ANALYSE – M2202 – PRIMITIVES ET INTEGRATION

TABLE DES MATIERES

PRIMITIVES D'UNE FONCTION

- On dit qu'une fonction $\boldsymbol{F}$ **est une primitive d'une fonction** $\boldsymbol{f}$ sur un intervalle I si :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

c'est-à-dire si la fonction f **est la dérivée de la fonction** F sur l'intervalle I .

- Si F est une primitive de f alors toute fonction de la forme $x \to F(x) + C$, où C désigne une constante réelle quelconque est aussi une primitive de f.

La valeur de la constante C sera par exemple déterminée si on impose que la fonction F prenne une valeur particulière pour une valeur donnée du réel x.

Par exemple : les primitives de x sont de la forme $x^2/_2 + C$, la primitive de x qui s'annule en 2 est $x^2/_2 - 2$

TABLEAU DES PRIMITIVES ET PROPRIETES

Fonction	Primitives
$a \quad (a \in \mathbb{R})$	$ax + C$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$x^{n+1}/_{n+1} + C$
$1/_{x^2}$	$-1/_x + C$
$1/_x$	$\ln(x) + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

Pour se convaincre… n'hésitez pas à dériver les fonctions des colonnes « Primitives »

Fonction	Primitives
F est une primitive de f : $F' = f$ *G est une primitive de g :* $G' = g$	
$af(x)$	$aF(x) + C$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x) + C$
$f(ax + b)$	$\frac{1}{a}F(ax + b) + C$
$F'\big(G(x)\big)G'(x)$ Ou $f\big(G(x)\big)g(x)$	$F(G(x)) + C$
$-\dfrac{G'(x)}{G^2(x)}$	$1/_{G(x)} + C$
$G'(x)G^n(x) \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{G^{n+1}(x)}{n+1} + C$
$\dfrac{G'(x)}{G(x)}$	$\ln\lvert G(x)\rvert + C$
$G'(x)e^{G(x)}$	$e^{G(x)} + C$
$G'(x)\sin(G(x))$	$-\cos\big(G(x)\big) + C$
$G'(x)\cos(G(x))$	$\sin\big(G(x)\big) + C$

EXERCICES SUR LES PRIMITIVES

EXERCICE 1

Pour chaque fonction f définie ci-dessous, déterminer ses primitives F :

1. $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$
2. $f(x) = 3e^{-x}$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$
4. $f(x) = 3e^{2x} + 4$
5. $f(x) = \cos(-2x)$
6. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$
7. $f(x) = \frac{2}{5x-4}$
8. $f(x) = \frac{5}{x} - \sin x$
9. $f(x) = 2x(x^2-1)^4$
10. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
11. $f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}$
12. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
24. $f(x) = \frac{5}{x} - \sin x$

13. $f(x) = 2xe^{x^2}$
14. $f(x) = \frac{3}{(1-3x)^2}$
15. $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$
16. $f(x) = sin^4(x)\cos(x)$ $\quad (sin^4(x) = (sin\, x)^4$
17. $f(x) = \frac{\cos 3x}{sin^4(3x)}$
18. $f(x) = \frac{3e^{-x}}{e^{-x}+1}$
19. $f(x) = xe^{-x^2}$
20. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $f(x) = e^{-x} - \frac{2}{x}$
22. $f(x) = x^2e^{-x^3}$
23. $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$
25. $f(x) = 2x(x^2-1)^4$

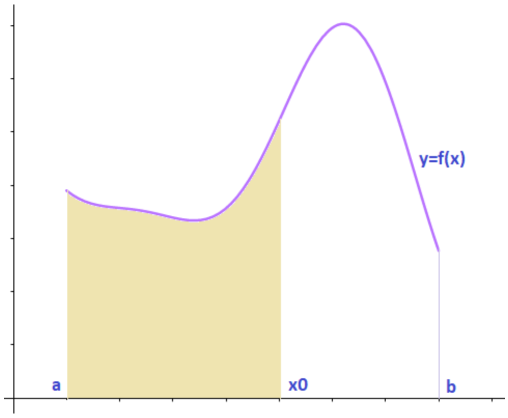
EXERCICE 2

Pour chaque fonction f définie ci-dessous, déterminer sa primitive F prenant la valeur y_0 en x_0 $\quad (F(x_0) = y_0)$

1. $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$; $x_0 = e$; $y_0 = 0$
2. $f(x) = 2(5-3x)^2$; $x_0 = 1$; $y_0 = -2$
3. $f(x) = x^2 - 2x + 4$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$
4. $f(x) = sinx\ cox^2x$; $x_0 = \pi$; $y_0 = 0$

INTEGRATION

CAS PARTICULIER D'UNE FONCTION POSITIVE : AIRE SOUS LA COURBE



f étant une fonction continue et positive

On note $A(x)$ l'aire délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = x_0$.

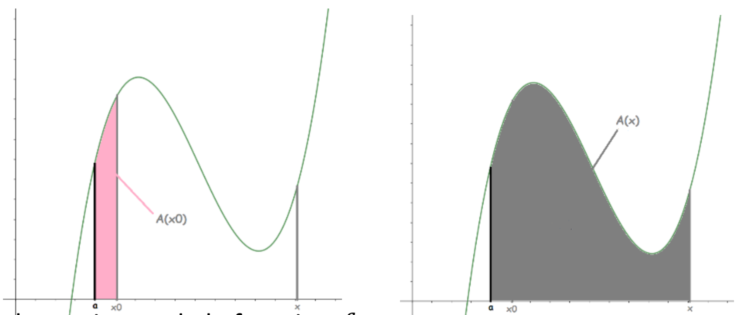
La démonstration qui suit, n'est pas à retenir mais à comprendre. Si vous bloquez sur cette démonstration, vous pouvez avancer dans le cours en admettant le résultat suivant (A primitive de f).

Nous allons donc démontrer que la fonction **A est une primitive de la fonction f sur l'intervalle$]a, b[$.**

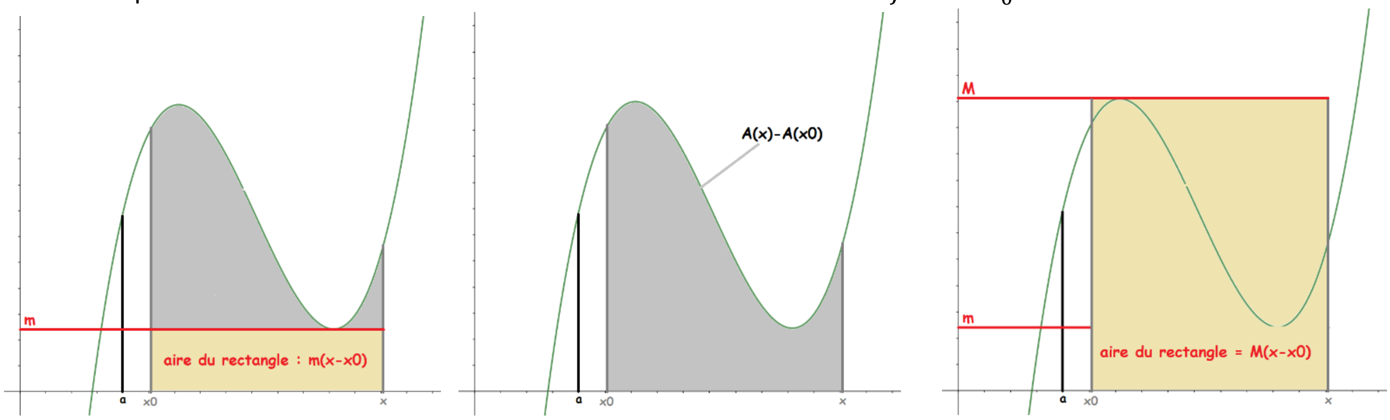
Pour cela il faut revenir à la définition d'une primitive, en montrant que cette fonction A admet pour dérivée la fonction f , en tout point x_0 de l'intervalle $]a, b[$.

Nous devons donc démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$

Représentation graphique de $A(x)$ et $A(x_0)$:



Notons respectivement m et M le minimum et le maximum de la fonction f entre x_0 et x.



L'aire sous la courbe entre x et x_0 est comprise entre les aires des rectangles de hauteurs respectives m et M.
Nous pouvons donc écrire : $\boldsymbol{m(x - x_0) \leq A(x) - A(x_0) \leq M(x - x_0)}$

$$\text{d'où } \boldsymbol{m \leq \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \leq M}$$

Quand $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x_0}$ alors $\boldsymbol{m} \rightarrow \boldsymbol{f(x_0)}$ et $\boldsymbol{M} \rightarrow \boldsymbol{f(x_0)}$. On peut donc en déduire que

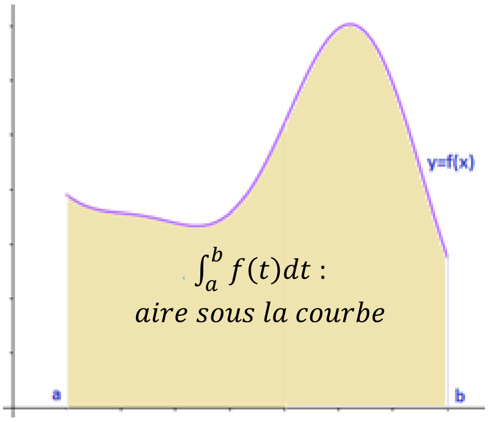
$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Or, par définition de la dérivée : $A'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0}$

On a donc $A'(x_0) = f(x_0)$: la fonction A est donc une primitive de f, plus précisemment la primitive de f qui s'annule en a (qui prend la valeur 0 pour $x = a$)

INTEGRALE

POUR UNE FONCTION POSITIVE



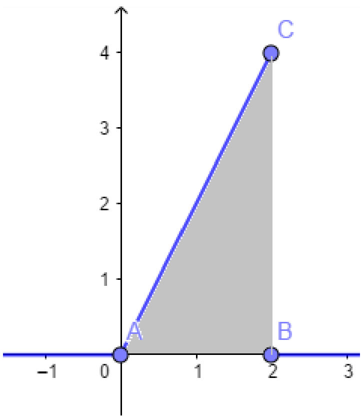
***f* étant une fonction continue et positive sur]a,b[**

On appelle intégrale de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]a, b[$ l'aire* délimitée par la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{f}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $\boldsymbol{x = a}$ et $\boldsymbol{x = b}$.

$$Notation : \int_a^b f(t)dt$$

**Pour aller plus vite par la suite, on simplifiera en disant « l'aire sous la courbe entre a et b »*

EXEMPLE



On considère la fonction f, représentée ci-contre et définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x\epsilon[0,2] \\ & 0 \; sinon \end{cases}$$

L'aire sous la courbe entre 0 et 2 est 4, est l'aire du triangle ABC.

$$Aire \ de \ ABC = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

Nous devrions préciser 4 « Unités d'aires » : l'unité d'aire étant ici l'aire du carré (ou du rectangle) de base et de hauteur 1

D'après la définition précédente :

$$\int_0^2 f(t)dt = 4$$

Remarque : dans cet exemple la fonction f est nulle en dehors de l'intervalle [0,2]. L'aire sous la courbe entre 0 et 2 est la même que l'aire sous la courbe entre -1 et 3 ou entre -5 et 5…

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_{-1}^3 f(t)dt = \int_{-5}^5 f(t)dt = \cdots = 4$$

$$Nous \ verrons \ dans \ la \ suite \ du \ cours \ la \ notions \ d'intégrale \ généralisée : \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 4$$

CALCUL D'UNE INTEGRALE

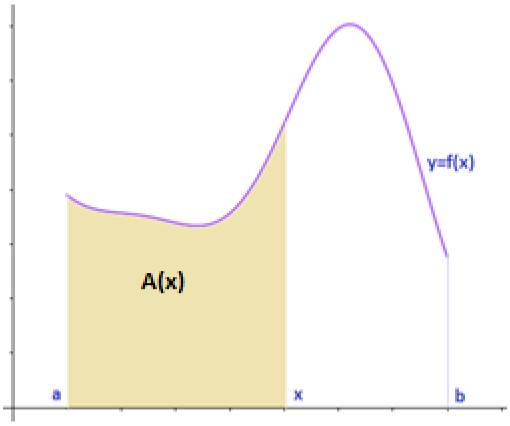
Dans l'exemple précédent nous connaissons l'aire sous la courbe, qui est l'aire d'un triangle, et donc la valeur de $\int_0^2 f(t)dt$.

Comment fait-on pour calculer une aire sous **une courbe quelconque** ?

Partant du résultat précédent, montrant que l'aire sous la courbe est **une primitive de f,** nous allons obtenir une méthode de calcul de l'intégrale généralisable à tout type de fonctions continues (ou presque…)

REMARQUES PRÉLIMINAIRES - IMPORTANT

f étant une fonction positive sur $]a, b[$, que savons-nous $A(x)$ l'aire sous la courbe entre a et x ?



- D'après la définition précédente de l'intégrale, $\int_a^b f(t)dt$ est aire sous la courbe entre a et b, donc

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

- $A(a)$ s'annule en a (aire entre a et a) :

$$A(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

- $A(x)$ est une primitive de f

Bilan : $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ est LA primitive de f qui s'annule en a

Si on considère F une autre primitive quelconque de f, nous savons que :

$$A(x) = F(x) + k \quad avec\ k\epsilon\mathbb{R}$$

On a alors : $A(x) - A(a) = (F(x) + k) - (F(a) + k) = F(x) + k - F(a) - k = F(x) - F(a)$

$$\boldsymbol{A(x) - A(a) = F(x) - F(a)}$$

Or $A(a) = 0$ donc $\boldsymbol{A(x) = F(x) - F(a)}$

où F est une primitive quelconque de f

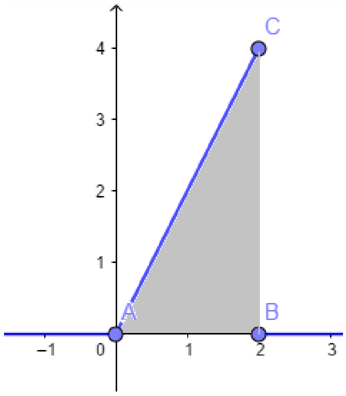
Donc $\boldsymbol{\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)}$

Donc $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$

On note habituellement la différence $F(b) - F(a)$ sous la forme $[F(t)]_a^b$ comme étape intermédiaire dans le calcul :

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

EXEMPLE



Revenons à la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ \ si \ \ x\epsilon[0,2] \\ \ \ 0 \ sinon \end{cases}$$

La fonction $F(x) = x^2$ est **une** primitive de f sur l'intervalle $[0,2]$

Nous pourrions prendre n'importe quelle autre primitive : x^2+1, x^2-85, x^2+79 …

D'après le résultat précédent :

$$\int_0^2 \boldsymbol{f(t)dt} = [\boldsymbol{F(t)}]_0^2 = [\boldsymbol{t^2}]_0^2 = \boldsymbol{2^2 - 0^2 = 4}$$

Les résultats que nous venons d'obtenir grâce à une interprétation de l'intégrale comme une aire sous la courbe d'une **fonction positive** se généralisent à une fonction quelconque.

GENERALISATION : DEUX RESULTATS IMPORTANTS

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ et F une primitive de f :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{la fonction } x \to \int_a^x f(t)dt \ \text{ est } \ \textbf{LA primitive} \ \text{ de f qui s'annule en a}$$

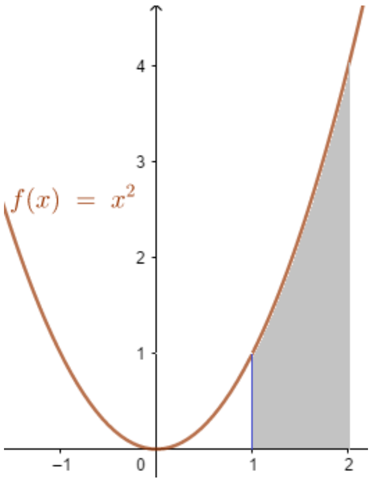
Remarque : dans la notation, $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable « muette », la valeur de l'intégrale ne dépendant pas de t.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

Il faut donc éviter d'utiliser une variable existante comme variable d'intégration :

$$\cancel{\int_a^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f(x)dx}}$$

EXEMPLE 1



$$f(x) = x^2$$

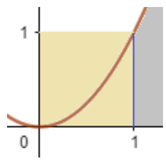
On veut calculer l'aire sous la courbe entre 1 et 2 c'est-à-dire $\int_1^2 \boldsymbol{f(t)dt}$

$$\int_1^2 \boldsymbol{f(t)dt} = \int_1^2 \boldsymbol{t^2 dt}$$

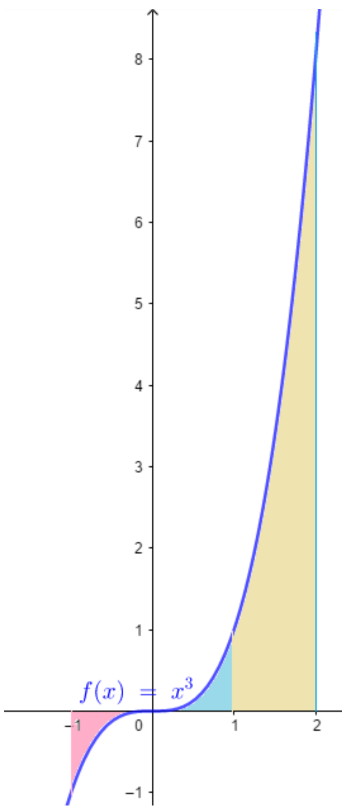
La fonction $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de x^2

$$\int_1^2 \boldsymbol{f(t)dt} = \int_1^2 \boldsymbol{t^2 dt} = \left[\frac{\boldsymbol{t^3}}{\boldsymbol{3}}\right]_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{2^3}}{\boldsymbol{3}} - \frac{\boldsymbol{1^3}}{\boldsymbol{3}} = \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{3}}$$

L'aire sous la courbe est égale à $\frac{7}{3} = 2{,}33$ unités d'aires



EXEMPLE 2



$$f(x) = x^3$$

1. Calculer l'aire sous la courbe entre 1 et 2, $\int_1^2 \boldsymbol{f(t)dt}$

$$\int_1^2 \boldsymbol{f(t)dt} = \int_1^2 \boldsymbol{t^3 dt}$$

La fonction $F(x) = \frac{x^4}{4}$ est une primitive de x^3

$$\int_1^2 \boldsymbol{f(t)dt} = \int_1^2 \boldsymbol{t^3 dt} = \left[\frac{\boldsymbol{t^4}}{\boldsymbol{4}}\right]_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{2^4}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{1^4}}{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{15}}{\boldsymbol{4}}$$

2. Calculer l'aire sous la courbe entre 0 et 1, $\int_0^1 \boldsymbol{f(t)dt}$

$$\int_0^1 \boldsymbol{f(t)dt} = \int_0^1 \boldsymbol{t^3 dt} = \left[\frac{\boldsymbol{t^4}}{\boldsymbol{4}}\right]_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{1^4}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{0^4}}{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$$

3. Calculer l'aire sous la courbe entre 0 et 2. Que remarque-t-on ?

$$\int_0^2 \boldsymbol{f(t)dt} = \int_0^2 \boldsymbol{t^3 dt} = \left[\frac{\boldsymbol{t^4}}{\boldsymbol{4}}\right]_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{2^4}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{0^4}}{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{16}}{\boldsymbol{4}}$$

On remarque que :

$$\int_0^2 \boldsymbol{f(t)dt} = \int_0^1 \boldsymbol{f(t)dt} + \int_1^2 \boldsymbol{f(t)dt}$$

Cette propriété est appelée relation de Chasles

4. Calculer $\int_{-1}^0 f(t)dt$. Que remarque-t-on ?

$$\int_{-1}^0 \boldsymbol{f(t)dt} = \left[\frac{\boldsymbol{t^4}}{\boldsymbol{4}}\right]_{\boldsymbol{-1}}^{\boldsymbol{0}} = \frac{\boldsymbol{0^4}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{(-1)^4}}{\boldsymbol{4}} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$$

Pour des questions de parités l'aire coloriée en rose est égale à l'aire en bleue.

Quand la fonction est négative, l'intégrale donne l'opposé de l'aire au-dessus de la courbe.

PROPRIETES DU CALCUL INTEGRAL

On suppose que f et g sont des fonctions continues sur $]a, b[$

RELATION DE CHASLES

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \qquad c \in \,]a, b[$$

LINEARITE

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad k\epsilon\mathbb{R}$$

POSITIVITE

Si f est positive sur $]a, b[$ $(a < b)$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

ORDRE

Pour tout réel x de $[a; b]$ si $g(x) \leq f(x)$ alors $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

AUTRES PROPRIETES

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b 0 \ \mathrm{d}x = 0$$

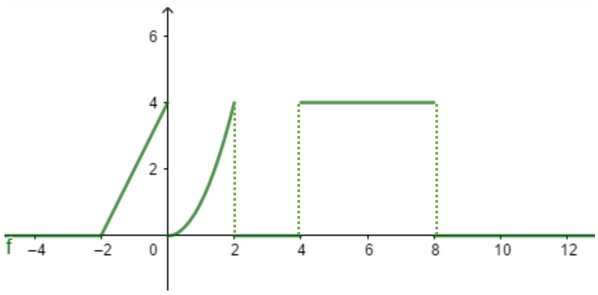
REMARQUE : CONTINUITE, INTEGRABILITE ET EXIXTENCE D'UNE PRIMITIVE

Nous avons donné dans ce cours les définitions de la primitive et de l'intégrale d'une fonction continue. Toute fonction continue n'est pas forcément intégrable et n'admet pas forcément de primitive et une fonction discontinue peut-être intégrable et admettre une primitive…

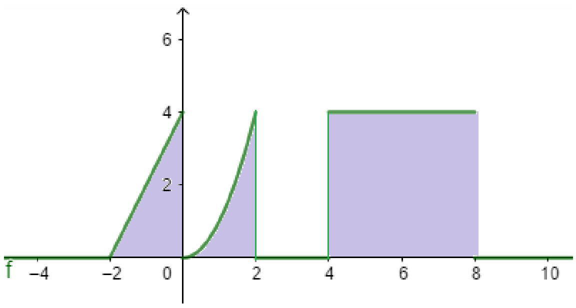
Quelques exemples :

- Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 \; si \; x \in [-2,0] \\ x^2 si \; x \in [0,2] \\ 4 \; si \; x \in [4,8] \\ 0 \; sinon \end{cases}$

  f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais elle est continue sur $\mathbb{R} - \{-2,0,4,8\}$ *(on dit aussi que f présente 4 points de discontinuité)*



La fonction f n'est pas continue sur [-2,8] (par exemple), mais on peut calculer sa primitive et l'aire sous la courbe en l'intégrant :



F, une primitive de f

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 4x \;\; si \; x \in [-2,0] \\ \dfrac{x^3}{3} si \; x \in [0,2] \\ 4x \; si \; x \in [4,8] \\ k \; sinon \end{cases}$$

On écrit habituellement k pour la primitive d'une constante, mais on pourrait tout à fait prendre 0 puisque la primitive ci-dessus est une primitive particulière de f

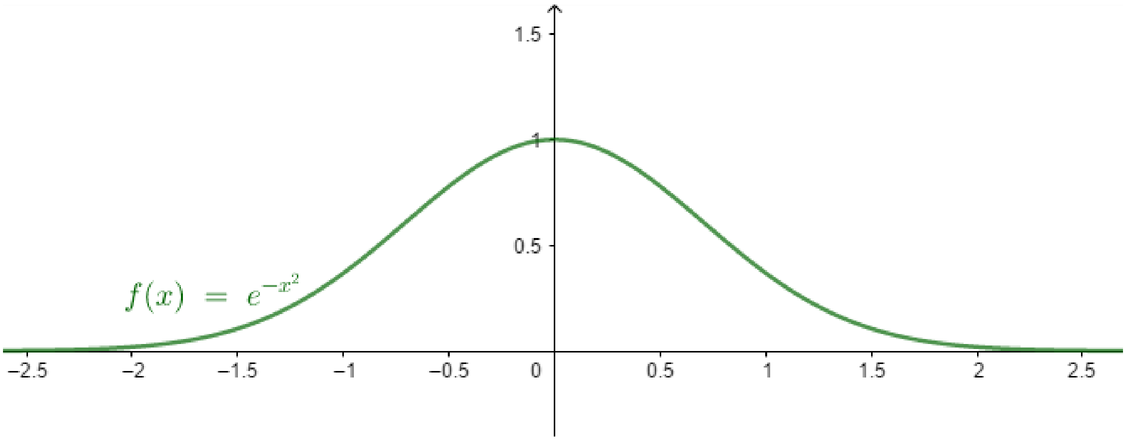
$$\int_{-2}^{8} f(t)dt = \int_{-2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{8} f(t)dt$$

$$= \int_{-2}^{0} (2t+4)dt + \int_{0}^{2} t^2 dt + \int_{2}^{4} 0dt + \int_{4}^{8} 4dt$$

$$= [t^2 + 4t]_{-2}^{0} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + [k]_2^4 + [4t]_4^8 = 0 - (-2)^2 - 4(-2) + \frac{2^3}{3} - 0 + k - k + 4 \times 8 - 4 \times 4 = \frac{68}{3}$$

Bilan : une fonction discontinue peut admettre une primitive et être intégrable

- Il existe des fonctions continues qui sont intégrables mais qui n'admettent pas de primitive. Une des plus connue est la fonction $f : x \to e^{-x^2}$ qui n'admet pas de primitive mais dont l'aire sous la courbe peut-être calculée (en utilisant d'autres méthodes) :

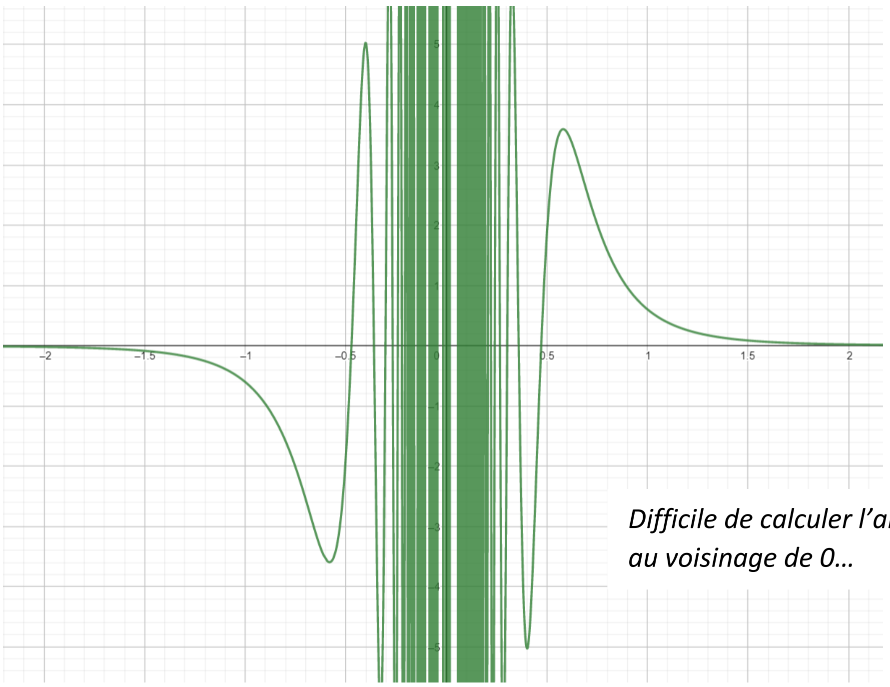


Il y a un lien étroit entre cette fonction et la densité de la loi normale que vous (re)verrez l'année prochaine en proba.

On peut montrer, même si la fonction $x \to e^{-x^2}$ n'admet pas de primitive, en utilisant d'autres techniques mathématiques, que l'aire sous la courbe est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Les plus curieux pourront chercher « intégrale de Gauss » sur Internet après avoir étudié le chapitre sur les intégrales généralisées…

- Il existe aussi des fonctions qui admette une primitive mais qu'on ne peut pas intégrer….
  ex : $f(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$
  Cette fonction admet une primitive $F(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$ mais n'est pas intégrable (notamment au voisinage de 0).



Difficile de calculer l'aire sous la courbe au voisinage de 0…

Pas d'inquiétude… dans la suite du cours, nous ne traiterons que des fonctions continues ou discontinues en un nombre fini de points, admettant des primitives et intégrables sur leur domaine de définition…

Exercices sur le calcul intégral

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 (-x^2+4x-3)dx.$ 2. $\int_{-1}^2 \frac{1}{3x+5}dx$ 3. $\int_0^1 xe^{3x^2-1}\,dx$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

a. Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale J = $\int_0^1 f(x)dx$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$.

Montrer que pour tout réel x, $\frac{e^{2x}}{1+e^x}=e^x-\frac{e^x}{1+e^x}$ et en déduire $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^2}{1+\mathrm{x}}$.

Montrer que pour tout réel x, $\frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}$ et en déduire $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

EXERCICE 5

1. Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
2. En déduire que pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}dt \leqslant 0{,}4$

EXERCICE 6

On souhaite calculer l'intégrale suivante : $I=\int_{-5}^1 xe^x\,dx$. Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=x\mathrm{e}^x$.

1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$et l'exprimer en fonction de $f(x)$.
2. En déduire la valeur de I.

EXERCICE 7 : PARITE

A. Soit f une fonction paire sur l'intervalle $[-a,a]$. Quelle relation a-t-on entre :
  - $\int_{-a}^0 f(t)dt$ et $\int_0^a f(t)dt$? *Ne pas démontrer mais illustrer cette propriété graphiquement en utilisant une fonction paire de votre choix.*
  - $\int_{-a}^a f(t)dt$ et $\int_0^a f(t)dt$? *On déduit ce résultat de la propriété précédente.*

B. Soit f une fonction impaire sur l'intervalle $[-a,a]$
  - Quelle relation a-t-on entre $\int_{-a}^0 f(t)dt$ et $\int_0^a f(t)dt$? *Ne pas démontrer mais illustrer cette propriété, graphiquement et par le calcul, en utilisant une fonction impaire de votre choix.*
  - Que peut-on en déduire pour $\int_{-a}^a f(t)dt$?

C. APPLICATION : Utiliser les propriétés précédentes pour calculer les intégrales suivantes.
  - $\int_{-1}^1 \frac{t}{1+t^2}dt$
  - $\int_{-\pi}^{\pi} \sin t^3\,dt$
  - $\int_{-1}^1 te^{t^2}dt$
  - $\int_{-1}^1 |t|dt$

EXERCICE 8

1. Représenter la fonction $cos\, x$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$
2. Calculer l'aire géométrique du domaine D compris entre la courbe précédente, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $\mathrm{x} = -\pi/2$ et $\mathrm{x} = \pi/2$.
3. Que vaut cette aire en cm^2 si on choisit comme unité de longueur 2 cm sur l'axe des ordonnées et si sur l'axe des abscisses on représente π par 2 cm ?

EXERCICE 9*

On considère la courbe (C) d'équation $y = x - x^3$ dans un repère orthonormé.

1. Représenter la courbe (C) sur l'intervalle $[0,1]$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
2. Soit D le domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, et soit a un réel strictement positif :
   Comment faut-il choisir la valeur de a pour que la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax}$ partage le domaine D en deux parties d'aires égales ?

CORRIGE DES EXERCICES SUR LES PRIMITIVES

EXERCICE 1

Pour chaque fonction C définie ci-dessous, déterminer ses primitives F :

Fonction f	**Primitives F** ($\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$)
$f(x) = 3x^2 - 7x + 4$	$F(x) = x^3 - 7\frac{x^2}{2} + 4x + k$
$f(x) = 3e^{-x}$	$F(x) = -3e^{-x} + k$
$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + k$
$f(x) = 3e^{2x} + 4$	$F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + 4x + k$
$f(x) = \cos(-2x)$	$F(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x) + k$
$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 4\sqrt{x} + k$
$f(x) = \frac{2}{5x - 4}$	$F(x) = \frac{2}{5}\ln(5x - 4) + k$
$f(x) = \frac{5}{x} - \sin x$	$F(x) = 5\ln x + \cos x + k$
$f(x) = 2x(x^2 - 1)^4$	$F(x) = \frac{(x^2 - 1)^5}{5} + k$
$f(x) = \frac{\ln x}{x}$	$F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k$
$f(x) = \frac{2}{(2x + 1)^2}$	$F(x) = -\frac{1}{2x + 1} + k$

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$	$F(x) = \ln(\sin x) + k$
$f(x) = 2xe^{x^2}$	$F(x) = e^{x^2} + k$
$f(x) = \frac{3}{(1-3x)^2}$	$f(x) = \frac{1}{1-3x} + k$
$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$	$f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + k$
$f(x) = sin^4(x)\cos(x)$	$F(x) = \frac{1}{5}sin^5(x) + k$
$f(x) = \frac{\cos 3x}{sin^4(3x)}$	$F(x) = \frac{-1}{9sin^3(3x)} + k$
$f(x) = \frac{3e^{-x}}{e^{-x}+1}$	$F(x) = 3\ln(e^{-x}+1) + k$
$f(x) = xe^{-x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = -\sqrt{1-x^2} + k$
$f(x) = e^{-x} - \frac{2}{x}$	$F(x) = -e^{-x} - 2\ln x + k$
$f(x) = x^2e^{-x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + k$
$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$	$F(x) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + k$
$f(x) = \frac{5}{x} - \sin x$	$F(x) = 5\ln x + \cos x + k$
$f(x) = 2x(x^2-1)^4$	$F(x) = \frac{1}{5}(x^2-1)^5 + k$
$f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}$	$F(x) = -\frac{1}{2x+1} + k$

EXERCICE 2

Pour chaque fonction f définie ci-dessous, déterminer sa primitive F prenant la valeur y_0 en x_0 $(F(x_0) = y_0)$

1. $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$; $x_0 = e$; $y_0 = 0$

   Primitives : $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + k}$

$$\boldsymbol{F(e) = \frac{1}{4}(\ln e)^2 + k = \frac{1}{4} + k}$$

$$\boldsymbol{F(e) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{4} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4} \Rightarrow\ F(x) = \frac{1}{4}(\ln x)^2 - \frac{1}{4}}$$

2. $f(x) = 2(5-3x)^2$; $x_0 = 1$; $y_0 = -2$

   Primitives : $\boldsymbol{F(x) = -\frac{2}{9}(5-3x)^3 + k}$

$$\boldsymbol{F(1) = -\frac{2}{9}(5-3)^3 + k = -\frac{16}{9} + k}$$

$$\boldsymbol{F(1) = -2 \Longrightarrow -\frac{16}{9} + k = -2 \Rightarrow k = \frac{16}{9} - 2 = \frac{16}{9} - \frac{18}{9} = -\frac{2}{9} \Rightarrow\ F(x) = -\frac{2}{9}(5-3x)^3 - \frac{2}{9}}$$

3. $f(x) = x^2 - 2x + 4\ ;\ x_0\ = 1\ ;\ y_0\ = 2$

   Primitives : $\boldsymbol{F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + k}$

$$\boldsymbol{F(1) = \frac{1}{3} - 1 + 4 + k = \frac{10}{3} + k}$$

$$\boldsymbol{F(1) = 2 \Longrightarrow \frac{10}{3} + k = 2 \Rightarrow k = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow\ F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - \frac{4}{3}}$$

4. $f(x) = sinx\ cox^2x\ ;\ x_0\ = \pi\ ;\ y_0\ = 0$

   Primitives : $\boldsymbol{F(x)} = -\frac{1}{3}cox^3x + \boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{F}(\pi) = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}cox^3\pi + \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}(-1)^3 + \boldsymbol{k} = +\boldsymbol{\frac{1}{3}} + \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}(\pi) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{3}} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{\frac{1}{3}} \Rightarrow\ \boldsymbol{F(x)} = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}cox^3x - \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

CORRIGE DES EXERCICES SUR LE CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 (-x^2+4x-3)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}-3x\right]_1^2 = -\frac{2^3}{3}+4\frac{2^2}{2}-3\times 2+\frac{1^3}{3}-4\frac{1^2}{2}+3\times 1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{3x+5}dx = \left[\frac{1}{3}\ln(3x+5)\right]_{-1}^2 = \frac{1}{3}\ln(11)-\frac{1}{3}\ln(2) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{11}{2}\right)$$

$$\int_0^1 xe^{3x^2-1}\,dx = \left[\frac{1}{6}e^{3x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{6}e^2-\frac{1}{6}e^{-1}$$

EXERCICE 2

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

a. Vérifier que pour tout réel *x*, $f(x) = 1-\frac{e^x}{1+e^x}$.

$$\mathbf{1-\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} = \boldsymbol{f(x)}}$$

b. En déduire la valeur de l'intégrale J = $\int_0^1 f(x)dx$.

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx = [x]_0^1-[\ln(1+e^x)]_0^1}$$

$$\boldsymbol{= 1-\ln(1+e)+\ln 2 = 1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)}$$

EXERCICE 3

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$.

Montrer que pour tout réel x, $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x-\frac{e^x}{1+e^x}$ et en déduire $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

$$\boldsymbol{e^x-\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x(1+e^x)}{1+e^x}-\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x+e^{2x}-e^x}{1+e^x} = \frac{e^{2x}}{1+e^x} = f(x)}$$

$$\int_0^1 \boldsymbol{f(x)dx} = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int_0^1\left(\boldsymbol{e^x}-\frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{1+e^x}}\right)dx = \int_0^1 \boldsymbol{e^x}\,dx-\int_0^1\frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{1+e^x}}dx$$

$$\boldsymbol{= [e^x]_0^1-[\ln(1+e^x)]_0^1 = e-1-ln(1+e)+ln\,2}$$

EXERCICE 4

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

Montrer que pour tout réel x, $\frac{x^2}{1+x} = x-1+\frac{1}{1+x}$ et en déduire $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

$$\boldsymbol{x-1+\frac{1}{1+x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{1}{1+x} = \frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{x+1} = f(x)}$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx = \int_0^1(x-1)dx+\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1+[\ln(1+x)]_0^1}$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx = \frac{1^2}{2}-1+ln\,2-ln\,1 = ln\,2-\frac{1}{2}}$$

EXERCICE 5

1. Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

$$\boldsymbol{x \geq 1 \implies x \leq x^2}$$

La fonction exponentielle étant croissante : $\boldsymbol{x \leq x^2 \Rightarrow e^x \leq e^{x^2}}$

$$\boldsymbol{e^x \leq e^{x^2} \Rightarrow \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}}$$

2. En déduire que pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2} dt \leqslant 0{,}4$

On déduit du résultat précédent :

$$\boldsymbol{t \geq 1 \implies e^{-t^2} \leq e^{-t} \implies} \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2} dt \leq \int_1^x \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} dt$$

Or :

$$\boldsymbol{\int_1^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^x = -e^{-x} + e^{-1} = \frac{1}{e} - e^{-x} \leq \frac{1}{e} \leq 0,4 \qquad \left(\frac{1}{e} \approx 0.37\right)}$$

Donc :

$$\boldsymbol{0 \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2} dt \leqslant 0,4}$$

EXERCICE 6

On souhaite calculer l'intégrale suivante : $I = \int_{-5}^{1} xe^x \, dx$. Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = xe^x$

1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$et l'exprimer en fonction de $f(x)$.

$$\boldsymbol{f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x}$$

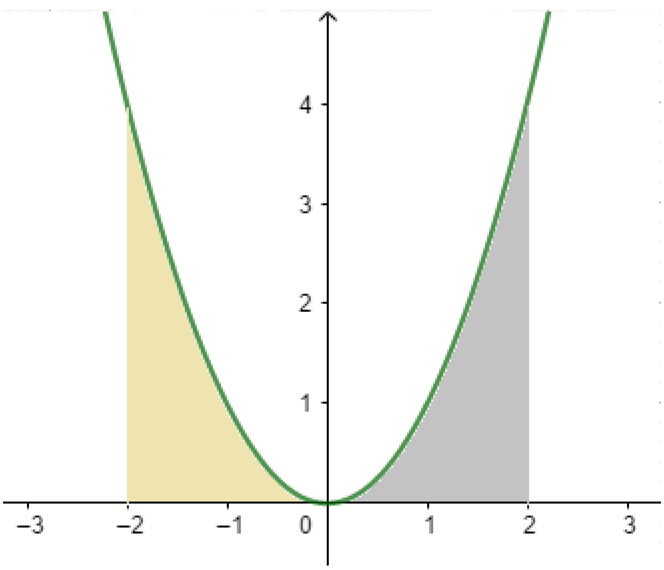
On en déduit que la dérivée de $\boldsymbol{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}$ est égale à $\boldsymbol{x\mathrm{e}^x}$: $\boldsymbol{F(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}$ est donc une primitive de $f(x) = xe^x$

2. En déduire la valeur de I.

$$\boldsymbol{I = \int_{-5}^{1} xe^x \, dx = [x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_{-5}^{1} = e - e + 5e^{-5} + e^{-5} = 6e^{-5}}$$

EXERCICE 7 : PARITE

A. Soit f une fonction paire sur l'intervalle $[-a, a]$. Quelle relation a-t-on entre :
   - $\int_{-a}^{0} f(t)dt$ et $\int_0^a f(t)dt$? *Ne pas démontrer mais illustrer cette propriété graphiquement et par le calcul en utilisant une fonction paire de votre choix.*



Prenons la fonction paire $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

La fonction étant paire, la courbe est symétrique par rapport à l'origine, l'aire sous la courbe entre -2 et 0 (beige) est égale à l'aire sous la courbe entre 0 et 2 (grise).
On en déduit que :

$$\boldsymbol{\int_{-2}^{0} f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt}$$

(par le calcul on obtiendrait $8/3$)

Généralisation, si f est paire sur $[-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]$ **:**

$$\boldsymbol{\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt}$$

- $\int_{-a}^{a} f(t)dt$ et $\int_0^a f(t)dt$? *On déduit ce résultat de la propriété précédente.*

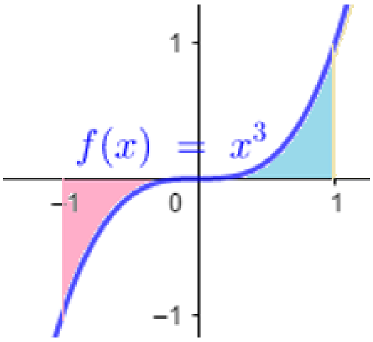
$$\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(t)dt} = \int_{-a}^{0} \boldsymbol{f(t)dt} + \int_0^a \boldsymbol{f(t)dt} \qquad (\boldsymbol{relation\ de\ Chasles}).$$

$$\text{D'après le résultat précédent} \int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(t)dt} = \int_0^a \boldsymbol{f(t)dt} + \int_0^a \boldsymbol{f(t)dt} = 2\int_0^a \boldsymbol{f(t)dt}$$

B. Soit f une fonction impaire sur l'intervalle $[-a, a]$

- Quelle relation a-t-on entre $\int_{-a}^{0} f(t)dt$ et $\int_0^a f(t)dt$? *Ne pas démontrer mais illustrer cette propriété, graphiquement et par le calcul, en utilisant une fonction impaire de votre choix.*

On peut reprendre l'exemple 2 de la page 7, avec la fonction impaire : $f(x) = x^3$



On remarque que les aires colorées en rose et en bleu sont égales.

$$\int_0^1 \boldsymbol{f(t)dt} = \int_0^1 \boldsymbol{t^3dt} = \left[\frac{\boldsymbol{t^4}}{\boldsymbol{4}}\right]_0^1 = \frac{\boldsymbol{1^4}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{0^4}}{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}} = \boldsymbol{Aire\ bleue}$$

$$\int_{-1}^{0} \boldsymbol{f(t)dt} = \left[\frac{\boldsymbol{t^4}}{\boldsymbol{4}}\right]_{-1}^{0} = \frac{\boldsymbol{0^4}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{(-1)^4}}{\boldsymbol{4}} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}} = -\boldsymbol{Aire\ rose}$$

$$\int_0^1 \boldsymbol{f(t)dt} = -\int_{-1}^{0} \boldsymbol{f(t)dt}$$

Généralisation, si f est impaire sur $[-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]$:

$$\int_a^0 \boldsymbol{f(t)dt} = \int_0^a \boldsymbol{f(t)dt}$$

- Que peut-on en déduire pour $\int_{-a}^{a} f(t)dt$?

$$\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(t)dt} = \int_{-a}^{0} \boldsymbol{f(t)dt} + \int_0^a \boldsymbol{f(t)dt} \qquad (\boldsymbol{relation\ de\ Chasles}).$$

$$\text{D'après le résultat précédent} \int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(t)dt} = -\int_0^a \boldsymbol{f(t)dt} + \int_0^a \boldsymbol{f(t)dt} = \boldsymbol{0}$$

L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré est impaire

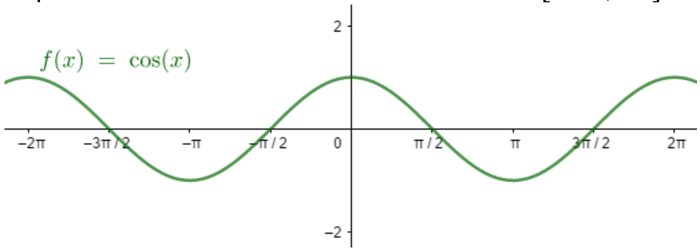
C. APPLICATION : Utiliser les propriétés précédentes pour calculer les intégrales suivantes.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-1}^{1} \boldsymbol{te^{t^2}dt = 0} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin \boldsymbol{t^3\,dt = 0} \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{1+t^2}}\boldsymbol{dt = 0} \end{array}\right\} \boldsymbol{car\ les\ fonctions\ \ te^{t^2}}, \sin \boldsymbol{t^3\ \ et\ \ \frac{t}{1+t^2}\ \ sont\ impaires}$$

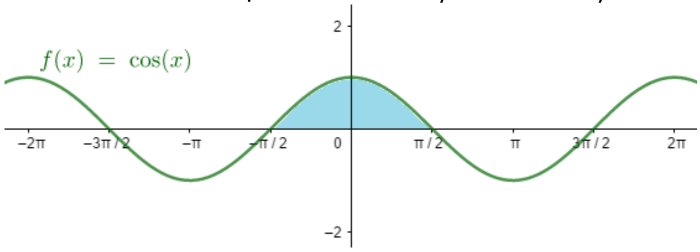
$\boldsymbol{f(x) = |x|}$ **est paire donc** $\boldsymbol{\int_{-1}^{1}|t|dt = 2\int_0^1 tdt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1}$

EXERCICE 8

1. Représenter la fonction $cos\, x$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$



2. Calculer l'aire géométrique du domaine D compris entre la courbe précédente, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -\pi/2$ et $x = \pi/2$.



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

Nous aurions pu aussi utiliser la parité de $\cos x$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2[\sin x]_0^{\pi/2} = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0\right) = 2$$

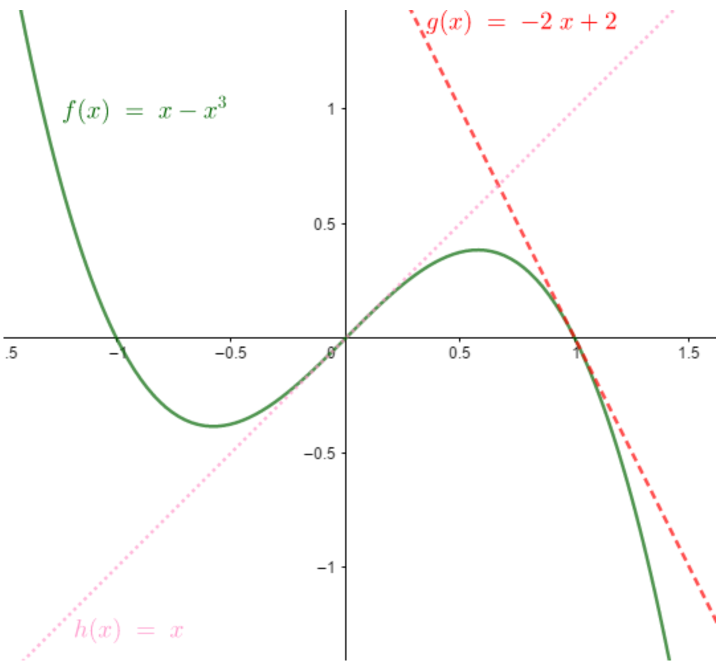
3. Que vaut cette aire en cm^2 si on choisit comme unité de longueur 2 cm sur l'axe des ordonnées et si sur l'axe des abscisses on représente π par 2 cm ?

L'unité d'aire en cm est de $4\mathrm{cm}^2$, l'aire sous la courbe est donc de $8\mathrm{cm}^2$

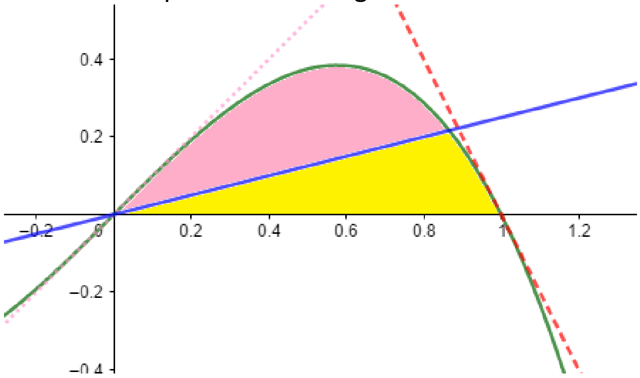
EXERCICE 9*

On considère la courbe (C) d'équation $y = x - x^3$ dans un repère orthonormé.

1. Représenter la courbe (C) sur l'intervalle $[0,1]$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.



2. Soit D le domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, et soit a un réel strictement positif :
Comment faut-il choisir la valeur de a pour que la droite d'équation $y = ax$ partage le domaine D en deux parties d'aires égales ?



$y = ax$?

L'aire sous la courbe est

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t - t^3)dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

L'aire en rose est l'intégrale sur [0,1] de la fonction $f(x) - ax$ $(f(x) = x - x^3)$

$$\int_0^1 (f(t) - at)dt = \int_0^1 (t - t^3 - at)dt = \int_0^1 \left((1-a)t - t^3\right) dt = \left[\frac{(1-a)t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1-a}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1-2a}{4}$$

Si la droite d'équation sépare l'aire en deux aires égales, l'aire roses doit être est égale à $\frac{1}{8}$

$$\frac{1-2a}{4} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2 - 4a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

La droite cherchée a pour équation $y = \frac{1}{4}x$