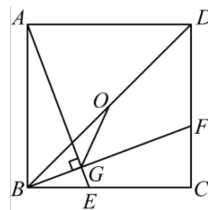


特殊平行四边形中的解题技巧专题

引例：

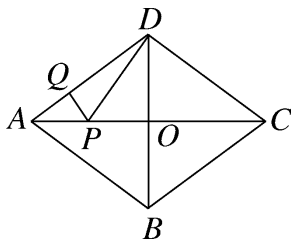
如图，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在 BC, CD 上， $BC=3BE$ 且 $BE=CF$ ， $AE \perp BF$ ，垂足为 G ， O 是对角线 BD 的中点，连结 OG ，则 OG 的长为多少？



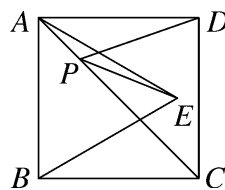
◆类型一 特殊四边形中求最值、定值问题

一、利用对称性求最值

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC=8$ ， $DB=6$ ， P, Q 分别是 AC, AD 上的动点，连接 DP, PQ ，则 $DP+PQ$ 的最小值为_____。



第 1 题图

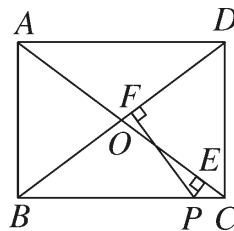


第 2 题图

2. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 6， $\triangle ABE$ 是等边三角形，点 E 在正方形 $ABCD$ 内，在对角线 AC 上有一点 P ，使 $PD+PE$ 的和最小，则这个最小值为_____。

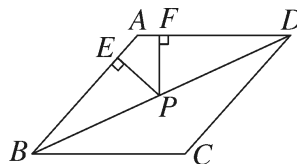
二、利用面积法求定值

3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 P 是线段 BC 上一动点，且 $PE \perp AC$ ， $PF \perp BD$ ， $AB=6$ ， $BC=8$ ，则 $PE+PF$ 的值为_____。

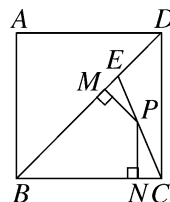


【变式题】矩形两条垂线段之和→菱形两条垂线段之和→正方形两条垂线段之和

(1)如图，菱形 $ABCD$ 的周长为 40，面积为 25， P 是对角线 BD 上一点，分别作 P 点到直线 AB, AD 的垂线段 PE, PF ，则 $PE+PF$ 等于_____。

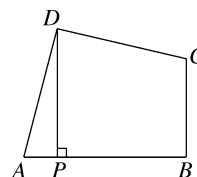


(2)如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, E 为对角线 BD 上一点且 $BE=BC$, 点 P 为线段 CE 上一动点, 且 $PM \perp BE$ 于 M , $PN \perp BC$ 于 N , 则 $PM+PN$ 的值为_____.

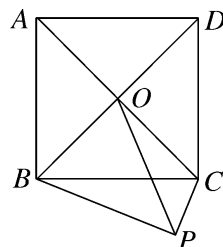


◆类型二 正方形中利用旋转性解题

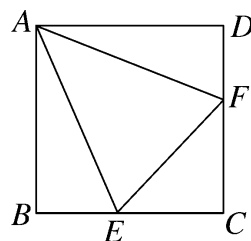
4. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, $AD = CD$, $DP \perp AB$ 于 P . 若四边形 $ABCD$ 的面积是 18, 则 DP 的长是_____.



5. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 O , P 为正方形 $ABCD$ 外一点, 且 $BP \perp CP$, 连接 OP . 求证: $BP + CP = \sqrt{2}OP$.



6. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 BC, CD 上, $\angle EAF = 45^\circ$.
求证: $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF}$.

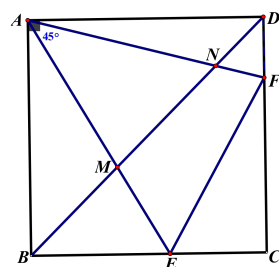


拓展提升: 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $\angle EAF = 45^\circ$, 你能写出哪些结论?

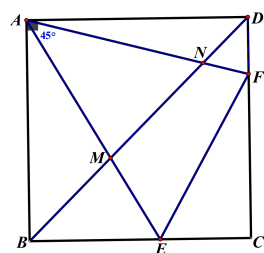
变式：1、如图，连接 BD，

求证： (1) 、 $MN^2 = BM^2 + DN^2$

(2) 、 $2AM^2 = BM^2 + DM^2$

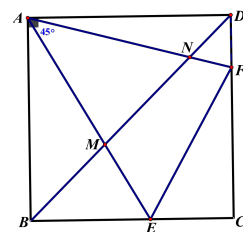


变式 2: (1) 连接 NE、MF， $\triangle ANE$ 、 $\triangle AMF$ 是等腰直角三角形吗？如果是，请证明。

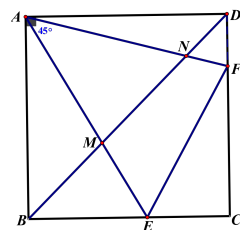


(2) 你还能得到哪些结论？

(3) 猜想 CE 与 DN，CF 与 BM 的数量关系，并证明



(4) 取 EF 的中点 G，连接 GM、GN， $\triangle MGN$ 是等腰直角三角形吗？

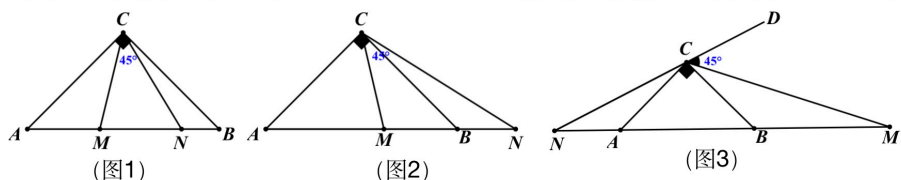


变式训练 3

(1) 如图1, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle MCN=45^\circ$, 求证: $MN^2 = AM^2 + BN^2$

(2) 如图2, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle MCN=45^\circ$, 上述结论是否成立? 如成立, 请证明。

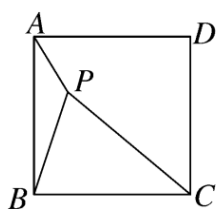
(3) 如图3, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle MCD=45^\circ$, 延长 DC 交 BA 的延长线于 N , MN 、 AM 、 BN 之间又有怎样的关系? 并证明



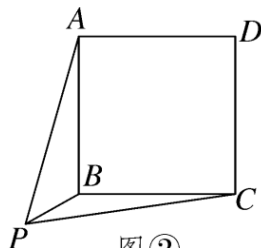
巩固训练:

1. 如图①, 点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点, $PA=1$, $PB=2$, $PC=3$. 你能求出 $\angle APB$ 的度数吗?

2. 【类比探究】如图②, 若点 P 是正方形 $ABCD$ 外一点, $PA=3$, $PB=1$, $PC=\sqrt{11}$ 求 $\angle APB$ 的度数.



图①



图②