Статистика 4

Фонин А.Ю.

April 23, 2021

Exercise 1

Нулевая и альтернативная гипотезы

$H_0 \ : \ P(X) = X_i \sim e^{-(y-6)}$ при y>6

При верной H_0 - $EX_i = 7 \ \ DX_i = 1$

$H_1 \ : \ P(X) = 2e^{-2(y-6)}$ при y>3

При верной H_1 - $EX_i = \frac{7}{2} \ \ DX_i = \frac{1}{4}$

По ЦПТ мы знаем, что

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - EX_i}{\sqrt{D}X_i} \sim N(0.1)$$

Тогда найдем ошибки первого и второго рода

а)

$$P(H_i|H_0) = P(\varphi(X_1 \dots X_n) = 1|H_0) = P(\bar{X} < 3.5 + \frac{1}{\sqrt{n}}|H_0) = P(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - 7}{1} < -3.5\sqrt{n} + 1) = \Phi(-3.5\sqrt{n} + 1)$$

$$P(H_0|H_1) = P(\bar{X} > 3.5 + \frac{1}{\sqrt{n}}|H_1) = P(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} > 2) = 1 - \Phi(2)$$

б)

$$P(H_1|H_0) = P\left(\bar{X} > \frac{7}{2} + \frac{1}{n}\right) = P\left(\frac{\bar{X} - 7}{1}\sqrt{n} > -\frac{7}{2}\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 0$$

$$P(H_0|H_1) = P\left(\bar{X} > 3.5 + \frac{1}{n}\middle| H_1\right) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} > \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}$$

c)

$$P(H_0|H_1) = P(\bar{X} - 7 < -3.5) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - 7}{1} < -3.5\sqrt{n}\right) = \Phi(-3.5\sqrt{n}) \longrightarrow 0$$

$$P(H_1|H_0) = P((\bar{X} - 3.5)\sqrt{n} < 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

Exercise 2

$H_0 \ : \ X_1 \ldots X_n \sim N\left(a, \sigma^2\right)$

$H_1 \ : \ X_1 \ldots X_n \sim P(\lambda)$

$$\varphi = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ если есть не натуральные значения} \\ 0 \text{ иначе} \end{array}\right.$$

$P(H_1|H_0) = P($получения натуральных чисел|нормальное распределение$) = 0$

Потому что мер натуральных чисел = 0

$P(H_1|H_0) = 0$

Потому что если в выборке есть не натуральные числа, то вероятность этого события 0 для распределения Пуассона.

Exercise 3

$X_1 \ldots X_n \sim N(a, 1)$

$H_0 \ : \ a = -1$

$H_1 \ : \ a = 0$

$$g(X_1 \ldots X_n)\left[\begin{array}{l} 0 \ \bar{X} < -n^\gamma \\ 1 \text{ else} \end{array}\right.$$

Пусть выполняется H_1, тогда $\sqrt{n}\bar{X} \sim N(0, 1)$

$$P(H_0 \mid H_1) = P\left(\bar{X} < -n^\gamma \middle| H_1\right) = P\left(\sqrt{n}\bar{X} < -n^{\gamma + \frac{1}{2}} \mid H_1\right) = \Phi\left(-n^{\gamma + \frac{1}{2}}\right)$$

$$\Phi\left(-n^{\gamma+\frac{1}{2}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{при} \quad \gamma > -\frac{1}{2}$$

Exercise 4

$X_1 \dots X_n \sim P(\lambda)$

$H_0 \,:\, \lambda = 1$

$H_1 \,:\, \lambda = 3$

$$\varphi(X_1 \dots X_n) = \left[\begin{array}{l} 0 \; X_n \leqslant 1 \\ 1 \; else \end{array}\right.$$

$$P(H_0 \mid H_1) = P\left(X_{[n]} \leqslant 1 \mid H_1\right) = P(X_1 \leqslant 1, \dots X_n \leq 1 \mid H_1) =$$

$$= P(X_1 \leq 1|H_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq 1 \mid H_1) = P(X_1 \leq 1|H_1)^n = 4^n e^{-3n}$$

$$\gamma \geqslant 1 - e^{-3n} 4^n$$

Тогда при

$$n \geqslant \frac{\log(1-\gamma)}{-3 + \log 4}$$

Мощность притерия больше уровня γ

Exercise 5

Можно рассматривать процесс тестирования, как испытания Бернулли.

$$X_i = 1 \quad \text{если угадали, 0 иначе}$$

$H_0 \,:\, p = \frac{1}{2}$

$H_1 \,:\, p \neq \frac{1}{2}$

$$\varphi(X_1 \dots X_n) = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ если} \quad \sum_i^n X_i \leqslant 70 \\ 1 \text{ иначе} \end{array}\right.$$

$$P(H_1|H_0) = P\left(\sum X_i \geqslant 70 \mid p = \frac{1}{2}\right) = P\left(\sqrt{n}\frac{\frac{\sum X_i}{n} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{n}(\frac{70}{n} - \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}\right) = 1-\Phi\left(20 \cdot \left(\frac{7}{10} - \frac{5}{10}\right)\right) = 1-\Phi(4)$$