

Bài toán Hai vật dao động điều hòa cùng tần số khác biên độ

1. Phương pháp

a) Dạng bài toán liên quan đến số lần hai vật gặp nhau.

Phương pháp:

Cách nhớ nhanh số lần hai vật gặp nhau của 2 vật dao động điều hòa có cùng tần số góc nhưng không cùng biên độ.

Hai vật phải cùng vị trí cân bằng O, biểu diễn bằng hai đường tròn đồng tâm (hình vẽ). Khi gặp nhau thì hình chiếu của hai vectơ quay biểu diễn chúng trên trục hoành trùng nhau. Tức là MN luôn vuông góc với trục Ox tại thời điểm gặp nhau.

Giả sử lần gặp nhau ban đầu hai chất điểm ở vị trí có tọa độ x vào thời điểm t_1 .

Vì hai dao động cùng tần số nên tại mọi thời điểm góc MON luôn không đổi và

bằng: (trong đó φ_1, φ_2 lần lượt là pha ban đầu dao động của vật M và vật N) và tam giác MON luôn cùng quanh O với tốc độ góc ω . Do đó từ vòng tròn lượng giác, ta nhận thấy rằng cứ sau khoảng thời gian $T/2$ thì $\triangle MON$ lại có cạnh MN vuông góc với OX, tức là hai vật lại gặp nhau.

+ Vậy khoảng thời gian liên tiếp để chúng gặp nhau là $T/2$.

* Đầu tiên ta tìm khoảng thời gian nhỏ nhất từ lúc $t = 0$ đến khi hai vật gặp nhau bằng hình học:

Sử dụng định lý Hàm số cosin trong tam giác MON ta tính được cạnh MN

Sử dụng định lý hàm số sin (hoặc dùng định lý hàm số cosin) ta tìm được góc α

Như vậy ta tìm được pha dao động của N tại thời điểm gặp nhau:

(vì sau một nửa vòng ta lại có thời điểm gặp nhau, lấy dấu (+) nếu vật 2 nhanh pha hơn vật 1, lấy dấu (-) cho trường hợp vật 2 chậm pha hơn vật 1)

Ta có: , ta tìm được nghiệm t dương nhỏ nhất là t_m .

Vậy số lần gặp nhau sau thời gian t được xác định như sau:

Phân tích: $t = t_m + n.T/2 + \Delta t_m$ ($0 < \Delta t_m < T/2$).

Vậy số lần gặp nhau là: $n + 1$ lần.

b. Các trường hợp gặp nhau của hai vật dao động cùng tần số, khác biên độ.

Phương pháp:

Có hai vật dao động điều hòa trên hai đường thẳng song song, sát nhau, với cùng một chu kì. Vị trí cân bằng của chúng sát nhau.

Biên độ dao động tương ứng của chúng là A_1 và A_2 (giả sử $A_1 > A_2$). Tại thời điểm $t = 0$, chất điểm thứ nhất có li độ x_1 chuyển động theo chiều dương, chất điểm thứ hai có li độ x_2 chuyển động theo chiều dương.

1. Hỏi sau bao lâu thì hai chất điểm gặp nhau? Chúng gặp nhau tại li độ nào?

2. Với điều kiện nào thì khi gặp nhau, hai vật chuyển động cùng chiều? Ngược chiều? Tại biên?

Có thể xảy ra các khả năng sau (với , c là độ dài của cạnh MN):

c. Các trường hợp đặc biệt:

Hai vật dao động cùng tần số, vuông pha nhau (độ lệch pha $\frac{\pi}{2}$)

- Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc giữa chúng có dạng elip.

- Kết hợp với: $\omega_1 = \omega_2$, suy ra:

Đặc biệt: Khi $A = A_1 = A_2$ (hai vật có cùng biên độ hoặc một vật ở hai thời điểm khác

nhau), ta có: $A = 2A_1$ (lấy dấu + khi k lẻ và dấu – khi k chẵn).

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Hai vật dao động điều hòa dọc theo các trục song song với nhau. Phương

trình dao động của các vật lần lượt là $x_1 = 4\cos(2\pi t)$ và $x_2 = 4\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$ (x tính bằng cm; t tính bằng s).

Trong khoảng thời gian 1 s đầu tiên thì hai vật gặp nhau mấy lần?

Hướng dẫn:

Ta thấy hai vật gặp nhau tại thời điểm ban đầu $t_1 = 0$:

Chu kì: $T = 1$ s. Trong 1s có

Vậy trong khoảng thời gian 1s đầu tiên thì hai vật gặp nhau $5 + 1 = 6$ lần.

Ví dụ 2: Hai vật dao động điều hòa dọc theo các trục song song với nhau. Phương

trình dao động của các vật lần lượt là $x_1 = 4\cos(2\pi t)$ và $x_2 = 4\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$ (x tính bằng cm; t tính bằng s).

Xác định thời điểm gặp nhau của hai vật.

Hướng dẫn:

Cách 1: Tại thời điểm $t = 0$, hai vật không gặp nhau. Ta không thể giải bằng các phương pháp giải như trên được.

Sử dụng định lý Hàm số cosin trong tam giác MON ta tính được cạnh MN

Sử dụng định lý hàm số sin (hoặc dùng định lý hàm số cosin) ta tìm được góc α

Như vậy ta tìm được pha dao động của N tại thời điểm gặp nhau:

$$\phi_2(t) = -(\pi/2 - \pi/3) + k\pi = -\pi/6 + k\pi \text{ (vì vật 2 chậm pha hơn vật 1)}$$

Ta có: $\omega t + \phi_2 = -\pi/6 + k\pi \leftrightarrow t = \frac{k\pi - \pi/6}{\omega}$ (s) với $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Cách 2: Giải bằng PTLG

Khi 2 vật gặp nhau thì:

Ví dụ 3: Hai chất điểm M, N dao động điều hòa dọc theo hai đường thẳng song song kề nhau và song song với trục tọa độ Ox. Vị trí cân bằng của M và của N đều ở trên một đường thẳng qua gốc tọa độ và vuông góc với Ox. Phương trình dao động của chúng lần lượt là $x_1 = 10\cos 2\pi t$ cm và $x_2 = 10\sqrt{3}\cos(2\pi t + \pi/2)$ cm. Hai chất điểm gặp nhau khi chúng đi qua nhau trên đường thẳng vuông góc với trục Ox. Thời điểm lần thứ 2017 hai chất điểm gặp nhau là:

A. 16 phút 46,42s B. 16 phút 46,92s

C. 16 phút 48,25s D. 16 phút 45,92s

Hướng dẫn:

Ta có $x_2 = 10\sqrt{3}\cos(2\pi t + \pi/2)$ cm $= -10\sqrt{3}\sin 2\pi t$.

Hai chất điểm gặp nhau: $x_1 = x_2$ $10\cos 2\pi t = -10\sqrt{3}\sin 2\pi t$

$$\Leftrightarrow \tan 2\pi t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 2\pi t = -\pi/6 + k\pi$$

Thời điểm lần đầu tiên hai chất điểm gặp nhau ứng với $k = 0$: $t_1 = 5/12s$.

Lần thứ 2017 chúng gặp nhau ứng với $k = 2016$.

Suy ra $t_{2017} = 1008 + 5/12 = 16\text{phút } 48,25s$.

Chọn đáp án C

Như vậy trong một số trường hợp đặc biệt ta có thể giải nhanh bằng phương trình lượng giác.