TD : 1 MATHÉMATIQUES : NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 : Ecrire sous la forme $a + bi$ les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \frac{2 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2i},\ Z_2 = \frac{(2+i)(3+2i)}{2(2-i)},\ Z_3 = \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)},\ Z_4 = [\frac{2+i^5}{1+i^{15}}]^2$$

Exercice 2 : Déterminer le paramètre α pour que :

$$Z = \frac{1 + \alpha i}{2\alpha + i(\alpha^2 - 1)}$$

soit purement imaginaire.

Exercice 3 : Déterminer les modules et les arguments des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1 + i,\ Z_2 = \frac{1-i}{1+i},\ Z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i},\ Z_4 = (1+i)^8(1 - i\sqrt{3})^{-6}$$

Exercice 4 : Simplifier les expressions suivantes :

$$Z_1 = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta - i\sin\beta},\ Z_2 \frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{2(1-i)(\cos\alpha - i\sin\alpha)}$$

Exercice 5 : Déterminer les parties réelles et les parties imaginaires des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \exp(-1 + \frac{i\pi}{6}),\ Z_2 = \exp(2 - i),\ Z_3 = \exp(\frac{-i\pi}{2}),\ Z_4 = \exp(1+i)(-2 + \frac{i\pi}{3})$$

Exercice 6 : a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$Z^2 + Z\sqrt{3} + 1 = 0,\ Z^2 = -8 + 6i$$

b) Déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$Z^2 + (-3 + i)Z + 4 - 3i = 0$$

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (1 - 5i)Z - 3i - 6 = 0$ sachant que l'une des solutions est imaginaire pure.

Exercice 8 :

1- Sachant que Z appartient au cercle trigonométrique unitaire ($z = e^{i\theta}$), simplifier l'expression du complexe : $Z = \frac{1-z}{1+z}$.

2- Simplifier l'expression : $A = (1 + Z)^n$ avec $Z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ avec $n \in \mathbb{C}$.

Exercice 9 : Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 2i,\ Z_2 = \frac{1+i}{1-i},\ Z_3 = 1 + i$$

Exercice 10 : Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1,\ Z_2 = i,\ Z_3 = 2 - 2i,\ Z_4 = \frac{\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i}$$