线性代数B1

2021年秋季学期

中国科学技术大学

授课老师：陈效群 课堂号：MATH1009.03

作业内容: 2021.9.14，2021.9.16，2021.9.23 教学周: 第二, 三周

作业题目: P29 1 2 4 5; P68 1.1 1.4 1.6 2.2 3; P68 4 7 作业 1

Exercise 1: P29 1

Solution: $\Longrightarrow$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Longrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ ■

注：直接用向量的加法即可，不要作图证明，也没有必要写出坐标。

Exercise 2: P29 2

Solution: $\Longrightarrow$

证明. 充分性: 由

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}$$

我们有

$$\overrightarrow{OM} = k_1(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + k_2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + k_3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC})$$

又$k_1 + k_2 + k_3 = 1$, 故k_1, k_2, k_3不全为零，我们有

$$k_1\overrightarrow{MA} + k_2\overrightarrow{MB} + k_3\overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$$

由命题1.1.2,我们可以得到$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$共面，即点M在平面ABC上。

必要性: 点M在平面ABC上时，我们有

$$\overrightarrow{MA} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$$

(这里对λ, μ没有要求，两者都为0时说明M点和A点重合，也满足点M在ABC平面上的要求)。即

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \mu(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$$

即

$$\overrightarrow{OM} = (1 + \lambda + \mu)\overrightarrow{OA} - \lambda\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OC}$$

令$k_1 = 1 + \lambda + \mu, k_2 = -\lambda, k_3 = -\mu$，则有

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC},\ k_1 + k_2 + k_3 = 1$$

■

■

注：在证明必要性的时候，有的同学的证明如下：

1.

$$\overrightarrow{MC} = \lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB}$$

同样的，我们有

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} = \lambda(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + \mu(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$$

即

$$(\lambda+\mu-1)\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$$

故

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu-1}\overrightarrow{OA}+\frac{\mu}{\lambda+\mu-1}\overrightarrow{OB}+\frac{-1}{\lambda+\mu-1}\overrightarrow{OC}$$

令

$$k_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu-1},k_2=\frac{\mu}{\lambda+\mu-1},k_3=\frac{-1}{\lambda+\mu-1}$$

则有

$$\overrightarrow{OM}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC},\ k_1+k_2+k_3=1$$

这里为什么$\lambda+\mu-1$可以作为分母，$\lambda+\mu-1=0$的几何意义又是什么?

$\lambda+\mu-1=0$时，我们有

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$$

故

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}-(\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$$

即

$$\lambda\overrightarrow{CA}=\mu\overrightarrow{CB}$$

即为A,B,C三点共线，与题目假设矛盾，故$\lambda+\mu-1\neq 0$。

2.

$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$$

同样，我们有

$$(a+b+c)\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$$

故

$$\overrightarrow{OM}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$$

同样的，这里为什么$a+b+c$可以作为分母，$a+b+c=0$的几何意义又是什么?

Exercise 3: P29 4

思路：用命题1.1.2，定理1.2.1分情况讨论即可

Solution: $\Longrightarrow$

设三维空间中的四个或四个以上向量分别为$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$. $n = 4, 5, \ldots$ 下面我们分情况讨论。

1. 若$\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$中存在三个向量共面，不妨设为$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$，我们有

$$\lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2} + \lambda_3 \mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

   其中$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$不全为0。此时我们有

$$\lambda_1 \mathbf{x_1} + \lambda_2 \mathbf{x_2} + \lambda_3 \mathbf{x_3} + \sum_{i=4}^{n} \lambda_i \mathbf{x_i} = \mathbf{0}$$

   即$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$线性相关。

2. 若$\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$中任意三个向量均不共面，我们取$\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$作为三维空间的一组基底，由定理1.2.1，我们有

$$\mathbf{x_i} = \lambda_i \mathbf{x_1} + \mu_i \mathbf{x_2} + \nu_i \mathbf{x_3}, i = 4, \ldots, n$$

   此时我们有

$$\sum_{i=4}^{n} \lambda_i \mathbf{x_1} + \sum_{i=4}^{n} \mu_i \mathbf{x_2} + \sum_{i=4}^{n} \nu_i \mathbf{x_3} - \sum_{i=4}^{n} \mathbf{x_i} = \mathbf{0}$$

   即$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$线性相关。

■

注1：分情况讨论的时候要做到不重复不遗漏。
注2：有的同学的解法如下:

证明. 设三维空间中的四个或四个以上向量分别为$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$, 其中$\mathbf{a_i} = (x_i, y_i, z_i)$ 这些向量线性相关等价于存在不全为零的$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，使得

$$\lambda_1 \mathbf{a_1} + \lambda_2 \mathbf{a_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{a_n} = \mathbf{0}$$

即下述方程有非零解

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n = 0 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_n z_n = 0 \end{cases}$$

而$n \geq 4$时，方程显然有非零解，故命题得证。 □

根据命题3.3.1，$r = 3 < n$，故线性方程组有多解

Exercise 4: P29 5

Solution: $\Longrightarrow$

1. 证明. 假设$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$不能构成一组基，则存在不全为0的$\lambda,\mu,\nu$，使得$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=\mathbf{0}$，即

$$\begin{cases}\lambda+2\mu+3\nu=0\\ 2\lambda+\mu=0\\ -\lambda+\mu+2\nu=0\end{cases}$$

下面我们用矩阵形式的Gauss消元法来求解线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&1&0&0\\-1&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\to r_3]{-2r_1\to r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-3&-6&0\\0&3&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times-\frac{1}{3}]{r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

其解为$\lambda=\mu=\nu=0$, 与假设矛盾，故假设不成立，故$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$可以构成一组基。 ■

2. $\mathbf{a},\mathbf{b},\tilde{\mathbf{c}}$共面，即存在不全为0的$\lambda',\mu',\nu'$，使得$\lambda'\mathbf{a}+\mu'\mathbf{b}+\nu'\tilde{\mathbf{c}}=\mathbf{0}$，即

$$\begin{cases}\lambda'+2\mu'+3\nu'=0\\ 2\lambda'+\mu'+x\nu'=0\\ -\lambda'+\mu'+2\nu'=0\end{cases}$$

下面我们用矩阵形式的Gauss消元法来求解线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&1&x&0\\-1&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\to r_3]{-2r_1\to r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-3&-6+x&0\\0&3&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-3&-6+x&0\\0&0&x-1&0\end{pmatrix}$$

要想方程组有非零解，则$x-1=0,\ x=1$。此时$(1,-5,3)^\top$就是一组非零解。
故$x=1$时，$\mathbf{a},\mathbf{b},\tilde{\mathbf{c}}$共面。

■

Exercise 5: P68 1

Solution: $\Longrightarrow$

1. 1.1 Gauss消元法的矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\2&1&-2&1\\1&1&1&3\\1&2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1\to r_3,-r_1\to r_4]{-2r_1\to r_2}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&0&4&4\\0&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&1&0&1\\0&1&0&2\end{pmatrix}$$

显然, $x_2=1$与$x_2=2$矛盾，故方程组无解。

2. 1.4 Gauss消元法的矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix}2&4&-6&1&2\\1&-1&4&1&1\\-1&1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&4&1&1\\2&4&-6&1&2\\-1&1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\to r_3]{-2r_1\to r_2}\begin{pmatrix}1&-1&4&1&1\\0&6&-14&-1&0\\0&0&3&2&1\end{pmatrix}$$

令$x_4=t$，则$x_3=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t, x_2=\frac{7}{9}-\frac{18}{25}t, x_1=\frac{4}{9}+\frac{5}{18}t$, 也即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{18}\\-\frac{25}{18}\\-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\\frac{7}{9}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix},\ t\in F$$

3. 1.6 Gauss消元法的矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix}3&-5&1&-2&0\\2&3&-5&1&0\\-1&7&-4&3&0\\4&15&-7&9&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_3\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&-7&4&-3&0\\2&3&-5&1&0\\3&-5&1&-2&0\\4&15&-7&9&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-4r_1\to r_4]{-2r_1\to r_2,-3r_1\to r_3}\begin{pmatrix}1&-7&4&-3&0\\0&17&-13&7&0\\0&16&-11&7&0\\0&43&-23&21&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_3\to r_2]{-3r_3\to r_4}\begin{pmatrix}1&-7&4&-3&0\\0&1&-2&0&0\\0&16&-11&7&0\\0&-5&10&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[5r_2\to r_4]{-16r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1&-7&4&-3&0\\0&1&-2&0&0\\0&0&21&7&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

令$x_3 = t$，则$x_4 = -3t, x_2 = 2t, x_1 = t$, 也即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} t,\ t \in F$$

■

Exercise 6: P68 2.2

Solution: $\Longrightarrow$

Gauss消元法的矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1\to r_3]{r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

要使线性方程组有解，则$a+3=2$, $a=-1$。令$x_2=t$，则$x_3=2-7t$, $x_1=-5+18t$, $t\in F$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ t\in F$$

■

Exercise 7: P68 3

Solution: $\Longrightarrow$

Gauss消元法的矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -a & 9\\ 2 & -1 & 3 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1\to r_3]{-r_1\to r_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -(a+1) & 6\\ 0 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{3r_2\to r_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -(a+1) & 6\\ 0 & 0 & -(3a+2) & 18\end{pmatrix}$$

故$a \neq -\frac{2}{3}$时，线性方程组有唯一解；$a = \frac{2}{3}$时，方程组无解。 ■

Exercise 8: P68 4

Solution: $\Longrightarrow$

将A,B,C,D四点的坐标带入$y=f(x)$中，我们有

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ -a+b-c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ d=2 \end{cases}$$

我们将$d=2$带入前三个方程中，有

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b-c=1 \\ 27a+9b+3c=-2 \end{cases}$$

我们采用Gauss消元法来求解方程组，其矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-27r_1\to r_3]{r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -24 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{9r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -24 & 7 \end{pmatrix}$$

我们有$c=-\frac{7}{24}, b=\frac{1}{2}, a=-\frac{5}{24}$，因此

$$f(x)=-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{24}x+2$$

■

注：题目中求的是三次多项式$f(x)$，因此求出a,b,c,d后还要写出$f(x)$的表达式

Exercise 9: P68 7

Solution: $\implies$

我们先用Gauss消元法求解原方程组，其矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 2\\ 2 & 5 & -2 & 1 & 1\\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1\to r_3]{-2r_1\to r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3\\ 0 & 2 & 8 & -14 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

令$x_3 = t_1, x_4 = t_2, t_1, t_2 \in F$，则$x_2 = -4t_1 + 7t_2 - 3, x_1 = 11t_1 - 18t_2 + 8$,即

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ -4\\ 1\\ 0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}-18\\ 7\\ 0\\ 1\end{pmatrix}t_2+\begin{pmatrix}8\\ -3\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ t_1, t_2 \in F$$

将常数项改为0后，消元后的增广矩阵如下所示

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

该方程组的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ -4\\ 1\\ 0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}-18\\ 7\\ 0\\ 1\end{pmatrix}t_2,\ t_1, t_2 \in F$$

即常数项改为0后，方程组的解集中参数前的系数不变，而常数项变为0。

■

[1]The template is from Prof. Jie Wang, USTC