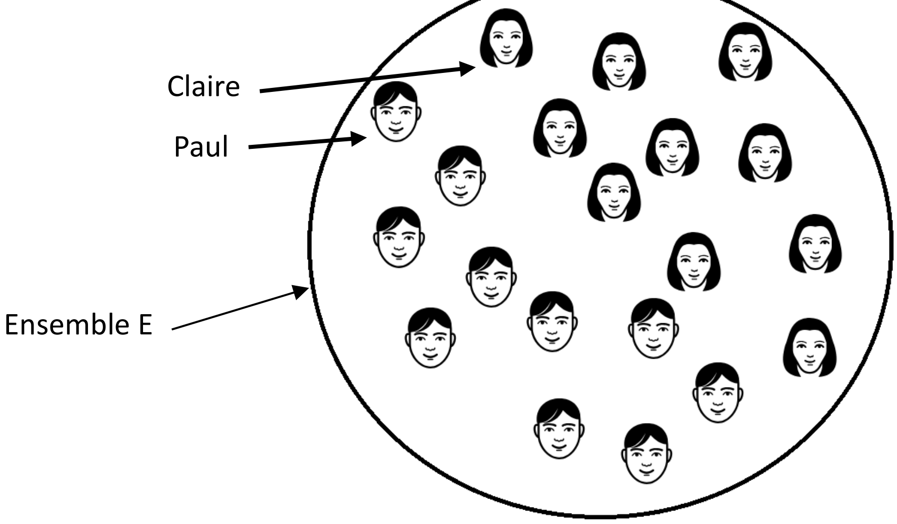
R1.06 – MATHEMATIQUES DISCRETES

PREMIERE PARTIE : ENSEMBLES

RAPPELS SUR LES ENSEMBLES

Ensemble : collection d'objets appelés éléments de l'ensemble.



Claire et Paul sont des ***éléments*** de l'ensemble E.

Ils *appartiennent* à E :

Claire $\in E$ (« *Claire appartient à E* », « *Claire est élément de E* »)

Paul $\in E$

Notation pour l'ensemble $\boldsymbol{E}$: $E = \{Claire, Paul, Jacques \ldots\}$

$$Remarque\ importante\ \begin{cases} Accolades :\ pas\ d'ordre\ (ensemble). Ex : \{2,6,1\} = \{6,1,2\} \\ Parenthèses : ordre\ (liste, suite). Ex : (2,6,1) \neq (1,6,2) \end{cases}$$

SOUS-ENSEMBLE OU PARTIE

Un sous-ensemble ou une partie de E est un ensemble constitué d'éléments de E

$\{Claire, Paul\}$ est un ***sous-ensemble*** de E, on dit aussi que $\{Claire, Paul\}$ est *inclus* dans E

$$Notation : \{Claire, Paul\} \subset E$$

F sous-ensemble des filles

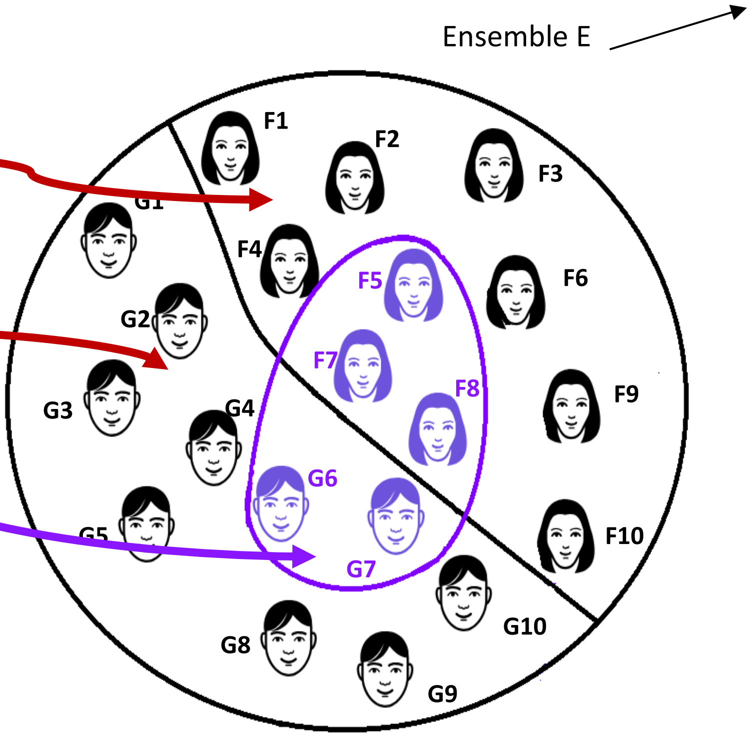
$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{F1}, \ldots, \boldsymbol{F10}\}$

G sous-ensemble des garçons

$\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{G1}, \ldots \boldsymbol{G10}\}$

V sous-ensemble des « Violets »

$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{F5}, \boldsymbol{F7}, \boldsymbol{F8}, \boldsymbol{G6}, \boldsymbol{G7}\}$



$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{E} \end{array}}$$

BILAN : VOCABULAIRE ET NOTATIONS

- $x \in E$ (« x appartient à E ») signifie que ***x* est élément de *E***.
- $x \notin E$ (« x n'appartient à E ») signifie que ***x* n'est pas élément de *E***.
- $A \subset B$ (« A inclus dans B », « A sous-ensemble de B », « A partie de B ») ***si tout élément de A est aussi élément de B.***
- $A = B$ signifie que les ensembles A et B sont les mêmes, c'est-à-dire que $A \subset B$ et $B \subset A$.

QUELQUES ENSEMBLES PARTICULIERS

- L'ensemble vide, $\emptyset$, est un ensemble qui ne contient aucun élément.
- On appelle singleton, un ensemble qui ne contient qu'un seul élément.
- On appelle paire, un ensemble qui contient deux éléments.
- P(E) est l'ensemble des sous-ensembles (ou parties) de l'ensemble E :
$$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$$
- ℕ : ensemble des entiers naturels, ℝ ensemble des réels, ...

Exemple - Ensemble des parties de $\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{P(E)}$

$E = \{1,2\} \Longrightarrow P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$

$E = \{1,2,3\} \Longrightarrow P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, E\}$

$$P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{1,3\}, E\} \Longrightarrow \begin{cases} \emptyset \in P(E) \\ \{1\} \in P(E) \\ \dots \\ \{1,3\} \in P(E) \\ E \in P(E) \end{cases}$$

Un ensemble n'est pas obligatoirement ***inclus*** dans un autre

Un ensemble peut ***appartenir*** à un ensemble d'ensemble comme $P(E)$.

QCM CORRIGE

Soit les ensembles S, A, B suivants :

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{4,6\}$$

Précisez, parmi les affirmations suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses :

	Vrai	Faux	*Commentaires*
$\{2\} \subset S$	☑	☐	$2 \in S$ *donc* $\{2\} \subset S$
$B \subset P(S)$	☐	☑	$4 \in S$ *et* $6 \in S$ *donc* $\{4,6\} \subset S$ *et* $\{4,6\} \in P(S)$ *Donc* $B \in P(S)$
$A \in S$	☐	☑	*De même* $\{1,2,3\} \subset S \Longrightarrow A \subset S$
$\{2\} \subset P(S)$	☐	☑	$2 \in S$ *donc* $\{2\} \subset S$ *et* $\{2\} \in P(S)$
$2 \in P(S)$	☐	☑	$2 \in S$, 2 *n'est pas un ensemble, il ne peut pas appartenir à* $P(S)$
$\{A, B\} \subset P(S)$	☑	☐	$\left.\begin{matrix} A \subset S \Rightarrow A \in P(S) \\ B \subset S \Rightarrow B \in P(S) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \{A, B\} \subset P(S)$

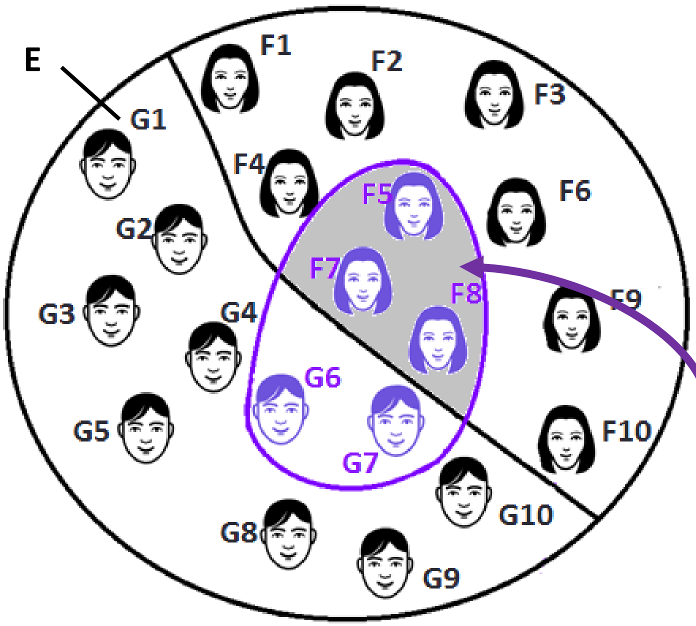
REMARQUES

- $\boldsymbol{x \in E}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{\{x\} \subset E}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{\{x\} \in P(E)}$

- $\boldsymbol{A \subset E}$ ***et*** $\boldsymbol{B \subset E}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{A \in P(E)}$ ***et*** $\boldsymbol{B \in P(E)}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{\{A, B\} \subset P(E)}$

OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES

INTERSECTION



$\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{F1}, \dots, \boldsymbol{F10}, \boldsymbol{G1}, \dots \boldsymbol{G10}\}$

$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{F1}, \dots, \boldsymbol{F10}\}$

$\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{G1}, \dots \boldsymbol{G10}\}$

$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{F5}, \boldsymbol{F7}, \boldsymbol{F8}, \boldsymbol{G6}, \boldsymbol{G7}\}$

Intersection : pour appartenir à l'***intersection*** de deux ensembles A et B, il faut appartenir à A **et** à B. L'intersection est toujours un ensemble **« plus petit »** (il sera inclus dans A et dans B)

$\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{F5}, \boldsymbol{F7}, \boldsymbol{F8}\}$

$\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G} = \emptyset$

$\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}$

$\boldsymbol{G} \cap \boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{G6}, \boldsymbol{G7}\}$

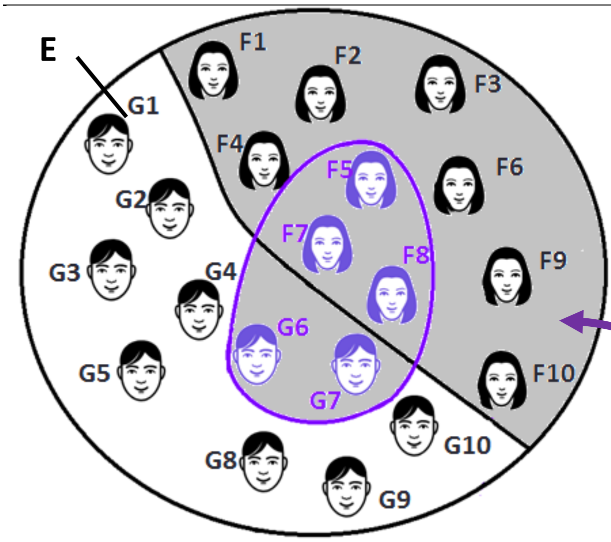
Definition

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E,

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \ \ et \ x \in B\}^*$$

Traduction : $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E **qui appartiennent à A et à B (la barre oblique signifie « qui », « tels que »…).*

UNION – REUNION



E={F1,…,F10, G1,…G10}

F ={F1,…,F10}

G={G1,…G10}

Union – Réunion : pour appartenir à l'***union*** ou à la ***réunion*** de deux ensembles A et B, il faut appartenir à A **ou** à B. La réunion est toujours un ensemble **« plus grand »**

$\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{F1}, \dots, \boldsymbol{F8}, \boldsymbol{G6}, \boldsymbol{G7}\}$

$\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{G1}, \dots, \boldsymbol{G10}, \boldsymbol{F5}, \boldsymbol{F7}, \boldsymbol{F8}\}$

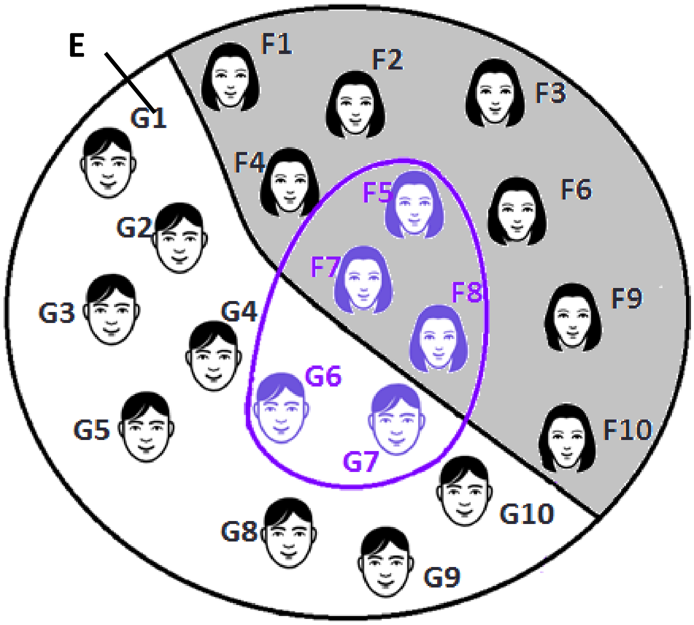
Definition

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E,

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \ \ ou \ x \in B\}$$

*Traduction : $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E **qui** appartiennent à **A ou** à B*

COMPLÉMENTAIRE



Complémentaire : pour appartenir au complémentaire d'un sous-ensemble A de E, il faut être un élément de E ***qui n'appartient pas à A.***

$$\overline{G} = F$$

$$\overline{E} = \emptyset$$
$$\overline{\emptyset} = E$$
$$\overline{\overline{E}} = E$$
$$\overline{F} = G$$
$$\overline{\overline{G}} = G$$

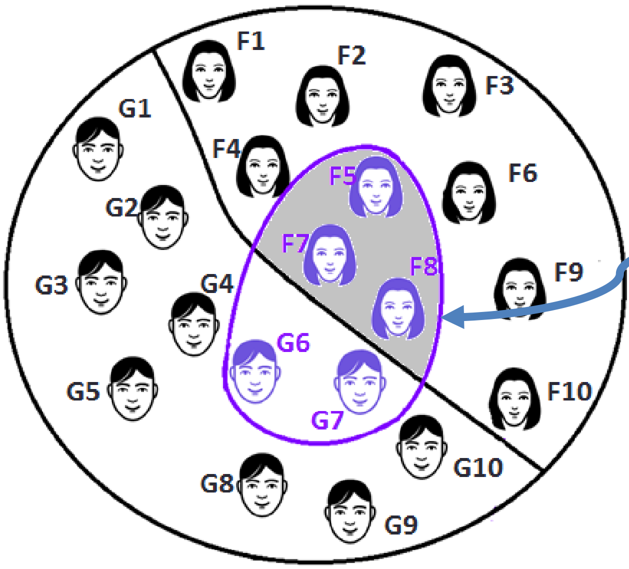
DEFINITION

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E,

$$\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

Traduction : $\bar{A}$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A

DIFFERENCE



Différence : pour appartenir à la différence $A - B$ (A moins B), il faut appartenir à A mais pas à B

$$V - G = V \cap \overline{G} = \{F5, F7, F8\}$$
$$E - \emptyset = E$$
$$V - E = \emptyset$$
$$F - G = \emptyset$$

DEFINITION

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E,

$$A - B = \{x \in A / x \notin B\}$$

Traduction : $A - B$ est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B

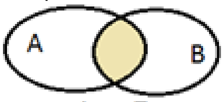
BILAN : DEFINITIONS, PROPRIETES ET VOCABULAIRE

INTERSECTION

L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \ \ et \ x \in B\}$$

Remarque : si $A \cap B = \emptyset$ *alors A et B sont disjoints*



$A \cap B$

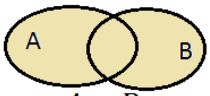
Propriétés

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset, \ A \cap A = A,$
- $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité)*
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(associativité)*

UNION (OU REUNION)

L'union de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B :

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \ \ ou \ x \in B\}$$



$A \cup B$

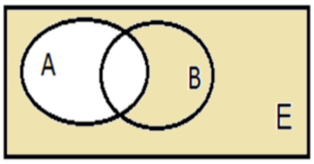
Propriétés

- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $A \cup \emptyset = A, \ A \cup A = A,$
- $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(associativité)*

COMPLEMENTAIRE

Le complémentaire de A dans E est le sous-ensemble de E, noté $\bar{A}$ constitué des éléments de E qui ne sont pas dans A.

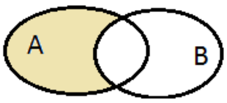
$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

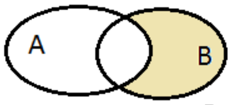


DIFFERENCE

La différence A « moins » B, notée A-B (ou $A \backslash B$)est l'ensemble constitué par les éléments de A n'appartenant pas à B.

$A - B$





$B - A$

$$A - B = \{x \in E / x \in A \ et \ x \notin B\}$$

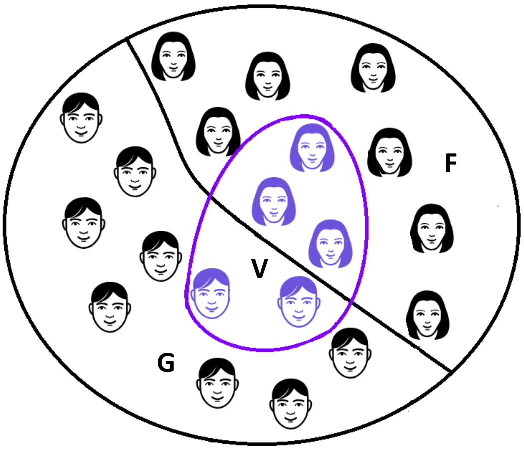
Propriétés

- $A - B \subset A$ et $B - A \subset B$
- La différence n'est ni commutative, ni associative

Remarque importante : $A - B = A \cap \bar{B}$

PARTITION

Une partition d'un ensemble est un ensemble de sous-ensembles non vides, deux à deux disjoints et dont la réunion constitue l'ensemble de départ.



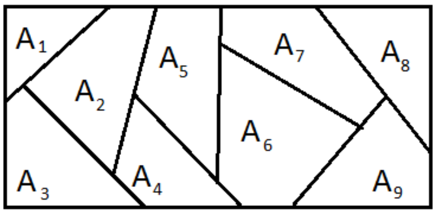
EXEMPLES

- $\{F, G\}$ est une partition de E
- $\{F-V, G-V, V\}$ est une partition de E
- $\{TD1, TD2, TD3\}$ est une partition de $S1$, l'ensemble des étudiants de semestre 1
- $\{TP1, TP2, TP3, TP4, TP5\}$ est aussi une partition de $S1$

DEFINITION MATHEMATIQUE

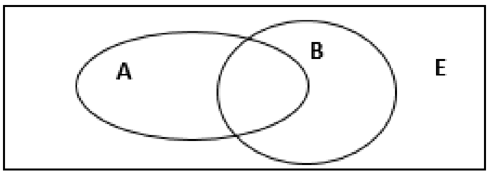
Soit $A_1, \dots, A_n$ n sous-ensembles non vides de E.
$\{A_1, \dots, A_n\}$ est une ***partition*** de E si :

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$
- $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ (A_i 2 à 2 disjoints)



QCM CORRIGE

Parmi les ensembles suivants, préciser (en justifiant) ceux qui sont des partitions de E :



☑ $\{A, \bar{A}\}$
☑ $\{A \cup B, \overline{A \cup B}\}$
☑ $\{A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \overline{A \cup B}\}$
☐ $\{A, B, \overline{A \cup B}\}$ — *$\{A, B, \overline{A \cup B}\}$ n'est pas une partition car $A \cap B \neq \emptyset$*
☐ $\{A, \bar{A}, B, \bar{B}\}$ — *$\{A, \bar{A}, B, \bar{B}\}$ n'est pas une partition car $A \cap B \neq \emptyset$*

EXERCICES

QCM 1 : APPARTENANCE-INCLUSION

Soit S un ensemble, A un sous-ensemble de S et a un élément de A.

	Vrai	Faux
$A \in S$	☐	☐
$a \in S$	☐	☐
$a \in P(\{a\})$	☐	☐
$\{a\} \subset P(A)$	☐	☐
$A \subset S$	☐	☐
$\{A\} \in S$	☐	☐
$\{a\} \subset P(\{a\})$	☐	☐

Test d'entrainement 1
Appartenance, inclusion

EXERCICE 1 : OPERATIONS - SIGNIFICATION

On s'intéresse aux étudiants d'une faculté. On note M l'ensemble des étudiants suivant le cours de mathématique, I l'ensemble des étudiants suivant le cours d'informatique et E l'ensemble des étudiants suivant le cours d'économie.

Exprimer en fonction de M, I et E les ensembles suivants :

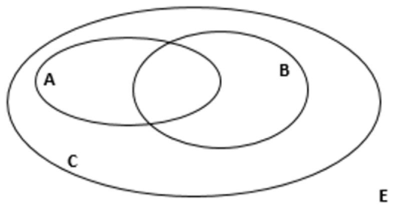
a. E_1 : L'ensemble des étudiants qui ne suivent aucun des trois cours,
b. E_2 : L'ensemble des étudiants qui ne suivent que le cours d'économie,
c. E_3 : L'ensemble des étudiants qui suivent le cours d'économie et le cours de math mais pas celui d'informatique,
d. E_4 : L'ensemble des étudiants qui suivent au plus deux des trois cours.

Test d'entrainement 2
Opérations sur les ensembles
Signification

QCM 2

A, B et C sont trois sous-ensembles de E. On suppose que A et B sont inclus dans C.

$\bar{A} \cap C \subset C$	☐ Vrai	☐ Faux
$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{C}$	☐ Vrai	☐ Faux
$A \cap C = C$	☐ Vrai	☐ Faux
$A \cup B \cup C = C$	☐ Vrai	☐ Faux



Test d'entrainement 3
Opérations sur les ensembles

QCM 3 : PARTITIONS

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

Parmi les ensembles suivants, cochez les partitions de E :

- ☐ $\{A \cap B, \overline{A \cap B}\}$
- ☐ $\{B, A \cap C, \bar{A}, \bar{C}\}$
- ☐ $\{A \cup B, \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}, C \cap \bar{A} \cap \bar{B}\}$
- ☐ $\{A \cup B \cup C, \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}\}$
- ☐ $\{A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, A \cap B, \overline{A \cup B}\}$

Test d'entrainement 4

Partitions

QCM4 : PARTITIONS, APPARTENANCE, INCLUSION

Soit E un ensemble, $P = \{A, B, C\}$ une partition de E, a un élément de A et $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

$P \in P(E)$	☐ Vrai	☐ Faux
$\{a\} \in P(A)$	☐ Vrai	☐ Faux
$A \in P$	☐ Vrai	☐ Faux
$B \subset P$	☐ Vrai	☐ Faux
$A \cup B \subset P$	☐ Vrai	☐ Faux
$\{A, B\} \subset P$	☐ Vrai	☐ Faux
$a \in P$	☐ Vrai	☐ Faux
$\{A\} \in P$	☐ Vrai	☐ Faux

Test d'entrainement 5

Récapitulatif : partition, appartenance, inclusion.

QCM5 : PARTITIONS, ENSEMBLE DES PARTIES

Soit E un ensemble et $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

$P(E)$ est une partition de E	☐ Vrai	☐ Faux
Une partition de E est incluse dans E	☐ Vrai	☐ Faux
$E \in P(E)$	☐ Vrai	☐ Faux

PROPRIETES DES OPERATIONS

DISTRIBUTIVITE ET LOIS DE MORGAN

DISTRIBUTIVITE (ON PEUT « DEVELOPPER » ET « FACTORISER » …)

Nous connaissons déjà la ***distributivité de la multiplication par rapport à l'addition*** qui nous permet de développer ou de factoriser une expression algébrique.

Par exemple : $\boldsymbol{x(y+z)=xy}+xz$ illustre la ***distributivité de la multiplication par rapport à l'addition***

Nous savons aussi que ***l'addition n'est pas distributive par rapport à l'addition*** :

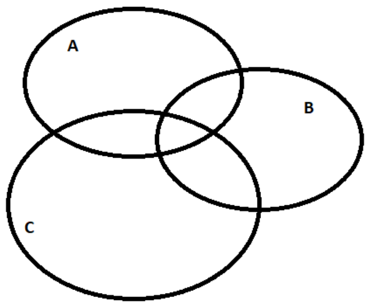
$$2+(3\times 4)\neq(2+3)(2+4)$$

Lorsque nous manipulons des intersections et réunions d'ensembles, nous pouvons appliquer la distributivité dans « les deux sens », de l'intersection par rapport à l'union, ou de l'union par rapport à l'intersection. Ce qui nous permet de manipuler et simplifier des expressions ensemblistes, comme dans un calcul algébrique.

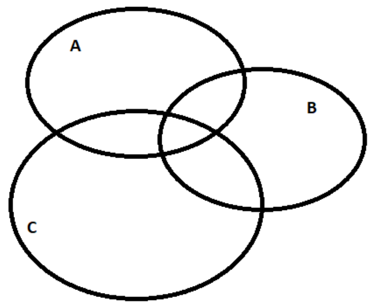
- *Distributivité de l'union par rapport à l'intersection* : $\boldsymbol{(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)}$
- *Distributivité de l'intersection par rapport à l'union* : $\boldsymbol{(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)}$

Illustrer les propriétés précédentes (distributivité) en utilisant des diagrammes (de Venn)

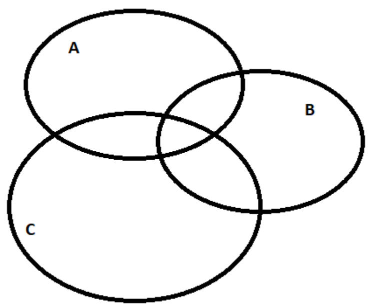
$(A\cap B)\cup C$



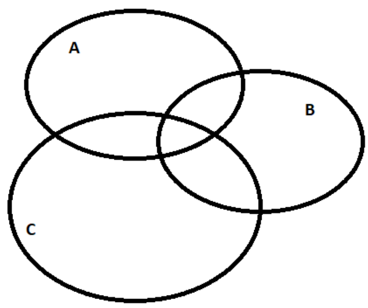
$(A\cup C)\cap(B\cup C)$



$(A\cup B)\cap C$



$(A\cap C)\cup(B\cap C)$



Lois de Morgan

Les lois de Morgan sont plutôt des propriétés de logique, et elles seront revues en fin de S1, dans la partie « Logique » de cette même ressource. Les lois de Morgan s'expriment dont plus usuellement avec des

et, des ***ou*** et des ***négations***, mais on peut facilement faire le lien entre ces opérateurs logiques et les opérateurs ensemblistes ∩, ∪ et ***complémentaire***.

Un exemple:

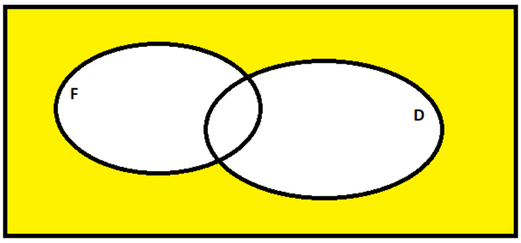
Nous sommes au restaurant, un menu complet se présente sous la forme Entrée – Plat – Fromage ***ou*** Dessert. Si on choisit la formule Entrée - Plat cela signifie que l'on n'a pas choisi la troisième partie du menu « Fromage ou Dessert » et donc, *logiquement*, que l'on n'a pris ni fromage, ni dessert c'est-à-dire pas de fromage ET pas de dessert

En cours de logique, nous dirions que la ***négation*** d'un ***ou*** est le ***et*** des ***négations***. Il est important de bien maîtriser une telle propriété en programmation lorsqu'on souhaite arrêter une boucle sur une condition complexe s'exprimant avec un ***ou*** ou un ***et.***

En théorie des ensembles que se passe-t-il sur l'exemple précédent ?

Si on note $\boldsymbol{F}$, l'ensemble des personnes prenant du fromage et $\boldsymbol{D}$, l'ensemble des personnes prenant du dessert.

Les personnes qui ne prennent ni fromage, ni dessert doivent se trouver en dehors de l'union de $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{D}$:



$$\overline{\boldsymbol{F}} \cap \overline{\boldsymbol{D}} = \overline{\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{D}}$$

De même pour la négation d'un « et » : si je ne prends pas la formule « Fromage et Dessert » cela signifie que soit je n'ai pas pris de fromage, soit je n'ai pas pris de dessert (je peux n'avoir pris aucun des deux). En logique, nous dirions que la ***négation*** d'un ***et*** est le ***ou*** des ***négations.***

En langage ensembliste : $\overline{\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{D}} = \overline{\boldsymbol{F}} \cup \overline{\boldsymbol{D}}$

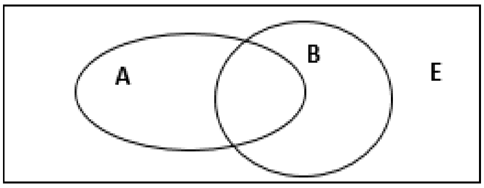
Lois de Morgan (en theorie des ensembles)

$$\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$$

$$\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$$

S'ENTRAINER A MANIPULER UN FORMALISME MATHEMATIQUE

SIMPLIFICATIONS D'EXPRESSIONS ENSEMBLISTES



Quelques exemples :

- $\boldsymbol{A \cap (\bar{A} \cup B)} = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)$ *Distributivité*
  Or $A \cap \bar{A} = \emptyset$
  Donc $(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$ *car* $\emptyset \subset \boldsymbol{A \cap B}$
  $\boldsymbol{A \cap (\bar{A} \cup B)} = A \cap B$

- $\boldsymbol{A \cap (A \cup B)} = A$ car $A \subset (A \cup B)$

- $\boldsymbol{(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})} = A \cup (B \cap \bar{B}) = A \cup \emptyset = A$
  $\boldsymbol{(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})} = A$

- $\boldsymbol{(A \cap B) \cap (A \cup \bar{B})} = A \cap B \cap (A \cup \bar{B})$ *Associativité de l'intersection (on peut enlever des parenthèses)*
  Or $A \subset (A \cup \bar{B})$ donc $A \cap (A \cup \bar{B}) = A$ donc $A \cap B \cap (A \cup \bar{B}) = A \cap B$
  $\boldsymbol{(A \cap B) \cap (A \cup \bar{B})} = A \cap B$

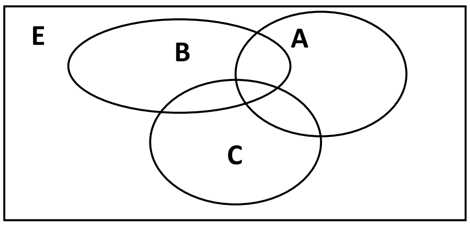
- $\boldsymbol{(A \cup B) \cap (C \cap \bar{A})} = (A \cup B) \cap C \cap \bar{A}$ ***Associativité de l'intersection (on peut enlever des parenthèses)***
  $(A \cup B) \cap C \cap \bar{A} = C \cap [(A \cup B) \cap \bar{A}] = C \cap [(A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A})]$ ***Distributivité***
  Or $A \cap \bar{A} = \emptyset$
  Donc $C \cap [\emptyset \cup (B \cap \bar{A})] = C \cap (B \cap \bar{A})$ ***car*** $\emptyset \subset \boldsymbol{(B \cap \bar{A})}$
  $C \cap (B \cap \bar{A}) = C \cap B \cap \bar{A}$ ***Associativité***
  $\boldsymbol{(A \cup B) \cap (C \cap \bar{A})} = C \cap B \cap \bar{A}$

EXERCICES

EXERCICE 1 : ENTRAINEMENT A LA REDACTION

Simplifiez les expressions ci-dessus en utilisant les propriétés des opérations ensemblistes.

- $A \cup (A \cap B)$
- $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
- $\big(A \cup (A \cap B)\big) \cap B$
- $(\overline{A \cup B}) \cap (C \cup \bar{A})$
- $((A \cup B) \cap C) \cup B$
- $\big((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)\big) \cap \bar{B}$
- $\big((A \cap \bar{B}) \cup \bar{B}\big) \cap C$
- $\big((C \cup A) \cap (\bar{B} \cup C)\big) \cup A$

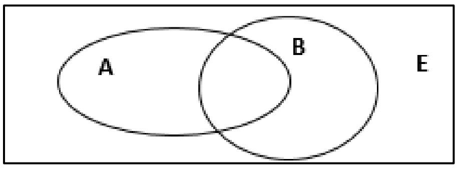


Rédigez avec soin, sur le modèle des exemples précédents, en précisant les propriétés utilisées (même quand la réponse est évidente).

QCM 1

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Parmi les ensembles suivants, précisez ceux qui sont égaux à A :

- ☐ $A \cup (A \cap B)$
- ☐ $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$
- ☐ $A \cap (A \cup B)$
- ☐ $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$



QCM 2

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Parmi les assertions suivantes, précisez celles qui sont vraies (pour que l'assertion soit vraie, il faut que l'égalité <u>et</u> la justification soient vraies)

- ☐ $B \cup (\bar{B} \cap A) = (B \cup \bar{B}) \cap A$ car la réunion et l'intersection sont associatives
- ☐ $A \cap (B \cup A) = A \cup B$ car $A \subset A \cup B$
- ☐ $A \cup (B \cap A) = A$ car $A \cap B \subset A$

QCM 3

$\big(E \cup (E \cap F)\big) \cap F$	***est égal à :***	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$E \cap (E \cup F)$	***est égal à :***	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$E \cup (E \cap F)$	***est égal à :***	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$(E \cap F) \cap (E \cup \bar{F})$	***est égal à :***	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$E \cap (\bar{E} \cup F)$	***est égal à :***	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$F \cup (E \cap \bar{F})$	***est égal à :***	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$
$E \cup \overline{\big(\bar{F} \cup (\bar{F} \cap E)\big)}$	***est égal à :***	☐ E	☐ F	☐ $E \cap F$	☐ $E \cup F$	☐ $\varnothing$

EXERCICE 2

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. La différence symétrique de A et B est l'ensemble, noté $A\Delta B$, défini par :

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \ \ ou \ \ A\Delta B = (A \cup B)\backslash(B \cap A)$$

1. Montrer que les deux expressions ci-dessus sont équivalentes.
2. Représenter la différence symétrique sur un diagramme de Venn.
3. Expliciter les ensembles suivants :
    a. $A\Delta\emptyset$
    b. $A\Delta A$
    c. $A\Delta B$ si $A \subset B$
    d. $(A\Delta B) \cup (A\Delta\bar{B})$