R1.06 – MATHEMATIQUES DISCRETES

PREMIERE PARTIE : ENSEMBLES – POLY3

ANALYSE COMBINATOIRE (METHODES DE DENOMBREMENT)

Il y a des situations où le nombre d'éléments d'un ensemble est important et il faut alors, pour dénombrer ce dernier, utiliser des méthodes particulières (méthodes de dénombrement)

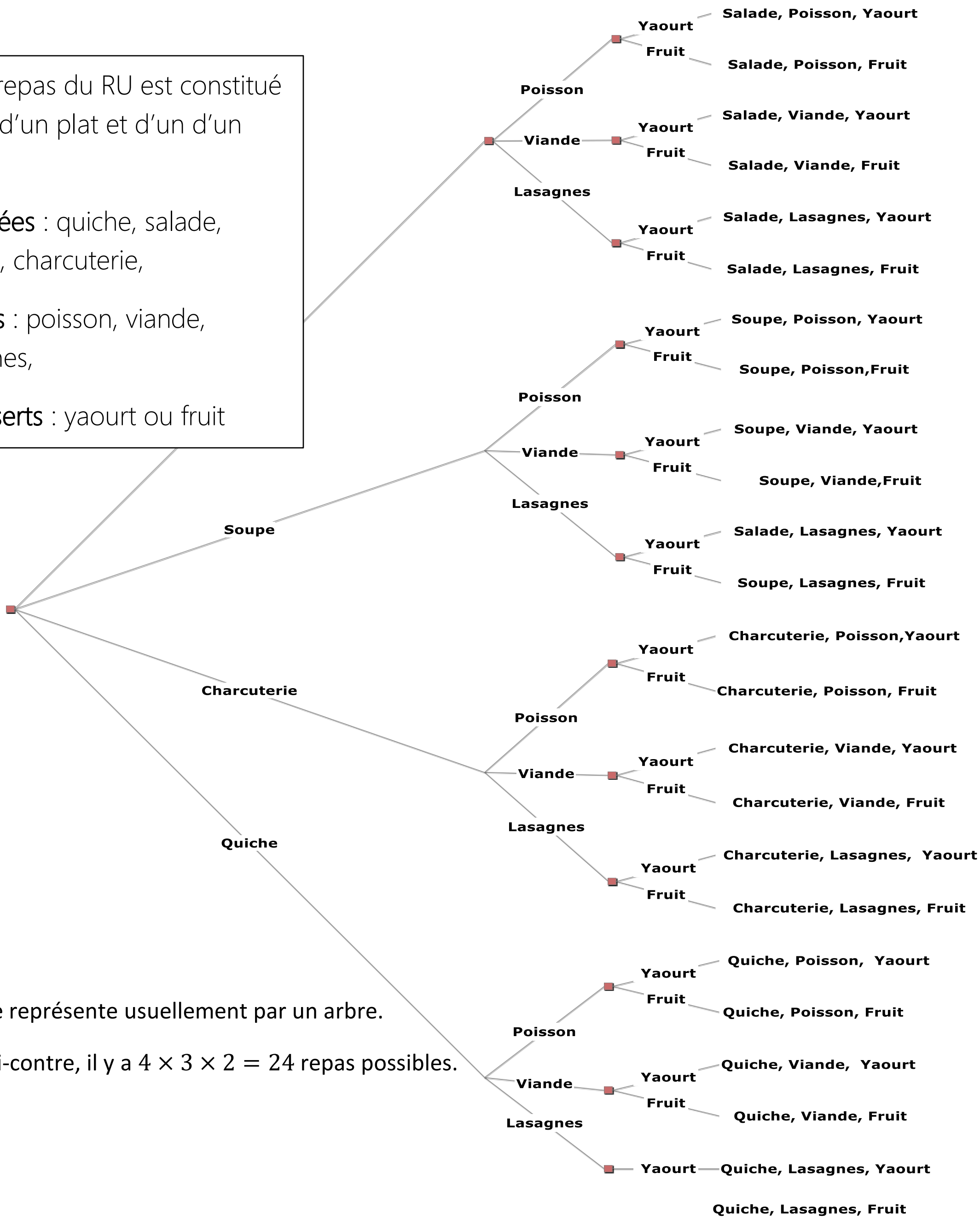
Exemple : Nombre de plaques d'immatriculations, nombre de groupes que l'on peut former, nombre de mots binaires, nombre de résultats possibles à un jeu…

AVANT DE COMMENCER… LE PRINCIPE DES CHOIX SUCCESSIFS

Quand on fait p choix successifs, s'il y a $\boldsymbol{n_1}$ possibilités pour le premier choix, $\boldsymbol{n_2}$ pour le deuxième,…, $\boldsymbol{n_p}$ pour le dernier, alors il y a en tout $\boldsymbol{n_1 n_2 \ldots n_p}$ possibilités d'enchaîner, l'un après l'autre, ces p choix.

Exemple : un repas du RU est constitué d'une entrée, d'un plat et d'un d'un dessert

- 5 entrées : quiche, salade, soupe, charcuterie,
- 3 plats : poisson, viande, lasagnes,
- 2 desserts : yaourt ou fruit



Cette situation se représente usuellement par un arbre.

Dans l'exemple ci-contre, il y a $4 \times 3 \times 2 = 24$ repas possibles.

PRINCIPE DES CHOIX SUCCESSIFS APPLICATION

- Combien de mots **binaires de 5 caractères** peut-on écrire ?
  Exemple : 10011
  $\rightarrow$ 2 choix pour le premier caractère
  $\rightarrow$ 2 choix pour le deuxième
  $\rightarrow$ …
  $\rightarrow$ 2 choix pour le cinquième

  Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$

- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 3 caractères** peut-on écrire ?
  Exemple : AEA
  $\rightarrow$ 5 choix pour le premier caractère
  $\rightarrow$ 5 choix pour le deuxième
  $\rightarrow$ 5 choix pour le troisième

  Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$

- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 3 caractères distincts** peut-on écrire ?
  Exemple : AEB
  $\rightarrow$ 5 choix pour le premier caractère
  $\rightarrow$ 4 choix pour le deuxième
  $\rightarrow$ 3 choix pour le troisième

  Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $5 \times 4 \times 3 = 120$

  Remarque :

$$5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5!}{2!}$$

- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 5 caractères** peut-on écrire ?
  Exemple : $AEABB$
  $\rightarrow$ 5 choix pour le premier caractère
  $\rightarrow$ 5 choix pour le deuxième
  $\rightarrow$ …
  $\rightarrow$ 5 choix pour le cinquième

  Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$

- A partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 5 caractères distincts** peut-on écrire ?
  Exemple : $AECBD$
  $\rightarrow$ 5 choix pour le premier caractère
  $\rightarrow$ 4 choix pour le deuxième
  $\rightarrow$ …
  $\rightarrow$ 1 choix pour le cinquième

  Principe des choix successifs : le nombre total de mots est $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

NECESSITE DE NOUVEAUX OUTILS POUR DENOMBRER

Exemple : à partir des 5 lettres A,B,C,D,E, combien de **mots de 5 caractères** contenant **exactement 2 fois la lettre A** peut-on écrire?

$$Réponse :\ C_5^2 4^3 = \binom{5}{2} 4^3$$

OUTILS DE DENOMBREMENTS

DENOMBREMENTS DE LISTES

Une ***liste de p éléments (ou p-liste)*** d'un ensemble E à n éléments est un élément de E^p c'est-à-dire une suite ordonnée (avec répétition possible) de p éléments de E.

Il y a n^p listes à p éléments dans un ensemble à n éléments

EXEMPLE

- Reprenons un des exemples précédents pour le traiter à l'aide d'une p-liste : à partir des 5 lettres A,B,C,D et E combien de **mots de 3 caractères** peut-on écrire ?
  Puisque les lettres d'un mot sont ordonnées et peuvent se répéter, un mot de trois lettres (exemple AEA) peut être représenté par une ***3-liste*** de l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ (exemple (A, E, A)). Il y a donc 5^3 ***3-listes*** possibles, soit 5^3 mots possibles
- Que se passe-t-il si on dénombre des mots de 3 caractères **distincts** ?
  Nous avons vu que le nombre de mots de 3 caractères distincts était égal à
  $$5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{2!}$$
  Nous allons utiliser un autre outil de dénombrement, les arrangements.

DENOMBREMENTS D'ARRANGEMENTS

Un ***arrangement de p éléments*** d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de p éléments distincts de E.

Il y a $A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Justificatif, il y a p éléments à choisir :

→ n choix pour le premier élément
→ $n-1$ pour le deuxième
→ $n-2$ pour le troisième
→ $n-(p-1) = n-p+1$ pour le p-ème

$$n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)\boldsymbol{(n-p)(n-p-1) \dots 2 \times 1}}{\boldsymbol{(n-p)(n-p-1) \dots 2 \times 1}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

EXEMPLE

Reprenons un l'exemple précédent : à partir des 5 lettres A,B,C,D et E combien de **mots de 3 caractères distincts** peut-on écrire ?
Un tel mot, par exemple AEA, peut être représenté par un ***arrangement*** de 3 éléments de l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ (exemple (A, E, A)). Il y a A_5^3 ***arrangements*** possibles, donc $\frac{5!}{2!}$ mots possibles

Permutations : Que se passe-t-il si p=n ?

Un arrangement de n éléments d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de n éléments distincts de E :

- C'est donc une façon d'ordonner les n éléments de E
- $\boldsymbol{A_n^n} = ?$

$$\boldsymbol{A_n^n = n(n-1)\ldots(n-n+1) = n!}$$

$$\boldsymbol{A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{O!} = n!}$$

Par convention

$0! = 1$

Denombrements de permutations

Une façon d'ordonner les n éléments d'un ensemble E s'appelle une *permutation* de E. Une permutation est aussi un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments.

Il y a $\boldsymbol{n}!$ *permutations dans un ensemble à n éléments*

$\Leftrightarrow$ *Il y a* $\boldsymbol{n}!$ *façons d'ordonner les n éléments d'un ensemble*

Denombrements de combinaisons

Exemple

Combien y a-t-il de façons de choisir 3 lettres parmi 5 ? (non ordonnées)

- Nous savons dénombrer les arrangements de trois lettres distinctes $(5!/2!)$, mais ceux-ci sont ordonnés : $(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C) \ldots$
- Nous remarquons cependant qu'avec 3 lettres distinctes données, nous pouvons écrire $3!$ arrangements :

Un choix de trois lettres (choix d'une combinaison)		$3!$ arrangements	
$\{A, B, C\}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases}(A, B, C)\\(A, C, B)\\(B, A, C)\\(B, C, A)\\(C, A, B)\\(C, B, A)\end{cases}$	*Il y a* $3\,!$ *fois plus d'arrangements à 3 éléments que de combinaisons à 3 éléments.*

Combinaison

Une combinaison de p éléments d'un ensemble E à n éléments est un sous-ensemble de E à p éléments. Il y a $p\,!$ fois plus d'arrangements à p éléments que de combinaisons à p éléments.

Le nombre de combinaisons à p éléments se note $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p}$ et est donc égal à :

$$C_n^p = \frac{\boldsymbol{A_n^p}}{\boldsymbol{p}!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Recapitulatif

	Suites (ordonnees) de p elements	Sous-ensembles (non ordonnes) de p elements
Avec repetition	n^p **p-listes** d'un ensemble à n éléments	*Combinaisons avec répétition*
Sans repetition	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ **arrangements** de p éléments dans un ensemble à n éléments	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ **combinaisons** de p éléments dans un ensemble à n éléments

Test récapitulatif sur le vocabulaire et les propriétés des outils de dénombrement :

EXERCICES

EXERCICE 1

1. En utilisant les chiffres 1,…, 9 :
   a. Combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres ?
   b. Combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres distincts.

2. Important et un peu plus compliqué…
   En utilisant les chiffres 1,…, 9 :
   a. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres commençant par 111 ?
   b. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres contenant exactement trois fois le chiffre 1 ?
   c. Combien peut-on écrire de nombres de cinq chiffres contenant exactement trois chiffres identiques ?
   d. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?
   e. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, tels que le premier chiffre est le plus petit et le dernier le plus grand ?
   f. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres, commençant par deux chiffres pairs et se terminant par trois impairs ?
   g. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres, contenant deux chiffres pairs et trois impairs ?
   h. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, contenant deux chiffres pairs et trois impairs ?
   i. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, commençant par deux chiffres pairs rangés par ordre croissant et se terminant par trois impairs également rangés par ordre croissant ?
   j. Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts, contenant deux chiffres pairs et trois impairs, rangés par ordre croissant ?

EXERCICE 2 : MOTS BINAIRES

On considère l'ensemble des mots binaires sur l'alphabet {0,1}

1. $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = ???$
2. Combien y a-t-il de mots binaires de longueur n ?
3. Combien y a-t-il de mots binaires de longueur inférieure ou égale à n ?
4. n=5 : combien y a-t-il de mots binaires contenant 3 « 0 » et 2 « 1 ».
5. De façon générale, combien y a-t-il de mots binaires comportant p « 0 » et n-p « 1 ».

Test – Dénombrements de mots

EXERCICE 3 : ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Soit $A = \{1,2,3,4\}$ un ensemble et P(A) l'ensemble des parties de A

1. {1,2} est une partie de A. On peut lui associer une 4-liste, laquelle ?
2. En déduire le cardinal de P(A)
3. Généralisation : si $cardA = n$ quel est le cardinal de $P(A)$?

EXERCICE 4 : FORMULES DE COMBINATOIRE ELEMENTAIRES

Démontrer et interpréter les formules suivantes :

$C_n^p = C_n^{n-p}$
$C_n^0 = C_n^n = 1$
$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

EXERCICE 5 : FORMULE DU TRIANGLE DE PASCAL

1. Montrer la Formule de Pascal : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$
2. Formule du binôme (développement de $(a+b)^n$)?
3. Donner une définition « récursive » de la combinaison.
4. Donner d'autres exemples de définitions récursives.

Test - Propriété des C_n^p

EXERCICE 6 : QCM

Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1. P1 : $C_{11}^7 + C_{11}^6 = C_{10}^7$
2. P2 : $11\,!$ est divisible par 7 !
3. P3 : $A_{11}^7 = \frac{11\,!}{7\,!}$
4. P4 : A_{11}^7 est le nombre de façon de choisir et d'ordonner entre eux 7 éléments pris parmi 11
5. P5 : $C_{10}^7 + C_{10}^6 = C_{11}^6$
6. P6: A_9^5 est le nombre de façons de choisir 5 éléments pris parmi 9

EXERCICE 7 : SYNTHESE

Paul est un jeune lycéen attiré par l'informatique. Il est en terminale souhaite postuler (sous APB) pour trois types de DUT : Informatique, MMI (Métiers du Multimédia et de l'Internet), R&T (Réseaux & Télécommunications).

Or il existe de nombreux IUT dans lesquels ces formations peuvent être suivies :

- 43 IUT pour le DUT Informatique
- 33 IUT pour le DUT MMI
- 29 IUT pour le DUT R&T

Cela fait donc 43+33+29=105 IUT dans lesquels Paul peut postuler.

Pour les questions suivantes, on ne développera pas les calculs. Les résultats seront exprimés en fonction de puissances, factorielles, combinaisons, arrangements…

1. Avant la fin du mois de février, Paul doit avoir sélectionné les IUT dans lesquels il allait postuler. Peu importe leur classement.
   a. Paul a décidé de choisir au hasard 9 IUT parmi les 105. Combien a-t-il de possibilités de choix ?
   b. Paul décide plutôt de choisir 3 IUT pour chacune des trois spécialités. Combien y a-t-il de possibilités de choix?

2. Finalement, Paul a choisi 9 IUT, 3 de chaque spécialité.
   Avant la fin du mois de mai, il doit classer entre eux ces 9 IUT.
   a. Combien y a-t-il de possibilités de classement ?
   b. Combien y a-t-il de possibilités de classement en mettant en premières positions, les IUT Informatique et en dernières positions, les IUT MMI ?

Exercice 8

On compte parmi les 84 étudiants de S1:

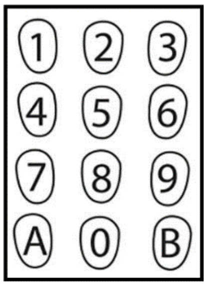
- 49 étudiants titulaires d'un bac S.
- 45 étudiants originaires des Pyrénées Atlantiques, parmi eux 4 filles et 30 titulaires d'un bac S.
- 6 filles. Toutes sont titulaires d'un bac S.

Les étudiants de l'IUT ont décidé de créer une association pour l'organisation d'un séjour au ski en janvier 2018.

1. Le bureau de cette association est constitué de 4 étudiants ayant **chacun une fonction particulière** : un(e) président(e), un(e) vice-président(e), un(e) secrétaire, un(e) trésorier(e).
   a. Combien y a-t-il de façon de constituer un bureau avec les 84 étudiants de la promo ?
   b. Combien y a-t-il de façon de constituer un bureau constitué uniquement de filles originaires des Pyrénées Atlantiques ?
   c. Combien y a-t-il de façons de constituer un bureau avec 1 fille présidente ?

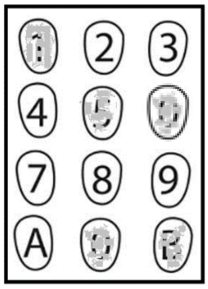
2. Le bureau décide de procéder à l'élection d'une commission qui sera chargée de récolter des fonds pour l'organisation du séjour. Celle commission est composée de six étudiants (membres ou non du bureau).
   a. Combien y a-t-il de commissions possibles ?
   b. Combien y a-t-il de commissions possibles constituées uniquement de filles ?
   c. Combien y a-t-il de commissions possibles avec 2 filles et 4 garçons ?

3. L'association dispose d'un local, dont la porte s'ouvre à l'aide d'un digicode.
   Le code comprend **5 caractères (pas nécessairement distincts)** et utilise des chiffres de 0 à 9 et deux lettres de A à B.



   a. Combien y a-t-il de codes possibles ?
   b. Combien y a-t-il de codes possibles avec exactement deux chiffres ?

   c. On remarque, sur le digicode, que les touches 1,5,6,0 et B ont été plus utilisées que les autres :
   Combien de codes peut-on former avec ces cinq caractères ?



   d. *(Plus difficile)* On remarque, sur le digicode, que les touches 1,5 et B ont été plus utilisées que les autres :
   Combien de codes (toujours de 5 caractères) peut-on former avec ces trois caractères ?