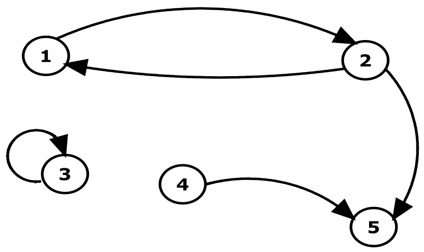
DEFINITIONS ET VOCABULAIRE

Un graphe G **orienté** est un couple d'ensembles (S, A) où :

- **S est l'ensemble des sommets de G**
- **A est l'ensemble des arcs de G**

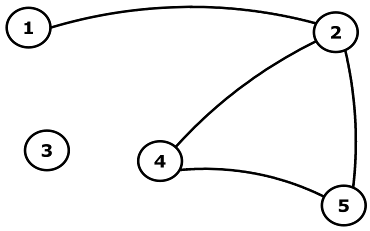


S={1,2,3,4,5}
A={(1,2),(2,1),(2,5),(3,3),(4,5)}

- ***Sommets du graphe*** *: les éléments de S*
- ***Arcs du graphe*** *: les éléments (x, y) de A*
- ***Degré sortant d'un sommet*** *: $d^+(x)$, nombre d'arcs ayant pour origine le sommet x*
- ***Degré entrant d'un sommet*** *: $d^-(x)$, nombre d'arcs ayant pour extrémité le sommet x*
- ***Degré d'un sommet*** *: $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$*
- ***Ordre du graphe*** *: nombre de sommets,* ***n = Card(S)***
- ***Taille du graphe*** *: nombre d'arcs,* ***m = Card(A)***
- ***Boucle*** *: tout arc de la forme (x, x)*
- ***Arcs adjacents*** *: arcs (x,* ***y****) et (****y****, z)*
- *Un* ***chemin*** *de G est une suite des sommets (s_0, s_1… s_n) tels que deux sommets consécutifs sont reliés par un arc : $(s_i, s_{i+1}) \in A$, $\forall i \in \{0, n-1\}$*
- *Un* ***chemin de longueur n*** *est constitué de* ***n+1*** *sommets reliés par* ***n*** *arcs adjacents*
- *Un* ***circuit*** *est un chemin dont les extrémités coïncident.*

Un graphe G **non orienté** est un couple d'ensembles (S, A) où :

- **S est l'ensemble des sommets de G**
- **A est l'ensemble des arêtes de G**



S={1,2,3,4,5}
A={{1,2},{2,4},{2,5},{4,5}}

- ***Sommets du graphe*** *: les éléments de S*
- ***Arêtes du graphe*** *: les éléments {x, y} de A*
- ***Degré d'un sommet*** *: $d(x)$, nombre d'arêtes ayant pour extrémité le sommet x*
- ***Ordre*** *: nombre de sommets,* ***n = Card(S)***
- ***Taille du graphe*** *: nombre d'arêtes,* ***m = Card(A)***
- ***Boucle*** *: toute arête de la forme {x, x}*
- ***Arêtes adjacentes*** *: arêtes {x,* ***y****} et {****y****, z}*
- *Une* ***chaîne*** *de G est une suite des sommets (s_0, s_1,…, s_n) tels que deux sommets consécutifs sont reliés par une arête : $\{s_i, s_{i+1}\} \in A$, $\forall i \in \{0, n-1\}$*
- *Une chaîne de* ***longueur n*** *est constitué de* ***n+1*** *sommets reliés par n arêtes*
- *Un* ***cycle*** *est une chaîne dont les extrémités coïncident.*

EXEMPLE

Soit $G = (S, A)$ le graphe orienté représenté ci-contre :

$S = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$

$\boldsymbol{A} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{4}), (\mathbf{4}, \mathbf{3})\}$

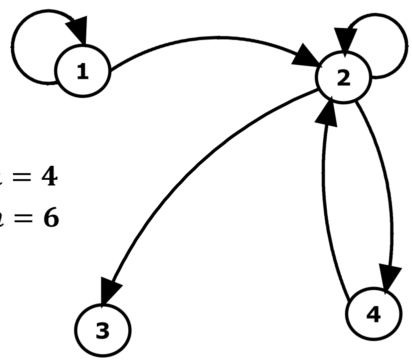
Degré de 2 : $\boldsymbol{d}(\mathbf{2}) = \mathbf{6}$

Degré sortant de 3 : $\boldsymbol{d}^+(\mathbf{3}) = \mathbf{0}$ Ordre du graphe : $\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$

Degré entrant en 1 : $\boldsymbol{d}^-(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ Taille du graphe : $\boldsymbol{m} = \mathbf{6}$

Exemple de chemin de longueur 7 : $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$

$(\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{4})$ est un **circuit** de longueur $\mathbf{4}$.



EXERCICE 1 (CORRIGE P10)

Lemme des poignées de mains

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté de taille m :

$$\sum_{x \in S} d^{+}(x) =$$

$$\sum_{x \in S} d^{-}(x) =$$

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non, de taille m :

$$\sum_{x \in S} d(x) =$$

Est-il possible de relier entre eux cinq ordinateurs de sorte que chaque ordinateur soit relié exactement avec trois autres ?

PROPRIETES PARTICULIERES DES GRAPHES

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. G est :

- **Réflexif,** si $\forall x \in S,\ (x, x) \in A$
- **Symétrique,** si $(x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$
- **Antisymétrique,** si $(x, y) \in A$ alors $(y, x) \notin A$
- **Transitif,** si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A \Rightarrow (x, z) \in A$

EXERCICE 2 (CORRIGE P10-11)

1. En langage courant, comment se traduisent les propriétés ci-dessus ?
   - Exemple : Un graphe est réflexif si chaque sommet a une boucle
   - Un graphe est symétrique si ….
   - Un graphe est antisymétrique si …
   - Un graphe est transitif si …

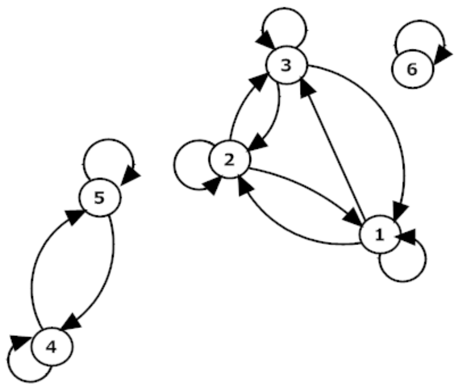
Dans les questions qui suivent, les graphes à représenter doivent être trouvés sans méthode particulière, de façon empirique, en tâtonnant.
Il ne faut pas perdre trop de temps et ne pas hésiter à se référer au corrigé, le cas échéant.

2. En utilisant les définitions précédentes, représenter :
   a. Un graphe réflexif d'ordre 4 qui ne soit ni symétrique, ni antisymétrique, ni transitif.
   b. Un graphe symétrique d'ordre 4 qui ne soit ni réflexif, ni antisymétrique, ni transitif.
   c. Un graphe transitif d'ordre 4 qui ne soit ni réflexif, ni antisymétrique, ni symétrique.
3. Un graphe **réflexif, symétrique et transitif est appelé relation d'équivalence**.
   a. Dessinez un graphe d'ordre 4 et de taille 8 représentant une relation d'équivalence.
   b. Dessinez un graphe d'ordre 6 et de taille 14 représentant une relation d'équivalence.
   c. Dessinez un graphe d'ordre 7 et de taille 21 représentant une relation d'équivalence.
   d. Que remarque-t-on ?
4. Un graphe **réflexif, antisymétrique et transitif est appelé relation d'ordre**
   Dessinez un graphe d'ordre 4 et de taille supérieure à 8, représentant une relation d'ordre

RELATION D'EQUIVALENCE

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.
On dit que G est une **relation* d'équivalence** si et seulement si elle est :

- **Réflexive,**
- **Symétrique,**
- **Transitive.**



** Nous reviendrons sur la notion de relation en fin de poly. Pour l'instant, nous pouvons admettre qu'un graphe orienté met en relation les sommets de S, par les arcs de A.*

La représentation d'une relation d'équivalence se caractérise par un graphe constitué de **« sous-graphes complets »** : sous-graphes dans lesquels les sommets sont reliés par tous les arcs possibles, les sommets sont donc « équivalents ».
Les sous-ensembles de sommets correspondants sont appelés **classes d'équivalences**.
Dans l'exemple ci-dessus, il y a **3 classes d'équivalences** $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}, \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}, \{\mathbf{6}\}$**.**
Les relations d'équivalences permettent souvent de simplifier les problèmes :

- En arithmétique, la congruence, modulo 2 par exemple, est une relation d'équivalence qui permet de répartir les entiers, qui sont en nombre infini, en deux « classes » (les nombres pairs et les impairs). Modulo 3 en 3 classes, modulo 4 en 4 classes…
- On peut aussi utiliser les relations d'équivalence pour simplifier des automates. Nous le verrons en BUT2

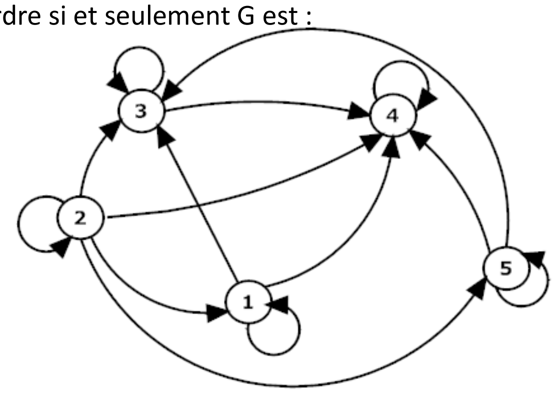
DEFINITION ET PROPRIETE

L'ensemble des classes d'équivalence de G est noté $\boldsymbol{S/G}$ et appelé « **ensemble quotient de $\boldsymbol{S}$ par $\boldsymbol{G}$** »
Propriété : Si $G = (S, A)$ est une relation d'équivalence alors **l'ensemble des classes d'équivalence de G, $\boldsymbol{S/G}$, est une partition de $\boldsymbol{S}$**

RELATION D'ORDRE

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.
On dit que G est une relation d'ordre si et seulement G est :

- **Réflexif,**
- **Antisymétrique,**
- **Transitif.**



On dit que G est **d'ordre total** si de plus : $(x, y) \in S^2, (x, y) \in A \ ou \ (y, x) \in A$
Dans le cas contraire on dit que R est **d'ordre partiel.**
Dans l'exemple précédent nous n'avons qu'un ordre partiel, puisque 1 et 5 ne sont pas reliés entre eux (on ne peut pas dire lequel est le plus « grand » ou le plus « petit » des deux.

Une des caractéristiques des graphes représentant des relations d'ordres est qu'ils n'ont **pas de circuit**. Il y a donc dans ces graphes un **« sens de parcours »**.
Pour le visualiser on utilise un diagramme de Hasse qui est un graphe simplifié dans lequel certaines flèches ont été enlevées

Diagramme de Hasse représentant la relation d'ordre précédente :

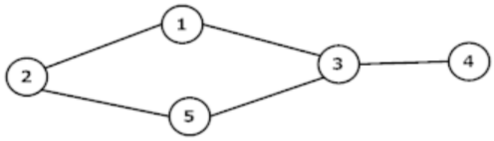


Diagramme de Hasse

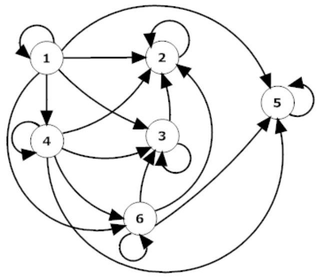
Soit $G = (S, A)$ un graphe également relation d'ordre, G peut être représenté par un diagramme de Hasse dans lequel :

- **Les sommets sont placés du plus « petit » au plus « grand » (de gauche à droite ou de haut en bas)**
- **Les boucles sont omises (réflexivité)**
- **Les raccourcis ne sont pas tracés (transitivité)**
- **Il n'y a plus de flèche (antisymétrie)**

Nous reviendrons dans la suite du cours sur les propriétés des graphes sans circuit (décomposition en niveau, tri topologique)

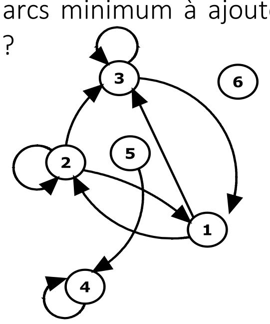
EXERCICE 3

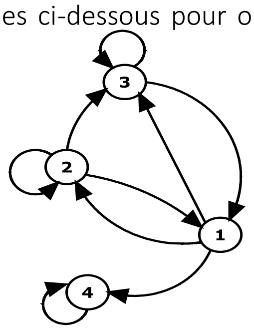
Représenter le diagramme de Hasse associé à la relation d'ordre ci-contre :



EXERCICE 4

Quel est le nombre d'arcs minimum à ajouter sur chacun des graphes ci-dessous pour obtenir une relation d'équivalence ?





Test d'entrainement : Definition et premieres proprietes

CONNEXITE ET FORTE CONNEXITE

CONNEXITE

Un graphe **non orienté** est **connexe** si pour tout couple de sommets (s, s'), il existe une chaîne reliant s à s'. Un graphe **orienté** est **connexe** si le graphe non orienté associé est connexe.

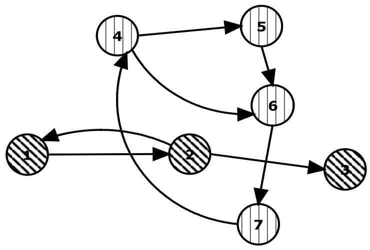
COMPOSANTE CONNEXE

Une composante connexe C d'un graphe $G = (S, A)$ est un sous-ensemble **maximal** de sommets tels que deux quelconques d'entre eux soient reliés par une chaine : si $s \in C$, alors

→ $\forall s' \in C$, il existe une chaîne reliant s à s',
→ $\forall s' \in S - C$, il n'existe pas de chaîne reliant s à s',

- Les **composantes connexes** d'un graphe $G = (S, A)$ forment une partition de S
- Un graphe est **connexe** si et seulement s'il a une **seule composante** connexe.

Exemple : le graphe G ci-contre a deux composantes connexes {1,2,3} et {4,5,6}



CONNEXITE FORTE

Un graphe orienté est **fortement connexe** si pour tout couple (s, s') il existe un **chemin** reliant s à s'.

Propriétés

→ Un graphe orienté fortement connexe est connexe.
→ Un graphe est fortement connexe si et seulement si pour tout couple de sommets x, y il existe un circuit passant par x et y.

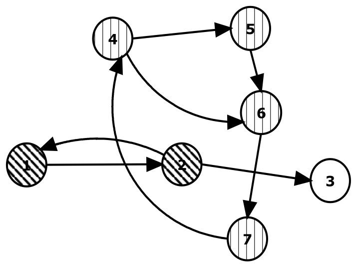
Composantes fortement connexes

Une composante fortement connexe C d'un graphe $G = (S, A)$ est un sous-ensemble **maximal** de sommets tels que deux quelconques d'entre eux soient reliés par un chemin : si $s \in C$, alors

→ $\forall s' \in C$, il existe un circuit reliant s à s',
→ $\forall s' \in S - C$, il n'existe pas de circuit reliant s à s',

- Les composantes fortement connexes d'un graphe $G = (S, A)$ forment une partition de S.
- Un graphe est fortement connexe si et seulement s'il a une seule composante fortement connexe.

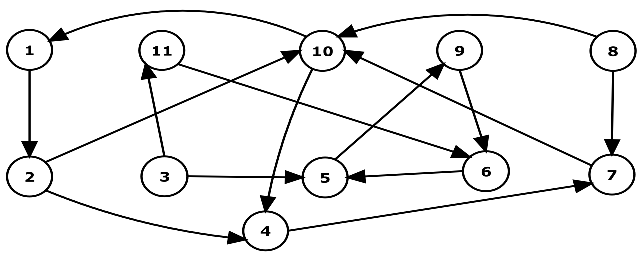
Exemple : le graphe G ci-contre a trois composantes fortement connexes {1,2},{3} et {4,5,6}



EXERCICE 5

On considère le graphe G ci-contre :

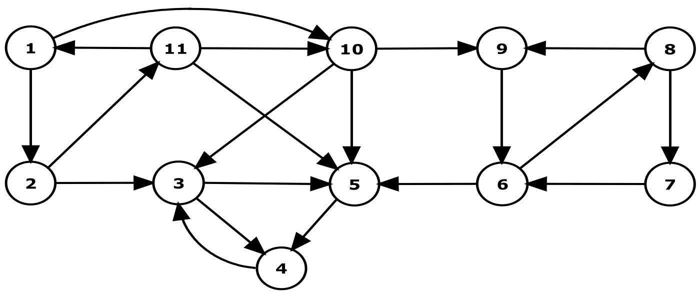
1. G est-il connexe ? quelles sont sa/ses composante(s) connexe(s) ?
2. G est-il fortement connexe ? quelles sont sa/ses composante(s) fortement connexe(s) ?



EXERCICE 6

On considère le graphe G ci-contre :

1. G est-il connexe ? quelles sont sa/ses composante(s) connexe(s) ?
2. G est-il fortement connexe ? quelles sont sa/ses composante(s) fortement connexe(s) ?

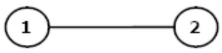
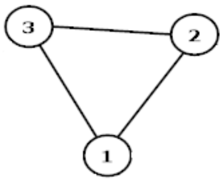
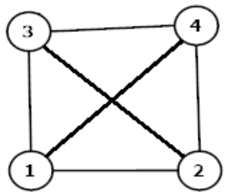


GRAPHE COMPLET, SOUS-GRAPHE, GRAPHE PARTIEL…

GRAPHE COMPLET

On appelle « graphe complet à n sommets » et on note K_n, le graphe d'ordre *n* ayant le plus grand nombre d'arcs (d'arêtes) possibles.

Remarque, en général pour les graphes complets non orientés on ne considère pas les boucles.
Les graphes non orientés ci-dessous sont donc considérés comme complets :

D'ordre 2 :  d'ordre 3 :  d'ordre 4 : 

SOUS-GRAPHE ET GRAPHE PARTIEL

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non.

• **un graphe partiel** de G est un graphe G' **ayant pour sommets tous les sommets de G** et pour arcs/arêtes seulement un sous-ensemble de A, ce qui s´écrit : $G' = (S, A')\ avec\ A' \subset A$

• **un sous-graphe** de G est un graphe G' ayant pour sommets un **sous-ensemble $\boldsymbol{S'}$** des sommets de G et en ne **conservant** que les arcs/arêtes joignant les sommets de S' ce qui s'écrit :

$$G' = (S', A')\ avec\ S' \subset S\ et\ A' = \{(x, y) \in A | x \in S'\ et\ y \in S'\}$$

Le sous-graphe obtenu avec le sous-ensemble de sommet S' est appelé **sous-graphe induit par $\boldsymbol{S'}$.**

CLIQUE ET STABLE

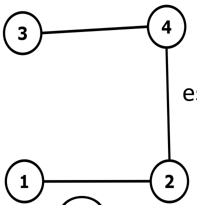
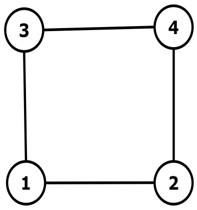
Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou pas.

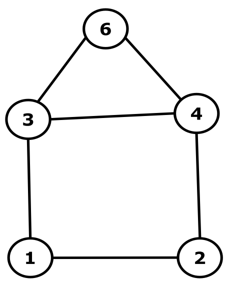
• **une clique** est un sous-graphe complet de G

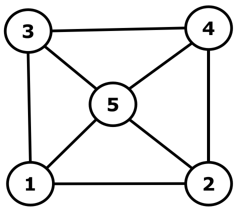
• **un stable** est un sous-graphe de G sans arcs/arêtes

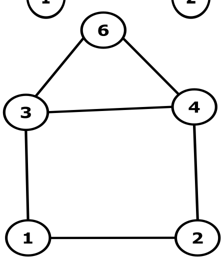
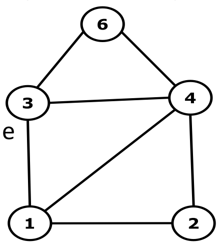
Exemples

GRAPHES PARTIELS ET SOUS-GRAPHES

 est un graphe partiel de  qui est le sous-graphe induit par {1,2,3,4} des deux graphes ci-contre

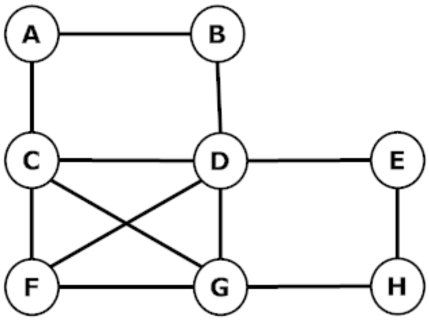




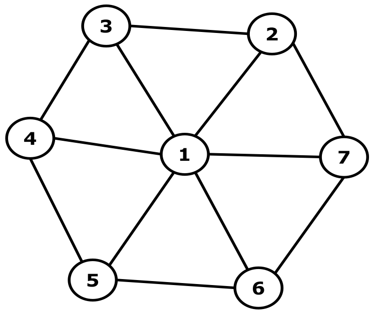
 est un graphe partiel de 

CLIQUE ET STABLE

Le sous-graphe induit par {C,D,G,F} est une clique du graphe ci-contre

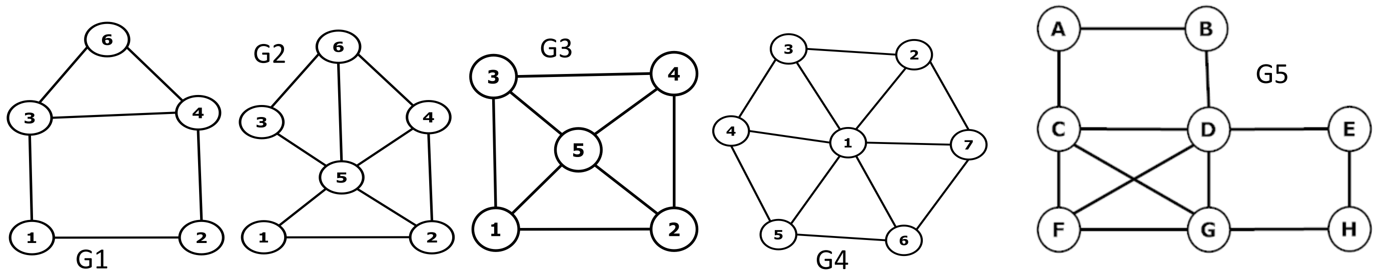


Le sous-graphe induit par {2,4,6} est un stable du graphe ci-contre



EXERCICE 7

Pour chacun des graphes suivants, donnez les tailles du plus grand stable et de la plus grande clique.



TEST D'ENTRAINEMENT – CONNEXITE, SOUS-GRAPHE, GRAPHE PARTIEL, CLIQUE, STABLE...

GRAPHES EULERIENS

CHAINE, CYCLES, CHEMINS, CIRCUITS EULERIENS – SIMPLES

- Soit G un graphe **non orienté**.
  - Une **chaîne** (respectivement un **cycle**) est **simple** si elle ne passe pas deux fois par la même arête.
  - Une **chaîne** (respectivement un **cycle**) **eulérienne** est une chaîne (resp. un cycle) qui passe une et une seule fois par **toutes** les arêtes de G (ou une chaîne simple passant par toutes les arêtes de G)
- Soit G un graphe **orienté**.
  - Un **chemin** (respectivement un **circuit**) est **simple** s'il ne passe pas deux fois par le même arc.
  - Un **chemin** (respectivement un **circuit**) **eulérien** est un chemin (resp. un circuit) qui passe une et une seule fois par **toutes** les arêtes de G (ou un chemin simple passant par tous les arcs de G)

CYCLES ET CIRCUITS EULERIENS : CONDITIONS

Remarques préliminaires

→ Soit *G* un graphe admettant une chaîne eulérienne. Si cette chaîne n'est pas déjà un cycle, le graphe obtenu en ajoutant une arête entre les deux extrémités de la chaîne admet alors un cycle eulérien.

→ Réciproquement, si on supprime une arête à un graphe *G* admettant un cycle eulérien, le nouveau graphe admet encore une chaîne eulérienne.

Les graphes qui admettent une chaîne eulérienne se déduisent donc des graphes qui admettent un cycle eulérien en supprimant éventuellement une arête. Idem pour les graphes orientés.

Conditions nécessaires et suffisantes
Pour qu'un graphe G admette **une chaîne** (cas non orienté) ou **un chemin** (cas orienté) **eulérien**, il faut et il suffit que :

1. G soit connexe.
2. Pour tout sommet s sauf éventuellement pour deux : $d(s) est\ pair$ (cas non orienté) ou $d^+(s) = d^-(s)$ (cas orienté).
   Les deux derniers vérifiant éventuellement: $d(s)\ impair$ (cas non orienté) ou $d^+(s) = d^-(s) \mp 1$ (cas orienté)

> Un **graphe eulérien** est un graphe dans lequel il existe un cycle ou un circuit eulérien.
> Un **graphe semi-eulérien** est un graphe dans lequel il existe une chaîne ou un chemin eulérien.

GRAPHES HAMILTONIENS

CHAINE, CYCLES, CHEMINS, CIRCUITS HAMILTONIENS - ELEMENTAIRES

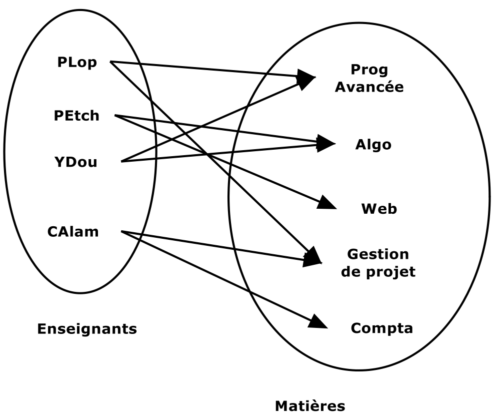
- Soit G un graphe **non orienté**.
  - Une **chaîne** (respectivement un **cycle**) est **élémentaire** si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.
  - Une **chaîne** (respectivement un **cycle**) **hamiltonienne** est une chaîne (resp. un cycle) qui passe une et une seule fois par tous les sommets de G (ou une chaîne élémentaire passant par tous les sommets de G)
- Soit G un graphe **orienté**.
  - Un **chemin** (respectivement un **circuit**) est **élémentaire** s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
  - Un **chemin** (respectivement un **circuit**) **hamiltonien** est un chemin (resp. un circuit) qui passe une et une seule fois par tous les sommets de G (ou un chemin élémentaire passant par tous les sommets de G)

> Un **graphe hamiltonien** est un graphe dans lequel il existe un cycle ou un circuit hamiltonien.
> Un **graphe semi-hamiltonien** est un graphe dans lequel il existe une chaîne ou un chemin

Remarque : Il n'existe pas de réponse simple permettant de conclure à la présence ou l'absence de cycles (ou circuits) hamiltoniens dans un graphe.
Par ailleurs, la recherche de circuit hamiltonien de coût minimum dans un graphe pondéré (Cf Niveau 4) est un problème classique de l'informatique, le problème du voyageur de commerce. On ne connait pas, à l'heure actuelle, d'algorithme en temps polynomial permettant de le résoudre.

TEST D'ENTRAINEMENT – CONNEXITE, GRAPHES EULERIENS ET HAMILTONIENS

COMPLEMENT : RELATIONS



Une relation binaire ***R*** est définie par le triplet d'ensembles (E, F, U) avec :

→ E : ensemble de départ
→ F : ensemble d'arrivée
→ $U \subset E \times F$: ensemble des arcs

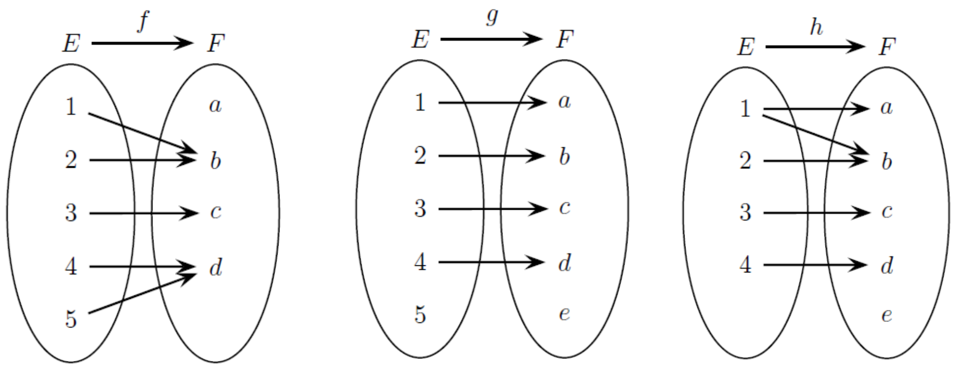
$\boldsymbol{x\, R\, y}$ ⇔ « x est en relation avec y » » ⇔ $(x, y) \in U$

Un graphe orienté G est une relation binaire dans laquelle l’ensemble de départ est égal à l’ensemble d’arrivée.
Le graphe G=(S,A) correspond à la relation binaire R = (S,S,A)

RELATIONS FONCTIONNELLES

Une **fonction** est une relation (E, F, U) telle que tout élément x de E **a au plus un successeur** dans F

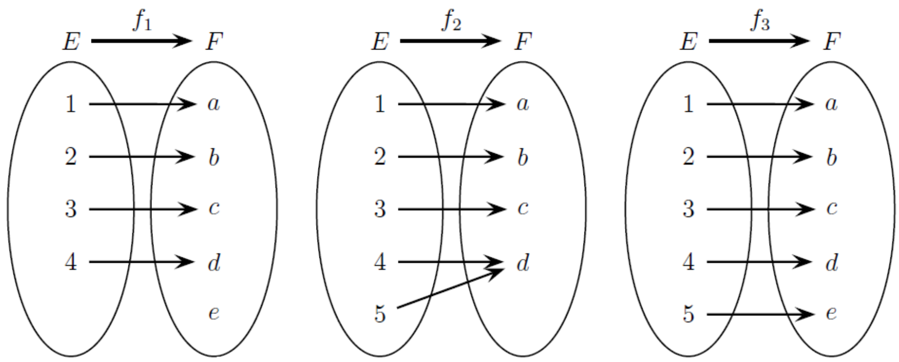
- Une **application** est une relation (E, F, U) telle que tout élément x de E **a exactement un successeur** dans F
- Une **injection** (application injective) est une application telle que tout élément de F a **au plus un prédécesseur** (antécédent) dans E, l’ensemble de départ
- Une **surjection** (application surjective) est une application telle que tout élément de F a **au moins un prédécesseur** dans E
- Une **bijection** (application bijective) est une application à la fois injective et surjective : tout élément de F a **exactement un prédécesseur** dans E



***f* est une application** et donc également une fonction

***g* est une fonction** mais pas une application (5 n’a pas de successeur)

***h* n’est ni une fonction ni une application** (1 a plusieurs successeurs)



f_1, f_2 et **f_3 sont des applications** donc également des fonctions

f_1 est une injection
f_2 est une surjection
f_3 est une bijection (donc également une injection et une surjection

TEST D’ENTRAINEMENT – GRAPHES ET RELATIONS

CORRIGES

EXERCICE 1

Lemme des poignées de mains

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté de taille m :

$$\sum_{x \in S} d^+(x) = m = \sum_{x \in S} d^-(x)$$

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ou non, de taille m :

$$\sum_{x \in S} d(x) = 2m$$

Est-il possible de relier entre eux cinq ordinateurs de sorte que chaque ordinateur soit relié exactement avec trois autres ?

Par l'absurde : supposons que cela soit possible

Il existe donc un graphe non orienté contenant 5 sommets (les ordinateurs), chacun de degré 3.
La somme des degrés est donc $3 \times 5 = 15$

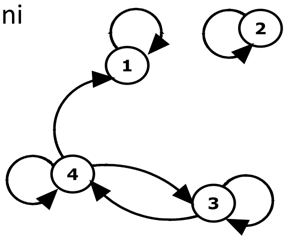
Or d'après le lemme des poignées de mains, la somme des degrés doit être paire ($2m$).

Contradiction : il est donc impossible de relier entre eux cinq ordinateurs, de sorte que chacun soit relié exactement avec trois autres

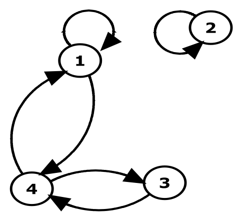
EXERCICE 2

1. En langage courant, comment se traduisent les propriétés ci-dessus ?
   - Exemple : Un graphe est réflexif si chaque sommet a une boucle
   - Un graphe est symétrique si pour tout arc allant d'un sommet vers un autre, il y a un arc retour
   - Un graphe est antisymétrique si pour chaque arc allant d'un sommet vers un autre, il n'y a jamais d'arc retour
   - Un graphe est transitif si pour tout chemin allant de x vers y dans le graphe, il existe un raccourci (x,y).

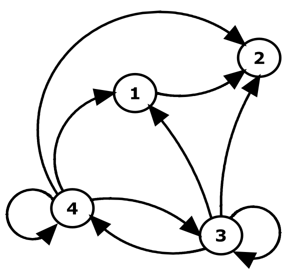
2. En utilisant les définitions précédentes, dessinez :
   a. Un graphe réflexif d'ordre 4 qui ne soit ni symétrique, ni antisymétrique, ni transitif.



   b. Un graphe symétrique d'ordre 4 qui ne soit ni réflexif, ni antisymétrique, ni transitif.

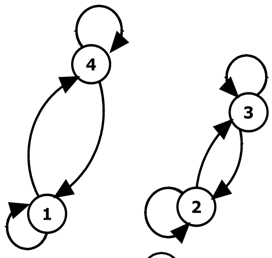


   c. Un graphe transitif d'ordre 4 qui ne soit ni réflexif, ni antisymétrique, ni symétrique.

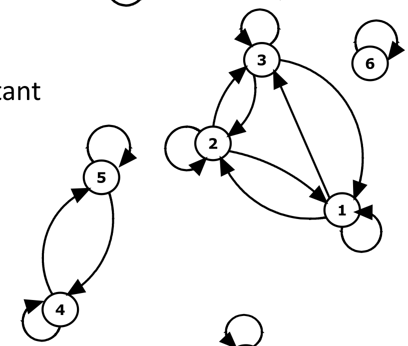


3. Un graphe **réflexif, symétrique et transitif est appelé relation d'équivalence**.

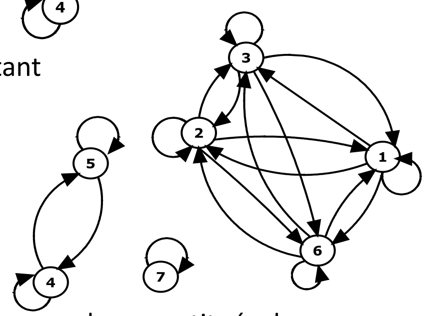
   a. Dessinez un graphe d'ordre 4 et de taille 8 représentant une relation d'équivalence.



   b. Dessinez un graphe d'ordre 6 et de taille 14 représentant une relation d'équivalence.

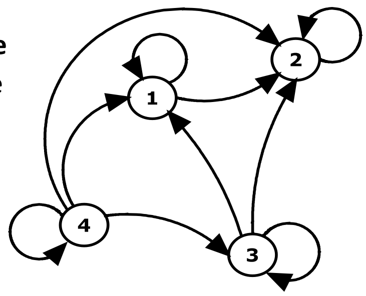


   c. Dessinez un graphe d'ordre 7 et de taille 21 représentant une relation d'équivalence.



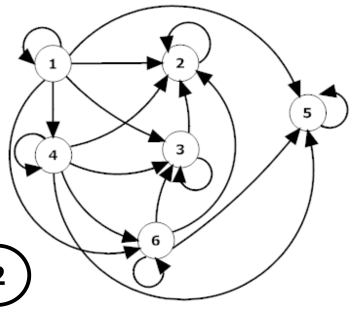
   d. Que remarque-t-on ?
   Les représentations précédentes se caractérises par des graphes constitués de **« sous-graphes complets »** : sous-graphes dans lesquels les sommets sont reliés par tous les arcs possibles, les sommets d'un même sous-graphe sont considérés comme « équivalents ».

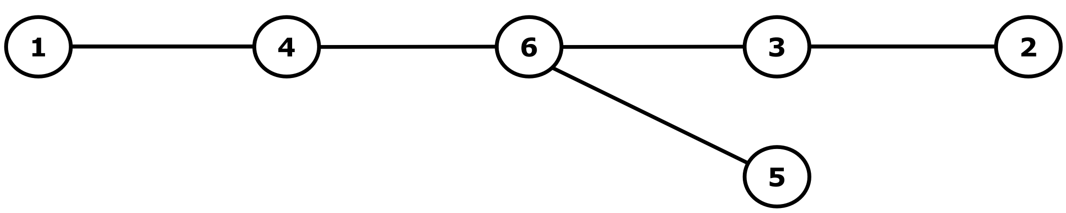
4. Un graphe **réflexif, antisymétrique et transitif est appelé relation d'ordre**
   Dessinez un graphe d'ordre 4 et de taille supérieure à 6, représentant une relation d'ordre



EXERCICE 3

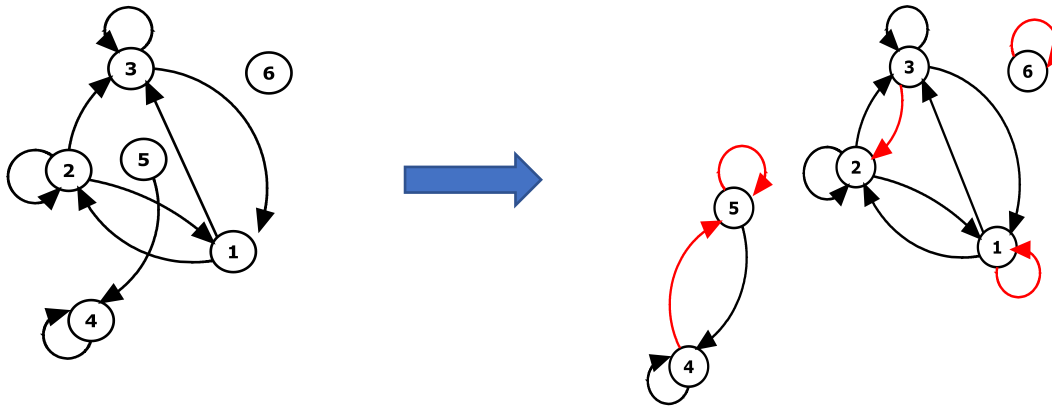
Représenter le diagramme de Hasse associé à la relation d'ordre ci-contre :

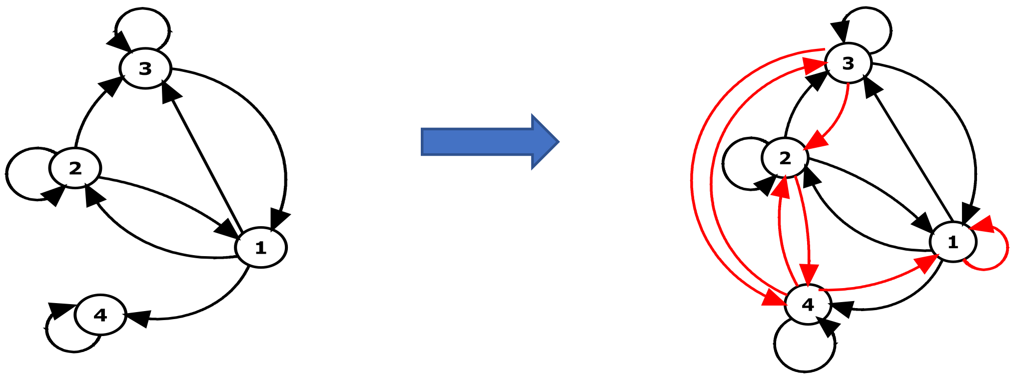




EXERCICE 4

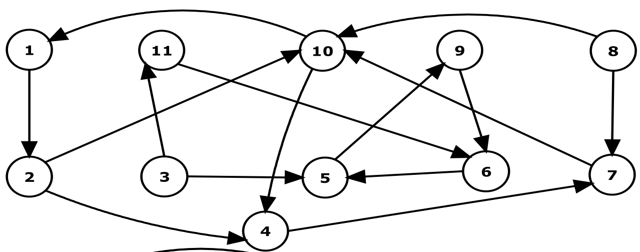
Quel est le nombre d'arcs minimum à ajouter sur chacun des graphes ci-dessous pour obtenir une relation d'équivalence ?



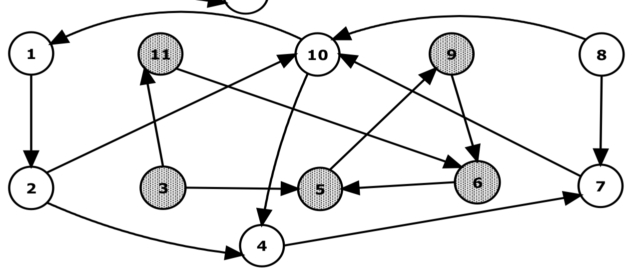


EXERCICE 5

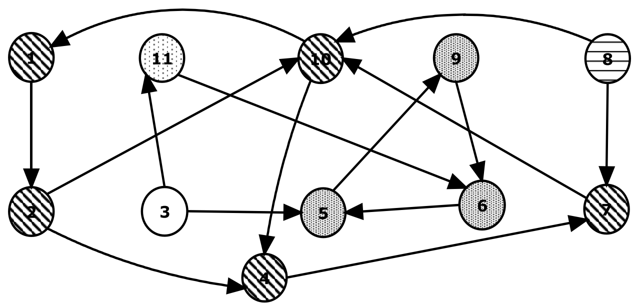
1. G est-il connexe ? quelles sont sa/ses composante(s) connexe(s) ?
2. G est-il fortement connexe ? quelles sont sa/ses composante(s) fortement connexe(s) ?



1. G n'est pas connexe et a deux composantes connexes : {1,2,4,10,7,8} et {3,5,6,9,11}

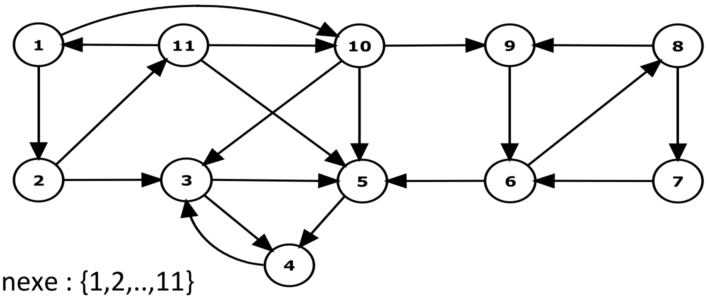


2. G n'est pas fortement connexe et a cinq composantes fortement connexes : {1,2,4,7,10} {5,6,9}, {11}, {3} et {8}

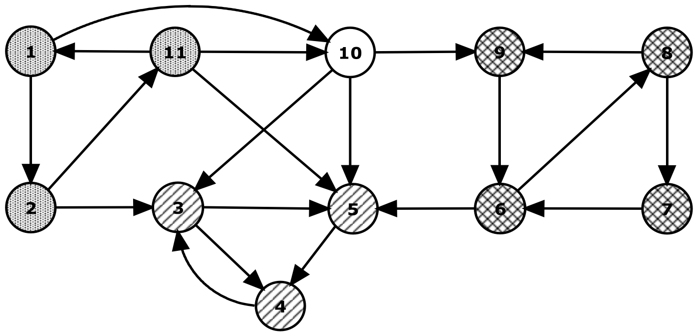


EXERCICE 6

1. G est-il connexe ? quelles sont sa/ses composante(s) connexe(s) ?
2. G est-il fortement connexe ? quelles sont sa/ses composante(s) fortement connexe(s) ?

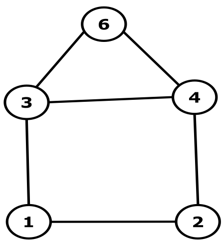


1. G est connexe et a une seule composante connexe : {1,2,..,11}
2. G n'est pas fortement connexe et a quatre composantes fortement connexes : {1,2,11}, {3,4,5}, {10} et {6,7,8,9}

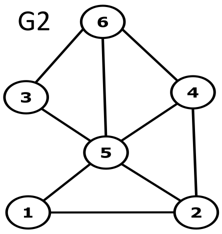


EXERCICE 7

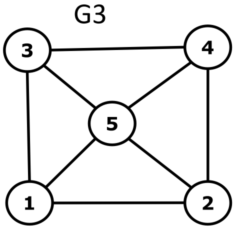
Pour chacun des graphes suivants, donnez les tailles du plus grand stable et de la plus grande clique.

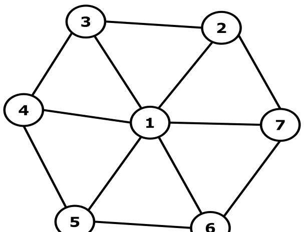


G2

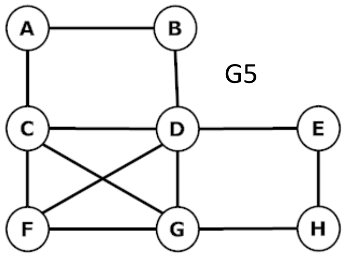


G3



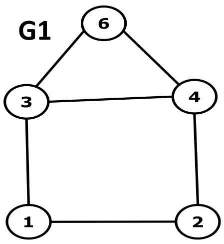


G4



G5

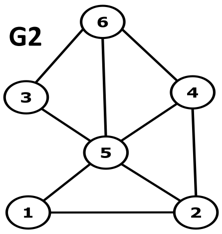
G1



Graphe G1

- Plus grand stable : graphe induit par {1,6} ou par {2,6}
- Plus grande clique : graphe induit par {3,4,6}

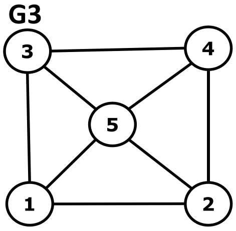
G2



Graphe G2

- Plus grand stable : graphe induit par {1,3,4}
- Plus grande clique : graphe induit par {3,5,6}, {4,5,6}, {2,4,5}…

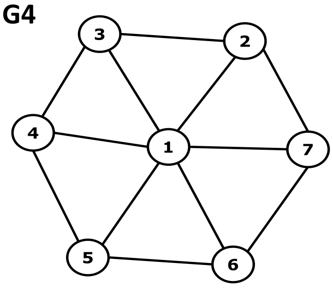
G3



Graphe G3

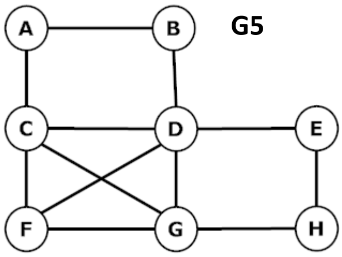
- Plus grand stable : graphe induit par {1,4} ou {2,3}
- Plus grande clique : graphe induit par {3,5,1}, {4,5,3}, {2,4,5}…

G4



Graphe G4

- Plus grand stable : graphe induit par {3,5,7} ou {2,4,6}
- Plus grande clique : graphe induit par {3,2,1}, {1,2,7}, {1,7,6}…



G5

Graphe G5

- Plus grand stable : graphe induit par {B,F,H} ou {E,G,A}…
- Plus grande clique : graphe induit par {C,D,F,G}