# Статистика 2

Фонин А.Ю.

March 15, 2021

## Exercise 1

$x_n, \dots, x_n \sim B(p)$

1. $X_1$: $EX_1 = p$ - несмещаемость

2. $X_1X_2$: $E(X_1X_2) = EX_1 \cdot EX_2 = p^2$ - по независимости выборки

3. $X_1(1 - X_2)$: $E(X_1(1 - X_2)) = EX_1 \cdot E(1 - X_2) = p(1 - p)$

При состоятельности $X_1 \xrightarrow[n \to \infty]{p} p$, но у нас $X_1$ не зависит от $n$, а вероятность того, что $X_1 = p$ меньше 1. Следовательно $P(|X_1 - p| > \varepsilon)$ не сходится к 0 по вероятности

## Exercise 2

$X_1, \dots, X_n \sim U(0, a)$, при $a > 1$

Для нашего параметра $\theta = \theta(a)$ $F_n(1)$ - несмещ. оценка чего?

Расмотрим мат ождание $F_n$

$$EF_n(1) = F(1) = P(x < 1) = \frac{1}{a}$$

Несмещенная оценка $\frac{1}{a}$

$$F_n(1) = \frac{\{x_i < 1\}}{n} \xrightarrow{p} P(x < 1) = \frac{1}{a}$$

При этом и состоятельная

## Exercise 3

Расмотрим плотность

$$P_{\alpha,\beta}(y) = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-(y-\beta)}{\alpha}} \mathbb{1}_{y>b}$$

$$m_1 = \int_{\beta}^{\infty} \frac{y}{\alpha} e^{-\frac{y}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}} dy = e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\infty} z e^{-z} dz = \alpha + \beta$$

$$m_2 = \int_{\beta}^{\infty} \frac{x^2}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}} dx = \alpha^2 e^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_{\beta}^{\infty} (\frac{x}{\alpha})^2 e^{-(\frac{x}{\alpha})} d\frac{x}{\alpha} = \alpha^2 e^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\infty} z^2 e^{-z} dz = \alpha^2 e^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{(\beta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha^2)}{\alpha^2} e^{-\frac{\beta}{\alpha}} = \beta^2+2\alpha\beta+2\beta^2$$

По методу моментов найдем оценку

$$\overline{m_1} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$\overline{m_2} = \overline{\beta^2} + 2\overline{\alpha}\overline{\beta} + 2\overline{\alpha^2}$$

$$\sqrt{\overline{m_2} - \overline{m_1}^2} = \overline{\alpha}$$

$$-\sqrt{\overline{m_2} - \overline{m_1}^2} + \overline{m_1} = \overline{\beta}$$

Тогда

$$\overline{\alpha} = \sqrt{\overline{s^2}}$$

$$\overline{\beta} = \overline{x} - \sqrt{\overline{s^2}}$$

## Exercise 4

Плотность $P_\mu(y) = \frac{e^{-|y-\mu|}}{2}$

$x_1 \dots x_n$ - выборка

Следовательно, функция правдоподобия имеет вид

$$\mathcal{L}(\mu) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}}{2^n}$$

$$\ln \mathcal{L} = -\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{\mu}) - \ln 2^n \longrightarrow max$$

Задача эквивалентна

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{\mu}| \longrightarrow min$$

Тогда в качетсве оценки берем медиану

$$\overline{\mu} = X_{med}$$

# Exercise 5

a) $\rho(y) = \theta y^{\theta-1} \quad y \in (0,1)$

$$x_1 \dots x_n$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \theta^n \, (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\theta-1} \underset{\theta}{\longrightarrow} max$$

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i \underset{\theta}{\longrightarrow} max$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0$$

$$\theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$$

b) $p(y) = \frac{2y}{\theta^2} \quad y \in (0, \theta)$

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{x_i \in (0,\theta)}$$

$$\ln \mathcal{L} = \ln 2^n + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - 2n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{1}_{x_i \in (0,\theta)}$$

У нас 2 слагаемых зависит от $\theta$, чтобы сумма была больше минус бесконечности, нужно взять $\theta \geqslant X_{(n)}$. При это  хочется взять минимальным из возможных, чтобы $2n \ln \theta$ было как можно меньше. Тогда $\theta = X_{(n)}$

c) $\frac{\theta e^{-\frac{\theta^2}{2y}}}{\sqrt{2\pi y^3}} \mathbb{1}_{y>0}$
Тогда максимум правдоподобия

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{\theta^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{\theta^2}{2x_i}}}{\sqrt{2}n\sqrt{\prod_{i=1}^n x_i^3}} \underset{\theta}{\longrightarrow} max$$

$$\log \mathcal{L}(\theta) = n \ln \theta - \sum_i^n \frac{\theta^2}{2x_i} - \ln 2n - 3/2 \sum_{i=1}^n \ln x_i \longrightarrow \ 1_{max}$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i} = 0$$

$$\frac{n}{\theta} - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0 \ \ \theta$$

$$\theta^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - n = 0$$

$$\theta^2 = n \cdot (\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i})^{-1}$$

$$\theta = \sqrt{n \cdot (\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i})^{-1}}$$

d) $\frac{\theta (\ln y)^{\theta-1}}{y} \quad y \in [1, e]$

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{\theta^n(\prod_{i=1}^n \ln x_i)^{\theta-1}}{\prod_{i=1}^n x_i}$$

$$\log \mathcal{L}(\theta) = n \log \theta + \sum_{i=1}^{n}(\theta - 1 \ln \ln x_i) - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i \longrightarrow \ 1_{max}$$

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln \ln x_i = 0$$

$$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \ln x_i}$$

e) $\frac{e^{-|y|}}{2(1-e^{-\theta})}$ при $|y| \le \theta$

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^n |x_i|}}{2^n(1-e^{-\theta})^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{|x_i| \le \theta}$$

$$\log \mathcal{L}(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} |x_i| - \ln 2^n - n \ln(1 - e^{-\theta}) + \sum_{i=1}^{n} \log \mathbb{1}_{|x_i| \le \theta}$$

У нас 2 слагаемых зависит от $\theta$, чтобы сумма была больше минус бесконечности, нужно взять $\theta \geqslant max_i(|x_i|)$. При это $\theta$ хочется взять минимальным из возможных, чтобы $-n \ln(1 - e^{-\theta})$ было как можно больше. А это слагаемое больше, когда $\theta$ меньше. Значит $\theta = max_i(|x_i|)$