

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ και ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

3Δ Υπολογιστική Όραση και Γεωμετρία: Signed Distance Function

Ηλίας Ουζούνης
up1083749

24 Ιουνίου 2024

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	2
2	Part A	3
2.1	Φόρτωση watertight mesh	3
2.2	Ορθογραφική προβολή του μοντέλου σε επίπεδο	3
2.2.1	Δημιουργία του επιπέδου	3
2.2.2	Δειγματοληψία του επιπέδου	4
2.2.3	Υπολογισμός της προβολής	5
2.2.4	Επιτάχυνση των υπολογισμών	6
2.3	Εξεγωγή του περιγράμματος	8
2.4	Υπολογισμός του εμβαδού	9
2.4.1	Monte Carlo Προσέγγιση	9
2.4.2	Εμβαδό από τα τρίγωνα του alpha shape	9

1. Εισαγωγή

Το πρότζεκτ αυτό υλοποιήθηκε στα πλαίσια του μαθήματος 3Δ Υπολογιστική Όραση και Γεωμετρία στο 8ο εξάμηνο στο τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Σκοπός του πρότζεκτ ήταν η εξουκείωση με το Signed Distance Function ως εναλλακτική μέθοδος περιγραφής ενός 3Δ μοντέλου. Συγκεκριμένα δοκιμάστηκε η μέθοδος Ray-Marching για τον έλεγχο τομής του μοντέλου με μία ακτίνα με στόχο τον υπολογισμό της προβολής του μοντέλου πάνω σε ένα επίπεδο και συχριθήκε με μία προσέγγιση χωρίς τη χρήση του Signed Distance Function.

2. Part A

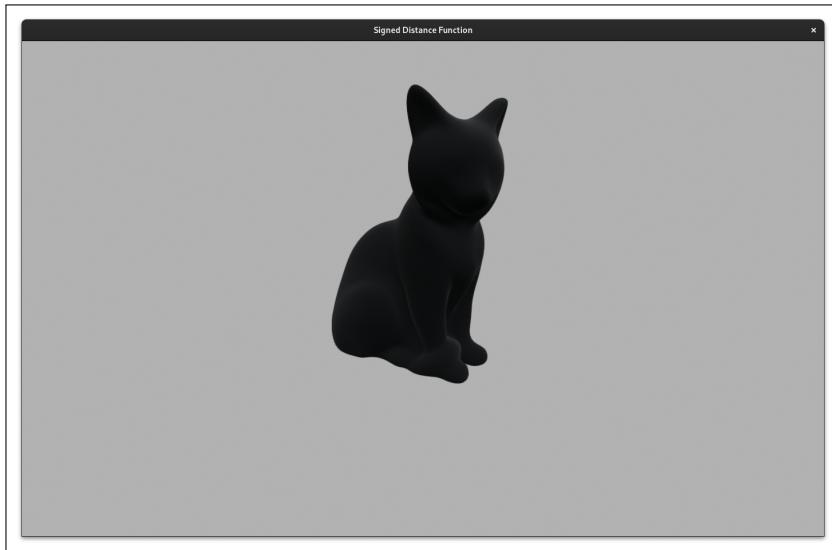
2.1 ΦΟΡΤΩΣΗ WATERTIGHT MESH

Ως watertight mesh, η Open3D ορίζει ένα Mesh το οποίο είναι edge manifold, vertex manifold και όχι self intersecting. Πιο απλά, ένα watertight mesh είναι ένα mesh που αποτελείται από μία κλειστή επιφάνεια, χωρίς κενά, με ξεκάθαρο μέσα και έξω.

Τα περισσότερα meshes που είναι διαθέσιμα online είναι watertight. Στα πλαίσια τις εργασίας χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα μοντέλα

- Concrete cat statue [1] με 24.4k vertices και 12.0k faces
- Rubber duck toy [2] με 8.6k vertices και 4.3k faces

Τα textures των μοντέλων δεν χρησιμοποιήθηκαν, καθώς δεν ήταν απαραίτητα για την εργασία.

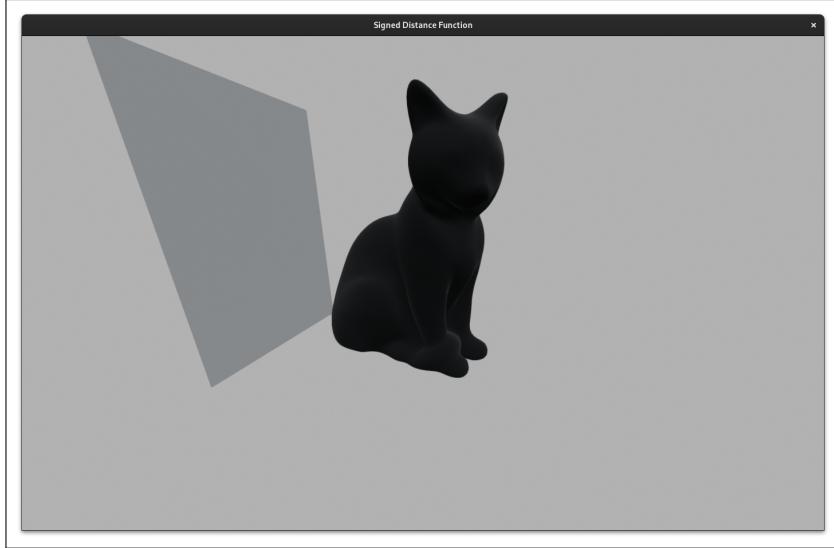


Σχήμα 2.1.1: Το μοντέλο της γάτας που χρησιμοποιήθηκε

2.2 ΟΡΘΟΓΡΑΦΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ

2.2.1 Δημιουργία του επιπέδου

Για να προβληθεί το μοντέλο της γάτας στο επίπεδο, έπρεπε πρώτα να δημιουργηθεί το επίπεδο. Βρίσκοντας το bounding box του μοντέλου και προσθέτοντας ένα μικρό offset στο z, δημιουργείται το επίπεδο. Το επίπεδο αυτό είναι παράλληλο στο επίπεδο x-y και βρίσκεται πίσω από το μοντέλο. Για να μπορούν να εμφανιστούν ενδιαφέροντες προβολές, υπάρχει η δυνατότητα περιστροφής του επιπέδου γύρω από τον άξονα y.



Σχήμα 2.2.1: Το επίπεδο προβολής πίσω από το μοντέλο

Οι υπολογισμοί που απαιτούνται για την εργασία είναι βοηθητικό να γίνουν στο σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου αντί του μοντέλου. Για τον λόγο αυτό υπολογίστηκε ένα rotation matrix που μεταφέρει το σύστημα συντεταγμένων του μοντέλου στο σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου. Αυτό το rotation matrix υπολογίζεται με βάση το κανονικό διάνυσμα του επιπέ-

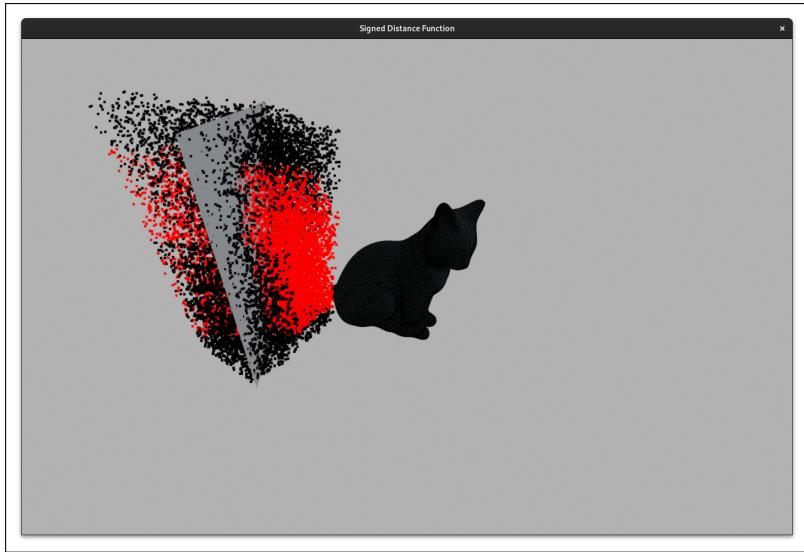
δου. Το διάνυσμα πρέπει να περισταφεί ώστε να πέφτει πάνω στο $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Εδώ χρησιμοποιήθηκε μία τροποποιημένη μορφή του Rodrigues' rotation formula [3]

$$\begin{aligned}
 v &= a \times b \\
 K &= \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \\
 \theta &= \arccos(a \cdot b) \\
 R &= I + \sin(\theta)K + (1 - \cos(\theta))K^2
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Υπολογίζει τον πίνακα που περιστρέφει το διάνυσμα a στο διάνυσμα b . Δηλαδή $Ra = b$. Μαζί με αυτό υπολογίστηκε και το αντίστροφό του R^{-1} για την αντίθετη μετατροπή.

2.2.2 Δειγματοληψία του επιπέδου

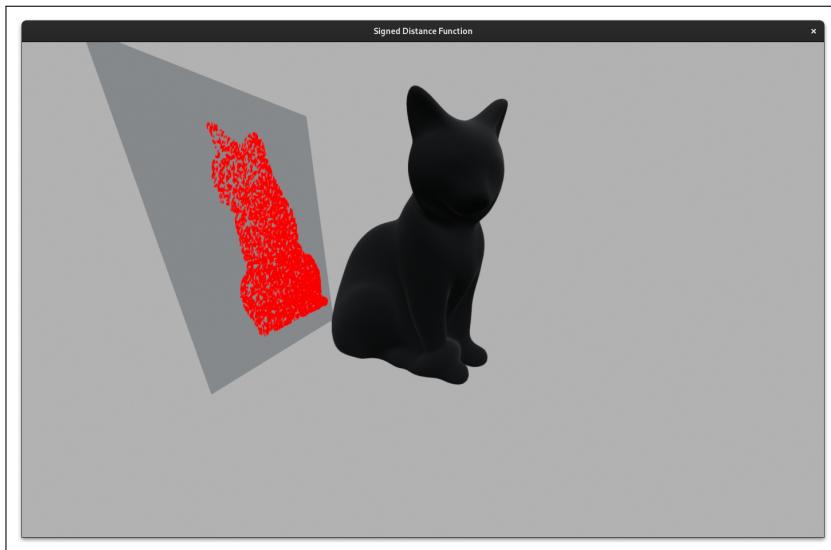
Για την ομοιόμορφη δειγματοληψία του επιπέδου χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση `create_random` της κλάσης PointCloud από την διθέντη βιβλιοθήκη `vvrgpywork`. Η συνάρτηση όμως, δέχεται σαν όρια για την δειγματοληψία ένα Cuboid. Αν σαν ορίσματα έπαιρνε 2 αντίθετες κορυφές του επιπέδου, τότε θα επέστρεφε σημεία μέσα στο ορθογώνιο που ορίζουν και όχι μόνο στην επιφάνειά του (όπως απαιτείται).



Σχήμα 2.2.2: Λάθος επιλογή τυχαίων σημείων

Εδώ χρειάζεται η αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων του επιπέδου, το ορθογώνιο που ορίζεται από 2 αντίθετες κορυφές του ταυτίζεται με το επίπεδο καθώς τα 2 σημεία έχουν τις ίδιες ζ συντεταγμένες. Έτσι, δημιουργούνται τα σημεία στο σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου και μετατρέπονται έπειτα στο σύστημα συντεταγμένων του μοντέλου για να εμφανιστούν στα σωστά σημεία.

Για αυτά τα σημεία, γίνεται ένας έλεγχος αν ανήκουν στην προβολή του επιπέδου ή όχι. Όσα βρίσκονται εντός της προβολής χρωματίζονται με κόκκινο και τα υπόλοιπα με μαύρο. Στο τέλος, εμφανίζεται με κόκκινο μία προσέγγιση της προβολής του μοντέλου στο επίπεδο. Όσα περισσότερα σημεία, τόσο καλύτερη η προσέγγιση.



Σχήμα 2.2.3: Προσέγγιση της προβολής του μοντέλου στο επίπεδο

2.2.3 Υπολογισμός της προβολής

Ο έλεγχος αν ένα σημείο ανήκει στην προβολή του μοντέλου δεν είναι τόσο απλός. Σε μία πρώτη προσέγγιση, υπολογίζονται οι προβολές των τριγώνων του μοντέλου στο επίπεδο και ελέγχεται αν το σημείο βρίσκεται εντός κάποιου τριγώνου. Αν βρίσκεται, τότε ανήκει στην προβολή του μοντέλου. Οι υπολογισμοί γίνονται πάλι στις συντεταγμένες του επιπέδου για

ευκολία. Οι κορυφές των τριγώνων μεταφέρονται στο σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου και έπειτα ξεσκαρτάρεται η z συντεταγμένη για να προκύψει η προβολή.

Για τον έλεγχο αν ένα σημείο p βρίσκεται εντός ενός τριγώνου χρησιμοποιήθηκαν οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες οι οποίες περιγράφουν το σημείο ως το γραμμικό συνδιαδυτό των κορυφών του τριγώνου.

$$p = u \cdot p_1 + v \cdot p_2 + w \cdot p_3 \quad (2.2.2)$$

όπου p_1, p_2, p_3 οι κορυφές του τριγώνου και u, v, w οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες.

Για να βρίσκεται το σημείο μέσα στο τρίγωνο αρχεί να ισχύει

$$u, v, w \geq 0 \text{ και } u + v + w = 1. \quad (2.2.3)$$

Για τον υπολογισμό των u, v, w χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις [4]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\begin{vmatrix} p_2.x - p_1.x & p.x - p_1.x \\ p_2.y - p_1.y & p.y - p_1.y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_2.x - p_1.x & p_3.x - p_1.x \\ p_2.y - p_1.y & p_3.y - p_1.y \end{vmatrix}} \\ v &= \frac{\begin{vmatrix} p_3.x - p_1.x & p.x - p_1.x \\ p_3.y - p_1.y & p.y - p_1.y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_2.x - p_1.x & p_3.x - p_1.x \\ p_2.y - p_1.y & p_3.y - p_1.y \end{vmatrix}} \\ w &= 1 - u - v \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

2.2.4 Επιτάχυνση των υπολογισμών

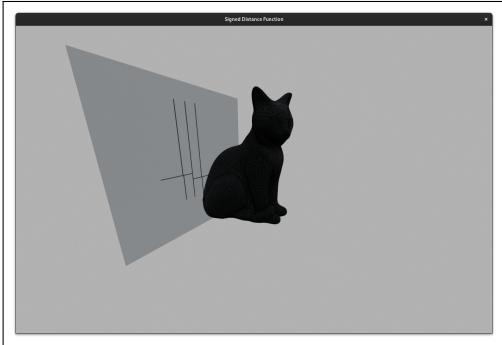
Οι υπολογισμοί αυτοί είναι αρκετά αργοί για μεγάλα μοντέλα με πολλά τρίγωνα και πολλά σημεία που χρειάζεται να ελεγχθούν. Η βιβλιοθήκη numpy βοηθάει στην παραλληλοποίηση πολλών από αυτών των υπολογισμών αξιοποιώντας πολλαπλασιασμούς πινάκων ώστε αντί να γίνονται οι υπολογισμοί σε κάποιο βρόγχο για κάθε σημείο, γίνονται για όλα τα σημεία ταυτόχρονα.

Ορίζεται μία νέα συνάρτηση η οποία παίρνει σαν όρισμα ένα numpy array από σημεία μεγάθους $[n, 3]$ και επιστρέφει ένα boolean numpy array $[n, m]$ όπου m το πλήθος των τριγώνων. Για κάθε σημείο, που αντιστοιχεί σε μία γραμμή στον πίνακα που επιστρέφεται, αν κάποια τιμή είναι True, σημαίνει ότι πέφτει πάνω στην προβολή κάποιου τριγώνου του μοντέλου. Αν όλες οι τιμές στην γραμμή είναι False, σημαίνει ότι βρίσκεται εκτός της προβολής.

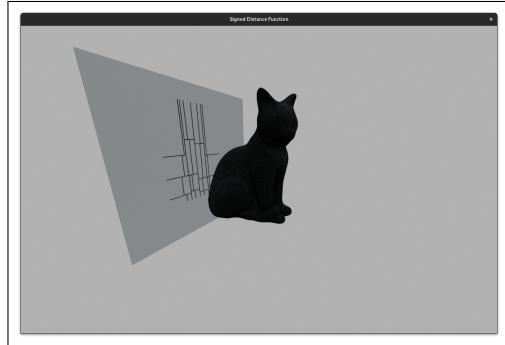
Επιπλέον, στην εξίσωση υπολογισμού των βαρυκεντρικών συντεταγμένων (2.2.4) κάποιες τιμές είναι ανεξάρτητες του σημείου p που ελέγχεται και μπορούν να προϋπολογιστούν.

Ακόμα χρειάζεται ο έλεγχος με όλα τα τρίγωνα του μοντέλου που καθιστερεί σημαντικά τους υπολογισμούς. Για να μειωθούν οι πράξεις που χρειάζονται, υλοποιήθηκε μία δομή KD-Tree η οποία χωρίζει τα τρίγωνα σε μικρότερες ομάδες ανάλογα με την θέση τους στον χώρο. Έτσι, ένα σημείο δεν ελέγχεται με τρίγωνα που βρίσκονται πολύ μακριά του.

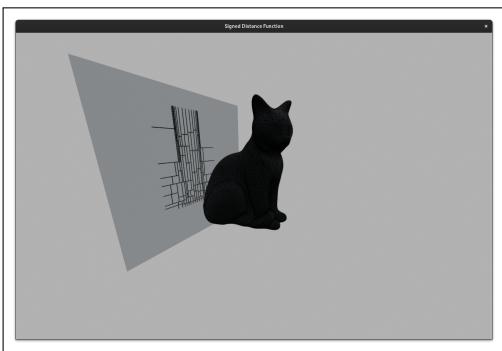
Για την δημιουργία του KD-Tree, δίνονται σαν όρισματα οι προβολές των vertices του μοντέλου στο επίπεδο και ένα indexed list με τα τρίγωνα. Στον αναδρομικό αλγόριθμο κατασκευής, επιλέγεται ένας άξονας και βρίσκεται το μέσο σημείο των κορυφών επί του άξονα. Τα σημεία τότε χωρίζονται σε δύο ομάδες ανάλογα με την θέση τους προς τον μέσο. Για τα τρίγωνα θα ισχύει ότι οι κορυφές τους βρίσκονται αποκλιστηκά στην μία ή στην άλλη ομάδα, ή και στις δύο. Τα τρίγωνα που έχουν και στις δύο μεριές κορυφές σημαίνει ότι τέμνονται από τον άξονα και θεωρείται ότι ανήκουν και στις δύο ομάδες. Ο αλγόριθμος εκτελείται επαναληπτικά για τις δύο ομάδες μέχρι να φτάσει σε σημείο που δεν υπάρχουν άλλες κορυφές.



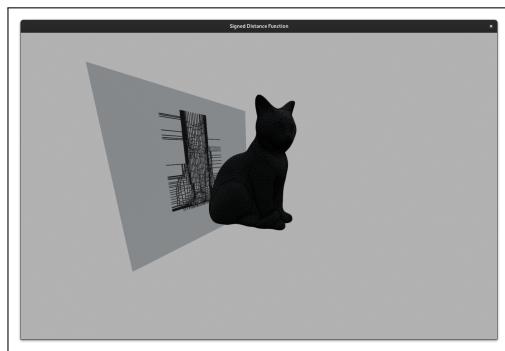
Σχήμα 2.2.4: KD-Tree με 3 iterations



Σχήμα 2.2.5: KD-Tree με 5 iterations



Σχήμα 2.2.6: KD-Tree με 7 iterations



Σχήμα 2.2.7: KD-Tree με 10 iterations

Σχήμα 2.2.8: Σταδιακό χτίσιμο του KD-Tree

Οπτικοποιώντας το KD-Tree ?? φαίνονται οι διαχωριστικοί άξονες που ορίζουν τις δίαφορες περιοχές.

Για τον έλεγχο των σημείων, ξεκινώντας από την ρίζα, ελέγχεται αν τα σημεία βρίσκονται δεξιά ή αριστερά του άξονα στον εκάστοτε κόμβο. Όταν φτάσουν σε φύλλο του δέντρου ελέγχεται η τομή τους μόνο με τα τρίγωνα που βρίσκονται σε εκείνη την περιοχή με τον ίδιο αλγόριθμο με πριν (2.2.4) αλλά για πολύ μικρότερο αριθμό τριγώνων.

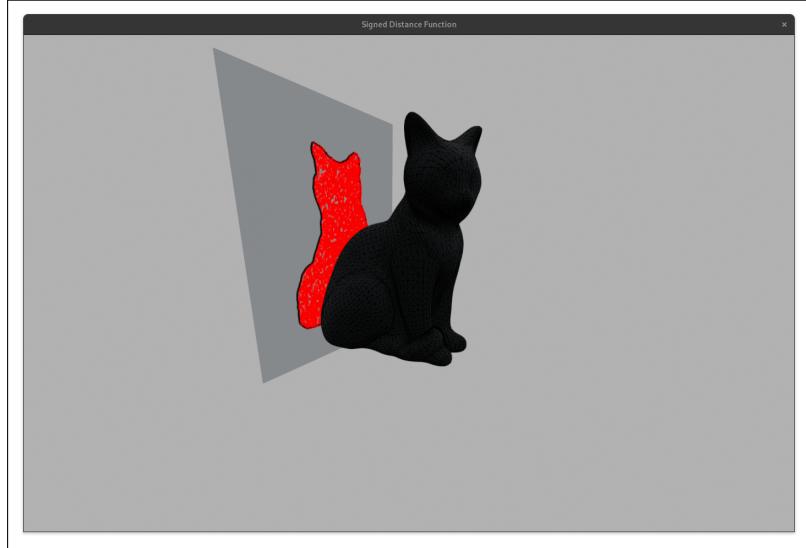
Αυτή η βελτίωση είναι αισθητή για μεγάλα πλήθη σημείων και τριγώνων. Για τα 12.0k τρίγωνα έγιναν οι ακόλουθες μετρήσεις.

Πλήθος σημείων	Χρόνος χωρίς KD-Tree (sec)	Χρόνος με KD-Tree (sec)
250	0.174	0.032
500	0.377	0.043
1000	0.743	0.058
5000	4.256	0.189
10000	15.672	0.287
15000	N/A	0.348
25000	N/A	0.432

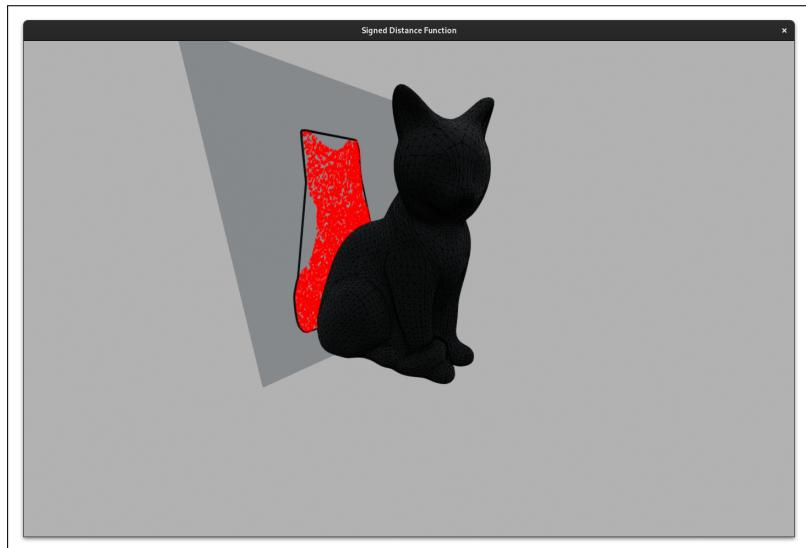
Για 15k και 25k σημείων, ο αλγόριθμος χωρίς KD-Tree δεν ολοκληρώθηκε λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητας και το πρόγραμμα τερματίστηκε με error. Αντίθετα, ο αλγόριθμος με KD-Tree ανταπεξήλθε στο απαιτητικό πλήθος σημείων και είχε παντού σημαντικά μικρότερο χρόνο εκτέλεσης.

2.3 ΕΞΕΓΩΓΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Από τα σημεία της προβολής που υπολογίστηκαν 2.2 είναι δυνατή η εξαγωγή του περιγράμματος του μοντέλου μέσω τεχνικών όπως ο alpha shapes αλγόριθμος [5]. Σε αυτόν τον αλγόριθμο, χρειάζεται να γίνει πρώτα τριγωνοποίηση Delaunay [6] στα σημεία, που υλοποιήθηκε μέσω της βιβλιοθήκης scipy, πιο συγκεκριμένα της `scipy.spatial.Delaunay` [7]. Στη συνέχεια, για κάθε τρίγωνο ελέγχεται αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του είναι μικρότερος ακτίνας από κάποια τιμή α . Αν ναι, οι ακμές του τριγώνου προστίθονται σε ένα set ακμών. Για την εξαγωγή του περιγράμματος, αν κάποια ακμή που πάει να προστεθεί στο set υπάρχει ήδη αφαιρείται. Επειδή οι ακμές που ανήκουν στο περίγραμμα ανήκουν μόνο σε ένα τρίγωνο, ενώ οι ακμές στο εσωτερικό του σε 2 ακριβώς τρίγωνα, το τελικό set περιέχει μόνο τις ακμές του περιγράμματος. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3.1: Περίγραμμα του μοντέλου για $\alpha = 0.03$



Σχήμα 2.3.2: Περίγραμμα του μοντέλου για $\alpha = 1$

Για μεγάλες τιμές του α το αποτέλεσμα προσεγγίζει το convex hull όπως φαίνεται στο 2.3. Για $\alpha = \inf$ το αποτέλεσμα ταυτίζεται με το convex hull.

2.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ

Για την προβολή όπως φαίνεται στην εικόνα 2.3 υπολογίζεται το εμβαδό της προβολής του μοντέλου με 2 διαφορετικούς τρόπους:

2.4.1 Monte Carlo Προσέγγιση

Με μια πιθανοτική προσέγγιση, το εμβαδό της προβολής του μοντέλου μπορεί να υπολογιστεί:

$$A = \frac{N_{\text{hits}}}{N_{\text{total}}} \cdot A_{\text{plane}} \quad (2.4.1)$$

όπου N_{hits} είναι το πλήθος των σημείων που υπολογίστηκαν ότι ανήκουν στην προβολή και N_{total} ο συνολικός αριθμός σημείων έγιναν sampled. Αυτός ο λόγος δίνει το ποσοστό του επιπέδου που καλύπτει η προβολή οπότε πολλαπλασιάζεται με το εμβαδό του επιπέδου για να δοθεί το εμβαδό της προβολής. Για επίπεδο εμβαδού $A_{\text{plane}} = 2.693 \text{ units}^2$ (non-rotated) για 25k σημεία, τα 6854 ανήκουν στην προβολή οπότε το εμβαδό είναι $A = 2.693 \cdot \frac{6854}{25000} = 0.7143 \text{ units}^2$.

2.4.2 Εμβαδό από τα τρίγωνα του alpha shape

Κατά την εκτέλεση του alpha shape, τα τρίγωνα με περιγεγραμμένο κύκλο μικρότερο από τον ακτίνα του alpha ανήκουν εντός του περιγράμματος που υπολογίζεται. Το συνολικό εμβαδό μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας το εμβαδό των τριγώνων κατά την εκτέλεση του alpha shapes. Για το ίδιο μοντέλο και ίδια διεγματοληπτημένα σημεία, υπολογίζεται εμβαδό $A = 0.7201 \text{ units}^2$.

Το εμβαδό που υπολογίζεται έχει απόκλιση καθώς εξαρτάται πολύ από την δειγματοληψία των σημείων του επιπέδου. Όσο μεγαλύτερος ο αριθμός των σημείων, τόσο πιο ακριβής θα είναι η εκτίμηση του εμβαδού.

Bibliography

- [1] Riley Queen (all) and Rico Cilliers (guidance). Concrete cat statue. https://polyhaven.com/a/concrete_cat_statue.
- [2] Plat251. Rubber duck toy. https://polyhaven.com/a/rubber_duck_toy.
- [3] Wikipedia. Rodrigues' rotation formula. https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues%27_rotation_formula.
- [4] Philippe B. Laval. Mathematics for computer graphics - barycentric coordinates. <https://users.csc.calpoly.edu/~zwood/teaching/csc471/2017F/barycentric.pdf>, November 2003. Section 1.1.
- [5] Kaspar Fischer. Introduction to alpha shapes. https://graphics.stanford.edu/courses/cs268-11-spring/handouts/AlphaShapes/as_fisher.pdf, 2000.
- [6] Wikipedia. Delaunay triangulation. https://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation.
- [7] Pauli Virtanen, Ralf Gommers, Travis E. Oliphant, Matt Haberland, Tyler Reddy, David Cournapeau, Evgeni Burovski, Pearu Peterson, Warren Weckesser, Jonathan Bright, Stéfan J. van der Walt, Matthew Brett, Joshua Wilson, K. Jarrod Millman, Nikolay Mayorov, Andrew R. J. Nelson, Eric Jones, Robert Kern, Eric Larson, C J Carey, İlhan Polat, Yu Feng, Eric W. Moore, Jake VanderPlas, Denis Laxalde, Josef Perktold, Robert Cimrman, Ian Henriksen, E. A. Quintero, Charles R. Harris, Anne M. Archibald, Antônio H. Ribeiro, Fabian Pedregosa, Paul van Mulbregt, and SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020.