

有限元大作业报告

S230200251 唐铭

问题描述：对于一二维悬臂梁，左端全约束固定，右端中点受一 y 方向拉力 F ，对于该模型求其位移。

利用有限元方法，采用线性三角形单元、二次四边形元离散化悬臂梁模型。线性三角形单元有 3 个节点、6 个自由度，二次四边形元 8 个节点、16 个自由度。

对于二次四边形元，列出其在自然坐标系下的 8 个形函数：

$$N1=(1-a)*(1-b)*(-a-b-1)/4;$$

$$N2=(1+a)*(1-b)*(a-b-1)/4;$$

$$N3=(1+a)*(1+b)*(a+b-1)/4;$$

$$N4=(1-a)*(1+b)*(-a+b-1)/4;$$

$$N5=(1-b)*(1+a)*(1-a)/2;$$

$$N6=(1+a)*(1+b)*(1-b)/2;$$

$$N7=(1+a)*(1+b)*(1-a)/2;$$

$$N8=(1-a)*(1+b)*(1-b)/2;$$

雅可比矩阵给定如下：

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{bmatrix}$$

其中 x 、 y 由下式确定：

$$x=N1*x1+N2*x2+N3*x3+N4*x4+N5*x5+N6*x6+N7*x7+N8*x8;$$

$$y=N1*y1+N2*y2+N3*y3+N4*y4+N5*y5+N6*y6+N7*y7+N8*y8;$$

矩阵 B 如下所示：

$$[B]=[D'] [N]$$

其中， $[D']$ ， $[N]$ 由下式确定：

$$[D'] = \frac{1}{[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial \Omega}{\partial b} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial \Omega}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial \Omega}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial \Omega}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial \Omega}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial \Omega}{\partial b} \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 & N5 & 0 & N6 & 0 & N7 & 0 & N8 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 & N4 & 0 & N5 & 0 & N6 & 0 & N7 & 0 & N8 \end{bmatrix}$$

平面应力情况，矩阵[D]如下式：

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

二次四边形单元刚度矩阵写成二重积分形式如下所示：

$$[ke] = t \iint [B]^T [D] [B] [J] da db$$

利用 matlab 编写相应有限元程序，输入梁的尺寸 nelx=5、nely=4，材料参数弹性模量 E、泊松比 nu，厚度 t，拉力大小 F。输出梁模型位移图（蓝色为原模型，红色为施加拉力后变形模型），各节点位移 u。对比两不同单元程序运行结果。

表 1：位移结果记录

二次四边形元	线性三角形单元
0.005437689	0.004553815
-0.00265562	-0.002229304
0.004706143	0.004524968
-0.001342444	-0.001177871
0.004650329	0.004858829
-2.90E-18	-2.07E-05
0.004706143	0.00464761
0.001342444	0.001305479
0.005437689	0.005272371
0.00265562	0.002734038
0.009716597	0.008755892
-0.003769501	-0.003015321

0.009722448	0.009367594
-0.002267797	-0.001753048
0.010236448	0.010557238
-9.13E-18	7.43E-05
0.009722448	0.009784279
0.002267797	0.002376958
0.009716597	0.009712213
0.003769501	0.004012411
0.012996123	0.012346111
-0.004525515	-0.003145628
0.015191308	0.014185121
-0.003298941	-0.002008313
0.017016922	0.017362734
-1.53E-17	0.000135326
0.015191308	0.015001114
0.003298941	0.003232606
0.012996123	0.013318987
0.004525515	0.004749017
0.013675798	0.014818484
-0.003178693	-0.002299082
0.019062353	0.018500567
-0.002488333	-0.001581394
0.026230044	0.026265824
-1.73E-17	0.000256472
0.019062353	0.019977051
0.002488333	0.003463328
0.013675798	0.01495082
0.003178693	0.003450111
0.013056111	0.01584573

0.003248529	0.000868909
0.021227374	0.021265366
0.004919402	0.001518417
0.054127576	0.040013475
-4.02E-17	0.003017935
0.021227374	0.0214758
-0.004919402	-0.00158496
0.013056111	0.015211554
-0.003248529	-0.001845694

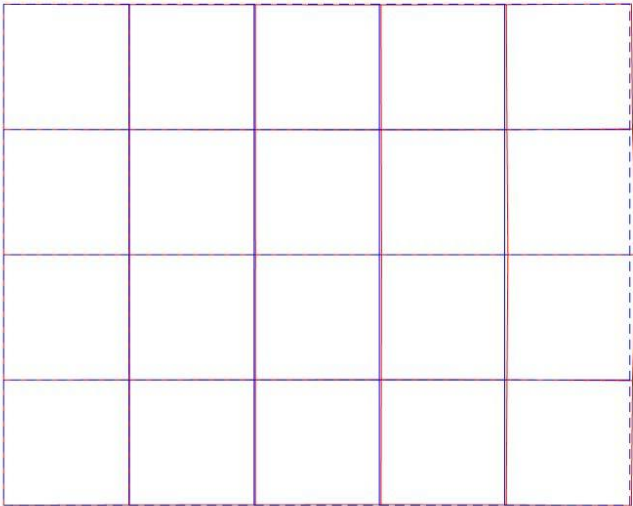


图 1： 二次四边形元程序结果

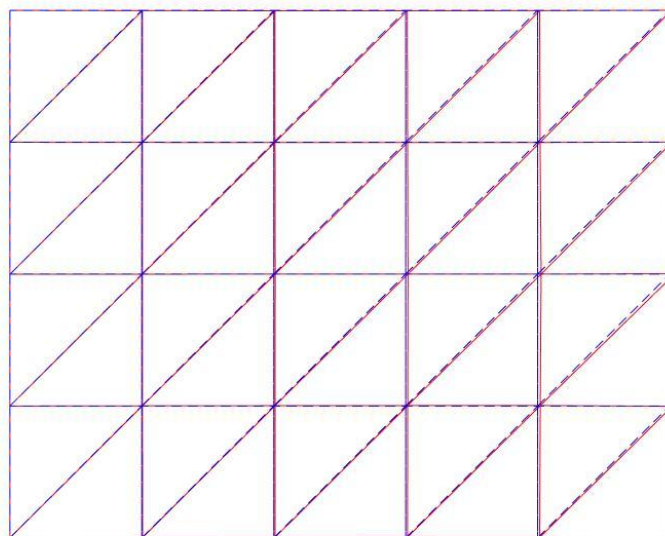


图 2：线性三角形元程序结果