线性代数B1

2021年秋季学期

中国科学技术大学

授课老师: 陈效群 教学周: 第十六周

笔记整理: 黄家辉 笔记 7

Exercise 1: 矩阵的相似与相抵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$ 试问$\mathbf{A},\mathbf{B}$是否相似?

Lemma 1. 若矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{B}$相似，则$\mathbf{A}^k$与$\mathbf{B}^k$也相似，且对任意多项式$f(x)$，我们有$f(\mathbf{A})$与$f(\mathbf{B})$相似，特别地，$f(\mathbf{A})=\mathbf{O}\Longleftrightarrow f(\mathbf{B})=\mathbf{O}$ （课本*P191*，*T11.2*）

Corollary 1. 若矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{B}$相抵，即$rank(\mathbf{A})=rank(\mathbf{B})$，若存在多项式$f(x)$，使得$rank(f(\mathbf{A}))\neq rank(f(\mathbf{B}))$，则相抵方阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$不相似。

Solution: $\Longrightarrow$

利用上述推论2，我们取$f(x)=(x-1)^2$，我们有

$$rank(f(\mathbf{A}))=1, rank(f(\mathbf{B}))=0, rank(f(\mathbf{A}))\neq rank(f(\mathbf{B}))$$

即$\mathbf{A},\mathbf{B}$不相似。 ■

Exercise 2: 秩为1的n阶矩阵的相似矩阵

已知方阵$\mathbf{A}$满足$rank(\mathbf{A})=1$，求证：$\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$时，$\mathbf{A}$相似于$diag(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},0\ldots,0)$；$\mathbf{A}^2\neq\mathbf{O}$时，$\mathbf{A}$相似于$diag(a,0\ldots,0)$。

Solution: $\Longrightarrow$

由$rank(\mathbf{A})=1$，我们有$\exists$可逆方阵$\mathbf{P_1},\mathbf{Q_1}$，使得$\mathbf{A}$相抵于

$$\mathbf{D_1}=\mathbf{P_1AQ_1}=diag(1,0,\ldots,0)$$

故矩阵$\mathbf{A}$相似于

$$\mathbf{A_1}=\mathbf{P_1AP_1^{-1}}=\mathbf{D_1}(\mathbf{Q_1^{-1}P_1^{-1}})=\begin{pmatrix}a & \beta\\ \vec{0} & \mathbf{O}\end{pmatrix}$$

其中(a,β)是$\mathbf{Q_1^{-1}P_1^{-1}}$的第一行，$\beta$是$n-1$维行向量。

1. $a\neq 0$时，$\mathbf{A_1^2}\neq\mathbf{O}$，$\mathbf{A^2}\neq\mathbf{O}$
   我们取
   $$\mathbf{P_2}=\begin{pmatrix}1 & -a^{-1}\beta\\ \vec{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\Longrightarrow\mathbf{P_2^{-1}}=\begin{pmatrix}1 & a^{-1}\beta\\ \vec{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}$$
   则
   $$\mathbf{D}=\mathbf{A_1P_2}=\begin{pmatrix}a & \beta\\ \vec{0} & \mathbf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a^{-1}\beta\\ \vec{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & \vec{0}\\ \vec{0} & \mathbf{O}\end{pmatrix}$$
   又
   $$\mathbf{D}=\mathbf{P_2^{-1}D}=\mathbf{P_2^{-1}A_1P_2}$$
   故$\mathbf{D}$与$\mathbf{A_1}$相似，又$\mathbf{A}$相似于$\mathbf{A_1}$，故$\mathbf{D}$与$\mathbf{A}$相似。

2. a $=0$时，我们有$\mathbf{A_1^2}=\mathbf{A^2}=\mathbf{O}$，且由$\mathbf{A_1}\neq\mathbf{O}$，我们有$\beta\neq\vec{0}$，故$\exists$ $n-1$ 阶可逆方阵$\mathbf{Q_2}$使得$\beta\mathbf{Q_2}=(1,0,\ldots,0)$，我们取$\mathbf{P_3}=diag(1,\mathbf{Q_2})$，则
   $$\mathbf{C}=\mathbf{A_1P_3}=\begin{pmatrix}0 & \beta\mathbf{Q_2}\\ \vec{0} & \mathbf{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & (1,0,\ldots,0)\\ \vec{0} & \mathbf{O}\end{pmatrix}=diag(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},0,\ldots,0)$$
   又
   $$\mathbf{C}=\mathbf{P_3^{-1}C}=\mathbf{P_3^{-1}A_1P_3}$$
   故$\mathbf{C}$与$\mathbf{A_1}$相似，又$\mathbf{A}$相似于$\mathbf{A_1}$，故$\mathbf{C}$与$\mathbf{A}$相似。

■

Exercise 3: 伴随矩阵的特征值的计算

若$\mathbf{A}$不可逆，当$r(\mathbf{A}) < n-1$时，$\mathbf{A}^*$的特征值是0；当$r(\mathbf{A}) = n-1$时，$\mathbf{A}^*$有$n-1$个重特征值0以及一个单特征值$A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 1. $r(\mathbf{A}) < n-1$时，$\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$，特征值全为0。

2. $r(\mathbf{A}) = n-1$时，$r(\mathbf{A}^*) = 1$，故$\mathbf{A}^*$的行向量对应成比例，不妨设

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ a_2A_{11} & a_2A_{21} & \cdots & a_2A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nA_{11} & a_nA_{21} & \cdots & a_nA_{n1} \end{pmatrix}$$

其中$(A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{n1}) \neq \mathbf{0}$，我们有

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^*| = \begin{vmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{21} & \cdots & -A_{n1} \\ -a_2A_{11} & \lambda - a_2A_{21} & \cdots & -a_2A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_nA_{11} & -a_nA_{21} & \cdots & \lambda - a_nA_{n1} \end{vmatrix}$$

对行列式进行行列变换后我们有

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^*| = \begin{vmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{21} & \cdots & -A_{n1} \\ -a_2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n\lambda & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

故

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^*| = \begin{vmatrix} \lambda - A_{11} - a_2A_{21} - \cdots - a_nA_{n1} & -A_{21} & \cdots & -A_{n1} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^*| = (\lambda - A_{11} - a_2A_{21} - \cdots - a_nA_{n1})\lambda^{n-1} = (\lambda - A_{11} - A_{22} - \cdots - A_{nn})\lambda^{n-1}$

此时$\mathbf{A}^*$有$n-1$个重特征值0以及一个单特征值$A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$

■

■

Exercise 4: AB = BA

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$均为n阶方阵，$\mathbf{A}$有n个互异的特征值，且$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，证明：

1. $\mathbf{B}$相似于对角阵
2. 存在唯一的次数不超过$n-1$的多项式$f(x)$，使得$\mathbf{B}=f(\mathbf{A})$

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 1. 见课本P192 T22

2. 我们只需证明存在$\mathbf{a}=(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$，使得

$$\mathbf{B}=f(\mathbf{A})=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{A}+\cdots+a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$$

即可，下面我们利用Vandermonde行列式进行证明。
由(1)我们有，存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\mathbf{P},\ \mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}\mathbf{P}$$

其中$\lambda_i\neq\lambda_j,i\neq j$

$$\mathbf{B}=f(\mathbf{A})\Longleftrightarrow\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}\mathbf{P}$$

其中$f(\lambda_i)=a_0+a_1\lambda_i+\cdots+a_{n-1}\lambda_i^{n-1},\ i=1,2,\dots,n$
上式等价于下列方程组(1)有解

$$\begin{cases}a_0+a_1\lambda_1+\cdots+a_{n-1}\lambda_1^{n-1}=\mu_1\\ a_0+a_1\lambda_2+\cdots+a_{n-1}\lambda_2^{n-1}=\mu_2\\ \vdots\\ a_0+a_1\lambda_n+\cdots+a_{n-1}\lambda_n^{n-1}=\mu_n\end{cases}\tag{1}$$

即

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n\end{pmatrix}$$

有非零解，令

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

则

$$|P| = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

故方程组(1)有解，且解唯一。

■

Corollary 2. $\mathbf{A},\mathbf{B}$均为n阶方阵，$\mathbf{A}$有n个互异的特征值，且$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$时，$\mathbf{B}$所在的线性空间V是n维的

■

Exercise 5: 特征值以及特征向量的求解1

已知$\mathbf{A}$是三阶矩阵，$\mathbf{A}=\mathbf{I}+\alpha\beta^{\mathbf{T}}$，其中$\alpha,\beta$是三维列向量，且$\alpha^T\beta=a\neq 0$，求$\mathbf{A}$的特征值和特征向量

Solution: $\Longrightarrow$

设$\mathbf{B}=\alpha\beta^T$，则$\mathbf{A}=\mathbf{I}+\mathbf{B}$，设$\lambda$是$\mathbf{B}$的一个特征值，$\mathbf{x}$是对应的特征向量，则

$$\mathbf{Ax}=(\mathbf{I}+\mathbf{B})\mathbf{x}=(\lambda+1)\mathbf{x}$$

令

$$\mathbf{B}=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1\ b_2\ b_3)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$$

又$\mathbf{B}^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=a\mathbf{B}$，故

$$\mathbf{B^2x}=\lambda^2\mathbf{x}=a\mathbf{Bx}=a\lambda\mathbf{x}\Longrightarrow\lambda=0\ or\ a$$

1. $\lambda=0$时，由$r(\mathbf{B})=1$，我们有
$$(0\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$$
的基础解系的维度$dimV=3-1=2$,不妨设$a_1b_1\neq 0$，则
$$\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$
可以化简为
$$\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$
故$\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$的基础解系是$k_1\mathbf{x_1}+k_2\mathbf{x_2}$，其中$k_1,k_2\in F$，$\mathbf{x_1}=(-b_2,b_1,0)^T$，$\mathbf{x_2}=(-b_3,0,b_1)^T$，也即$\lambda=0$时的特征向量为$(-b_2,b_1,0)^T$，$(-b_3,0,b_1)^T$

2. $\lambda=a$时，令$\mathbf{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由$\mathbf{B^2}=a\mathbf{B}$，我们有

$$\mathbf{B}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=a(\beta_1,\beta_2,\beta_3),\ \mathbf{B}\beta_j=a\beta_j,\ j=1,2,3$$

同样地，不妨假设$a_1b_1 \neq 0$，也即$a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0$，则我们可以选取

$$\frac{1}{b_1}\beta_1 = (a_1, a_2, a_3)^T$$

作为$\lambda = a$时的特征向量。

综上，$\mathbf{A}$的特征值为1(二重)，a+1；对应的特征向量分别为$(-b_2, b_1, 0)^T,\ (-b_3, 0, b_1)^T$，$(a_1, a_2, a_3)^T$

■

Exercise 6: 特征值以及特征向量的求解2

设$\mathbf{B}=\alpha\alpha^T$，$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T\neq\mathbf{0}$

1. 证明：$\mathbf{B}^k=t\mathbf{B}$，其中k为正整数，t为常数，求t
2. 求可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P^{-1}BP}$为对角阵，并写出此对角阵

Solution: $\Longrightarrow$

1. 证明. 由$\mathbf{B}=\alpha\alpha^T$，我们有

$$\mathbf{B}^k=(\alpha^T\alpha)^{k-1}\mathbf{B}=(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{k-1}=t\mathbf{B}$$

故$t=(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{k-1}$ ■

2. 设$\mathbf{B}$的特征值为λ，对应的特征向量为$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$，则$\mathbf{Bx}=\lambda\mathbf{x}$，下面我们用三种方法求解特征值以及对应的特征向量

Corollary 3. $\mathbf{A}\in F^{n\times m}$, $\mathbf{B}\in F^{m\times n}$，我们有$\lambda^m|\lambda\mathbf{I_n}-\mathbf{AB}|=\lambda^n|\lambda\mathbf{I_m}-\mathbf{BA}|$

(a) 由$\mathbf{B}^k=t\mathbf{B}$，我们有

$$(\mathbf{B}^k-t\mathbf{B})\mathbf{x}=(\lambda^k-t\lambda)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

故$(\lambda^{k-1}-t)\lambda=0$，$\lambda=0,\sum_{i=1}^n a_i^2$

又

$$tr(\mathbf{B})=tr(\alpha\alpha^T)=tr(\alpha^T\alpha)=\sum_{i=1}^n a_i^2$$

且

$$tr(\mathbf{B})=\sum_{i=1}^n \lambda_i$$

故$\lambda=0$为$n-1$重特征值，$\lambda=\sum_{i=1}^n a_i^2$为一重特征值。

(b) $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}|=|\lambda\mathbf{I}-\alpha\alpha^T|=\lambda^{n-1}|\lambda\mathbf{I_1}-\alpha^T\alpha|=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^n a_i^2)$

(c)

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix}$$

在进行适当的行列变换后(同T3)，我们有$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}|=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)$

- 同T5，$\lambda=0$时，我们有$(0\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$，故$\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$
  由$rank(\mathbf{B})=1$，我们有$dimV=n-1$，故$\lambda=0$的特征向量可以取

  $$\mathbf{x_1}=(-a_2,a_1,0,\ldots,0)^T,\mathbf{x_2}=(-a_3,0,a_1,0,\ldots,0)^T,\ldots,\mathbf{x_{n-1}}=(-a_n,0,\ldots,a_1)^T$$

- 同T5，$\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$时，我们有$((\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$，一组解为$\mathbf{x_n}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T$

综上，可逆矩阵$\mathbf{P}$可以取

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n & a_1\\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_2\\ 0 & a_1 & \cdots & 0 & a_3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_n\end{pmatrix}$$

且

$$\mathbf{P^{-1}BP}=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\end{pmatrix}$$

■

Exercise 7: 欧氏空间与标准正交基

对欧氏空间中任意一组向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，定义$Gram$方阵$G = (g_{ij})_{m\times m}$，其中$g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, $\forall 1 \leq i, j \leq m$

1. 求证：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关$\Longleftrightarrow det(\mathbf{G}) \neq 0$
2. 将$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$在欧氏空间的一组标准正交基下分别写成坐标$\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_m} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$，求证：$|\mathbf{G}| = |\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_m}|^2$

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 1. 原命题等价于$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关$\Longleftrightarrow det(\mathbf{G}) = 0$

- "$\Longrightarrow$" 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，则存在不全为0的实数$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，使得

$$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

  则我们有

$$(\alpha_i, \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_m\alpha_m) = (\alpha_i, \alpha_1)\lambda_1 + \cdots + (\alpha_i, \alpha_n)\lambda_n = (\alpha_i, \mathbf{0}) = 0$$

  即

$$g_{i1}\lambda_1 + \cdots + g_{im}\lambda_m = 0$$

  对$1 \leq i \leq m$成立，也即方程

$$\begin{cases} g_{11}x_1 + \cdots + g_{1m}x_m = 0 \\ g_{21}x_1 + \cdots + g_{2m}x_m = 0 \\ \vdots \\ g_{m1}x_1 + \cdots + g_{mm}x_m = 0 \end{cases} \tag{2}$$

  有非零解$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$，故$|\mathbf{G}| = 0$

- "$\Longleftarrow$" 设$|\mathbf{G}| = 0$，则$\mathbf{Gx} = \mathbf{0}$有非零解$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T$，则我们有$\mathbf{x^T Gx} = \mathbf{0}$，即

$$\mathbf{x^T Gx} = \sum_{i,j=1}^{m} x_i(\alpha_i, \alpha_j)x_j = (\sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{m} x_j\alpha_j) = 0$$

  故

$$\sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i = x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$

  对不全为0的$x_1, \ldots, x_m$成立

2. 由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$在欧氏空间的一组标准正交基下的坐标为$\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_m}$，我们有

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \mathbf{x_i}^T \mathbf{x_j}$$

故

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1}^T \mathbf{x_1} & \cdots & \mathbf{x_1}^T \mathbf{x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x_n}^T \mathbf{x_1} & \cdots & \mathbf{x_n}^T \mathbf{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{x_n}^T \end{pmatrix} (\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}) = \mathbf{X^T X}$$

故$|\mathbf{G}| = |\mathbf{X}|^2$

∎

∎

[1] The template is from Prof. Jie Wang, USTC