# Exercices : Logique des Prédicats

## EXERCICE 1

On considère les prédicats suivants :

A(x) : x est un ancien (étudiant de l'IUT)

D(x) : x est développeur

J(x) : x participe à la journée des anciens

**Pour chacune des propositions suivantes :**

- **Donner une expression en langage des prédicats,**
- **Donner une expression de la négation en langage des prédicats,**
- **Donner une expression de la négation en langage courant.**

P1 : Paul est un ancien qui participe à la journée des anciens

P2 : Tous les anciens sont des développeurs

P3 : Il y a au moins un participant à la journée des anciens qui n'est pas un ancien

P4 : Si un ancien participe à la journée des anciens, alors il est développeur

P5 : Si tous les anciens participent à la journée des anciens alors au moins un développeur participe à la journée des anciens.

## EXERCICE 2

On considère les prédicats suivants :
P(x) : « x va à la plage »
R(x) : « x rate son contrôle »
T(x) : « x travaille »
D(x) : « x est désespéré »
E(x) : « x est un étudiant »

Traduire en langage des prédicats les propositions suivantes :

1. Aucun étudiant ne rate son contrôle
2. Au moins un étudiant va à la plage
3. Paul est un étudiant désespéré
4. Tout étudiant qui travaille réussit son contrôle
5. Ceux qui ne travaillent pas sont étudiants ou vont à la plage
6. Si quelqu'un rate son contrôle tout le monde est désespéré

## EXERCICE 3

Les réponses de cet exercice seront données sur le tableau de la page suivante.

A. On considère les prédicats suivants :
   F(x) : x est une fille
   M(x) : x mange
   C(x) : x a un chat
   L(x) : x lit
   V(x) : x a un vélo
   Dans la deuxième colonne du tableau (page suivante), traduisez les propositions de la première colonne en langage des prédicats.
B. La situation est la suivante :
   - Jeanne et Lucie sont des filles.
   - Paul et Marc sont des garçons.

- Jeanne et Paul ont chacun un chat.
- Marc et Lucie ont chacun un vélo.
- Jeanne lit.
- Paul, Marc, Lucie mangent.
- Ce qui n'est pas précisé est faux : par exemple, Jeanne ne mange pas, n'a pas de vélo et n'est pas un garçon.

À la lumière de ces hypothèses, quelles sont les valeurs de vérité des propositions P1 à P10 ?
Écrire ces valeurs dans la troisième colonne du tableau.

C. Exprimer la négation des propositions P1-P10 :
   a. En langage des prédicats dans la quatrième colonne du tableau,
   b. En langage courant dans la cinquième colonne du tableau.

## EXERCICE 4

Soit F la phrase « les informaticiens sont tous des bidouilleurs ».
Parmi les phases suivantes, y en a-t-il qui sont équivalentes à F ? Y en a-t-il qui sont équivalentes à sa négation ?

1. Les informaticiens ne sont jamais des bidouilleurs
2. Les informaticiens sont parfois des bidouilleurs
3. Il y a des informaticiens qui ne sont pas des bidouilleurs
4. Les bidouilleurs sont tous des informaticiens
5. Nul n'est informaticien s'il n'est pas bidouilleur
6. Il y a des bidouilleurs qui ne sont pas informaticiens

## EXERCICE 5 : LANGAGE DES PREDICATS EN MATHEMATIQUES

Soit f : IR $\rightarrow$ IR une fonction.
Écrire la négation des propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
- $\forall M > 0, \exists A > 0,\ \forall x \geq A, f(x) > M$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0\ \rightarrow x \leq 0)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0,\ \forall x \geq A, |f(x) - l| < \varepsilon$

Test d'entrainement Elearn - Prédicats

## EXERCICE 6*

On considère les prédicats :
E(x) : « x est un entier naturel »
S(x,y) : « x est successeur de y »
I(x,y) : « x est inférieur ou égal à y »

Utiliser E(x), S(x,y) et I(x,y) pour traduire la phrase suivante en **langage des prédicats** : « Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x »

# CORRECTION LOGIQUE DES PREDICATS

## EXERCICE 1

On considère les prédicats suivants :

A(x) : x est un ancien (étudiant de l'IUT)

D(x) : x est développeur

J(x) : x participe à la journée des anciens

On s'intéresse aux propositions suivantes :

- P1 : Paul est un ancien qui participe à la journée des anciens

  $\boldsymbol{P_1} : \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Paul}) \wedge \boldsymbol{J}(\boldsymbol{Paul})$

  $\neg \boldsymbol{P_1} : \neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Paul}) \vee \neg \boldsymbol{J}(\boldsymbol{Paul})$

  **Soit Paul n'est pas étudiant, soit il ne participe pas à la journée des anciens (on pourrait dire aussi : si Paul est étudiant, il ne participe pas à la journée)**

- P2 : Tous les anciens sont des développeurs

  $\boldsymbol{P_2} : \forall \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$

  $\neg \boldsymbol{P_2} : \exists \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$

  **Il existe un ancien qui n'est pas développeur.**

- P3 : Il y a au moins un participant à la journée des anciens qui n'est pas un ancien

  $\boldsymbol{P_3} : \exists \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$

  $\neg \boldsymbol{P_3} : \forall \boldsymbol{x}\ \ \neg \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \equiv \forall \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$

  **Tous les participants à la journée des anciens sont des anciens.**

- P4 : Si un ancien participe à la journée des anciens, alors il est développeur

  $\boldsymbol{P_4}: \forall \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$

  $\neg \boldsymbol{P_4}: \exists \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$

  **Il existe un ancien qui participe à la journée des anciens et qui n'est pas développeur.**

- P5 : Si tous les anciens participent à la journée des anciens alors au moins un développeur participe à la journée des anciens.

  $\boldsymbol{P_5}: (\forall \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})) \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})$

  $\neg \boldsymbol{P_5}: \big(\forall \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\big) \wedge (\forall \boldsymbol{y}\ \ \neg \boldsymbol{D}(\boldsymbol{y}) \vee \neg \boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})) \equiv \big(\forall \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\big) \wedge (\forall \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{y}) \rightarrow \neg \boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}))$

  **Tous les anciens participent à la journée des anciens, à laquelle aucun développeur ne participe.**

## EXERCICE 2

On considère les prédicats suivants :

P(x) : « x va à la plage »

R(x) : « x rate son contrôle »

T(x) : « x travaille »

D(x) : « x est désespéré »

E(x) : « x est un étudiant »

Traduire en langage des prédicats les propositions suivantes :

1. Aucun étudiant ne rate son contrôle

   **« il n'existe pas d'étudiant qui rate son contrôle » :** $\neg\big(\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \wedge\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\big)$

   **Ou « tous les étudiants réussissent leur contrôle » :** $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \rightarrow\ \neg \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$

2. Au moins un étudiant va à la plage

$$\exists \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

3. Paul est un étudiant désespéré

$$E(Paul) \wedge D(Paul)$$

4. Tout étudiant qui travaille réussit son contrôle

$$\forall x\ (E(x) \wedge T(x)) \rightarrow \neg R(x)$$

5. Ceux qui ne travaillent pas sont étudiants ou vont à la plage

$$\forall x\ \neg T(x) \rightarrow (E(x) \vee P(x))$$

6. Si quelqu'un rate son contrôle tout le mone est désespéré

$$\left(\exists x\ E(x) \wedge\ R(x)\right) \rightarrow (\forall y\ D(y))$$

# EXERCICE 4

Soit F la phrase « les informaticiens sont tous des bidouilleurs ».

Parmi les phases suivantes, y en a-t-il qui sont équivalentes à F ? Y en a-t-il qui sont équivalentes à sa négation ?

**On introduit les prédicats suivants :**

**$B(x)$ : x est un bidouilleur**

**$I(x)$ : x est un informaticien**

**La proposition $F$ s'écrit sous la forme : $F \equiv \forall x\ I(x) \rightarrow B(x)$**

**On obtient donc pour $\neg F$ : $\neg F \equiv \neg\left(\forall x\, I(x) \rightarrow B(x)\right) \equiv \exists x\, \neg\left(I(x) \rightarrow B(x)\right) \equiv \exists x\ I(x) \wedge \neg B(x)$**

**En langage courant : Il existe un informaticien qui n'est pas bidouilleur**

1. Les informaticiens ne sont jamais des bidouilleurs
   **En langage des prédicats, cette phrase s'écrit sous la forme : $\forall x\ \ I(x) \rightarrow \neg B(x) \not\equiv \neg F$**
2. Les informaticiens sont parfois des bidouilleurs
   **Reformulation de la proposition : « il existe au moins un informaticien bidouilleur »**
   **En langage des prédicats, cette phrase s'écrit sous la forme : $\exists x\ \ I(x) \wedge \neg B(x) \equiv \neg F$**
3. Il y a des informaticiens qui ne sont pas des bidouilleurs $\equiv \neg F$
4. Les bidouilleurs sont tous des informaticiens
   **En langage des prédicats, cette phrase s'écrit sous la forme : $\forall x\ \ B(x) \rightarrow I(x) \not\equiv \neg F$**
5. Nul n'est informaticien s'il n'est pas bidouilleur
   **Reformulation de la proposition : « si on n'est pas bidouilleur alors on n'est pas informaticien »**
   **En langage des prédicats, cette phrase s'écrit sous la forme : $\forall x\ \ \neg B(x) \rightarrow \neg I(x)$**
   **$\neg B(x) \rightarrow \neg I(x)$ étant la contraposée de $I(x) \rightarrow B(x)$ :**
   $$\forall x\ \ \neg B(x) \rightarrow \neg I(x)\ \equiv \forall x\ \ I(x) \rightarrow B(x) \equiv F$$
6. Il y a des bidouilleurs qui ne sont pas informaticiens :
   **Reformulation de la proposition : « il existe au moins un bidouilleur qui n'est pas informaticien »**
   **En langage des prédicats, cette phrase s'écrit sous la forme : $\exists x\ \ B(x) \wedge \neg I(x) \not\equiv \neg F$**

# EXERCICE 3 : LANGAGE DES PREDICATS EN MATHEMATIQUES

Soit f : IR → IR une fonction.

Écrire la négation des propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
  $\boldsymbol{\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0}$
- $\forall M > 0, \exists A > 0,\ \forall x \geq A, f(x) > M$
  $\boldsymbol{\exists M > 0, \forall A > 0,\ \exists x \geq A, f(x) \leq M}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0\ \rightarrow x \leq 0)$
  $\boldsymbol{\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0\ \text{ et }\ x > 0}$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0,\ \forall x \geq A, |f(x) - l| < \varepsilon$
  $\boldsymbol{\exists \varepsilon > 0, \forall A > 0,\ \exists x \geq A, |f(x) - l| \geq \varepsilon}$

# EXERCICE 4

On considère les prédicats : E(x) : « x est un entier naturel », S(x,y) : « x est successeur de y », I(x,y) : « x est inférieur ou égal à y »

« Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x »

$$\forall x(N(x) \rightarrow (\exists y S\ (x,y)\wedge(\forall z, I(z,x) \rightarrow I(y,z)))$$

# EXERCICE 3

| PROPOSITION | A : traduction en langage des prédicats. | B : valeur de vérité | C : négation en langage des prédicats | D : négation en langage courant |
|---|---|---|---|---|
| *Exemple - P0 : Paul a un vélo* | *V(Paul)* | *Faux* | $\neg V(Paul)$ | *Paul n'a pas de vélo* |
| P1 : Jeanne mange ou lit. | | | | |
| P2 : Si Paul et Marc mangent, alors Lucie ne lit pas. | | | | |
| P3 : Si quelqu'un lit, tout le monde mange. | | | | |
| P4 : Tous les garçons mangent. | | | | |
| P5 : Aucune fille n'a de vélo. | | | | |
| P6 : Certains garçons ne lisent pas. | | | | |
| P7 : Si une fille lit alors une fille mange. | | | | |
| P8 : Si une fille lit alors elle mange. | | | | |
| P9 : Tous ceux qui ont un chat lisent ou mangent. | | | | |
| P10 : Si toutes les filles ont un vélo ou mangent, alors tous les garçons ont un vélo ou lisent. | | | | |

# EXERCICE 3 - CORRIGE

| PROPOSITION | A : traduction en langage des prédicats. | B : valeur de vérité | C : négation en langage des prédicats | D : négation en langage courant |
|---|---|---|---|---|
| *Exemple - P0 : Paul a un vélo* | *V(Paul)* | *Faux* | $\neg V(Paul)$ | *Paul n'a pas de vélo* |
| P1 : Jeanne mange ou lit. | $M(Jeanne) \vee L(Jeanne)$ | Vrai | $\neg M(Jeanne) \wedge \neg L(Jeanne)$ | Jeanne ne mange ni ne lit |
| P2 : Si Paul et Marc mangent, alors Lucie ne lit pas. | $(M(Paul) \wedge M(Marc)) \longrightarrow \neg L(Lucie)$ | Vrai | $\neg\left(\neg\big(M(Paul) \wedge M(Marc)\big) \vee \neg L(Lucie)\right)$<br>$\neg\big(\neg M(Paul) \vee \neg M(Marc) \vee \neg L(Lucie)\big)$<br>$M(Paul) \wedge M(Marc) \vee \neg L(Lucie)$ | Paul et Marc mangent et Lucie ne lit pas |
| P3 : Si quelqu'un lit, tout le monde mange. | $(\exists x\ L(x)) \rightarrow (\forall y\ M(y))$ | Faux | $(\exists x\ L(x)) \wedge \neg(\forall y\ \ M(y))$<br>$(\exists x\ L(x)) \wedge (\exists y\ \neg M(y))$ | Quelqu'un lit et il existe quelqu'un qui ne mange pas |
| P4 : Tous les garçons mangent. | $\forall x\ \ \neg F(x) \rightarrow M(x)$ | Faux | $\exists x(\neg F(x) \wedge \neg M(x))$ | Il existe un garçon qui ne mange pas |
| P5 : Aucune fille n'a de vélo. | $\forall x\ F(x) \rightarrow \neg V(x)$ | Faux | $\exists x(F(x) \wedge V(x))$ | Il existe une fille qui a un vélo |
| P6 : Certains garçons ne lisent pas. | $\exists x\ \ \neg F(x) \wedge \neg L(x)$ | Vrai | $\forall x \neg(\neg F(x) \wedge \neg L(x))$<br>$\forall x\ \ F(x) \vee L(x)$<br>$\forall x\ \ \neg F(x) \rightarrow L(x)$ | Tous les garçons lisent |
| P7 : Si une fille lit alors une fille mange. | $(\exists x\ \ F(x) \wedge L(x)) \rightarrow (\exists y\ \ F(y) \wedge M(y))$ | Vrai | $(\exists x\ \ F(x) \wedge L(x)) \wedge \neg(\exists y\ \ F(y) \wedge M(y))$<br>$(\exists x\ \ F(x) \wedge L(x)) \wedge (\forall y\ \ \neg F(y) \vee \neg M(y))$<br>$(\exists x\ \ F(x) \wedge L(x)) \wedge (\forall y\ \ F(y) \rightarrow \neg M(y))$ | Une fille lit et aucune fille ne mange |
| P8 : Si une fille lit alors elle mange. | $\forall x F((x) \wedge L(x) \rightarrow M(x))$ | Faux | $\exists x\ \ F(x) \wedge L(x) \wedge \neg M(x)$ | Une fille lit et ne mange pas |
| P9 : Tous ceux qui ont un chat lisent ou mangent. | $\forall x\ \ C(x) \rightarrow L(x) \vee M(x)$ | Vrai | $\exists x\ \ C(x) \wedge \neg L(x) \wedge \neg M(x)$ | Il existe quelqu'un qui a un chat et qui ne lit ni ne mange. |
| P10 : Si toutes les filles ont un vélo ou mangent, alors tous les garçons ont un vélo ou lisent. | $\big(\forall x\ \ F(x) \rightarrow (V(x) \vee M(x))\big) \rightarrow \big(\forall y\ \ \neg F(y) \rightarrow (V(y) \vee L(y))\big)$ | Vrai | $(\forall x\ \ F(x) \rightarrow V(x) \vee M(x)) \wedge \neg(\forall y\ \ \neg F(y) \rightarrow V(y) \vee L(y))$<br>$(\forall x\ \ F(x) \rightarrow V(x) \vee M(x)) \wedge (\exists \boldsymbol{y}\ \ \neg \boldsymbol{F(y)} \wedge \neg \boldsymbol{V(y)} \wedge \neg \boldsymbol{L(y)})$ | Toutes les filles ont un vélo ou mangent et il existe un garçon qui n'a pas de vélo et qui ne mange pas |