LOGIQUE DES PRÉDICATS

Logique des prédicats

Un prédicat est un énoncé dont la valeur de vérité dépend d'un ou de plusieurs paramètres.

Exemple

Propositions :
Paul est présent
Claire est absente
Pierre est présent
Paul est inscrit en Math
Pierre n'est pas inscrit en Math
Claire est inscrite en Info

Prédicats :
P(x) : x est présent
I(x,y) : x est inscrit en y

$$P(Paul)$$
$$\neg P(Claire)$$
$$P(Pierre)$$
$$I(Paul, Math)$$
$$\neg I(Pierre, Math)$$
$$I(Claire, info)$$

Logique des prédicats

E(x) : x est étudiant ; P(x) : x est présent ; I(x,y) : « x est inscrit en y »

Traduire

« Paul est un étudiant inscrit en math » :

$$\boldsymbol{E(Paul) \wedge I(Paul, Math)}$$

« Si Paul est présent alors il est inscrit en math » :

$$\boldsymbol{P(Paul) \rightarrow I(Paul, Math)}$$

« Paul n'est pas étudiant mais il est inscrit en math » :

$$\boldsymbol{\neg E(Paul) \wedge I(Paul, Math)}$$

QUANTIFICATEURS ∀, ∃

Exemples

Il y a au moins un inscrit en math :

$$\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{math})$$

Il y a au moins un étudiant inscrit en math :

$$\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{math})$$

Tous sont inscrits en math :

$$\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{math})$$

Tous les étudiants sont inscrits en math :

$$\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{math})$$

QUANTIFICATEURS $\forall$, $\exists$

$\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ **vraie**

si et seulement si toute valeur de x rend vraie $P(x)$

$\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ **vraie**

si et seulement s'il existe au moins une valeur de x pour laquelle le prédicat est vrai

Quantificateurs

E(x) : x est étudiant ; P(x) : x est présent ; I(x,y) : « x est inscrit en y »

Traduire

« Tous les étudiants sont présents » :

$$\forall x\, E(x) \rightarrow P(x)$$

« Il y a au moins un étudiant absent » :

$$\exists x\, E(x) \wedge \neg P(x)$$

« Tous les étudiants présents sont inscrits en math » :

$$\forall x\, (E(x) \wedge P(x)) \rightarrow I(x, math)$$

« Si un étudiant est présent alors il est inscrit en math » :

$$\forall x\, (E(x) \wedge P(x)) \rightarrow I(x, math)$$

Traduction du mot « un » dans une phrase

- Jean est inscrit à un cours *(au moins un cours)*

$$\exists x \;\; \boldsymbol{I(Jean, x)}$$

- Un étudiant est présent *(au moins un étudiant…)*

$$\exists x \;\; \boldsymbol{E(x) \wedge P(x)}$$

- Un étudiant est toujours inscrit à au moins un cours.

$$\forall x \; (\boldsymbol{E(x)} \longrightarrow \exists y \; \boldsymbol{I(x, y)}\;)$$

- Un étudiant inscrit en informatique est aussi inscrit en math.

$$\forall x \;\; (\boldsymbol{E(x) \wedge I(x, informatique)}) \rightarrow \boldsymbol{I(x, math)}$$

Ordre et quantificateur

Exemple

Prédicat A(x,y) : **« x aime y »,**

$\forall x \ \exists y \ A(x,y)$: **« Tout le monde aime quelqu'un »**

$\exists y \ \forall x \ A(x,y)$: **« Il existe quelqu'un que tout le monde aime »**

ATTENTION

$$\forall x \exists y \ P(x,y) \not\equiv \ \exists y \forall x \ P(x,y)$$

Quantificateur et négation

- $\forall x\ P(x)$: « tout le monde est présent »

- La négation de « tout le monde est présent » est « il existe un absent »

$$\neg\big(\forall x\ P(x)\big) = \exists x \neg P(x)$$

$$\neg\big(\exists x\ P(x)\big) = \forall x \neg P(x)$$

Quantificateur et connecteur logique

Exemple

P(x) : « x est une consonne »,

Q(x) : « x est une voyelle »

$\forall x\, \big(P(x) \vee Q(x)\big)$:

«Toute lettre est une consonne ou une voyelle »

$\forall x\, P(x) \vee\ \forall x\, Q(x)$:

«Toute lettre est une consonne » ou « toute lettre est une voyelle »

Quantificateur et connecteur logique

P(x) : « x est une consonne »,
Q(x) : « x est une voyelle »

$\forall x \left(P(x) \vee Q(x)\right)$:
«Toute lettre est une consonne ou une voyelle »

$\forall x\ P(x) \vee\ \forall x\ Q(x)$:
«Toute lettre est une consonne » ou « toute lettre est une voyelle »

$\exists x \left(P(x) \wedge Q(x)\right)$:
«Il existe une lettre qui est à la fois une consonne et une voyelle »

$\exists x\ P(x) \wedge\ \exists x\ Q(x)$:
«Il existe au moins une consonne et il existe au moins une voyelle »

Quantificateur et connecteur logique

Exemple
P(x) : « x est une consonne »,
Q(x) : « x est une voyelle »

$\forall x\ \big(P(x) \vee Q(x)\big)$:
«Toute lettre est une consonne ou une voyelle »

$\forall x\ P(x) \vee\ \forall x\ Q(x)$:
«Toute lettre est une consonne » ou « toute lettre est une voyelle »

$\exists x\ \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$:
«Il existe une lettre qui est à la fois une consonne et une voyelle »

$\exists x\ P(x) \wedge\ \exists x\ Q(x)$:
«Il existe au moins une consonne et il existe au moins une voyelle »

$$\exists x\ \big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv \exists x\ P(x) \vee\ \exists x\ Q(x)$$
$$\forall x\ \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x\ P(x) \wedge\ \forall x\ Q(x)$$

ATTENTION

$$\forall x\ \big(P(x) \vee Q(x)\big) \not\equiv \forall x\ P(x) \vee\ \forall x\ Q(x)$$
$$\exists x\ \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \not\equiv \exists x\ P(x) \wedge\ \exists x\ Q(x)$$