线性代数B1

2021年秋季学期

中国科学技术大学

授课老师: 陈效群　　　　　　教学周: 第十八周

笔记整理: 黄家辉　　　　　　笔记 9

常用的定义/定理/引理/推论/结论 & 值得关注的例子

1. 常用的定义/定理

Definition 1. P163 线性变换$\mathcal{A}$在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的矩阵，即$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\mathbf{A}$

Theorem 1. P164 6.2.1 线性变换$\mathcal{A}$在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的矩阵为$\mathbf{A}$，设$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$并且$\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$，若$\mathbf{x}, \mathbf{y}$在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标分别为$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$，则$\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$

Theorem 2. P166 6.2.2 线性变换$\mathcal{A}$在两组基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$下的矩阵分别为$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$，设$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\mathbf{T}$，则$\mathbf{B} = \mathbf{T^{-1}AT}$

注意定理6.2.1与第五章*P134* 同一个向量在不同的基下的坐标的关系的差别。

****

Proposition 1. P199 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\mathbf{P}$，内积在两组基下的度量矩阵分别是$\bar{\mathbf{G}}, \mathbf{G}$，则$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{P^T G P}$

Proposition 2. P225 对于给定的二次型$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，我们令$\mathbf{x} = \mathbf{Py}$，则$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x^T A x} = \mathbf{y^T B y}$，其中$\mathbf{B} = \mathbf{P^T A P}$

****

Lemma 1. *P176 6.4.1 n阶方阵$\mathbf{A}$的不同特征值的特征向量是线性无关的*

****

Theorem 3. P181 6.4.3 任何一个n阶复方阵$\mathbf{A}$都可以相似于一个上三角矩阵，且该上三角矩阵的主对角线上的元素都是$\mathbf{A}$的特征值

****

Theorem 4. P202 7.3.1 $\mathcal{A}$是正交变换当且仅当下列两个条件之一成立：(1)$\mathcal{A}$保持任意向量的模不变；(2)$\mathcal{A}$将标准正交基变换为标准正交基

Corollary 1. *P204 正交变换在标准正交基下的矩阵是正交矩阵*

Corollary 2. *P204 n阶实方阵$\mathbf{A}$为正交方阵的充分必要条件是$\mathbf{A}$的行(列)向量构成$\mathbb{R}^n$的标准正交基*

****

Theorem 5. P206 7.3.4 设$\mathcal{A}$是欧氏空间V上的对称变换，则$\mathcal{A}$的不同特征值对应的特征向量相互正交

Corollary 3. *P207 7.3.1* 实对称阵$\mathbf{A}$的属于不同特征值的特征向量必正交

Proposition 3. P207 7.3.3 实对称矩阵的特征值都是实数

Theorem 6. P207 7.3.5 对任意n阶实对称矩阵$\mathbf{A}$，存在一个n阶正交矩阵$\mathbf{T}$，使得$\mathbf{T^{-1}AT}$为对角矩阵

****

Theorem 7. P231 8.2.3 对每一个实对称矩阵$\mathbf{A}$，都存在初等矩阵$\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ldots, \mathbf{P_r}$，使得$\mathbf{A}$相合于实对角矩阵，即有$\mathbf{P_r^T P_{r-1}^T} \ldots \mathbf{P_1^T A P_1 P_2} \ldots \mathbf{P_r} = diag(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$，也即每一个实二次型都可以通过初等变换使之化为标准型

2. 常用的结论

- P174 相似不变量：特征多项式，特征值，行列式，矩阵的秩
- P174 $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$，$det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$
- n阶方阵可逆$\Longleftrightarrow$n个特征值都不为0
- $\mathbf{A}$是n阶实对称矩阵，则$\mathbf{A}$是正定矩阵$\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$的特征值全部大于0$\Longleftrightarrow$ $\mathbf{x^T A x}$的正惯性系数$r = n$ $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$的顺序主子式都大于0 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$合同于$\mathbf{I}$ $\Longleftrightarrow$ 存在n阶可逆实矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{A} = \mathbf{P^T P}$
- 若$\mathbf{A}$是正定矩阵$\Longrightarrow$ $|\mathbf{A}| > 0$; $a_{ii} > 0 (i = 1, \ldots, n)$; $\mathbf{A}$任意的主子式大于0; $\mathbf{A}^{-1}, k\mathbf{A}(k > 0), \mathbf{A}^*, \mathbf{A}^m (m \in \mathbb{N}^+)$均为正定矩阵

3. 需要注意的地方

- 要证明n阶方阵$\mathbf{P}$是正定的，要先证明$\mathbf{P}$是实对称的
- 求解二次型的标准型的时候要保证所作的线性替换非退化，也即矩阵$\mathbf{P}$可逆

4. 常见解法的例题

- P165 例6.2.2 例6.2.4 线性变换在不同基下的矩阵
- P232 例8.2.3 初等变化法将二次型化为标准型
- P239 例8.4.1 8.4.2 旋转变换/正交变换求解二次曲线的类型

5. 值得关注的例子

- P174 特征多项式中σ_1的计算
- P173 例6.3.3(4) 正交方阵的特征值模长为1，注意证明的方法
- P181 定理6.4.3的证明 (2020-2021)
- P202 定理7.3.1的证明
- P207 命题7.3.3的证明
- 老师笔记31

Exercise 1: 正定矩阵的判断

已知方阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵，$b_1, b_2, \ldots, b_n$是$n$个非零实数，证明$\mathbf{B} = (a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$正定

Solution: $\Longrightarrow$

方法一：由$a_{ij}b_ib_j = a_{ji}a_ja_i$，我们有$\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$，且

$$|\mathbf{B}_k| = \begin{vmatrix} a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1k}b_1b_k \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2k}b_2b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}b_kb_1 & a_{k2}b_kb_2 & \cdots & a_{kk}b_k^2 \end{vmatrix} = b_1^2b_2^2\cdots{}_k^2\,|\mathbf{A}_k| > 0$$

故$\mathbf{B} = (a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$正定

方法二：记$\mathbf{C} = diag(b_1, b_2, \ldots, b_n)$，又$b_1, b_2, \ldots, b_n$是$n$个非零实数，故$\mathbf{C}$可逆，且$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$且

$$\mathbf{C^TAC} = \mathbf{CAC} = \mathbf{B}$$

又$\mathbf{A}$正定，故存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{A} = \mathbf{P^TP}$，故

$$\mathbf{B} = \mathbf{C^TP^TPC} = (\mathbf{PC})^\mathbf{T}\mathbf{PC}$$

故$\mathbf{B} = (a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$正定 ■

Exercise 2: 二次型的标准型

已知三阶矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

与正交矩阵

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

且 $\mathbf{T^{-1}AT}=diag(5,5,-4)$，试求一个三维向量$\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$，使得$\alpha^T\mathbf{A}\alpha=0$

Solution: $\Longrightarrow$

由$\mathbf{A}=\mathbf{A^T}$，考虑二次型$f=\mathbf{x^TAx}$，其中$\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$
令$\mathbf{x}=\mathbf{Ty}$，则$f(\mathbf{y})=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$，则$\mathbf{y}=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{2})^T$时，我们有$f(\mathbf{y})=0$，则我们取

$$\alpha=\mathbf{Ty}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{15}\\ -\frac{17}{30}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

此时我们有$\alpha^T\mathbf{A}\alpha=0$ ■

Exercise 3: 半正定的证明

在二次型$\mathbf{Q}=\mathbf{x^T A x}$中，实对称矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，若$\mathbf{A}$的$1,2\ldots,n-1$阶顺序主子式的都大于0，且$|\mathbf{A}|=0$，求证：$\mathbf{Q}$半正定(课本P246 T20)

Solution: $\Longrightarrow$

证明.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A_{n-1}} & \alpha^T \\ \alpha & a_{nn}\end{pmatrix}$$

由$\mathbf{A}$的$1,2\ldots,n-1$阶顺序主子式的都大于0，我们有$\mathbf{A_{n-1}}$正定，也即存在$n-1$阶可逆矩阵$\mathbf{P_1}$，使得

$$\mathbf{P_1^T A_{n-1} P_1}=\mathbf{I_{n-1}}$$

$\mathbf{A}$的相合矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{P_1^T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{P_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I_{n-1}} & \beta^T \\ \beta & a_{nn}\end{pmatrix}$$

其中$\beta=\alpha\mathbf{P_1}$
$\mathbf{B}$的相合矩阵

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{I_{n-1}} & \mathbf{0} \\ -\beta & 1\end{pmatrix}\mathbf{B}\begin{pmatrix}\mathbf{I_{n-1}} & -\beta^T \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I_{n-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & d\end{pmatrix}$$

故$d=|\mathbf{D}|=|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}||\mathbf{P_1}|^2=0$，即$\mathbf{A}$相合于$diag(\mathbf{I_{n-1}},0)$，故$\mathbf{Q}$半正定 ∎

∎

Exercise 4: 半正定的等价条件

求证：n阶实对称方阵$\mathbf{S}$半正定$\Longleftrightarrow$存在秩为r的实矩阵$\mathbf{A}_{r\times n}$使得$\mathbf{S}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$，其中$r=rank(\mathbf{S})$

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 1. 充分性：存在秩为r的实矩阵$\mathbf{A}_{r\times n}$使得$\mathbf{S}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$，则对$\forall\mathbf{x}$，我们有

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}=(\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathbf{T}}(\mathbf{A}\mathbf{x})\geq 0$$

2. 必要性：n阶实对称方阵$\mathbf{S}$半正定，则存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得

$$\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{I_r} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{O}\end{pmatrix}=\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$$

其中$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{I_r}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$

故

$$\mathbf{S}=\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}^{\mathbf{T}}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$$

其中$\mathbf{A}=\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$是由可逆方阵$\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$的前$r$列组成的，故$rank(\mathbf{A})=r=rank(\mathbf{S})$

■

■

Exercise 5: 正定矩阵与实对称矩阵

设$\mathbf{A}$是n阶正定矩阵，$\mathbf{B}$是n阶实对称矩阵，证明：存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P^TAP}=\mathbf{I}$，$\mathbf{P^TBP}=diag(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$，其中$\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$是$|\mu\mathbf{A}-\mathbf{B}|=0$的根(老师笔记31)

Solution: $\Longrightarrow$

由$\mathbf{A}$是n阶正定矩阵，故存在可逆矩阵$\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{Q^TAQ}=\mathbf{I}$
又$(\mathbf{Q^TBQ})^\mathbf{T}=\mathbf{Q^TBQ}$，故存在正交矩阵$\mathbf{T}$，使得

$$\mathbf{T^T}(\mathbf{Q^TBQ})\mathbf{T}=(\mathbf{QT})^\mathbf{T}\mathbf{B}(\mathbf{QT})=diag(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$$

其中$\mu_i,i=1,2,\ldots,n$是$\mathbf{Q^TBQ}$的特征值，又

$$\mathbf{T^T}(\mathbf{Q^TAQ})\mathbf{T}=\mathbf{T^IT}=\mathbf{I}$$

我们令$\mathbf{QT}=\mathbf{P}$，则

$$\mathbf{P^TAP}=\mathbf{I},\mathbf{P^TBP}=diag(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$$

且μ_i满足

$$|\mu_i\mathbf{I}-\mathbf{Q^TBQ}|=0$$

即

$$|\mu_i\mathbf{Q^TAQ}-\mathbf{Q^TBQ}|=|\mathbf{Q^T}(\mu_\mathbf{i}\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{Q}|=|\mathbf{Q}|^2|\mu_i\mathbf{A}-\mathbf{B}|=0$$

又$\mathbf{Q}$可逆，故$|\mathbf{Q}|\neq 0$，故

$$|\mu_i\mathbf{A}-\mathbf{B}|=0,i=1,2,\ldots,n$$

即$\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$是$|\mu\mathbf{A}-\mathbf{B}|=0$的根 ■

Exercise 6: AB = BA

对于n阶矩阵$\mathbf{A}, \mathbf{B}$，我们有$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，且$\mathbf{A}, \mathbf{B}$均为对称矩阵，求证：存在正交方阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P^T AP}, \mathbf{P^T BP}$均为对角阵 (2020-2021)

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 设$\mathbf{A}$的所有互异特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$对应的代数重数分别为$n_1, n_2, \ldots, n_n$ ($\sum n_i = n$)
由$\mathbf{A}$实对称，我们有$\exists$正交矩阵$\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{Q^T AQ} = diag(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n})$$

其中$\mathbf{A_i} = diag(\lambda_i, \ldots, \lambda_i)_{n_i \times n_i}$，又$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，$\mathbf{Q^T Q} = \mathbf{I}$，故

$$(\mathbf{Q^T AQ})(\mathbf{Q^T BQ}) = (\mathbf{Q^T BQ})(\mathbf{Q^T AQ})$$

也即

$$diag(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n})\mathbf{Q^T BQ} = \mathbf{Q^T BQ}diag(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n})$$

又$\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$，故

$$\mathbf{Q^T BQ} = diag(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, \ldots, \mathbf{B_n})$$

其中$\mathbf{B_i} = \mathbf{B_i}_{n_i \times n_i}$
又$\mathbf{B} = \mathbf{B^T}$，故

$$\mathbf{Q^T BQ} = (\mathbf{Q^T BQ})^\mathbf{T}$$

故$\mathbf{B_i} = \mathbf{B_i^T}$，故存在正交矩阵$\mathbf{T_i}$，使得$\mathbf{T_i^T B_i T_i} = \mathbf{D_i}$为对角阵，$i = 1, 2, \ldots, n$
令$\mathbf{T} = diag(\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, \ldots, \mathbf{T_n})$，则$\mathbf{T^T T} = \mathbf{I}$。
令$\mathbf{P} = \mathbf{QT}$，则$\mathbf{P^T P} = \mathbf{I}$，我们有

$$\mathbf{P^T BP} = diag(\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}, \ldots, \mathbf{D_n})$$

$$\mathbf{P^T AP} = \mathbf{T^T}(\mathbf{Q^T AQ})\mathbf{T} = diag(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n})$$

■

下面我们套用例题5的方法来解题

证明. 由$\mathbf{A}$是n阶实对称矩阵，我们有

$$\exists \mathbf{P}, \mathbf{P^T P} = \mathbf{I},\ s.t.\ \mathbf{P^T AP} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$是$\mathbf{A}$的特征值
由$\mathbf{B}$是n阶实对称矩阵，我们有$\mathbf{P^TBP} = (\mathbf{P^TBP})^T$，故

$$\exists \mathbf{Q}, \mathbf{Q^TQ} = \mathbf{I},\ s.t.\ \mathbf{Q^T}(\mathbf{P^TBP})\mathbf{Q} = diag(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$$

其中$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$是$\mathbf{P^TBP}$的特征值
令$\mathbf{T} = \mathbf{PQ}$，我们有

$$\mathbf{T^TBT} = diag(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$$

$$\mathbf{T^TAT} = \mathbf{Q^TP^TAPQ} = \mathbf{Q^T} diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\mathbf{Q} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

■

上面的证明是错误的，问题在于标红的部分，在例题5中，我们有$\mathbf{A}$是n阶正定矩阵，故

$$diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \mathbf{I}$$

因此

$$\mathbf{Q^T} diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\mathbf{Q} = \mathbf{Q^TIQ} = \mathbf{I} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

但在一般条件下，

$$\mathbf{Q^T} diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\mathbf{Q} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

不成立。

证明1中，

$$\mathbf{T^T diag}(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n})\mathbf{T} = diag(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_n})$$

成立是因为

$$\mathbf{T} = diag(\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, \ldots, \mathbf{T_n})$$

■

[1]解答1来自谈子悦助教

Exercise 7: 实可逆矩阵的分解

证明：任何一个实可逆矩阵都可以分解成一个正交矩阵和一个正定矩阵之积

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 设$\mathbf{A}$为n阶可逆实矩阵，则$\mathbf{A^TA}$为正定矩阵，设$\mathbf{A^TA}$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则$\lambda_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$，且存在正交矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P^T}(\mathbf{A^TA})\mathbf{P} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，令

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\mathbf{P}^T$$

则$\mathbf{B} = \mathbf{B^T}$，且$\mathbf{B}$的特征值都大于0，故$\mathbf{B}$是正定矩阵，

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{P}diag((\sqrt{\lambda_1})^{-1}, (\sqrt{\lambda_2})^{-1}, \ldots, (\sqrt{\lambda_n})^{-1})\mathbf{P}^T$$

也是正定矩阵，且我们有

$$\mathbf{A^TA} = \mathbf{B^2}$$

故$\mathbf{B^{-1}A^TAB^{-1}} = \mathbf{I}$，即$\mathbf{AB^{-1}}$是正交矩阵。令

$$\mathbf{Q} = \mathbf{AB^{-1}}$$

则$\mathbf{A} = \mathbf{QB}$，其中$\mathbf{Q}$为正交矩阵，$\mathbf{B}$为正定矩阵 ■

■

Exercise 8: QR分解

$\mathbf{S}$是实对称正定矩阵，证明：存在上三角形矩阵$\mathbf{R}$，使得$\mathbf{S}=\mathbf{R^TR}$

Lemma 2. 设$\mathbf{A}$为n阶实可逆矩阵，证明：存在正交矩阵$\mathbf{Q}$和可逆上三角矩阵$\mathbf{R}$，使得$\mathbf{A}=\mathbf{QR}$

证明. 设$\mathbf{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，则$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$线性无关，我们令

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \\ \cdots \\ \beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1} \end{cases} \tag{1}$$

同时，我们令

$$\gamma_i=\frac{1}{|\beta_i|}\beta_i$$

我们有

$$\begin{cases} \alpha_1=k_{11}\gamma_1 \\ \alpha_2=k_{21}\gamma_1+k_{22}\gamma_2 \\ \cdots \\ \alpha_n=k_{n1}\gamma_1+k_{n2}\gamma_2+\cdots+k_{nn}\gamma_n \end{cases} \tag{2}$$

其中$k_{ii}=|\beta_i|\neq 0$
我们令

$$\mathbf{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$$

则$\mathbf{Q^TQ}=\mathbf{I}$

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & k_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$|\mathbf{R}|=k_{11}k_{22}\dots k_{nn}\neq 0$，$\mathbf{R}$可逆
则我们有

$$\mathbf{A}=\mathbf{QR}$$

□

Solution: $\Longrightarrow$

由$\mathbf{S}$是实对称正定矩阵，设$\mathbf{S}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$，则$\lambda_i>0,i=1,2,\dots,n$，且存在正交矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{PSP^T}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$，故我们有

$$\mathbf{S}=\mathbf{P^T}\mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda_1},\boldsymbol{\lambda_2},\dots,\boldsymbol{\lambda_n})\mathbf{P}$$

我们令

$$diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\mathbf{P} = \mathbf{QR}$$

其中$\mathbf{P}$为正交矩阵，$\mathbf{R}$为上三角矩阵（QR分解），且

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q^T} diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\mathbf{P}$$

故我们有

$$\mathbf{S} = (\mathbf{QR})^{\mathbf{T}}(\mathbf{QR}) = \mathbf{R^T Q^T QR} = \mathbf{R^T R}$$

■

Discussion

往年期末题讨论

1. 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10&1&2&3&3\\1&10&2&1&0\\2&2&10&3&x\\3&1&3&10&x\\3&0&x&x&10\end{pmatrix}$$

证明：当$|x|<3$时，$|\mathbf{A}|<10^5$ (2019-2020)

Lemma 3. 若$\mathbf{A}=(a_{ij})$是n阶正定矩阵，则$det(\mathbf{A})\le a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

Solution: $\Longrightarrow$
令$\alpha=(3,0,x,x)^T$,则$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A_1}&\alpha\\\alpha^T&10\end{pmatrix}$，验证可得$\mathbf{A_1}$是正定矩阵，由**Lemma 3**可得

$$|\mathbf{A_1}|<10^4$$

由$\mathbf{A_1}$是正定方阵可知，存在可逆矩阵$\mathbf{P_1}$，使得

$$\mathbf{P_1^T A_1 P_1}=\mathbf{I_4}$$

故$|\mathbf{P_1}|>10^{-2}$，令

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\mathbf{P_1}&-\mathbf{A_1^{-1}}\alpha\\0&1\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{R^T A R}=\begin{pmatrix}\mathbf{I_4}&0\\0&10-\alpha^{\mathbf{T}}\mathbf{A_1^{-1}}\alpha\end{pmatrix}$$

令$a=10-\alpha^{\mathbf{T}}\mathbf{A_1^{-1}}\alpha$，则

$$det(\mathbf{A})det(\mathbf{R})^2=a$$

故

$$|\mathbf{A}|=\frac{a}{|\mathbf{R}|^2}=\frac{a}{|\mathbf{P_1}|^2}<\frac{10}{10^{-4}}=10^5$$

实际上对于x的值的范围没有要求？ ■

Corollary 4. 若$\mathbf{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix}\mathbf{A_{n-1}}&\alpha\\\alpha^T&a_{nn}\end{pmatrix}$，其中$\mathbf{A_{n-1}}$是正定矩阵，则$det(\mathbf{A})<a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

Remark 1. 注意**Corollary 4**中并不要求$\mathbf{A_n}$为正定矩阵。

证明. 具体证明思路见上述Solution。 □

2. 设t为参数，讨论以下二次曲面的类型：$x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+x_3-10=0$ (2019-2020)

Solution: $\Longrightarrow$
见老师参考答案。 ■

3. 假设$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$都是n阶正定矩阵，证明：$det(\mathbf{A})det(\mathbf{B})\leq(\frac{1}{n}tr(\mathbf{AB}))^n$

Lemma 4. 若$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$都是n阶正定矩阵，则$\mathbf{AB}$相似于正交矩阵

证明. 由$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$都是n阶正定矩阵，我们有

$$\mathbf{A}=\mathbf{A^T},\mathbf{B}=\mathbf{B^T},\ \mathbf{A}=\mathbf{P^TP},\mathbf{B}=\mathbf{Q^TQ}$$

其中$\mathbf{P},\mathbf{Q}$均为n阶可逆矩阵
我们有

$$\mathbf{Q}(\mathbf{AB})\mathbf{Q^{-1}}=\mathbf{Q}(\mathbf{P^TPQ^TQ})\mathbf{Q^{-1}}=(\mathbf{PQ^T})^\mathbf{T}(\mathbf{PQ^T})$$

□

Lemma 5. 若$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$都是n阶正定矩阵，则$\mathbf{AB}$正定的充分必要条件是$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$

证明. 由**Lemma 4**，我们有：不论是否有$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，$\mathbf{AB}$都相似于正定矩阵，即$\mathbf{AB}$的特征值都大于0
(好像$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$这个条件对正定矩阵的证明不起作用？)
在$\mathbf{AB}$的特征值都大于0的情况下，$\mathbf{AB}$是正定矩阵$\Longleftrightarrow$

$$\mathbf{AB}=(\mathbf{AB})^\mathbf{T}=\mathbf{B^TA^T}=\mathbf{BA}$$

□

Remark 2. 正定矩阵一定首先是对称矩阵

Proposition 4. $\mathbf{A}$是n阶正定矩阵时，我们有$det(\mathbf{A})\leq(\frac{1}{n}tr(\mathbf{A}))^n$(课本P246 T27)

证明. $\mathbf{A}$是n阶正定矩阵时，$\mathbf{A}$的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$都大于0，故

$$det(\mathbf{A})=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\leq(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}{n})^n=(\frac{1}{n}tr(\mathbf{A}))^n$$

□

Remark 3. 注意这里$det(\mathbf{A})\leq(\frac{1}{n}tr(\mathbf{A}))^n$条件成立并不要求$\mathbf{A}$是正定矩阵，只要求$\mathbf{A}$的特征值大于0即可。

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 由**Lemma 4**，我们有**AB**的特征值都大于0，由**Remark 2**，问题得证。 ■

■

[2] The template is from Prof. Jie Wang, USTC