Họ tên SV: Hồ Trọng Hải
Mã số SV: 23207050

Phần 1: Nộp bài tập tại lớp số 1 (10%)

Chương 8: Giải gần đúng phương trình

Bài tập 3.3: Cho phương trình

$$f(x) = \sqrt{1.65}x^3 + 1.12x^2 + 14.35x - 12.75 = 0$$

Chứng tỏ rằng khoảng $(0.5; 1.5)$là một khoảng phân ly nghiệm của phương trình trên. Kiểm tra sự hội tụ của các phương pháp lặp; phương pháp Newton (tiếp tuyến). Tính đến phép lặp thứ ba x_3bằng các phương pháp trên. Đánh giá sai số của $x_3$theo từng phương pháp.

1. Chứng tỏ khoảng (0.5; 1.5) là khoảng phân ly nghiệm

Điều kiện để $[a, b]$ là khoảng phân ly nghiệm là hàm số liên tục, đơn điệu và $f(a) \cdot f(b) < 0$.

- $f(0.5) = \sqrt{1.65}(0.5)^3 + 1.12(0.5)^2 + 14.35(0.5) - 12.75 \approx -5.134$
- $f(1.5) = \sqrt{1.65}(1.5)^3 + 1.12(1.5)^2 + 14.35(1.5) - 12.75 \approx 15.63$

Ta thấy: $f(0.5) \cdot f(1.5) < 0$ (trái dấu).

- $f'(x) = 3\left(\sqrt{1.65}\right)x^2 + 2(1.12)x + 14.35 = 3.8536x^2 + 2.24x + 14.35$

Với mọi $x \in [0.5; 1.5]$, $x\ >\ 0$ nên $f'(x) > 0$. Hàm số đồng biến (đơn điệu tăng).

Kết luận: Khoảng $(0.5; 1.5)$ chứa duy nhất một nghiệm thực.

2. Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp lặp và phương pháp tiếp tuyến Newton – Raphson

- Phương pháp lặp:

$$f(x) = \sqrt{1.65}x^3 + 1.12x^2 + 14.35x - 12.75 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{12.75 - \sqrt{1.65}x^3 - 1.12x^2}{14.35} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{-3\sqrt{1.65}x^2 - 2.24x}{14.35}$$

$$\rightarrow \max_{x\in[0.5;1.5]} |g'(x)| = \max_{x\in[0.5;1.5]} \left| \frac{-3\sqrt{1.65}x^2}{14.35} - \frac{2.24x}{14.35} \right| \leq\ 0.838\ =\ \mathrm{q}\ \leq 1$$

⇒ Phương pháp lặp đơn hội tụ

- Phương pháp tiếp tuyến Newton – Raphson:

$$f(x) = \sqrt{1.65}x^3 + 1.12x^2 + 14.35x - 12.75 = 0$$

* $f'(x) = 3\sqrt{1.65}x^2 + 2.24x + 14.35 > 0, \forall x \in (0.5; 1.5)$
* $f''(x) = 6\sqrt{1.65}x + 2.24 > 0, \forall x \in (0.5; 1.5)$

→ f'(x) và f''(x) không đổi dấu trên (0.5;1.5)

⇒ Phương pháp tiếp tuyến (Newton – Raphson) hội tụ.

3. Tính đến phép lặp thứ ba x_3 bằng các phương pháp trên:

- Phương pháp lặp đơn:

$$x = \frac{12.75 - \sqrt{1.65}x^3 - 1.12x^2}{14.35} = g(x)$$

* Chọn xấp xỉ $x_0 = 0.5 \in (0.5; 1.5)$
* Thực hiện phép lặp: $\mathrm{x_n} = \mathrm{g(x_{n-1})}$

n	0	1	2
$\mathrm{x_{n-1}}$	0.5	0.8578	0.774572
$\mathrm{x_n}$	0.8578	0.774572	0.8001

Sai số hậu nghiệm:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

$$|x_3 - \alpha| \leq \frac{0.838}{0.162}|0.8001 - 0.774572| \approx 0.13205$$

- Phương pháp tiếp tuyến Newton – Raphson:

* $f'(x) = 3\sqrt{1.65}x^2 + 2.24x + 14.35 > 0, \forall x \in (0.5; 1.5)$
* $f''(x) = 6\sqrt{1.65}x + 2.24 > 0, \forall x \in (0.5; 1.5)$
* Có:

$$f(0.5) \approx -5.134; f''(0.5) \approx 6.094$$

$$f(1.5) \approx 15.63; f''(1.5) \approx 13.8$$

→ Chọn $x_0 = b = 1.5$ để $f(x_0)$ và $f''(x_0)$ cùng dấu.

* Từ xấp xỉ đầu $x_0 = 1.5$, tính: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

n	0	1	2
x_n	1.5	0.9075	0.7973
x_{n+1}	0.9075	0.7973	0.79438

Sai số cho x_3 (Newton):

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

Với $m_1 = \min|f'(x)|$ trên [0.5; 1.5]. Vì $f'(x)$ đồng biến, $m_1 = f'(0.5) \approx 16.43$.

Sai số của x_3:

$$|x_3 - \alpha| \leq \frac{|f(0.79438)|}{16.43} \approx \frac{0.000029864}{16.43} \approx 0.000001817$$

Chương 9: Giải hệ phương trình

Bài tập 4.3: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Choleskv (khai căn).

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}; \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Điều kiện: để triển khai phương pháp Cholesky (khai căn) là ma trận A phải đối xứng và xác định dương.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$a_{12} = a_{21} = 3$; $a_{13} = a_{31} = 2$; $a_{14} = a_{41} = 1$;

$a_{23} = a_{32} = 1$; $a_{24} = a_{42} = 2$; $a_{34} = a_{43} = 1$.

⇨ $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j, nên ma trận A đối xứng.

$\Delta_1 = 5$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 21 > 0$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 88 > 0$;

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 460 > 0$

- ⇨ Ma trận A xác định dương.

Bước 1: Phân tách và xác định ma trận L từ phương trình A = L.L^T

$$A = L.L^T \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} & l_{11}l_{41} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{21}l_{41} + l_{22}l_{42} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 & l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42} + l_{33}l_{43} \\ l_{41}l_{11} & l_{41}l_{21} + l_{42}l_{22} & l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} & l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \sqrt{4.2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{5\sqrt{4.2}} & \sqrt{\frac{88}{21}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1.4}{\sqrt{4.2}} & \frac{\sqrt{462}}{66} & \sqrt{\frac{115}{22}} \end{bmatrix}$$

Bước 2: Tiến hành giải phương trình L.Y = B để tìm ma trận trung gian Y.

$$L.Y = B \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \sqrt{4.2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{5\sqrt{4.2}} & \sqrt{\frac{88}{21}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1.4}{\sqrt{4.2}} & \frac{\sqrt{462}}{66} & \sqrt{\frac{115}{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 1.6590 \\ 3.3032 \\ -0.1789 \end{bmatrix}$$

Bước 3: Giải hệ phương trình L^T.X = Y để xác định ma trận nghiệm X cần tìm.

$L^T.X = Y \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{4.2} & \frac{-1}{5\sqrt{4.2}} & \frac{1.4}{\sqrt{4.2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{88}{21}} & \frac{\sqrt{462}}{66} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{115}{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 1.6590 \\ 3.3032 \\ -0.1789 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9826 \\ 0.9130 \\ 1.6261 \\ -0.0782 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 11 \end{bmatrix}; \ b = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Điều kiện: để triển khai phương pháp Cholesky (khai căn) là ma trận A phải đối xứng và xác định dương.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$a_{12} = a_{21} = 4$; $a_{13} = a_{31} = 3$; $a_{14} = a_{41} = 1$;

$a_{23} = a_{32} = 2$; $a_{24} = a_{42} = 5$; $a_{34} = a_{43} = 4$.

- ⇨ $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j, nên ma trận A đối xứng.

$\Delta_1 = 7$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 40 > 0$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 228 > 0$;

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 1244 > 0$

- ⇨ Ma trận A xác định dương.

Bước 1: Phân tách và xác định ma trận L từ phương trình $A = L.L^T$

A = L.L^T ➔ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} & l_{11}l_{41} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{21}l_{41} + l_{22}l_{42} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 & l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42} + l_{33}l_{43} \\ l_{41}l_{11} & l_{41}l_{21} + l_{42}l_{22} & l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} & l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{7}} & \sqrt{\frac{40}{7}} & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{280}} & \sqrt{5.7} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{31}{\sqrt{280}} & \frac{3.35}{\sqrt{5.7}} & \sqrt{\frac{311}{57}} \end{bmatrix}$$

Bước 2: Tiến hành giải phương trình L.Y = B để tìm ma trận trung gian Y.

L. Y = B ➔ $\begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{7}} & \sqrt{\frac{40}{7}} & 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{280}} & \sqrt{5.7} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{31}{\sqrt{280}} & \frac{3.35}{\sqrt{5.7}} & \sqrt{\frac{311}{57}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6458 \\ 2.5100 \\ 2.3875 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bước 3: Giải hệ phương trình L^T.X = Y để xác định ma trận nghiệm X cần tìm.

L^T.X = Y➔ $\begin{bmatrix} \sqrt{7} & \frac{4}{\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & \sqrt{\frac{40}{7}} & \frac{2}{\sqrt{280}} & \frac{31}{\sqrt{280}} \\ 0 & 0 & \sqrt{5.7} & \frac{3.35}{\sqrt{5.7}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{311}{57}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6458 \\ 2.5100 \\ 2.3875 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.10^{-6} \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 0 \end{bmatrix}$

Chương 10: Nội suy, hồi quy

Bài tập 5.8: Từ bảng số:

x	6.3	6.72	7.14	7.56	7.98	8.4
y	21.4259	23.377	25.3622	27.3831	29.438	31.5253

Hãy xây dựng đa thực nội suy để tính giá trị gần đúng của hàm tại điểm x = 6.51.

Đa thức bậc 1 có dạng tổng quát theo biến t:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Chọn điểm dữ liệu: x = 6.3,6.72.

Xác định các hệ số a_0 và a_1 theo nguyên tắc: tại x_i giá trị $P_1(x_i) = y(x_i)$.

$\begin{cases} a_0 + a_1(6.3) = 21.4259 \\ a_0 + a_1(6.72) = 23.377 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} a_0 = -7.4086 \\ a_1 = 4.5812 \end{cases}$

Hàm nội suy đa thức bậc 1: (6.3≤x≤6.72)

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x = -7.4086 + 4.5812x$$

➔ Giá trị gần đúng của hàm tại điểm x = 6.51 là:

$$P_1(6.51) = -7.4086 + 4.5812(6.51) = 22.415012.$$

Chương 11 + 12: Đạo hàm, tích phân, Phương trình vi phân

Bài tập 6.7 (bài số 4): Tìm nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy sau:

Giải phương trình vi phân: $y' = f(x, y) = x^2 + y^2$

Điều kiện đầu: $x_0 = 0, y(0) = -1$

Đoạn tính toán: $[0; 0.5]$ với bước nhảy $h = 0.1$.

Các điểm cần tính: $x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, x_3 = 0.3, x_4 = 0.4, x_5 = 0.5$.

$y' = f(x, y) = x^2 + y^2$; y(0) = -1

- Phương pháp Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

n	x_n	y_n
0	0.0	-1.0
1	0.1	-0.9
2	0.2	-0.818
3	0.3	-0.7470876
4	0.4	-0.68227
5	0.5	-0.6197

- Phương pháp Euler cải tiến:

$$y* = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y*)]$$

n	x_n	y_n
0	0.0	-1.0
1	0.1	-0.909
2	0.2	-0.831124
3	0.3	-0.76135
4	0.4	-0.6958
5	0.5	-0.63113

- Phương pháp Runge – Kutta bậc 4:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_1\frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_2\frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3 h)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

n	x_n	y_n
0	0.0	-1.0
1	0.1	-0.909877
2	0.2	-0.8318
3	0.3	-0.73417
4	0.4	-0.6724
5	0.5	-0.611