线性代数

第一章 行列式

推荐视频

1 二阶与三阶行列式

二阶行列式

求解二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_1}{D}$$

三阶行列式

略

2 全排列和对换

排序及其逆序数

把n个不同的元素排成一列,叫做这n个元素的全排列

n个不同元素的所有排列的总数,通常用P_n表示

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

规定的排列为标准排列
与标准排列不同的称为逆序
逆序中的两元素经过至少n次交换后得到标准排列,此时的n为逆序数

> 如冒泡排序一样,其中n为交换次数

逆序数为奇数的排列叫做奇排列
逆序数为偶数的排列叫做偶排列

对换

定理1: 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

推论 奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数,偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数.

3 n阶行列式的定义

定义:n阶行列式记作

$$det(a_{aj}) = D\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = \Sigma(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$ 4行列式的性质

性质1 行列式与他的转置行列式相等.

性质2 对换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘同一数k,等于用数k乘此行列式.

性质4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质5 若行列式的某一行(列)的元素都为两数之和,那么可以拆分为两个行列数的和.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'i2 & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'i2 & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 把行列式的某一行(列)的各元素乘同一数k然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5 行列式按行展开

在n阶行列式中,把(i,j)元a_{ij}所在的第i行和第j列划去后,留下来的行列式称为a_{ij}的余子式,记作M_{ij},记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

引理 一个n阶行列式,如果其中第i行所有元素除(i,j)元a_{ij}外都为零,那么这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积,即

$$D = a_{ij}A_{ij}$$

定理(行列式按行(列)展开法则) 行列式等于它的仍一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

常用(凡德蒙特(Vandermonde)行列式)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad i \neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad i \neq j$$

第2章 矩阵及其运算

1 线性方程组和矩阵

线性方程组

略

矩阵的定义

略
$m \times n$的矩阵
形如:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

两个矩阵的行数和列数相等时候,就称之为同型矩阵
,如果它们的对应元素也相等则,两矩阵相等.
对角矩阵(对角阵)

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

单位矩阵(单位阵)

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2 矩阵的运算

设有两个$m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$和$\mathbf{B} = (b_{ij})$,规定$\mathbf{A} + \mathbf{B}$为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵加法满足以下规律:

$$(i)\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$
$$(ii)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

数与矩阵相乘

$$\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

满足以下运算规律:

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad ((\lambda\mu)\mathbf{A}) = \lambda(\mu\mathbf{A}) \\
(ii) &\quad (\lambda+\mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A} \\
(iii) &\quad \lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}
\end{aligned}
$$

矩阵与矩阵相乘

略