클린업 2주차

3팀 선형대수학

황정현
고경현
김지민
반경림
전효림

선형변환으로의 해석

- 선형변환 전후의 넓이 관계 설명

지난주 이야기

'선형변환'의 관점에서 바라본 선형방정식 Ax = b

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{b}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

벡터 x에 행렬 A를 곱하는 선형변환을 통해 벡터 b 만듦

input

벡터 x가 만드는 공간의 넓이

Linear Transformation

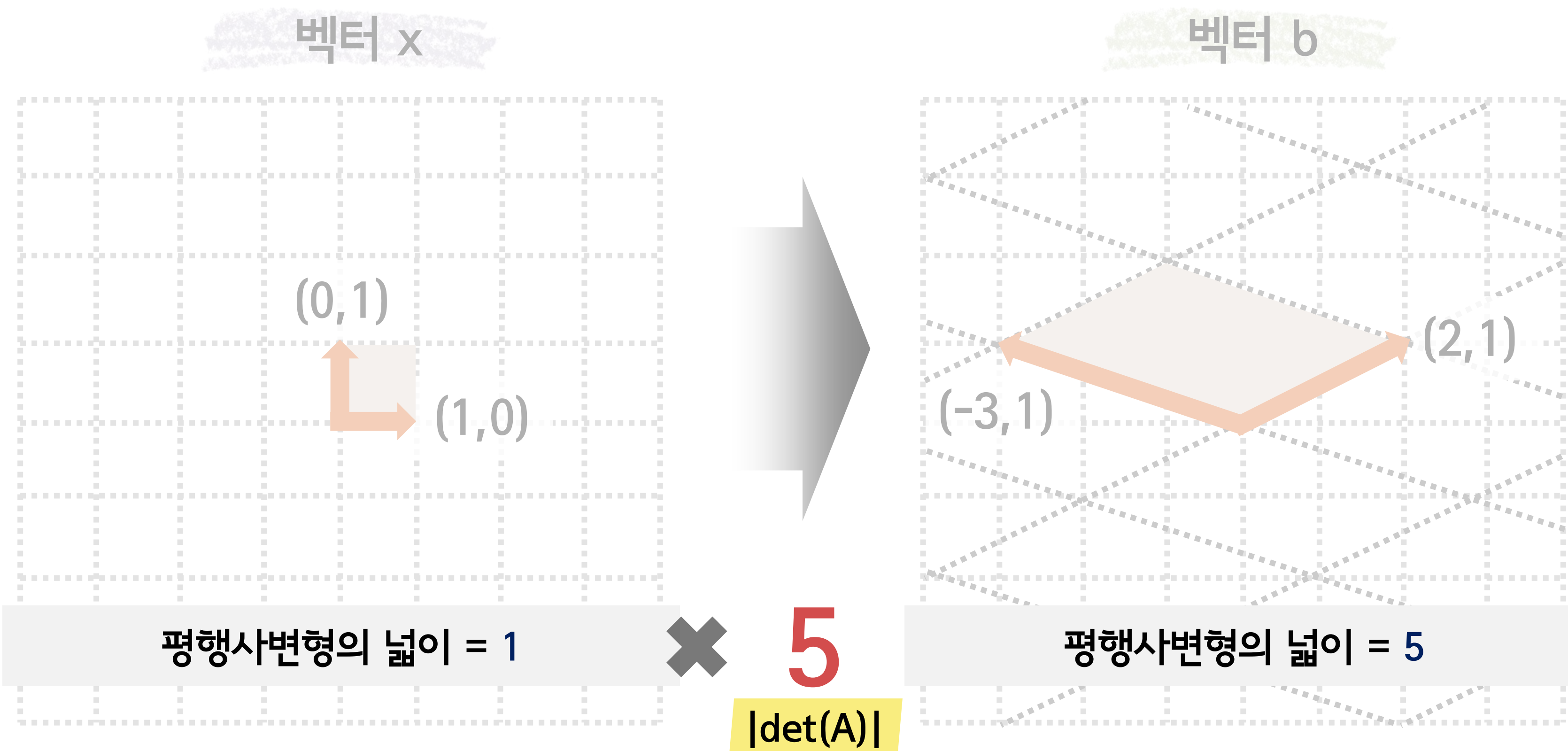
|det(A)|배 변화

output

벡터 b가 만드는 공간의 넓이

선형변환으로의 해석

- 선형변환 전후의 넓이 관계 설명

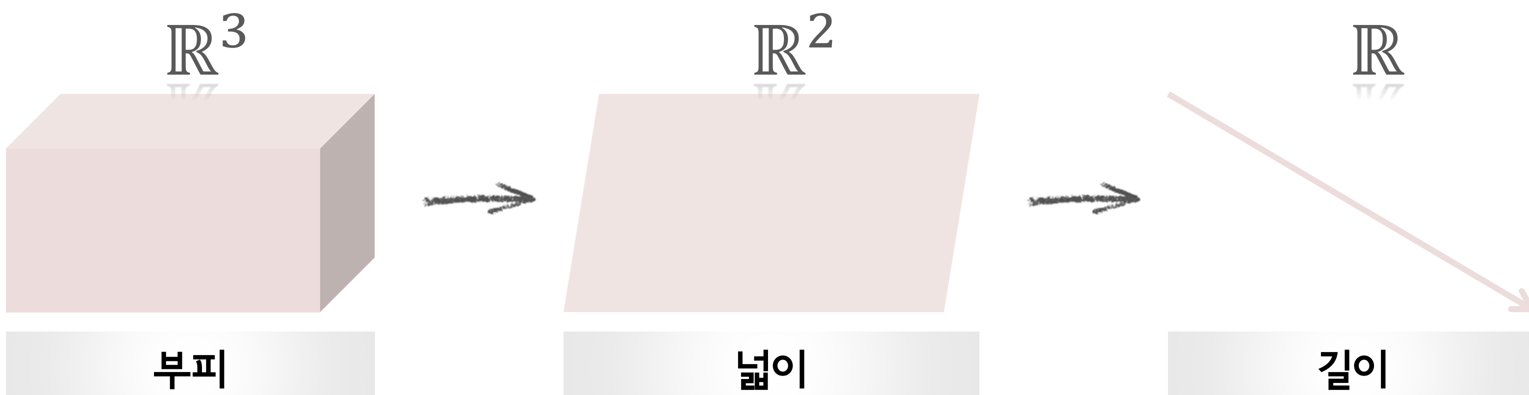


선형변환으로의 해석

Q

그렇다면 det(A)가 0인 것은 무엇을 뜻하나요?

선형변환을 통해 공간이 압축되었다!



차원이 바뀌면 기존 공간에서의 부피/넓이는 0이 됨

선형부분공간

subspace

벡터공간	**선형부분공간**
span	column space

- 벡터공간 안의 몇 가지 벡터 집합으로 이루는 또다른 부분 벡터공간

❂ 선형 조건 ❂

0벡터(원점)가 존재한다

선형부분공간 내 벡터에 다른 벡터를 **합**한 것도 선형부분공간에 존재한다

선형부분공간 내 벡터에 **상수를 곱**한 것도 선형부분공간에 존재한다

선형부분공간

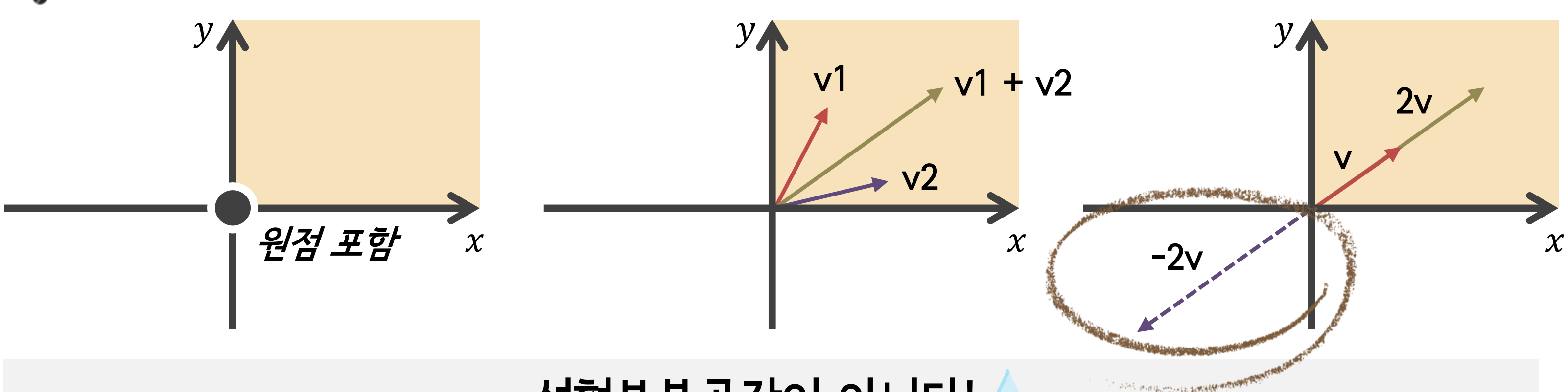
subspace

벡터공간 | 선형부분공간

span | column space

2차원 공간에서 축을 포함한 제1사분면은

선형부분공간이 될 수 있을까?



선형부분공간이 아니다!

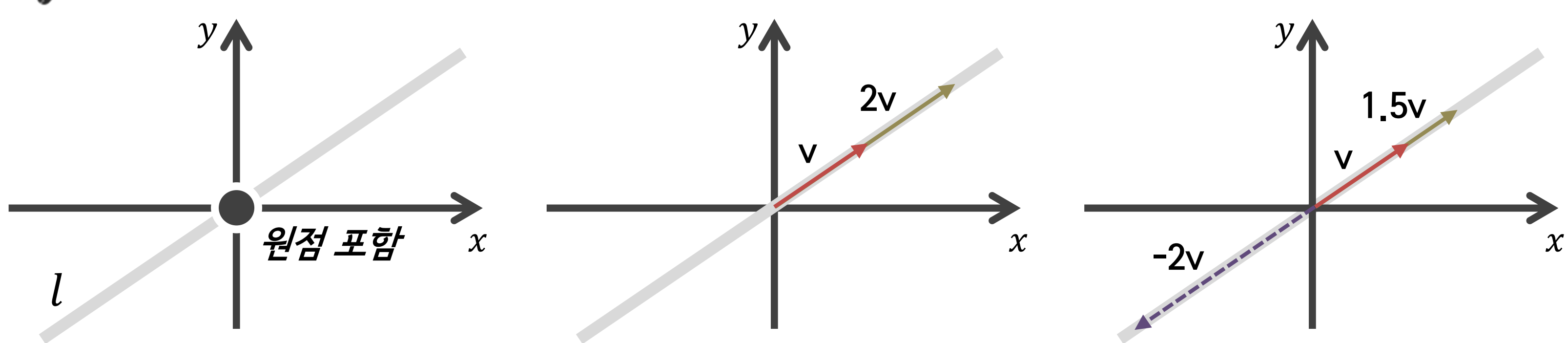
선형부분공간

subspace

벡터공간	**선형부분공간**
span	column space

그렇다면 2차원 공간에서의 직선 l은

선형부분공간이 될 수 있을까?

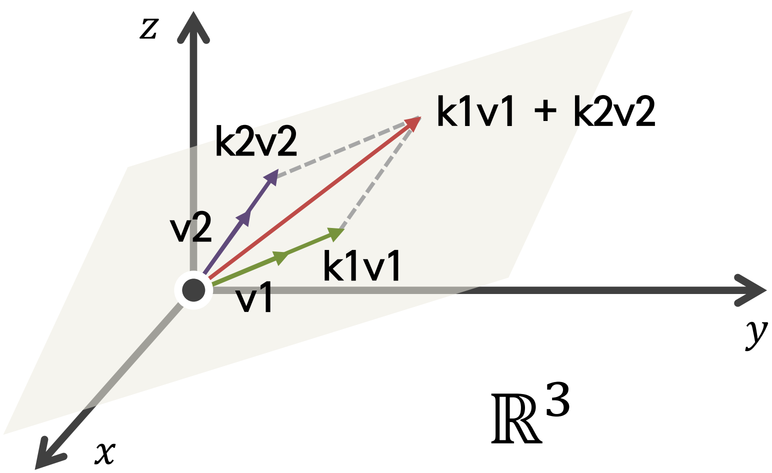


선형부분공간이다!

선형부분공간

벡터공간	선형부분공간
span	column space

- 벡터 a1, a2, ⋯, an의 모든 선형결합이 속하는 선형부분공간



v1과 v2의 합과 상수배로
만든 모든 조합

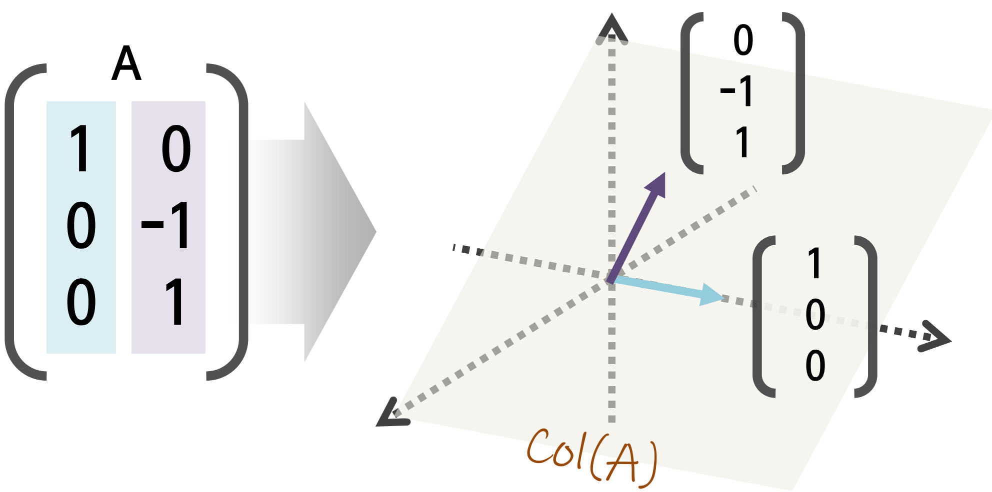
span{v1, v2}

3차원 공간에서
원점을 지나는 평면

선형부분공간

벡터공간	선형부분공간
span	column space

- 행렬 A의 열벡터의 연산으로 만드는 공간
- 행렬 A의 열벡터의 span



Ax = b의 해가 있다

col(A)가 모든 Ax를 포함한다

벡터 b가 col(A)에 있다

벡터 b가 span{a}에 있다

Null space

영공간
Null Space

Ax = 0을 만족하는 해 x가 이루는 공간,
즉 homogenous한 방정식의 해의 집합

Ax = 0	일치한다 Consistent	x가 모두 0 해가 유일하다 trivial solution
homogenous		해가 무수히 많다 non-trivial solution

해가 없다

2 공간개념

Null space

$$\overset{A}{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}}\overset{x}{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}=\overset{0}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}$$

Null space

Ax = 0을 만족시키는 **해**들을 모아 형성한 공간

0벡터 + 해벡터끼리의 합 + 해벡터의 상수배 → **선형부분공간**

방정식의 해벡터가 $\mathbb{R}^n$ > 그것의 null space는 $\mathbb{R}^n$ 의 선형부분공간

기저

1 선형독립 *independence*

- $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = 0$에서 c가 모두 0인 경우를 제외한 어떠한 c_i의 조합으로도 식이 성립되지 않는 경우

=

$$Ax = 0$$

- 선형방정식을 만족하는 벡터 x가 오직 0벡터뿐인 경우

=

- Null space에 0벡터만 있는 경우

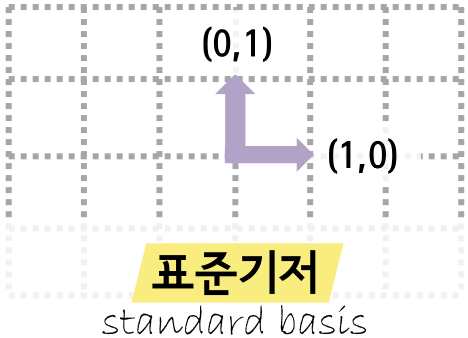
기저

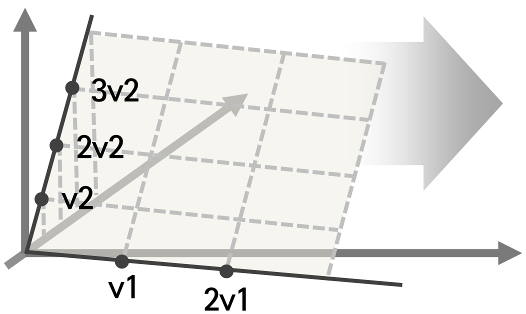
2 기저 Basis

span + 선형독립

어떤 공간을 구성하는 span 벡터의 최소 집합

벡터공간을 **효율적**으로 표현할 수 있는 벡터들(span)





어떤 공간을 span하는 기저는 유일하지 않음

기저

3 Null space의 기저

- **자유변수**를 상수로 하는 선형조합의 벡터

null space의 기저 개수	=	자유변수 개수	=	n - (pivot 개수)

자유변수

$$x = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x2-2x4 \\ x2 \\ x4 \\ x4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

기저

기저

4 Column space의 기저

• RRREF의 pivot이 위치하는 원래 행렬의 열

column space의 기저 개수 = pivot의 개수

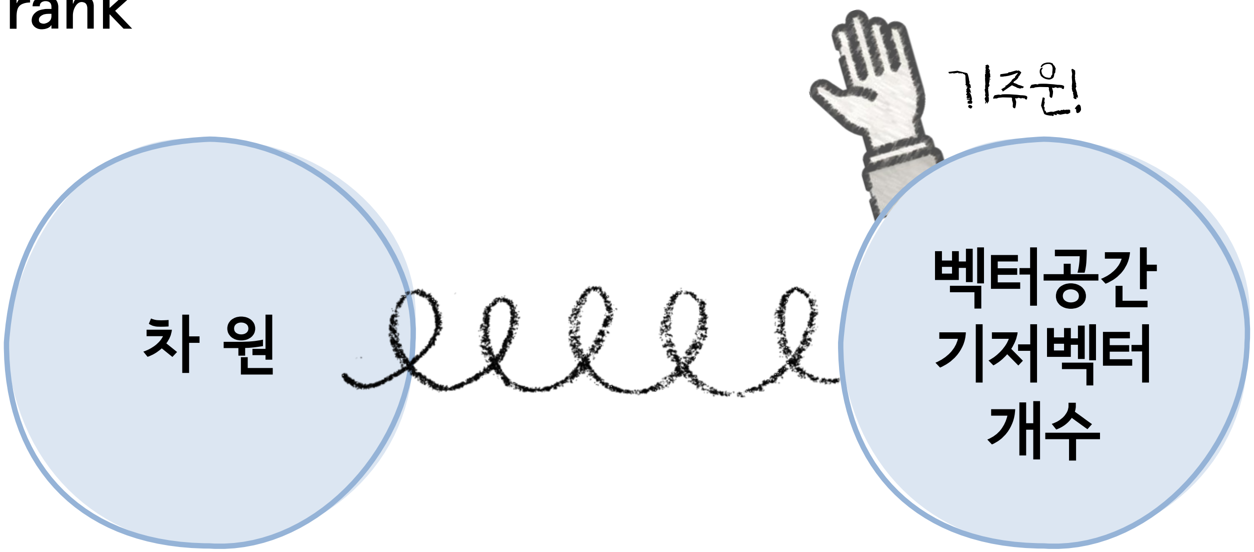
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot

col(A)의 기저

독립

차원과 rank

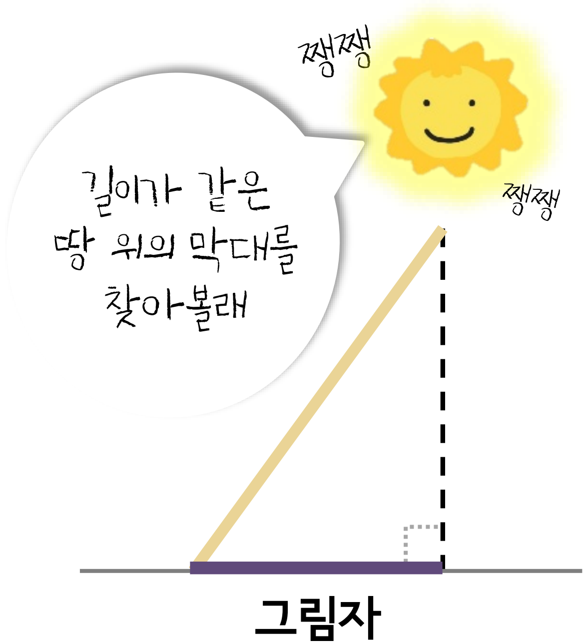


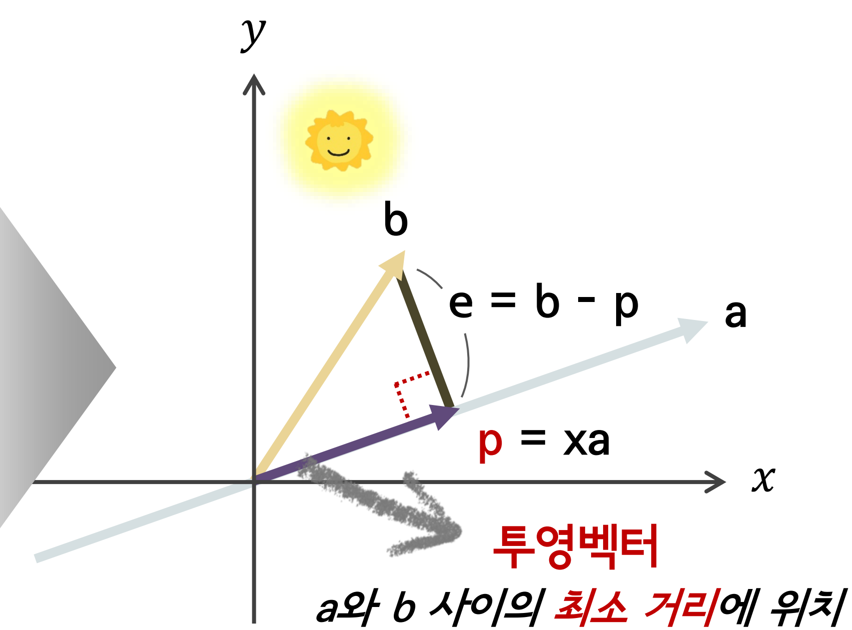
	Null space	Column space
dimension	자유변수 개수 pivot이 없는 열 개수	pivot 개수

rank(A)

투영벡터 (Projection)

벡터 b를 직선 a 위의 벡터로 매핑 = 벡터 b의 직선 공간으로의 **공간압축** = 공간압축 선형변환





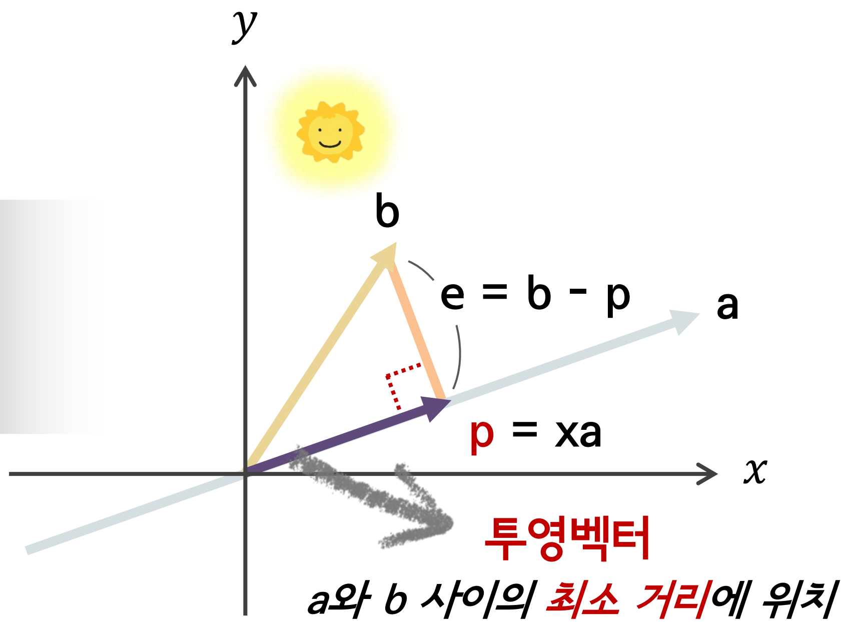
투영벡터 (Projection)

벡터 b를 직선 a 위의 벡터로 매핑 = 벡터 b의 직선 공간으로의 공간압축 = 공간압축 선형변환

벡터 b의 span{a} 상의 정사영

'Projab'

실제값(b)과 예측값(p)의 차이인 e와 벡터 a가 직교함을 이용하여 계산



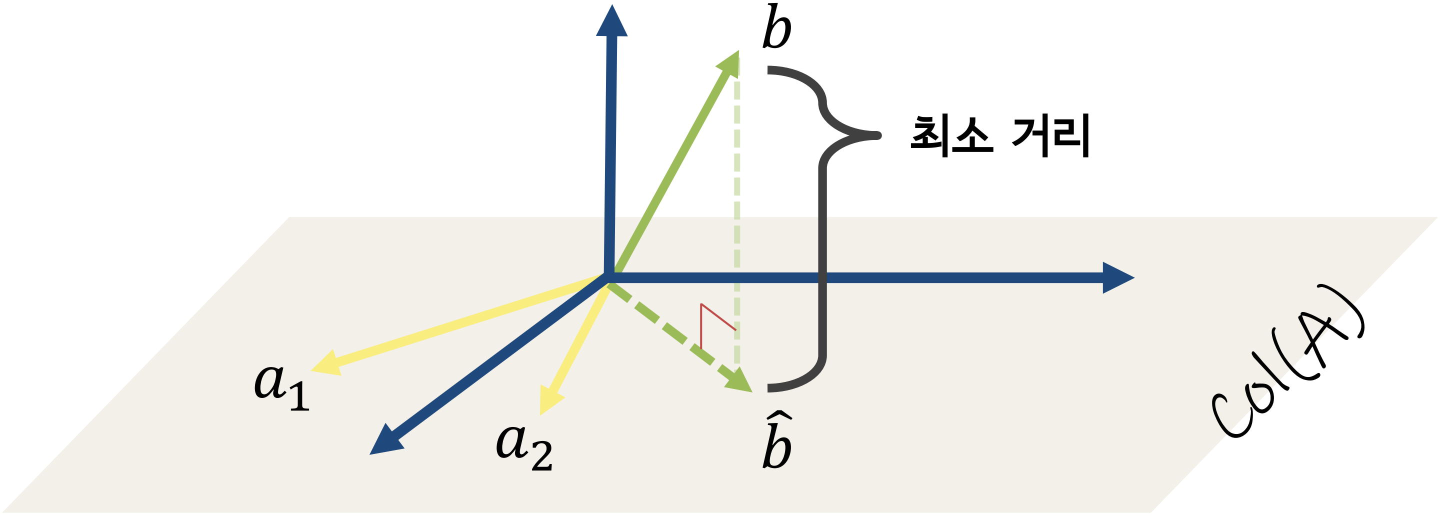
투영벡터와 Least Square Method

최소자승법

Least Square Method

$Ax = b$의 해가 없는 경우 **최소 거리**를 바탕으로

가장 근접한 $A\hat{x} = \hat{b}$ 의 해 $\hat{x}$ 를 구하는 것



투영벡터와 Least Square Method

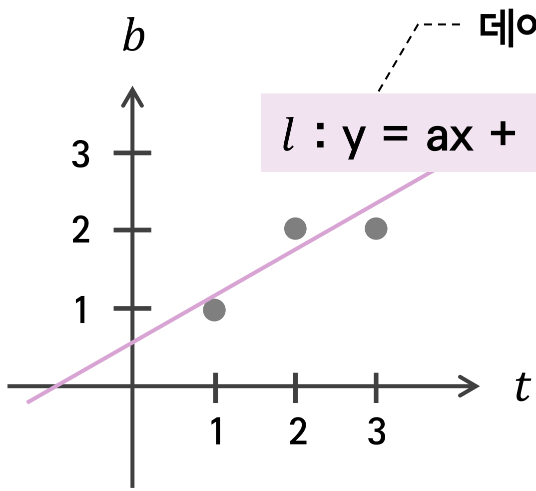
최소자승법

Least Square Method

$Ax = b$의 해가 없는 경우 **최소 거리**를 바탕으로

가장 근접한 $A\hat{x} = \hat{b}$ 의 해 $\hat{x}$ 를 구하는 것

데이터를 최대한 만족하는 하나의 line에 대한 식 탐색



$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \overset{x}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \overset{b}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

데이터

선형회귀분석

1 회귀식 $y = \beta 0 + \beta 1x$ 형태 바꾸기

꼭 기억하라구 ~

회귀분석에서는 Least Square Method를 통해

회귀식 $X\beta = y$ 의 간접해 $\hat{\beta}$를 구함으로써

실제값(y)과 예측값($\hat{y}$, $X\hat{\beta}$)의 거리(residual)를

최소화하는 회귀식을 구하는 것이 목표!

2

$X\beta = \hat{y}$

$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$

Xβ와 y의 최소 거리 고려

가중회귀모델

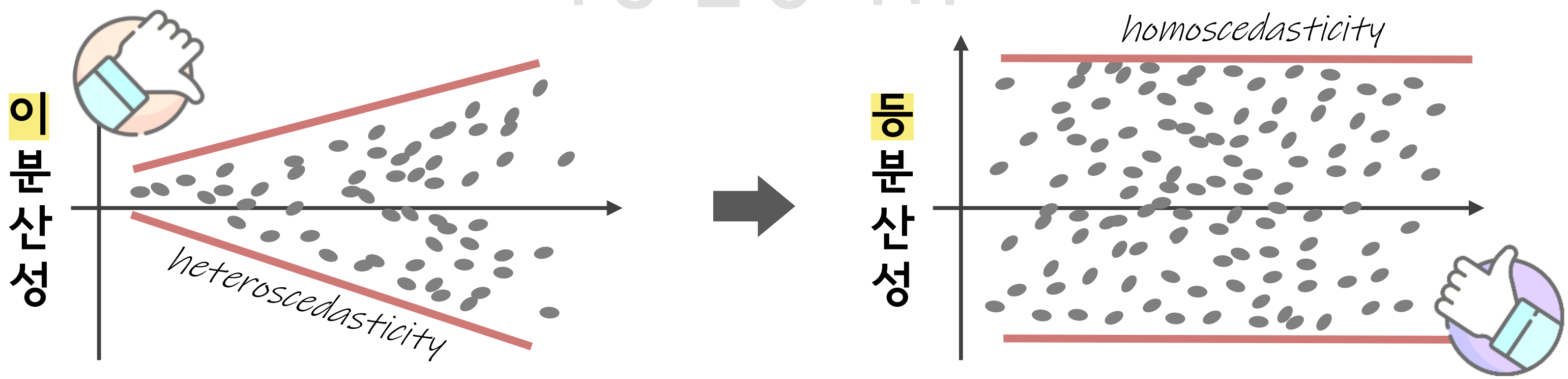
• 단순선형회귀식 •

$$y = X\beta + \varepsilon$$

residual

작은 분산에 가중치를 두어
등분산성을 만족하게끔 처리한 후 회귀분석 진행

가중선형회귀



가중회귀모델

$$\underbrace{\begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & w_n \end{pmatrix}}_{W} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta 0 \\ \beta 1 \end{pmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & w_n \end{pmatrix}}_{W} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{y}$$

양변에 가중치를 곱한 뒤 Least Square Method를 적용해 베타계수 추정

$$\hat{\beta} = ((WX)^T WX)^{-1}(WX)^T Wy$$

기존 선형회귀 모형 + 가중치 행렬 W

가중회귀모델

두 회귀모형의 비교

	단순선형회귀	가중회귀
SSE	$\lVert y-\hat{y}\rVert^2 = \lVert y-X\hat{\beta}\rVert^2$	$\lVert Wy-W\hat{y}\rVert^2 = \lVert Wy-WX\hat{\beta}\rVert^2$
β의 해	$X^TX\hat{\beta} = X^Ty$	$(WX)^TWX\hat{\beta} = (WX)^TWy$

기존 선형회귀 모형 + 가중치 행렬 W