Rappels de cours : nombres complexes

Soit le nombre complexe Z, sa forme algébrique est donnée :

$$Z = a + bi \ (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\ et\ i^2 = -1)$$

a est la partie réelle du nombre imaginaire Z : $Re(Z) = a$.
b est la partie imaginaire du nombre complexe Z : $Im(Z) = b$.

Z est dit purement imaginaire si et seulement si $a = 0$.
Z est dit purement réel si et seulement si $b = 0$.

Le module du nombre complexe Z est la distance OM tel que : $r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
L'argument du nombre complexe Z est l'angle θ tel que : $Arg(Z) = \theta$.

Z peut s'écrire sous la forme Trigonométrique suivante :

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ou encore sous la forme Exponentielle :

$$Z = re^{i\theta}$$

Conjugué d'un nombre complexe
Le nombre complexe conjugué de $Z = a + bi$ est le nombre complexe $\overline{Z} = a - bi$.

$$Z\overline{Z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |Z|^2 = |\overline{Z}|^2$$

Soit $Z_1 = a_1 + b_1 i$ et $Z_2 = a_2 + b_2 i$ deux nombres complexes.

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)$$

$$\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1}\ \overline{Z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Propriétés des nombres complexes
Soit deux nombres complexes $Z_1 = a_1 + b_1 i$ et $Z_2 = a_2 + b_2 i$.
Égalité : $Z_1 = Z_2 \ \Rightarrow \ a_1 = a_2\ et\ b_1 = b_2$.
Produit : $Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
$|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$
$Arg(Z_1 Z_2) = Arg(Z_1) + Arg(Z_2)$
$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 (cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2)) = r_1 r_2 e^i(\theta_1 + \theta_2)$
Quotient :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{Z_1\overline{Z_2}}{|Z_2|^2}$$

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$Arg(\frac{Z_1}{Z_2}) = Arg(Z_1) - Arg(Z_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\sin(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

TD : 1 mathématiques : Nombres complexes

Exercice 1 : Ecrire sous la forme $a + bi$ les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \frac{2 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2i},\ Z_2 = \frac{(2+i)(3+2i)}{2(2-i)},\ Z_3 = \frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)},\ Z_4 = [\frac{2+i^5}{1+i^{15}}]^2$$

Exercice 2 : Déterminer le paramètre α pour que :

$$Z = \frac{1 + \alpha i}{2\alpha + i(\alpha^2 - 1)}$$

soit purement imaginaire.

Exercice 3 : Déterminer les modules et les arguments des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1 + i,\ Z_2 = \frac{1-i}{1+i},\ Z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i},\ Z_4 = (1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$$

Exercice 4 : Simplifier les expressions suivantes :

$$Z_1 = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta - i\sin\beta},\ Z_2 = \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{2(1-i)(\cos\alpha - i\sin\alpha)}$$

Exercice 5 : Déterminer les parties réelles et les parties imaginaires des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = e^{-1+\frac{i\pi}{6}},\ Z_2 = e^{2-i},\ Z_3 = e^{\frac{-i\pi}{2}},\ Z_4 = e^{1+i}e^{-2+\frac{i\pi}{3}}$$

Exercice 6 :

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$Z^2 + Z\sqrt{3} + 1 = 0,\ Z^2 = -8 + 6i$$

b) Déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$Z^2 + (-3+i)Z + 4 - 3i = 0$$

Exercice 7 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (1-5i)Z - 3i - 6 = 0$ sachant que l'une des solutions est imaginaire pure.

Exercice 8 :

1- Sachant que Z appartient au cercle trigonométrique unitaire ($z = e^{i\theta}$), simplifier l'expression du complexe : $Z = \frac{1-z}{1+z}$.

2- Simplifier l'expression : $A = (1+Z)^n$ avec $Z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 : Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 2i,\ Z_2 = \frac{1+i}{1-i},\ Z_3 = 1 + i$$

Exercice 10 : Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1,\ Z_2 = i,\ Z_3 = 2 - 2i,\ Z_4 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$$