Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Новосибирский государственный технический университет

Кафедра вычислительной техники

Отчет по лабораторной работе № 2

по дисциплине «Теория систем и системный анализ»

на тему «Метод наименьших квадратов для нелинейной функции»

Студент: Резниченко М. К.
Группа: АММ-21
Преподаватель: Ильиных С. П.

Новосибирск, 2021

Задание

Изучить метод наименьших квадратов на примере заданной нелинейной функции. Решить задачу дифференциальной форме для нелинейной функции.

Задана функция вида: $f(x) = a_0 * e^{x * a_1}$

Ход работы

Введем следующие переменные (рис. 1):

- N – количество измерений x
- k – шаг значения x
- i – индекс переменной x
- a – коэффициенты линейной функции
- f(x) – линейная функция

$$N := 512 \quad k := 0.01 \quad i := 0..N-1$$

$$a := \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x_i := i \cdot k$$

$$f_i := a_0 \cdot e^{x_i \cdot a_1}$$

Рис. 1 – Переменные

Построим график заданной функции (рис. 2).

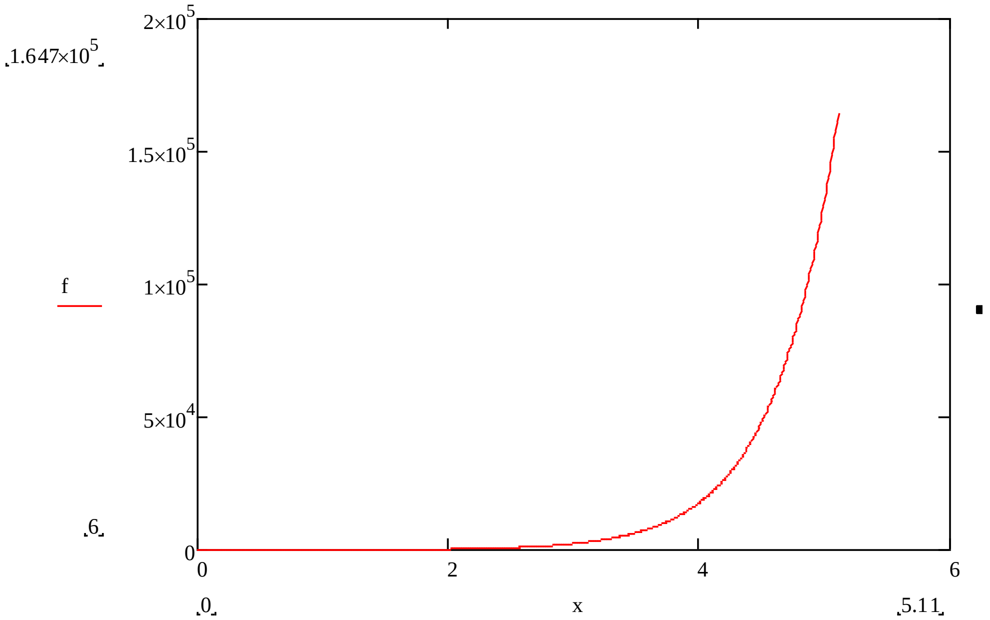

Рис. 2 – График функции

Добавим к этой функции шум (рис. 3).

$$D := 22$$

$$f1_i := f_i + rnd(D) - \frac{D}{2}$$

Рис. 3 – Добавление шума

Построим график функции с шумом (рис. 4).

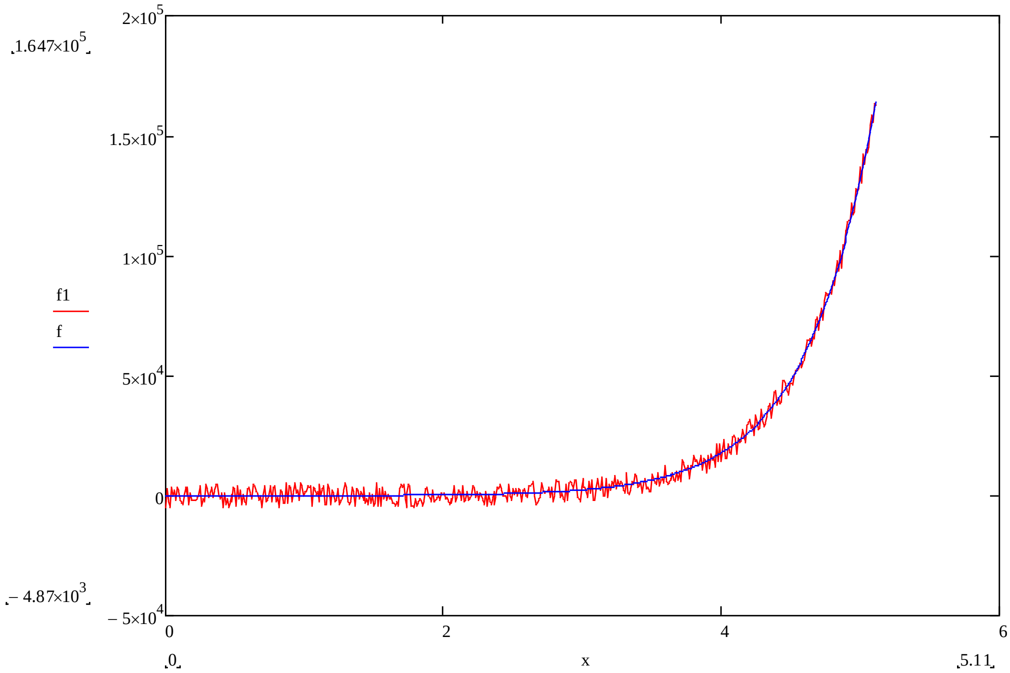

Рис. 4 – Графики функций (синяя – исходная, красная – с шумом)

Для нахождения коэффициентов зашумленной функции воспользуемся методом наименьших квадратов в дифференциальной форме. Коэффициенты аппроксимирующей функции вычисляются таким образом, чтобы среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных от найденной аппроксимирующей функции было наименьшим.

$$\frac{d}{da_i}\sum_{j=0}^{n-1}(\tilde{Y}_j - f(a_i X_j))^2 \rightarrow min$$

Введем данную формулу в Mathcad (рис. 5).

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left[f1_j - \left(a0 \cdot e^{x_j \cdot a1}\right)\right]^2 = 0$$

Рис. 5 – Введенное уравнение

Продифференцируем данное уравнение для составления системы (рис. 6).

$$2\cdot a0\cdot\left[a0\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{2\cdot a1\cdot x_j}\cdot x_j\right)-\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{a1\cdot x_j}\cdot f1_j\cdot x_j\right)\right]=0$$

$$2\cdot a0\cdot\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\cdot a1\cdot x_j}-2\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{a1\cdot x_j}\cdot f1_j\right)=0$$

Рис. 6 – Продифференцированное уравнение

Решим данную систему уравнений методом простых итераций. Выразим переменную a0 через a1 (рис. 7).

$$a01(a1):=\frac{\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{a1\cdot x_j}\cdot f1_j\right)}{\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{2\cdot a1\cdot x_j}\right)}\qquad a02(a1):=\frac{\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{a1\cdot x_j}\cdot f1_j\cdot x_j\right)}{\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{2\cdot a1\cdot x_j}\cdot x_j\right)}$$

Рис. 7 – Выражение переменной a0 через a1

Построим графики полученных функций (рис. 8).

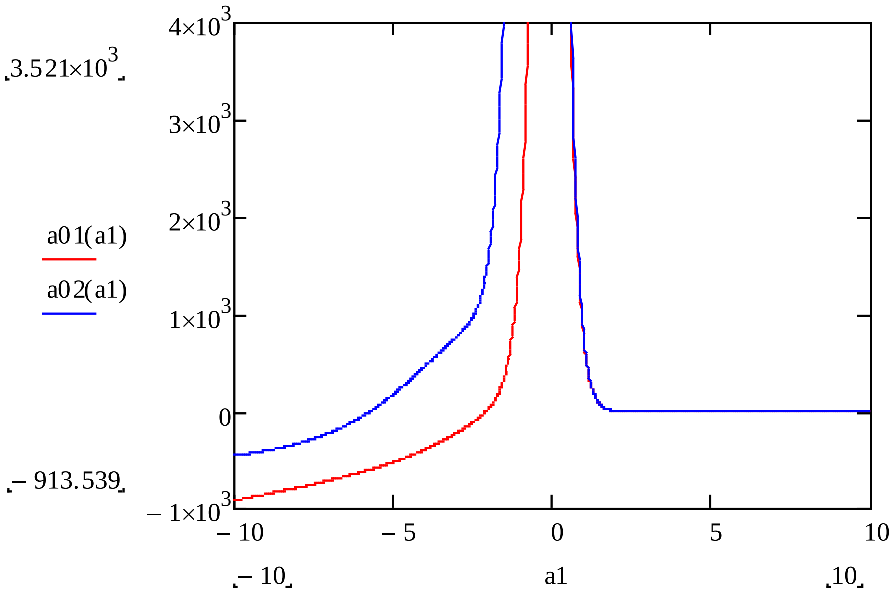

Рис. 8 – График системы нелинейных уравнений

Напишем алгоритм для вычисления решения системы с помощью метода простых итераций (рис. 9).

$$
\mathrm{Iter}(F1, F2, x0, y0, \varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
x1_0 \leftarrow x0 \\
y1_0 \leftarrow y0 \\
k \leftarrow 0 \\
\text{while } \left[\sqrt{\left(x1_k - F1\left(x1_k\right)\right)^2 + \left(y1_k - F2\left(x1_k\right)\right)^2} > \varepsilon\right] \wedge (k < 100) \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x1_{k+1} \leftarrow F1\left(x1_k\right) \\
y1_{k+1} \leftarrow F2\left(x1_k\right) \\
k \leftarrow k + 1
\end{array}\right. \\
\begin{pmatrix} x1_k \\ y1_k \\ k \end{pmatrix}
\end{array}\right.
$$

Рис. 8 – Алгоритм для вычисления решения системы с помощью метода простых итераций

Результатом выполнения алгоритма является следующие значения (рис. 9).

$$
b := \mathrm{Iter}(a01, a02, 3, 3, 0.000001) = \begin{pmatrix} 2.012 \\ 5.897 \\ 100 \end{pmatrix}
$$

Рис. 9 – Результат выполнения алгоритма

Построим график зашумленной функции с наложением функции с вычисленными коэффициентами (рис. 10).

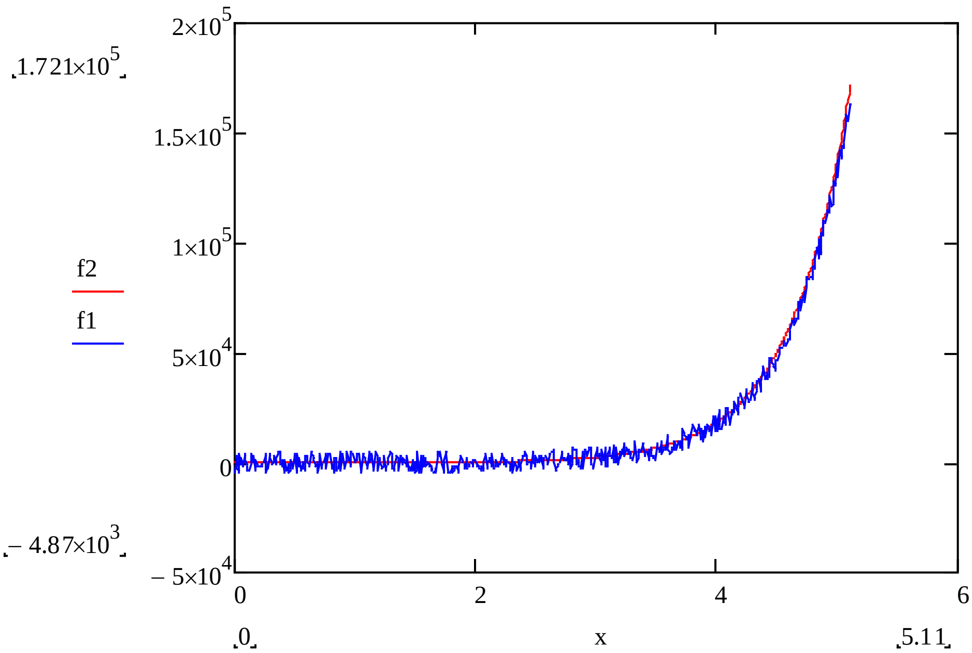

Рис. 10 – Графики функций (синяя – с шумом, красная – зашумленная нелинейная функция; красный график – нелинейная функция, полученная МНК в дифференциальной форме)

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен метод наименьших квадратов для нелинейной функции. Была решена задача аппроксимации нелинейной функции в дифференциальной форме.