TOÁN RỜI RẠC
(DISCRETE MATHEMATICS)

Chương 1.Logic

- **1.1 định lý tương đương logic**: Hai dạng mệnh đề E và F tương đương với nhau khi
và chỉ khi E↔F là hằng đúng.

- **1.2 Qui tắc thay thế**: Trong dạng mệnh đề E, nếu ta thay thế biểu thức con F bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được vẫn còn tương đương logic với E.

- **1.3 các luật logic**:

- phủ định của phủ định:

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

- luật De Morgan

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

- luật giao hoán:

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

Chương 1.Logic

- Luật kết hợp

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r <=> p \wedge (q \wedge r)$$

- Luật phân phối (bố)

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

- Luật lũy đẳng

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

$$P \wedge p \Leftrightarrow p$$

- Luật trung hòa:

$$p \vee 0 \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$$

Chương 1.Logic

- luật về phân tử bù:

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$$

- luật thống trị:

$$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

- luật hấp thụ:

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

Chương 1.Logic

❑ **1.4 Quy Tắc suy diễn**:

- Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng p, q, r...(tiền đề), ta áp dụng các qui tắc suy diễn để suy ra chân lí của một mệnh đề h mà ta gọi là kết luận.
- Nói cách khác, dùng các qui tắc suy diễn để chứng minh: ($p \wedge q \wedge r \wedge \ldots$) có hệ quả logic là h

Chương 1.Logic

❖ 1.4.1quy tắc khẳng định(Modus Ponens)

- qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[(p \to q) \wedge p] \to q$$

hoặc ở dưới dạng hồ sơ:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$$

ví dụ:

- Nếu An học chăm thì An học tốt.

  Mà An học chăm

  Suy ra An học tốt.

- Trời mưa thì đường ướt.

  Mà chiều nay trời mưa.

  Suy ra Chiều nay đường ướt.

❖ 1.4.2 quy tắc phủ định

- qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$$

hoặc ở dưới dạng hồ sơ:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

ví dụ:

Nếu An đi học đầy đủ thì An đậu toán rời rạc.

An không đậu toán rời rạc.

Suy ra: An không đi học đầy đủ

❖ 1.4.3 quy tắc tam đoạn luận:

- qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

hoặc ở dưới dạng hồ sơ:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

ví dụ:

- Nếu trời mưa thì đường ướt.
- Nếu đường ướt thì đường trơn

Suy ra nếu trời mưa thì đường trơn.

- Một con ngựa rẻ là một con ngựa hiếm
- Cái gì hiếm thì đắt

Suy ra một con ngựa rẻ thì đắt

Chương 1.Logic

❖ 1.4.4 Quy tắc tam đoạn luận rời:

- qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \vee q) \wedge \neg q\right] \rightarrow p$$

hoặc ở dưới dạng hồ sơ:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

- Ý nghĩa của qui tắc: nếu một trong hai trường hợp có thểxảy ra, chúng ta biết có một trường hợp không xảy ra thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ xảy ra.
- ví dụ:

  Chủ nhật, An thường lên thư viện hoặc về quê

  Chủ nhật này, An không về quê

  Suy ra: Chủ nhật này, An lên thư viện

❖ 1.4.5 quy tắc nối liền:

- qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$(p \wedge q) \to (p \wedge q)$$

hoặc ở dưới dạng hồ sơ:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

ví dụ: Hôm nay An học bài.

Hôm nay An phụ mẹ nấu ăn.

Suy ra: Hôm nay An học bài và phụ mẹ nấu ăn.

❖ 1.4.6 quy tắc đơn giản

- qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$(p \wedge q) \to p$$

hoặc ở dưới dạng hồ sơ:

$$\begin{array}{r} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

- ví dụ: Hôm nay An đi học Toán rời rạc và học Anh văn.

  Suy ra: Hôm nay An học Toán rời rạc.

❖ 1.4.7 qui tắc mâu thuẩn(chứng minh bằng phản chứng)

- ta có tương đương Logic:

$$\left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n\right) \rightarrow h\right] \Leftrightarrow \left[\left(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg h\right) \rightarrow 0\right]$$

- Để chứng minh vế trái là một hằng đúng ta chứng minh nếu thêm phủ định của h vào các tiền đề thì được một mâu thuẫn

.

❖ **2.1** TÍNH PHẢN XẠ:

–

α) $\Re$ *phản xạ* nếu “ $\forall x \in S, x\Re x$ ” (mọi phần tử của S quan hệ $\Re$ với chính nó).

β) $\Re$ *không phản xạ* nếu “ $\exists x_o \in S, x_o\Re\, x_o$ ”.

(có ít nhất một phần tử của S không quan hệ $\Re$ với chính nó).

- Ví dụ:

a) $S = \{ 1, 2, 3 \} \subset T = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

Xét quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S (và cũng là quan hệ hai ngôi trên T):

$\mathfrak{R} = \{ (3,3), (2,1), (1,1), (1,3), (2,2) \} \subset S^2 \subset T^2$.

$\Re$ (trên S) phản xạ ($\forall x \in S, x\Re x$) nhưng $\Re$ (trên T) không phản xạ ($\exists 4 \in T, 4\,\Re\, 4$).

b) $S = \mathbf{R}$. $\forall x, y \in S$, đặt $[\, x\,\gamma\, y \Leftrightarrow x \leq y + 2\,]$ và $[\, x\,\delta\, y \Leftrightarrow 2x^3 \neq 3y^2\,]$.

γ phản xạ ($\forall x \in S, x \leq x + 2$ nên $x\,\gamma\, x$).

δ không phản xạ ($\exists 0 \in S, 2.0^3 = 3.0^2$ nên $0 \square\ 0$)

❖ 2.2 TÍNH Đối Xứng:

α) $\Re$ *đối xứng* nếu “ $\forall x, y \in S, x\Re y \Rightarrow y\Re x$ ”. (mọi cặp phần tử của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều hoặc không có quan hệ $\Re$ theo bất cứ chiều nào cả).

β) $\Re$ *không đối xứng* nếu “ $\exists x_o, y_o \in S, x_o\Re y_o$ và $y_o\Re\ x_o$ ” .

(có ít nhất một cặp phần tử của S chỉ quan hệ $\Re$ theo một chiều).

- Ví dụ:

a) S = { 0, 1, 2 }. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\mathfrak{R}$ = { (0,0), (2,1), (1,1), (1,2) } $\subset$ $\mathfrak{R}$ = $\mathfrak{R}$ $\cup$ { (0,1) } $\subset S^2$

$\Re$ đối xứng [các cặp (0,0), (1,1), (1,2) có quan hệ hai chiều. Các cặp khác vắng mặt]

θ không đối xứng ($\exists 0, 1 \in S$, $0\theta 1$ và $1\theta 0$).

b) S = **Q**. $\forall x, y \in S$, đặt [$x\ \gamma\ y \Leftrightarrow x^2 + \sin x = y^2 + \sin y$] và [$x\ \delta\ y$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 2y = 3x - 2y^2$]

γ đối xứng ($\forall x, y \in S$, $x\ \gamma\ y \Rightarrow x^2 + \sin x = y^2 + \sin y \Rightarrow y^2 + \sin y = x^2 + \sin x \Rightarrow y\ \gamma\ x$)

δ không đối xứng ($\exists 1, 0 \in S$, $1\delta 0$ và $0\theta 1$).

Chương 2.Quan Hệ

❖ 2.3 TÍNH Phản (Đối) Xứng:

α) $\Re$ *phản xứng* nếu " $\forall x, y \in S$, ($x \Re y$ và $y \Re x$) $\Rightarrow x = y$ "(cặp phần tử nào của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều thì phải trùng nhau). a') $\Re$ *phản xứng* nếu " $\forall x, y \in S$, $x \neq y \Rightarrow$ ($x \Re y$ hay $y \Re x$) "

(mọi cặp phần tử khác nhau của S không có quan hệ $\Re$ đủ hai chiều).

b) $\Re$ *không phản xứng* nếu " $\exists x_o, y_o \in S$, ($x_o \Re y_o$ và $y_o \Re x_o$) và $x_o \neq y_o$ " (có ít nhất hai phần tử khác nhau của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều).

❖ **2.4** TÍNH Truyền (Bắc cầu):

α) $\Re$ *truyền* nếu " $\forall$x, y, z $\in$ S, (x$\Re$**y** và **y**$\Re$z) $\Rightarrow$ x$\Re$z ".

β) $\Re$ *không truyền* nếu " $\exists x_o, y_o, z_o \in S$, ($x_o \Re \mathbf{y_o}$ và $\mathbf{y_o} \Re x_o$) và $x_o \Re z_o$ " .

Chương 3.Hàm Boole

❖ **3.1** <u>TÍNH Kết Hợp</u>

- với mọi x, y, z ∈ B

$$x \lor (y \lor z) = (x \lor y) \lor z$$

$$x \land (y \land z) = (x \land y) \land z$$

❖ **3.2** <u>TÍNH Giao Hoán</u>

- với mọi x, y ∈ B

$$x \lor y = y \lor x$$

$$x \land y = y \land x$$

Chương 3.Hàm Boole

❖ **3.3** TÍNH Phân Bố

- với mọi x, y ∈ B

  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

❖ **3.4** Phân Tử Trung Hòa

- trong B có hai phần tử trung hoà 0, 1

  đối với phép toán ∧,∨ sao cho với mọi x ∈ B, ta có:

  $$x \vee 0 = 0 \vee x = x$$

  $$x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$$

Chương 3.Hàm Boole

❖ **3.5** Phần Tử Bù

- với mọi x ∈ B, tồn tại x ∈ B sao cho:

  x ∨ x = 1

  x ∧ x = 0

❖ **3.6** Định lý

- Cho f, g là các hàm Bool theo n biến x1, x2, . . . , xn. Khi đó:

  a) kar(fg) = kar(f) ∪ kar(g)

  b) kar(f ∨ g) = kar(f) ∩ kar(g)

  c) kar(f) gồm đứng một ô khi và chỉ khi f là một từ tối tiểu.