线性代数B1

2021年秋季学期

中国科学技术大学

授课老师: 陈效群 课堂号: MATH1009.03

作业内容: 2021.11.2，2021.11.4 教学周: 第9周

作业题目: P154 9(2),10(2)(4); P155 12,15,16,17,19(1)(3),20(1); P156 23,24 作业 6

Exercise 1: P155 12

Solution: $\Longrightarrow$

1. 不正确，例如，$\alpha_\mathbf{1} = (1,0), \alpha_\mathbf{2} = (-1,0), \alpha_\mathbf{3} = (0,1)$，则$\alpha_\mathbf{1} + \alpha_\mathbf{2} + 0\alpha_\mathbf{3} = \mathbf{0}$，$\alpha_\mathbf{1}, \alpha_\mathbf{2}, \alpha_\mathbf{3}$线性相关，但$\alpha_\mathbf{3}$不能表示为$\alpha_\mathbf{1}, \alpha_\mathbf{2}$的线性组合。

2. 不正确，例如，向量组为$(\alpha_\mathbf{1}, \alpha_\mathbf{2})$，其中$\alpha_\mathbf{1} = (1,0), \alpha_\mathbf{2} = (-1,0)$，则$\alpha_\mathbf{1} \neq \mathbf{0}, \alpha_\mathbf{2} \neq \mathbf{0}$，$\alpha_\mathbf{1}, \alpha_\mathbf{2}$线性无关，但$\alpha_\mathbf{1} + \alpha_\mathbf{2} = \mathbf{0}$，该向量组线性相关。

3. 正确，我们用反证法来证明。
   假设原向量组为$(\alpha_\mathbf{1}, \alpha_\mathbf{2}, \ldots, \alpha_\mathbf{t})$, 假设存在子向量组$(\alpha_\mathbf{1}, \alpha_\mathbf{2}, \ldots, \alpha_\mathbf{s}), s < t$线性相关，则存在不全为0的$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，使得$\lambda_1\alpha_\mathbf{1} + \lambda_2\alpha_\mathbf{2} + \cdots + \lambda_s\alpha_\mathbf{s} = \mathbf{0}$
   即存在不全为0的$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，使得$\lambda_1\alpha_\mathbf{1} + \lambda_2\alpha_\mathbf{2} + \cdots + \lambda_s\alpha_\mathbf{s} + 0\alpha_\mathbf{s+1} + \cdots + 0\alpha_\mathbf{t} = \mathbf{0}$，即原向量组线性相关，矛盾。故它的任何子向量都线性无关。

4. 正确，n+1个n维列向量组成的矩阵A的秩$r(A) \leq n < n+1$，故这n+1个向量线性相关。

5. 不正确，例如，$\alpha_\mathbf{1} = (1,0), \alpha_\mathbf{2} = (0,1)$，则$\alpha_\mathbf{1}, \alpha_\mathbf{2}$线性无关。但$\alpha_\mathbf{1} + \alpha_\mathbf{2} = (1,1) = \alpha_\mathbf{2} + \alpha_\mathbf{1}$，即$\alpha_\mathbf{1} + \alpha_\mathbf{2}, \alpha_\mathbf{2} + \alpha_\mathbf{1}$线性相关。

6. 正确，由$(\alpha_\mathbf{1}, \alpha_\mathbf{2}, \ldots, \alpha_\mathbf{s})$线性相关，我们有:其中的一个向量$\alpha_\mathbf{j}$可以由其他$s-1$个向量线性表示。不失一般性地，我们假设$\alpha_\mathbf{1} = \lambda_2\alpha_\mathbf{2} + \cdots + \lambda_s\alpha_\mathbf{s}$
   要证$\alpha_\mathbf{1} + \alpha_\mathbf{2}, \alpha_\mathbf{2} + \alpha_\mathbf{3}, \ldots, \alpha_\mathbf{s} + \alpha_\mathbf{1}$线性相关，我们只需要证明
   $$\mu_1(\alpha_\mathbf{1} + \alpha_\mathbf{2}) + \mu_2(\alpha_\mathbf{2} + \alpha_\mathbf{3}) + \mu_s(\alpha_\mathbf{s} + \alpha_\mathbf{1}) = 0$$
   即
   $$(\mu_1 + \mu_s)\alpha_\mathbf{1} + (\mu_1 + \mu_2)\alpha_\mathbf{2} + \cdots + (\mu_{s-1} + \mu_s)\alpha_\mathbf{s} = 0$$
   有非零解$(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$

我们将$\alpha_{\mathbf{1}}=\lambda_2\alpha_{\mathbf{2}}+\cdots+\lambda_s\alpha_{\mathbf{s}}$带入上式中，得到

$$((\mu_1+\mu_s)\lambda_2+\mu_1+\mu_2)\alpha_{\mathbf{2}}+\cdots+((\mu_1+\mu_s)\lambda_s+\mu_{s-1}+\mu_s)\alpha_{\mathbf{s}}=0$$

我们将$\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{s}}$的系数置零，得到关于$(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s)$的方程组

$$\begin{cases}(\lambda_2+1)\mu_1+\mu_2+\cdots+\lambda_2\mu_s=0\\ \cdots\\ \lambda_s\mu_1+\cdots+\mu_{s-1}+(\lambda_s+1)\mu_s=0\end{cases}$$

又这是一个关于s个未知数的s-1个方程组成的方程组，故方程有非零解$(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s)$，故$\alpha_{\mathbf{1}}+\alpha_{\mathbf{2}},\alpha_{\mathbf{2}}+\alpha_{\mathbf{3}},\ldots,\alpha_{\mathbf{s}}+\alpha_{\mathbf{1}}$线性相关。

其实第五题和第六题可以归结为：在原向量组线性相关(无关)时，经过一个线性变换之后得到的向量组是否仍然线性相关(无关)。直观地来说，经过线性变换之后，向量组的秩只可能保持不变或减小，取决于转移矩阵$\mathbf{T}$是否满秩。因此原向量组线性相关时，变换后的向量组一定线性相关；原向量组线性无关，$\mathbf{T}$满秩，则变换后的向量组线性无关；$\mathbf{T}$为奇异矩阵时，变换后的向量组一定线性相关。
因此对于第五题，我们只需要计算转移矩阵的行列式，判断其是否为0即可，下面我们来进行计算。
我们有

$$\begin{pmatrix}\alpha_{\mathbf{1}}+\alpha_{\mathbf{2}}\\ \alpha_{\mathbf{2}}+\alpha_{\mathbf{3}}\\ \vdots\\ \alpha_{\mathbf{s}}+\alpha_{\mathbf{1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\cdots&0&0\\ 0&1&1\cdots&0&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&1&1\\ 1&0&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{\mathbf{1}}\\ \alpha_{\mathbf{2}}\\ \vdots\\ \alpha_{\mathbf{s}}\end{pmatrix}$$

即

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1&1&0\cdots&0&0\\ 0&1&1\cdots&0&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&1&1\\ 1&0&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}$$

我们有

$$|\mathbf{T}|=1+(-1)^{n-1}$$

即n为奇数时$\mathbf{T}$为非奇异矩阵，线性变换后的向量组不发生退化，原向量组线性无关时变换后的向量组仍线性无关；n为偶数时$\mathbf{T}$为奇异矩阵，线性变换后的向量组发生退化，原向量组线性无关时变换后的向量组线性相关。

7. 正确，设$\alpha_{\mathbf{i}} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$，设加长向量组为$\beta_{\mathbf{1}}, \beta_{\mathbf{2}}, \dots, \beta_{\mathbf{s}}$，其中

$$\beta_{\mathbf{i}} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, \dots, a_{im}),\ m > n$$

   若加长向量组线性相关，则存在不全为0的$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$，使得$\lambda_1\beta_{\mathbf{1}} + \lambda_2\beta_{\mathbf{2}} + \cdots + \lambda_s\beta_{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$
   则$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$也是方程$\lambda_1\alpha_{\mathbf{1}} + \lambda_2\alpha_{\mathbf{2}} + \cdots + \lambda_s\alpha_{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$的解，即$(\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \dots, \alpha_{\mathbf{s}})$线性相关，与题设矛盾，故加长向量组线性无关。

8. 不正确，例如，$\alpha_{\mathbf{1}} = (1, 0), \alpha_{\mathbf{2}} = (-1, 0), \beta_{\mathbf{1}} = (1, 0, 1), \beta_{\mathbf{2}} = (-1, 0, 0)$。令$\lambda_1\beta_{\mathbf{1}} + \lambda_2\beta_{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$，则$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，$\beta_{\mathbf{1}}, \beta_{\mathbf{2}}$线性无关，说法错误。

■

Exercise 2: P155 15

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 该命题的逆否命题可以表述为：对于非零向量组$\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{s}}$，若存在$\alpha_{\mathbf{i}}(1 < i \leq s)$可以由它前面的向量线性表示，则向量组线性相关。

充分性: 若存在$\alpha_{\mathbf{i}}(1 < i \leq s)$，使得

$$\alpha_{\mathbf{i}} = \lambda_1 \alpha_{\mathbf{1}} + \lambda_2 \alpha_{\mathbf{2}} + \cdots + \lambda_{i-1} \alpha_{\mathbf{i-1}}$$

则

$$\lambda_1 \alpha_{\mathbf{1}} + \lambda_2 \alpha_{\mathbf{2}} + \cdots + \lambda_{i-1} \alpha_{\mathbf{i-1}} + \alpha_{\mathbf{i}} + \cdots + 0 \alpha_{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$$

向量组线性相关。

必要性: 非零向量组$\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{s}}$线性相关时，则有存在不全为0的$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$使得,

$$\lambda_1 \alpha_{\mathbf{1}} + \lambda_2 \alpha_{\mathbf{2}} + \cdots + \lambda_s \alpha_{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$$

则存在$t(1 < t \leq s)$，使得$\lambda_t \neq 0; \lambda_i = 0, i > t$.
我们有

$$\alpha_{\mathbf{t}} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_t} \alpha_{\mathbf{1}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_t} \alpha_{\mathbf{2}} - \cdots - \frac{\lambda_{t-1}}{\lambda_t} \alpha_{\mathbf{t-1}}$$

必要性证明完毕。
故原命题的逆否命题成立，故该命题成立。 ■

■

Exercise 3: P155 16

Solution: $\Longrightarrow$

方法一. 假设向量组$\alpha_{\mathbf{1}},\ldots,\alpha_{\mathbf{i-1}},\beta,\alpha_{\mathbf{i+1}},\ldots,\alpha_{\mathbf{s}}$线性相关，则存在不全为0的$\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s$使得

$$\mu_1\alpha_{\mathbf{1}}+\mu_2\alpha_{\mathbf{2}}+\cdots+\mu_i\beta+\cdots+\mu_s\alpha_{\mathbf{s}}=\mathbf{0}$$

我们将$\beta=\lambda_1\alpha_{\mathbf{1}}+\lambda_2\alpha_{\mathbf{2}}+\cdots+\lambda_s\alpha_{\mathbf{s}}=\mathbf{0}$带入上式中，得到

$$(\mu_1+\lambda_1\mu_i)\alpha_{\mathbf{1}}+\cdots+\lambda_i\mu_i\alpha_{\mathbf{i}}+\cdots+(\mu_s+\lambda_s\mu_i)\alpha_{\mathbf{s}}=\mathbf{0}$$

由$(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{s}})$线性无关，我们有

$$\lambda_i\mu_i=0,\mu_j+\lambda_j\mu_i=0(j\neq i)$$

又$\lambda_i\neq 0$, 则有$\mu_i=0\Longrightarrow\mu_j=0$, 即

$$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_s=0$$

则$\alpha_{\mathbf{1}},\ldots,\alpha_{\mathbf{i-1}},\beta,\alpha_{\mathbf{i+1}},\ldots,\alpha_{\mathbf{s}}$线性无关。

方法二. （来自同学）仅适用于矩阵为方阵的情形
由$(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{s}})$线性无关，我们有

$$det(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{s}})\neq 0$$

由$\lambda_i\neq 0$,我们有

$$det(\alpha_{\mathbf{1}},\ldots,\beta,\ldots,\alpha_{\mathbf{s}})=\lambda_i det(\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\ldots,\alpha_{\mathbf{s}})\neq 0$$

故$\alpha_{\mathbf{1}},\ldots,\alpha_{\mathbf{i-1}},\beta,\alpha_{\mathbf{i+1}},\ldots,\alpha_{\mathbf{s}}$线性无关。 ■

Exercise 4: P155 17

Solution: $\Longrightarrow$

由$(\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \dots, \alpha_{\mathbf{s}})$线性无关，我们有

$$rank(\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}}) = r$$

又$\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}}$可以由$\beta_{\mathbf{1}}, \beta_{\mathbf{2}}, \dots, \beta_{\mathbf{r}}$线性表示，我们有

$$rank(\beta_{\mathbf{1}}, \beta_{\mathbf{2}}, \dots, \beta_{\mathbf{r}}) \geq rank(\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \dots, \alpha_{\mathbf{r}}) = r$$

又

$$rank(\beta_{\mathbf{1}}, \beta_{\mathbf{2}}, \dots, \beta_{\mathbf{r}}) \leq r$$

故

$$rank(\beta_{\mathbf{1}}, \beta_{\mathbf{2}}, \dots, \beta_{\mathbf{r}}) = r$$

即$\beta_{\mathbf{1}}, \beta_{\mathbf{2}}, \dots, \beta_{\mathbf{r}}$也线性无关 ■

Exercise 5: P154 9,10; P155 19,20

Solution: $\Longrightarrow$

1. 9(2): 线性无关
2. 10(2): 线性无关； 10(4): 线性相关。
3. 19(1): 秩为2，极大无关组可以选$\{\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{3}}\}$, $\{\alpha_{\mathbf{2}}, \alpha_{\mathbf{3}}\}$
4. 19(3): 秩为2，向量组的任意两个向量$\{\alpha_{\mathbf{i}}, \alpha_{\mathbf{j}}\}, i \neq j$均为向量的极大无关组。
5. 20(1): 秩为3，$(3, -2, 0, 1), (-1, -3, 2, 0), (2, 0, -4, 5)$可以作为行空间向量的一组基。

■

Exercise 6: P156 23

Solution: $\Longrightarrow$

参考课本P127 定理5.3.4

不妨设这r个向量为$\alpha_{\mathbf{i1}}, \alpha_{\mathbf{i2}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{ir}}$, 由题目条件我们有

$$< \alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{m}} >=< \alpha_{\mathbf{i1}}, \alpha_{\mathbf{i2}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{ir}} >$$

且

$$rank(\alpha_{\mathbf{i1}}, \alpha_{\mathbf{i2}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{ir}}) = r$$

即$\alpha_{\mathbf{i1}}, \alpha_{\mathbf{i2}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{ir}}$线性无关，由定理5.3.4，命题成立。 ■

Exercise 7: P156 24

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 设$\alpha_\mathbf{1},\alpha_\mathbf{2},\ldots,\alpha_\mathbf{r}$，$\beta_\mathbf{1},\beta_\mathbf{2},\ldots,\beta_\mathbf{s}$的秩分别是$m,n$ $(m\le r,n\le s)$ 且

$$<\alpha_\mathbf{1},\alpha_\mathbf{2},\ldots,\alpha_\mathbf{r}>=<\alpha_\mathbf{i1},\alpha_\mathbf{i2},\ldots,\alpha_\mathbf{im}>$$

$$<\beta_\mathbf{1},\beta_\mathbf{2},\ldots,\beta_\mathbf{s}>=<\beta_\mathbf{i1},\beta_\mathbf{i2},\ldots,\beta_\mathbf{in}>$$

我们现在只需要证明

$$rank(\alpha_\mathbf{1},\alpha_\mathbf{2},\ldots,\alpha_\mathbf{r},\beta_\mathbf{1},\beta_\mathbf{2},\ldots,\beta_\mathbf{s})\le m+n$$

又

$$<\alpha_\mathbf{1},\alpha_\mathbf{2},\ldots,\alpha_\mathbf{r},\beta_\mathbf{1},\beta_\mathbf{2},\ldots,\beta_\mathbf{s}>=<\alpha_\mathbf{i1},\alpha_\mathbf{i2},\ldots,\alpha_\mathbf{im},\beta_\mathbf{i1},\beta_\mathbf{i2},\ldots,\beta_\mathbf{in}>$$

若$\alpha_\mathbf{i1},\alpha_\mathbf{i2},\ldots,\alpha_\mathbf{im},\beta_\mathbf{i1},\beta_\mathbf{i2},\ldots,\beta_\mathbf{in}$线性相关，则

$$rank(\alpha_\mathbf{1},\alpha_\mathbf{2},\ldots,\alpha_\mathbf{r},\beta_\mathbf{1},\beta_\mathbf{2},\ldots,\beta_\mathbf{s})=rank(\alpha_\mathbf{i1},\alpha_\mathbf{i2},\ldots,\alpha_\mathbf{im},\beta_\mathbf{i1},\beta_\mathbf{i2},\ldots,\beta_\mathbf{in})<m+n$$

若$\alpha_\mathbf{i1},\alpha_\mathbf{i2},\ldots,\alpha_\mathbf{im},\beta_\mathbf{i1},\beta_\mathbf{i2},\ldots,\beta_\mathbf{in}$线性无关，则

$$rank(\alpha_\mathbf{1},\alpha_\mathbf{2},\ldots,\alpha_\mathbf{r},\beta_\mathbf{1},\beta_\mathbf{2},\ldots,\beta_\mathbf{s})=rank(\alpha_\mathbf{i1},\alpha_\mathbf{i2},\ldots,\alpha_\mathbf{im},\beta_\mathbf{i1},\beta_\mathbf{i2},\ldots,\beta_\mathbf{in})=m+n$$

综上，

$$rank(\alpha_\mathbf{1},\alpha_\mathbf{2},\ldots,\alpha_\mathbf{r},\beta_\mathbf{1},\beta_\mathbf{2},\ldots,\beta_\mathbf{s})\le m+n$$

(这也是证明$rank(A|B)\le rank(A)+rank(B)$的一种方法) ■

■

[1]The template is from Prof. Jie Wang, USTC