

# Статистика 2

Фонин А.Ю.

March 15, 2021

## Exercise 1

$x_1, \dots, x_n \sim B(p)$

1.  $X_1$ :  $EX_1 = p$  - несмещаемость
2.  $X_1 X_2$ :  $E(X_1 X_2) = EX_1 \cdot EX_2 = p^2$  - по независимости выборки
3.  $X_1(1 - X_2)$ :  $E(X_1(1 - X_2)) = EX_1 \cdot E(1 - X_2) = p(1 - p)$

При состоятельности  $X_1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} p$ , но у нас  $X_1$  не зависит от  $n$ , а вероятность того, что  $X_1 = p$  меньше 1. Следовательно  $P(|X_1 - p| > \varepsilon)$  не сходится к 0 по вероятности

## Exercise 2

$X_1, \dots, X_n \sim U(0, a)$ , при  $a > 1$

Для нашего параметра  $\theta = \theta(a)$   $F_n(1)$  - несмещ. оценка чего?

Рассмотрим мат ожидание  $F_n$

$$EF_n(1) = F(1) = P(x < 1) = \frac{1}{a}$$

Несмещенная оценка  $\frac{1}{a}$

$$F_n(1) = \frac{\{x_i < 1\}}{n} \xrightarrow{p} P(x < 1) = \frac{1}{a}$$

При этом и состоятельная

## Exercise 3

Рассмотрим плотность

$$P_{\alpha, \beta}(y) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{(y-\beta)}{\alpha}} \mathbb{1}_{y > \beta}$$

$$m_1 = \int_{\beta}^{\infty} \frac{y}{\alpha} e^{-\frac{y-\beta}{\alpha}} dy = e^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\infty} z e^{-z} dz = \alpha + \beta$$

$$m_2 = \int_{\beta}^{\infty} \frac{x^2}{\alpha} e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}} dx = \alpha^2 e^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)} d\frac{x}{\alpha} = \alpha^2 e^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\infty} z^2 e^{-z} dz = \alpha^2 e^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{(\beta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha^2)}{\alpha^2} e^{-\frac{\beta}{\alpha}} = \beta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha^2$$

По методу моментов найдем оценку

$$\overline{m}_1 = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$\overline{m}_2 = \overline{\beta^2} + 2\overline{\alpha}\overline{\beta} + 2\overline{\alpha^2}$$

$$\sqrt{\overline{m}_2 - \overline{m}_1^2} = \overline{\alpha}$$

$$-\sqrt{\overline{m}_2 - \overline{m}_1^2} + \overline{m}_1 = \overline{\beta}$$

Тогда

$$\overline{\alpha} = \sqrt{s^2}$$

$$\overline{\beta} = \overline{x} - \sqrt{s^2}$$

## Exercise 4

Плотность  $P_{\mu}(y) = \frac{e^{-|y-\mu|}}{2}$

$x_1 \dots x_n$  - выборка

Следовательно, функция правдоподобия имеет вид

$$\mathcal{L}(\mu) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}}{2^n}$$

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\mu}) - \ln 2^n \rightarrow \max$$

Задача эквивалентна

$$\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{\mu}| \rightarrow \min$$

Тогда в качестве оценки берем медиану

$$\bar{\mu} = X_{mod}$$

## Exercise 5

a)  $p(y) = \theta y^{\theta-1} \quad y \in (0, 1)$

$$x_1 \dots x_n$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \theta^n (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\theta-1} \rightarrow_{\theta} \max$$

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i \rightarrow_{\theta} \max$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log x_i = 0$$

$$\theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log x_i}$$

b)  $p(y) = \frac{2y}{\theta^2} \quad y \in (0, \theta)$

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{2^n \prod_{i=1}^n x_i}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i \in (0, \theta)}$$

$$\ln \mathcal{L} = \ln 2^n + \sum_{i=1}^n \ln x_i - 2n \ln \theta + \sum_{i=1}^n \ln \mathbb{1}_{x_i \in (0, \theta)}$$

У нас 2 слагаемых зависит от  $\theta$ , чтобы сумма была больше минус бесконечности, нужно

взять  $\geq x_{(n)}$ . При это хочется взять минимальным из возможных, чтобы  $2n \ln \theta$  было как можно меньше. Тогда  $\theta = X_{(n)}$

с)  $\frac{\theta e^{-\frac{\theta^2}{2y}}}{\sqrt{2\pi y^3}} \mathbb{1}_{y>0}$

Тогда максимум правдоподобия

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{\theta^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{\theta^2}{2x_i}}}{\sqrt{2n} \sqrt{\prod_{i=1}^n x_i^3}} \rightarrow \max$$

$$\log \mathcal{L}(\theta) = n \ln \theta - \sum_i^n \frac{\theta^2}{2x_i} - \ln 2n - 3/2 \sum_{i=1}^n \ln x_i \rightarrow \max$$

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i} = 0$$

$$\frac{n}{\theta} - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0 \quad \theta$$

$$\theta^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - n = 0$$

$$\theta^2 = n \cdot \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$$

$$\theta = \sqrt{n \cdot \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{-1}}$$

d)  $\frac{\theta(\ln y)^{\theta-1}}{y} \quad y \in [1, e]$

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{\theta^n (\prod_{i=1}^n \ln x_i)^{\theta-1}}{\prod_{i=1}^n x_i}$$

$$\log \mathcal{L}(\theta) = n \log \theta + \sum_{i=1}^n (\theta - 1 \ln \ln x_i) - \ln \prod_{i=1}^n x_i \rightarrow 1_{max}$$

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln \ln x_i = 0$$

$$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \ln x_i}$$

е)  $\frac{e^{-|y|}}{2(1-e^{-\theta})}$  при  $|y| \leq \theta$

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^n |x_i|}}{2^n (1 - e^{-\theta})^n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{|x_i| \leq \theta}$$

$$\log \mathcal{L}(\theta) = - \sum_{i=1}^n |x_i| - \ln 2^n - n \ln(1 - e^{-\theta}) + \sum_{i=1}^n \log \mathbb{1}_{|x_i| \leq \theta}$$

У нас 2 слагаемых зависит от , чтобы сумма была больше минус бесконечности, нужно взять  $\geq \max_i(|x_i|)$ . При это хочется взять минимальным из возможных, чтобы  $-n \ln 1 - e^{-\theta}$  было как можно больше. А это слагаемо больше, когда меньше. Значит  $= \max_i(|x_i|)$