TOÁN RỜI RẠC
(DISCRETE MATHEMATICS)

Chương 1. Logic

Khái niệm logic mệnh đề trong đại số

1.Mệnh đề: là một khẳng định có giá trị chân lý xác định, đúng hoặc sai.

Câu hỏi, câu cảm thán, mệnh lệnh... không là mệnh đề.

+ Ví dụ:

- Mặt trời quay quanh trái đất
- 1+1 =2
- Hôm nay trời đẹp quá ! (ko là mệnh đề)
- Học bài đi ! (ko là mệnh đề)
- 3 là số chẵn phải không? (ko là mệnh đề)

+ Kí hiệu: người ta dùng các ký hiệu P, Q, R... để chỉ mệnh đề.

Chương 1. Logic

2.Chân trị của mệnh đề:

\+ Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng hoặc vừa sai. khi mệnh đề P đúng ta nói P có chân trị đúng , ngược lại ta nói P có chân trị sai.

\+ chân trị đúng và chân trị sai sẽ được ký hiệu lần lượt là là 1(hay Đ,T) và 0(S,F).

\+ Phân Loại:

- Mệnh đề phức hợp : là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết bằng các liên từ (và, hay , khi và chỉ khi) hoặc trạng từ "không"
- Mệnh đề sơ cấp: (nguyên thủy) : Là mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác thông qua liên từ hoặc trạng từ " không".

Chương 1. Logic

Kiến thức liên quan:

3. Các phép toán trên mệnh đề:

+ Phép phủ định:

Phủ định của mệnh đề P được ký hiệu là ¬P hay P (đọc là "không" P hay "phủ định của" P), là mệnh đề được định bởi: ¬P đúng ⇔ P sai.

Ví dụ.

P="2 là số nguyên tố"⇒ ¬P = "2 không là số nguyên tố"

Q ="1 > 2"⇒ ¬Q= "1 ≤ 2"

+ Phép nối liền (hội, giao)

Phép nối liền của hai mệnh đề P và Q được kí hiệu bởi P ∧ Q (đọc là "P và Q"), là mệnh đề được định bởi:

P ∧ Q đúng ⇔ P và Q đồng thời đúng.

Ví dụ. Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

3 > 4 và Trần Hưng Đạo là vị tướng

Chương 1. Logic

+ Phép nối rời (tuyển, hợp)

Phép nối rời của hai mệnh đề P và Q được kí hiệu bởi P ∨ Q (đọc là "P hay Q"), là mệnh đề được định bởi:

P ∨ Q sai ⇔ P và Q đồng thời sai.

Ví dụ. Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) 3 > 4 hay Paris là thủ đô của Anh

b) Mặt trời mọc ở hướng Đông hay 1 + 3 = 5

c) π > 4 hay trời không mưa

d) 2 là số nguyên tố hay là số chẵn

+ Phép kéo theo

Mệnh đề P kéo theo Q của hai mệnh đề P và Q, kí hiệu bởi P → Q (đọc là "P kéo theo Q" hay "Nếu P thì Q" hay "P là điều kiện đủ của Q" hay "Q là điều kiện cần của P")

Chương 1. Logic

là mệnh đề được định bởi:

$P \to Q$ sai $\Leftrightarrow$ P đúng và Q sai.

Ví dụ. Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) Nếu 1 = 2 thì tôi là người Việt Nam

b) Nếu trái đất quay quanh mặt trời thì 1 + 3 = 5

c) $\pi < 4$ kéo theo $5 < 6$

d) Nếu 2 + 1 = 0 thì tôi là chủ tịch nước

Chương 2. Quan hệ

Khái niệm quan hệ trong đại số

1. Quan hệ hai ngôi:

Định nghĩa: Một quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B là tập con R của tích Descartes A × B.

Quan hệ từ A đến chính nó được gọi là quan hệ hai ngôi (hay quan hệ) trên A.

2. Quan hệ tương đương:

Định nghĩa: Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp S ≠ ∅.

a) $\Re$ là một quan hệ tương đương trên S nếu $\Re$ phản xạ, đối xứng và truyền trên S.

b) Ta dùng ký hiệu ~ để thể hiện một quan hệ tương đương tổng quát. tương đương ~ .

Chương 2. Quan hệ

Ký hiệu (S,~) được hiểu là trên tập hợp S có quan hệ tương đương ~ .

∀x,y ∈ S, nếu x ~ y thì ta nói một cách hình thức rằng " x tương đương với y "

c) Nếu ℜ là một quan hệ tương đương trên S và ∅ ≠ T ⊂ S thì ℜ cũng là một quan hệ tương đương trên T.

Ví dụ:

+ S = Tập hợp mọi người trên trái đất.

∀x, y ∈ S, đặt x ~ y ⇔ x cùng tuổi với (ctv) y

Ta có ~ là một quan hệ tương đương trên S. Thật vậy,

~ phản xạ (∀x ∈ S, x ctv x), ~ đối xứng (∀x, y ∈ S, x ctv y ⇒ y ctv x),

~ truyền [∀x, y, z ∈ S, (x ctv y và y ctv z) ⇒ x ctv z].

Chương 2. Quan hệ

S = R và hàm số tùy ý $f : R \to R$. $\forall x, y \in S$, đặt $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

Ta có $\mathfrak{R}$ là một quan hệ tương đương trên S vì $\mathfrak{R}$ phản xạ $[\ \forall x \in S, f(x) = f(x)\ ]$,

$\mathfrak{R}$ đối xứng $(\forall x, y \in S, f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)\ ]$ và $\mathfrak{R}$ truyền $[\ \forall x, y, z \in S, \{ f(x) = f(y)$ và $f(y) = f(z) \} \Rightarrow f(x) = f(z)\ ]$.

3. Quan hệ thứ tự:

Định nghĩa: Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp S ≠ ∅.

$\Re$ là một quan hệ thứ tự trên S nếu $\Re$ phản xạ, phản xứng và truyền trên S.

Ta dùng ký hiệu □ để thể hiện một quan hệ thứ tự tổng quát.

Ký hiệu (S, □) được hiểu là trên tập hợp S có quan hệ thứ tự □ .

∀x,y ∈ S, nếu x □ y thì ta nói một cách hình thức rằng

“ x nhỏ hơn y ” hay “ x kém hơn y ” hay “ x đứng trước y ” hay “ y lớn hơn x ” hay “ y trội hơn x ” hay “ y đứng sau x ”

Chương 2. Quan hệ

Nếu $\Re$ là một quan hệ thứ tự trên S và $\emptyset \neq T \subset S$ thì $\Re$ cũng là một quan hệ thứ tự trên T.

Ví dụ:

+ $(R, \leq)$ và $(R, \geq)$ là các quan hệ thứ tự. Thật vậy,

$\leq$ phản xạ ($\forall x \in R, x \leq x$), $\leq$ phản xứng [$\forall x, y \in R, (x \leq y$ và $y \leq x) \Rightarrow (x = y)$], và $\leq$ truyền [$\forall x, y, z \in R, (x \leq y$ và $y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$]. Tương tự cho quan hệ $\geq$. Do đó $(Q, \leq)$, $(Q, \leq)$, $(Z, \leq)$ và $(Z, \geq)$ là các quan hệ thứ tự.

+ (N, |) và (N, □) là các quan hệ thứ tự. Thật vậy, | phản xạ ($\forall x \in N$, $x = 1. x$ nên

$x \mid x$), | phản xứng [$\forall x, y \in N, (x \mid y$ và $y \mid x) \Rightarrow (\exists a, b \in N, y = ax$ và $x = by)$

Chương 2. Quan hệ

$$\Rightarrow (x = abx \text{ và } y = ax) \Rightarrow \begin{bmatrix} x=0 \,\&\, y=0 \\ hoac \\ x \geq 1, ab=1, y=ax \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=0 \,\&\, y=0 \\ hoac \\ x \geq 1, a=b=1, y=x \end{bmatrix} \Rightarrow (x = y) \,]$$

và | truyền [∀x, y, z ∈ N, (x | y và y | z) ⇒ (∃ a, b ∈ N, y = ax và z = by) ⇒ (z = abx với ab ∈ N) ⇒ (x | z)]. Tương tự cho quan hệ □ .

+ (Π =℘(E), ⊂) và (Π =℘(E), ⊃) là các quan hệ thứ tự. Thật vậy, ⊂ phản xạ (∀A ∈ Π, A ⊂ A), ⊂ phản xứng [∀A, B ∈ Π, (A ⊂ B và B ⊂ A) ⇒ A = B],

⊂ truyền [∀A, B, C ∈ Π, (A ⊂ B và B ⊂ C) ⇒ A ⊂ C]. Tương tự cho quan hệ ⊃.

+ (R, <) và (R, >) không phải là các quan hệ thứ tự vì các quan hệ < và > không phản xạ trên R (∃1∈ R, 1 < 1 và 1 > 1).

Để ý < và > vẫn phản xứng và truyền trên R.

Kiến thức liên quan:

Quan hệ đồng dư trên Z

Định nghĩa: Cho n là một số nguyên dương và quan hệ R trên Z xác định bởi:

$\forall x, y \in Z, xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n}$

Khi đó R là một quan hệ tương đương trên Z. Quan hệ này được gọi là quan hệ đồng dư theo modulo n

Với mỗi $x \in Z$, ta có

$x = \{x + kn \mid k \in Z\} = \{x, x \pm n, x \pm 2n, x \pm 3n, . . .\}.$

Chương 2. Quan hệ

Ta đặt: Zn = {0, 1, 2, . . . , n − 1}.

Ví dụ. Trong Z12, ta có −7 = 5; 28 = 4.

Giải phương trình trên Zn

Định lý: Cho a và b ∈ Zn, ta xét phương trình a · x = b (∗)
Khi đó:

+ Nếu a = 0:

- Nếu b = 0, phương trình vô số nghiệm
- Nếu b # 0, phương trình vô nghiệm

+ Nếu a # 0:

- Nếu a khả nghịch, phương trình có nghiệm duy nhất: x = a −1 · b.
- Nếu a không khả nghịch, khi đó d = (a, n) > 1

- Nếu d không là ước của b thì phương trình vô nghiệm Nếu a không khả nghịch, khi đó d = (a, n) > 1
- Nếu d là ước của b, ta đặt a 0 = a d , b0 = b d và n 0 = n d . Khi đó phương trình có đúng d nghiệm có dạng

  x = y + kn0 , với 0 ≤ k ≤ d – 1 trong đó y là nghiệm của phương trình a 0 · z = b 0 trong Zn0

Khái niệm boole trong đại số

Khái niệm: Tập hợp khác rỗng S cùng với các phép toán ký hiệu nhân (.), cộng (+), lấy bù (’) được gọi là một đại số Boole nếu các tiên đề sau đây được thoả mãn với mọi a, b, c ∈ S.

Định nghĩa: Ký hiệu B = {0, 1} và Bn = {(x1, x2, …, xn) | xiB, 1≤ i ≤ n}, ở đây B và Bn là các đại số Boole (xem 2) và 3) của Thí dụ 1). Biến x được gọi là một biến Boole nếu nó nhận các giá trị chỉ từ B. Một hàm từ Bn vào B được gọi là một hàm Boole (hay hàm đại số lôgic) bậc n.

Chương 3. Boole

Nếu P và Q là các biểu thức Boole thì , PQ và P+Q cũng là các biểu thức Boole.

Mỗi một biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole. Các giá trị của hàm này nhận được bằng cách thay 0 và 1 cho các biến trong biểu thức đó.

Hai hàm n biến F và G được gọi là bằng nhau nếu F(a1, a2, …, an)=G(a1, a2, …,an) với mọi a1, a2, …, anB. Hai biểu thức Boole khác nhau biểu diễn cùng một hàm Boole được gọi là tương đương. Phần bù của hàm Boole F là hàm với (x1, x2, …, xn) = . Giả sử F và G là các hàm Boole bậc n. Tổng Boole F+G và tích Boole FG được định nghĩa bởi:

Chương 3. Boole

(F+G)(x1, x2, …, xn) = F(x1, x2, …, xn)+G(x1, x2, …, xn),

(FG)(x1, x2, …, xn) = F(x1, x2, …, xn)G(x1, x2, …, xn).

Cho x là một biến Boole và B. Ký hiệu:

Dễ thấy rằng . Với mỗi hàm Boole F bậc n, ký hiệu:

TF = {(x1, x2, …, xn)Bn | F(x1, x2, …, xn)=1}

Và gọi nó là tập đặc trưng của hàm F. Khi đó ta có:

, TF+G = TFTG, TFG = TFTG.

Cho n biến Boole x1, x2, …, xn. Một biểu thức dạng:

Trong đó B, 1 được gọi là một hội sơ cấp của n biến x1, x2, …, xn. Số các biến xuất hiện trong một hội sơ cấp đựoc gọi là hạng của của hội sơ cấp đó.

Cho F là một hàm Boole bậc n. Nếu F được biểu diễn dưới dạng tổng (tuyển) của một số hội sơ cấp khác nhau của n biến thì biểu diễn đó được gọi là dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc của F. Dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc hoàn toàn là dạng chuẩn tắc duy nhất của F mà trong đó các hội sơ cấp đều có hạng n.

Chương 3. Boole

Kiến thức liên quan:

Đa Thức Tối Tiểu:

Định nghĩa: Cho hai công thức đa thức của một hàm boole:

$$f = m1 \vee m2 \vee \dots \vee mk \ (F)$$

$$f = M1 \vee M2 \vee \dots \vee Ml \ (G)$$

Ta nói rằng công thức F đơn giản hơn công thức G nếu tồn tại đơn ánh:

$$h : \{1, 2, .., k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$$

sao cho với mọi i ∈ {1, 2, .., k} thì số từ đơn của mi không nhiều hơn số từ đơn của Mh(i)

Ví dụ. Giả sử f có hai công thức đa thức là:

f = ¯yt¯ ∨ xyt¯ ∨ xt¯ ∨ xzt ∨ x¯yz¯ (F)

f = ¯zt¯ ∨ x¯t¯ ∨ xzt ∨ yzt¯ (G)

Hỏi công thức nào đơn giản hơn? Đáp án. G