

# Ressource R5.D.09 – R5.A.11

## **Méthodes d'optimisation pour l'aide à la décision**

Pour les semestres 4 et 5 :

- Introduction à l'apprentissage (arbres de décision, descente de gradient...)
- Introduction à la recherche opérationnelle (résolution graphique de programmes linéaires, couplage...)
- Modélisation de problèmes sous forme de programmes linéaires (méthode du simplexe...)
- Méthodes heuristiques pour résoudre des problèmes (par ex. : classification, régression, sac à dos, voyageur de commerce...)

# Petite incursion dans l'IA

## **Intelligence Artificielle**

« Ensemble de théories et de techniques mises en œuvre en vue de réaliser des machines capables de simuler l'intelligence humaine »  
*(Larousse – Wikipédia)*

# Petite incursion dans l'IA

Pour simuler l'intelligence humaine :

**Il est possible de donner à la machine des règles logiques** telles celles vues en première année (calcul des prédicats, syllogismes...) :

- o **Prolog** : premier langage de programmation logique (1972)
- o **Systèmes experts** : répondre à des questions, en général sur des sujets précis, en effectuant un raisonnement à partir de faits et de règles connues.

**Il est possible d'utiliser des méthodes algorithmiques classiques** (*plus court chemin, ordonnancement, ...*) qui peuvent permettre à une machine de trouver une solution et prendre une décision.

# Petite incursion dans l'IA

Aujourd'hui, les avancées de l'Intelligence artificielle reposent plutôt sur des techniques qui permettent **d'apprendre à partir de données.**

## Machine learning :

- **L'apprentissage statistique** qui utilise des modèles statistiques et probabilistes relativement classiques
- **L'apprentissage profond** (deep learning) qui se concentre sur les réseaux de neurones.

Pet

Modèles moins complexes et plus compréhensibles, à conditions que les données de départ soient bien structurées.

Au  
sur d

elle reposent plutôt à partir de données.

Machine le

- **L'apprentissage statistique** qui utilise des modèles statistiques et probabilistes relativement classiques
- **L'apprentissage profond** (deep learning) qui se concentre sur les réseaux de neurones.

Pet

Modèles moins complexes et plus compréhensibles, à conditions que les données de départ soient bien **structurées**.

Au  
sur d

elle reposent plutôt

Machine le

- **L'apprentissage statistique** qui utilise des modèles probabilistes relativement classiques.
- **L'apprentissage profond** (deep learning), basé sur des réseaux de neurones.

Les **réseaux de neurones** sont très puissants, même sur des données peu structurées, mais la justification des résultats/décisions est plus **opaque**.

# Intelligence artificielle

## Apprentissage automatique (Machine Learning)

**IA « logique » :**  
Règles logiques,  
systèmes experts...  
**Algorithmes et  
heuristiques....**

**Apprentissage statistique**  
Régressions, arbres de décision,  
classification...

**Apprentissage profond**  
(Deep Learning)

# Apprentissage statistique

Supervisé et non supervisé



# Apprentissage statistique

On distingue en statistique :

- les **méthodes descriptives** qui réduisent, résument et synthétisent les données,
- des **méthodes prédictives** permettant d'émettre des hypothèses sur les événements futurs, et pour lesquelles nous définissons une variable « **cible** » qui correspond à la variable à prévoir.

# Apprentissage statistique

On distingue en statistique :

- les **méthodes descriptives** qui réduisent, résument et synthétisent les données,
- des **méthodes prédictives** permettant d'émettre des hypothèses sur les événements futurs, et pour lesquelles nous définissons une variable « **cible** » qui correspond à la variable à prévoir.

En intelligence artificielle, on associe à ces méthodes les notions **d'apprentissage supervisé** (méthodes prédictives) et **non supervisé** (méthodes descriptives).

# Exemples d'apprentissages supervisés

## **Classement binaire (variable cible binaire) :**

- Identifier si une image contient un chat ou non
- Identifier si un client est solvable

## **Classement non binaire (variable cible qualitative) :**

- Identifier à quelle espèce appartient une plante
- Identifier l'expression d'un visage, parmi un ensemble fini de possibilités

## **Régression (variable cible quantitative) :**

- Prédire le nombre de consultations d'un site
- Prédire le nombre de clicks sur un lien

# Exemples d'apprentissages supervisés

## **Classement binaire (variable cible binaire) :**

- Identifier si une image contient un chat ou non
- Identifier si un client est solvable

Régression logistique,  
arbres de décision...

## **Classement non binaire (variable cible qualitative) :**

- Identifier à quelle espèce appartient une plante
- Identifier l'expression d'un visage, parmi un ensemble fini de possibilités

Arbres de décision...

## **Régression (variable cible quantitative) :**

- Prédire le nombre de consultations d'un site
- Prédire le nombre de clicks sur un lien

Régression linéaire (ou  
autre), arbres de  
régression...

# Exemples d'apprentissages supervisés

## **Classement** binaire (variable cible binaire) :

- Déterminer si une image contient un chat ou non
- Déterminer si un client est solvable

En anglais :  
classification

Régression logistique,  
arbres de décision...

## **Classement** non binaire (variable cible qualitative) :

- Identifier à quelle espèce appartient une plante
- Identifier l'expression d'un visage, parmi un ensemble fini de possibilités

Arbres de décision...

## **Régression** (variable cible quantitative) :

- Prédire le nombre de consultations d'un site
- Prédire le nombre de clicks sur un lien

Régression linéaire (ou  
autre), arbres de  
régression...

# Exemples d'apprentissages non supervisés

## **Détection d'association**

Quelles sont les combinaisons d'articles qui sont achetés ensemble dans une grande surface

**Classification (Clustering en anglais – attention !)** : identifier des groupes d'individus ayant des caractéristiques similaires

- Groupes de clients ayant un comportement proche
- Compression d'image : repérer dans une image des zones contenant des pixels similaires

## **Réduction de dimension (analyses factorielles)**

Représenter les données dans un espace de dimension plus faible

# Exemples d'apprentissages non supervisés

## Détection d'association

Quelles sont les combinaisons d'articles qui sont achetées ensemble ?  
Recherche de règles d'associations

**Classification (Clustering en anglais – attention !)**  
Recherche de groupes d'objets possédant des caractéristiques similaires

- Groupes de clients ayant un comportement similaire
- Compression d'image : repérer dans une image des caractéristiques similaires

## Réduction de dimension (analyses factorielles)

Représenter les données dans un espace de dimension plus faible

Méthodes de **classification ou clustering en anglais**  
(classification hiérarchique, k-means)

Méthodes **factorielles** (ACP, AFCM...)

Dans ce mini-cours

Deux méthodes assez faciles à mettre en place :

- **la détection d'associations** (apprentissage non supervisé)
- **les arbres de décision** (apprentissage supervisé).



# La recherche d'associations

Ou « analyse du panier de la ménagère »

# La recherche d'associations

À l'origine, la recherche de règles d'associations a fait son apparition dans la **grande distribution**.

Il s'agissait de mettre en évidence des **associations d'articles dans les tickets de caisses**.

L'idée était d'améliorer les ventes par un aménagement des rayons, ou des campagnes de promotions, tirant partie de ces associations.

# La recherche d'associations

Ainsi, si on observe que **lorsque le client achète des biscuits apéritifs, il achète souvent des bières**, on pourra :

- **Disposer ces produits** dans des rayons proches pour que le client achète bien les deux. Ou séparer les deux rayons, pour faire parcourir au client un maximum de rayons.
- **Faire une promotion** sur l'achat des deux produits ou sur la bière pour les clients qui ont achetés des biscuits apéritifs...

# La recherche d'associations

Ainsi, si on observe que lorsque **le client achète des biscuits apéritifs, il achète souvent des bières**, on pourra :

Il n'est pas forcément nécessaire de **traiter des millions de tickets de caisses** pour penser à une association aussi naturelle.

L'intérêt de la recherche d'association est de dégager des associations **insoupçonnées**, auxquelles nous n'aurions pas pensé. C'est l'objet des techniques de **«fouille de données » (data mining)** qui se sont beaucoup développées au début des années 2000

# La recherche d'associations

Santé : identifier des relations entre les symptômes et les maladies.

Télécommunications : comprendre les relations entre les événements dans les réseaux de communication.

Web : analyser le comportement des utilisateurs sur les sites web

Sécurité, finance, biologie...

# Les données de départ : le ticket de caisse

- Lorsque l'on s'intéresse à l'analyse du **« ticket de caisse »**, on dispose au départ d'une liste d'achats (transactions) constitués d'un ou plusieurs articles.
- De façon générale les articles sont appelés **items**, et les transactions sont donc des **ensembles d'items** (itemsets)

# Exemple

Transaction	Itemset
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

# Exemple

Transaction	Itemset
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

Transaction (itemset)	Produit (item)
1	Pain
1	Lait
2	Pain
2	Couches
2	Bière
2	Œufs
3	Lait
3	Couches
3	Bière
4	Pain
4	Lait
4	Couches
4	Bière
5	Pain
5	Lait
5	Couches
6	Pain
6	Œufs



# La règle d'association

Une règle d'association est une règle de la forme  $A \Rightarrow B$  où  $A$  et  $B$  sont des ensembles d'items.

Exemples de règles d'associations :

$\{\text{Couches}\} \Rightarrow \{\text{Bière}\}$  :

# La règle d'association

Une règle d'association est une règle de la forme  $A \Rightarrow B$  où  $A$  et  $B$  sont des ensembles d'items.

## Exemples de règles d'associations :

$\{\text{Couches}\} \Rightarrow \{\text{Bière}\}$  : « Les clients qui achètent des couches ont tendance à acheter de la bière »

$\{\text{Couches}\} \Rightarrow \{\text{Pain}\}$

# La règle d'association

Une règle d'association est une règle de la forme  $A \Rightarrow B$  où  $A$  et  $B$  sont des ensembles d'items.

## Exemples de règles d'associations :

$\{\text{Couches}\} \Rightarrow \{\text{Bière}\}$	: « Les clients qui achètent des couches ont tendance à acheter de la bière »
$\{\text{Couches}\} \Rightarrow \{\text{Pain}\}$	: « Les clients qui achètent des couches ont tendance à acheter du pain »
$\{\text{Couches}, \text{Œufs}\} \Rightarrow \{\text{Bière}\}$	

# La règle d'association

Une règle d'association est une règle de la forme  $A \Rightarrow B$  où  $A$  et  $B$  sont des ensembles d'items.

## Exemples de règles d'associations :

$\{\text{Couches}\} \Rightarrow \{\text{Bière}\}$	: « Les clients qui achètent des couches ont tendance à acheter de la bière »
$\{\text{Couches}\} \Rightarrow \{\text{Pain}\}$	: « Les clients qui achètent des couches ont tendance à acheter du pain »
$\{\text{Couches}, \text{Œufs}\} \Rightarrow \{\text{Bière}\}$	: « Les clients qui achètent des couches et des œufs ont tendance à acheter de la bière »

# La règle d'association

Une règle d'association est une règle de la forme  $A \Rightarrow B$  où  $A$  et  $B$  sont des ensembles d'items.

## Exemples de règles d'associations :

- $\{\text{Couches}\} \Rightarrow \{\text{Bière}\}$  : « Les clients qui achètent des couches ont tendance à acheter de la bière »
- $\{\text{Couches}\} \Rightarrow \{\text{Pain}\}$  : « Les clients qui achètent des couches ont tendance à acheter du pain »
- $\{\text{Couches}, \text{Œufs}\} \Rightarrow \{\text{Bière}\}$  : « Les clients qui achètent des couches et des œufs ont tendance à acheter de la bière »
- $\{\text{Bière}, \text{Pain}, \text{Lait}\} \Rightarrow \{\text{Couches}\}$  : « Les clients qui achètent de la bière, du pain et du lait, ont tendance à acheter de la bière »
- $\{\text{Soda}, \text{Bière}\} \Rightarrow \{\text{Couches}, \text{Lait}\}$  : « Les clients qui achètent du soda et de la bière ont tendance à acheter des couches et du lait »

# La règle d'association

Deux questions sont soulevées par la recherche de règles :

- **leur grand nombre**
- **leur réalité**

Il s'agit donc d'extraire les règles les plus pertinentes, sans avoir à étudier toutes les combinaisons possibles d'items.

# Les indicateurs

Le support

La confiance

Le lift (amélioration)

# Le support

Un premier critère, utilisé principalement pour diminuer le nombre de règles à examiner est le calcul de la fréquence d'apparition des items d'une règle dans un ticket ou une transaction.

Le **support de  $A \Rightarrow B$**  est la **probabilité**, en choisissant une transaction au hasard, d'avoir à la fois les items de A et de B.

$$\text{Support}(A \Rightarrow B) = p(A \cap B)$$



# Exemple

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

## Règles

R1 : {*Couches*}  $\Rightarrow$  {*Bière*}

R2 : {*Bière*}  $\Rightarrow$  {*Couches*}

R3 : {*Pain*}  $\Rightarrow$  {*Lait*}

R4 : {*Lait*}  $\Rightarrow$  {*Pain*}

Calculer les **supports** des 4 règles  
R1, R2, R3 et R4.

# Exemple

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

## Règles

R1 : {Couches}  $\Rightarrow$  {Bière}

R2 : {Bière}  $\Rightarrow$  {Couches}

R3 : {Pain}  $\Rightarrow$  {Lait}

R4 : {Lait}  $\Rightarrow$  {Pain}

$$\begin{aligned} & \textit{Support}(\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}) \\ &= \textit{Support}(\{Bière\} \Rightarrow \{Couches\}) = \frac{3}{6} = 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \textit{Support}(\{Pain\} \Rightarrow \{Lait\}) \\ &= \textit{Support}(\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}) = \frac{3}{6} = 0,5 \end{aligned}$$

# Petit exercice de proba

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

On choisit au hasard un ticket et on introduit les notations suivantes :

L : « le lait est présent sur le ticket » (*Lait* est un item de la transaction (itemset))

P : « le pain est présent sur le ticket »

B : « la bière est présente sur le ticket »

C : « les couches sont présentes sur le ticket »

1. À quelles notations correspondent les probabilités précédentes (qui ont donné 0,5) ?

2. Calculer  $p(L)$ ,  $p(P)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .

3. Règle R1 :  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}$

- a. Rappelez comment s'énonce cette règle
- b. Quelle probabilité conditionnelle pourrait-on calculer pour traduire cette règle ?
- c. Calculez de même les probabilités associées aux trois autres règles.

*Remarque : les probabilités conditionnelles précédentes, correspondent à un nouveau indicateur appelé confiance*

4. Nous remarquons que  $p_P(L) < p_L(P)$  et pourtant la règle  $\{Pain\} \Rightarrow \{Lait\}$  paraît plus intéressante que la règle  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$ . Pouvez-vous dire pourquoi ?

*Il pourrait être intéressant de comparer les probabilités conditionnelles à d'autres probabilités... et d'en déduire un nouvel indicateur !*

5. À la lumière des résultats précédents, quelles sont les règles qui vous paraissent les plus pertinentes ?

# Petit exercice de proba

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

On choisit au hasard un ticket et on introduit les notations suivantes :

L : « le lait est présent sur le ticket » (*Lait* est un item de la transaction (itemset))

P : « le pain est présent sur le ticket »

B : « la bière est présente sur le ticket »

C : « les couches sont présentes sur le ticket »

**1. À quelles notations correspondent les probabilités précédentes (qui ont donné 0,5) ?**

2. Calculer  $p(L)$ ,  $p(P)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .

3. Règle R1 :  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}$

a. Rappelez comment s'énonce cette règle

b. Quelle probabilité conditionnelle pourrait-on calculer pour traduire cette règle ?

c. Calculez de même les probabilités associées aux trois autres règles.

*Remarque : les probabilités conditionnelles précédentes, correspondent à un nouveau indicateur appelé confiance*

4. Nous remarquons que  $p_C(B) = p_L(P)$  et pourtant la règle  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bières\}$  paraît plus intéressante que la règle  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$ . Pouvez-vous dire pourquoi ?

*Il pourrait être intéressant de comparer les probabilités conditionnelles à d'autres probabilités... et d'en déduire un nouvel indicateur !*

5. À la lumière des résultats précédents, quelles sont les règles qui vous paraissent les plus pertinentes ?

# Petit exercice de proba

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

On choisit au hasard un ticket et on introduit les notations suivantes :

- L : « le lait est présent sur le ticket » (*Lait* est un item de la transaction)
- P : « le pain est présent sur le ticket »
- B : « la bière est présente sur le ticket »
- C : « les couches sont présentes sur le ticket »

1. À quelles notations correspondent les probabilités précédentes (qui ont donné 0,5) ?

Règles

R1 : {Couches}⇒ {Bière}

R2 : {Bière}⇒ {Couches}

R3 : {Pain}⇒ {Lait}

R4 : {Lait}⇒ {Pain}

- 2. Calculer  $p(L), p(P), p(B)$
- 3. Règle R1 : {Couches}⇒ {Bière}
  - a. Rappelez comment s'écrit la probabilité conditionnelle pour traduire cette règle ?
  - b. Quelle probabilité conditionnelle correspond à la règle R2 ?
  - c. Calculez de même les probabilités associées aux trois autres règles.

Remarque : les probabilités conditionnelles précédentes, correspondent à un nouveau indicateur appelé confiance

- 4. Nous remarquons que  $p_C(B) = p_L(P)$  et pourtant la règle {Couches}⇒ {Bière} paraît plus intéressante que la règle {Lait}⇒ {Pain}. Pouvez-vous dire pourquoi ?  
Il pourrait être intéressant de comparer les probabilités conditionnelles à d'autres probabilités... et d'en déduire un nouvel indicateur !
- 5. À la lumière des résultats précédents, quelles sont les règles qui vous paraissent les plus pertinentes ?

# Petit exercice de proba

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

On choisit au hasard un ticket et on introduit les notations suivantes :

L : « le lait est présent sur le ticket » (*Lait* est un item de la transaction (itemset))

P : « le pain est présent sur le ticket »

B : « la bière est présente sur le ticket »

C : « les couches sont présentes sur le ticket »

1. À quelles notations correspondent les probabilités précédentes (qui ont donné 0,5) ?

2. Calculer  $p(L)$ ,  $p(P)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .

3. Règle R1 :  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}$

- a. Rappelez comment s'énonce cette règle
- b. Quelle probabilité conditionnelle pourrait-on calculer pour traduire cette règle ?
- c. Calculez de même les probabilités associées aux trois autres règles.

*Remarque : les probabilités conditionnelles précédentes, correspondent à un nouveau indicateur appelé confiance*

4. Nous remarquons que  $p_C(B) = p_L(P)$  et pourtant la règle  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bières\}$  paraît plus intéressante que la règle  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$ . Pouvez-vous dire pourquoi ?

*Il pourrait être intéressant de comparer les probabilités conditionnelles à d'autres probabilités... et d'en déduire un nouvel indicateur !*

5. À la lumière des résultats précédents, quelles sont les règles qui vous paraissent les plus pertinentes ?

# Petit exercice de proba

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches
3	Lait, Couches
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

On choisit au hasard un ticket et on introduit les notations suivantes :

L : « le lait est présent sur le ticket » (*Lait* est un item de la transaction (itemset))

P : « le pain est présent sur le ticket »

B : « la bière est présente sur le ticket »

C : « les couches sont présentes sur le ticket »

1. À quelles notations correspondent les probabilités précédentes (qui ont donné 0,5) ?

2. Calculer  $p(L)$ ,  $p(P)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .

3. Règle  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}$

$$p(L) = \frac{4}{6} = 0,67 ; p(P) = \frac{5}{6} = 0,83 ; p(B) = \frac{3}{6} = 0,5 ; p(C) = \frac{4}{6} = 0,67$$

4. Calculez de même les probabilités associées aux trois autres règles.

Remarque : les probabilités conditionnelles précédentes, correspondent à un nouveau indicateur appelé confiance

4. Nous remarquons que  $p_C(B) = p_L(P)$  et pourtant la règle  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bières\}$  paraît plus intéressante que la règle  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$ . Pouvez-vous dire pourquoi ?
- Il pourrait être intéressant de comparer les probabilités conditionnelles à d'autres probabilités... et d'en déduire un nouvel indicateur !*
5. À la lumière des résultats précédents, quelles sont les règles qui vous paraissent les plus pertinentes ?

# Petit exercice de proba

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

On choisit au hasard un ticket et on introduit les notations suivantes :

L : « le lait est présent sur le ticket » (*Lait* est un item de la transaction (itemset))

P : « le pain est présent sur le ticket »

B : « la bière est présente sur le ticket »

C : « les couches sont présentes sur le ticket »

1. À quelles notations correspondent les probabilités précédentes (qui ont donné 0,5) ?

2. Calculer  $p(L)$ ,  $p(P)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .

### 3. Règle R1 : $\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}$

- a. Rappelez comment s'énonce cette règle
- b. Quelle probabilité conditionnelle pourrait-on calculer pour traduire cette règle ?
- c. Calculez de même les probabilités associées aux trois autres règles.

*Remarque : les probabilités conditionnelles précédentes, correspondent à un nouveau indicateur appelé **confiance***

4. Nous remarquons que  $p_C(B) = p_L(P)$  et pourtant la règle  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bières\}$  paraît plus intéressante que la règle  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$ . Pouvez-vous dire pourquoi ?  
*Il pourrait être intéressant de comparer les probabilités conditionnelles à d'autres probabilités... et d'en déduire un nouvel indicateur !*
5. À la lumière des résultats précédents, quelles sont les règles qui vous paraissent les plus pertinentes ?



$\{Couches\} \Rightarrow \{Bi\grave{e}re\}$  : « les clients qui achètent des couches ont tendance à acheter de la bière ».

Pour « valider » cette règle, nous pouvons calculer la proportion de clients achetant des bières parmi ceux qui achètent des couches. En probabilités,  $p_C(B)$ .

$$p_C(B) = \frac{p(C \cap B)}{p(C)} = \frac{3/6}{4/6} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Autres probabilités :

$$\text{R\`egle } R2 : p_B(C) = \frac{p(C \cap B)}{p(B)} = \frac{3/6}{3/6} = 1$$

$$\text{R\`egle } R3 : p_P(L) = \frac{p(P \cap L)}{p(P)} = \frac{3/6}{5/6} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\text{R\`egle } R4 : p_L(P) = \frac{p(P \cap L)}{p(L)} = \frac{3/6}{4/6} = \frac{3}{4} = 0,75$$

P : « le pain est présent sur le ticket »

B : « la bière est présente sur le ticket »

C : « les couches sont présentes sur le ticket »

1. À quelles notations correspondent les probabilités précédentes (qui ont donné 0,5) ?

2. Calculer  $p(L)$ ,  $p(P)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .

### 3. Règle R1 : $\{Couches\} \Rightarrow \{Bi\grave{e}re\}$

- a. Rappelez comment s'énonce cette règle
- b. Quelle probabilité conditionnelle pourrait-on calculer pour traduire cette règle ?
- c. Calculez de même les probabilités associées aux trois autres règles.

*Remarque : les probabilités conditionnelles précédentes, correspondent à un nouveau indicateur appelé **confiance***

4. Nous remarquons que  $p_C(B) = p_L(P)$  et pourtant la règle  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bi\grave{e}res\}$  paraît plus intéressante que la règle  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$ . Pouvez-vous dire pourquoi ?

*Il pourrait être intéressant de comparer les probabilités conditionnelles à d'autres probabilités... et d'en déduire un nouvel indicateur !*

## Règles

R1 :  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bi\grave{e}re\}$

R2 :  $\{Bi\grave{e}re\} \Rightarrow \{Couches\}$

R3 :  $\{Pain\} \Rightarrow \{Lait\}$

R4 :  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$

5. À la lumière des résultats précédents, lesquelles des règles vous paraissent les plus utiles ?

# Petit exercice de proba

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

On choisit au hasard un ticket et on introduit les notations suivantes :

L : « le lait est présent sur le ticket » (*Lait* est un item de la transaction (itemset))

P : « le pain est présent sur le ticket »

B : « la bière est présente sur le ticket »

C : « les couches sont présentes sur le ticket »

1. À quelles notations correspondent les probabilités précédentes (qui ont donné 0,5) ?

2. Calculer  $p(L)$ ,  $p(P)$ ,  $p(B)$  et  $p(C)$ .

3. Règle R1 :  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}$

- a. Rappelez comment s'énonce cette règle
- b. Quelle probabilité conditionnelle pourrait-on calculer pour traduire cette règle ?
- c. Calculez de même les probabilités associées aux trois autres règles.

*Remarque : les probabilités conditionnelles précédentes, correspondent à un nouveau indicateur appelé confiance*

4. **Nous remarquons que  $p_C(B) = p_L(P)$  et pourtant la règle  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bières\}$  paraît plus intéressante que la règle  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$ . Pouvez-vous dire pourquoi ?**

*Il pourrait être intéressant de comparer les probabilités conditionnelles à d'autres probabilités... et d'en déduire un nouvel indicateur !*

5. À la lumière des résultats précédents, quelles sont les règles qui vous paraissent les plus pertinentes ?

# Petit exercice de proba

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
	e

- $p_P(L) = 0,6$  et  $p(L) = 0,67 : p_P(L) < p(L)$
- $p_C(B) = 0,75$  et  $p(B) = 0,5 : p_C(B) < p(B)$

La probabilité d'avoir du pain dans les tickets ayant du lait est élevée mais elle est plus faible que la probabilité d'avoir du pain dans un ticket quelconque. La règle  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$  est donc sans intérêt.

En contrepartie, le fait qu'il y ait des couches dans le ticket augmente la probabilité d'avoir de la bière. La règle  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}$  a donc plus de sens.

2. Calculer  $p(L), p(P), p(B)$  et  $p(C)$ .
3. Règle R1 :  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}$ 
  - a. Rappelez comment s'énonce cette règle
  - b. Quelle probabilité conditionnelle pourrait-on calculer pour traduire cette règle ?
  - c. Calculez de même les probabilités associées aux trois autres règles.

*Remarque : les probabilités conditionnelles précédentes, correspondent à un nouvelle indicateur appelé confiance*

4. **Nous remarquons que  $p_C(B) = p_L(P)$  et pourtant la règle  $\{Couches\} \Rightarrow \{Bières\}$  paraît plus intéressante que la règle  $\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}$ . Pouvez-vous dire pourquoi ?**  
*Il pourrait être intéressant de comparer les probabilités conditionnelles à d'autres probabilités... et d'en déduire un nouvel indicateur !*
5. À la lumière des résultat précédents, quelles sont les règles qui vous paraissent les plus pertinentes ?

Règles

R1 : {Couches}⇒ {Bière}  
R2 : {Bière}⇒ {Couches}  
R3 : {Pain}⇒ {Lait}  
R4 : {Lait}⇒ {Pain}

- $p_P(L) = 0,75$  et  $p(L) = 0,5$  :  $p_P(L) > p(L)$
- $p_L(P) = 0,8$  et  $p(P) = 0,83$  :  $p_L(P) < p(P)$

La probabilité d’avoir du pain dans les tickets ayant du lait est élevée mais elle est plus faible que la probabilité d’avoir du pain dans un ticket quelconque.

La règle {Lait}⇒ {Pain} est donc sans intérêt.

En contrepartie, le fait qu’il y ait du pain dans le ticket augmente la probabilité d’avoir du lait. La règle {Pain}⇒ {Lait} a donc plus de sens.

Autres règles :  
{Bière}⇒ {Couches} :  $p_B(C) = 1$  et  $p(C) = \frac{2}{3} \Rightarrow p_B(C) > p(C)$   
{Pain}⇒ {Lait} :  $p_P(L) = 0,6$  et  $p(L) = 0,67 \Rightarrow p_P(L) < p(L)$

Un critère de pertinence de la règle pourrait être la mesure de l’amélioration de la probabilité.

$$Amélioration\ de\ (A \Rightarrow B) = \frac{p_A(B)}{p(B)}$$

Pour R2, l’amélioration est  $\frac{p_B(C)}{p(C)} = \frac{6}{4} = 1,5$

Pour R1, l’amélioration est  $\frac{p_C(B)}{p(B)} = \frac{0,75}{0,5} = 1,5$

Pour R4 , l’amélioration est  $\frac{p_L(P)}{p(P)} = 0,9$

Pour R5 , l’amélioration est  $\frac{p_P(L)}{p(L)} = 0,9$

5. À la lumière des résultats précédents, quelles sont les règles qui vous paraissent les plus pertinentes ?

# Bilan

Règle : $A \Rightarrow B$	Support $p(A \cap B)$	Confiance $p_A(B)$	Amélioration $\frac{p_A(B)}{p(A)}$
$\{Bière\} \Rightarrow \{Couches\}$	0,5	1	1,5
$\{Couches\} \Rightarrow \{Bière\}$	0,5	0,75	1,5
<del><math>\{Lait\} \Rightarrow \{Pain\}</math></del>	<del>0,5</del>	<del>0,75</del>	<del>0,9</del>
<del><math>\{Pain\} \Rightarrow \{Lait\}</math></del>	<del>0,5</del>	<del>0,6</del>	<del>0,9</del>

# Bilan

Les règles les plus intéressantes, sont celles qui ont :

- un **support** suffisant
- une **confiance** élevée, sinon la règle n'a pas de sens
- un **coefficient d'amélioration** élevé (au moins supérieur à 1)

Règle $A \Rightarrow B$			
Indicateur	Support	Confiance	Lift
Signification	Probabilité d’avoir un ticket contenant les items de $A$ et de $B$	Probabilité d’avoir les items de $B$ sachant qu’on a les items de $A$	Augmentation (amélioration) de la probabilité d’avoir les items de $B$ en ne s’intéressant qu’au tickets ayant les items de $A$
Calcul	$p(A \cap B)$	$p_A(B)$	$\frac{p_A(B)}{p(B)} = \frac{\text{confiance}}{p(B)}$
Valeurs minimales usuelles ?	Dépend de la taille de la base (plus élevé sur des petites populations) : 1%, 5%,10%...	60%, 70%, 80%...	1,5 ; 2...

# Aspects algorithmiques

Dimensions du problème

Algorithme apriori



# Dimensions du problème

**Exercice : si nous disposons de  $n$  items ( $n$  articles), combien a-t-on de règles possibles ?**

Si nous disposons de  $n$  items ( $n$  articles),  
combien a-t-on de règles possibles ?

**Première approche : combinaisons**

Si nous disposons de  $n$  items ( $n$  articles),  
combien a-t-on de règles possibles ?

**Première approche : combinaisons**

Une règle est constituée de **deux itemsets**, *antécédent* et *conséquent* :

***Antécédent  $\Rightarrow$  Conséquent.***

Si nous disposons de  $n$  items ( $n$  articles),  
combien a-t-on de règles possibles ?

### Première approche : combinaisons

Une règle est constituée de **deux itemsets**, *antécédent* et *conséquent* :

***Antécédent  $\Rightarrow$  Conséquent.***

Choix successifs :

- Choix de la combinaison correspondant à l'antécédent
- Choix de la combinaison correspondant au conséquent

Si nous disposons de  $n$  items ( $n$  articles),  
combien a-t-on de règles possibles ?

### Première approche : combinaisons

Une règle est constituée de **deux itemsets**, *antécédent* et *conséquent* :

***Antécédent  $\Rightarrow$  Conséquent.***

Choix successifs :

- Choix de la combinaison correspondant à l'antécédent
- Choix de la combinaison correspondant au conséquent

$$\sum_{n=1}^{r-1} C_r^n \left( \sum_{m=1}^{r-n} C_{r-n}^m \right)$$

Si nous disposons de  $n$  items ( $n$  articles),  
combien a-t-on de règles possibles ?

**Deuxième approche : listes**

# Si nous disposons de $n$ items ( $n$ articles), combien a-t-on de règles possibles ?

## Deuxième approche : listes

Une règle peut être représentée par une **r-liste** d'éléments pris dans  $\{A, C, N\}$ .

Mais attention, il faut enlever de ces r-listes celles qui ne contiennent pas de A et celles qui ne contiennent pas de C.

## Notations

$R$  : ensemble des r-listes pouvant représenter une règle.

$L$  : ensemble des r-listes d'éléments pris dans  $\{A, C, N\}$ ,

$L_{\bar{A}}$  : ensemble des r-listes d'éléments pris dans  $\{C, N\}$ ,

$L_{\bar{C}}$  : ensemble des r-listes d'éléments pris dans  $\{A, N\}$ .

Nous avons la relation :  $R = L - (L_{\bar{A}} \cup L_{\bar{C}})$

Si nous disposons de  $n$  items ( $n$  articles),  
combien a-t-on de règles possibles ?

## Deuxième approche : listes

$$R = L - (L_{\bar{A}} \cup L_{\bar{C}})$$

$$(L_{\bar{A}} \cup L_{\bar{C}}) \subset L \Rightarrow \text{card } R = \text{card } (L - (L_{\bar{A}} \cup L_{\bar{C}})) = \text{card } L - \text{card } (L_{\bar{A}} \cup L_{\bar{C}})$$

$$\text{card } (L_{\bar{A}} \cup L_{\bar{C}}) = \text{card } L_{\bar{A}} + \text{card } L_{\bar{C}} - \text{card } (L_{\bar{A}} \cap L_{\bar{C}})$$

$$\text{card } R = \text{card } L - \text{card } L_{\bar{A}} - \text{card } L_{\bar{C}} + \text{card } (L_{\bar{A}} \cap L_{\bar{C}})$$

$$\text{Or : } \text{card } L = 3^r ; \text{card } L_{\bar{A}} = \text{card } L_{\bar{C}} = 2^r ; \text{card } (L_{\bar{A}} \cap L_{\bar{C}}) = 1$$

En effet  $L_{\bar{A}} \cap L_{\bar{C}}$  ne contient qu'une seule liste :  $(N, N, \dots, N)$

$$\text{Bilan : } \text{card } R = 3^r - 2 \times 2^r + 1 = 3^r - 2^{r+1} + 1$$

Le nombre de règles dépend **exponentiellement** du nombre d'articles, il n'est donc pas question d'évaluer toutes les règles pour sélectionner les plus intéressantes.



# Algorithme apriori - Principe

Si un ensemble d'items est **peu fréquent**, tout ensemble le contenant sera également peu fréquent

## Méthode :

- On se fixe préalablement un **seuil minimal** pour le **support**. On décide que pour qu'une règle  $A \Rightarrow B$  soit intéressante, son support doit être supérieur à ce seuil.
- On calcule d'abord la **fréquence de chaque items**, si une de ces fréquences est inférieure au seuil minimal, toute règle contenant l'item correspondant aura un support inférieur au support minimum attendu, on décide donc de ne pas s'intéresser à ces règles
- On continue avec les **paires d'items** en élaguant ainsi les règles contenant les items concernés.
- Et ainsi de suite...

# Algorithme apriori - Principe

Illustration sur l'exemple initial :

Nous nous fixons un **seuil minimum de 40%** pour le support (normalement sur des gros jeux de données, les seuils sont beaucoup plus faibles 1%,5%...)

**Fréquence des items**

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

# Algorithme apriori - Principe

Illustration sur l'exemple initial :

Nous nous fixons un **seuil minimum de 40%** pour le support (normalement sur des gros jeux de données, les seuils sont beaucoup plus faibles 1%,5%...)

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

## Fréquence des items

Pain :  $5/6 = 0,83$

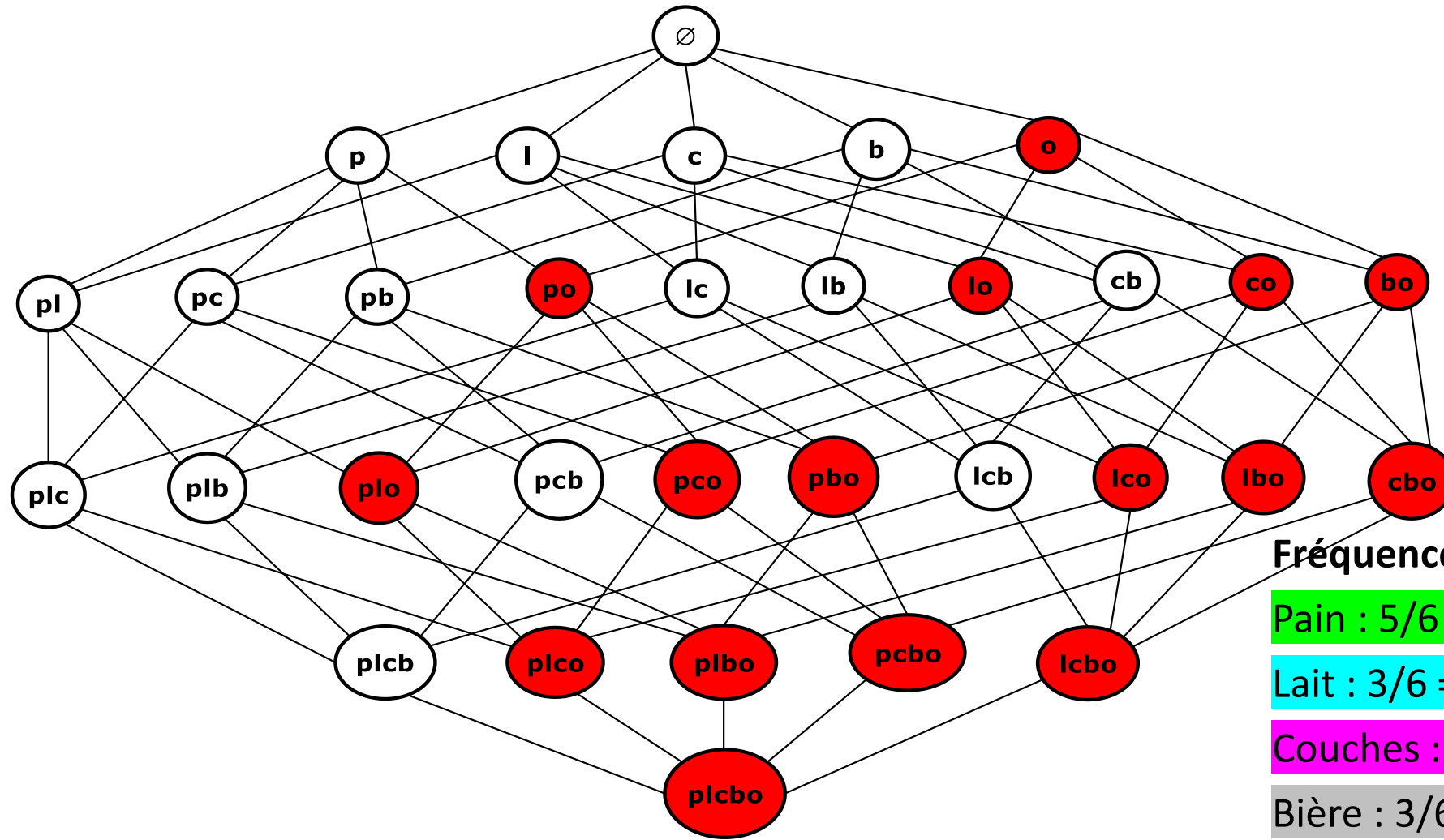
Lait :  $3/6 = 0,5$

Couches :  $4/6 = 0,67$

Bière :  $3/6 = 0,5$

Œufs :  $2/6 = 0,33 < 0,4$  : toute règle contenant Œufs aura un support inférieur au seuil minimum de 40%.

# Algorithme apriori - Principe



Fréquence des items

Pain :  $5/6 = 0,83$

Lait :  $3/6 = 0,5$

Couches :  $4/6 = 0,67$

Bière :  $3/6 = 0,5$

Œufs :  $2/6 = 0,33 < 0,4$  : toute règle contenant Œufs aura un support inférieur au seuil minimum de 40%.

# Algorithme apriori - Principe

## Étape 2 : fréquence des paires

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

Étape 2 : on s'intéresse **aux paires de produits** (parmi celles qui ne contiennent pas d'œufs)

$$\{\text{Pain, Lait}\} : 3/6 = 0,5$$

$$\{\text{Pain, Couches}\} : 3/6 = 0,5$$

$$\{\text{Pain, Bière}\} : 2/6 = 0,33$$

$$\{\text{Lait, Couches}\} : 2/6 = 0,33$$

$$\{\text{Lait, Bière}\} : 1/6 = 0,17$$

$$\{\text{Couches, Bière}\} : 3/6 = 0,5$$

# Algorithme apriori - Principe

## Étape 2 : fréquence des paires

Transaction	Items
1	Pain, Lait
2	Pain, Couches, Bière, Œufs
3	Lait, Couches, Bière
4	Pain, Lait, Couches, Bière
5	Pain, Lait, Couches
6	Pain, Œufs

Étape 2 : on s'intéresse **aux paires de produits** (parmi celles qui ne contiennent pas d'œufs)

{Pain, Lait} :  $3/6 = 0,5$

{Pain, Couches} :  $3/6 = 0,5$

{Pain, Bière} :  $2/6 = 0,33 < 0,4$

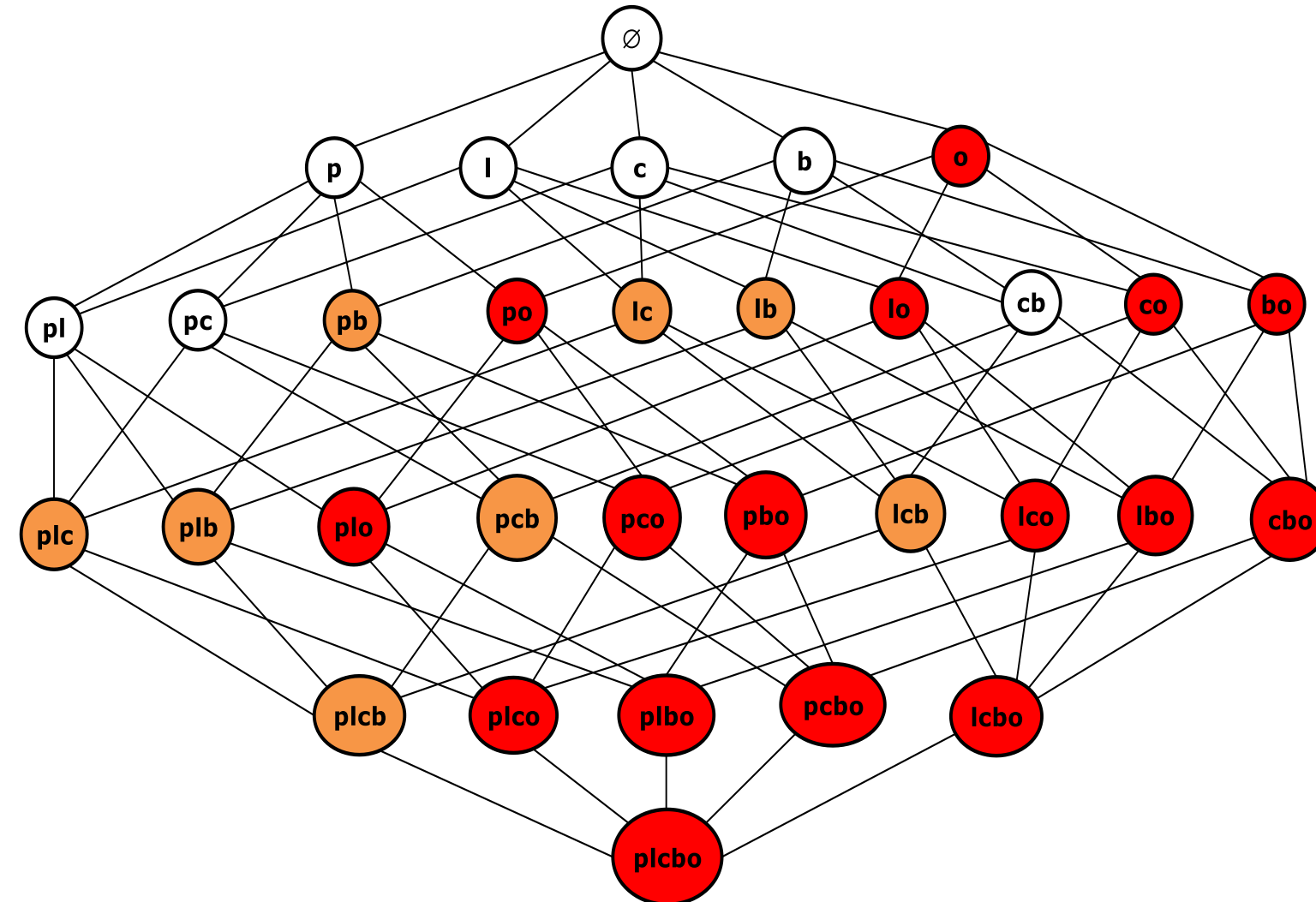
{Lait, Couches} :  $2/6 = 0,33 < 0,4$

{Lait, Bière} :  $1/6 = 0,17 < 0,4$

{Couches, Bière} :  $3/6 = 0,5$

# Algorithme apriori - Principe

## Étape 2 : fréquence des paires



Étape 2 : on s'intéresse **aux paires de produits** (parmi celles qui ne contiennent pas d'œufs)

{Pain, Lait} :  $3/6 = 0,5$

{Pain, Couches} :  $3/6 = 0,5$

**{Pain, Bière} :  $2/6 = 0,33 < 0,4$**

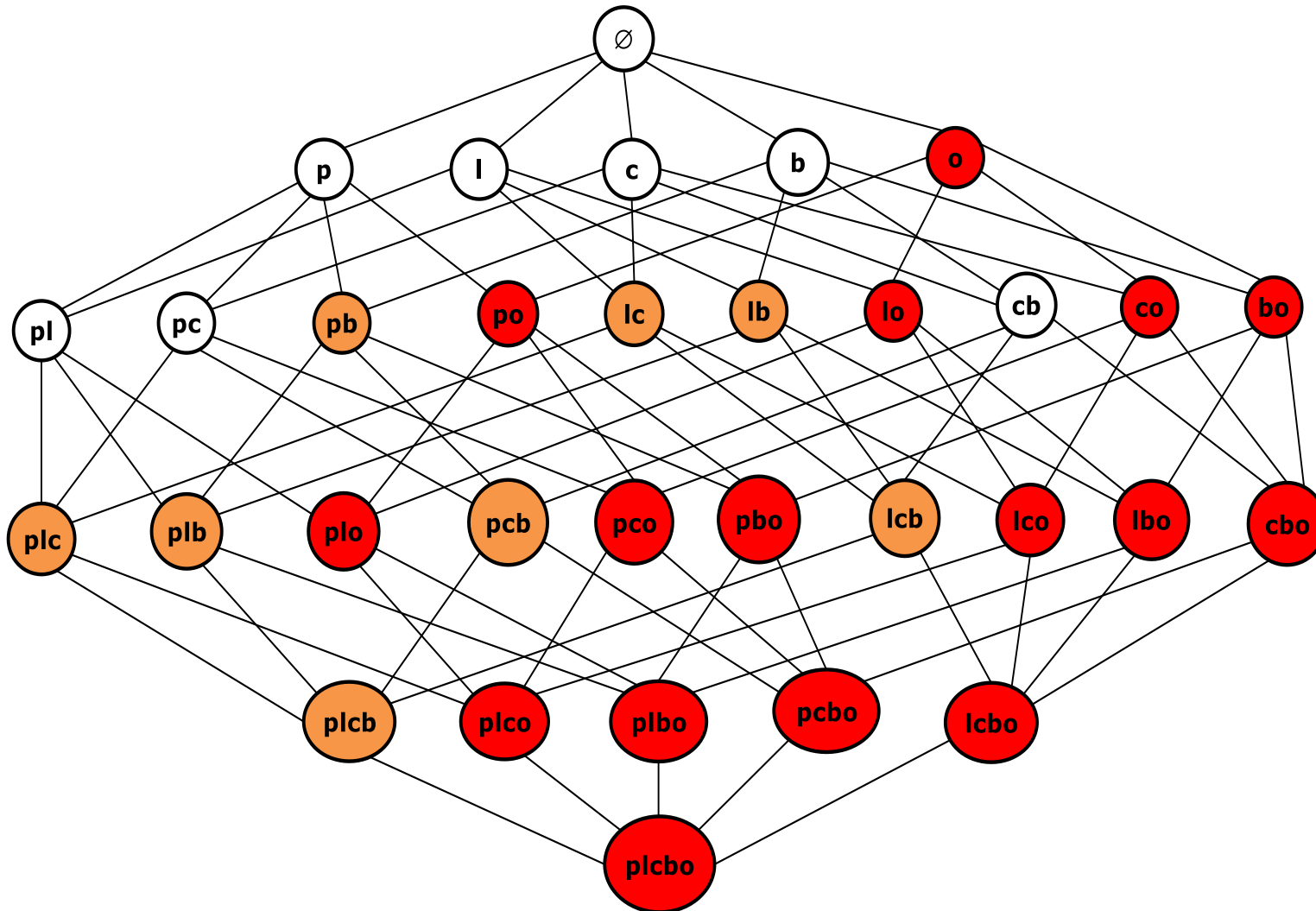
**{Lait, Couches} :  $2/6 = 0,33 < 0,4$**

**{Lait, Bière} :  $1/6 = 0,17 < 0,4$**

{Couches, Bière} :  $3/6 = 0,5$

# Algorithme apriori - Principe

## Étape 2 : fréquence des paires



Il n'y a plus qu'à examiner les règles utilisant les items :

- {Pain, Lait}
- {Pain, Couches}
- {Couches, Bière}

{Pain, Lait} :  $3/6 = 0,5$

{Pain, Couches} :  $3/6 = 0,5$

**{Pain, Bière} :  $2/6 = 0,33 < 0,4$**

**{Lait, Couches} :  $2/6 = 0,33 < 0,4$**

**{Lait, Bière} :  $1/6 = 0,17 < 0,4$**

{Couches, Bière} :  $3/6 = 0,5$



# Python

- La librairie Python la plus connue dans le domaine du Machine Learning est **Scikit-Learn**, mais l'algorithme **apriori** n'y est pas implémenté.
- Nous pourrions le programmer car il n'est pas très difficile, mais par manque de temps, nous allons utiliser l'implémentation d'une autre librairie, un peu moins connues, **mlxtend** (<http://rasbt.github.io/mlxtend/> - ce n'est pas la seule librairie implémentant « apriori »)

# Python – Les données – *panier2.csv*

Transaction	Produit
1	Pain
1	Lait
2	Pain
2	Couches
2	Bière
2	Œufs
3	Lait
3	Couches
3	Bière
4	Pain
4	Lait
4	Couches
4	Bière
5	Pain
5	Lait
5	Couches
6	Pain
6	Œufs

```
trans;produit
1;Pain
1;Lait
2;Pain
2;Couches
2;Bière
2;Œufs
3;Lait
3;Couches
3;Bière
4;Pain
4;Lait
4;Couches
4;Bière
5;Pain
5;Lait
5;Couches
6;Pain
6;Œufs
```

# Tableau disjonctif complet

L'importation des données ne pose pas de difficulté, en revanche il est en général nécessaire de les mettre sous une autre forme pour les traiter avec une recherche d'association. Dans la plupart de logiciels, la forme attendue est une des suivantes (Tableau disjonctif complet)

trans	Bière	Couches	Lait	Pain	Œufs
1	0	0	1	1	0
2	1	1	0	1	1
3	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	0
6	0	0	0	1	1

trans	Bière	Couches	Lait	Pain	Œufs
1	False	False	True	True	False
2	True	True	False	True	True
3	True	True	True	False	False
4	True	True	True	True	False
5	False	True	True	True	False
6	False	False	False	True	True

# Importation et préparation des données

## **# Importation des bibliothèques nécessaires**

```
import pandas as pd
import numpy as np
import os
from mlxtend.frequent_patterns import apriori, association_rules
```

## **# Modification du répertoire par défaut**

```
os.chdir('C:\INFO\R5 - Optimisation')
```

## **# Importation du fichier panier2.csv**

```
dataset = pd.read_table('panier2.csv', sep = ';', encoding = 'ANSI')
```

## **# Tableau de contingence (ou tableau croisé) des variables trans et produit**

```
tabc = pd.crosstab(dataset.trans, dataset.produit)
```

## **# Transformation en tableau booléen**

```
tabc = tabc.replace(0, False)
tabc = tabc.replace(1, True)
```

# Algorithme – fonction `apriori`

La fonction **`apriori`** prend en entrée le tableau booléen précédent et un support minimum, et renvoyant un **dataframe avec les colonnes « support » et « itemset »** pour tous les itemset dont le support est supérieur au support minimum.

## #itemsets fréquents obtenus avec l'algorithme apriori

```
freq_itemsets = apriori(tabc,min_support=0.3,max_len=4,use_colnames=True)
```

Index	support	itemsets
0	0.5	frozenset({'Bière'})
1	0.666667	frozenset({'Couches'})
2	0.666667	frozenset({'Lait'})
3	0.833333	frozenset({'Pain'})
4	0.333333	frozenset({'Œufs'})
5	0.5	frozenset({'Bière', 'Couches'})
6	0.333333	frozenset({'Lait', 'Bière'})
7	0.333333	frozenset({'Bière', 'Pain'})
8	0.5	frozenset({'Lait', 'Couches'})



Objet  
**frozenset** :  
set immuable

# Règles d'association – fonction `association_rules`

**#génération des règles à partir des itemsets fréquents**

```
regles = association_rules(freq_itemsets, metric="confidence", min_threshold=0.75)
```

Index	antecedents	consequents	itecedent supp	nsequent supp	support	confidence	lift	leverage	conviction	zhangs_metric
0	frozenset({'Bière'})	frozenset({'Couches'})	0.5	0.666667	0.5	1	1.5	0.166667	inf	0.666667
1	frozenset({'Couches'})	frozenset({'Bière'})	0.666667	0.5	0.5	0.75	1.5	0.166667	2	1
2	frozenset({'Lait'})	frozenset({'Couches'})	0.666667	0.666667	0.5	0.75	1.125	0.0555556	1.33333	0.333333
3	frozenset({'Couches'})	frozenset({'Lait'})	0.666667	0.666667	0.5	0.75	1.125	0.0555556	1.33333	0.333333
4	frozenset({'Couches'})	frozenset({'Pain'})	0.666667	0.833333	0.5	0.75	0.9	-0.0555556	0.666667	-0.25
5	frozenset({'Lait'})	frozenset({'Pain'})	0.666667	0.833333	0.5	0.75	0.9	-0.0555556	0.666667	-0.25
6	frozenset({'Œufs'})	frozenset({'Pain'})	0.333333	0.833333	0.333333	1	1.2	0.0555556	inf	0.25
7	frozenset({'Bière', 'Lait'})	frozenset({'Couches'})	0.333333	0.666667	0.333333	1	1.5	0.111111	inf	0.5
8	frozenset({'Bière', 'Pain'})	frozenset({'Couches'})	0.333333	0.666667	0.333333	1	1.5	0.111111	inf	0.5

Exercise



## LES DONNÉES

Le jeu de données **Online Retail II** contient toutes les transactions effectuées pour un commerce en ligne, basé au Royaume-Uni, entre le 01/12/2009 et le 09/12/2011. La société vend principalement des articles-cadeaux uniques pour toutes les occasions. De nombreux clients de l'entreprise sont des grossistes.

## LES COLONNES

**InvoiceNo** : numéro de facture. Nombre entier à 6 chiffres attribué de manière unique à chaque transaction. Si le code commence par la lettre 'c', cela indique une annulation.

**StockCode** : code du produit (article). Nombre entier à 5 chiffres attribué de manière unique à chaque produit.

**Description** : nom du produit (article). Chaîne de caractère

**Quantity** : quantité de chaque produit (article) par transaction. Numérique.

**InvoiceDate** : Date et heure de la facture. Numérique.

**Price** : prix unitaire. Numérique. Prix du produit par unité en livres sterling (£).

**Customer ID** : numéro de client. Nombre entier à 5 chiffres attribué de manière unique à chaque client.

**Country** : nom du pays où réside un client. Chaîne de caractère

**Exercice** : choisir une année et un pays ('United Kingdom', 'EIRE', 'Germany', 'France', 'Netherlands', 'Spain', 'Switzerland', 'Portugal', 'Belgium'...) et effectuer une recherche d'association.