CORRIGES EXOS DENOMBREMENTS

EXERCICE 1

1. En utilisant les chiffres 1,…, 9 :
   a. Combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres ?
   Un nombre de 5 chiffres peut être représenté par une 5-liste de chiffres de {1,…,9} Il y a donc $\mathbf{9^5}$ nombres possibles.
   b. Combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres distincts.
   Un nombre de 5 chiffres distincts peut être représenté par un arrangement de 5 de chiffres de {1,…,9} Il y a donc $\boldsymbol{A_9^5}$ nombres possibles.
$$A_9^5 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{9!}{4!}$$
1. Important et un peu plus compliqué…
   En utilisant les chiffres 1,…, 9 :
   a. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres commençant par 111 ?
   Un nombre de cinq chiffres commençant par 111 est une 5-liste dont les trois premiers éléments sont des 1. Il reste donc à choisir les deux derniers, ou la 2-liste des deux derniers : $\mathbf{9^2}$ nombres possibles
   b. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres contenant exactement trois fois le chiffre 1 ?
   - Choix de la 2-liste pour les 2 autres chiffres : $\mathbf{8^2}$ choix possibles
   - Choix des 2 emplacements (parmi 5) pour ces deux chiffres : $\boldsymbol{C_5^2}$ possibilités

   $\Rightarrow \boldsymbol{C_5^2 8^2}$ possibilités
   c. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres contenant exactement trois chiffres identiques ?
   - Choix du chiffre répété trois fois : $\mathbf{9}$ choix possibles
   - Choix de la 2-liste pour les deux autres chiffres : $\mathbf{8^2}$ choix possibles
   - Choix des 2 emplacements (parmi 5) pour ces deux chiffres : $\boldsymbol{C_5^2}$ possibilités

   $\Rightarrow \boldsymbol{C_5^2} \times \mathbf{9} \times \mathbf{8^2}$ possibilités

   d. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?
   - Choix de 5 chiffres distincts : $\boldsymbol{C_9^5}$ choix possibles
   - Nombre de façons de les ordonner par ordre croissant : 1 seule !

   $\Rightarrow \boldsymbol{C_9^5}$ possibilités

   e. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, tels que le premier chiffre est le plus petit et le dernier le plus grand ?
   - Choix de 5 chiffres distincts : $\boldsymbol{C_9^5}$ choix possibles
   - Le plus petit et le plus grand sont placés en premier et dernier
   - Il reste à placer les trois autres chiffres sur les emplacements 2,3,4 : 3 ! possibilités

   $\Rightarrow \boldsymbol{C_9^5} \times \mathbf{3}!$ possibilités

   f. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres, commençant par deux chiffres pairs et se terminant par trois impairs ?
   - Choix d'une 2-liste de deux chiffres pairs : $\mathbf{4^2}$ choix possibles
   - Choix d'une 3-liste de trois chiffres impairs : $\mathbf{5^3}$ choix possibles

   $\Rightarrow \mathbf{4^2} \times \mathbf{5^3}$ possibilités

   g. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres, contenant deux chiffres pairs et trois impairs ?
   - Choix d'une 2-liste de deux chiffres pairs : $\mathbf{4^2}$ choix possibles
   - Choix d'une 3-liste de trois chiffres impairs : $\mathbf{5^3}$ choix possibles
   - Choix des 2 emplacements (parmi 5) pour les deux chiffres pairs : $\boldsymbol{C_5^2}$ possibilités

   $\Rightarrow \boldsymbol{C_5^2} \times \mathbf{4^2} \times \mathbf{5^3}$ possibilités

h. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, contenant deux chiffres pairs et trois impairs ?
   - Choix de deux chiffres pairs : $\boldsymbol{C_4^2}$ choix possibles
   - Choix de trois chiffres impairs : $\boldsymbol{C_5^3}$ choix possibles
   - Nombre de façons d'ordonner les 5 chiffres choisis : $\mathbf{5}$! possibilités

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_4^2} \times \boldsymbol{C_5^3} \times \mathbf{5}! \text{ possibilités}$$

i. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, commençant par deux chiffres pairs rangés par ordre croissant et se terminant par trois impairs également rangés par ordre croissant ?
   - Choix de deux chiffres pairs : $\boldsymbol{C_4^2}$ choix possibles
   - 1 seule façon d'ordonner ces deux chiffres par ordre croissant
   - Choix de trois chiffres impairs : $\boldsymbol{C_5^3}$ choix possibles
   - 1 seule façon d'ordonner ces trois chiffres par ordre croissant

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_4^2} \times \boldsymbol{C_5^3} \text{ possibilités}$$

j. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, contenant deux chiffres pairs et trois impairs, rangés par ordre croissant ?
   - Choix de deux chiffres pairs : $\boldsymbol{C_4^2}$ choix possibles
   - Choix de trois chiffres impairs : $\boldsymbol{C_5^3}$ choix possibles
   - 1 seule façon d'ordonner ces 5 chiffres par ordre croissant

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_4^2} \times \boldsymbol{C_5^3} \text{ possibilités}$$

EXERCICE 2 : MOTS BINAIRES

On considère l'ensemble des mots binaires sur l'alphabet {0,1}

1. $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = ???$

   Il s'agit de la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\boldsymbol{a}$ (et de premier terme 1). La formule est à connaître :

$$\boldsymbol{1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad ou \quad \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}$$

   Remarque : pour la justifier, on pourra développer $(a-1)\sum_{k=0}^{n} a^n$
2. Combien y a-t-il de mots binaires de longueur n ?

   Un mot binaire de longueur n est une n-liste de 0 et de 1 : il y a donc $\boldsymbol{2^n}$ mots binaires de longueur n
3. Combien y a-t-il de mots binaires de longueur inférieure ou égale à n ?

   $\mathbf{2}$ mots binaires de longueur 1

   $\mathbf{2^2}$ mots binaires de longueur 2

   …

   $\boldsymbol{2^n}$ mots binaires de longueur n

   Il y a donc $\boldsymbol{2 + 2^2 + \cdots + 2^n}$ mots binaires de longueur inférieure ou égale à n

$$\boldsymbol{2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2(\,2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = 2\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2}$$

4. n=5 : combien y a-t-il de mots binaires contenant 3 « 0 » et 2 « 1 ».

   Il suffit par exemple de choisir les emplacements des « 0 » parmi les 5 : $\boldsymbol{C_5^3}$ emplacements possibles
5. Quel est le nombre de mots binaires à n caractères et comportant p occurrences de 0 et n-p occurrences de 1 ?

   Il suffit juste de savoir où sont placés (par exemple) les 0 : $\boldsymbol{C_n^p}$ emplacements possibles

   Donc $\boldsymbol{C_n^p}$ de mots binaires à n caractères et comportant p occurrences de 0 et n-p occurrences de 1

EXERCICE 3 : ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Soit $A = \{1,2,3,4\}$ un ensemble de P(A) l'ensemble des parties de A

a. {1,2} est une partie de A. On peut lui associer une 4-liste, laquelle ?

$$\{1,2\} \to (1,1,0,0)$$
$$\{1,3\} \to (1,0,1,0)$$
$$\{1,2,4\} \to (1,1,0,1)$$
$$\{4\} \to (0,0,0,1)$$
$$\emptyset \to (0,0,0,0)$$
$$A \to (1,1,1,1)$$

A chaque sous-ensemble de A on peut associer une 4-liste binaire, il y a donc autant de sous-ensembles de A que de 4-listes binaires

b. En déduire le cardinal de P(A)

Il y a autant de sous-ensembles de A que de 4-listes binaires : $\boldsymbol{cardP(A) = 2^4}$

c. Généralisation : si $cardA = n$ quel est le cardinal de $P(A)$?

De même, si $\boldsymbol{cardA = n}$, il y aura autant de sous-ensembles de A que de n-listes binaires :

$$\boldsymbol{cardP(A) = 2^n}$$

EXERCICE 4 : FORMULES DE COMBINATOIRE ELEMENTAIRES

Démontrer et interpréter les formules suivantes :

- $C_n^p = C_n^{n-p}$

  $$\boldsymbol{C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,\big(n-(n-p)\big)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p}$$

  Interprétation :
  - dans un ensemble à 10 éléments, lorsqu'on choisit 3 éléments il en reste 7 qui n'ont pas été choisis : dans un ensemble à 10 éléments il y a donc autant de sous-ensembles à 3 éléments que de sous-ensembles à 7 éléments.
  - Généralisation correspondant à la formule ci-dessus : dans un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments il y a autant de sous-ensembles à $\boldsymbol{p}$ éléments que de sous-ensembles à $\boldsymbol{n-p}$ éléments.

- $C_n^0 = C_n^n = 1$

  $$\boldsymbol{C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{0!\,n!}}$$

  Dans un ensemble à n éléments, il y a 1 sous-ensemble à 1 élément, l'ensemble vide

- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

  $$\boldsymbol{C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!\,n}{(n-1)!} = n}$$

  Dans un ensemble à n éléments, il y a n sous-ensembles à 1 élément, n singletons

EXERCICE 5 : NOUVELLE FORMULE DE COMBINATOIRE, LA FORMULE DU TRIANGLE DE PASCAL

1. Montrer la Formule de Pascal : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}$$

On recherche un dénominateur commun qui ne soit pas le produit des deux dénominateurs

On remarque que :

- $(p-1)!\,p = p!$
- $(n-p-1)!\,(n-p) = (n-p)!$

Si on multiplie :

- le numérateur et le dénominateur du premier quotient par p,
- le numérateur et le dénominateur du deuxième quotient par $(n-p)$

On obtiendra deux quotients avec le même dénominateur : $p!\,(n-p)!$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!\,(n-p)}{p!\,(n-p-1)!\,(n-p)} = \frac{p(n-1)!}{p!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!\,(n-p)}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{p(n-1)! + (n-1)!\,(n-p)}{p!\,(n-p)!} = \frac{(n-1)!\,(p+(n-p))}{p!\,(n-p)!} = \frac{(n-1)!\,n}{p!\,(n-p)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$$

2. FACULTATIF : FORMULE DU BINOME (DEVELOPPEMENT DE $(a+b)^n$

Triangle de Pascal (Tableau des C_n^p)

n\p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p \Rightarrow C_3^2 + C_3^1 = C_4^2$

La formule de Pascal permet de remplir le triangle de Pascal. Habituellement, celui-ci permet aussi de calculer les « coefficients du binôme », c'est-à-dire les coefficients obtenus dans le développement de $(a+b)^n$.

n\p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$(a+b)^n$

$(a+b)^1 = a + b = 1 \times a + 1 \times b$

$(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$

$(a+b)^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3$

$(a+b)^4 = 1 \times a^4 + 4 \times a^3b + 6 \times a^2b^2 + 4 \times ab^3 + 1 \times b^4$

$(a+b)^4 = 1 \times a^5 + 5 \times a^4b + 10 \times a^3b^2 + 10 \times a^2b^3 + 1 \times b^5$

3. Facultatif : Donner une définition « récursive » de la combinaison.

Définition récursive de C_n^p

- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$
- $C_n^0 = C_n^n = 1$

Cette définition est récursive car elle utilise la combinaison dans la définition de $\boldsymbol{C_n^p}$. Elle permet de calculer n'importe quelle valeur de $\boldsymbol{C_n^p}$

Exemple : $\boldsymbol{C_5^3 = C_4^2 + C_4^3 = \left(C_3^2 + C_3^1\right) + \left(C_3^2 + C_3^3\right) = \left(C_2^2 + C_2^1\right) + \left(C_2^1 + C_2^0\right) + \left(C_2^2 + C_2^1\right) + C_3^3}$
$\boldsymbol{= C_2^2 + \left(C_1^1 + C_1^0\right) + \left(C_1^1 + C_1^0\right) + C_2^0 + C_2^2 + \left(C_1^1 + C_1^0\right) + C_3^3 = 10}$

4. Facultatif : Donner d'autres exemples de définitions récursives.
   - $n! = (n-1)! \times n$
     Définition récursive de $fact(n)$:
     → $fact(n) = fact(n-1) \times n$
     → $fact(0) = 1$

   - $x^n = x^{n-1} \times x$
     Définition récursive de $puis(x, n)$:
     → $puis(x, n) = puis(x, n-1) \times x$
     → $puis(x, 0) = 1$

EXERCICE 6 : QCM

1. P1 : $C_{11}^7 + C_{11}^6 = C_{10}^7$
   Faux : $\boldsymbol{C_{11}^7 + C_{11}^6 = C_{12}^7}$
2. P2 : $\mathbf{11}$! est divisible par 7 !
   Vrai : $\boldsymbol{11\,! = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}$
3. P3 : $A_{11}^7 = \frac{11\,!}{7\,!}$
   Faux : $\boldsymbol{A_{11}^7 = \frac{11\,!}{(11-7)\,!}}$
4. P4 : A_{11}^7 est le nombre de façon de choisir et d'ordonner entre eux 7 éléments pris parmi 11
   Vrai : $\boldsymbol{A_{11}^7}$ est le nombre d'arrangements de 7 éléments pris parmi 11 ou de suites ordonnées de 7 éléments distincts.
1. P5 : $C_{10}^7 + C_{10}^6 = C_{11}^6$
2. Faux : $C_{10}^7 + C_{10}^6 = C_{11}^7$

3. P6: A_9^5 est le nombre de façons de choisir 5 éléments pris parmi 9
   Faux : $\boldsymbol{A_9^5}$ est le nombre de façon de choisir <u>et d'ordonner entre</u> eux 5 éléments pris parmi 9. Le nombre de façon de choisir 5 éléments pris parmi 9 est $\boldsymbol{C_9^5}$

EXERCICE 7 : SYNTHESE

Paul est un jeune lycéen attiré par l'informatique. Il est en terminale souhaite postuler (sous APB) pour trois types de DUT : Informatique, MMI (Métiers du Multimédia et de l'Internet), R&T (Réseaux & Télécommunications).
Or il existe de nombreux IUT dans lesquels ces formations peuvent être suivies :

- 43 IUT pour le DUT Informatique
- 33 IUT pour le DUT MMI
- 29 IUT pour le DUT R&T

Cela fait donc 43+33+29=105 IUT dans lesquels Paul peut postuler.
Pour les questions suivantes, on ne développera pas les calculs. Les résultats seront exprimés en fonction de puissances, factorielles, combinaisons, arrangements…

1. Avant la fin du mois de février, Paul doit avoir sélectionné les IUT dans lesquels il allait postuler. Peu importe leur classement.
   a. Paul a décidé de choisir au hasard 9 IUT parmi les 105. Combien a-t-il de possibilités de choix?

   Le choix de 9 IUT est le choix d'une combinaison de 9 IUT pris parmi 105 (pas d'ordre ni de répétition) : il y a donc $\boldsymbol{C_{105}^{9}}$ choix possibles.

   b. Paul décide plutôt de choisir 3 IUT pour chacune des trois spécialités. Combien y a-t-t-il de possibilités de choix?

   Choix de 3 IUT pour la spécialité Informatique : $\boldsymbol{C_{43}^{3}}$ possibilités
   Choix de 3 IUT pour la spécialité MMI : $\boldsymbol{C_{33}^{3}}$ possibilités
   Choix de 3 IUT pour la spécialité R&T: $\boldsymbol{C_{29}^{3}}$ possibilités
   Il y a donc $\boldsymbol{C_{43}^{3}} \times \boldsymbol{C_{33}^{3}} \times \boldsymbol{C_{29}^{3}}$ façons de choisir 9 IUT avec 3 IUT dans chacune des spécialités.

2. Finalement, Paul a choisi 9 IUT, 3 de chaque spécialité.
   Avant la fin du mois de mai, il doit classer entre eux ces 9 IUT.
   a. Combien y a-t-il de possibilités de classement ?
   Il y a 9 ! façons d'ordonner entre eux les 9 IUT choisis.
   b. Combien y a-t-il de possibilités de classement en mettant en premières positions, les IUT Informatique et en dernières positions, les IUT MMI ?
   3 ! façons d'ordonner entre eux les trois premiers vœux (Info)
   3 ! façons d'ordonner entre eux les vœux suivants (R&T)
   3 ! façons d'ordonner entre eux les trois derniers vœux (MMI)
   Donc au total, $(\boldsymbol{3}!)^{\boldsymbol{3}}$ choix possibles.