ANALYSE NIVEAU 1 – RAPPEL SUR LES FONCTIONS

TABLE DES MATIERES

FONCTIONS

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une **relation** qui associe à chaque réel au plus un élément de $\mathbb{R}$. On la représente de la façon suivante :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \text{expression de } f(x)$$

Exemple, pour la fonction racine carrée :
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$

DOMAINE DE DEFINITION DE LA FONCTION F

Le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels f(x) est définie.
On le notera D_f.

$$\boldsymbol{D_f} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} / \boldsymbol{f(x)} \textbf{ est bien définie}\}$$

Exemple, pour la fonction racine carrée :
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$

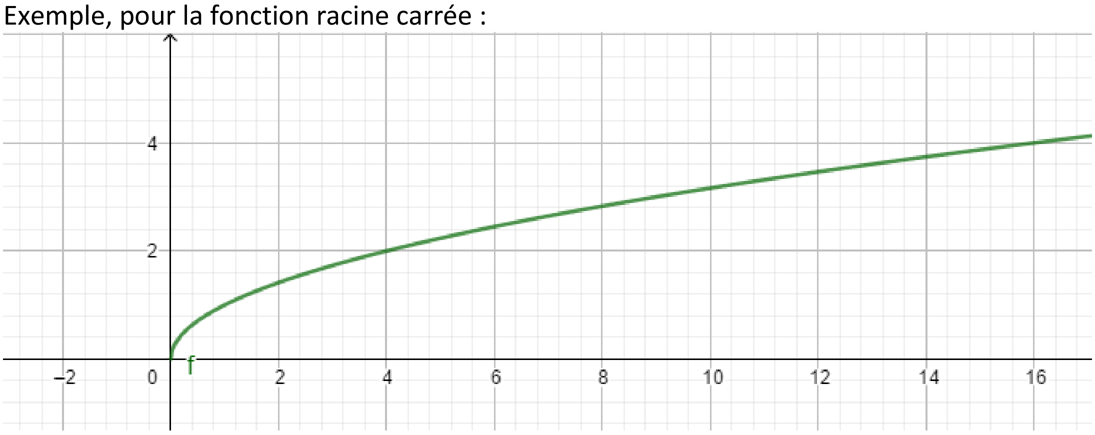
$$\boldsymbol{D_f} = [\mathbf{0}, +\infty[$$

COURBE REPRESENTATIVE DE LA FONCTION F

On notera C_f la courbe représentative de f dans un repère cartésien d'origine O.

$$\boldsymbol{C_f} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(x)}\right\}$$

Exemple, pour la fonction racine carrée :



PROPRIETES PERMETTANT DE REDUIRE LE DOMAINE D'ETUDE DE LA FONCTION

Il s'agit ici d'utiliser les propriétés de parité ou de périodicité de la fonction f pour réduire le domaine où on va étudier ses variations.

PARITE : FONCTION PAIRE, FONCTION IMPAIRE

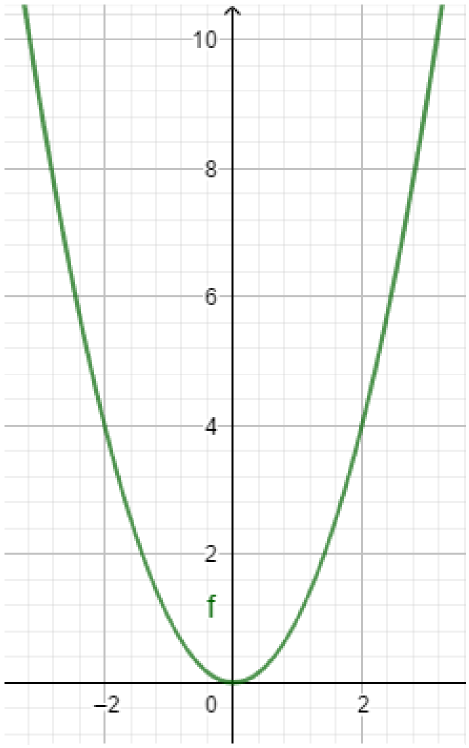
- f est dite **paire** si pour tout x$\in D_f$: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.

  La courbe représentative de f est alors **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).**

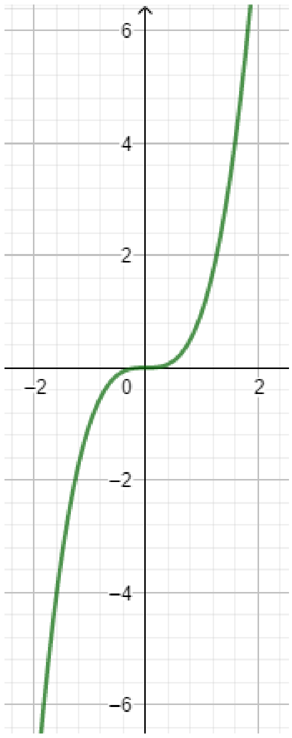
- f est dite **impaire** si pour tout x$\in D_f$: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

  La courbe représentative de f est alors **symétrique par rapport à l'origine O du repère.**

- Dans les deux cas il suffit donc d'étudier la fonction f pour $x \geq 0$ et d'effectuer ensuite la symétrie correspondante.



$f(x) = x^2$ - f fonction paire



$f(x) = x^3$ - f fonction impaire

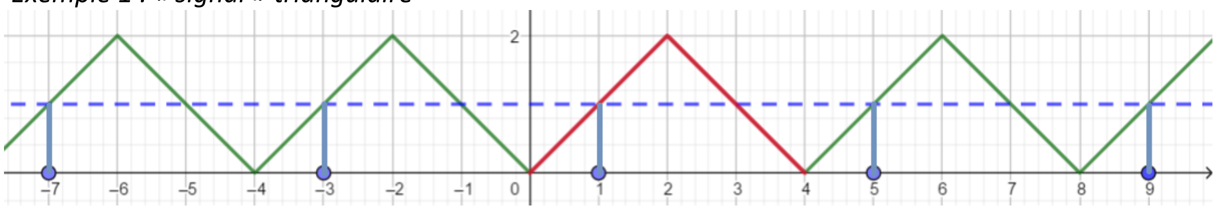
FONCTION PERIODIQUE

- **f est périodique de période p (ou p-périodique) si**

$$\forall x \in D_f,\ x + p \in D_f \text{ et } f(x+p) = f(x)$$

- Il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur p puis de répéter la courbe obtenue sur cet intervalle pour l'obtenir sur l'ensemble du domaine de définition de f.

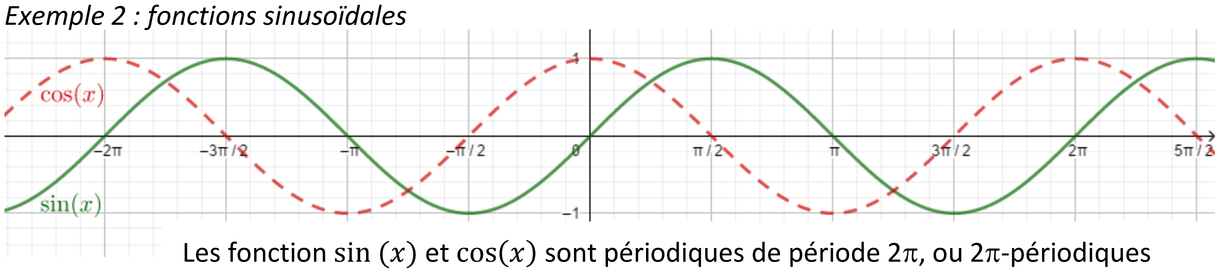
Exemple 1 : « signal » triangulaire



La fonction f représentée ci-dessus est périodique de période 4 :

- $f(1) = f(1+4) = f(1+2\times 4) = f(1-4) = f(1-2\times 4) = \cdots = f(1+k\times 4)$
- De façon générale : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+4) = f(x)$
- Le « motif rouge » sur l'intervalle [0,4] se répète à l'infini

Exemple 2 : fonctions sinusoïdales

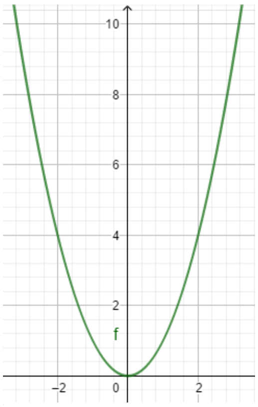


Les fonction $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont périodiques de période 2π, ou 2π-périodiques

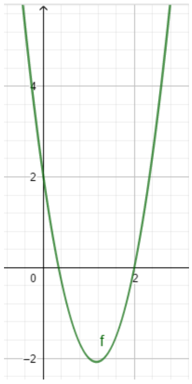
> *Remarque : parité et périodicité*
> *Si la fonction est à la fois périodique (de période p) et paire ou impaire il suffira donc de l'étudier sur l'intervalle* $[0, \mathrm{p}/2]$. *Par symétrie on obtiendra la courbe sur l'intervalle* $[-\mathrm{p}/2, 0]$.*, ce qui permet de l'obtenir sur l'intervalle* $[-\mathrm{p}/2, \mathrm{p}/2]$.*, intervalle de longueur p, puis on répètera l'ensemble pour l'obtenir sur l'ensemble du domaine de définition de* f.

FONCTIONS USUELLES A CONNAITRE

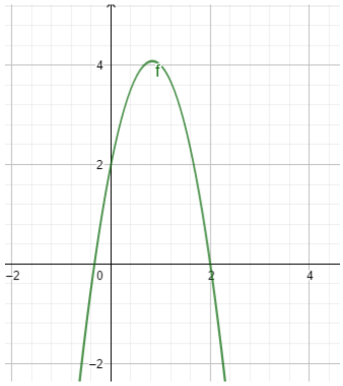
Polynomes du second degre – Paraboles (courbes) : $f(x) = ax^2 + bx + c$



$f(x) = x^2$



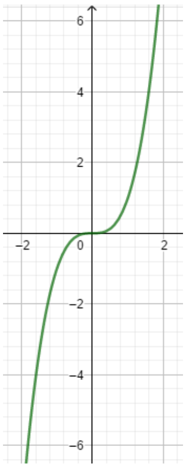
$f(x) = 3x^2 - 7x + 2$



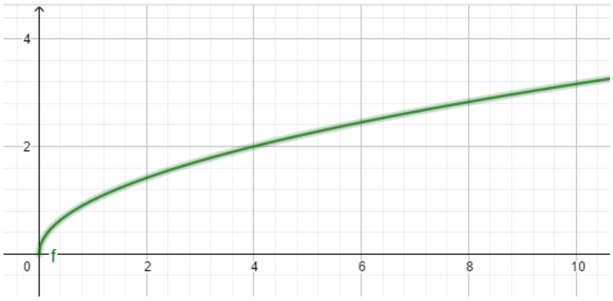
$f(x) = -3x^2 + 5x + 2$

La représentation graphique d'un polynôme du second degré est une **parabole** qui possède un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées. Le signe du nombre $\boldsymbol{a}$ induit le sens de variation ($\boldsymbol{a}$ positif : la fonction a un maximum, $\boldsymbol{a}$ négatif, elle a un minimum)

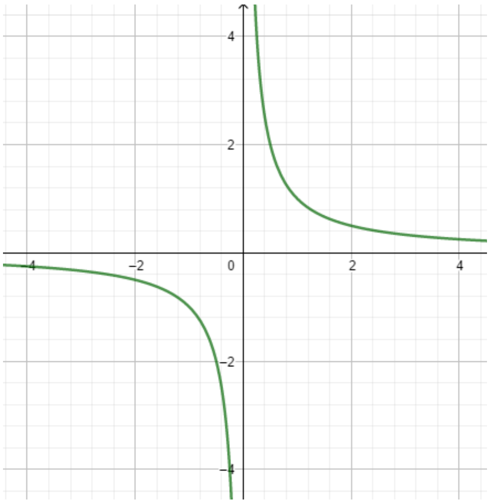
Fonction cube : $f(x) = x^3$



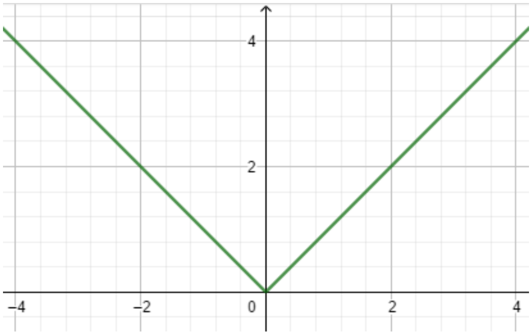
Fonction Racine : $f(x) = \sqrt{x}$



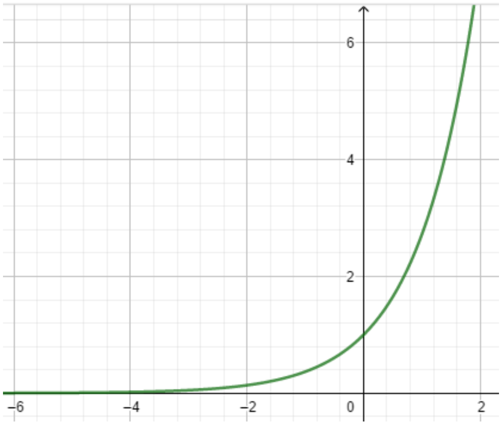
Fonction inverse – un exemple d'hyperbole (courbe) : $f(x) = \frac{1}{x}$



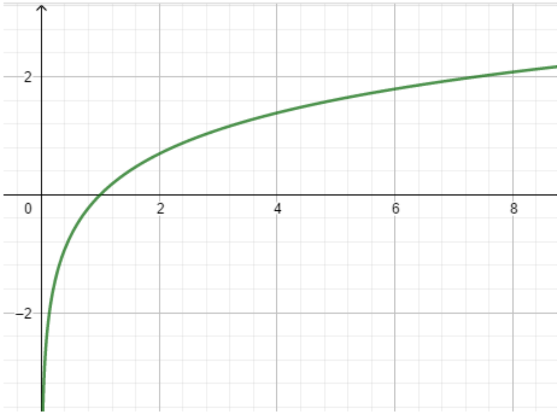
Fonction valeur absolue : $f(x) = |x|$



Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$



Fonction logarithme : $f(x) = ln(x)$



Quelques remarques sur les fonctions ln et exponentielle :

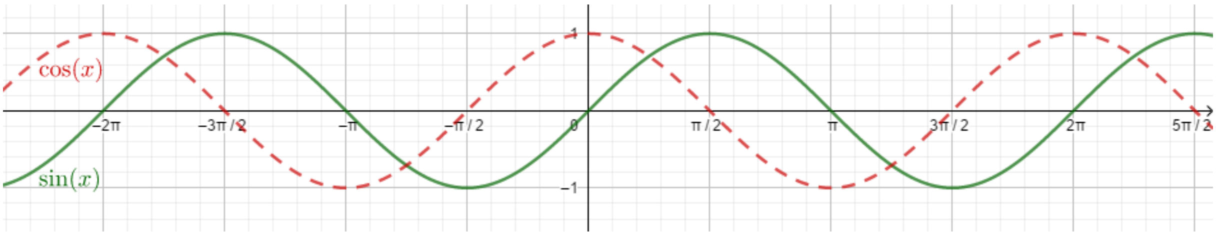
- *La fonction ln fait partie des fonctions logarithmes qui ont pour* ***propriété caractéristique de « transformer les produits en sommes »*** *(propriété très intéressante pour les calculs avant l'invention de la machine à calculer…)*
  - *Logarithme de base a :* $log_a(a) = 1$ *et* $\boldsymbol{log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)}$
  - ***La fonction ln (logarithme néperien) est le logarithme de base e (e=2.72)***

    $$\boldsymbol{ln(e) = 1 \quad et \quad ln(xy) = ln(x) + ln(y)}$$
  - $log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
  - $log_a(a^n) = n \quad \boldsymbol{ln(e^n) = n}$

- *La fonction ln est la primitive, définie sur* $[0, +\infty[$ *et qui s'annule en 1, de la fonction 1/x*
- *La fonction exponentielle est* ***la réciproque*** *de la fonction ln :* $y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$
  Notation : $\exp(x) = e^x$
- *La fonction exponentielle a ainsi la propriété de « transformer les sommes en produits » :*

  $$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad ou \quad e^{x+y} = e^x e^y$$

Fonctions trigonometriques sinus et cosinus : $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$



EXERCICES – RAPPELS FONCTIONS (CORRIGES P18 & 19)

PARITE

1. On suppose que les fonctions f et g sont toutes les deux paires. En étudiant le produit $f(-x)g(-x)$ déterminer la parité de la fonction produit fg. De même, que peut-on dire de la parité du produit de deux fonctions impaires ? du produit d'une fonction paire par une fonction impaire ?

2. Pour chaque fonction ci-dessous, dire si elle est paire, impaire ou ni paire ni impaire :
   a. $f(x) = x^2 \cos x$
   b. $f(x) = x^3 \sin x$
   c. $f(x) = \sin 2x \cos x$
   d. $f(x) = xe^x$
   e. $f(x) = \ln|x|$
   f. $f(x) = \sin x^3$
   g. $f(x) = \sin(\sin x)$
   h. $f(x) = e^{x^2}$

PÉRIODICITÉ

1. Soit f de période 4, paire, $f(t) = t$ sur $[0\,;\,1[$, $f(t) = 0$ sur $[1\,;\,2[$.
   Représenter f sur un intervalle d'amplitude 16

2. Fonctions périodiques de période $\pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, k\pi$ ...
   Un traitement classique des fonctions périodiques est leur décomposition en somme de fonctions sinusoïdales (sinus et cosinus). Cette décomposition s'appelle décomposition en série de Fourier et a de nombreuses applications dans l'étude des ondes (sonores, électriques, cérébrales…). C'est par exemple cette décomposition qui permet de déterminer les harmoniques d'un signal acoustique.
   Comme les fonctions sinusoïdales sont de période 2π, il est plus facile, quand on débute, de décomposer des fonctions dont la période est un multiple de π. C'est la raison pour laquelle, quand on aborde la notion de fonction périodique, on donne souvent des exemples de fonctions dont la période est un multiple de π même quand celles-ci n'utilisent pas de fonctions trigonométriques. Cela peut surprendre, mais ces fonctions sont aussi les premières que l'on apprend à décomposer en Série de Fourier. La décomposition en Série de Fourier ne sera pas abordée cette année, mais l'année prochaine en S4 (parcours PEL).

   Dans chacun des cas ci-dessous, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$:
   a. f est définie par : $\begin{cases} \forall x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = |x| \\ f \text{ est de période } 2\pi \end{cases}$
   b. f est définie par : $\begin{cases} \forall x \in [0, \pi] \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - x \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est de période } 2\pi \end{cases}$.
   c. Pour la fonction f de la question 2-a précédente, déterminer l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in [\pi, 2\pi]$ puis lorsque $x \in [2\pi, 3\pi]$.

3. On suppose qu'une fonction f a pour période p. Soit k un réel non nul. On définit la fonction g par $g(x) = f(kx)$. En calculant $g(x + \frac{p}{k})$, démontrer que la fonction g est de période $\frac{p}{k}$.
   En déduire la période de la fonction $g(x) = sin\,2x$ puis représenter graphiquement dans un même repère les fonctions $sin\,x$ et $sin\,2x$.

LIMITES DE FONCTIONS - RAPPELS

LIMITE EN L'INFINI D'UNE FONCTION

Dans ce chapitre, *l* désigne un nombre réel et *f* une fonction définie sur un intervalle $I = [r, +\infty[$ pour les limites en $+\infty$ et sur $=]-\infty, r]$pour les limites en $-\infty$.

LIMITE FINIE EN L'INFINI

- $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers *l* quand *x* tend vers** $+\infty$**,** si tout intervalle ouvert contenant *l* contient également toutes les valeurs de $f(x)$ pour *x* assez grand. Notation : $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x) = l}$

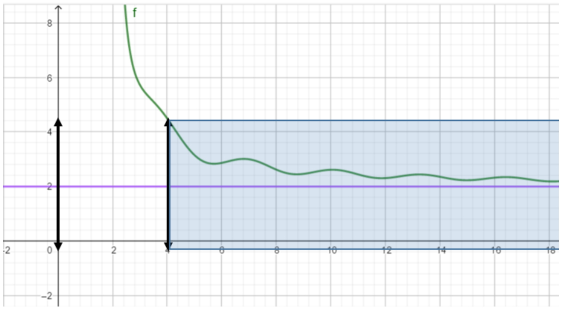


Illustration 1

quand $x > 4$, $f(x) \in]2 - 2{,}4; 2 + 2{,}4[=]-0{,}4; 4{,}4[$

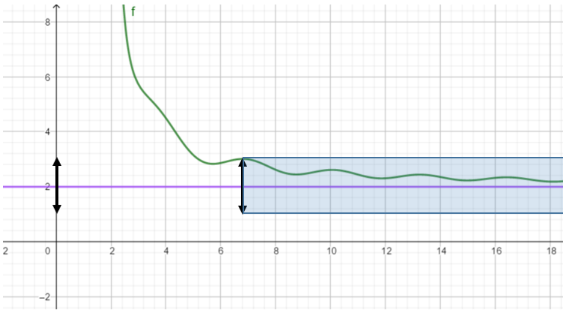


Illustration 2

Ici, quand $x > 6{,}8$, $f(x) \in]2 - 1; 2 + 1[=]1; 3[$

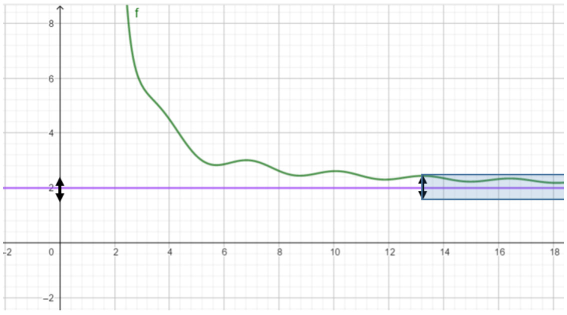


Illustration 3

Ici, quand $x > 13{,}2$, $f(x) \in]2 - 0{,}4; 2 + 0{,}4[=]1{,}6; 2{,}4[$

Mathématiquement, voici comment se définit la limite (il n'est pas nécessaire de retenir cette formulation, mais on peut essayer de la comprendre)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in D_f \quad x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Ou

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in D_f \quad x > A \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Dans les exemples ci-dessus, nous avons illustré la définition pour trois valeurs de ε :
Illustration 1 : $\varepsilon = 2{,}4$ et $A = 4$
Illustration 2 : $\varepsilon = 1$ et $A = 6{,}8$
Illustration 3 : $\varepsilon = 0{,}4$ et $A = 13{,}2$

- $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers *l* quand *x* tend vers** $-\infty$, si tout intervalle ouvert contenant *l* contient également toutes les valeurs de $f(x)$ pour *x* est négatif et assez grand en valeur absolue.
Notation : $\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x) = l}$

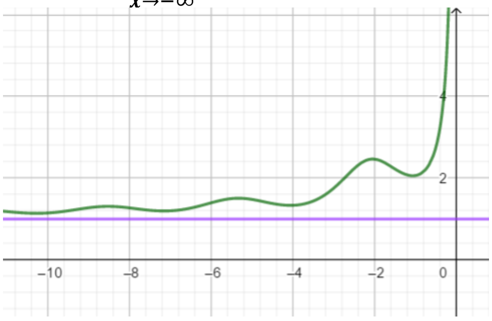


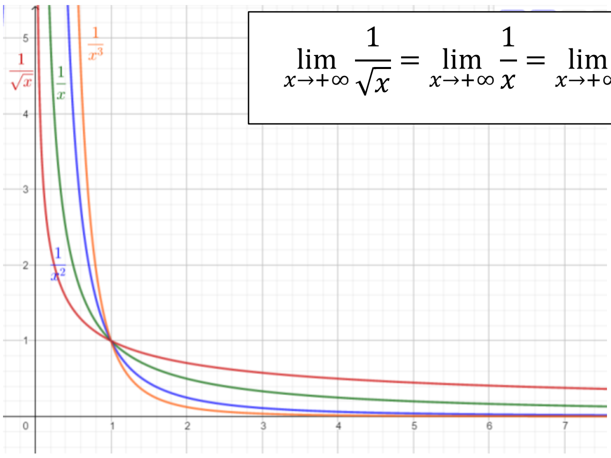
Illustration 4

INTERPRETATION GRAPHIQUE

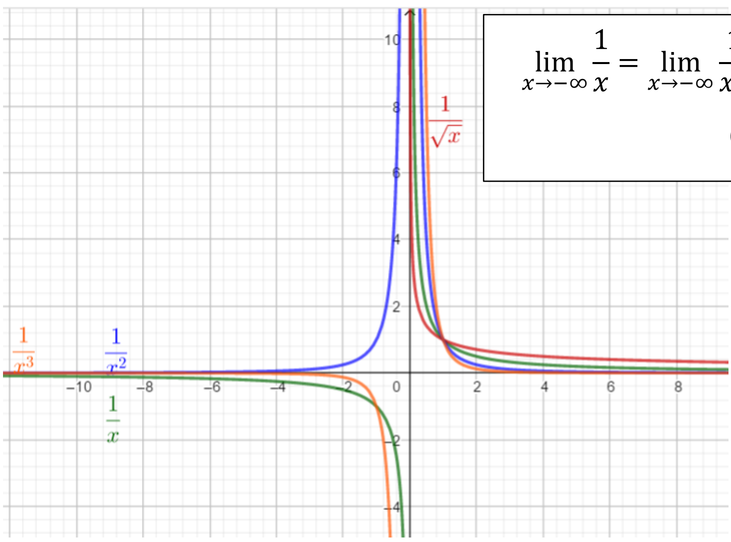
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x) = l}$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x) = l}$, la droite *d* d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** en $+\infty$ (ou $-\infty$) à la courbe représentative de *f*

Dans les illustrations 1 à 3, la droite $y = 2$ est asymptote à la courbe, dans l'illustration 4, l'asymptote horizontale a pour équation $y = 1$.

FONCTIONS DE REFERENCES



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = \cdots = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n > 0)$$



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = \cdots = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$(n\ entier\ positif)$$

Remarque : certaines fonctions n'ont pas bien sûr pas de limite en $+\infty$ ou $-\infty$ (exemple $\sin x$)

LIMITE INFINIE EN L'INFINI

- $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers** $+\infty$ **quand** ***x*** **tend vers** $+\infty$**,** si tout intervalle $]A, +\infty[$ (A réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. Notation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

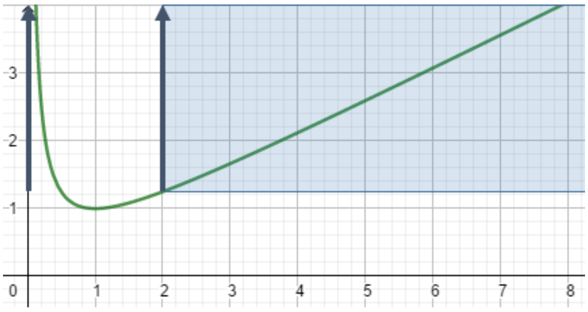


Illustration 5

quand $x > 2$, $f(x)$>1,2

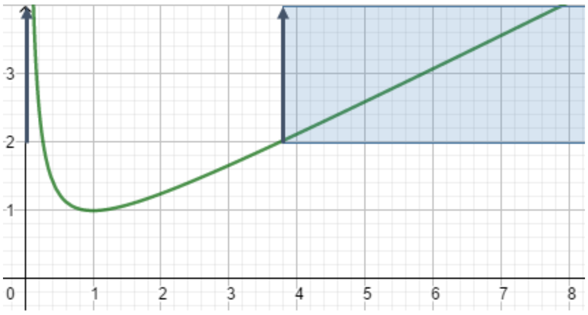


Illustration 6

quand $x > 3{,}4$, $f(x)$>2

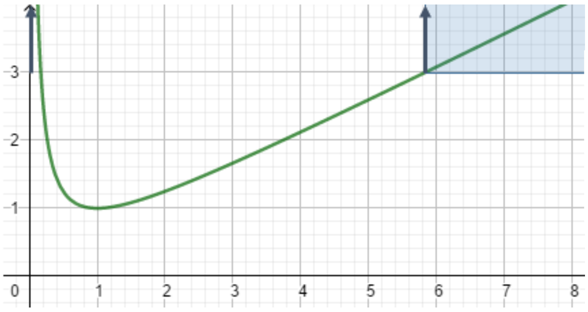


Illustration 7

quand $x > 5{,}8$, $f(x)$>3

Mathématiquement, voici comment se définit la limite (il n'est pas nécessaire de retenir cette formulation, mais on peut essayer de la comprendre)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in D_f \;\; x > B \;\Rightarrow\; f(x) > A$$

Dans les exemples ci-dessus, nous avons illustré la définition pour trois valeurs de ε :
Illustration 5 : $A = 1,2$ et $B = 2$
Illustration 6 : $A = 2$ et $B = 3,4$
Illustration 7 : $A = 3$ et $B = 5.8$

- $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers** $-\infty$ **quand** ***x*** **tend vers** $+\infty$, si tout intervalle $]-\infty, A[$ (A réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. Notation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

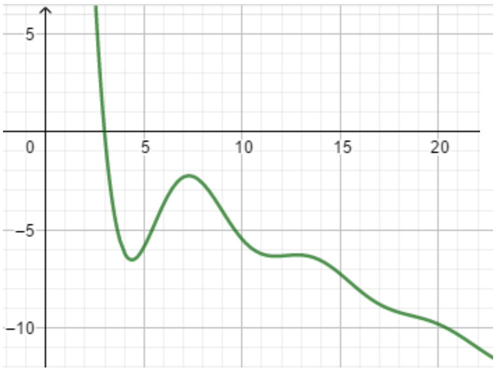
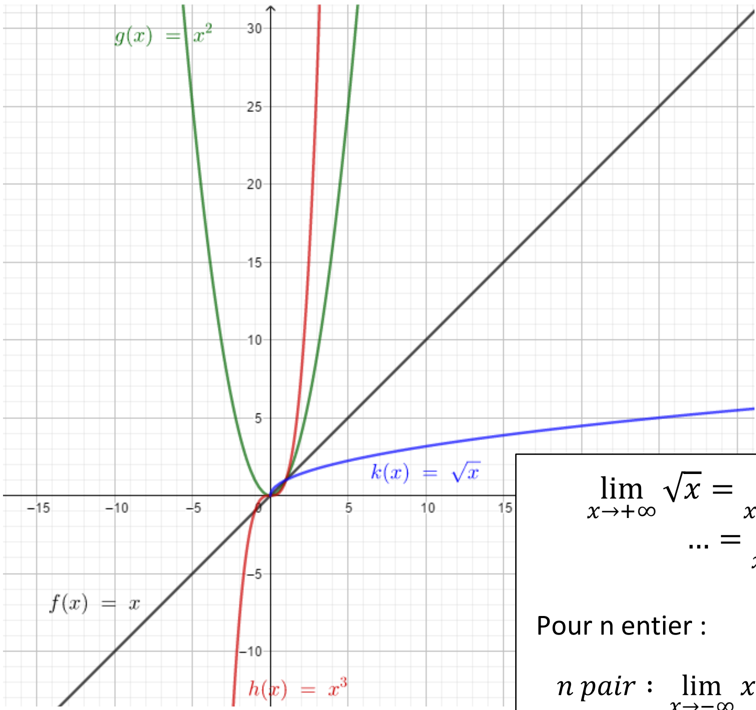


Illustration 8

On définit de façon analogue les limites quand x tend vers $-\infty$

FONCTIONS DE REFERENCES



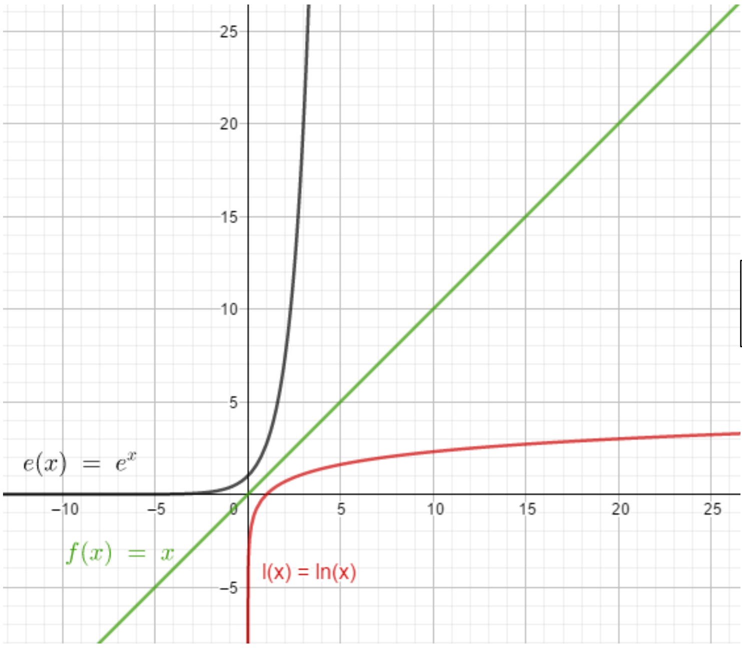
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \ldots = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \ (n > 0)$$

Pour n entier :

$$n \ pair : \lim_{x\to-\infty} x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^4 = \cdots = \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$$

$$n \ impair : \lim_{x\to-\infty} x = \lim_{x\to-\infty} x^3 = \cdots = \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$$

FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME EN $+\infty$



$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Classement des fonctions selon l'intensité (rapidité) de leur croissance vers l'infini :

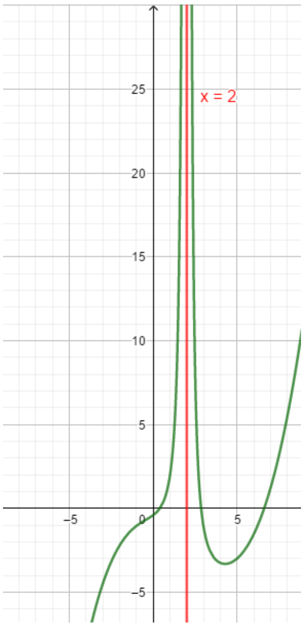
$\ln(x)$ → $\sqrt{x}$ → x → x^2 → x^3 → e^x

LIMITE EN UN REEL

LIMITE INFINIE EN UN REEL

a est un réel. *f* est une fonction définie en tout point d'un intervalle ouvert contenant *a* sauf éventuellement en *a*.

- **$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand *x* tend vers a,** si tout intervalle $]A,+\infty[$ (A réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour *x* assez proche de a. Notation : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$



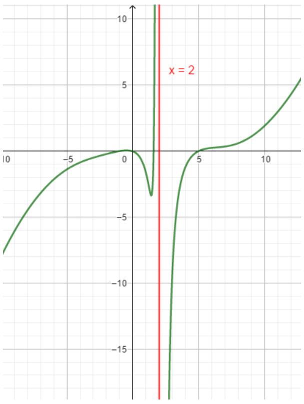
Dans l'exemple ci-contre : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$

On dit aussi que la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale

Mathématiquement, voici comment se définit la limite (il n'est pas nécessaire de retenir cette formulation, mais on peut essayer de la comprendre)

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Dans la situation où on étudie la limite quand $x \to a$ on peut être amené à distinguer les deux cas $x > a$ et $x < a$, les deux limites pouvant être différentes.

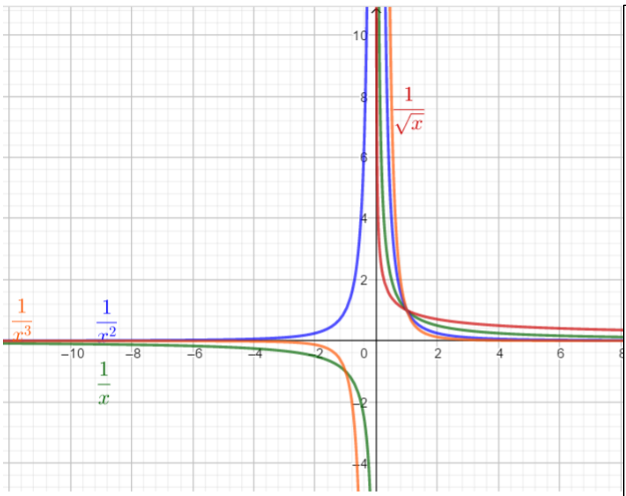


Dans l'exemple ci-contre :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = 2$ est toujours asymptote verticale

FONCTIONS DE REFERENCES



n entier pair :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4} = \cdots = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n} = +\infty$$

n entier impair :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3} = \cdots = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3} = \cdots = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n} = -\infty$$

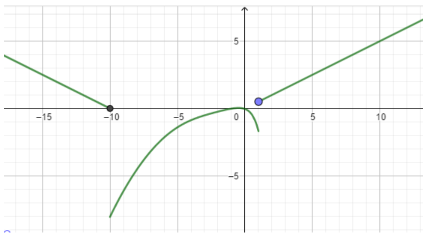
L'axe des ordonnées est asymptote verticale

LIMITE FINIE EN UN REEL – CONTINUITE

- $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers *l* quand *x* tend vers $\boldsymbol{a}$,** si tout intervalle ouvert contenant *l* contient également toutes les valeurs de $f(x)$ pour *x* assez proche de a. Notation : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

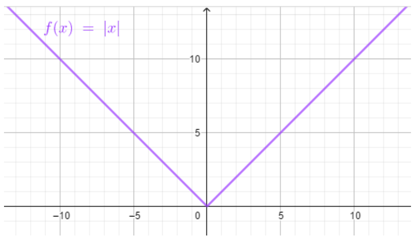
- Une fonction f est **continue en a** si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
  (il faut parfois calculer les limites à gauche et à droite pour montrer la continuité : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$*)*

- Une fonction définie sur un intervalle est continue sur un intéervalle I si elle est continue en tout élément de I.
  Le graphe d'une fonction continue se trace « sans lever le crayon ».



La fonction ci-contre est **continue** sur $\mathbb{R}\backslash\{-10,1\}$

On peut aussi dire qu'elle est **discontinue** en -10 et 1



La fonction $f(x) = |x|$ ci-contre est continue sur $\mathbb{R}$ comme la plupart des **fonctions usuelles** : $ax + b$, x^n $(n > 0)$, fonctions sin x et cos x, exponentielle et logarithme….

Les fonctions x^n $(n < 0)$ ne sont pas continues en 0.

OPERATIONS SUR LES LIMITES

Dans les tableaux ci-dessous, a et b désignent deux réels quelconques.

$\lim f(x)$	a		a	a	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	b		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f(x) + g(x))$	$a + b$		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

$\lim f(x)$	a	$a \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim g(x)$	b	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(f(x).g(x))$	ab	$\pm\infty$	**?**	$\pm\infty$

$\lim f(x)$	a	$a \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim g(x)$	$b \neq 0$	0	0	$\pm\infty$
$\lim \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{a}{b}$	$\pm\infty$	**?**	**?**

CAS D'INDETERMINATION

- Quatre cas d'indétermination dans les calculs des limites : $\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$
  Il s'agit d'indéterminations liées aux opérations usuelles, d'autres cas sont liés à la puissance

- Pour lever un cas d'indétermination, on peut être amené à transformer l'expression de la fonction, et on dispose si nécessaire des résultats suivants :

Classement des fonctions selon l'intensité de leur croissance vers l'infini :

$\ln(x)$ > $\sqrt{x}$ > x > x^2 > x^3 > e^x

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$

$(\alpha > 0)$

CAS PARTICULIER DES POLYNOMES ET DES FONCTIONS RATIONNELLES (QUOTIENTS DE POLYNOMES)

- La limite d'un polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en l'infini est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemples

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^3 + 5x^2 + 6) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^3) = -3 \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x-5}{2x^2+x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x}{2x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2x}\right) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x-5}{2x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x}{2x}\right) = \frac{3}{2}$

CAS PARTICULIER DES FONCTIONS COMPOSEES

$$si \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} f(x) = c \end{cases} \; alors \; \lim_{x\to a} f\circ g(x) = \lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = b$$

Exemples

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-3)^2 = +\infty \;\; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-3) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x^2+1}} = 0 \;\; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \end{cases}$

PROPRIETES D'ENCADREMENT

- **Théorème des gendarmes**

$$\text{Si} \begin{cases} \forall x \epsilon]b,+\infty[\;\; f(x) \le g(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = l$$

- **Comparaison à l'infini**
  - $\text{Si} \begin{cases} \forall x \epsilon]b,+\infty[\;\; f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
  - $\text{Si} \begin{cases} \forall x \epsilon]b,+\infty[\;\; f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \;\; car \begin{cases} 0 \le x\sin\frac{1}{x} \le x \\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x + \sin x) = -\infty \;\; car \begin{cases} -2x + \sin x \le -2x + 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} (-2x+1) = -\infty \end{cases}$

EXERCICES – LIMITES

Pour l'instant, j'ai un exercice, mais je ne crois pas que ce soit le plus sérieux

Exercice 1 : à partir du même ci-contre (Stolen)

1. Ecrire la phrase « **For every…** $|f(x) - L| < \varepsilon$ **»** *en utilisant des quantificateurs (rappels : ∀ et ∃ sont des quantificateurs)*
2. Cette phrase correspond à la définition d'une notion mathématique, laquelle ?

Exercice 2

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a. $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$

b. $f(x) = \frac{2x^2+3x-5}{x-3}$

c. $f(x) = \frac{2x^2+3x-5}{-x^2+3}$

d. $f(x) = \frac{3x-5}{(x+3)^2}$

e. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

f. $f(x) = x - \cos x$

g. $f(x) = x^2 \cos x$

h. $f(x) = \sqrt{\frac{3x-5}{(x+3)^2}}$

i. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+3x-5}{x-3}}$

j. $f(x) = \cos\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)$

k. $f(x) = \sqrt{\frac{20x^2+3x-5}{5x^2+3}}$

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to+\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 3x + 2)$

b. $\lim_{x\to-\infty} (3x^3 - 2x^2 - 1)$

c. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2+2x+1}{4x-3}\right)$

d. $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x^2+1}{-2x^3+3x-1}\right)$

e. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

f. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - 3x\right)$

g. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2\sqrt{x}-1}$

h. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}$

i. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x}$

j. $\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x}$

k. $\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x)$

l. $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{\ln x}\right)$

m. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x - 2x^2 + 1}{3x}\right)$

n. $\lim_{x\to 0} xe^{-x}$

o. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x+1}{2x}\right)$

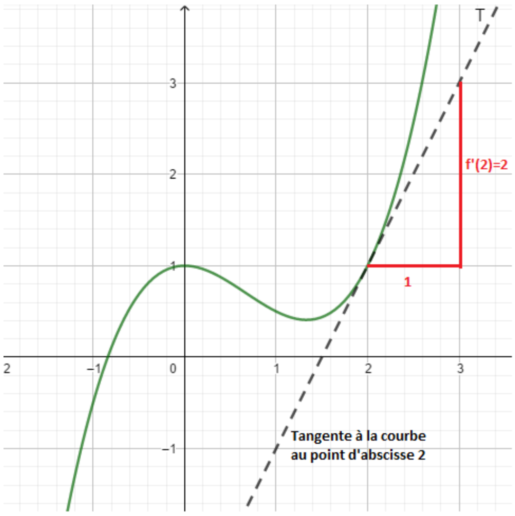
p. $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

q. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$

DERIVATION ET ETUDE DES VARIATIONS DE LA FONCTION

DERIVEE ET TANGENTE A UNE COURBE

- f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ existe et est un nombre réel
- On note alors $f'(x_0)$ cette limite.
- $f'(x_0)$ est la pente de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0.



DERIVEES USUELLES

Fonction	Dérivée
$ax+b$	a
x^2	$2x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}

Fonction	Dérivée
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$a^x = e^{x\ln(a)}$	$\ln(a) \times a^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES

Fonction	Dérivée
$ku(x)$	$ku'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$f \circ g(x) = f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Fonction	Dérivée
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$u^n(x)$	$nu^{n-1}(x)u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$

APPLICATION A L'ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

- Si $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle I, alors f est croissante sur cet intervalle.
- Si $f'(x) \leq 0$ sur un intervalle I, alors f est décroissante sur cet intervalle.

On peut ainsi construire le **tableau des variations** de f sur le domaine d'étude préalablement déterminé.

COMPLEMENTS PUISSANCES

Les fonctions « puissances entières » sont définies par $f(x) = x^n$, où n désigne un entier quelconque.

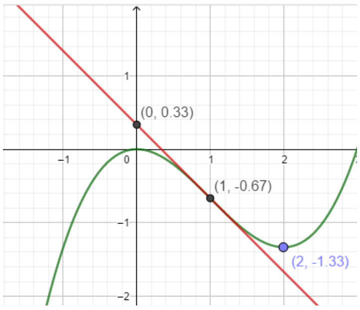
- $x^0 = 1$
- Si $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$ alors $x^n = x.x \dots x$ (produit de x par lui-même n fois)
- $x^{-n} = 1/_{x^n}$

Exemples : $2^4 = 16$, $2^{-4} = 1/_{2^4} = 1/_{16} = 0{,}0625$

RÈGLES DE CALCUL: $x^n x^p = x^{n+p}$, $\quad x^n/_{x^p} = x^{n-p}$, $\quad x^n y^n = (xy)^n$, $\quad x^n/_{y^n} = \left(x/_y\right)^n$

EXERCICES – DERIVATION

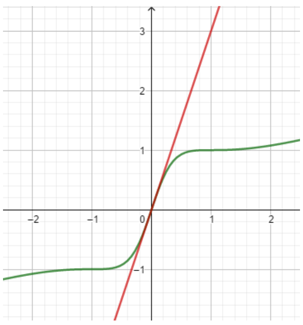
Exercice 1



Dans le graphique ci-contre :

a. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 ?
b. Que peut-on dire de $f'(1)$?
c. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.
d. Que peut-on dire de $f'(2)$?

Exercice 2



Dans le graphique ci-contre :

a. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 ?
b. Que peut-on dire de $f'(0)$?

Exercice 3

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f, dans chacun des cas ci-dessous :

a. $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x + 4$

b. $f(x) = (2x+1)\, ln\, x$

c. $f(x) = sin(3x) - cos(2x)$

d. $f(x) = sin(3x) - cos(2x)$

e. $f(x) = (cos\, 3x)^2$

f. $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

g. $f(x) = \sqrt{cos^2 x}$

h. $f(x) = e^{2x-3}$

i. $f(x) = \ln(e^{2x} + 3)$

CORRIGE/REPONSES EXERCICES – PARITE, PERIODICITE - P6

EXERCICES – RAPPELS FONCTIONS

PARITE

1. On suppose que les fonctions f et g sont toutes les deux paires. En étudiant le produit $f(-x)g(-x)$ déterminer la parité de la fonction produit fg. De même, que peut-on dire de la parité du produit de deux fonctions impaires ? du produit d'une fonction paire par une fonction impaire ?

f et g étant paires :

- $f(-x) = f(x)$
- $g(-x) = g(x)$

Donc $f(-x)g(-x) = f(x)g(x)$
$(fg)(-x) = (fg)(x)$: **la fonction fg est paire**

De même :
Si f et g sont impaires :

- $f(-x) = -f(x)$
- $g(-x) = -g(x)$

Donc $f(-x)g(-x) = \left(-f(x)\right)(-g(x)) = f(x)g(x)$
$(fg)(-x) = (fg)(x)$: **la fonction fg est paire**

Si f est paire et g est impaire :

- $f(-x) = f(x)$
- $g(-x) = -g(x)$

Donc $f(-x)g(-x) = f(x)\left(-g(x)\right) = -f(x)g(x)$
$(fg)(-x) = -(fg)(x)$: **la fonction fg est impaire**

2. Pour chaque fonction ci-dessous, dire si elle est paire, impaire ou ni paire ni impaire :
   - **a.** $f(x) = x^2 \cos x$: **paire car x^2 et $\cos x$ sont paires**
   - **b.** $f(x) = x^3 \sin x$: **paire car x^3 et $\sin x$ sont impaires**
   - **c.** $f(x) = \sin 2x \cos x$: **impaire car $\sin 2x$ impaire et $\cos x$ paire**
   - d. $f(x) = xe^x$

     $$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{f(-1) = -e^{-1} = -1/e} \\ \boldsymbol{f(1) = e} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{e} \neq e \quad et \quad -\frac{1}{e} \neq -e \quad \Rightarrow f(-1) \neq f(1) \quad et \quad f(-1) \neq f(1)$$

     Donc f n'est ni paire, ni impaire
   - e. $f(x) = \ln|x|$

     La fonction $|x|$ étant paire : $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$: f est paire
   - f. $f(x) = \sin x^3$

     Les fonctions x^3 et sin sont impaires donc $f(-x) = \sin(-x^3) = -\sin x^3 = -f(x)$
     f est impaire
   - g. $f(x) = \sin(\sin x)$

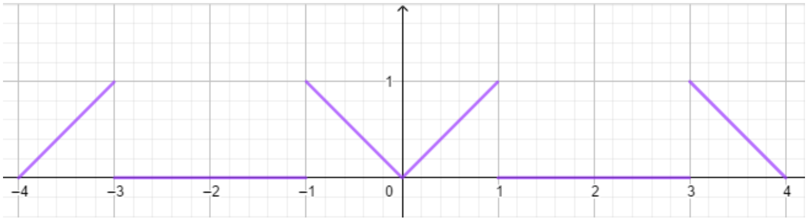
     Comme dans l'exemple précédent, la fonction sin est impaire donc :

     $$\boldsymbol{f(-x) = \sin(\sin(-x)) = \sin(-\sin x) = -\sin(\sin x) = -f(x)}$$
   - h. $f(x) = e^{x^2}$

     La function x^2étant paire : $f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$
     f est paire

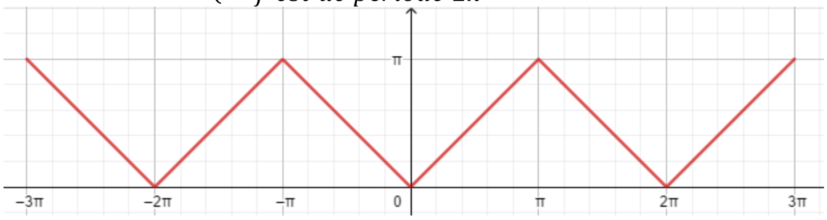
PÉRIODICITÉ

1. Soit f de période 4, paire, $f(t) = t$ sur $[0\ ;\ 1[$, $f(t) = 0$ sur $[1\ ;\ 2[$.
   Représenter f sur un intervalle d'amplitude 8

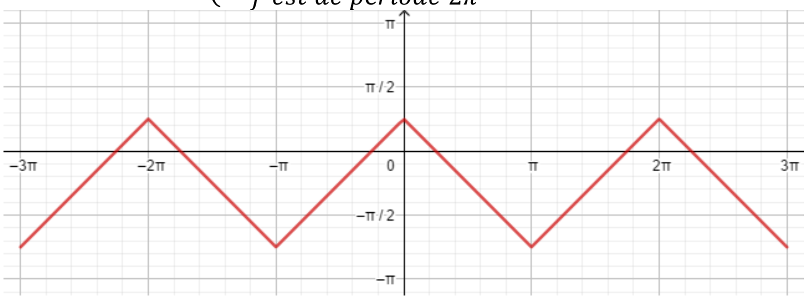


2. Fonctions périodiques de période π, 2π, $\frac{\pi}{2}$, kπ …
   Dans chacun des cas ci-dessous, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$:

   a. f est définie par : $\begin{cases} \forall x \in [-\pi,\pi] \quad f(x) = |x| \\ f \text{ est de période } 2\pi \end{cases}$



   b. f est définie par : $\begin{cases} \forall x \in [0,\pi] \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - x \\ f \text{ est paire} \\ f \text{ est de période } 2\pi \end{cases}$.



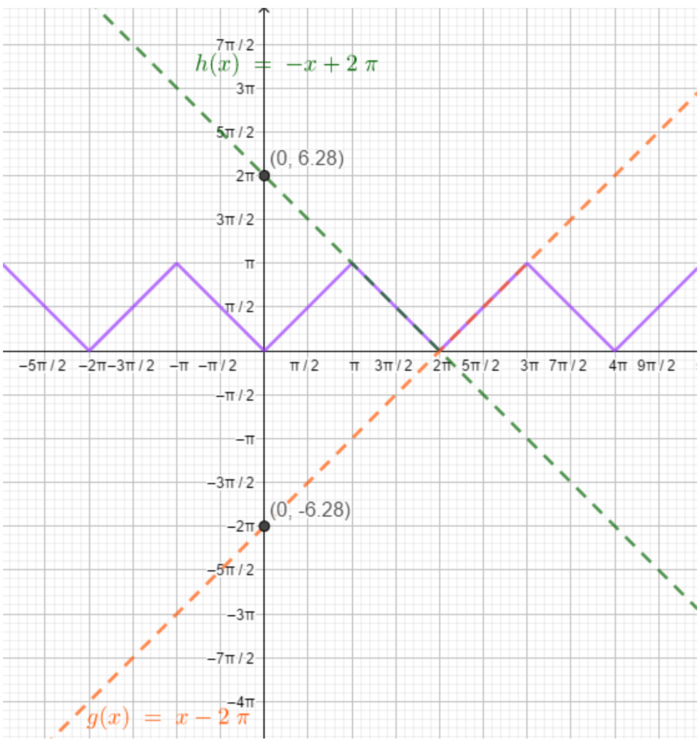
   c. On Pour la fonction f de la question 2-a précédente, déterminer l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in [\pi, 2\pi]$ puis lorsque $x \in [2\pi, 3\pi]$.

$$\boldsymbol{x \in [\pi, 2\pi] : f(x) = -x + 2\pi \quad (pente\ -1\ et\ ordonnée\ à\ l'origine\ 2\pi)}$$

$$\boldsymbol{x \in [2\pi, 3\pi] : f(x) = x - 2\pi \quad (pente\ 1\ et\ ordonnée\ à\ l'origine\ -2\pi)}$$

   On a aussi : $\boldsymbol{x \in [\pi, 3\pi] : f(x) = |x - 2\pi|}$

Graphiquement :

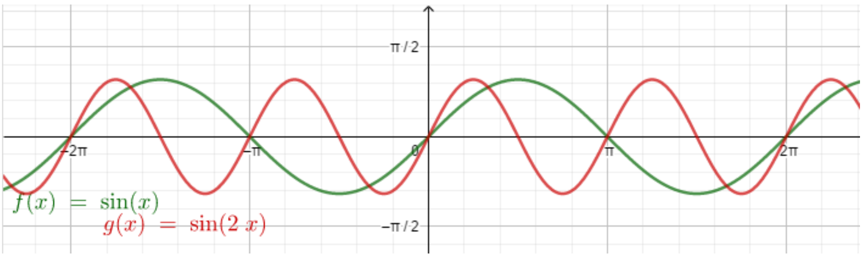


La valeur de la fonction sur [π,2π] est donnée par l'équation de la droite "verte en pointillé" : la pente de cette droite est -1 et l'ordonné à l'origine 2π d'où l 'équation $-x$+2π

La valeur de la fonction sur [2π,3π]

est donnée par l'équation de la droite "orange en pointillé" : la pente de cette droite est 1 et l'ordonné à l'origine −2π d'où l 'équation x−2π

3. On suppose qu'une fonction f a pour période p. Soit k un réel non nul. On définit la fonction g par $g(x) = f(kx)$. En calculant $g(x + \frac{p}{k})$, démontrer que la fonction g est de période $\frac{p}{k}$.
En déduire la période de la fonction $g(x) = sin\, 2x$ puis représenter graphiquement dans un même repère les fonctions $sin\, x$ et $sin\, 2x$.
$$\boldsymbol{g\left(x + \frac{p}{k}\right) = f\left(k\left(x + \frac{p}{k}\right)\right) = f(kx + p) = f(kx)\ car\ f\ est\ p\acute{e}riodique\ de\ p\acute{e}riode\ p}$$
Donc $\boldsymbol{g\left(x + \frac{p}{k}\right) = f(kx) = g(x)}$: g est donc périodique de période p
La fonction $\boldsymbol{g(x) = sin\, 2x}$ est donc périodique de période $\boldsymbol{\pi = \frac{2\pi}{2}}$



CORRIGE/REPONSES EXERCICES – LIMITES – P14

Exercice 1 : à partir du même

1. Ecrire la phrase « **For every…$\boldsymbol{|f(x) - L| < \varepsilon}$ »** *en utilisant des quantificateurs (rappels : ∀ et ∃ sont des quantificateurs)*
$\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in D\ \ \ |x - c| < \delta\ \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$
2. Cette phrase correspond à la définition d'une notion mathématique, laquelle ?
Il s'agit de la définition de $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to c} f(x) = L}$

Exercice 2

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a. $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$: $-\infty$
b. $f(x) = \frac{2x^2+3x-5}{x-3}$: $+\infty$
c. $f(x) = \frac{2x^2+3x-5}{-x^2+3}$: -2
d. $f(x) = \frac{3x-5}{(x+3)^2}$: 0
e. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$: 0
f. $f(x) = x - \cos x$: $+\infty$
g. $f(x) = x^2 \cos x$: pas de limite
h. $f(x) = \sqrt{\frac{3x-5}{(x+3)^2}}$: 0
i. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+3x-5}{x-3}}$: $+\infty$
j. $f(x) = \cos\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)$: 1
k. $f(x) = \sqrt{\frac{20x^2+3x-5}{5x^2+3}}$: 2

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 3x + 2)$: $-\infty$
b. $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 2x^2 - 1)$: $-\infty$
c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2+2x+1}{4x-3}\right)$: $+\infty$
d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^2+1}{-2x^3+3x-1}\right)$: 0
e. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$: $+\infty$
f. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - 3x\right)$: $-\infty$
g. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{2\sqrt{x}-1}$: $+\infty$
h. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}$: -3 (Cf p 21)
i. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\ln x}$: 0
j. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln \frac{1}{x}$: $-\infty$
k. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x)$: $-\infty$
l. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{\ln x}\right)$: $+\infty$
m. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x - 2x^2+1}{3x}\right)$: $-\infty$
n. $\lim\limits_{x \to 0} xe^{-x}$: 0
o. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x+1}{2x}\right)$: pas de limite ($\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x+1}{2x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x+1}{2x}\right) = -\infty$)
p. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$: -1
q. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$=1

Correction détaillée de la question 3.h

Il y a plusieurs façons d'aborder le calcul de la limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}$

- **Première méthode :** on se rappelle du résultat sur les **fonctions rationnelles** (quotients de polynômes), "La limite d'une fonction rationnelle en l'infini est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré".
  Nous faisons apparaître dans la fonction $\frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}$ un quotient de polynôme en remarquant que si x est positif, x est aussi égal à $\sqrt{x^2}$

On obtient donc : $\frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-3\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-1}} = -3\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$

D'après le résultat sur les fonctions rationnelles :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} -3\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} -3\sqrt{\frac{x^2}{x^2}} = -3$$

- **Autre méthode (plus rapide) :** d'après le cours, « la limite d'un polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré ». On dit aussi que le polynôme "se comporte" en l'infini comme son terme de plus haut degré.
- Ce qui veut dire, ici que le polynôme x^2-1 se comporte en l'infini comme x^2
- $\frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}}$ va donc se comporter comme $\frac{-3x}{\sqrt{x^2}} = \frac{-3x}{x} = -3$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x} = -3$$

- On pourrait aussi raisonner par encadrement après avoir montré que si $x > 1$, on a toujours $(x-1)^2 < x^2-1 < x^2$.

  On en déduit que $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^2-1} < \frac{1}{(x-1)^2}$ donc $\frac{1}{\sqrt{x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2}}$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{1}{x-1} \quad car\ x > 1$$

  Et finalement

$$\frac{-3x}{x} < \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{-3x}{x-1} \quad car\ x > 1$$

$$-3 < \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{-3x}{x-1} \quad car\ x > 1$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x} = -3$ d'après le théorème d'encadrement : $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} = -3$

CORRIGE/REPONSES EXERCICES – DERIVEES P16

Exercice 1

Dans le graphique ci-contre :

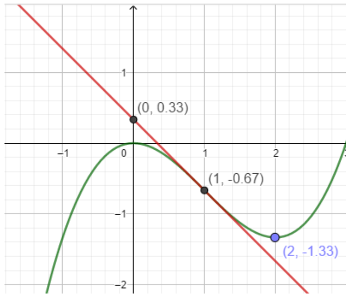
e. Equation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 :
$\boldsymbol{y = -x + 0.33}$ **(-1 : pente ; 0.33 : ordonnée à l'origine)**

f. Que peut-on dire de $f'(1)$?
$\boldsymbol{f'(1) = -1}$**: pente de la tangente**

g. Equation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 :

$$\boldsymbol{y = -1,33}$$

h. Que peut-on dire de $f'(2)$? $\boldsymbol{f'(2) = 0}$



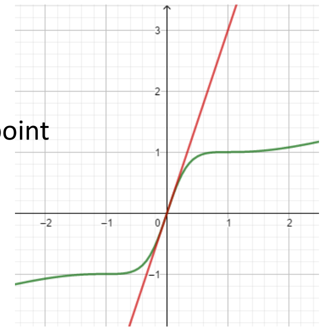
Exercice 2

Dans le graphique ci-contre :

c. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 ?

$$\boldsymbol{y = 3x}$$

d. Que peut-on dire de $f'(0)$? $\boldsymbol{f'(0) = 3}$



Exercice 3

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de la fonction f, dans chacun des cas ci-dessous :

a. $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x + 4$

$$\boldsymbol{f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 2}$$

b. $f(x) = (2x+1)\, ln\, x$

$$\boldsymbol{f'^{(x)} = 2ln\, x + \frac{2x+1}{x}}$$

c. $f(x) = sin\, 3x - cos\, 2x$

$$\boldsymbol{f'(x) = 3\, cos(3x) + 2\, sin(2x)}$$

d. $f(x) = (cos\, 3x)^2$

$$\boldsymbol{f'(x) = -6cos(3x)\, sin(3x)}$$

e. $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2}}$$

f. $f(x) = \sqrt{cos^2 x}$

$$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{\cos x \sin x}{\sqrt{cos^2 x}}}$$

g. $f(x) = e^{2x-3}$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2e^{2x-3}}$$

h. $f(x) = \ln(e^{2x} + 3)$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 3}}$$

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES NON CORRIGES

Exercice 1
On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x^2}$$

1. Déterminer les limites de la fonction en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.
2. En déduire que la représentation graphique de la fonction f admet une asymptote verticale et une asymptote horizontale dont on précisera les équations.

Exercice 2
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^{-x} + 1}{\ln(x)}$$

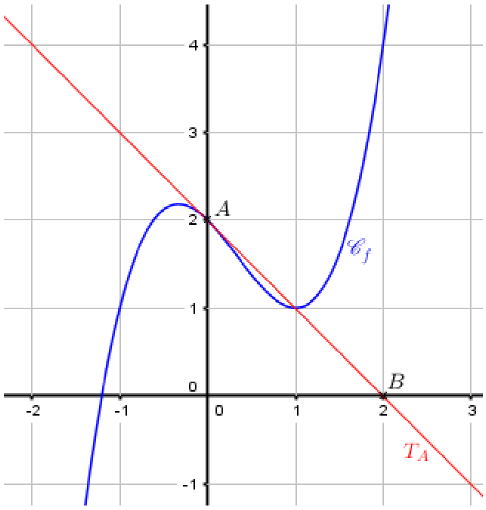
1. Donner le domaine de définition de la fonction f
2. La représentation graphique de la fonction f admet-elle des asymptotes. Justifier.

Exercice 3
Déterminer la limite

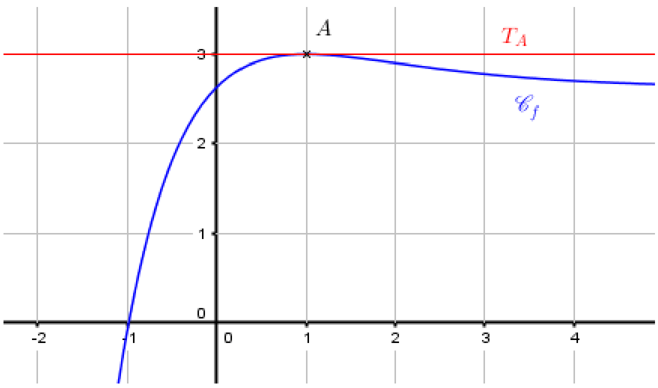
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 + 1}$$

Exercice 4
On considère une fonction f dérivable $\mathbb{R}$ sur dont la représentation graphique C_f est donnée ci-contre. Le point $A(0; 2)$ appartient à cette courbe et la tangente T_A à C_f au point A passe également par le point $B(2; 0)$

1. Déterminer une équation de la droite T_A.
2. En déduire $f'(0)$?



Exercice 5
On considère une fonction f dérivable $\mathbb{R}$ sur dont la représentation graphique C_f est donnée ci-contre.
Le point $A(1; 3)$ appartient à cette courbe et la tangente T_A à C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.
Déterminer $f'(1)$

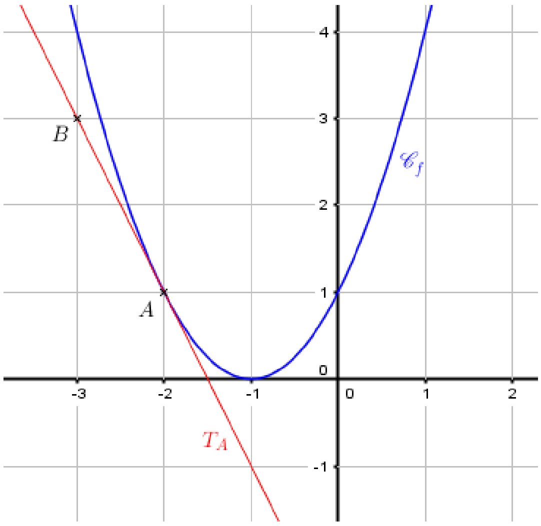


Exercice 6

On considère une fonction f dérivable $\mathbb{R}$ sur dont la représentation graphique C_f est donnée ci-contre.

Le point $A(-2;1)$ appartient à cette courbe et la tangente T_A à C_f au point A passe également par le point $B(-3;3)$

1. Déterminer une équation de la droite T_A.
2. En déduire $f'(-2)$?



Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction f

a) $f(x) = xe^x$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$

e) $f(x) = 2(x^2 + 3x + 1)^3$

f) $f(x) = (e^{2x} + 1)^2$

g) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^4}$

h) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

i) $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x)}$

j) $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x}\right)$

k) $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$

l) $f(x) = e^{\frac{4}{x}}$

m) $f(x) = e^{x^2} + 1$

n) $f(x) = e^{x^2+1}$

o) $f(x) = \cos\left(-\dfrac{x}{2}\right)$

p) $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

q) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$

r) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}$