R1.06 – MATHEMATIQUES DISCRETES

PREMIERE PARTIE : ENSEMBLES - CARDINAL D'UN ENSEMBLE

QCM

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Cocher, parmi les expressions suivantes, celles qui sont égales à $\boldsymbol{card(\bar{A} \cap \bar{B})}$?

- ☑ $card(E) - card(A \cup B)$
- ☐ $card(\bar{A}) - card(B)$
- ☐ $card(E) - card(A) - card(B)$

$\boldsymbol{card(\bar{A} \cap \bar{B}) = card(\overline{A \cup B}) = card(E) - card(A \cup B) = card(E) - card(A) - card(B) + card(A \cap B)}$

$\boldsymbol{card(\bar{A} \cap \bar{B}) = card(\bar{A} - B) = card(\bar{A}) - card(\bar{A} \cap B)}$

QCM

Soient A, B et C trois sous-ensembles de E.

Cocher, parmi les expressions suivantes, celles qui sont égales à $\boldsymbol{card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})}$

- ☑ $card(A \cap \bar{C}) - card(A \cap B \cap \bar{C})$
- ☐ $card(A) - card(B \cup C)$
- ☑ $card(\bar{B} \cap \bar{C}) - card(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$
- ☐ $card(A) - card(A \cap B \cap C)$

$\boldsymbol{card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = card\left(A \cap (\overline{B \cup C})\right) = card\left(A - (B \cup C)\right) = card(A) - card\left(A \cap (B \cup C)\right)}$

$\boldsymbol{= card(A) - card\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right) = card(A) - card(A \cap B) - card(A \cap C) + card(A \cap B \cap C)}$

$\boldsymbol{card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = card(A) - card(A \cap B) - card(A \cap C) + card(A \cap B \cap C)}$

$\boldsymbol{card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = card\left(\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{\bar{A}}\right) = card\left((\bar{B} \cap \bar{C}) - \bar{A}\right) = card(\bar{B} \cap \bar{C}) - card(\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{A})}$

$\boldsymbol{card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = card(\bar{B} \cap \bar{C}) - card(\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{A})}$

$\boldsymbol{card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = card(A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) = card\left((A \cap \bar{C}) - B\right) = card(A \cap \bar{C}) - card(A \cap \bar{C} \cap B)}$

$\boldsymbol{card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = card(\bar{B} \cap \bar{C}) - card(\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{A})}$

EXERCICES

EXERCICE 1

Soient A, B et C trois ensembles.

Exprimer $\boldsymbol{card(A \cup B \cup C)}$ en fonction des cardinaux de A, B, C et de leurs intersections respectives

$$\boldsymbol{card(A \cup B \cup C) = card\left((A \cup B) \cup C\right) = card(A \cup B) + card(C) - card\left((A \cup B) \cap C\right)}$$

$$\boldsymbol{= card(A \cup B) + card(C) - card\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right)}$$

$$\boldsymbol{= card(A) + card(B) - card(A \cap B) + card(C) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)}$$

$$\boldsymbol{card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)}$$

EXERCICE 2

On s'intéresse aux étudiants d'une faculté. On note M l'ensemble des étudiants suivant le cours de mathématique, I l'ensemble des étudiants suivant le cours d'informatique et E l'ensemble des étudiants suivant le cours d'économie. Exprimer les cardinaux des ensembles suivants en fonction de $cardM$, $cardI$, $cardE$, $card(M \cap I)$, $card(M \cap E)$, $card(M \cap E)$, $card(I \cap M \cap E)$:

a. E_1 : L'ensemble des étudiants qui ne suivent aucun des trois cours,

$E_1 = \bar{I} \cap \bar{M} \cap \bar{E} = \boldsymbol{\overline{I \cup M \cup E}}$

$card(E_1) = card(\boldsymbol{\overline{I \cup M \cup E}}) = card(F) - card(\boldsymbol{\overline{I \cup M \cup E}})$

$card(E_1) = card(F) - \boldsymbol{card(I) - card(M) - card(E) + card(I \cap M) + card(E \cap M) + card(E \cap I) + card(E \cap I \cap M)}$

b. E_2 : L'ensemble des étudiants qui ne suivent que le cours d'économie,

$E_2 = E \cap \overline{M} \cap \overline{I}$

$card(E_2) = card(E \cap \overline{M} \cap \overline{I}) = card\big(E \cap (\overline{M \cup I})\big) = card\big(E - (M \cup I)\big) = card(E) - card\big(E \cap (M \cup I)\big)$

$card(E_2) = card(E) - card\big((E \cap M) \cup (E \cap I)\big)$

$= card(E) - card(E \cap M) - card(E \cap I) + card(E \cap M \cap I)$

$card(E_2) = card(E) - card(E \cap M) - card(E \cap I) + card(E \cap M \cap I)$

c. E_3 : L'ensemble des étudiants qui suivent le cours d'économie et le cours de math mais pas celui d'informatique,

$E_3 = E \cap M \cap \overline{I}$

$card(E_3) = card(E \cap M \cap \overline{I}) = card\big((E \cap M) - I\big) = card(E \cap M) - card(E \cap M \cap I)$

d. E_4 : L'ensemble des étudiants qui suivent au plus deux des trois cours

$E_4 = \overline{E \cap M \cap I}$

$card(E_4) = card(\overline{E \cap M \cap I}) = card(E) - card(E \cap M \cap I)$

EXERCICE 3

On s'intéresse aux 80 élèves de CM1/CM2 d'une école primaire

Ces élèves ont été évalués par des QCM sur trois matières : orthographe, calcul et anglais.

On utilisera indistinctement les termes de *QCM*, *questionnaires*, *tests* pour désigner ces épreuves.

Parmi les 80 élèves :

- 70 ont réussi le test d'orthographe
- 75 ont réussi celui de calcul
- 60 ont réussi le test d'anglais
- Tous ceux qui ont réussi le test d'anglais ont aussi réussi les tests d'orthographe et de calcul.
- 2 élèves n'ont réussi aucun des trois questionnaires

1. Traduire les valeurs numériques précédentes par des cardinaux sur les ensembles E, O, C et A où :

   E : ensemble des élèves évalués

   O : ensemble des élèves ayant réussi le test d'orthographe

   C : ensemble des élèves ayant réussi le test de calcul

   A : ensemble des élèves ayant réussi le test d'anglais

   $\boldsymbol{cardE = 80}$ $\boldsymbol{cardC = 75}$ $\boldsymbol{card(\overline{A} \cap \overline{C} \cap \overline{O}) = 2}$

   $\boldsymbol{cardO = 70}$ $\boldsymbol{cardA = 60}$

2. Interprétation de la phrase «Tous ceux qui ont réussi le test d'anglais ont aussi réussi les QCM d'orthographe et de calcul » :

   a. Quelle relation ensembliste permet de traduire directement cette phrase ?

   $$\boldsymbol{A \subset C \cap O}$$

   b. Que peut-on dire de $A \cup O, A \cup O \cup C,\ \overline{A} \cap \overline{O}$?

   $$\boldsymbol{A \subset O \implies A \cup O = O \implies A \cup O \cup C = O \cup C}$$

   $$\boldsymbol{A \subset O \implies A \cup O = O \implies \overline{A \cup O} = \overline{O} \implies \overline{A} \cap \overline{O} = \overline{O}\ \ (loi\ de\ Morgan)}$$

   c. Déterminer $card(O \cup C)$.

   On remarque que $\boldsymbol{card(\overline{A} \cap \overline{C} \cap \overline{O}) = 2}$.

   Or $\boldsymbol{\overline{A} \cap \overline{C} \cap \overline{O} = \overline{A \cup O \cup C} = \overline{O \cup C}}$

   Donc : $\boldsymbol{card(\overline{O \cup C}) = 2}$ $\boldsymbol{\implies cardE - card(O \cup C) = 2}$

   $$\boldsymbol{card(O \cup C) = cardE - 2 = 80 - 2 = 78}$$

   d. En déduire $card(O \cap C)$.

   $\boldsymbol{card(O \cup C) = cardO + cardC - card(O \cap C)}$

   Donc : $\boldsymbol{card(O \cap C) = cardO + cardC - card(O \cup C) = 70 + 75 - 78 = 67}$

e. On s'intéresse aux ensembles suivants :

- A1 : ensemble des élèves ayant réussi au moins un test
- A2 : ensemble des élèves ayant réussi les trois tests
- A3 : ensemble des élèves n'ayant réussi que le test de calcul

a. Exprimer, de la façon la plus simple possible, A1, A2 et A3 en fonction de O, C et A.

- $\boldsymbol{A1 = A \cup C \cup O = C \cup O}$
- $\boldsymbol{A2 = A \cap C \cap O = A}$
- $\boldsymbol{A3 = C \cap \overline{A} \cap \overline{O} = C \cap \overline{O} = C \backslash O}$

b. Exprimer les cardinaux de A1, A2 et A3 en fonction des cardinaux de la question 1.
On justifiera bien sûr les résultats en appliquant des propriétés des cardinaux et des opérations sur les ensembles.

- $\boldsymbol{cardA1 = card(C \cup O) = 78\ (question\ 2\ c.)}$
- $\boldsymbol{cardA2 = cardA = 60}$
- $\boldsymbol{cardA3 = card(C\text{O}) = cardC - card(C \cap O) = 75 - 67 (question\ 2\ d.)}$
  $\boldsymbol{cardA3 = 8}$

EXERCICE 4

Soients A, B et C trois ensembles

Cocher, parmi les expressions suivantes, celles qui sont égales à $\boldsymbol{card(A \cap \overline{B} \cap C)}$

- ☐ $card(A \cap C) - cardB$
- ☑ $card(A \cap C) - card(A \cap B \cap C)$
- ☐ $card(A) - card(B \cup \bar{C})$
- ☐ $card(A) - card(A \cap B \cup \bar{C})$
- ☑ $card(A \cap \bar{B}) - card(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$
- ☑ $card(A) - card(A \cap \bar{C}) - card(A \cap B) - card(A \cap B \cap \bar{C})$

$\boldsymbol{card(A \cap \overline{B} \cap C) = card((A \cap C) - B) = card(A \cap C) - card(A \cap C \cap B)}$

$\boldsymbol{card(A \cap \overline{B} \cap C) = card\left(A \cap (\overline{B} \cap \overline{\overline{C}})\right) = card\left(A \cap (\overline{B \cup \overline{C}})\right) = card(A - (B \cup \overline{C})) = card(A) - card(A \cap (B \cup \overline{C}))}$

$\boldsymbol{= card(A) - card((A \cap B) \cup (A \cap \overline{C})) = card(A) - card(A \cap B) - card(A \cap \overline{C}) + card(A \cap B \cap \overline{C})}$

$\boldsymbol{card(A \cap \overline{B} \cap C) = card(A) - card(A \cap B) - card(A \cap \overline{C}) + card(A \cap B \cap \overline{C})}$

$\boldsymbol{card(A \cap \overline{B} \cap C) = card(A \cap \overline{B} \cap \overline{\overline{C}}) = card((A \cap \overline{B}) - \overline{C}) = card(A \cap \overline{B}) - card(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})}$

$\boldsymbol{card(A \cap \overline{B} \cap C) = card(A \cap \overline{B}) - card(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})}$

EXERCICE 5

L'IUT a décidé d'organiser une « Journée des Anciens ».

Cette année 60 anciens étudiants viennent présenter leur parcours :

- 30 occupent un poste d'ingénieur,
- 20 ont moins de 30 ans,
- 40 ont un Bac+5,
- 25 occupent un poste d'ingénieur et ont un Bac+5,
- 15 occupent un poste d'ingénieur et ont moins de 30 ans,
- 18 ont un Bac+5 et moins de 30ans,
- 13 occupent un poste d'ingénieur, ont un Bac+5 et ont moins de 30 ans.
- On note :

B : ensemble des anciens ayant un Bac+5

M : ensemble des anciens ayant moins de 30 ans

I : ensemble des anciens occupant un poste d'ingénieur

1. Traduire l'énoncé en utilisant des cardinaux.

$\boldsymbol{card(I) = 30}$
$\boldsymbol{card(M) = 20}$
$\boldsymbol{card(B) = 40}$
$\boldsymbol{card(I \cap B) = 25}$
$\boldsymbol{card(I \cap M) = 15}$
$\boldsymbol{card(B \cap M) = 18}$
$\boldsymbol{card(B \cap M \cap I) = 13}$

2. On s'intéresse aux ensembles suivants :
   A1 : Les anciens qui occupent un poste d'ingénieur sans avoir de Bac+5
   A2 : les anciens ont moins de 30 ans et un Bac+5 et qui n'occupent pas de poste d'ingénieur
   A3 : Les anciens qui ont moins de 30 ans ou un Bac+5, mais qui n'occupent pas un poste d'ingénieur

   a. Écrire chacun des ensembles A1, A2 et A3 en langage ensembliste et en utilisant les notations B, I et M.

$\boldsymbol{A_1 = I \cap \overline{B} = I \backslash B}$
$\boldsymbol{A_2 = M \cap B \cap \overline{I} = M \cap B \backslash I}$
$\boldsymbol{A_3 = (M \cup B) \cap \overline{I} = (M \cup B) \backslash I}$

   b. Déterminer le cardinal de chacun des ensembles A1, A2 et A3. On utilisera les propriétés des cardinaux pour justifier les résultats.

$\boldsymbol{card(A_1) = card(I \backslash B) = card(I) - card(I \cap B) = 30 - 25 = 5}$
$\boldsymbol{card(A_2) = card(M \cap B \backslash I) = card(M \cap B) - card(I \cap M \cap B) = 18 - 13 = 5}$
$\boldsymbol{card(A_3) = card\big((M \cup B) \backslash I\big) = card(M \cup B) - card\big((M \cup B) \cap I\big)}$
$\boldsymbol{= card(M \cup B) - card\big((M \cap I) \cup (B \cap I)\big)}$
$\boldsymbol{= card(M) + card(B) - card(M \cap B) - card(M \cap I) - card(B \cap I) + card(M \cap B \cap I)}$
$\boldsymbol{= 20 + 40 - 18 - 15 - 25 + 13 = 15}$

3. Simplifier les expressions suivantes (en justifiant):
   - $\big(B \cap (M \cup \overline{B})\big) \cap (\overline{I} \cup B)$
     $\boldsymbol{\big(B \cap (M \cup \overline{B})\big) \cap (\overline{I} \cup B) = B \cap (M \cup \overline{B}) \cap (\overline{I} \cup B) = B \cap (M \cup \overline{B}) \quad car\ B \subset (\overline{I} \cup B)}$
     $\boldsymbol{= (B \cap M) \cup (B \cap) = (B \cap M) \cup \emptyset = B \cap M}$
   - $\big((M \cup B) \cap (\overline{I} \cup M)\big) \cup B$
     $\boldsymbol{\big((M \cup B) \cap (\overline{I} \cup M)\big) \cup B = M \cup (B \cap \overline{I}) \cup B = M \cup B \quad car\ (B \cap \overline{I}) \subset B}$