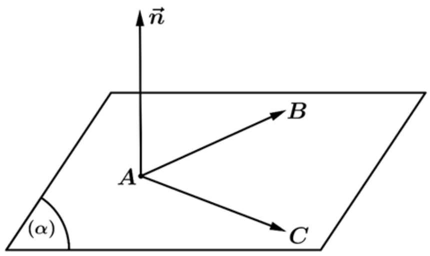
# CHỦ ĐỀ 9
# PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

mapstudy.edu.vn

## A. HỆ THỐNG KIẾN THỨC

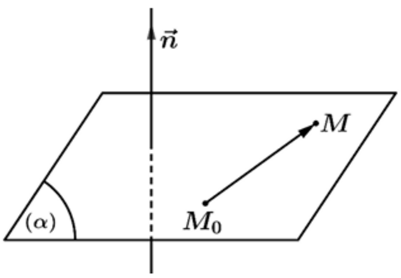
### 1. Phương trình mặt phẳng

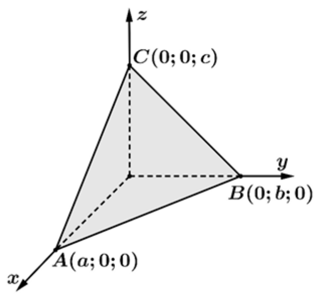
Phương trình tổng quát của mặt phẳng: $Ax+By+Cz+D=0$ ($A,B,C$ không đồng thời bằng 0)




Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$ là:

$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.




Phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn: Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua ba điểm $A\left(a;0;0\right),B\left(0;b;0\right),C\left(0;0;c\right)$ là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Cho hai mặt phẳng $\left(\alpha_1\right),\left(\alpha_2\right)$ có VTPT là $\vec{n}_1\left(A_1;B_1;C_1\right)$, $\vec{n}_2\left(A_2;B_2;C_2\right)$. Khi đó

- Hai mặt phẳng song song: $\left(\alpha_1\right)//\left(\alpha_2\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2\end{cases}\left(k\in\mathbb{R}\right)$
- Hai mặt phẳng vuông góc: $\left(\alpha_1\right)\perp\left(\alpha_2\right) \Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Khoảng cách: Khoảng cách từ điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ là:

$$\mathrm{d}\left(M_0,(\alpha)\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

## 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ thì ta có:

Phương trình tham số: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ (t là tham số, $t\in\mathbb{R}$)

Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ với $a,b,c$ là các số khác 0.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A_1(x_1;y_1;z_1)$ và $A_2(x_2;y_2;z_2)$:

- Phương trình tham số: $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \\ z=z_1+(z_2-z_1)t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$
- Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ $(x_1\neq x_2, y_1\neq y_2, z_1\neq z_2)$

Cho hai đường thẳng $\Delta_1,\Delta_2$ tương ứng có các vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ và đi qua lần lượt $A_1,A_2$. Khi đó:

- $\Delta_1\perp\Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.
- $\Delta_1//\Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1\notin\Delta_2$.
- $\Delta_1\equiv\Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $A_1\in\Delta_2$.
- $\Delta_1$ và $\Delta_2$ cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2}\perp[\vec{u}_1,\vec{u}_2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2}\cdot[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=0. \end{cases}$
- $\Delta_1$ và $\Delta_2$ chéo nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2}\cdot[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq 0$.

Khoảng cách từ $M_1$ đến đường thẳng $\Delta$ đi qua $M_0$ và có VTCP $\vec{u}$ là:

$$d(M_1,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $\Delta$ và $\Delta'$, trong đó đường thẳng $\Delta$ đi qua $M_0$ và có VTCP $\vec{u}$, đường thẳng $\Delta'$ đi qua $M_0'$ và có VTCP $\overrightarrow{u'}$ là:

$$d(\Delta,\Delta')=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_0'}\cdot\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\right|}.$$

Góc giữa hai đường thẳng: Cho hai đường thẳng $\Delta_1,\Delta_2$ có VTCP tương ứng là $u_1(a_1;b_1;c_1)$, $u_2(a_2;b_2;c_2)$ thì

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)\right|=\frac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: Cho đường thẳng $\Delta$ có VTCP là $\vec{u}(a;b;c)$ và mặt phẳng $(P)$ có VTPT là $\vec{n}(A;B;C)$ thì

$$\sin(\Delta,(P)) = |\cos(\vec{u}\cdot\vec{n})| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Góc giữa hai mặt phẳng: Cho hai mặt phẳng $(P_1)$, $(P_2)$ có VTPT tương ứng là $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ thì

$$\cos((P_1),(P_2)) = |\cos(\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

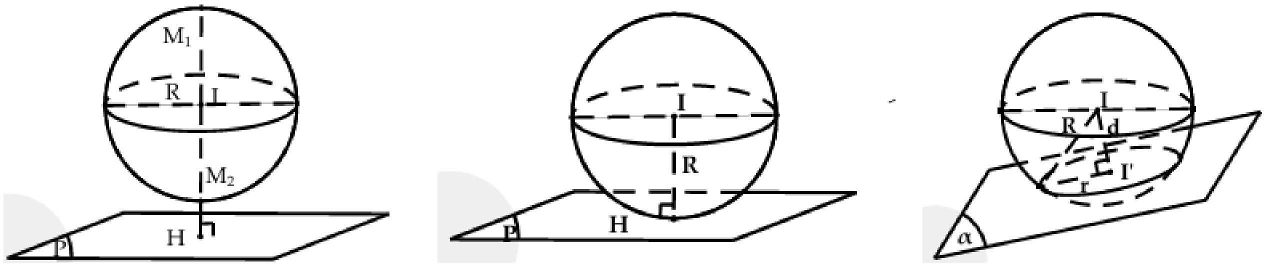
## 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương trình mặt cầu $(S)$ tâm $I(a;b;c)$ bán kính $R$:

$$(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=R^2.$$

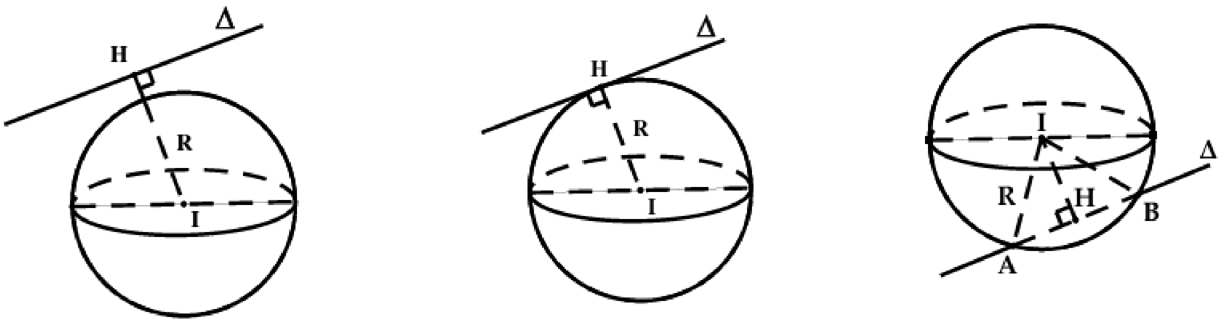
**Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:** Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng $(P)$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $(P)$.

- $IH>R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.
- $IH=R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. $(P)$ là mặt phẳng tiếp diện và H là tiếp điểm.
- $IH<R$: Mặt phẳng cắt mặt cầu. Thiết diện là đường tròn tâm $I'$ và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$.




**Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng**: Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng $\Delta$. Gọi $H$ là hình chiếu của $I$ lên $\Delta$. Khi đó :

- $IH>R$: $\Delta$ không cắt mặt cầu.
- $IH=R$: $\Delta$ tiếp xúc với mặt cầu. $\Delta$ là tiếp tuyến của $(S)$ và $H$ là tiếp điểm.
- $IH<R$: $\Delta$ cắt mặt cầu tại tại  hai điểm phân biệt.



## B. BÀI TẬP LIVESTREAM

**Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y-z+3=0$. Véctơ nào sau đây là véc tơ pháp tuyến của $(\alpha)$ ?

**A.** $\overrightarrow{n_1}=(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-4;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-2;4;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(2;4;1)$.

**Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng $(Oyz)$ là:

**A.** $z=0$. **B.** $x=0$. **C.** $x+y+z=0$. **D.** $y=0$.

**Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ ) và $B(1;2;3)$. Phương trình của mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$ và vuông góc với đường thẳng $AB$ là

**A.** $x+y+2z-3=0$ **B.** $x+y+2z-6=0$ **C.** $x+3y+4z-7=0$ **D.** $x+3y+4z-26=0$

**Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0), B(0;1;0)$ và $C(0;0;-2)$. Mặt phẳng $(ABC)$ có phương trình là:

**A.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$. **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$. **D.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$.

**Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+4=0$. Tính khoảng cách $d$ từ điểm $M(1;2;1)$ đến mặt phẳng $(P)$.

**A.** $d=3$. **B.** $d=4$. **C.** $d=1$. **D.** $d=\frac{1}{3}$.

**Câu 6:** Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua $A$ đồng thời song song với $(P)$ và mặt phẳng $(Oxy)$ có phương trình là

**A.** $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=-1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

**Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;1)$ và $N(3;1;-2)$. Đường thẳng $MN$ có phương trình là

**A.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-3}$. **C.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{-3}$.

**Câu 8:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x+3y-z+1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{4}=\frac{y-6}{3}=\frac{z+4}{1}$, sin của góc giữa đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ bằng

**A.** $\frac{5}{13}$. **B.** $\frac{8}{13}$. **C.** $\frac{1}{13}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

**Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+4z+1=0$. Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là

**A.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+2}{1}$. **C.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+2}{4}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{4}$.

**Câu 10:** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}$ và $d_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1}$

**A.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $3$.

**Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của $d$ lên $(P)$ là đường thẳng có phương trình:

**A.** $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-4}$. **B.** $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$. **C.** $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-4}$. **D.** $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

**Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0$. Tính bán kính $R$ của $(S)$.

**A.** $1$. **B.** $9$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7), B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính $AB$ có phương trình là

**A.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\sqrt{45}$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=45$.

**C.** $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\sqrt{45}$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

**Câu 14:** Gọi $(S)$ là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$. Bán kính $R$ của $(S)$ là

**A.** $R=2\sqrt{2}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=6$. **D.** $R=\sqrt{6}$.

**Câu 15:** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

**A.** $m<6$ **B.** $m\geq 6$ **C.** $m\leq 6$ **D.** $m>6$

**Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng $(Q)$ chứa trục $Ox$ và cắt $(S)$ theo một đường tròn bán kính bằng $3$.

**A.** $(Q):y+3z=0$. **B.** $(Q):x+y-2z=0$. **C.** $(Q):y-z=0$. **D.** $(Q):y-2z=0$.

**Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ ( $m$ là tham số) và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=4+2t\\y=3+t\\z=3+2t\end{cases}$. Biết đường thẳng $\Delta$ cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt $A,B$ sao cho $AB=8$. Giá trị của $m$ là

**A.** $m=5$. **B.** $m=12$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=-10$.