线性代数B1

2021年秋季学期

中国科学技术大学

授课老师: 陈效群　　　　课堂号: MATH1009.03

作业内容: 2021.11.9，2021.11.11　　　　教学周: 第10周

作业题目: P156 31,34,35,37,38,39,40(1) 补充题　　　　作业 7

Exercise 1: P156 31

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 充分性：由$\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{n}}$是$\mathbb{F}^n$的一组基，我们有

$$rank(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{n}})=n$$

由

$$(\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}},\ldots,\beta_{\mathbf{n}})=(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{n}})\mathbf{T}$$

若$\mathbf{T}$为可逆方阵，则$\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}},\ldots,\beta_{\mathbf{n}}$可以由$\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{n}}$初等列变换得到，则

$$rank(\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}},\ldots,\beta_{\mathbf{n}})=rank(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{n}})=n$$

故$\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}},\ldots,\beta_{\mathbf{n}}$也是$\mathbb{F}^n$的一组基，充分性证毕。

必要性：我们要证明若$\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}},\ldots,\beta_{\mathbf{n}}$是$\mathbb{F}^n$的一组基，则$\mathbf{T}$为可逆方阵。我们下面证明该命题的逆否命题，即：若$\mathbf{T}$为不可逆方阵，则$\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}},\ldots,\beta_{\mathbf{n}}$不是$\mathbb{F}^n$的一组基。
若$\mathbf{T}$为不可逆方阵，则

$$rank(\mathbf{T})<n$$

令$\mathbf{T}=(t_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{T}=(\tau_{\mathbf{1}},\ldots,\tau_{\mathbf{n}})$，其中$\tau_{\mathbf{i}}=(t_{1i},t_{2i},\ldots,t_{ni})^T$，我们有

$$\beta_{\mathbf{j}}=t_{1j}\alpha_{\mathbf{1}}+t_{2j}\alpha_{\mathbf{2}}+\cdots+t_{nj}\alpha_{\mathbf{n}}$$

由$rank(\mathbf{T})<n$, 我们有$\tau_{\mathbf{1}},\ldots,\tau_{\mathbf{n}}$线性相关，不妨设$\tau_{\mathbf{n}}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_i\tau_{\mathbf{i}}$，则

$$\beta_{\mathbf{n}}=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\beta_{\mathbf{i}}$$

故$\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}},\ldots,\beta_{\mathbf{n}}$线性相关，不是$\mathbb{F}^n$的一组基，必要性证毕。 ■

方法二：$det(\beta)=det(\alpha)det(\mathbf{T})$ （来自同学） ■

Exercise 2: P156 34 35

Solution: $\Longrightarrow$

34. (-76,41,-16)

35.

1. 令$\alpha_{\mathbf{3}}=(1,0,0,0),\alpha_{\mathbf{4}}=(0,1,0,0)$，则

$$(\alpha_{\mathbf{3}},\alpha_{\mathbf{4}},\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\3&2&-1&4\\2&3&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&4\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\Longrightarrow r=4$$

故$\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}}$的一组扩充基为$(3,2,-1,4),(2,3,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)$

2. 设标准基为$\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}$，则

$$(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{3}},\alpha_{\mathbf{4}})=(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4})\begin{pmatrix}3&2&1&0\\2&3&0&1\\-1&0&0&0\\4&-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4})=(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{3}},\alpha_{\mathbf{4}})\begin{pmatrix}3&2&1&0\\2&3&0&1\\-1&0&0&0\\4&-1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{3}},\alpha_{\mathbf{4}})\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&-4&-1\\1&0&11&2\\0&1&14&3\end{pmatrix}$$

3.

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&-4&-1\\1&0&11&2\\0&1&14&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-14\\41\\53\end{pmatrix}$$

即$\beta=(1,3,4,-2)$在该组基下的坐标为$(-4,-14,41,53)$。

■

Exercise 3: P156 37

Solution: $\Longrightarrow$

方法一. 由系数矩阵$\mathbf{A}$的秩为$n-1$，我们得到解集的维数

$$dimV = n - rank(\mathbf{A}) = 1$$

设$\mathbf{A}_{(n-1)\times n} = (a_{ij})_{(n-1)\times n}$，我们将$\mathbf{A}$的第一行加入到第$n$行中将矩阵扩充为$\mathbf{B}_{n\times n}$, 则

$$rank(\mathbf{B}) = n-1,\ det(\mathbf{B}) = 0$$

由$P116, 39$我们有，$rank(\mathbf{B}) = n-1$时，$rank(\mathbf{B}^*) = 1$
设$\mathbf{B}$第i行的代数余子式为$\mathbf{B_{i1}}, \ldots, \mathbf{B_{in}}$，则存在$\alpha = (\mathbf{B_{i1}}, \ldots, \mathbf{B_{in}})^T \neq \mathbf{0}$，使得

$$a_{k1}\mathbf{B_{i1}} + \cdots + a_{kn}\mathbf{B_{in}} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

故$\alpha = (\mathbf{B_{i1}}, \ldots, \mathbf{B_{in}})^T$是齐次方程组的一个非零解，故该齐次方程组的基础解系是$\alpha = (\mathbf{B_{i1}}, \ldots, \mathbf{B_{in}})^T$。

方法二. （来自同学）我们先证明一个引理并得到两个推论。

Lemma 1. 设$\mathbf{A}$为n阶实矩阵，则$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$和$\mathbf{A^T Ax} = \mathbf{0}$为同解方程组

证明. 若$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$，我们有$\mathbf{A^T Ax} = \mathbf{A^T}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{0}$，即$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的解也是$\mathbf{A^T Ax} = \mathbf{0}$的解。
若$\mathbf{A^T Ax} = \mathbf{0}$，我们有$\mathbf{x^T A^T Ax} = (\mathbf{Ax})^\mathbf{T}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{0}$，故$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$，即$\mathbf{A^T Ax} = \mathbf{0}$的解也是$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$的解。即$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$和$\mathbf{A^T Ax} = \mathbf{0}$为同解方程组。 ■

我们可以得到如下的推论。

Corollary 1. 由$dimV = n - rank\mathbf{A} = n - rank(\mathbf{A^T A})$，我们有$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A^T A})$

Corollary 2. 设$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$，齐次方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$有非零解的充要条件是

$$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A^T A}) < n$$

由系数矩阵$\mathbf{A}$的秩为$n-1$，我们得到解集的维数

$$dimV = n - rank(\mathbf{A}) = 1$$

我们令$\mathbf{B}=\mathbf{A^T}\mathbf{A}$，则

$$rank(\mathbf{B})=rank(\mathbf{A})=n-1,\ det(\mathbf{B})=0$$

由$P116,39$我们有，$rank(\mathbf{B})=n-1$时，$rank(\mathbf{B}^*)=1$
设$\mathbf{B}$第i行的代数余子式为$\mathbf{B_{i1}},\ldots,\mathbf{B_{in}}$，则存在$\beta=(\mathbf{B_{i1}},\ldots,\mathbf{B_{in}})^T\neq\mathbf{0}$，使得

$$b_{k1}\mathbf{B_{i1}}+\cdots+b_{kn}\mathbf{B_{in}}=0,\ k=1,2,\ldots,n$$

故$\beta=(\mathbf{B_{i1}},\ldots,\mathbf{B_{in}})^T$是齐次方程组$\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$的一个非零解。
又$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$和$\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$为同解方程组，故$\beta=(\mathbf{B_{i1}},\ldots,\mathbf{B_{in}})^T$是齐次方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的一个非零解，故齐次方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系是$\beta=(\mathbf{B_{i1}},\ldots,\mathbf{B_{in}})^T$。 ■

Exercise 4: P156 38

Solution: $\Longrightarrow$

充要条件是

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=1$$

设齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$的解的全体为

$$V:=\{\mathbf{x}\in F^n|\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

设非齐次线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$的解的全体为

$$W:=\{\mathbf{x}\in F^n|\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\}$$

则

$$W=\gamma_0+V:=\{\gamma_0+\beta|\beta\in V\}$$

其中γ_0是$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$的一个特解。
我们令

$$\alpha_i=\gamma_0+\beta_i,\ \beta_i\in V$$

充分性：若$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=1$，则

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s=\lambda_1(\gamma_0+\beta_1)+\cdots+\lambda_s(\gamma_0+\beta_s)=\gamma_0+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\beta_i$$

则

$$\mathbf{A}(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s)=\mathbf{A}\gamma_0+\mathbf{A}\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\beta_i=\mathbf{A}\gamma_0=\mathbf{b}$$

必要性：若

$$\mathbf{A}(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s)=\mathbf{b}$$

则

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{A}\gamma_0+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{A}\beta_i=\mathbf{b}$$

即

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{b}=\mathbf{b}$$

又$\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$，故$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=1$。 ■

Exercise 5: P156 39

Solution: $\Longrightarrow$

三个平面$a_ix+b_iy+c_iz=d_i,\ i=1,2,3$相交于一条直线等价于方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

的解集的维数为1。
我们令

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

由定理5.5.1，我们有，上述方程组有解的充要条件是

$$rank(\mathbf{A})=rank(\mathbf{A},\mathbf{b})$$

又方程组的解集的维数为1 $\Longleftrightarrow dimV=3-rank(\mathbf{A})=1$ 故

$$rank(\mathbf{A})=2$$

即上述方程组解集为1的充要条件是

$$rank(\mathbf{A})=rank(\mathbf{A},\mathbf{b})=2$$

$\blacksquare$

Exercise 6: P156 40(1)

Solution: $\Longrightarrow$

我们用矩阵形式的高斯消元法来求解方程组，有

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们由化简后的系数矩阵可以得到方程组的两个线性无关的解

$$\alpha_1 = (-5, 3, 14, 0)^T, \alpha_2 = (1, -1, 0, 2)^T$$

又系数矩阵的秩为2，故

$$dim V = n - rank = 2$$

故基础解系为

$$\alpha_1 = (-5, 3, 14, 0)^T, \alpha_2 = (1, -1, 0, 2)^T$$

方程组的通解为

$$\mathbf{x} = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2,\ t_1, t_2 \in F$$

■

Exercise 7: 补充题

Solution: $\Longrightarrow$

我们用矩阵形式的高斯消元法来求解方程组，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -1 & 5 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 2 & 11 \\ -9 & -4 & -1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -7 & 14 & 18 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们由化简后的增广矩阵可以得到非齐次方程组的一个特解

$$\gamma_0 = (-1, -2, 0, 0)^T$$

我们由化简后的系数矩阵可以得到齐次方程组的两个线性无关的解

$$\alpha_1 = (-5, 3, 14, 0)^T, \alpha_2 = (-8, 18, 0, 7)^T$$

又系数矩阵的秩为2，故

$$dimV = n - rank = 2$$

故基础解系为

$$\alpha_1 = (-1, 2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-8, 18, 0, 7)^T$$

方程组的通解为

$$\mathbf{x} = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \gamma_0,\ t_1, t_2 \in F$$

■

[1] The template is from Prof. Jie Wang, USTC