Ex 1: Soit le polynôme

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10$$

① Calculer $P(1)$ et $P(2)$

② Déduire la factorisation du polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{R}$.

①

$$P(1) = 1 - 5 - 19 + 10 + 13 = 0$$

$$P(2) = 2^4 - 5\,2^3 + 13\,2^2 - 19\,2 + 10$$

$$= 16 - 5 \times 8 + 13 \times 4 - 38 + 10$$

$$= 0$$

②

$$P(x) = (x-1)(x-2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

$$= (x^2 - 3x + 2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

$$= \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 - 3\alpha x^3 - 3\beta x^2 - 3\gamma x + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma$$

$$= \alpha x^4 + (\beta - 3\alpha)x^3 + (\gamma - 3\beta + 2\alpha)x^2 + (2\beta - 3\gamma)x + 2\gamma$$

Par identification.

$$\alpha = 1 \qquad \alpha = 1 \qquad \alpha = 1$$

$$\beta - 3\alpha = -5 \qquad \gamma = 5 \qquad \gamma = 5$$

$$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 13 \qquad \beta = -5 + 3 = -2. \qquad \beta = -2$$

$$2\alpha - 3\gamma = 19$$

$$2\gamma = 10$$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - 2x + 5).$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 4 - 20 = -16.$$

Le trinôme du second degré est à discriminant négatif.

La décomposition en produit de polynôme irréductibles sur le corps des réels est ainsi effectuée.

$$\Delta = i^2 16 \qquad x_1 = \frac{+2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

$$\sqrt{\Delta} = 4i \qquad x_2 = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)$$

La décomposition en produits de polynômes irréductibles sur le corps des complexe est ainsi effectuée.

Ex 2 : $P(Z) = Z^4 + Z^3 - Z^2 + 6$.

① Calculer $P(1+i)$

② Déduire les solution de $P(Z)$.

$$P(1+i) = (1+i)^4 + (1+i)^3 - (1+i)^2 + 6 .$$

$$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$
$$(1+i)^3 = 2i(1+i) = 2i - 2 .$$
$$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$$

$$P(1+i) = -4 + \cancel{2i} - 2 - \cancel{2i} + 6 = 0 .$$
$$P(1-i) = 0$$

② $P(Z) = (Z-1-i)(Z-1+i)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma)$.

$$= (Z^2 - Z + \cancel{iZ} - Z + 1 - \cancel{i} - \cancel{iZ} + \cancel{i} + 1)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma)$$

$$= (Z^2 - 2Z + 2)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma) .$$

$$= \alpha Z^4 + \beta Z^3 + \gamma Z^2 - 2\alpha Z^3 - 2\beta Z^2 - 2\gamma Z + 2\alpha Z^2 + 2\beta Z + 2\gamma$$

$$= \alpha Z^4 + (\beta - 2\alpha) Z^3 + (\gamma - 2\beta + 2\alpha) Z^2 + (2\beta - 2\gamma) Z + 2\gamma$$

$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$
$\beta - 2\alpha = 1$	$\gamma = 3$.	$\gamma = 3$
$\gamma - 2\beta + 2\alpha = -1$	$\beta = 1 + 2\alpha = 3$.	$\beta = 3$
$2\beta - 2\gamma = 0$		
$2\gamma = 6$		

$$P(Z) = (Z-1-i)(Z-1+i)(Z^2 + 3Z + 3\gamma)$$

$$\Delta = 3^2 - 4.3.1 = 9 - 12 = -3 .$$

$\sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$ $\qquad Z_1 = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ $\qquad Z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$

$$Z = \left\{ 1+i ,\ 1-i ,\ \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} ,\ \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \right\} .$$

Ex 4 : Effectuer la division suivant les puissances décroissantes du polynômes $A(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ par le polynôme $B(x) = x - 1$

Trouver les quatre coefficients réels a, b, c et d de la décomposition en éléments simple de la fonction rationnelle F ;

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{x - 1} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 2x^2 - 5 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\; x^3 - x^2 & x^2 + 3x + 3 \\ \cline{1-1}
0 + 3x^2 - 5 & \\
-\; 3x^2 - 3x & \\ \cline{1-1}
0 + 3x - 5 & \\
-\; 3x - 3 & \\ \cline{1-1}
0 \quad -2. &
\end{array}$$

$$A(x) = (x - 2)(x^2 + 3x + 3) - 2$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5}{x - 1} = (x^2 + 3x + 3) - \frac{2}{x - 2}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$$

et $d = -2$.

Ex 06 : Décomposer les fraction rationnelles suivantes en éléments simples (par identification des cof et substitution)

1) $f(x) = \dfrac{1-2x}{(x^2+1)(x+2)^2}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4+x^3+x-1}$

La décomposition de $f(x)$ s'écrit :

1) $$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x^2+4x+4) + c(x^2+1)(x+2) + d(x^2+1)}{(x^2+1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{(a+c)x^3 + (4a+b+2c+d)x^2 + (4a+4b+c)x + 4b+2c+d}{(x^2+1)(x+2)^2}$$

par identification

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 4a+b+2c+d=0 \\ 4a+4b+c=-2 \\ 4b+2c+d=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-c & \dots(1) \\ b-2c+d=0 & (2) \\ 4b-3c=-2 & (3) \\ 4b+2c+d=1 & (4) \end{cases} \quad \begin{cases} a=-c \\ b-2c+d=0 \\ 4b-3c=-2 \\ (4)-(2)\ \ 3b+4c=1 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-c \\ b-2c+d=0 \\ 4b-3c=-2 \\ 25c=10 & (3)\times 3-(5)\times 4 \dots (6) \end{cases}$$

$c = 2/5$ $b = -1/5$

$a = -2/5$ $d = 1$

$$f(x) = -\frac{+2x+1}{5(x^2+1)} + \frac{2}{5(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4+x^3-x-1}$

$x^4+x^3-x-1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)$

$f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+x+1}$

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+x+1}$

On multiplie par $(x-1)$ pour identifier a

$\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = a + \left(\dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+x+1}\right)(x-1)$

On remplace x par 1

$\dfrac{2}{2(1+1+1)} = a \qquad a = \dfrac{1}{3}$

pour b :

$\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = b + \left(\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+x+1}\right)(x+1)$

$x = -1$

$\dfrac{2}{-2(1-1+1)} = b \qquad b = -1$

<u>c et d</u> : a et b étant connus, c et d peuvent être déterminés en donnant à x 2 valeurs particulières (0 et -2)

$\dfrac{x^2+1}{x^4+x^3-x-1} = \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+x+1}$

$x = 0 \qquad -1 = -\dfrac{1}{3} - 1 + d \qquad d = \dfrac{1}{3}$

$x = -2 \qquad \dfrac{5}{9} = \dfrac{-1}{9} + 1 + \dfrac{-2c+1/3}{3} \qquad c = 2/3$

$f(x) = \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$

Ex 07: Déterminer l'ordre de Multiplicité de la racine 1 du polynôme $P(x) = x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 22x^2 + 17x - 5$.

$P(1) = 1 - 5 + 14 - 22 + 17 - 5 = -32 + 32 = 0$.

$P(1) = 0$, 1 est au moins racine simple

$P'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 42x^2 - 44x + 17$

$P'(1) = 5 - 20 + 42 - 44 + 17 = 0$

1 est au moins racine double

$P''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 84x - 44$; $P'''(x) = 60x^2 - 120x + 84$

$P''(1) = 20 - 60 + 84 - 44 = 0$; $P'''(1) = 60 - 120 + 84 = 24 \neq 0$.

1 n'est pas racine d'ordre 4 et par conséquent 1 est exactement racine triple

On peut mettre $(x-1)^3$ en facteur

le polynôme étant de degré 5, on peut écrire

$P(x) = (x-1)^3 (ax^2 + bx + c)$.

$$x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 22x^2 + 17x - 5$$
$$-\ \ x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2$$
$$0 \quad -2x^4 + 11x^3 - 21x^2 + 17x - 5$$
$$-\ \ -2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 2x$$
$$0 \quad 5x^3 - 15x^2 + 15x - 5$$
$$-\ \ 5x^3 - 15x^2 + 15x - 5$$
$$0$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$
$$x^2 - 2x + 5.$$

$P(x) = (x-1)^3 (x^2 - 2x + 5)$.

Exo7 :

$$f_1(x) = \frac{x}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2}$$

$x - 1 = T \qquad x = T + 1 \qquad x - 2 = T + 2 - 2 = T - 1$

$$F(T+1) = \frac{T+1}{T^3(T-1)}$$

On effectue la division de $(T+1)$ par $(T-1)$ suivant l'ordre des puissances croissantes jusqu'à l'ordre 2.

$$\begin{array}{r|l} 1 + T & -1 + T \\ \cline{2-2} -(+1 - T) & -1 - 2T - 2T^2 \\ \cline{1-1} 0 + 2T & \\ -(2T - 2T^2) & \\ \cline{1-1} 0 + 2T^2 & \\ -(2T^2 - 2T^3) & \\ \cline{1-1} 0 + 2T^3 & \end{array}$$

$$\frac{1+T}{T^3(-1+T)} = \frac{(\cancel{-1+T})(-1-2T-2T^2)}{T^3 (\cancel{-1+T})} + \frac{2\cancel{T^3}}{\cancel{T^3}(-1+T)}$$

$$f(T) = \frac{-1}{T^3} - \frac{2}{T^2} - \frac{2}{T} + \frac{2}{-1+T}$$

$$f(x) = \frac{-1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{x-2}$$

$$f_2(x) = \frac{2x+1}{(x^2-1)^3} = \frac{2x+1}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

$$= \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}$$

$T = x - 1 \qquad 2(T+1) + 1 = 2T + 3 \qquad (T+1) + 1 = T+2$

$x = T + 1$

On effectue la division de $(3+2T)$ sur $(2+T)^3$ suivant ~~l'ordre~~ les puissance croissante jusqu'à l'ordre 2

$$3 + 2T = (8 + 12T + 6T^2 + T^3)\left(\frac{3}{8} - \frac{5}{16}y + \frac{3}{16}y^2\right) - \left(\frac{3}{4}T^3 + \frac{13}{16}T^4 + \frac{3}{16}T^5\right).$$

Suite 23

Ex 10 Décomposer en éléments simples sur le corps des nombres réels les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$f_2(x) = \frac{2x+1}{(x^2-1)^3}$$

Suite $f_1(x)$

$$\frac{3+2T}{T^3(2+T)^3} = \frac{3}{8T^3} - \frac{5}{16T^2} + \frac{3}{16T} - \frac{3y}{4(2+T)^3} - \frac{13y^2}{16(2+T)^3} - \frac{3y^3}{16(2+y)^3}$$

$A_1 = \frac{3}{8}$ $A_2 = \frac{-5}{16}$ $A_3 = \frac{3}{16}$.

De même on pose $x+1 = T \Rightarrow x = T-1$

On effectue la division de $(-1+2T)$ par $(-2+T)^3$

$(-2+T)^3 = -8 + 12Z - 6Z^2 + Z^3$

suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre

$2(T-2)+1$

$= 2T-1$

$(T-2)-1$

$T-2$

$$(-1+2T) = (-2+T)^3\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}Z - \frac{3}{16}Z^2\right) + \frac{7}{4}Z^3 - \frac{5}{16}Z^4 + \frac{3}{16}Z^5$$

$$\frac{-1+2T}{T^3(-2+T)^3} = \frac{1}{8T^3} - \frac{1}{16T^2} - \frac{3}{16T} + \frac{7}{4(-2+T)^3} - \frac{5Z}{16(-2+T)} + \frac{3Z^2}{16(-2+T)^3}$$

$B_1 = \frac{1}{8}$ $B_2 = \frac{-1}{16}$ $B_3 = \frac{-3}{16}$