LOGIQUE
FORMALISATION DES DEMONSTRATIONS

1. CONSEQUENCE LOGIQUE

Soit $\{P_1, \dots, P_n\}$ un ensemble d'expressions. Une expression P est **conséquence logique** de $\{P_1, \dots, P_n\}$ si toute interprétation rendant vraies $P_1, \dots, P_n$ simultanément rend vraie l'expression P (tout modèle de $\{P_1, \dots, P_n\}$ est un modèle de P)

Notation : $\{P_1, \dots, P_n\} \vDash P \; ou \; P_1 \wedge \dots \wedge P_n \vDash P$

Exemple

On suppose que les deux propositions suivantes P_1 et P_2 sont vraies :

P_1 : « Si Paul a fait cette bêtise, alors il est stupide »

P_2 : « Paul n'est pas stupide »

On peut montrer que la proposition P : « Paul n'a pas fait cette bêtise » est conséquence logique de $\{P_1, P_2\}$

On utilise les atomes suivants :

B : « Paul a fait cette bêtise »

S : « Paul est stupide »

Les propositions P_1 et P_2 s'écrivent alors :

- P_1:
- P_2:
- P:

1ère méthode : utilisation d'une table de vérité

B	S	$P_1: B \to S$	$P_2: \neg S$	$P: \neg B$

Commentaire de la table de vérité

2ème méthode : par transformation d'expressions $\{P_1, P_2\} \equiv \{ \quad , \quad \}$

Remarque préliminaire : supposer vraies les hypothèses $\{P_1, P_2\}$ revient à supposer vraie la proposition : $(P_1 \wedge P_2)$

$(P_1 \wedge P_2) \equiv$

$\boldsymbol{conclusion}$:

REMARQUE : IMPLICATION ET CONSEQUENCE LOGIQUE

B	S	$P_1: B \to S$	$P_2: \neg S$	$P: \neg B$	$P_1 \wedge P_2$	$(P_1 \wedge P_2) \to P$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

P conséquence logique de $\{\boldsymbol{P_1}, \dots, \boldsymbol{P_n}\}$ signifie aussi que $\boldsymbol{P_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{P_n} \to \boldsymbol{P}$ **est une**

2. MISE SOUS FORME CLAUSALE

La mise sous forme clausale permet de résoudre de nombreux problèmes de logique.
Il s'agit d'écrire un énoncé sous forme de **conjonction de clauses**, aussi appelée **forme normale conjonctive**.

a. VOCABULAIRE

- **LITTERAL :** A ou $\neg A$ (un atome ou sa négation)
- **CLAUSE :** $A \vee B \vee \neg C$ (disjonction de littéraux). Clause vide : $\perp$
- **CONJONCTION DE CLAUSES :** $(\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$

b. QUELQUES REGLES POUR LA TRANSFORMATION SOUS FORME DE CONJONCTION DE CLAUSES

- **ÉLIMINATION DE** $\leftrightarrow$: $(A \leftrightarrow B)$ remplacé par $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- **ÉLIMINATION DE** $\rightarrow$: $(A \rightarrow B)$ remplacé par $(\neg A \vee B)$
- **NEGATION :**
  - $\neg\neg A$ remplacé par A
  - $\neg(A \wedge B)$ remplacé par $(\neg A \vee \neg B)$
  - $\neg(A \vee B)$ remplacé par $(\neg A \wedge \neg B)$
- **DISTRIBUTIVITE :** $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \equiv \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big)$ et $\big(A \wedge (B \vee C)\big) \equiv \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)$

Exemple de mise sous forme clausale avec :

- $P_1 \equiv (A \rightarrow \neg B)$
- $P_2 \equiv \big((A \vee B) \rightarrow C\big)$
- $P_3 \equiv \big((C \wedge A) \rightarrow (\neg B \vee \neg A)\big)$
- $P_4 \equiv \big(\neg B \rightarrow (C \vee \neg A)\big)$
- $P_5 \equiv \big(A \rightarrow (B \vee A)\big)$
- $P_6 \equiv \big((\neg B \vee A) \rightarrow B\big)$

Donc $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \equiv$

c. SIMPLIFICATIONS DE FORMES CLAUSALES

- **SUPPRESSION** de clauses comportant des littéraux opposés. *Par exemple :* $\cancel{A \vee B \vee \neg A}$ *(tautologie)*
- **SUPPRESSION** d'un littéral dans une clause. *Par exemple :* $C \vee \neg A \vee \neg A = C \vee \neg A$
- **SUPPRESSION** de clauses contenant d'autres clauses . *Par exemple :* $\{\cancel{A \vee \neg B \vee C}, A \vee C\}$
- Supposant un littéral vrai, **SUPPRESSION** de sa négation dans une clause.
  Par exemple : $\{A \vee \neg B \vee C , \neg A\} \equiv \{\neg B \vee C, \neg A\}$

Exemple précédent : $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \equiv$

Les modifications précédentes permettent de transformer un énoncé en un énoncé <u>équivalent</u> sous forme clausale.

3. UN EXEMPLE DE PREUVE PAR SIMPLIFICATION

Le sphinx

Vous êtes perdus sur une piste dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation. Chacune des deux pistes est gardée par un sphinx que vous pouvez interroger. Les pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans le désert profond (au mieux, elles conduisent toutes à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux).

A. Le sphinx de droite vous répond : « Une au moins des deux pistes conduit à une oasis »
B. Le sphinx de gauche vous répond : « La piste de droite se perd dans le désert »
C. Vous savez que les sphinx disent tous les deux la vérité, ou bien mentent tous les deux.

On pose :

D : « Il y a une oasis au bout de la route de droite. »
G : « Il y a une oasis au bout de la route de gauche. »

Traduction de l'énoncé

« Une au moins des deux pistes conduit à une oasis » : ……….

« La piste de droite se perd dans le désert » : ………

On suppose que les deux sphinx disent tous les deux la vérité ou bien mentent tous les deux : ………………………….

Conclusion

Résolution

4. PREUVE PAR REFUTATION

Principe :
$\{A_1, \dots, A_n\} \vDash A \; si \; et \; seulement \; si \; \{A_1, \dots, A_n, \neg A\}$ est **une contradiction**

Exemple

Montrons : $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vDash (A \vee B)$

5. PRINCIPE DE RESOLUTION

<u>Exemple</u>

On suppose que les deux propositions suivantes P_1 et P_2 sont vraies :
P_1 : « Paul porte un pull ou Paul a fait une bêtise »
P_2 : « Paul ne porte pas de pull ou Paul est stupide »
On utilise les atomes suivants :

B : « Paul a fait une bêtise »
S : « Paul est stupide »
P: « Paul porte un pull »

Les deux propositions s'écrivent alors sous la forme : $\begin{cases} P_1 : \dots \dots \dots .. \\ P_2 : \dots \dots \dots .. \end{cases}$

Que peut-on déduire de ces deux propositions ?
Rien, concernant la proposition P : P peut être vraie ou fausse.
Par contre :

- *Si P est vraie :*

- *Même raisonnement si P est fausse :*
  Ainsi : $\{P_1, P_2\} \vDash$........................

PRINCIPE DE RESOLUTION : $\{(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{A}), (\neg \boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{B})\} \vDash (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$

Autre notation : $\dfrac{(X \vee A), (\neg X \vee B)}{(A \vee B)}$

Le résultat de l'application de la règle de résolution s'appelle la **résolvante** : $(A \vee B)$ est la résolvante de $(X \vee A)$ et $(\neg X \vee B)$

EXERCICE 1

Pour Noël, Paul, le grand-père de Pierre souhaite offrir un cadeau à son petit fils. Il demande à Claire, la maman de Paul, quel serait le cadeau qui ferait plaisir à son fils.
Claire un peu débordée par la préparation des fêtes de fin d'année lui répond :

- S'il n'aime pas les jeux de construction, alors il aime les toupies ou les jeux vidéos.
- Il a le même *intérêt pour les livres et les toupies.
- S'il n'aime pas les jeux vidéos, alors il aime les jeux de construction et les livres.
- Il n'aime pas les livres ou les jeux vidéos.
- S'il aime les jeux vidéos et s'il n'aime pas les jeux de construction alors il aime les livres.
- **Remarque : il peut aimer ou pas*

1. Traduire les propositions ci-dessus en utilisant des propositions élémentaires.
2. Paul, un peu désorienté, décide d'acheter un livre. Que pensez-vous de ce choix ?
3. Claire a acheté un jeu de construction. Ce cadeau a-t-il fait plaisir à son fils ?
4. Finalement, Pierre était très content de recevoir un livre.
   Aurait-il été content de recevoir :
   - Une toupie ?
   - Un jeu vidéo ?

EXERCICE 2

La journée des anciens se déroule en quatre parties :

- ✓ une conférence de 8h30 à 10h30
- ✓ Un atelier de 11h à 13h : au choix, poursuite d'études longues ou insertion professionnelle
- ✓ Un buffet de 13h à 15h
- ✓ L'assemblée générale de l'association des anciens de 15h à 16h.

Paul est un ancien un peu indécis sur sa participation à la journée, ses idées sont un peu confuses.

Voici l'état de ses réflexions :

P1 : Si je participe à la conférence alors je participe aussi à l'un des deux ateliers et au buffet,

P2 : Bien évidemment, je ne peux pas participer à deux ateliers à la fois,

P3 : Si je ne vais pas au buffet ou si je participe à l'atelier « Insertion Professionnelle » alors je ne vais pas à l'assemblée générale, P4 : Si je participe à l'atelier « Poursuite d'études longues » mais pas à l'assemblée générale alors je ne reste pas pour le buffet,

P5 : Si je ne participe pas à l'assemblée générale ou à la conférence alors je ne vais pas au buffet,

P6 : Si je ne participe pas à la conférence alors je participe à l'atelier « Poursuite d'études longues».

1. Écrire les propositions ci-dessus sous forme de conjonctions de clauses et en utilisant les propositions élémentaires P : je participe à l'atelier « Poursuite d'études longues », I, B, C,A…
2. Peut-on déduire des hypothèses ci-dessus que Paul ne participera pas au buffet ?
3. Peut-on déduire des hypothèses ci-dessus que Paul participera à l'atelier « Poursuite d'études longues» ?

EXERCICE 3

Paul aime beaucoup faire les fêtes de Bayonne, même si certaines soirées ne sont pas toujours réussies. Il essaie donc d'analyser les facteurs de réussite d'une soirée.
Voici ce qu'il a constaté :
P1 : S'il pleut et si Claire l'accompagne, la soirée est réussie,
P2 : Quand il boit trop, la soirée est ratée,
P3 : Les soirs où il pleut, il ne boit pas trop ou ne danse pas
P4 : Quand il sort avec Claire, il danse
P5 : S'il danse et s'il ne pleut pas, la soirée est réussie
P6 : Quand il pleut, il se couche tôt ou boit trop
P7 : S'il se couche tôt et si Claire n'est pas là, la soirée est ratée
P8 : Quand il passe une bonne soirée sans Claire, il boit trop et danse
On utilisera les notations :
R : Paul (il) passe une bonne soirée, la soirée de Paul est réussie… ($\neg$R : la soirée de Paul est ratée…)
C : Claire accompagne Paul, Claire sort avec Paul, Claire est là…
P : Il pleut
B : Paul boit trop
T : Paul se couche tôt
D : Paul danse, va danser

1. Traduire P1,…P7 en langage des **propositions** et en utilisant les notations R,C,P,B,T et D.
2. Paul déduit de ces 7 propositions que, le concernant, une soirée réussie est une soirée où il danse.
   Etes-vous d'accord avec le raisonnement de Paul ?
3. Il ne pleut aujourd'hui et Paul part à la fête. Peut-on en déduire que la soirée sera réussie ? Soyez précis(e) dans votre réponse.

CLAIRE

Claire est plus simple que Paul, voici ce qu'elle a constaté :

- Quand sa soirée est ratée, elle se couche tôt
- Si elle boit trop, elle se couche tard
- Quand elle ne boit pas trop, elle passe une bonne soirée ou se couche tard

Que peut-on déduire de ces trois hypothèses ?

On utilisera les mêmes notations qu'à la question précédente, mais cette fois-ci pour Claire :
R : Claire passe une bonne soirée ($\neg$R : la soirée de Claire est ratée …)
B : Claire boit trop
T : Claire se couche tôt

CORRECTION EXERCICE 1

1. Traduire les propositions ci-dessus en utilisant des propositions élémentaires.

On note :

C : « Pierre aime les jeux de construction »

V : « Pierre aime les jeux vidéos »

L : « Pierre aime les livres »

T : « Pierre aime les toupies »

Les hypothèses se traduisent de la façon suivante :
H1 : $\neg C \to (T \lor V)$
H2 : $L \leftrightarrow T$
H3 : $\neg V \to (C \land L)$
H4 : $\neg L \lor \neg V$
H5 : $(V \land \neg C) \to L$
Écriture sous forme clausale
H1 : $C \lor T \lor V$

H2 : $(\neg L \lor T) \land (\neg T \lor L)$
H3 : $V \lor (C \land L) \equiv (V \lor C) \land (V \lor L)$
H4 : $\neg L \lor \neg V$
H5 : $\neg(V \land \neg C) \lor L \equiv \neg V \lor C \lor L$

2. Paul, un peu désorienté, décide d'acheter un livre. Que pensez-vous de ce choix ?
Si $\{H1, \dots, H5\} \vDash L$**, Paul sera sûr de faire plaisir à Pierre.**
Raisonnons par réfutation : on suppose que $\neg L$ **est vraie**
$H1 \land \dots \land H5 \land \neg L$
$\equiv (\cancel{C \lor T \lor V}) \land (\cancel{\neg L \lor T}) \land (\neg T \lor \cancel{L}) \land (\cancel{V \lor C}) \land (V \lor \cancel{L}) \land (\cancel{\neg L \lor \neg V}) \land (\cancel{\neg V} \lor C \lor \cancel{L}) \land \neg L$
$H1 \land \dots \land H5 \land \neg L \equiv \neg L \land V \land \neg T \land C$
Nous n'obtenons pas de contradiction, il est possible que Pierre n'aime pas les livres.
(les hypothèses sont vraies si Pierre n'aime ni les livres ni les toupies et s'il aime les jeux vidéos et de construction.

3. Claire a acheté un jeu de construction. Ce cadeau a-t-il fait plaisir à son fils ?
Si $\{H1, \dots, H5\} \vDash C$**, Claire sera sûre de faire plaisir à Pierre.**
Raisonnons par réfutation : on suppose que $\neg C$ **est vraie**
$H1 \land \dots \land H5 \land \neg C$
$\equiv \cancel{(C \lor T \lor V)} \land (\cancel{\neg L \lor T}) \land (\neg T \lor \cancel{L}) \land (V \lor \cancel{C}) \land (\cancel{V \lor L}) \land (\neg L \lor \cancel{\neg V}) \land (\cancel{\neg V} \lor \cancel{C} \lor L) \land \neg C$
$H1 \land \dots \land H5 \land \neg C \equiv \neg C \land V \land \neg L \land L \land \neg T$ **: contradiction**
Donc Claire est sûre de faire plaisir à Pierre.

4. Finalement, Pierre était très content de recevoir un livre.
On a donc comme hypothèse :
$H1 \land \dots \land H5 \land L \equiv (\cancel{C \lor T} \lor \cancel{V}) \land (\cancel{\neg L} \lor T) \land (\cancel{\neg T \lor L}) \land (\cancel{V} \lor C) \land (\cancel{V \lor L}) \land (\cancel{\neg L} \lor \neg V) \land (\cancel{\neg V \lor C \lor L}) \land L \equiv T \land C \land \neg V \land L$
Du coup on a la réponse deux questions.
Pierre ne peut aimer les livres que s'il aime les toupies et le jeux de constructions et s'il n'aime pas les vidéos.
Il sera donc heureux de recevoir une toupie et sera déçu par un jeu vidéo.

CORRECTION EXERCICE 2

1. Écrire les propositions ci-dessus sous forme de conjonctions de clauses et en utilisant les propositions élémentaires P : je participe à l'atelier « Poursuite d'études longues », I, B, C,A…

$P_1 : C \to ((I \lor P) \land B) \equiv (\neg C \lor I \lor P) \land (\neg C \lor B)$
$P_2 : \neg(I \land P) \equiv (\neg I \lor \neg P)$
$P_3 : (\neg B \lor I) \to \neg A \equiv (B \land \neg I) \lor \neg A \equiv (B \lor \neg A) \lor (\neg I \lor \neg A)$
$P_4 : (P \land \neg A) \to \neg B \equiv (\neg P \lor A \lor \neg B)$
$P_5 : (\neg A \lor \neg C) \to \neg B \equiv (A \lor C) \lor \neg B \equiv (A \lor \neg B) \land (C \lor \neg B)$
$P_6 : \neg C \to P \equiv (C \lor P)$

2. Peut-on déduire des hypothèses ci-dessus que Paul ne participera pas au buffet ?

On cherche à montrer : $\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6 \ \vDash \neg B}$

Par réfutation : on suppose que $\boldsymbol{\neg B}$ **est fausse, c'est à dire que** $\boldsymbol{B}$ **est vraie**

Hypothèse : : $\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6 \wedge B}$

$$\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6 \wedge B}$$
$$\boldsymbol{\equiv (\neg C \vee I \vee P) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg I \vee \neg P) \wedge (B \vee \neg A) \vee (\neg I \vee \neg A) \wedge (\neg P \vee A \vee \neg B)}$$
$$\boldsymbol{\wedge (A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B) \wedge (C \vee P) \wedge B}$$
$$\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6 \wedge B \equiv B \wedge P \wedge \neg I \wedge A \wedge C}$$

Paul peut donc participer au buffet tout en respectant les 6 hypothèses dans le cas où : il assiste à la conférence, à l'atelier PEL et à l'assemblée générale.

$\boldsymbol{\neg B}$ **n'est donc pas conséquence logique de** $\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6}$

3. Peut-on déduire des hypothèses ci-dessus que Paul participera à l'atelier « Poursuite d'études longues» ?

On cherche à montrer : $\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6 \ \vDash P}$

Par réfutation : on suppose que $\boldsymbol{P}$ **est fausse, c'est à dire que** $\boldsymbol{\neg P}$ **est vraie**

Hypothèse : : $\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6 \wedge \neg P}$

$$\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6 \wedge \neg P}$$
$$\boldsymbol{\equiv (\cancel{\neg C} \vee I \vee \cancel{P}) \wedge (\cancel{\neg C} \vee B) \wedge (\cancel{\neg I \vee \neg P}) \wedge (\cancel{B \vee \neg A}) \vee (\cancel{\neg I} \vee \neg A) \wedge (\cancel{\neg P \vee A \vee \neg B})}$$
$$\boldsymbol{\wedge (\cancel{A} \vee \neg B) \wedge (\cancel{C \vee \neg B}) \wedge (C \vee \cancel{P}) \wedge \neg P}$$
$$\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6 \wedge \neg P \equiv \neg P \wedge I \wedge B \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge C}$$

On arrive donc à une contradiction, on a donc bien :

$$\boldsymbol{P_1 \wedge \ldots \wedge P_6 \vDash P}$$

CORRECTION EXERCICE 3

1. Traduire P1,…P7 en langage des **propositions** et en utilisant les notations R,C,P,B,T et D.

$\boldsymbol{P1 : (P \wedge C) \rightarrow R \equiv \neg B \vee \neg C \vee R}$

$\boldsymbol{P2 : B \rightarrow \neg R \equiv \ \neg B \vee \neg R}$

$\boldsymbol{P3 : P \rightarrow (\neg B \vee \neg D) \equiv \neg P \vee \neg B \vee \neg D}$

$\boldsymbol{P4 : C \rightarrow D \equiv \neg C \vee D}$

$\boldsymbol{P5 : (D \vee \neg P) \rightarrow R \equiv \neg D \vee P \vee R}$

$\boldsymbol{P6 : P \rightarrow (T \vee B) \equiv \neg P \vee T \vee B}$

$\boldsymbol{P7 : (T \wedge \neg C) \rightarrow \neg R \equiv \neg T \vee C \vee \neg R}$

$\boldsymbol{P8 : (R \vee \neg C) \rightarrow (B \wedge D) \equiv (\neg R \vee C \vee B) \wedge (\neg R \vee C \vee D)}$

2. Paul déduit de ces 7 propositions que, le concernant, une soirée réussie est une soirée où il danse. Etes-vous d'accord avec le raisonnement de Paul ?

Nous supposons vraies les hypothèses $\boldsymbol{P1, \ldots, P8}$

Nous voulons montrer que : $\boldsymbol{P1 \wedge \ldots \wedge P8 \vDash (R \rightarrow D)}$

Par réfutation : on suppose que $\boldsymbol{R \rightarrow D}$ **est fausse, c'est-à-dire que** $\boldsymbol{R \wedge \neg D}$ **est vraie**

Hypothèses : $\boldsymbol{P1 \wedge \ldots \wedge P8 \wedge (\ R \wedge \neg D)}$

$$\boldsymbol{P1 \wedge \ldots \wedge P8 \wedge (\ R \wedge \neg D)}$$
$$\boldsymbol{\equiv (\neg B \vee \neg C \vee R) \wedge (\neg B \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg D \vee P \vee R)}$$
$$\boldsymbol{\wedge (\neg P \vee T \vee B) \wedge (\neg T \vee C \vee \neg R) \wedge (\neg R \vee C \vee B) \wedge (\neg R \vee C \vee D) \wedge \ R \wedge \neg D}$$
$$\boldsymbol{\equiv \cancel{(\neg B \vee \neg C \vee R)} \wedge (\neg B \vee \cancel{\neg R}) \wedge (\cancel{\neg P \vee \neg B \vee \neg D}) \wedge (\neg C \vee \cancel{D}) \wedge \cancel{(\neg D \vee P \vee R)} \wedge (\neg P \vee T \vee B)}$$
$$\boldsymbol{\wedge (\neg T \vee C \vee \cancel{\neg R}) \wedge (\cancel{\neg R \vee C \vee B}) \wedge (\cancel{\neg R} \vee C \vee D) \wedge \ R \wedge \neg D}$$
$$\boldsymbol{\equiv R \wedge \neg D \wedge \ C \wedge \neg C \wedge (\neg P \vee T \vee B)}$$ **: contradiction**

Donc Paul a raison

3. Il ne pleut aujourd'hui et Paul part à la fête. Peut-on en déduire que la soirée sera réussie ? Soyez précis(e) dans votre réponse.

Nous supposons vraies les hypothèses $\boldsymbol{P1}, \dots, \boldsymbol{P8}$ et $\neg \boldsymbol{P}$
Nous voulons montrer que : $\boldsymbol{P1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{P8} \wedge \neg \boldsymbol{P} \vDash \boldsymbol{R}$
Par réfutation : on suppose que $\boldsymbol{R}$ est fausse, c'est-à-dire que $\neg \boldsymbol{R}$ est vraie
Hypothèses :$\boldsymbol{P1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{P8} \wedge \neg \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{R})$

$$\boldsymbol{P1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{P8} \wedge \neg \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{R})$$
$$\equiv (\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{R}) \wedge (\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{R}) \wedge (\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{D}) \wedge (\neg \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{D}) \wedge (\neg \boldsymbol{D} \vee \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R})$$
$$\wedge (\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{T} \vee \boldsymbol{B}) \wedge (\neg \boldsymbol{T} \vee \boldsymbol{C} \vee \neg \boldsymbol{R}) \wedge (\neg \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{B}) \wedge (\neg \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{D}) \wedge \neg \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{R}$$
$$\equiv (\cancel{\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{C}} \vee \cancel{\boldsymbol{R}}) \wedge (\cancel{\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{R}}) \wedge \cancel{(\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{D})} \wedge (\neg \boldsymbol{C} \vee \cancel{\boldsymbol{D}}) \wedge (\neg \boldsymbol{D} \vee \cancel{\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R}}) \wedge (\cancel{\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{T} \vee \boldsymbol{B}})$$
$$\wedge (\cancel{\neg \boldsymbol{T} \vee \boldsymbol{C} \vee \neg \boldsymbol{R}}) \wedge (\cancel{\neg \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{B}}) \wedge (\cancel{\neg \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{D}}) \wedge \neg \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{R}$$
$$\equiv \neg \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{R} \wedge \neg \boldsymbol{D} \wedge \neg \boldsymbol{C}$$

Il n'y a pas de contradiction : il est possible qu'il ne pleuve pas et que la soirée de Paul soit ratée : ce sera le cas s'il ne danse pas et si Claire n'est pas là

CLAIRE

Claire est plus simple que Paul, voici ce qu'elle a constaté :

- P1 : Quand sa soirée est ratée, elle se couche tôt. $\boldsymbol{P1} : \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{T}$
- P2 : Si elle boit trop, elle se couche tard. $\boldsymbol{P2} : \neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{T}$
- P3 : Quand elle ne boit pas trop, elle passe une bonne soirée ou se couche tard. $\boldsymbol{P3} : \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T}$

Que peut-on déduire de ces trois hypothèses ?
Hypothèses : $\boldsymbol{P1} \wedge \boldsymbol{P2} \wedge \boldsymbol{P3} \equiv (\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{T}) \wedge (\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{T}) \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T})$
Principe de résolution :

- **Partons de $\boldsymbol{P2} \wedge \boldsymbol{P3}$: $\boldsymbol{P2} \wedge \boldsymbol{P3} \equiv (\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{T}) \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T})$**
  Principe de résolution :$(\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{T}) \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T}) \vDash (\boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T})$
  Donc $(\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{T}) \wedge (\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{T}) \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T}) \vDash (\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{T}) \wedge (\boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T})$
  Nous appliquons à nouveau le principe de résolution : $(\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{T}) \wedge (\boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T}) \vDash \boldsymbol{R}$
  $$\boldsymbol{P1} \wedge \boldsymbol{P2} \wedge \boldsymbol{P3} \vDash \boldsymbol{R}$$
  Conclusion : Claire est sûre d'avoir une soirée réussie

- **Remarque : Si nous étions partis de $\boldsymbol{P1} \wedge \boldsymbol{P2}$ nous aurions obtenu un résultat moins intéressant**
  $\boldsymbol{P1} \wedge \boldsymbol{P2} \equiv (\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{T}) \wedge (\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{T})$
  Principe de résolution : $(\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{T}) \wedge (\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{T}) \vDash (\boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{B})$
  Donc $(\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{T}) \wedge (\neg \boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{T}) \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T}) \vDash (\boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T})$
  Nous appliquons à nouveau le principe de résolution : $(\boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T}) \vDash (\boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T})$
  $$\boldsymbol{P1} \wedge \boldsymbol{P2} \wedge \boldsymbol{P3} \vDash (\boldsymbol{R} \vee \neg \boldsymbol{T})$$
  Conclusion : Claire est sûre d'avoir une soirée réussie ou de se coucher tard