Статистика 5

Фонин А.Ю.

April 30, 2021

Exercise 1

а) Мы хотим выбрать H_1 так, чтобы $P(H_1|H_0)$ имело полезный смысл.
Если мы возьмём в качестве $H_1 : \mu < 600$ Тогда мы ограничим вероятность ошибки первого рода и будем знать с какой вероятностью заявление менеджера мы принимаем, при условии, что он не прав твет $H_0 : \mu = 600, H_1 : \mu < 600$
б) в) Выполняется H_1. средний чек $\leqslant 600$

Exercise 2

Пусть акция пошла вверх с вероятностью p
Тогда $X_1 \dots X_30 = \overbrace{1 \dots 1}^{9}, \overbrace{0 \dots 0}^{21} \sim B_1(p)$
а) $H_0 : p = 0.3$
$H_1 : p \neq 0.3$
б) $\hat{p} = \frac{24}{50}$ - и есть точечная оценка
в) $\bar{X} = \frac{9}{30}$

$$H_0 : p = \frac{3}{10} \; H_1 : p \neq \frac{3}{10} \text{на (?)}$$

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \longrightarrow N(0.1)$$

$$\sqrt{30}\frac{\frac{9}{30}-\frac{10}{30}}{\sqrt{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}}}\approx -0.4$$

Если $\alpha = 0.01$, то доверительная область будет шире $[-1.96 : 1.96]$, поэтому мы не отвергаем нулевую гипотезу

Exercise 3

$H_0 : \mu = 120$

$H_1 = \mu \neq 120$

$\sigma = 5, \alpha = 0.05$

Для какого n выполняется $P(H_1|\mu = 117) = 0.98$

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-120}{5} \sim N(0,1)$$

в случае H_0

$$\phi(t) = \left[\begin{array}{c} 0\ t \in [-z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{\frac{\alpha}{2}}] \\ 1 \text{ иначе} \end{array}\right.$$

$$P(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-120}{5} \notin [-1,96, 1,96]|\mu - 117) = 0.98$$

$$P(-1,96 \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{X}-120}{5} \leqslant 1,96|\mu = 117) = 0.02$$

$$P(-1.96 + \frac{3}{5}\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{X}-117}{5} \leqslant 1.96 + \frac{3\sqrt{n}}{5}) = \Phi\left(1,96 + \frac{3}{5}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-1,96 + \frac{3}{5}\sqrt{n}\right) = 0.02$$

при $n = 45$

Exercise 4

$\sigma = 180$

$n = 200$

$\bar{X} = 935$

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \approx N(0.1) \text{ в пределе}$$

$$P\left(z_1 < \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} < z_2\right) = 0.95$$

$$P\left(\frac{\sigma z_1}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < \frac{\sigma z_2}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$P(\bar{X} - \frac{\sigma z_{+\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \frac{\sigma z_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} + \bar{X}) = 0.95$$

где $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ - квантиль нормального распределения

Находим доверительный интервал $\mu \in (910, 960)$ с вероятностью 95%

С помощью которого будем тестировать наши гипотезы. $H_0 : \mu = 900$

$H_1 : \mu \neq 900$

$$\varphi(x_1 \dots x_n) = [\begin{matrix} 0 \text{ if доверительный интервал содержит } 900 \\ 1 \text{ иначе} \end{matrix}$$

Тогда $P(H_1|H_0) = \alpha_0 = 0.05$

$P(H_1|H_0)$ - вероятность того, что доверительный интервал не содержит 900, а это по построению = 0.05

Exercise 5

$H_0 : \mu = 15000$

$H_1 : \mu < 15000$

$\alpha = 0.02$, $\sigma = 4000$ Если $\mu = 14000$, то $P(H_1)$

$P(H_0|\mu = 14000) =$

По построению критерия, мы не отвергаем H_0 когда

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - 15000}{4000} \in [-z_{1-\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}]$$

$$P(-2,32 < \sqrt{n}\frac{\bar{X} - 15000}{4000} < 2.32|\mu = 14000) = P(-2.32 - \sqrt{n}\frac{1}{4} < \sqrt{n}\frac{\bar{X}}{4000} < 2.32 - \sqrt{n}\frac{1}{4}) =$$

$$= \Phi\left(2.32 - \sqrt{n}\frac{1}{4}\right) - \Phi(-2.32 - \frac{\sqrt{n}}{4}) = 0.05$$

При n = 252 левая часть меньше 0.05, при n=251 больше

Ответ: $n = 252$