R1.06 – MATHEMATIQUES DISCRETES

PREMIERE PARTIE : ENSEMBLES

CARDINAL D'UN ENSEMBLE

ENSEMBLE FINI - CARDINAL

Un ensemble fini possède un nombre fini d'éléments (!).
Ce nombre est appelé cardinal de l'ensemble et se note $card(E)$ ou $|E|$ (pour un ensemble E).
$card(\emptyset) = |\emptyset| = 0$

ENSEMBLE INFINI

Un ensemble infini possède un nombre infini d'éléments (!).

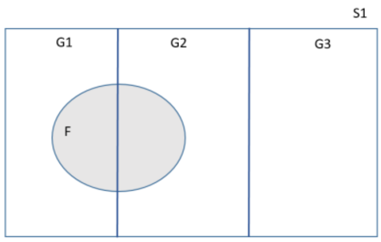
ENSEMBLE DENOMBRABLE

Un ensemble infini est dénombrable, si ses éléments peuvent être numérotés, c'est-à-dire s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturel) et cet ensemble.

Exemple : Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est dénombrable
$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, comme tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Une illustration ...

On note $S1$ l'ensemble des étudiants de semestre 1 d'un IUT. Ces étudiants sont répartis en trois groupes $G1, G2$ et $G3$.



- Les effectifs des groupes $G1, G2$ et $G3$ sont de 25, 26 et 13 étudiants.
  $\Longrightarrow Card(G1) = 25, Card(G2) = 26$
  et $Card(G1) = 13$
- Il y a 9 filles, 5 dans le $G1$, 4 dans $G2$ et aucune dans et $G3$

$$\Longrightarrow Card(F) = 9, Card(G1 \cap F) = 5, Card(G2 \cap F) = 4 \text{ et } Card(G3 \cap F) = 0$$

QUESTIONS

- Combien de Garçons dans $G1$?
  Il suffit de dénombrer les étudiants de $G1$ qui ne sont pas de filles : $25 - 5 = 20$
  De façon mathématique, l'ensemble des garçons du groupe 1 (ou des étudiants du groupe 1 qui ne sont pas des filles) est la différence :
  $$G1 - F = G1 \cap \bar{F}$$
  Le calcul précédent $(25 - 5)$ illustre la propriété très intuitive suivante :
  $$\boldsymbol{card(G1 - F) = card(G1) - card(G1 \cap F)}$$
  De façon générale : $\boldsymbol{card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)}$
- Combien d'étudiants qui sont, soit des filles soit dans le groupe G1 ?
  Il suffit d'ajouter aux étudiants du groupe $G1$, les filles qui ne sont pas dans $G1$: $25 + 4 = 29$

  De façon mathématique :
  $$25 + 4 = card(G1) + \boldsymbol{card(F - G1)} = card(G1) + \boldsymbol{card(F) - card(F \cap G1)}$$

Ce résultat illustre une nouvelle propriété des cardinaux :

$$\boldsymbol{card(F \cup G1) = card(G1) + card(F) - card(F \cap G1)}$$

De façon générale : $\boldsymbol{card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)}$

- Combien d'étudiants qui sont soit dans le groupe G1, soit dans le groupe G2 ?
  Il suffit de totaliser les effectifs des deux groupes : $25 + 26 = 51$
  De façon mathématique :
  $25 + 26 = card(G1) + card(G2)$
  Ce résultat illustre la propriété suivante :
  $\boldsymbol{G1}$ et $\boldsymbol{G2}$ étant disjoints, $\boldsymbol{card(G1 \cup G2) = card(G1) + card(G2)}$
  De façon générale : si $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$ alors $\boldsymbol{card(A \cup B) = card(A) + card(B)}$

PROPRIETES

Soient A et B deux sous-ensembles de E

- $\boldsymbol{card(\bar{A}) = card(E) - card(A)}$
- $\boldsymbol{card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)}$
  Remarque : si A et B sont disjoints alors : $card(A \cup B) = cardA + cardB$
- $\boldsymbol{card(A \setminus B) = card(A) - card(A \cap B)}$

QCM

Soient A et B deux ensembles

Cocher, parmi les expressions suivantes, celles qui sont égales à $\boldsymbol{card(\bar{A} \cap \bar{B})}$?

- ☐ $card(E) - card(A \cup B)$
- ☐ $card(\bar{A}) - card(B)$
- ☐ $card(E) - card(A) - card(B)$

Soient A, B et C trois ensembles

Cocher, parmi les expressions suivantes, celles qui sont égales à $\boldsymbol{card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})}$

- ☐ $card(A \cap \bar{C}) - card(A \cap B \cap \bar{C})$
- ☐ $card(A) - card(B \cup C)$
- ☐ $card(\bar{B} \cap \bar{C}) - card(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$
- ☐ $card(A) - card(A \cap B \cap C)$

EXERCICES

EXERCICE 1

Soient A, B et C trois ensembles.
Exprimer $\boldsymbol{card(A \cup B \cup C)}$ en fonction des cardinaux de A, B, C et de leurs intersections respectives

EXERCICE 2

On s'intéresse aux étudiants d'une faculté. On note M l'ensemble des étudiants suivant le cours de mathématique, I l'ensemble des étudiants suivant le cours d'informatique et E l'ensemble des étudiants suivant le cours d'économie.

Exprimer les cardinaux des ensembles suivants en fonction de $cardM$, $cardI$, $cardE$, $card(M \cap I)$, $card(M \cap E)$, $card(M \cap E)$, $card(I \cap M \cap E)$:

a. E_1 : L'ensemble des étudiants qui ne suivent aucun des trois cours,
b. E_2 : L'ensemble des étudiants qui ne suivent que le cours d'économie,
c. E_3 : L'ensemble des étudiants qui suivent le cours d'économie et le cours de math mais pas celui d'informatique,
d. E_4 : L'ensemble des étudiants qui suivent au plus deux des trois cours

EXERCICE 3

On s'intéresse aux 80 élèves de CM1/CM2 d'une école primaire

Ces élèves ont été évalués par des QCM sur trois matières : orthographe, calcul et anglais.
On utilisera indistinctement les termes de *QCM, questionnaires, tests* pour désigner ces épreuves.
Parmi les 80 élèves :

- 70 ont réussi le test d'orthographe
- 75 ont réussi celui de calcul
- 60 ont réussi le test d'anglais
- Tous ceux qui ont réussi le test d'anglais ont aussi réussi les tests d'orthographe et de calcul.
- 2 élèves n'ont réussi aucun des trois questionnaires

1. Traduire les valeurs numériques précédentes par des cardinaux sur les ensembles E, O, C et A où :
   E : ensemble des élèves évalués
   O : ensemble des élèves ayant réussi le test d'orthographe
   C : ensemble des élèves ayant réussi le test de calcul
   A : ensemble des élèves ayant réussi le test d'anglais

2. Interprétation de la phrase «Tous ceux qui ont réussi le test d'anglais ont aussi réussi les tests d'orthographe et de calcul » :
   a. Quelle relation ensembliste permet de traduire cette phrase ?
   b. Simplifiez les expressions : $A \cup O,\ A \cup O \cup C,\ \bar{A} \cap \bar{O}$
      Justifier vos réponses (un graphique n'est pas une justification).
   c. Déterminer $card(O \cup C)$. *Justifier votre réponse (un graphique n'est pas une justification).*
   d. En déduire $card(O \cap C)$. *Justifier votre réponse (un graphique n'est pas une justification).*

3. On s'intéresse aux ensembles suivants :
   - A1 : ensemble des élèves ayant réussi au moins un test
   - A2 : ensemble des élèves ayant réussi les trois tests
   - A3 : ensemble des élèves n'ayant réussi que le test de calcul

   a. Exprimer les ensembles A1, A2 et A3 en fonction de O, C et A.
   b. Exprimer les cardinaux de A1, A2 et A3 en fonction des cardinaux de la question 1.
      On justifiera bien sûr les résultats en appliquant des propriétés des cardinaux et des opérations sur les ensembles.

EXERCICE 4

Soient A, B et C trois ensembles

Cocher, parmi les expressions suivantes, celles qui sont égales à $\boldsymbol{card(A \cap \bar{B} \cap C)}$

- ☐ $card(A \cap C) - cardB$
- ☐ $card(A \cap C) - card(A \cap B \cap C)$
- ☐ $card(A) - card(B \cup \bar{C})$
- ☐ $card(A) - card(A \cap B \cup \bar{C})$
- ☐ $card(A \cap \bar{B}) - card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$
- ☐ $card(A) - card(A \cap \bar{C}) - card(A \cap B) - card(A \cap B \cap \bar{C})$

EXERCICE 5

L'IUT a décidé d'organiser une « Journée des Anciens ».

Cette année 60 anciens étudiants viennent présenter leur parcours :

- 30 occupent un poste d'ingénieur,
- 20 ont moins de 30 ans,
- 40 ont un Bac+5,
- 25 occupent un poste d'ingénieur et ont un Bac+5,
- 15 occupent un poste d'ingénieur et ont moins de 30 ans,
- 18 ont un Bac+5 et moins de 30ans,
- 13 occupent un poste d'ingénieur, ont un Bac+5 et ont moins de 30 ans.
- On note :

B : ensemble des anciens ayant un Bac+5

M : ensemble des anciens ayant moins de 30 ans

I : ensemble des anciens occupant un poste d'ingénieur

1. Traduire l'énoncé en utilisant des cardinaux.
2. On s'intéresse aux ensembles suivants :

   A1 : Les anciens qui occupent un poste d'ingénieur sans avoir de Bac+5

   A2 : les anciens ont moins de 30 ans et un Bac+5 et qui n'occupent pas de poste d'ingénieur

   A3 : Les anciens qui ont moins de 30 ans ou un Bac+5, mais qui n'occupent pas un poste d'ingénieur

   a. Écrire chacun des ensembles A1, A2 et A3 en langage ensembliste et en utilisant les notations B, I et M.

   b. Déterminer le cardinal de chacun des ensembles A1, A2 et A3. On utilisera les propriétés des cardinaux pour justifier les résultats.

QCM Cardinaux