Conséquence logique

Mise sous forme clausale

Principe de résolution

Preuve par simplification

Formalisation des démonstrations

CONSÉQUENCE LOGIQUE

P est **conséquence logique** de $\{P_1, \dots, P_n\}$ si toute interprétation rendant vraies $P_1, \dots, P_n$ simultanément rend vraie l'expression P.

Notation : $\{\boldsymbol{P_1}, \dots, \boldsymbol{P_n}\} \vDash \boldsymbol{P}$

ou

$$\boldsymbol{P_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{P_n} \vDash \boldsymbol{P}$$

CONSÉQUENCE LOGIQUE - EXEMPLE

On suppose que les deux propositions suivantes **P1** et **P2** sont vraies :

P1 : « Si Paul a fait cette bêtise, alors il est stupide »

P2 : « Paul n'est pas stupide »

On peut montrer que la proposition **P** : « Paul n'a pas fait cette bêtise »

est **conséquence logique de** $\{P_1, P_2\}$ **(ou de** $P_1 \wedge P_2$) **:**

$$\{P_1, P_2\} \vDash P$$

ou

$$P_1 \wedge P_2 \vDash P$$

CONSÉQUENCE LOGIQUE - EXEMPLE

On suppose que les deux propositions suivantes **P1** et **P2** sont vraies :

P1 : « Si Paul a fait cette bêtise, alors il est stupide »

P2 : « Paul n'est pas stupide »

On peut montrer que la proposition **P** : « Paul n'a pas fait cette bêtise » est **conséquence logique de** $\{P_1, P_2\}$ **(ou de** $P_1 \wedge P_2$**) :**

On utilise les atomes suivants :

B : « Paul a fait cette bêtise »

S : « Paul est stupide »

$$\{P_1, P_2\} \vDash P$$

ou

$$P_1 \wedge P_2 \vDash P$$

CONSÉQUENCE LOGIQUE - EXEMPLE

Les propositions P_1, P_2 *et P s'écrivent :*

- $P_1: B \rightarrow S$
- $P_2: \neg S$
- $P: \neg B$

On veut montrer
$\boldsymbol{P_1 \wedge P_2 \vDash P}$

Table de vérité

B	S	P1	P2	P
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

CONSÉQUENCE LOGIQUE - EXEMPLE

Les propositions P_1 et P_2 s'écrivent :

- $P_1: B \rightarrow S$
- $P_2: \neg S$
- $P: \neg B$

On veut montrer
$\boldsymbol{P_1 \wedge P_2 \vDash P}$

Table de vérité

B	S	$\boldsymbol{P_1: B \rightarrow S}$	$\boldsymbol{P_2: \neg S}$	$\boldsymbol{P: \neg B}$
1	1	1		
1	0	0		
0	1	1		
0	0	1		

Conséquence logique - Exemple

Les propositions P_1, P_2 et P s'écrivent :

- $P_1 : B \rightarrow S$
- $P_2 : \neg S$
- $P : \neg B$

On veut montrer
$\boldsymbol{P_1 \wedge P_2 \vDash P}$

Table de vérité

B	S	$\boldsymbol{P_1 : B \rightarrow S}$	$\boldsymbol{P_2 : \neg S}$	$\boldsymbol{P : \neg B}$
1	1	1	0	
1	0	0	1	
0	1	1	0	
0	0	1	1	

CONSÉQUENCE LOGIQUE - EXEMPLE

Les propositions P_1, P_2 et P s'écrivent :

- $P_1 : B \rightarrow S$
- $P_2 : \neg S$
- $P : \neg B$

On veut montrer
$\boldsymbol{P_1 \wedge P_2 \vDash P}$

Table de vérité

B	S	$\boldsymbol{P_1 : B \rightarrow S}$	$\boldsymbol{P_2 : \neg S}$	$\boldsymbol{P : \neg B}$
1	1	1	0	
1	0	0	1	
0	1	1	0	
0	0	1	1	1

Conséquence logique - Exemple

Les propositions P_1 et P_2 s'écrivent :

- $P_1: B \rightarrow S$
- $P_2: \neg S$
- $P: \neg B$

P est conséquence logique de {P1,P2}

$$\{\boldsymbol{P1}, \boldsymbol{P2}\} \vDash \boldsymbol{P}$$

Table de vérité

B	S	$\boldsymbol{P_1: B \rightarrow S}$	$\boldsymbol{P_2: \neg S}$	$\boldsymbol{P: \neg B}$
1	1	1	0	
1	0	0	1	
0	1	1	0	
0	0	1	1	1

CONSÉQUENCE LOGIQUE - EXEMPLE

2ème méthode : par transformation d'expressions

Remarque : supposer vrai **{P1, P2}** revient à supposer vraie la proposition :

$$\boldsymbol{P1 \wedge P2}$$

$$\boldsymbol{P1 \wedge P2} \equiv$$

$P_1 : B \rightarrow S$
$P_2 : \neg S$
$P : \neg B$

Conséquence logique - Exemple

2ème méthode : par transformation d'expressions

Remarque : supposer vrai **{P1, P2}** revient à supposer vraie la proposition :

$$\boldsymbol{P1} \wedge \ \boldsymbol{P2}$$

$$\boldsymbol{P1} \wedge \ \boldsymbol{P2} \equiv (\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{S}\ ) \wedge \neg \boldsymbol{S} \equiv (\neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{S}\ ) \wedge \neg \boldsymbol{S}$$

$$\equiv (\neg \boldsymbol{B} \wedge \neg \boldsymbol{S}\ ) \vee (\boldsymbol{S} \wedge \neg \boldsymbol{S}\ ) \equiv \neg \boldsymbol{B} \wedge \neg \boldsymbol{S}$$

Conclusion : si $\boldsymbol{P1}$ et $\boldsymbol{P2}$ sont vraies alors $\neg \boldsymbol{B}$ et $\neg \boldsymbol{S}$ le sont aussi

DIFFÉRENCE ENTRE CONSÉQUENCE LOGIQUE ET IMPLICATION ?

CONSÉQUENCE LOGIQUE ET IMPLICATION

$$\{P1, P2\} \vDash P$$

Que peut-on dire de l'implication $P1 \wedge P2 \rightarrow P$?

Table de vérité

B	S	$P_1 : B \rightarrow S$	$P_2 : \neg S$	$P : \neg B$	$P_1 \wedge P_2$	$P1 \wedge P2 \rightarrow P$
1	1	1	0	0		
1	0	0	1	0		
0	1	1	0	1		
0	0	1	1	1		

Conséquence logique et implication

$$\{P1, P2\} \vDash P \qquad \equiv \qquad P1 \wedge P2 \vDash P$$

Que peut-on dire de l'implication $P1 \wedge P2 \rightarrow P$?

Table de vérité

B	S	$P_1: B \rightarrow S$	$P_2: \neg S$	$P: \neg B$	$P_1 \wedge P_2$	$P1 \wedge P2 \rightarrow P$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Conséquence logique et implication

$$\{P1, P2\} \vDash P \qquad \equiv \qquad P1 \wedge P2 \vDash P$$

Que peut-on dire de l'implication $P1 \wedge P2 \rightarrow P$?

$\{P1, P2\} \vDash P \quad \equiv \quad P1 \wedge P2 \vDash P \quad \equiv \quad P1 \wedge P2 \rightarrow P$ *est une tautologie*

Table de vérité

B	S	$P_1 : B \rightarrow S$	$P_2 : \neg S$	$P : \neg B$	$P_1 \wedge P_2$	$P1 \wedge P2 \rightarrow P$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	[illegible]	[illegible]	0	1
0	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
0	0	1	1	1	1	1

l'implication $P1 \wedge P2 \rightarrow P$ est une tautologie

MISE SOUS FORME CLAUSALE

CONSÉQUENCE LOGIQUE

P est **conséquence logique** de $\{P_1, \dots, P_n\}$ si toute interprétation rendant vraies $P_1, \dots, P_n$ simultanément rend vraie l'expression P.

Notation : $\{\boldsymbol{P_1}, \dots, \boldsymbol{P_n}\} \vDash \boldsymbol{P}$

ou

$$\boldsymbol{P_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{P_n} \vDash \boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{P_1}, \dots, \boldsymbol{P_n}$: hypothèses du problème que l'on supposera **vraies**

Mise sous forme clausale

<u>Vocabulaire</u>

- **LITTÉRAL :** A ou $\neg A$ (un atome ou sa négation)
- **CLAUSE :** $A \vee B \vee \neg C$ (disjonction de littéraux). Clause vide : $\perp$
- **CONJONCTION DE CLAUSES :** $(\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge B$

<u>Règles pour la mise sous forme clausale</u>

- **ÉLIMINATION DE** $\leftrightarrow$: $(A \leftrightarrow B)$ remplacé par $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- **ÉLIMINATION DE** $\rightarrow$: $(A \rightarrow B)$ remplacé par $(\neg A \vee B)$
- **NÉGATION :**
  - $\neg\neg A$ remplacé par A
  - $\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})$ remplacé par $(\neg\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B})$
  - $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$ remplacé par $(\neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B})$
- **DISTRIBUTIVITÉ :** $\big(\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})\big) \equiv \big((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C})\big)$ et $\big(\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})\big) \equiv \big((\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C})\big)$

Forme clausale : un « et » de « ou »

On suppose que $\mathbf{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6}$ sont les hypothèses d'un problème.
Nous allons essayer d'écrire ces hypothèses $\mathbf{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6}$ puis $\mathbf{P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 \wedge P_6}$ **sous forme clausale, c'est-à-dire d'un "et" de "ou"**
sous forme clausale et

- $P_1 \equiv (A \to \neg B)$
- $P_2 \equiv \big((A \vee B) \to C\big)$
- $P_3 \equiv \big((C \wedge A) \to (\neg B \vee \neg A)\big)$
- $P_4 \equiv \big(\neg B \to (C \vee \neg A)\big)$
- $P_5 \equiv \big(A \to (B \vee A)\big)$
- $P_6 \equiv \big((\neg B \vee A) \to B\big)$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$P_1 \equiv (A \rightarrow \neg B)$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_1 \equiv (A \rightarrow \neg B)$$

$$P_1 \equiv \neg A \vee \neg B$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_2 \equiv \left((A \vee B) \to C\right)$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_2 \equiv \big((A \vee B) \rightarrow C\big)$$

$$P_2 \equiv \neg(A \vee B) \vee C$$

$$P_2 \equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee C$$

$$P_2 \equiv (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_3 \equiv \big((C \land A) \rightarrow (\neg B \lor \neg A)\big)$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_3 \equiv \big((C \wedge A) \rightarrow (\neg B \vee \neg A)\big)$$

$$P_3 \equiv \neg(C \wedge A) \vee (\neg B \vee \neg A)$$

$$P_3 \equiv \neg C \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg A$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_4 \equiv \left(\neg B \rightarrow (C \vee \neg A)\right)$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_4 \equiv \left(\neg B \rightarrow (C \vee \neg A)\right)$$

$$P_4 \equiv \; B \vee C \vee \neg A$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_5 \equiv \left(A \rightarrow (B \vee A)\right)$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_5 \equiv \left(A \rightarrow (B \vee A)\right)$$

$$P_5 \equiv \neg A \vee \neg B \vee A$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_6 \equiv \left((\neg B \vee A) \rightarrow B\right)$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

$$P_6 \equiv \big((\neg B \lor A) \to B\big)$$

$$P_6 \equiv \neg(\neg B \lor A) \lor B$$

$$P_6 \equiv (B \land \neg A) \lor B$$

$$P_6 \equiv (B \lor B) \land (\neg A \lor B)$$

Forme clausale : un « et » de « ou »

Bilan

$P_1 \equiv A \rightarrow \neg B \ \equiv \ \neg A \vee \neg B$

$P_2 \equiv (A \vee B) \rightarrow C \ \equiv \ (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$

$P_3 \equiv (C \wedge A) \rightarrow (\neg B \vee \neg A) \equiv \ \neg C \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg A$

$P_4 \equiv \neg B \rightarrow (C \vee \neg A) \equiv \ B \vee C \vee \neg A$

$P_5 \equiv \big(A \rightarrow (B \vee A)\big) \equiv \ \neg A \vee \neg B \vee A$

$P_6 \equiv \big((\neg B \vee A) \rightarrow B\big) \equiv (B \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$

$$\mathbf{P_1} \wedge \mathbf{P_2} \wedge \mathbf{P_3} \wedge \mathbf{P_4} \wedge \mathbf{P_5} \equiv \ (\neg A \vee \neg B\ ) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg A\ ) \wedge (B \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee A) \wedge (B \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$$

SIMPLIFICATIONS ?

$\mathbf{P_1} \wedge \mathbf{P_2} \wedge \mathbf{P_3} \wedge \mathbf{P_4} \wedge \mathbf{P_5} \equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (B \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee A) \wedge (B \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$

Vocabulaire :

- $\neg A \vee B$, $B \vee C \vee \neg A$ … : clauses
- $\neg C, A, \neg B, B$ … : littéraux

Mise sous forme clausale

<u>Vocabulaire</u>

- **LITTÉRAL :** A ou $\neg A$ (un atome ou sa négation)
- **CLAUSE :** $A \vee B \vee \neg C$ (disjonction de littéraux). Clause vide : $\perp$
- **CONJONCTION DE CLAUSES :** $(\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge B$

<u>Règles pour la mise sous forme clausale</u>

- **ÉLIMINATION DE** $\leftrightarrow$: $(A \leftrightarrow B)$ remplacé par $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- **ÉLIMINATION DE** $\rightarrow$: $(A \rightarrow B)$ remplacé par $(\neg A \vee B)$
- **NÉGATION :**
  - $\neg\neg A$ remplacé par A
  - $\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})$ remplacé par $(\neg \mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B})$
  - $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$ remplacé par $(\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$
- **DISTRIBUTIVITÉ :** $\big(\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})\big) \equiv \big((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C})\big)$ et $\big(\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})\big) \equiv \big((\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C})\big)$

SIMPLIFICATIONS DE FORMES CLAUSALES

- **SUPPRESSION** de clauses comportant des littéraux opposés.

  Par exemple : $\cancel{A \vee B \vee \neg A}$ *(tautologie)*

SIMPLIFICATIONS DE FORMES CLAUSALES

- **SUPPRESSION** de clauses comportant des littéraux opposés.

  Par exemple : $\cancel{A \vee B \vee \neg A}$ *(tautologie)*

- **SUPPRESSION** d'un littéral dans une clause.

  Par exemple : $C \vee \neg A \vee \neg A = C \vee \neg A$

SIMPLIFICATIONS DE FORMES CLAUSALES

- **SUPPRESSION** de clauses comportant des littéraux opposés.

  Par exemple : $\cancel{A \vee B \vee \neg A}$ *(tautologie)*

- **SUPPRESSION** d'un littéral qui se répète dans une clause.

  Par exemple : $C \vee \neg A \vee \neg A = C \vee \neg A$

- **SUPPRESSION** de clauses contenant d'autres clauses .

  Par exemple : $\cancel{(A \vee \neg B \vee C)} \wedge (A \vee C)$

Simplifications de formes clausales

- **Suppression** de clauses comportant des littéraux opposés.

  Par exemple : $\cancel{A \vee B \vee \neg A}$ *(tautologie)*

- **Suppression** d'un littéral dans une clause.

  Par exemple : $C \vee \neg A \vee \neg A = C \vee \neg A$

- **Suppression** de clauses contenant d'autres clauses .

  Par exemple : $\cancel{(A \vee \neg B \vee C)} \wedge (A \vee C)$

- Supposant un littéral vrai, **suppression** de sa négation dans une clause.

  Par exemple : $(A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg A \equiv (\neg B \vee C) \wedge \neg A$

SIMPLIFICATIONS DE FORMES CLAUSALES

- **SUPPRESSION** de clauses comportant des littéraux opposés.

  Par exemple : $\cancel{A \vee B \vee \neg A}$ *(tautologie)*

- **SUPPRESSIO**

- **SUPPRESSIO**

- Supposan clause.

  Par exemple : $(A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg A \equiv (\neg B \vee C) \wedge \neg A$

ces modifications permettent de transformer un énoncé en un énoncé <u>équivalent</u> sous forme clausale.

Il est aussi possible de raisonner par « conséquence logique », en appliquant notamment le principe de résolution.

UN EXEMPLE DE PREUVE PAR SIMPLIFICATION

LE SPHINX

Vous êtes perdus sur une piste dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation.

Chacune des deux pistes est gardée par un sphinx que vous pouvez interroger. Les pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans le désert profond (au mieux, elles conduisent toutes à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux).

Le sphinx de droite vous répond :

« Une au moins des deux pistes conduit à une oasis »

Le sphinx de gauche vous répond :

« La piste de droite se perd dans le désert »

Vous savez que les sphinx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.

Un exemple de preuve par simplification

SD : « Une au moins des deux pistes conduit à une oasis »

SG : « La piste de droite se perd dans le désert »

Les sphinx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.

PREUVE PAR RÉFUTATION

Raisonnement par l'absurde

Soit A une matrice différente de O_n et de I_n telle que $A^2 = A$

1. Montrer par l'absurde que A n'est pas inversible
2. Montrer par l'absurde que $A - I_n$ n'est pas inversible

Raisonnement par l’absurde

Soit A une matrice différente de O_n et de I_n telle que $A^2 = A$

1. Montrer par l’absurde que A n’est pas inversible

Supposons que A est inversible

Il existe donc une matrice B (A^{-1}) telle que $AB = I_n$

$$AB = I_n \Longrightarrow A(AB) = A \Longrightarrow (AA)B = A \Longrightarrow A^2B = A$$

Or $A^2 = A$ donc $AB = A$

Or $AB = I_n$ donc $A = I_n$ Contradiction

1. Montrer par l’absurde que $A - I_n$ n’est pas inversible

Supposons que $A - I_n$ est inversible

Il existe donc une matrice B (A^{-1}) telle que $B(A - I_n) = I_n$

$$B(A - I_n) = I_n$$

$A^2 = A \Longrightarrow A^2 - A = O_n \Longrightarrow (A - I_n)A = O_n \Longrightarrow B(A - I_n)A = O_n \Longrightarrow$
$A = O_n$ Contradiction

Preuve par réfutation

Principe :

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \vDash A \; si\; et\; seulement\; si$$

$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg \boldsymbol{A}$ est **une contradiction**

Exemple

- *Montrons :* $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vDash (A \vee B)$

Par réfutation, montrer que$(A \to C)$ découle logiquement des propositions $(A \to B)$ et $(B \to C)$.

Par réfutation, montrer que $\big((A \to B) \to (B \to C)\big)$ est conséquence logique de $\big(A \to (B \to C)\big)$