Статистика 1

Фонин А.Ю.

March 10, 2021

Exercise 1

1) $\xi \sim U[-a,a]$

Тогда $\mu = 0, \sigma^2 = \frac{a^2}{3}$

$$\gamma_4 = \frac{\int_{-a}^{a} z^4 \cdot \frac{1}{2a} dz}{\frac{a^4}{9}} - 3 = \frac{\left.\frac{z^5}{5}\right|_{-a}^{a}}{\frac{2}{9}a^5} = \frac{2a^5 \cdot 9}{10a^5} - 3 = \frac{9}{5} - 3 = -\frac{6}{5}$$

То есть γ_4 не зависит от a

2) $\xi \sim L(\alpha, \beta)$. Тогда $p_\xi(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha(x-\beta)}$. Так как коэффициент эксцесса не зависит от смещения, можем β положить равную 0.

$$\gamma_4 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z^4 \cdot \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x} dz}{\sigma^4} - 3 = \frac{\int_0^\infty (\alpha z)^4 \cdot e^{-\alpha x} d\alpha z}{\alpha^4 \sigma^4} - 3$$

Замена переменной $\alpha z = x$. Найдем числитель.

$$\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x} dx = \int\limits_0^\infty x^4 (-e^{-x})' dx = -x^4 e^{-x} + 4 \int\limits_0^\infty x^3 e^{-x} d =$$

$$\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x} d = -x^3 e^{-x} + 3 \int\limits_0^\infty x^2 e^{-x} dx$$

$$\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int\limits_0^\infty x e^{-x} dx$$

$$\int\limits_0^\infty x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$= -(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24) e^{-x} \Big|_0^\infty = -24$$

Так как $\sigma^2 = \frac{2}{\alpha^2}$

$$\gamma_4 = \frac{24}{4} - 3 = 3$$

То есть тоже не зависит от параметров

Exercise 2

По определению $\bar{a}_n$ - состоятельная оценка для a, если $a_n \xrightarrow{p} a$ при n $\xrightarrow{\infty}$

Зафиксируем x'
Используем ЗБЧ, так как индикаторы распределены одинакого с конечным мат ожиданием

$$\overline{F_n}(x') = \sum \frac{\{X_i < x'\}}{n} \xrightarrow{p} E\{x_1 < x'\} = P(x_1 < x') \cdot 1 + P(x_1 \geq x') \cdot 0 = F(x')$$

Exercise 3

Возникает противоречие вследствие того, что распределение X_n есть $F^n(x)$, а у X_1 - $F(x)$

Exercise 4

Заметим, что $I\{X_i < y\}$ - с.в с распределением Бернулли с параметром $F(y)$, так как она принимает 1, если $X_i < y$, и 0 иначе

$$P(I\{X_i < y\} = 1) = P(X_i < y) = F(y)$$

Мы знаем, что мат. ожидание бернуллевской с.в = $F(y)$, а дисперсия $F(y) \cdot (1 - F(y))$

a) Так как $I\{X_i < y\}$ распределены одинакого

$$\mathrm{E}F_n^{\cdot}(y) = \mathrm{E}\frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{I}(X_i < y)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{EI}(X_i < y)}{n} = \frac{n\mathrm{EI}(X_1 < y)}{n} = F(y)$$

b) Так как $I\{X_i < y\}$ еще и независимы

$$\mathrm{D}F_n^{\cdot}(y) = \mathrm{D}\frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{I}(X_i < y)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{DI}(X_i < y)}{n^2} = \frac{n\mathrm{DI}(X_1 < y)}{n^2} = \frac{F(y)(1 - F(y))}{n}$$

Exercise 5

$X_1 \dots X_n$ Выборка из распределения Бернулли с параметрами p
$y_1 \dots y_n$ где $y_i = F(X_i)$, а $F(y)$ - функция распределения Бернулли

F(y) = $\left| \begin{array}{ll} 0 & k \leq 0 \\ q & 0 < k \leq 1 \\ 1 & k > 1 \end{array} \right.$ Пусть $F(x) = P(X < x)$

Так как X_i может принимать либо 0, либо 1, то
$y_i = 0$ с вероятностью $1 - p$ и q с вероятностью по p

Exercise 6

Рассмотри пространство квадратично-интегрируемых функций L^2 с весом p. т.е.
$\{f \ : \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)p(x)dx < \infty\}$ в котором скалярное произведение ∀ f, g ∈ L_2 имеет вид

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)p(x)dx$$

Для него выполнено неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\int f(x)g(x)p(x)dx\right)^2 \leq \left(\int f(x)^2 p(x)dx\right) \cdot \left(\int g(x)^2 p(x)dx\right)$$

x^2 и 1 принадлежит $L_2 \Longrightarrow$ для них выполнено неравенство Коши

Тогда

$$\int x^4 p dx \leq (\int x^2 p dx)^2$$

То есть $\sigma^4 \leq \mu_4$, если $\mu_1 = 0$, а если не равно, то можем сделать сдвиг, γ_4 не поменяется. Тогда

$$1 \leq \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\gamma_4 \geq -2$$