BÀI 9: ƯỚC CHUNG - ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

Mục tiêu

- **Kiến thức**
  - Hiểu được khái niệm ước chung, ước chung lớn nhất, và khái niệm các số nguyên tố cùng nhau.
  - Nhận biết được giao của hai tập hợp.
  - Nhận biết được quan hệ giữa ước chung và ước chung lớn nhất.
- **Kĩ năng**
  - Xác định được ước chung và ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số tự nhiên lớn hơn 1.
  - Biết cách tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố.
  - Tìm được tập hợp các ước chung của các số đã cho thông qua tìm ước chung lớn nhất của chúng.
  - Vận dụng giải các dạng toán tìm ước chung và ước chung lớn nhất.
  - Chứng minh được hai hay nhiều số nguyên tố cùng nhau.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Ước chung

Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

$x \in ƯC(a,b)$ nếu $a \vdots x$ và $b \vdots x$

$x \in ƯC(a,b,c)$ nếu $a \vdots x$, $b \vdots x$ và $c \vdots x$

Chú ý:

Giao của hai tập hợp là một tập hợp gồm các phần tử chung của hai tập hợp đó.

Kí hiệu giao của hai tập hợp A và B là $A \cap B$.

Ví dụ.

$Ư(8) = \{1;2;4;8\}$

$Ư(12) = \{1;2;3;4;6;12\}$

Các số 1; 2 và 4 vừa là ước của 8, vừa là ước của 12 nên chúng được gọi là ước chung của 8 và 12.

$ƯC(8,12) = Ư(8) \cap Ư(12)$.

2. Ước chung lớn nhất

Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

Nhận xét: $ƯCLN(a,b) \in ƯC(a,b)$

Chú ý: Số 1 chỉ có một ước là 1. Do đó với mọi số tự nhiên a và b, ta có:

$ƯCLN(a;1) = 1; ƯCLN(a;b;1) = 1$

Số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của 8 và 12 là 4.

Suy ra $ƯCLN(8;12) = 4$

$ƯC(8,12)$ đều là ước của 4.

$ƯCLN(7;1) = 1; ƯCLN(15;20;1) = 1$

3. Tìm ước chung lớn nhất bằng cách phân tích các số ra thừa số nguyên tố

Muốn tìm ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số

Ví dụ. Tìm $ƯCLN(8;12)$

$8 = 2^3; 12 = 2^2.3$

lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau:

Bước 1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

Bước 2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

Bước 3. Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ước chung lớn nhất phải tìm.

Chú ý:

+ Nếu các số đã cho không có thừa số nguyên tố chung thì ƯCLN của chung bằng 1. Hai hay nhiều số có ƯCLN bằng 1 gọi là các số nguyên tố cùng nhau.

+ Trong các số đã cho, nếu số nhỏ nhất là ước của các số còn lại thì ƯCLN của chúng chính là số nhỏ nhất ấy.

Thừa số nguyên tố chung là: 2, với số mũ nhỏ nhất là 2.

$ƯCLN\left(8;12\right)=2^2=4$

$ƯCLN\left(8;9\right)=1$ nên 8 và 9 là hai số nguyên tố cùng nhau.

$ƯCLN\left(4;8;12\right)=4$ vì $8 \vdots 4, 12 \vdots 4$

4. Cách tìm ước chung thông qua tìm ƯCLN

Để tìm ước chung của các số đã cho, ta có thể tìm các ước của ƯCLN của các số đó.

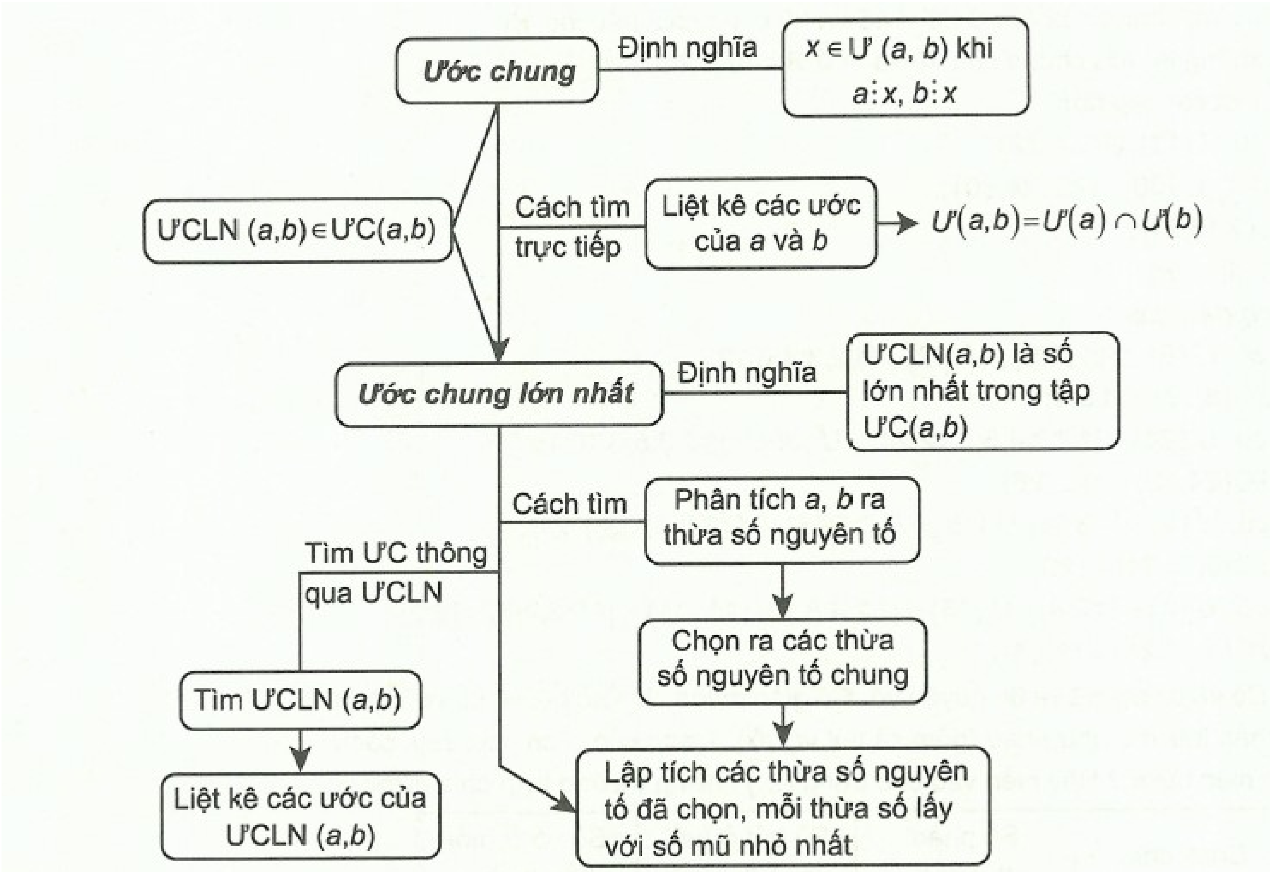
Ví dụ. Tìm ước chung của 12 và 18.

$ƯCLN\left(12;18\right)=6$

$Ư\left(6\right)=\left\{1;2;3;6\right\}$

$\Rightarrow ƯC\left(12;18\right)=Ư\left(6\right)=\left\{1;2;3;6\right\}$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm ước chung

Phương pháp giải

Tìm ước chung của hai số a và b:

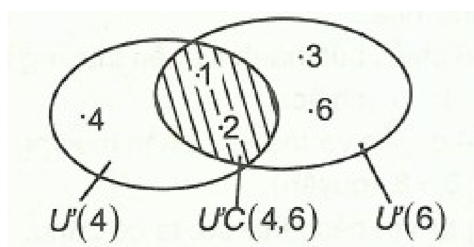
+ ***Bước 1.*** $Ư\left(a\right)=\left\{....\right\}$

$Ư\left(b\right)=\left\{....\right\}$

+ ***Bước 2.*** $ƯC\left(a,b\right)=Ư\left(a\right)\cap Ư\left(b\right)$

Ví dụ: $Ư\left(4\right)=\left\{1;2;4\right\}$

$Ư\left(6\right)=\left\{1;2;3;6\right\}$



$\Rightarrow ƯC\left(4,6\right)=\left\{1;2\right\}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1.

a) Số 15 có là ước chung của 45 và 60 không? Vì sao?

b) Số 24 có là ước chung của 48 và 140 không? Vì sao?

Hướng dẫn giải

a) 15 là ước chung của 45 và 60 vì 45 và 60 cùng chia hết cho 15.

b) 24 không là ước chung của 48 và 140 vì $140 \not\vdots 24$.

Ví dụ 2. Viết các tập hợp:

a) $Ư(8), Ư(12), ƯC(8,12)$;

b) $Ư(24), Ư(30), ƯC(24,30)$;

c) $ƯC(9;15;21)$;

d) $ƯC(4;16;24)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $Ư(8) = \{1;2;4;8\}; Ư(12) = \{1;2;3;4;6;12\}$.

Vậy $ƯC(8,12) = \{1;2;4\}$.

b) Ta có: $Ư(24) = \{1;2;3;4;6;8;12;24\}; Ư(30) = \{1;2;3;5;6;10;15;30\}$.

Vậy $ƯC(24,30) = \{1;2;3;6\}$.

c) Ta có: $Ư(9) = \{1;3;9\}; Ư(15) = \{1;3;5;15\}; Ư(21) = \{1;3;7;21\}$.

Vậy $ƯC(9;15;21) = \{1;3\}$.

d) Ta có: $Ư(4) = \{1;2;4\}; Ư(16) = \{1;2;4;8;16\}; Ư(24) = \{1;2;3;4;6;8;12;24\}$.

Vậy $ƯC(4;16;24) = \{1;2;4\}$.

Ví dụ 3. Có 48 chiếc bút và 64 quyển vở. Cô giáo muốn chia số bút và số vở thành một số phần thưởng như nhau (gồm cả bút và vở). Trong các cách chia sau, cách nào thực hiện được? Hãy điền vào chỗ trống (...) những trường hợp chia được.

Cách chia	Số phần thưởng	Số bút ở mỗi phần thưởng	Số vở ở mỗi phần thưởng
Thứ nhất	8	……………………	………………….
Thứ hai	12	…………………….	…………………..
Thứ ba	16	…………………….	…………………..

Hướng dẫn giải

Số phần thưởng như nhau (gồm cả bút và vở) phải là ước chung của 48 và 64. Trong ba số 8; 12; 16 thì chỉ có 8 và 16 là ước chung của 48 và 64.

Vậy cách chia thứ nhất và thứ ba thực hiện được.

Cách thứ nhất:

Chia 48 chiếc bút thành 8 phần thưởng như nhau, thì số bút ở mỗi phần thưởng là: $48:8=6$ (chiếc).

Chia 64 quyển vở thành 8 phần thưởng như nhau, thì số vở ở mỗi phần thưởng là: $64:8=8$ (quyển).

Tương tự với cách thứ ba, ta có bảng:

Cách chia	Số phần thưởng	Số bút ở mỗi phần thưởng	Số vở ở mỗi phần thưởng
Thứ nhất	8	6	8
Thứ hai	12	……………….	…………………
Thứ ba	16	3	4

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1.

a) Số 12 có là ước chung của 24 và 30 không? Vì sao?

b) Số 14 có là ước chung của 28; 56 và 84 không? Vì sao?

Câu 2. Viết các tập hợp sau:

a) $Ư\left(30\right), Ư\left(42\right), ƯC\left(30,42\right)$;

b) $Ư\left(27\right), Ư\left(54\right), ƯC\left(27,54\right)$;

c) $ƯC\left(12,20,32\right)$;

d) $ƯC\left(14,28,56\right)$.

Câu 3. Viết các tập hợp sau:

a) $Ư\left(6\right), Ư\left(16\right), ƯC\left(6,16\right)$;

b) $Ư\left(9\right), Ư\left(18\right), Ư\left(27\right), ƯC\left(18,27\right)$;

c) $Ư\left(14\right), Ư\left(42\right), ƯC\left(14,42\right)$.

Câu 4. Có 32 học sinh nam và học sinh 40 nữ. Người ta muốn chia đều số học sinh nam và nữ vào các nhóm. Trong các cách chia sau, cách nào thực hiện được? Điền vào chỗ trống (...) các trường hợp chia được.

Cách chia	Số nhóm	Số nam trong mỗi nhóm	Số nữ trong mỗi nhóm
Thứ nhất	4	………………….	……………………..
Thứ hai	6	………………….	……………………
Thứ ba	8	…………………..	……………………..

Câu 5. Lớp 6A có 24 học sinh nam và 36 học sinh nữ. Thầy giáo cần chia cả lớp thành các hàng dọc để tập thể dục, sao cho số nam và số nữ ở mỗi hàng bằng nhau. Trong các cách xếp sau, cách nào thực hiện được? Điền vào chỗ trống (...) những trường hợp chia được.

Cách chia	Số hàng dọc	Số nam ở mỗi hàng	Số nữ ở mỗi hàng
Thứ nhất	4	…………………..	………………….
Thứ hai	6	……………………	………………….
Thứ ba	8	……………………..	…………………..
Thứ tư	12	……………………	………………….

Bài tập nâng cao

Câu 6. Tìm ước chung của hai số $n+3$ và $2n+5$ với $n \in \mathbb{N}$.

Câu 7. Số 4 có thể là ước chung của hai số $n+1$ và $2n+5$ ($n \in \mathbb{N}$) không?

Dạng 2: Tìm ước chung lớn nhất

- **Phương pháp giải**

+ Tìm ước chung lớn nhất của hai số a và b:

Cách 1. Tìm $ƯC\left(a,b\right)$, chọn số lớn nhất trong tập hợp đó.

Cách 2.

Bước 1. Phân tích a và b ra thừa số nguyên tố.

Bước 2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

Bước 3. Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó.

Tích đó là ƯCLN cần tìm.

Ví dụ. $ƯC\left(4,6\right)=\left\{1;2\right\}$.

Cách 1. 2 là số lớn nhất trong tập $ƯC\left(4,6\right)$. Vậy $ƯC\left(4,6\right)=2$.

Cách 2. $4=2^2$;

$6=2.3$.

Thừa số chung là: 2 với số mũ nhỏ nhất là 1.

$\Rightarrow ƯCLN\left(4,6\right)=2^1=2$

Ví dụ. $ƯCLN\left(12,30\right)=6$

+ Tìm $ƯC(a,b)$ thông qua ước chung lớn nhất:

Bước 1. Tìm $ƯCLN(a,b)$.

Bước 2. Liệt kê các ước của ƯCLN.

Các ước của 6 là: 1; 2; 3; 6.

$\Rightarrow ƯC(12,30)=\{1;2;3;6\}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm ước chung lớn nhất của:

a) 9 và 14; b) 5; 15 và 30;

c) 12; 28 và 32. d) 24; 84 và 180.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $9=3^2$;

$14=2.7$.

Ta thấy 9 và 14 không có thừa số chung nên $ƯCLN(9,14)=1$.

b) Ta có: $5=1.5$;

$15=3.5$;

$30=2.3.5$.

Thừa số chung là 5, với số mũ nhỏ nhất là 1.

Vậy $ƯCLN(5,15,30)=5^1=5$.

c) Ta có: $12=2^2.3$;

$28=2^2.7$;

$32=2^5$.

Thừa số chung là 2, với số mũ nhỏ nhất là 2.

Vậy $ƯCLN(12,28,32)=2^2=54$.

d) Ta có: $24=2^3.3$;

$84=2^2.3.7$;

$180=2^2.3^2.5$.

Thừa số chung là: 2 (số mũ nhỏ nhất là 2) và 3 (số mũ nhỏ nhất là 1).

Vậy $ƯCLN(24,84,180)=2^2.3=12$.

Ví dụ 2. Tìm ƯCLN rồi tìm ước chung của:

a) 18 và 24; b) 36; 54 và 81;

c) 48; 60 và 120; d) 30; 75 và 135.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $18=2.3^2$;

$24=2^3.3$.

Thừa số chung là: 2 (số mũ nhỏ nhất là 1) và 3 (số mũ nhỏ nhất là 1).

$\Rightarrow ƯCLN\left(18,24\right)=2^1.3^1=6$.

Các ước của 6 là: 1; 2; 3; 6.

Vậy $ƯC\left(18,24\right)=\left\{1;2;3;6\right\}$.

b) Ta có: $36=2^2.3^2$;

$54=2.3^3$;

$81=3^4$.

Thừa số chung là: 3 (số mũ nhỏ nhất là 2).

$\Rightarrow ƯCLN\left(36,54,81\right)=3^2=9$

Các ước của 9 là: 1; 3; 9.

Vậy $ƯC\left(36,54,81\right)=\left\{1;3;9\right\}$.

c) Ta có: $48=2^4.3$;

$60=2^2.3.5$;

$120=2^3.3.5$.

Thừa số chung là: 2 (số mũ nhỏ nhất là 2)

và 3 (số mũ nhỏ nhất là 1).

$\Rightarrow ƯCLN\left(48,60,120\right)=2^2.3^1=12$.

Các ước của 12 là: 1; 2; 3; 6; 12.

Vậy $ƯC\left(48,60,120\right)=\left\{1;2;3;6;12\right\}$.

d) Ta có: $30=2.3.5$;

$75=3.5^2$;

$135=3^3.5$.

Thừa số chung là: 3 (số mũ nhỏ nhất là 1) và 5 (số mũ nhỏ nhất là 1).

$\Rightarrow ƯCLN\left(30,75,135\right)=3^1.5^1=15$.

Các ước của 15 là: 1; 3; 5; 15.

Vậy $ƯC\left(30,75,135\right)=\left\{1;3;5;15\right\}$.

Ví dụ 3. Minh có một tấm bìa hình chữ nhật kích thước 60 cm và 84 cm. Minh muốn cắt tấm bìa thành các mảnh nhỏ hình vuông bằng nhau, sao cho tấm bìa được cắt hết, không còn thừa mảnh nào. Tính độ dài lớn nhất của cạnh hình vuông (biết số đo của cạnh hình vuông nhỏ là một số tự nhiên với đơn vị xentimet).

Hướng dẫn giải

Gọi độ dài cạnh các mảnh hình vuông là a (cm).

Ta phải có $60 \vdots a$, $84 \vdots a$ và a là lớn nhất. Suy ra $a = ƯCLN\left(60,84\right)$.

Ta có: $60 = 2^2.3.5$;

$84 = 2^2.3.7$

$\Rightarrow ƯCLN\left(60,84\right) = 2^2.3. = 12$

Vậy độ dài lớn nhất của cạnh hình vuông là 12cm.

Ví du 4. Tìm hai số tự nhiên a và b $\left(a > b\right)$, biết rằng chúng có tổng bằng 224 và ước chung lớn nhất bằng 28.

Hướng dẫn giải

Vì $ƯCLN\left(a,b\right) = 28$ nên giả sử $a = 28a';b = 28b'$ trong đó $ƯCLN\left(a',b'\right) = 1$ và $a' > b'$.

Ta có: $a + b = 224$

$28a' + 28b' = 224$

$28\left(a' + b'\right) = 224$

$\Rightarrow a' + b' = 8$

Do $ƯCLN\left(a',b'\right) = 1$ và $a' > b'$ nên ta có bảng:

a'	7	5
b'	1	3

Suy ra

a	196	140
b	28	84

Vậy hai số cần tìm là 196 và 28 hoặc 140 và 84.

Ví du 5. Tìm số tự nhiên a, biết rằng 130 chia cho a dư 10 và 172 chia cho a dư 12.

Hướng dẫn giải

Vì 130 chia cho a dư 10 nên $120 \vdots a$ và $a > 10$.

172 chia cho a dư 12 nên $160 \vdots a$ và $a > 12$.

$\Rightarrow a \in ƯCLN\left(120,160\right)$ và $a > 12$.

Ta có: $120 = 2^3.3.5;160 = 2^5.5$

$\Rightarrow ƯCLN\left(120,160\right) = 2^3.5 = 40$

Mà $Ư\left(40\right) = \left\{1;2;4;5;8;10;20;40\right\}$ và $a > 12$ nên $a = 20$ hoặc $a = 40$.

Vậy số cần tìm là 20 hoặc 40.

Chú ý: *m chia cho a dư r thì* $\left(m - r\right) \vdots a$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Bài tập cơ bản

Câu 1. Tìm ước chung lớn nhất của:

a) 18 và 30; b) 36; 48 và 72; c) 27; 45 và 81. d) 54; 135 và 162;

Câu 2. Tìm ƯCLN rồi tìm ước chung của:

a) 40 và 60; b) 28; 39 và 35; c) 48; 60 và 120; d) 30; 75 và 135.

Câu 3. Tìm số tự nhiên x, biết $126 \vdots x, 210 \vdots x$ và $15 < x < 30$.

Câu 4. Tìm số tự nhiên a lớn nhất thỏa mãn:

a) $320 \vdots a$ và $480 \vdots a$; b) $360 \vdots a$ và $600 \vdots a$.

Câu 5. Tìm số tự nhiên a lớn hơn 25, biết rằng các số 525; 875 và 280 đều chia hết cho a.

Câu 6. Một đội y tế gồm có 36 bác sĩ và 120 y tá. Có thể chia đội y tế đó thành nhiều nhất bao nhiêu tổ để các bác sĩ và các y tá được chia đều vào mỗi tổ?

Câu 7. Một nhóm thanh niên tình nguyện gồm 48 nam và 54 nữ. Có thể thành nhiều nhất bao nhiêu tổ để đi tham gia tình nguyện ở các địa phương? Biết rằng số nam và số nữ được chia đều vào mỗi tổ.

Câu 8. Đào và Mai mỗi người mua một số bút chì màu, trong mỗi hộp đều có nhiều hơn hai bút và số bút ở mỗi hộp bằng nhau. Biết rằng Đào mua được 28 bút và Mai mua được 36 bút. Hỏi mỗi hộp bút chì màu có bao nhiêu chiếc?

Câu 9. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 132 m và chiều rộng 72 m. Người ta muốn trồng cây xung quanh vườn sao cho mỗi góc vườn có mỗi cây và khoảng cách giữa hai cây liên tiếp bằng nhau.Tính khoảng cách lớn nhất giữa hai cây liên tiếp có thể trồng được (khoảng cách là số tự nhiên đơn vị là m). Khi đó tổng số cây là bao nhiêu?

Bài tập nâng cao

Câu 10. Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 120 m và chiều rộng 80 m. Người ta muốn trồng cây xung quanh vườn, sao cho mỗi góc vườn có một cây và khoảng cách giữa hai cây liên tiếp bằng nhau. Hỏi số cây phải trồng ít nhất là bao nhiêu?

Câu 11. Tìm số tự nhiên a, biết rằng 130 chia cho a dư 10 và 172 chia cho a dư 12.

Câu 12. Tìm số tự nhiên a, biết rằng 156 chia cho a dư 12 và 280 chia cho a dư 10.

Câu 13. Tìm hai số tự nhiên a và b $(a > b)$, biết rằng:

a) $a + b = 84$; $ƯCLN(a,b) = 14$. b) $a + b = 135$; $ƯCLN(a,b) = 27$.

c) $a.b = 96$; $ƯCLN(a,b) = 4$.

Câu 14. Tìm hai số tự nhiên a và b $(a > b)$, biết rằng tổng của chúng bằng 128 và ước chung lớn nhất là 32.

Dạng 3: Bài toán về tập hợp

Phương pháp giải

Giao của hai tập hợp A và B là một tập hợp gồm các phần tử chung của hai tập đó.

Kí hiệu: $A \cap B$.

Nhận xét:

+ $A \cap B = \varnothing$ nếu chúng không có phần tử chung.

+ $A \subset B$ thì $A \cap B = A$.

Ví dụ. $A = \{a; b; c; 2\}$; $B = \{1; 2; a\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{2; a\}$.

Ví dụ.

+ $A = \{1; 2; 3\}; B = \{4; 5\}$

$\Rightarrow A \cap B = \varnothing$

+ $A = \{2; 4\}; B = \{0; 2; 4; 8\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{2; 4\} = A$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giao của hai tập hợp A và B, biết rằng:

$A = \{\text{bàn, ghế, bảng, bút}\}; B = \{\text{bút, thước, vở, bảng}\}$.

A là tập hợp các số chia hết cho 2, B là tập hợp các số chia hết cho 4.

A là tập hợp các số chẵn, B là tập hợp các số lẻ.

Hướng dẫn giải

$A \cap B = \{\text{bảng, bút}\}$

Vì số chia hết cho 4 thì cũng chia hết cho 2 nên $B \subset A$. Do đó $A \cap B = B$.

$A \cap B = \varnothing$ (vì tập hợp số chẵn và số lẻ không có phần tử chung).

Ví dụ 2. Viết tập hợp A gồm các ước nhỏ hơn 10 của 30.

Viết tập hợp B gồm các ước của 12.

Gọi M là giao của hai tập hợp A và B.

Liệt kê các phần tử của tập hợp M.

Dùng kí hiệu $\subset$ để thể hiện quan hệ giữa tập M với mỗi tập hợp A và B.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = \{x \in Ư(30) | x < 10\} = \{1; 2; 3; 5; 6\}$

$B = Ư(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

$\Rightarrow M = A \cap B = \{1; 2; 3; 6\}$

$M \subset A, M \subset B$.

Ví dụ 3. Lớp 6A có 25 học sinh chỉ giỏi Toán, 17 học sinh chỉ giỏi Văn và 10 học sinh giỏi cả Toán và Văn. Hỏi:

Lớp 6A có bao nhiêu học sinh giỏi Toán? Bao nhiêu học sinh giỏi Văn?

Lớp 6A có tất cả bao nhiêu học sinh?

Hướng dẫn giải

Lớp 6A có số học sinh giỏi Toán là: $25 + 10 = 35$ (học sinh).

Lớp 6A có số học sinh giỏi Văn là: $17 + 10 = 27$ (học sinh).

Lớp 6A có tất cả số học sinh là: $25 + 17 + 10 = 52$ (học sinh).

Bài tập tự luyện dạng 3

Bài tập cơ bản

Câu 1. Tìm giao của hai tập hợp A và B, biết rằng:

a) $A = \{\text{đào, cam, chanh}\}$; $B = \{\text{táo, lê, cam}\}$

b) A là tập hợp các số chia hết cho 3, B là tập hợp các số chia hết cho 6.

c) A là tập hợp các số nguyên tố, B là tập hợp các số là hợp số.

Câu 2. Gọi M là tập hợp các học sinh giỏi Toán của lớp 6A.

N là tập hợp các học sinh giỏi Văn của lớp 6A.

Hỏi $M \cap N$ biểu thị tập hợp nào?

Câu 3. Viết tập hợp A gồm các ước nhỏ hơn 30 của 50.

Viết tập hợp B gồm các ước của 20.

Gọi M là giao của hai tập hợp A và B.

a) Liệt kê các phần tử của tập hợp M.

b) Dùng kí hiệu $\subset$ để thể hiện quan hệ giữa tập M với mỗi tập hợp A và B.

Câu 4. Lớp 6A có 20 học sinh chỉ giỏi Tiếng Anh, 5 học sinh chỉ giỏi Tiếng Pháp và 12 học sinh giỏi cả Tiếng Anh và Tiếng Pháp. Hỏi:

a) Lớp 6A có bao nhiêu học sinh giỏi Tiếng Anh? Bao nhiêu học sinh giỏi Tiếng Pháp?

b) Lớp 6A có tất cả bao nhiêu học sinh?

Dạng 4: Chứng minh hai hay nhiều số là các số nguyên tố cùng nhau

Phương pháp giải

Chứng minh a và b là hai số nguyên tố cùng nhau:

+ ***Bước 1.*** Giả sử $d = ƯC\left(a,b\right)$. Suy ra $a \vdots d$ và $b \vdots d$.

+ ***Bước 2.*** Áp dụng tính chất chia hết của một tổng (hiệu) để chứng minh $d = 1$.

$\Rightarrow ƯCLN\left(a,b\right) = 1$

Kết luận, a và b là hai số nguyên tố cùng nhau

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn giải

Hai số lẻ liên tiếp có dạng là $2n+1$ và $2n+3$ $\left(n \in \mathbb{N}\right)$.

Gọi d là ước chung của $2n+1$ và $2n+3$.

Ta có: $d \vdots (2n+1)$ và $d \vdots (2n+3)$.

Áp dụng tính chất chia hết của một hiệu: $(2n+3)-(2n+1) \vdots d$ hay $2 \vdots d$.

Suy ra $d = 1$ hoặc $d = 2$.

Mà $2n+1$ và $2n+3$ là hai số lẻ nên ước chung của chúng không thể bằng 2.

Do đó $d = 1$. Suy ra $ƯCLN\left(2n+1, 2n+3\right) = 1$

Vậy $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

> ***Chú ý:*** *Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $2n+3 > 2n+1$ nên ta xét hiệu $(2n+3)-(2n+1)$.*
>
> *Do vậy cần so sánh xem số nào lớn hơn trước khi xét hiệu.*

Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng $n+1$ và $3n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi d là ước chung của $n+1$ và $3n+4$.

Ta có: $(n+1) \vdots d$ suy ra $3.(n+1) \vdots d$; và $(3n+4) \vdots d$

Áp dụng tính chất chia hết của một hiệu: $(3n+4)-(3n+3) \vdots d$ hay $1 \vdots d$.

Suy ra $d = 1$.

Do đó $ƯCLN\left(n+1, 3n+4\right) = 1$

Vậy $n+1$ và $3n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

> ***Chú ý:*** *Nếu xét hiệu $(3n+4)-(n+1) \vdots d \Rightarrow (2n+3) \vdots d$*
>
> *Suy ra ở d là ước của $2n+3$.*
>
> *Ta không tìm được ước của $2n+3$, do đó không tìm được d.*
>
> Vì vậy ta cần khử được n bằng cách nhân 3 vào $n+1$ để cân bằng hệ số ở $n+1$ và $3n+4$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $2n+1$ và $3n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Gọi d là ước chung của $2n+1$ và $3n+1$.

Khi đó: $(2n+1)\vdots d$ suy ra $3.(2n+1)\vdots d$;

và $(3n+1)\vdots d$ suy ra $2.(3n+1)\vdots d$.

Áp dụng tính chất chia hết của một hiệu ta được:

$3.(2n+1)-2.(3n+1)\vdots d \Rightarrow 1\vdots d$.

Suy ra $d=1$. Do đó $ƯCLN\left(2n+1,3n+1\right)=1$

Vậy $2n+1$ và $3n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Chú ý: *Vì bội chung của 2 và 3 là 6 nên để cân bằng hệ số của n ở $2n+1$ và $3n+1$ ta cần nhân chúng lần lượt với 3 và 2.*

Bài tập tự luyện dạng 4

Bài tập nâng cao

Câu 1. Chứng minh rằng hai số tự nhiên liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì $2n+1$ và $4n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Câu 3. Chứng minh các cặp số sau đây là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) $n+5$ và $2n+9$. b) $n+2$ và $3n+7$.

Câu 4. Chứng minh $n+3$ và $3n+10$ là hai số nguyên tố cùng nhau.