COMPLÉMENTS CALCUL MATRICIEL

DÉTERMINANT

Le calcul du déterminant $\det(A)$ d'une matrice A permet de vérifier son inversibilité :

$$A \text{ inversible } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Ce calcul n'est cependant pas facile à mettre en œuvre, surtout pour des matrices d'ordre élevé.
C'est la raison pour laquelle, dans ce cours, nous utiliserons la méthode de Gauss-Jordan pour vérifier calculer l'inverse d'une matrice.
Dans des problèmes de modélisations complexes dans lesquels les matrices s'expriment en fonction de paramètres, le calcul du déterminant devient fondamental.

Matrice d'ordre 2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = ad - bc$$

Notation : $\mathbf{det}(\boldsymbol{M}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$

Matrice d'ordre 3

$$M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = ab'c'' + bc'a'' + a'b''c - a''b'c - b''c'a - a'bc''$$

Cette formule peut être retenue visuellement, grâce à la règle de Sarrus. Pour cela, on reproduit les deux premières colonnes à droite de la matrice :

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{a''} & a & a' \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b'} & \boldsymbol{b''} & b & b' \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c'} & \boldsymbol{c''} & c & c' \end{array}$$

$$\det(M) = ab'c'' + bc'a'' + a'b''c - a''b'c - b''c'a - a'bc''$$

Les diagonales parcourues dans le sens de la diagonale principale sont affectées d'un coefficient positif et celles parcourues dans l'autre sens d'un coefficient négatif

Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

Définition : Matrice des signes et Mineur

- On appelle **matrice des signes d'ordre n** la matrice : $A_n = \left((-1)^{i+j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$
- Soit $M = \left(m_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle **mineur de $\boldsymbol{M}$** en ligne i et colonne j et on note $\Delta_{ij}(M)$ (ou Δ_{ij}) le déterminant obtenu en supprimant dans M la ligne i et la colonne j.

Exercice

1. Écrire les matrices des signes d'ordre 2,3 et 4.
2. $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$: écrire Δ_{11}, Δ_{23} et Δ_{33}.

PROPRIÉTÉS

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n.

- Développement de $\det(M)$ par rapport à une ligne i fixée, $i \epsilon \{1,2,\dots,n\}$:

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

- Mineur de la matrice
- Terme général
- Signe (de la matrice des signes)

- Développement de $\det(M)$ par rapport à une colonne j fixée, $j \epsilon \{1,2,\dots,n\}$:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

EXERCICE

1. $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$

   Vérifier les propriétés ci-dessus en développant le déterminant par rapport à la première ligne et à la première colonne.

2. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix}$$ *(sous forme factorisée)*

PROPRIÉTÉS DU DÉTERMINANT

Soient $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $N = (n_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ des matrices carrées d'ordre n.

- $M \text{ inversible } \Leftrightarrow \det(M) \neq 0$
- $\det(MN) = \det(M)\det(N)$
- Conséquence des deux propriétés précédentes : $M \text{ inversible } \Rightarrow \det(M) = {}^{1}/_{\det(M)}$

PROPRIÉTÉS UTILES POUR LE CALCUL DU DÉTERMINANT

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n.

- Si une ligne ou une colonne ne contient que des zéros alors le déterminant est nul.
- Si on échange deux lignes ou deux colonnes d'une matrice alors on change le signe du déterminant.
- Si on multiplie une ligne (ou une colonne) d'un déterminant par un scalaire λ, alors le déterminant est multiplié par λ.

Illustration : $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 7 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \times 2 \\ 7 & 0 & 3 \times 4 \\ -1 & 1 & 3 \times 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

- Conséquences de la propriété précédente : $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$

Illustration : $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 21 & 0 & 12 \\ -3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\times(-1) & 3\times 2 & 3\times 2 \\ 3\times 7 & 3\times 0 & 3\times 4 \\ 3\times(-1) & 3\times 1 & 3\times 2 \end{vmatrix} = 3^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

- Une opération de la forme $C_i \leftarrow C_i + kC_j$ (avec $k \in \mathbb{R}$ et $i \neq j$) sur les colonnes d'un déterminant ne change pas la valeur de ce déterminant. Il en est de même pour une opération de la forme $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ (avec $k \in \mathbb{R}$ et $i \neq j$) sur les lignes. De façon générale, un déterminant reste inchangé si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes (ou si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes)

Illustration : $\begin{vmatrix} 1-a & 2 & -2 \\ 2 & 1-a & -2 \\ 2 & 2 & -3-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 2 & -2 \\ 1-a & 1-a & -2 \\ 1-a & 2 & -3-a \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1-a & -2 \\ 1 & 2 & -3-a \end{vmatrix}$

Le résultat précédent a été obtenu grâce à l'opération : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$.
On effectue maintenant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ *:*

$$\begin{vmatrix} 1-a & 2 & -2 \\ 2 & 1-a & -2 \\ 2 & 2 & -3-a \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1-a & -2 \\ 1 & 2 & -3-a \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1-a & 0 \\ 0 & 0 & -1-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & 2 & -2 \\ 2 & 1-a & -2 \\ 2 & 2 & -3-a \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} -1-a & 0 \\ 0 & -1-a \end{vmatrix} = (1-a)(-1-a)^2 = (1-a)(1+a)^2$$

EXERCICES – CALCULS DE DÉTERMINANTS

EXERCICE 1

Sachant que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$ déterminer la valeur des déterminants ci-dessous :

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} a & -2b & c \\ d & -2e & f \\ g & -2h & i \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -5d+a & -5e+b & -5f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ -2g & -2h & -2i \end{vmatrix}$

EXERCICE 2

Calculer les déterminants ci-dessous. On donnera les résultats sous forme factorisée.

1. $\begin{vmatrix} 0 & a & -a & a \\ -a & 0 & a & a \\ a & -a & 0 & -a \\ -a & a & a & 0 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ -1 & b & 1 & 1 \\ -1 & c & -1 & -1 \\ 1 & d & 1 & -1 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 2-x & 2 & -1 \\ 1 & 3-x & -1 \\ -1 & -2 & 2-x \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3-x & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2-x & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1-x \end{vmatrix}$

INVERSION D'UNE MATRICE – FORMULE DE LA COMATRICE

La formule de la comatrice n'est pas très intéressante pour les calculs numériques, elle est surtout utilisée pour inverser des matrices comportant des paramètres. Pour programmer le calcul de l'inverse d'une matrice, on utilisera plutôt des méthodes basées sur le Pivot de Gauss, la méthode de Gauss-Jordan notamment.

DÉFINITION : COMATRICE

Soit $M = \left(m_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n et $\Delta_{ij}(M)$ (ou Δ_{ij}) les mineurs de M ($1 \leq i, j \leq n$)

On appelle **comatrice de $\boldsymbol{M}$** la matrice : $\mathrm{com}(M) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

PROPRIÉTÉ : FORMULE DE LA COMATRICE

$$M \text{ inversible } \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \; {}^{t}\!\left(\mathrm{com}(M)\right)$$

EXERCICES – FORMULE DE LA COMATRICE

EXERCICE 1 (DIFFICILE)

Pour justifier la propriété précédente, montrer que : $M \; {}^{t}com(M) = \det(M) I_n$

EXERCICE 2

Déterminer à quelles conditions chacune des matrices suivantes est inversible et calculer son inverse.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \;;\; M = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ -b & a & -c \\ 0 & -c & a \end{pmatrix}$$