支持向量机SVM-解决线性可分问题

在二维空间上，两类点被一条直线完全分开叫做线性可分。既然是线性可分的，那就存在无数多条直线，直观上来看这条直线两边的间隔越大越好，SVM 就是来找到这条最优解直线。

1 SVM 的代价函数

在分类正确时，即 $y(\omega\cdot x+b)>1, loss=0$；

在分类错误时，即 $y(\omega\cdot x+b)\le 1, loss=-y(\omega\cdot x+b)$。

如下图所示，决策边界为一条有宽度的条带，两条虚线的距离是 $\frac{2}{\|\omega\|}$，待优化参数 ω 的方向就是决策边界的法向量方向；边界上一共有 3 个点，这 3 个点就是支持向量。

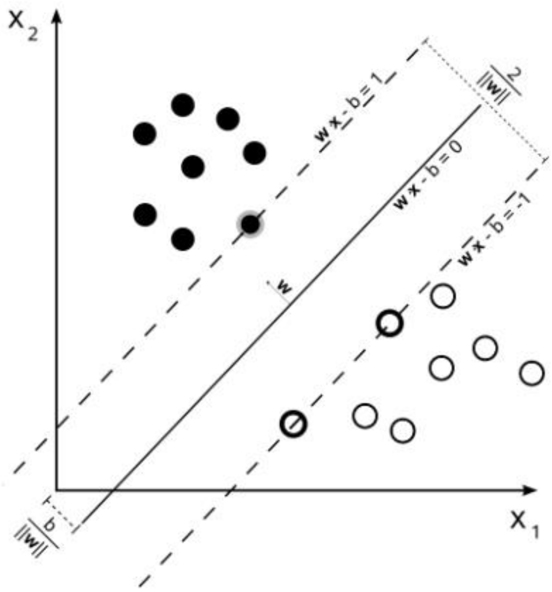

图 1 SVM 线性可分示意图

2 SVM 最优化问题

SVM 想要的就是找到各类样本点到超平面的距离最远，也就是找到最大间隔超平面。任意超平面可以用下面这个线性方程来描述：

$$\omega^T\cdot x+b=0$$

点 $x=(x_1,x_2...x_n)$ 到 $\omega^T\cdot x+b=0$ 距离为：

$$\frac{|\omega^T x+b|}{\|\omega\|}$$

其中$\|\omega\|=\sqrt{\omega_1^2+...\omega_n^2}$。

根据支持向量的定义我们知道，支持向量到超平面的距离为 d，其他点到超平面的距离大于 d。

$$\begin{cases}\dfrac{\omega^T x+b}{\|\omega\|}\geq d, y=1\\ \dfrac{\omega^T x+b}{\|\omega\|}\leq -d, y=-1\end{cases}$$

转化可得：

$$\begin{cases}\dfrac{\omega^T x+b}{\|\omega\|d}\geq 1, y=1\\ \dfrac{\omega^T x+b}{\|\omega\|d}\leq -1, y=-1\end{cases}$$

$\|\omega\|d$ 是正数，为了方便推导令它为 1，可以得到：

$$\begin{cases}\omega^T x+b\geq 1, y=1\\ \omega^T x+b\leq -1, y=-1\end{cases}$$

将两个方程合并可以得到：

$$y(\omega^T x+b)\geq 1$$

至此我们就可以得到最大间隔超平面的上下两个超平面。

每个支持向量到超平面的距离为：

$$d=\frac{|\omega^T x+b|}{\|\omega\|}$$

由上述 $y(\omega^T x+b)>1>0$ 可以得到 $y(\omega^T x+b)=|\omega^T x+b|$，所以我们得到 $d=\dfrac{y(\omega^T x+b)}{\|\omega\|}$。

最大化这个距离，支持向量 $y(\omega^T x+b)=1$，可以得到：

$$\max \frac{2}{\|\omega\|}$$

进一步转换：

$$\min \frac{1}{2}\|\omega\|$$

为了除去根号，方便计算，可以得到：

$$\min \frac{1}{2}\|\omega\|^2$$

所以得到的最优化问题是：

$$\min \frac{1}{2}\|\omega\|^2 \ s.t. \quad y_i(\omega^T x_i + b) \geq 1$$