Chương 4. Phương trình vi phân cấp một

Ngày 10/5/2021

Biên soạn: Phan Quang Sáng

Khoa Khoa học cơ bản, Đại học Phenikaa

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Erwin Kreyszig (10th Edition, 2011), Advanced Engineering Mathematics, NXB Wiley.

[2] Neyhauser, C. (2010). Calculus for Biology and Medicine (3rd Edition), Pearson.

[3] Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals (8rd Edition), Brooks Cole.

CHƯƠNG 4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Một đại lượng biến thiên (liên tục) được biểu diễn như là một hàm số, trong khi tốc độ thay đổi của đại lượng đó được biểu thị qua các đạo hàm của hàm số đó; chúng có mối liên hệ với nhau, và phương trình vi phân xác định mối định mối liên hệ đó. Các mối liên hệ như vậy xuất hiện rất phổ biến, do vậy phương trình vi phân nảy sinh và đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau như kỹ thuật, vật lý, sinh học, kinh tế…

Phương trình vi phân được nghiên cứu sâu rộng theo cả hướng lý thuyết và ứng dụng. Theo hướng lý thuyết là các nghiên cứu về nghiệm và các tính chất định tính của nghiệm, hoặc cũng có thể là *bài toán ngược (inverse problems)* về các tham số và các yếu tố khác trong phương trình vi phân. Trong nhiều trường hợp khi gặp khó khăn hoặc không quan trọng để đưa ra nghiệm chính xác thì người ta sử dụng các phương pháp giải số để xây dựng nghiệm số phương trình vi phân.

4. 1 MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1.1 Phương trình chuyển động

Một phương trình nổi tiếng mà chúng ta phần lớn đều đã biết đó là phương trình định luật 2 của Newton về chuyển động. Phương trình này chính là một dạng phương trình vi phân.

Nếu một vật thể có khối lượng m đang chuyển động có gia tốc a dưới tác động của một lực F thì theo định luật 2 Newton

$$F = ma$$

Tại thời điểm t vật thể có vị trí, giả sử là một hàm theo thời gian $u = u(t)$, thì vận tốc và gia tốc tức thời của nó lúc đó lần lượt là

$$v = v(t) = u'(t), a = v'(\mathrm{t}) = u''(t) \qquad (4.1)$$

Chúng ta cũng chú ý rằng lực F cũng có thể là một hàm của thời gian, vận tốc, và/ hoặc của vị trí. Vì thế ta có thể viết phương trình định luật 2 Newton dưới các dạng sau

$$mv'(\mathrm{t}) = F\left(t, v\right) \qquad (4.2)$$

hoặc

$$mu''(\mathrm{t}) = F\left(t, u, u'(t)\right). \qquad (4.3)$$

Đó chính là các phương trình vi phân đầu tiên chúng ta gặp.

Như vậy Định luật 2 Newton về chuyển động *dưới dạng một phương trình vi phân* cho phép xác định ví trí của một vật dựa vào vận tốc, gia tốc, và lực tác động lên vật đó được biểu diễn dưới dạng hàm vi phân theo thời gian.

4.1.2 Mô hình tăng trưởng quần thể Malthus

Mô hình này được theo tên của Thomas Robert Malthus một giáo sỹ và học giả người Anh, một người có ảnh hưởng lớn trong lĩnh vực kinh tế chính trị và nhân khẩu học.

Mô hình tăng trưởng Malthus, hay còn gọi là mô hình tăng trưởng mũ đơn giản, dựa trên giả định tỷ lệ tăng trưởng là một hằng số. Mô hình này được Masthus đề xuất trong tác phẩm "*An Essay on the Principle of Population"(Tiểu luận về những nguyên tắc của quần thể)*, viết năm 1798. Đây là một trong những mô hình quần thể sớm nhất và rất nổi tiếng, dù đơn giản nhưng là cơ sở cho hầu hết các mô hình quần thể sau này.

Theo quan sát của Malthus, khi bỏ qua những hạn chế về môi trường hoặc các cản trở về mặt xã hội, thì dân số loài người sẽ tăng lên gấp đôi sau mỗi 25 năm, không phụ thuộc vào quy mô dân số ban đầu. Nói một rằng cách khác, ông thừa nhận rằng trong điều kiện lý tưởng, dân số tăng theo một tỷ lệ cố định trong một chu kỳ thời gian nhất định, tỷ lệ này không bị ảnh hưởng bởi kích thước của dân số.

Theo cách hiểu đó, chúng ta lấy ví dụ: giả sử nếu một quần thể của một loài sinh vật tăng số lượng từ 1000 lên 1100 cá thể trong một chu kỳ thời gian, ví dụ 10 năm, thì quần thể của loài đó với số lượng cá thể ban đầu là 1 triệu sẽ tăng lên thành 1.1 triệu cũng trong 10 năm. Ta cũng chú ý trong ví dụ này tỷ lệ tăng trưởng là một hằng số,

$$r = \frac{1100-1000}{1000} = \frac{1.1-1}{1} = 0.1,$$

không phụ thuộc vào kích thước ban đầu của quần thể.

Tổng quát, giả sử kích thước (hay số lượng cá thể) của quần thể theo thời gian t ($t \geq 0$) là $N(t)$, và ở thời điểm ban đầu là $N(0) = N_0$.

Nói chung chúng ta luôn giả sử $N_0 > 0$ và yêu cầu $N(t) \geq 0$ với hầu hết t.

Tốc độ tăng trưởng trung bình của quần thể trong khoảng thời gian t, $t+\Delta t$ là

$\dfrac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$, và tỷ lệ tăng trưởng sẽ là $\dfrac{1}{N(t)}\dfrac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$.

Theo giả định của Malthus, tỷ lệ tăng trưởng đó là không đổi, nên chúng ta phải có

$$\frac{1}{N(t)}\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = r,$$

với r là một hằng số.

Khi $\Delta t \to 0$, ta được

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{N(t)} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = r \text{, hay}$$

$$\frac{1}{N(t)} \frac{dN}{dt} = r. \qquad (4.4)$$

Ta cũng có thể viết

$$\frac{dN}{dt} = rN(t), t \geq 0. \qquad (4.5)$$

Phương trình (4.5) có nghĩa là *tốc độ tăng trưởng của quần thể tỷ lệ thuận với quy mô của quần thể*, với hằng số tỷ lệ là r. Nó có dạng một phương trình vi phân cấp một vì chứa một hàm chưa biết $N(t)$ và đạo hàm của hàm đó đến cấp một $N'(t)$.

Với mô hình đưa ra bởi phương trình (4.5), chúng ta có thể có một vài nhận xét đơn giản về quần thể. Nếu $r > 0$ thì do $N(t) \geq 0$ với hầu hết t, phương trình (4.5) suy ra $\frac{dN}{dt} \geq 0$ và do đó kích thước của quần thể $N(t)$ luôn tăng. Lại tiếp tục do (4.5), khi $N(t)$ tăng thì $\frac{dN}{dt}$ cũng tăng. Điều đó có nghĩa là tốc độ tăng trưởng của quần thể tăng khi kích thước của quần thể tăng. Ngược lại nếu $r < 0$ thì kích thước của quần thể và tốc độ tăng trưởng của quần thể sẽ giảm.

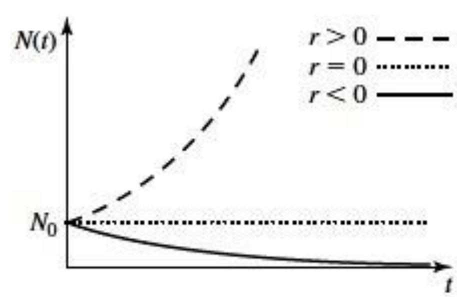
Chúng ta có thể tìm được nghiệm (duy nhất) của phương trình (4.5) với điều kiện $N(0) = N_0$ là

$$N(\text{t}) = N_0 e^{rt}. \qquad (4.6)$$

Lời giải cho bài toán (4.5) sẽ được đưa ra chi tiết trong mục 4.4.1. Hiện tại chúng ta dễ dàng kiểm tra được (4.6) là nghiệm của (4.5).

Như vậy theo mô hình Malthus, kích thước của quần thể tăng trưởng tuân theo dạng hàm mũ.

Chú ý: phương trình (4.5) với $r < 0$ cũng là mô hình cho quá trình phân rã của một chất phóng xạ.



Hình 4.1

4. 2 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.2.1 Định nghĩa phương trình vi phân

Một cách khái quát, phương trình vi phân là một phương trình toán học biểu diễn mối quan hệ giữa một hàm số (chưa biết) và các đạo hàm (với cấp khác nhau) của nó. Một phương trình như vậy có chứa biến số độc lập, một hàm số phải tìm và các đạo hàm (hoặc vi phân) của hàm số đó.

Một cách cụ thể, phương trình vi phân là một phương trình có dạng toán học

$$F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}', \mathrm{y}'', \ldots, \mathrm{y}^{(\mathrm{n})}) = 0, \qquad (4.7)$$

trong đó F là một hàm số, x là biến số độc lập thuộc một miền I nào đó của $\mathbb{R}$, $y = y(x)$ là hàm số chưa biết, và $y', y'', \ldots, y^{(\mathrm{n})}$ là các đạo hàm các cấp của y.

Người ta gọi cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình. Về mặt hình thức ta thấy phương trình vi phân trên có cấp n.

Ví dụ 1: $y' = f(x)$ là một phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 2: $xy' + \dfrac{y^3}{\ln x} = \ln^2 x$ là một phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 3: $y'' + x^2(y')^3 - 2y^4 = \sin x$ là một phương trình vi phân cấp 2.

Phương trình vi phân cấp một

Chúng ta nhắc lại rằng phương trình vi phân cấp một là phương trình dạng

$$F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}') = 0 \text{ hoặc } F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \frac{dy}{dx}) = 0, \qquad (4.8)$$

do đạo hàm $\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \dfrac{dy}{dx}$.

Một dạng đặc biệt của (4.8) là phương trình vi phân (cấp một) đã giải ra đạo hàm

$$y' = f(x, y) \quad \text{hoặc} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

hoặc

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0. \qquad (4.9)$$

∗ Trong chương trình chúng ta chủ yếu xét các phương trình vi phân cấp một đã giải ra đạo hàm.

∗ Trong phương trình (4.9) ta cũng có thể coi x là hàm của biến số y.

4.2.2 Nghiệm của phương trình vi phân cấp một

Nghiệm của phương trình vi phân là một hàm số $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình đó. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ: xét phương trình vi phân cấp 1

$$y' = 3x^2 + \sin x.$$

Rõ ràng hàm số y cần tìm phải là một nguyên hàm của $3x^2 + \sin x$, do đó mọi nghiệm của phương trình có dạng

$$y = x^3 - \cos x + C,$$

với C là một hằng số thực tùy ý. Chẳng hạn $C = 1$ ta được một nghiệm $y = x^3 - \cos x + 1$.

Qua ví dụ trên ta thấy, nói chung, phương trình vi phân cấp 1 có nghiệm với một hằng số tùy ý…Chúng được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân. Từ đó ta có định nghĩa:

Định nghĩa: một hàm số dạng tổng quát

$$y = \varphi(x, C) \tag{4.10}$$

là nghiệm của phương trình vi phân (4.8) với các hằng số thực tùy ý C được gọi là *nghiệm tổng quát*.

Nghiệm riêng của phương trình vi phân là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát **(4.10)** khi C là một giá trị số cụ thể.

Khi giải phương trình vi phân (4.8) nhiều khi dẫn đến phương trình dạng ("không còn đạo hàm")

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{4.11}$$

trong đó C là một hằng số tùy ý. Khi đó **(4.11)** được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân. Khi $C = C_0$ là một số cụ thể thì **(4.11)** được gọi là một *tích phân riêng* của phương trình vi phân.

Về mặt hình học mỗi nghiệm hoặc tích phân riêng của phương trình vi phân biểu diễn một đường cong trên mặt phẳng tọa độ Oxy, và được gọi là một *đường cong tích phân*. Như vậy nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát tương ứng với một họ các đường cong tích phân. Giải phương trình vi phân cũng chính là đi tìm các đường cong tích phân.

4.2.3 Điều kiện ban đầu

Giá trị của một đại lượng tại một thời điểm nào đó, được chỉ định là thời gian ban đầu (thường biểu thị $t = 0$), gọi là giá trị ban đầu. Một cách tổng quát điều kiện ban đầu cho biết trạng thái ban đầu (độ lớn, tốc độ biến thiên..) của một đại lượng tại một thời điểm chỉ định. Trạng thái ban đầu hoàn toàn có thể quy định đến trạng thái của đại lượng đó ở các thời điểm trước hoặc sau thời điểm chỉ định.

Một cách toán học, điều kiện ban đầu là một họ các điều kiện đối với nghiệm của phương trình vi phân (4.8) dạng

$$y(x_0) = y_0, \tag{4.12}$$

trong đó x_0, y_0 là các giá trị cho trước. Bài toán giải phương trình vi phân cùng với điều kiện ban đầu được gọi là **bài toán Cauchy**, hay bài toán giá trị ban đầu.

Nhận xét:

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không chịu bất kỳ một điều kiện ban đầu nào.
- Khi cho nghiệm tổng quát (4.10) thỏa mãn điều kiện ban đầu **(4.12)** ta sẽ tìm được giá trị cụ thể của hằng số C, lúc này nghiệm tương ứng sẽ là nghiệm riêng.

Định lý (Peano-Cauchy-Picard): *Xét bài toán Cauchy* (4.8) *với điều kiện ban đầu* $y(x_0) = y_0$. *Nếu hàm hai biến* $f(x, y)$ *liên tục trong một lân cận của điểm* (x_0, y_0) *thì của bài toán Cauchy có ít nhất một nghiệm* $y = y(x)$ *với* x *trong một lân cận của* x_0. *Hơn nữa nếu* f *có đạo hàm riêng* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *liên tục trong một lân cận của* (x_0, y_0) *thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất.*

Trường hợp duy nhất nghiệm cũng có nghĩa là qua điểm (x_0, y_0) cho trước có duy nhất một đường cong tích phân của phương trình (4.8) mà hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong tại điểm đó là $f(x_0, y_0)$.

Người ta cũng gọi một nghiệm (hay một đường cong tích phân) của phương trình vi phân là nghiệm kỳ dị nếu tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị vi phạm tại mọi điểm của nó. Một cách hình học, điều đó có nghĩa là có nhiều hơn một đường cong tích phân với cùng một đường tiếp tuyến tại mỗi điểm (x_0, y_0). Như vậy một nghiệm riêng hoặc một tích phân riêng sẽ không phải nghiệm kỳ dị.

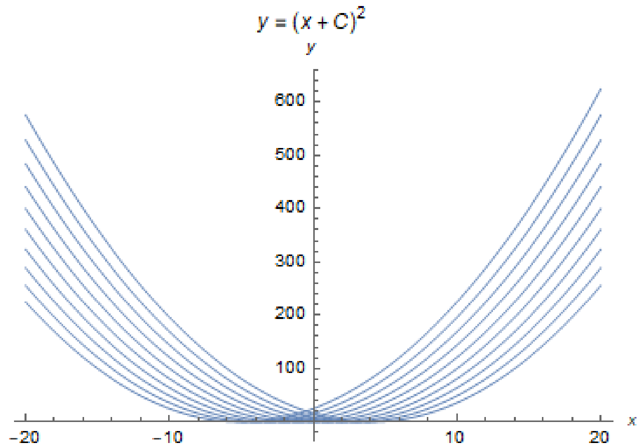
Ngoài ra phương trình (4.8) còn có thể có nghiệm hỗn hợp gồm một phần nghiệm riêng và một phần nghiệm kỳ dị.

Ví dụ: Xét phương trình vi phân $(y')^2 - 4y = 0.$

Chúng ta dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát dạng

$$y = (x + C)^2, \text{ với } C \text{ là một hằng số tùy ý.}$$

Về mặt hình học nghiệm tổng quát biểu thị một họ các đường parabol như hình vẽ dưới đây.



Bên cạnh đó phương trình còn có nghiệm $y = 0$. Tuy nhiên hàm số này không thuộc họ nghiệm tổng quát. Tại mỗi điểm nằm trên đường thẳng $y = 0$ (trục Ox) có nhiều hơn một đường cong nghiệm đi qua, và như vậy tính duy nhất nghiệm bị vi phạm, do đó nghiệm $y = 0$ là một nghiệm kỳ dị của phương trình.

Trong giới hạn của chương trình chúng ta sẽ không đi sâu vào nghiệm kỳ dị và nghiệm hỗn hợp.

4. 3 MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

4.3.1 Phương trình vi phân với biến số phân ly

Phương trình vi phân với biến số phân ly là phương trình có dạng

$$N(y)\, y' = M(x) \tag{4.13}$$

hoặc dạng tương đương,

$$N(y)\, dy = M(x)\, dx \tag{4.14}$$

trong đó M, N là các hàm số một biến, được giả sử liên tục trong một miền nào đó.

Chú ý rằng trong một phương trình với biến số phân ly thì tất cá các số hạng chỉ chứa y phải nhân với y' và phần còn lại của phương trình chỉ chứa x.

Để giải phương trình với biến số phân ly **(4.14)** ta chỉ việc lấy tích phân hai vế phương trình:

$$\int N(y)\, dy = \int M(x)\, dx + C, \text{ với } C \text{ là hằng số thực bất kỳ.}$$

Sau khi tính các tích phân ở hai vế của phương trình trên chúng ta sẽ nhận tích phân tổng quát của phương trình vi phân.

Thật vậy, nếu đạo hàm hai vế của phương trình trên theo biến số x ta sẽ được (4.13).

Ví dụ 1: Phương trình $y' = f(x)$ với f là một hàm số giả sử liên tục trên một miền $I \subset \mathbb{R}$.

Đây chính là một phương trình dạng biến số phân ly (khuyết y). Rõ ràng y phải là một nguyên hàm của f, hoặc áp dụng phương pháp giải ở trên cho ta nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \int f(x)\,dx + C, \text{với mọi}\, C \in \mathbb{R}.$$

* Bài toán tương tự với phương trinh vi phân khuyết x dạng $y' = g(y)$.

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân $(x+1)y' = 2y^2x^2$.

Giải: Trước hết chúng ta thấy rằng phương trình trên chưa phải là dạng biên số phân ly (x và y còn ở cùng một chỗ). Tuy nhiên chúng ta có thể chuyển phương trình về dạng biến số phân ly nếu chia cả hai vế của phương trình cho y^2 và $x+1$ nếu nó khác không.

Ta có $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

Trước hết kiểm tra xem $y = 0$ có phải là nghiệm của phương trình hay không? Thay trực tiếp $y = 0$ vào phương trình ta được

$$(x+1).\,0' = 2.\,0^2x^2$$

hay $0 = 0.$

Như vậy rõ ràng hàm số $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Bây giờ ta đi tìm các nghiệm $y \neq 0.$ Chia hai vế phương trình ban đầu cho $y^2 \neq 0$ và $x+1$(với $x \neq -1$) ta được dạng biến số phân ly như sau

$$\frac{y'}{y^2} = 2\frac{x^2}{x+1},\, x \neq 1 \text{ hay,}$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2\frac{x^2}{x+1}dx,\, x \neq 1$$

Tích phân hai vế phương trình ta được

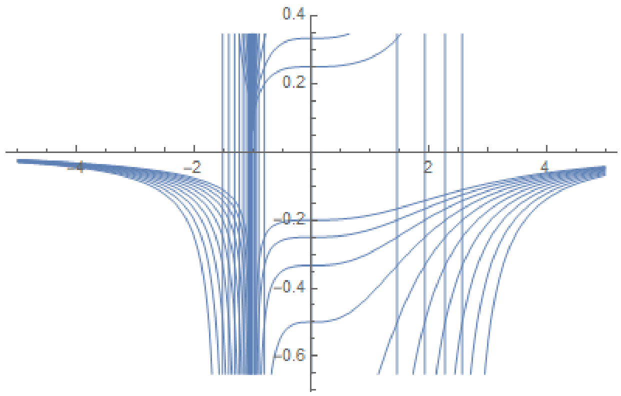
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2\frac{x^2}{x+1}dx + C,\, x \neq 1, \text{ với mọi}\, C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{y} = 2\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx + C,\, x \neq 1, \text{ với mọi}\, C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right) + C,\ x \neq 1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = -2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right) + C,\ x \neq 1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}\ .$$

$$\Leftrightarrow y\left(x^2 - 2x + 2\ln|x+1|\right) = C,\ x \neq 1, \text{ với mọi } C \in \mathbb{R}\ . \qquad (*)$$



Bên cạnh đó, chúng ta cũng thấy rằng nghiệm $y = 0$ cũng được suy ra từ biểu diễn (*) (khi lấy $C = 0$) nên (*) chính là tích tích phân tổng quát của phương trình vi phân.

Ví dụ 3: Giải phương trình vi phân $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$, $y(0) = -1$.

Giải: (ta sẽ giải nhanh ví dụ này)

Rõ ràng $y \neq 0$ do điều kiện ban đầu $y(0) = -1$. Chia hai vế của phương trình cho $y^3 \neq 0$ ta được

$$\frac{y'}{y^3} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ hay } \frac{dy}{y^3} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx\,.$$ *(là dạng biến số phân ly)*

Tích phân hai vế phương trình trên ta được

$$\frac{-1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C, \text{ với } C \in \mathbb{R}\,.$$

Kiểm tra điều kiện ban đầu để tìm C,

$$\frac{-1}{2} = \sqrt{1} + C, \text{ và do đó } C = -\frac{3}{2}.$$

Do đó y là nghiệm ẩn của phương trình $\dfrac{-1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} - \dfrac{3}{2}$, hay

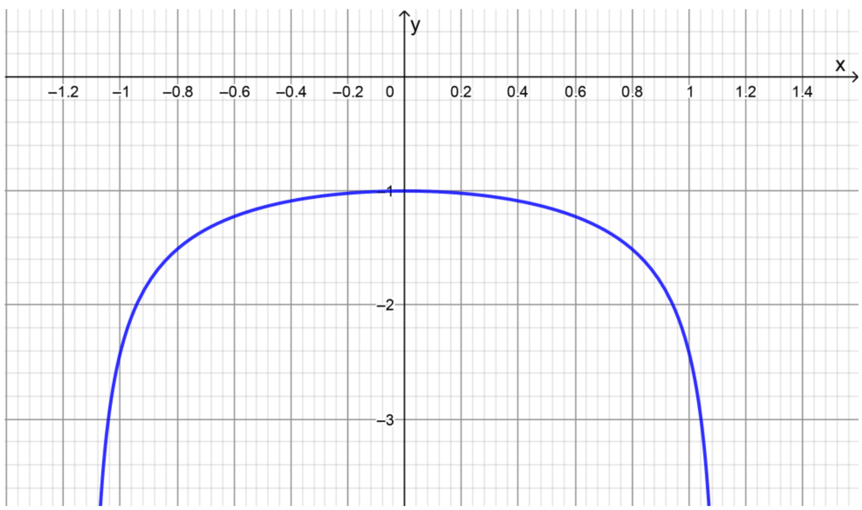
$$y^2 = \frac{1}{3-2\sqrt{1+x^2}}, \text{ hay}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3-2\sqrt{1+x^2}}}.$$

Kiểm tra lại một lần nữa điều kiện ban đầu ta thấy rằng nghiệm đúng ứng với dấu – trong công thức trên. Bên cạnh đó chúng ta cũng chú ý rằng tập xác định của nghiệm là

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy nghiệm của bài toán là $y = -\sqrt{\frac{1}{3-2\sqrt{1+x^2}}}$, $-\frac{\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}$. Đồ thị của nghiệm cho bởi hình 4.2.



Hình 4.2

Ví dụ 4: Giải phương trình vi phân

$$x(y^2-1)dx + y(\mathrm{x}^2-1)\,\mathrm{dy} = 0.$$

Giải:

(1) Giả sử $y^2 - 1 \neq 0$ và $x^2 - 1 \neq 0$, ta biến đổi phương trình về dạng biến số phân ly

$$\frac{x}{\mathrm{x}^2-1}dx + \frac{y}{y^2-1}\mathrm{dy} = 0.$$

Tích phân phương trình ta được

$$\int \frac{x}{\mathrm{x}^2-1}dx + \int \frac{y}{y^2-1}\mathrm{dy} = \ln|C_1|,\ C_1 \neq 0,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=\ln\left|C_1\right|, C_1\neq 0,$$
$$\ln\left|(x^2-1)(y^2-1)\right|=2\ln\left|C_1\right|, C_1\neq 0,$$
$$(x^2-1)(y^2-1)=C, C\in\mathbb{R}.$$

(2) Nếu $(y^2-1)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow y=\pm 1,$ hoặc $x=\pm 1$

Khi đó dễ dàng kiểm tra được $y=\pm 1$ và $x=\pm 1$ cũng là nghiệm của phương trình.

Như vậy chúng ta có thể kết luận tích phân tổng quát của phương trình cho bởi

$$(x^2-1)(y^2-1)=C, C\in\mathbb{R}.$$

Mô hình tăng trưởng có giới hạn

Đây là một mô hình đơn giản nhất diễn tả sự tăng trưởng có giới hạn, và có thể sử dụng để mô tả sự phát triển của cá. Ký hiệu $L=L(t)$ là chiều dài của một con cá ở độ tuổi t ($t\geq 0$) và giả sử $L(0)=L_0$. Chúng ta giả sử chiều dài của cá L tuân theo phương trình *von Bertalanffy*:

$$\frac{dL}{dt}=k(A-L), \qquad (4.15)$$

trong đó k và A là các hằng số dương. Chúng ta cũng giả sử rằng $0<L_0<A$. Theo phương trình (4.15) thì tốc độ tăng trưởng chiều dài của cá $\frac{dL}{dt}$ tỷ lệ thuận với $A-L$. Hơn nữa tốc độ tăng trưởng $\frac{dL}{dt}$ là dương, giảm theo thời gian t và giảm tuyến tính theo chiều dài khi mà $L<A$, và dừng phát triển ($\frac{dL}{dt}=0$) khi $L=A$.

Để giải phương trình (4.15) chúng ta phân ly biến số rồi lấy tích phân hai vế được,

$$\int\frac{dL}{A-L}=\int kdt,$$
$$-\ln\left|A-L\right|=kt+C_1, C_1\in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra

$$\left|A-L\right|=e^{-kt-C_1}, \text{ hay}$$
$$A-L=\pm e^{-C_1}e^{-kt}.$$

Đặt $C=\pm e^{C_1}$ ta được $\qquad L=A+Ce^{-kt}.$

Điều kiện ban đầu $L(0) = L_0$ suy ra $C = A - L_0$. Do đó nghiệm của (4.15) cho bởi

$$L(t) = A + (A - L_0)e^{-kt},$$

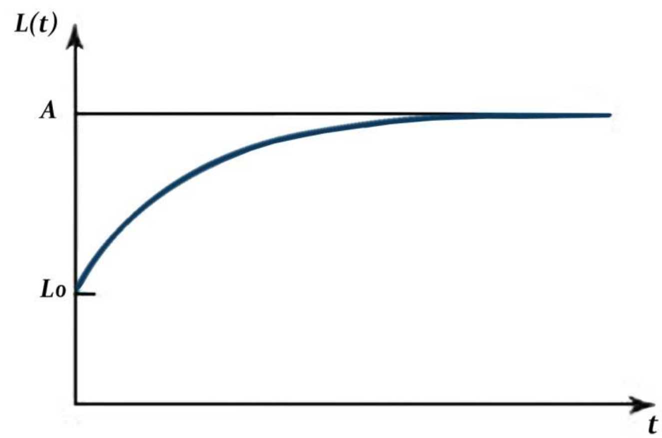
hay

$$L(t) = A\left[1 - \left(1 - \frac{L_0}{A}\right)e^{-kt}\right]. \qquad \text{(Hình 4.3)} \quad (4.16)$$

Từ (4.16) ta suy ra

$$\lim_{t\to\infty} L(t) = A.$$

Như vậy hằng số A trong mô hình chính là chiều dài tiệm cận của cá. Về mặt sinh học điều kiện ban đầu $0 < L_0 < A$ là hợp lý và cũng không khi nào cá đạt được chiều dài tiệm cận vì tuổi của cá chỉ là hữu hạn.



Hình 4.3

4.3.2 Phương trình vi phân đẳng cấp

Một số phương trình vi phân không phân ly được biến số nhưng có thể được chuyển về dạng biến số phân ly bằng cách đổi biến.

Định nghĩa: Hàm hai biến số $f = f(x, y)$ được gọi là hàm đẳng cấp bậc k (k là số tự nhiên hoặc thậm chí là số thực) nếu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y) \text{ với mọi } \lambda, \text{và với mọi } x, y. \qquad (4.17)$$

Ví dụ: Kiểm tra các hàm đẳng cấp

(a) Hàm $f(x, y) = x^3 - x^2 y + 2xy^2 + y^3$ là một hàm đẳng cấp bậc 3 vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - (\lambda x)^2(\lambda y) + 2(\lambda x)(\lambda y)^2 + (\lambda y)^3$$

$$= \lambda^3 x^3 - \lambda^3 x^2 y + \lambda^3 2xy^2 + \lambda^3 y^3 = \lambda^3 (x^3 - x^2 y + 2xy^2 + y^3) = \lambda^3 f(x,y).$$

(b) Hàm $f(x,y) = x^2(\ln x - \ln y) + 2xy\sin(\frac{y}{x})$ là một hàm đẳng cấp bậc 2 vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2(\ln \lambda x - \ln \lambda y) + 2(\lambda x)(\lambda y)\sin(\frac{\lambda y}{\lambda x})$$

$$= \lambda^2 x^2 \ln\frac{\lambda x}{\lambda y} + \lambda^2 xy\sin(\frac{y}{x}) = \lambda^2 x^2 \ln\frac{x}{y} + 2\lambda^2 xy\sin(\frac{y}{x}) = \lambda^2\left[x^2\ln\frac{x}{y} + 2xy\sin(\frac{y}{x})\right]$$

$$= \lambda^2\left[x^2\left(\ln x - \ln y\right) + 2xy\sin(\frac{y}{x})\right] = \lambda^2 f(x,y).$$

(c) Hàm $f(x,y) = x^2 y - 2y^2$ không phải là một hàm đẳng cấp vì

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2(\lambda y) - 2(\lambda y)^2 = \lambda^3 x^2 y - 2\lambda^2 y^2 = \lambda^2\left(\lambda x^2 y - 2y^2\right) \neq \lambda^n\left(x^2 y - 2y^2\right)$$

(ví dụ chọn $\lambda = -1,\ x = 1,\ y = 1$).

Ngoài ra chúng ta có thể nhận ra hàm f không phải là một hàm đẳng cấp vì số hạng thứ nhất $x^2 y$ có bậc 3 trong khi số hạng thứ hai $-2y^2$ có bậc 2.

Định nghĩa: Phương trình vi phân đẳng cấp là phương trình có dạng

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (4.18)$$

trong đó M và N là các hàm đẳng cấp có cùng bậc.

Một dạng đặc biệt của phương trình vi phân đẳng cấp (4.18) là

$$y' = f(x,y), \qquad \textit{(4.19)}$$

trong đó f là một hàm đẳng cấp bậc không.

Giải thích: nếu $N \neq 0$ phương trình (4.18) dẫn đến $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, hàm $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ là một hàm đẳng cấp bậc không.

Khi đó nếu chọn $\lambda = \frac{1}{x}$ thì ta có thể viết hàm f dưới dạng một hàm của $\frac{y}{x}$:

$$f(x,y) = \lambda^0 f(1,\frac{y}{x}) = f(1,\frac{y}{x}).$$

Mệnh đề: bằng phép đổi biến $y = xu(x)$ chúng ta có thể chuyển phương trình vi phân đẳng cấp (4.18) (hoặc (4.19)) về dạng biến số phân ly.

Chú ý rằng lúc đó $y' = u + xu'$ và $dy = udx + xdu$.

Chúng ta không chứng minh mệnh đề trên mà minh họa cách giải phương trình vi phân đẳng cấp thông qua các các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1: Giải phương trình vi phân

$$\left(x^2 + y^2\right)dx - \left(x^2 + xy\right)dy = 0. \quad (4.20)$$

Giải:

Phương trình (4.20) là một vi phân đẳng cấp vì $\left(x^2 + y^2\right)$ và $\left(x^2 + xy\right)$ là các hàm đẳng cấp cùng bậc 2.

Đặt $y = xu(x)$ rồi vào phương trình (4.20) ta

$$\left(x^2 + (ux)^2\right)dx - \left(x^2 + xux\right)\left(udx + xdu\right) = 0$$

$$\left(x^2 - x^2u\right)dx - \left(x^3 + x^3u\right)du = 0$$

$$x^2\left(1-u\right)dx = x^3\left(1+u\right)du$$

Chia hai vế của phương trình trên cho x^2 (với $x \neq 0$) ta được

$$\left(1-u\right)dx = x\left(1+u\right)du \quad (4.21)$$

Ta có $1 - u = 0 \Leftrightarrow u = 1$.

Trường hợp 1: rõ ràng $u = 1$ là của phương trình (4.21) nên $y = x$ là một nghiệm của phương trình (4.20).

Trường hợp 2: khi $u \neq 1$. Đưa (4.21) về dạng biến số phân ly rồi lấy tích phân hai vế ta được

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+u}{1-u}du$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+u}{1-u}du.$$

$$\ln|x| = -u - \ln|u-1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$ vào phương trình trên ta được:

$$\ln|x| = -\frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| + C, \text{ hay}$$

$$\ln e^{\frac{y}{x}}\left|y-x\right| = C,\ \ C \in \mathbb{R}\ , \ \text{ hay}$$

$$e^{\frac{y}{x}}(y-x) = M,\ \ M \in \mathbb{R}\,. \qquad (4.22)$$

Công thức (4.22) chính là tích phân tổng quát của phương trình (4.20).

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

Giải (ta sẽ giải nhanh phương trình này):

Chia hai về phương trình cho $x \neq 0$ ta được phương trình dạng đẳng cấp

$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$. *(vế phải là một hàm của* $\frac{y}{x}$ *và là một hàm đẳng cấp bậc 0)*

Đặt hàm $y = ux$ ta dẫn đến phương trình

$$xdu = u\left(\ln u - 1\right)dx.$$

(1) Nếu $u\left(\ln u - 1\right) = 0 \Leftrightarrow u = e$. Rõ ràng hàm hằng số $u = e$ là một nghiệm của phương trình trên nên $y = ex$, với $x \neq 0$, là một nghiệm của phương trình ban đầu.

(2) Với $u \neq e$, đưa phương trình về dạng biến số phân ly:

$$\frac{du}{u\left(\ln u - 1\right)} = \frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế phương trình ta được

$$\int\frac{du}{u\left(\ln u - 1\right)} = \int\frac{dx}{x} + \ln K,\ K > 0.$$

(Chú ý để tính tích phân vế trái ta có thể dung phép đổi biến $t = \ln u - 1$)

$$\ln\left|\ln u - 1\right| = \ln\left|Kx\right|,$$

$$\ln u - 1 = \pm Kx,\ \text{ hay}$$

$$\ln u - 1 = Cx,\ C \neq 0\ \ (\text{đặt } C = \pm K).$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ vào phương trình trên ta được $\ln\frac{y}{x} - 1 = Cx,\ C \neq 0$, hay

$$\frac{y}{x} = e^{Cx+1},\ C \neq 0.\ (4.23)$$

Ta để ý rằng nếu cho $C = 0$ trong (4.23) thì ta được nghiệm $y = ex$ trong trường hợp (1).

Do đó $\frac{y}{x} = e^{Cx+1}, C \in \mathbb{R}$ là tích phân tổng quát của phương trình.

Chú ý: Chúng ta xét một phương trình vi phân cấp một có dạng đặc biệt

$$(a_1x+b_1y+c_1)\,dx+(a_2x+b_2y+c_2)\,dy=0 \tag{4.24}$$

trong đó $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ là các hằng số.

(1) Nếu $D=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ thì ta có đưa phương trình (4.24) về dạng đẳng cấp bằng cách phép biến đổi tuyến tính với cả hai biến $\begin{cases} x=t+x_0 \\ y=u+y_0 \end{cases}$ (4.25),

trong đó (x_0, y_0) là nghiệm duy nhất của hệ phương trình $\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0 \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \end{cases}$ (4.26).

Thay (4.25) phương trình (4.24) (chú ý rằng $dx=dt$, $dy=du$ và (4.26)) ta thu được phương trình vi phân dạng đẳng cấp

$$(a_1t+b_1u)\,dt+(a_2t+b_2u)\,du=0$$

(2) Nếu $D=0$, khi đó bằng phép đổi biến $z=a_1x+b_1y$ thì ta có thể đưa phương trình (4.24) về dạng biến số phân ly.

4.3.3 Phương trình vi phân tuyến tính

Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình có dạng

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{4.27}$$

trong đó p và q là các hàm số một biến của x, giả sử liên tục trên một miền $I\subseteq\mathbb{R}$ nào đó.

- Nếu $q=0$ thì (4.27) trở thành phương trình được gọi là phương trình thuần nhất

$$y'+p(x)y=0 \tag{4.28}$$

- Nếu $q\neq 0$ thì (4.27) gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất. Phương trình (4.28) gọi là phương trình thuần nhất tương ứng với (4.27).

Nhận xét: phương trình (4.27) là phương trình bậc 1 đối với y và y'.

Cách giải phương trình (4.27):

Nhận xét: nếu $v\neq 0$ là một hàm số nào đó sao cho $v(x)\neq 0,\ x\in I$ thì ta luôn có thể viết y dưới dạng tích của v và một hàm số khác: $y=uv$. (thật vậy lấy $u(x)=\dfrac{y(x)}{v(x)},\ x\in I$)

Ta tìm nghiệm của phương trình (4.27) dạng

$$y=uv,$$

trong đó $u = u(x)$ là hàm số của x, và $v = v(x)$ là một hàm khác không mà ta sẽ chọn một cách phù hợp.

Thay $y = uv$ vào (4.27) ta được

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \text{hay}$$

$$u'v + u\left[v' + p(x)v\right] = q(x). \tag{4.29}$$

Chọn một hàm số $v \neq 0$ sao cho $v' + p(x)v = 0$. (4.30)

Phương trình (4.30) tương đương với dạng biến số phân ly

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -p(x)dx \Leftrightarrow \ln|v| = \int -p(x)dx,$$

và ta có thể chọn $v = e^{-\int p(x)dx}$. Lúc này phương trình (4.29) trở thành:

$$u'\text{v} = q(x),$$

$$u' = \frac{q(x)}{v(x)},$$

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C, \text{với } C \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Với u và v như trên, $y = uv = \left[\int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C\right]e^{-\int p(x)dx}$ là nghiệm tổng quát của (4.27).

Tóm tắt cách giải phương trình tuyến tính $y' + p(x)y = q(x)$
$y = uv$ $v' + p(x)v = 0$, $u'v = q(x)$

Chú ý*: có nhiều phương pháp khác nhau để giải phương trình vi phân tuyến tính như phương pháp Lagrange (phương pháp biến thiên hằng số), phương pháp thừa số tích phân... Phương pháp mà chúng ta vừa trình bày gọi là phương pháp Bernoulli.*

Ví dụ 1: Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x \tag{4.31}$$

Giải:

Với điều kiện $x \neq 0$, đặt $y = uv$, rồi thay vào phương trình ta được

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x^2 \cos x, \text{ hay}$$

$$u'v + u\left[v' - \frac{2}{x}v\right] = x^2 \cos x. \tag{4.32}$$

Chọn một hàm số $v \neq 0$ sao cho

$$v' - \frac{2}{x}v = 0, \text{ hay } \frac{v'}{v} = \frac{2}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x},$$

$$\ln|v| = 2\ln|x| + M,\ M \in \mathbb{R}.$$

Chọn $M = 0$ ta được $\ln|v| = 2\ln|x|$, hay $|v| = e^{2\ln|x|} = |x|^2$. Ta chọn $v = x^2,\ x \neq 0.$

Lúc đó phương trình (4.32) trở thành

$$u'x^2 = x^2 \cos x,\ x \neq 0.$$

$$u' = \cos x,$$

$$u = \int \cos x\, dx = \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = uv = x^2(\sin x + C),\ x \neq 0,\ C \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 2: Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$xy' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

Giải: chia hai vê phương trình cho $x \neq 0$ ta được phương trình dạng tuyến tính

$$y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}$$

Nghiệm dạng $y = uv, v \neq 0.$

Chọn $v \neq 0$ là nghiệm phương trình thuần nhất tương ứng của phương trình

$$v' + \frac{1}{x^2}v = 0,\ \left(p = \frac{1}{x^2}, q = 1\right)$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x^2},$$

$$\ln|v| = \frac{1}{x} + C_1.$$

Chọn $C_1 = 0$ và $v = e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0.$

Lúc đó u là nghiệm của phương trình

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)}\,dx + C = \int \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}}dx + C = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx + C = e^{-\frac{1}{x}} + C, C \in \mathbb{R}..$$

(đổi biến đặt $t = -\frac{1}{x}$ *)*

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = uv = e^{\frac{1}{x}}(e^{-\frac{1}{x}} + C) = 1 + Ce^{\frac{1}{x}}, x \neq 0, C \in \mathbb{R}.$$

Bài toán trộn

Một bể chứa 50 lít dung dịch gồm 90% nước và 10% cồn. Giả sử thêm vào bể chứa một dung dịch khác gồm 50% nước và 50% cồn qua một vòi chảy với tốc độ 4 lít/phút, đồng thời một vòi thứ hai chảy ra từ bể chứa với tốc độ 5 lít/phút. Giả sử hỗn hợp trong bể luôn được khuấy đều, hỏi sau 10 phút thì trong bể có bao nhiêu cồn.

Giải:

Gọi $y = y(t)$ là số lít cồn có trong bể sau t phút ($t \geq 0$). Do ban đầu trong bể có 10%. 50= 5 (lít) cồn nên $y(0) = 5$.

Chúng ta biết rằng tốc độ thay đổi của cồn trong bể chứa là $\frac{dy}{dt}$ (lít/phút). Mặt khác tốc độ này được xác định bằng lượng cồn chảy vào bể qua vòi thứ nhất trừ đi lượng cồn chảy ra qua vòi thứ hai trong một phút. Trong một phút thì lượng cồn chảy vào bể qua vòi thứ nhất là 50%.4=2 (lít).

Cứ sau mỗi phút thì lượng dung dịch trong bể chứa giảm 5-4=1 (lít) nên sau t (phút) thì lượng dung dịch trong bể chứa là $50 - t$ (lít) (chú ý rằng trong đó bao gồm y lít cồn). Từ đó lượng cồn chảy ra ngoài qua vòi thứ hai trong một phút là $\left(\frac{5}{50-t}\right)y$.

Như vậy ta có phương trình:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \left(\frac{5}{50-t}\right) y \text{, hay}$$

$$\frac{dy}{dt} + \left(\frac{5}{50-t}\right) y = 2$$

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một và chúng ta sẽ giải nhanh nó.

Nghiệm có dạng $y = uv$. Chọn $v \neq 0$ sao cho

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{5}{50-t}\right) v = 0.$$

Phân ly biến số phương trình trên rồi lấy tích phân ta được

$$\ln|v| = 5\ln|50-t| + C.$$

Chọn $C = 0$ và chú ý rằng $t \leq 50$ ta thu được $\ln|v| = \ln(50-t)^5$. Từ đó chọn $v = (50-t)^5$.

Hàm u thỏa mãn phương trình:

$$u'v = 2,$$

$$u'(50-t)^5 = 2,$$

$$u' = 2(50-t)^{-5}.$$

Lấy tích phân ta được,

$$u = \int 2(50-t)^{-5} dt = \frac{1}{2}(50-t)^{-4} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Suy ra nghiệm tổng quát là

$$y = uv = \left[\frac{1}{2}(50-t)^{-4} + C\right](50-t)^5,$$

$$y = \frac{1}{2}(50-t) + C(50-t)^5.$$

Điều kiện ban đầu $y(0) = 5$ dẫn đến

$$5 = \frac{1}{2}50 + C(50)^5 \Rightarrow C = -\frac{20}{50^5}.$$

Từ đó nghiệm của phương trình là

$$y = \frac{1}{2}(50-t) - 20(\frac{50-t}{50})^5.$$

Khi $t = 10$ thì $y(10) = \frac{1}{2}(50-10) - 20(\frac{50-10}{50})^5 \approx 13,45$.

Vậy sau 10 phút thì trong bể có 13,45 lít cồn (tỷ lệ $\frac{13,45}{50-10} = \frac{13,45}{40} \approx 33,63\,\%$ cồn).

4.3.4 Phương trình vi phân Bernoulli

Phương trình Bernoulli, đặt theo tên James Bernoulli (1654-1705), là một phương trình phi tuyến nổi tiếng có thể chuyển về dạng tuyến tính bằng một phép thế thích hợp.

Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \tag{4.33}$$

trong đó p và q là các hàm số một biến của x, giả sử liên tục trên một miền $I \subseteq \mathbb{R}$ nào đó, và hằng số $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

Chú ý:

- Nếu $\alpha = 0$ thì (4.33) trở thành phương trình tuyến tính mà chúng ta đã nghiên cứu ở phần trước.
- Nếu $\alpha = 1$ thì (4.33) có thể đưa về phương trình với biến số phân đã biết cách giải

$$y' = (p(x) - q(x))y.$$

Nhận xét: phương trình Bernoulli (4.33) có dạng gần giống phương trình tuyến tính (4.27), bằng cách đổi hàm chúng ta sẽ chuyển phương trình Bernoulli về dạng tuyến tính.

Cách giải phương trình (4.33):

Trước hết ta thấy nếu $\alpha < 0$ thì $y \neq 0$, còn nếu $\alpha > 0$ thì hàm số $y = 0$ là một nghiệm của phương trình(4.33).

Ta đi tìm các nghiệm khác không của phương trình. Chia hai vế của phương trình (4.33) cho $y^\alpha \neq 0$ ta được

$$y^{-\alpha} y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x) \tag{4.34}$$

Đặt hàm $z = y^{1-\alpha}$ (cũng coi z là hàm của biến x). Lúc đó ta có đạo hàm của z theo x là

$$z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y' \Leftrightarrow y^{-\alpha} y' = \frac{1}{1-\alpha} z'.$$

Do đó phương trình (4.34) trở thành:

$$\frac{1}{1-\alpha}z'+p(x)z=q(x), \text{ hay}$$

$$z'+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x).$$

Phương trình cuối cùng có dạng phương trình vi phân tuyến tính mà chúng ta đã biết cách giải ở mục 4.3.3.

Ví dụ 1: Giải phương trình vi phân Bernoulli

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{y^3}{x^2}. \tag{4.35}$$

Giải: điều kiện $x\neq 0$.

Trước hết do $\alpha=3>0$ nên dễ thấy $y=0$ là một nghiệm của phương trình (4.35) .

Ta đi tìm các nghiệm khác không của phương trình. Chia hai vế của phương trình (4.35) cho $y^3\neq 0$ ta được

$$y^{-3}y'+\frac{2}{x}\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2} \tag{4.36}$$

Đặt hàm $z=\dfrac{1}{y^2}$. Lúc đó đạo hàm của z theo x là

$$z'=-2y^{-3}y' \Leftrightarrow y^{-3}y'=-\frac{1}{2}z'.$$

Do đó phương trình (4.36) trở thành $-\dfrac{1}{2}z'+\dfrac{2}{x}z=\dfrac{1}{x^2}$ hay

$$z'-\frac{4}{x}z=\frac{2}{x^2}. \tag{4.37}$$

Phương trình (4.37) là một phương trình vi phân tuyến tính.

Với điều kiện $x\neq 0$, đặt $z=uv$, rồi thay vào phương trình ta được

$$\text{vu}'+\text{u}\left[v'-\frac{4}{x}v\right]=\frac{2}{x^2}. \tag{4.38}$$

Chọn $v\neq 0$ là nghiệm phương trình

$$v'-\frac{4}{x}v=0,$$

$$\frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = 4\ln|x| + C_1.$$

Chọn $C_1 = 0$ và $v = x^4, x \neq 0.$

Lúc đó phương trình (4.38) trở thành

$$x^4 u' = \frac{2}{x^2}, \text{ hay } u' = \frac{2}{x^6},$$

$$u = \int \frac{2}{x^6}\,dx = 2\int x^{-6}\,dx = 2\frac{x^{-5}}{-5} + C = -\frac{2}{5x^5} + C, C \in \mathbb{R}..$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (4.37) là

$$z = uv = \left(-\frac{2}{5x^5} + C\right)x^4 = -\frac{2}{5x} + Cx^4,\ x \neq 0, C \in \mathbb{R}.$$

Thay $z = \frac{1}{y^2}$ vào công thức trên ta được tích phân tổng quát của (4.35) là

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{2}{5x} + Cx^4,\ x \neq 0, C \in \mathbb{R}. \tag{4.39}$$

Như vậy phương trình (4.35) có họ tích phân tổng quát (4.39) và nghiệm $y = 0$ (với $x \neq 0$).

4.3.5 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{4.40}$$

trong đó M, N là các hàm số hai biến liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một miền $D \subseteq \mathbb{R}^2$ thỏa mãn

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ trên } D. \tag{4.41}$$

Người ta chứng minh được, với điều kiện (4.41) khi đó tồn tại một hàm số hai biến $F = F(x, y)$ trên D khả vi và có các đạo hàm riêng hỗn hợp đến cấp 2 liên tục sao cho M và N lần lượt là các đạo hàm riêng của F, tức là

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \frac{\partial F}{\partial y} = N. \tag{4.42}$$

Chúng ta cũng chú ý rằng nếu tồn tại một hàm F như thế, theo định lý Schwart thì

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, và từ (4.42) suy ra điều kiện (4.41) là cần thiết.

Khi đó vế trái của phương trình (4.40) là vi phân toàn phần của hàm F,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = M\ dx + N\ dy.$$

Do đó phương trình (4.40) có thể viết dưới dạng

$$dF = 0.$$

Từ đó tích phân tổng quát của phương trình (4.40) là

$$F = C, C \in \mathbb{R}.$$

Ta sử dụng công thức sau

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} \mathrm{N}(x, y) dy = C, C \in \mathbb{R}, \qquad (4.43)$$

với (x_0, y_0) là một điểm chọn tùy ý trong miền D.

Chú ý: khi ta thay đổi điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì chỉ có thể làm thay đổi hằng số tùy ý $C \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1: giải phương trình vi phân

$$(x + y^2) dx + (2xy + y)\ dy = 0$$

Giải: đặt $M = x + y^2$, $N = 2xy + y$.

Ta thấy $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$, với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nên phương trình trên là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$. Sử dụng công thức (4.43), tích phân tổng quát của phương trình là

$$F(x, y) = \int_0^x M(x, 0) dx + \int_0^y N(x, y) dy = C, C \in \mathbb{R}, \text{ hay}$$

$$\int_0^x x\ dx + \int_0^y (2x + y) dy = C, C \in \mathbb{R},$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(2x + 1) y^2}{2} = C, C \in \mathbb{R},$$

$$x^2 + (2x+1)y^2 = K, K \in \mathbb{R}.$$

Chú ý: ta trình bày một cách khác để tìm hàm F như sau.

Hàm F cần tìm phải thỏa mãn điều kiện (4.42):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = x + y^2, \frac{\partial F}{\partial y} = N = 2xy + y.$$

Do $\frac{\partial F}{\partial x} = x + y^2$ nên $F(x,y) = \int \frac{\partial F}{\partial x} dx + G(y),$ với $G = G(y)$ là một hàm số của y (không phụ thuộc vào x),

$$F(x,y) = \int (x + y^2) dx + G(y) = \frac{x^2}{2} + y^2 x + G(y). \tag{4.44}$$

Tiếp theo do điều kiện $\frac{\partial F}{\partial y} = N = 2xy + y$ nên với F như ở (4.44) thì

$$2yx + G'(y) = 2xy + y,$$

$$G'(y) = y,$$

$$G(y) = \int y\, dy + C = \frac{y^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Từ đó thay G vừa tìm được vào (4.44) ta thu được kết quả như trong ví dụ trên

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 x + \frac{y^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{(2x+1)y^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

4.4 ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRONG MÔ HÌNH HÓA

Ngoài các mô hình đã được đưa ra, trong mục này chúng tôi giới thiệu thêm một số mô hình đơn giản trong các lĩnh vực khác nhau dẫn đến phương trình vi phân.

4.4.1 Mô hình Malthus

Chúng ta nhắc lại hình tăng trưởng quần thể Malthus đã được giới thiệu trong mục **4.1.2** đưa ra bởi phương trình (4.5),

$$\frac{dN}{dt} = r\, N(t), \;\; N(0) = N_0.$$

Phân ly biến số phương trình trên rồi tích phân hai vế ta được,

$$\frac{dN}{N} = r\,dt$$

$\ln N = rt + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$

$$N = e^{rt}e^{C_1}$$

hay $N(t) = Ce^{rt},\ C \in \mathbb{R}$ (đặt $C = e^{C_1}$).

Điều kiện ban đầu $N(0) = N_0$ dẫn đến $C = N_0$ và do đó nghiệm của phương trình (4.5), là

$$N(t) = N_0\, e^{rt}. \tag{4.45}$$

4.4.2 Mô hình Logistic

Mô hình tăng trưởng của Malthus chỉ xảy ra trong các điều kiện lý tưởng với giả định tỷ lệ tăng trưởng không bị ảnh hưởng bởi kích thước của quần thể. Với mô hình đó, từ (4.45) suy ra kích thước của quần thể $N(t) \to +\infty$ khi $t \to +\infty$. Trong thực tế sinh thái học, điều đó là không đúng vì phải tính đến các yếu tố của môi trường cũng như sự cạnh tranh giữa các cá thể trong quần thể và sự đấu tranh sinh tồn giữa các quần thể khác nhau...Số lượng cá thể của một quần thể ban đầu gần như tăng trưởng mũ đến một ngưỡng nào đó thì lại bị giảm đi. Mô hình Logistic (hậu cần) đưa ra một cách đơn giản nhất kết hợp cả hai xu hướng đó: tỷ lệ tăng trưởng của quần thể phụ thuộc vào mật độ và giảm tuyến tính với kích thước của quần thể,

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K}) \tag{4.46}$$

hoặc

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) \tag{4.47}$$

với r, K là các hằng số dương. Ngoài ra chúng ta cũng có thể giả sử $N(0) = N_0$.

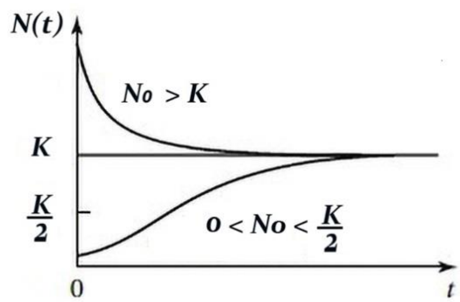
Từ phương trình (4.46), chúng ta thấy rằng khi N rất nhỏ so với K thì tỷ lệ tăng trưởng của quần thể bằng r. Hằng số r được gọi là *tỷ lệ tăng trưởng nội tại* của quần thể. Ngoài ra tỷ lệ tăng trưởng sẽ dương khi $N < K$ và âm khi $N > K$. Do đó kích thước của quần thể sẽ tăng khi nó còn nhỏ hơn K và giảm khi nó lớn hơn K. Đặc biệt tỷ lệ tăng trưởng bằng 0 khi $N = K$. Số K trong mô hình được là *ngưỡng* của quần thể; nó tùy theo từng quần thể và có thể bị giới hạn bởi môi trường.

Giả sử $N_0 > 0$ và $N_0 \neq K$, phương trình là một phương trình có thể đưa về dạng biến số phân ly nên không khó khăn chúng ta có thể tìm được nghiệm của nó với điều kiện ban đầu là:

$$N(t)=\frac{K}{1+\left(\frac{K}{N_0}-1\right)e^{-rt}}. \tag{4.48}$$

Chúng ta cũng chú ý từ (4.48) rằng $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=K$; điều đó có nghĩa là kích thước của quần thể sẽ luôn tiệm cận đến ngưỡng mà không phụ thuộc vào kích thước ban đầu N_0 của quần thể.

Đặc biệt, nếu $N_0=0$ thì $\frac{dN}{dt}=0$ và do đó $N(t)=0$ với mọi $t\geq 0$; nếu $N_0=K$ thì $\frac{dN}{dt}=0$ và do đó $N(t)=K$ với mọi $t\geq 0$. Hai nghiệm hằng số $N=0$ và $N=K$ gọi là các điểm cân bằng của phương trình logistic (4.47). Tuy vậy $N=0$ gọi là điểm cân bằng tầm thường: ban đầu không có cá thể nào và sau đó cũng luôn luôn không có cá thể nào- không có điều gì xảy ra.



Hình 4.4

Chú ý: với các giả định khác nhau, người ta có thể xây dựng các mô hình tăng trưởng quần thể khác nhau khi thay vế phải của phương trình (4.46) bởi một hàm giảm theo N để phù hợp với thực nghiệm của từng quần thể cụ thể.

4.4.3 Định luật giảm nhiệt độ của Newton

Định luật giảm nhiệt độ của Newton nói rằng tốc độ thay đổi nhiệt độ của một vật tỷ lệ thuận với sự chênh lệch nhiệt độ của nó và môi trường xung quanh (với điều kiện sự chênh lệch nhiệt độ là nhỏ và bản chất của bề mặt bức xạ không thay đổi).

Gọi $y=y(t)$ là nhiệt độ của vật theo thời gian đặt trong môi trường có nhiệt độ là một hằng số M. Chúng ta biết rằng tốc độ thay đổ của vật là $\frac{dy}{dt}$ nên định luật giảm nhiệt độ của Newton được biểu diễn dưới dạng

$$\frac{dy}{dt}=-k(y-M) \tag{4.49}$$

trong đó $k > 0$ là hằng số tỷ lệ tùy thuộc vào vật thể và được giả sử không thay đổi theo thời gian. Đó là một phương trình vi phân cấp một dạng biến số phân ly và chúng ta có thể tìm được nghiệm tổng quát

$$y = Ce^{-kt} + M,\ C \in \mathbb{R}. \tag{4.50}$$

Ví dụ: Một cốc nước sôi đặt trong một phòng có nhiệt độ được giữ cố định là 25°. Giả sử cốc nước giảm nhiệt độ từ 100° C xuống còn 90° C trong vòng 5 phút. Hỏi sau bao nhiêu lâu thì cốc nước giảm nhiệt độ xuống còn 50° C.

Giải: gọi $y = y(t)$ là nhiệt độ của cốc nước theo thời gian, nó tuân theo định luật giảm nhiệt của Newton (4.49) nên có biểu thức dạng (4.50):

$$y = Ce^{-kt} + M,\ C \in \mathbb{R}.$$

Với dữ kiện của đề bài thì $M = 25,\ y(0) = 100,\ y(5) = 90.$ Từ đó ta có

$$C + 25 = 100 \Leftrightarrow C = 75.$$

$$75e^{-5k} + 25 = 90 \Leftrightarrow e^{-5k} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5} ln\frac{13}{15} \approx 0{,}0286.$$

Do đó $y = 75e^{-0{,}0286t} + 25.$

Nhiệt độ của cốc nước còn 50° C thì

$$75e^{-0{,}0286t} + 25 = 50 \Leftrightarrow e^{-0{,}0286t} = \frac{1}{3}$$

$$-0{,}0286t = \ln\frac{1}{3}$$

$$0{,}0286t = \ln 3$$

$$t \approx 38{,}41 \text{ (phút)}.$$

Vậy sau khoảng 38,41 phút thì nhiệt độ của cốc nước còn 50° C.

4.4.4 Tốc độ phản ứng hóa học

Chúng ta xem xét tốc độ thay đổi của một phản ứng hóa học dạng

$$A + B \to AB, \tag{4.51}$$

trong đó các chất phản ứng A và B kết hợp với nhau để tạo thành phân tử AB. Tốc độ của quá trình phản ứng (có thể xem là tốc độ tạo thành sản phẩm AB) phụ thuộc vào tần số tương tác của các phân tử của A và B. Định luật về tương tác khối lượng khẳng định rằng tốc độ phản ứng tỷ lệ thuận với tích của nồng độ của các chất phản ứng. Ký hiệu R là tốc độ phản ứng và $[A],[B]$ là nồng độ tương ứng của A và B. Khi đó theo định luật trên chúng ta có thể viết

$$R = k[A][B],$$

trong đó là $k > 0$ là hằng số tỷ lệ.

Chúng ta cũng giả sử rằng phản ứng trên xảy ra trong một bình kín và giả sử rằng ban đầu A và B có một lượng xác định với nồng độ ban đầu lần lượt là a và $b.$

Chúng ta có thể biểu diễn nồng độ của A và B trong quá trình phản ứng theo a, b và theo nồng độ của sản phẩm tạo ra $AB.$ Gọi $x = [AB],$ khi đó theo phương trình (4.51) các chất A và B cũng mất một nồng độ tương ứng là $x,$ do đó

$$[A] = a - x \text{ với } 0 \le x \le a \quad \text{và} \quad [B] = b - x \text{ với } 0 \le x \le b.$$

Rõ ràng nồng độ của sản phẩm AB không thể vượt qua nồng độ của A và B : $0 \le x \le \min(a,b).$

Từ đó ta có $$R = R(x) = k(a-x)(b-x), \tag{4.52}$$

là một đa thức bậc 2 của $x.$ Chúng ta có thể thấy rằng khi x tăng thì nồng độ các chất A và B giảm và do đó tốc độ phản ứng R giảm. Khi $x = \min(a,b)$, (4.52) suy ra lúc đó tốc độ phản ứng $R = 0$: một trong hai chất A hoặc B hết, do đó phản ứng dừng.

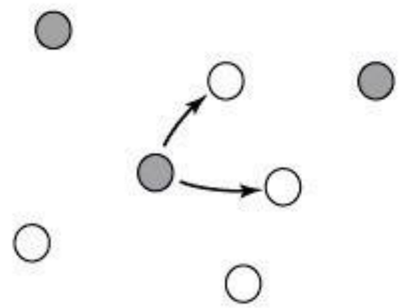
Mặt khác chúng ta biết rằng nồng độ của sản phẩm thay đổi theo thời gian trong quá trình phản ứng nên x là một hàm của thời gian: $x = x(t)$. Tốc độ của phản ứng chính là tốc độ thay đổi tức thời của nồng độ sản phẩm x và do đó $R = \frac{dx}{dt}$. Phương trình (4.52) trở thành

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x). \tag{4.53}$$

Như vậy tốc độ thay đổi trong một phản ứng hóa học có thể biểu diễn bởi phương trình vi phân (có thể phân ly biến số được) (4.53) với điều kiện ban đầu $x(0) = 0.$

4.4.5 Mô hình Levins

Dựa trên sự quan sát về quần thể côn trùng, Andrewarth và Birch (năm 1954) cho rằng cấu trúc không gian cư trú của của một loài nào đó đóng một vai trò quan trọng trong việc duy trì sự tồn tại quần thể của loài đó. Ở một khu vực (địa phương) nào đó quần thể có thể bị tuyệt chủng nhưng sau đó lại được tái sinh bởi sự di cư của các các thể của loài đó từ các khu vực lân cận và vì thế mà quần thể được duy trì trong tổng thể. Sau đó, năm 1969 Richard Levin đã đưa ra khái niệm siêu quần thể (metapopulation). Khái niệm này là một tiến bộ về mặt lý thuyết và nó mang lại rất nhiều lợi ích trong việc nghiên cứu các quần thể có cấu trúc không gian. Một siêu quần thể là một tập hợp các quần thể con, trong đó mỗi quần thể con cư trú trên một vùng lãnh thổ khác nhau nhưng giữa chúng có sự liên kết bởi sự di cư của các cá thể.



Hình 4.5

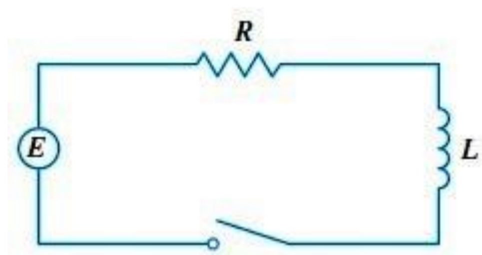
Chúng ta sẽ quan tâm đến tỷ lệ các vùng có cư trú bởi các quần thể con, hay cũng chính là tỷ lệ các quần thể con không bị tuyệt chủng, giả sử đặt là $p = p(t)$, t là biến chỉ thời gian. Các vùng đang bị tuyệt chủng, có tỷ lệ $1-p$, có thể được tái định cư bởi sự di cư với một tốc độ tỷ lệ thuận với tỷ lệ các vùng có sự cư trú (có tỷ lệ p). Gọi c là hằng số tỷ lệ đó, còn gọi là tỷ lệ định cư. Chúng ta cũng chú ý rằng một sự tăng lên về tỷ lệ các vùng có sự cư trú xảy ra chỉ khi một vùng đang bị tuyệt chủng trở thành được cư trú, do đó tốc độ về tỷ lệ vùng có cư trú sẽ tăng lên là $cp(1-p)$. Mặt khác giả sử rằng mỗi quần thể con (đang được cư trú) có nguy cơ tuyệt chủng với tốc độ không đổi, ký hiệu là $m \geq 0$, hay nó cũng được hiểu là tỷ lệ chết. Khi đó tốc độ tỷ lệ các vùng có cư trú sẽ giảm là mp. Từ đó ta có phương trình

$$\frac{dp}{dt} = cp(1-p) - mp. \tag{4.54}$$

Đây là một phương trình vi phân cấp 1 có thể đưa về dạng biến số phân ly.

4.4.6 Mô hình mạch điện

Chúng ta xét một mạch điện như trong hình vẽ 4.6 gồm một nguồn phát điện E (có thể là pin hoặc máy phát điện) với đơn vị Vol (V), một điện trở R với đơn vị ôm (Ω) và một cuộn cảm với độ tự cảm (hay từ dung) L có đơn vị Henry (H).



Hình 4.6

Giả sử nguồn phát E hàm phụ thuộc vào thời gian t và gọi cường độ dòng điện trong mạch là $I = I(t)$, với đơn vị Ampe (A). Theo định luật cảm ứng Faraday, khi có dòng điện chạy qua cuộn cảm sẽ sinh ra một từ trường biến thiên theo thời gian và tạo ra một hiệu điện thế là

$L\dfrac{dI}{dt}$. Theo một định luật của Kirchhoff thì tổng các hiệu điện thế qua điện trở R và qua cuộn cảm L phải bằng hiệu điện thế của nguồn phát E. Từ đó một mô hình cho cường độ dòng điện I được cho bởi phương trình vi phân bậc một:

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t). \tag{4.55}$$

Ví du 1: Giả sử một mạch điện như trên với $R=8$ (V), $L=4$ (H) và nguồn phát không đổi $E=32$ (V). Hãy tìm biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch theo thời gian kể từ lúc đóng mạch điện.

Giải: Cường độ dòng điện trong mạch được cho bởi phương trình

$$4\frac{dI}{dt}+8I=32.$$

Chúng ta cũng chú ý rằng khi chưa đóng mạch điện thì chưa có dòng điện, do đó ta có điều kiện ban đầu $I(0)=0$. Phương trình trên có thể đưa về dạng phân ly biến số

$$\frac{dI}{I-4}=-2dt.$$

Tích phân hai vế phương trình trên ta được

$$\ln|I-4|=-2t+C, C\in\mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $|I-4|=e^{-2t+C}, C\in\mathbb{R}$ và do đó $I-4=\pm e^{C}e^{-2t}$. Đặt $M=\pm e^{C}$, $M\neq 0$ ta nhận được

$$I=4+Me^{-2t}.$$

Điều kiện ban đầu $I(0)=0$ dẫn đến $M=-4$.

Vậy biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch là

$$I(t)=4-4e^{-2t}.$$

Ngoài ra chúng ta cũng có thể thấy rằng $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)=4$ nên cường độ dòng điện trong mạch tiệm cận đến 4 (A) sau khi thời gian t đủ lớn.

Ví dụ 2: Giả sử một mạch điện vẫn như trong Ví dụ 1 với $R=8$ (V) và $L=4$ (H). Chúng ta hãy tìm biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch khi thay nguồn phát cố định bằng một máy phát điện với hiệu điện thế xoay chiều cho bởi $E(t)=32\cos(5t)$ (V).

Giải: mô hình của cường độ dòng điện trong trường hợp này là

$$4\frac{dI}{dt}+8I=32\cos(5t),\ \text{hay}\ \frac{dI}{dt}+2I=8\cos(5t),$$

với điều kiện ban đầu $I(0)=0$.

Đây là một phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và chúng ta sẽ giải nhanh nó.

Đặt $I=uv$, trong đó chọn $v\neq 0$ xác định từ phương trình biến số phân ly $\frac{dv}{dt}+2v=0.$ Từ đó chọn $v=e^{-2t}$. Phương trình xác định u là

$$u'v=8\cos(5t),\ \text{hay}\ u'=8e^{2t}\cos(5t),$$

$$u=\int 8e^{2t}\cos(5t)dt.$$

Sử dụng hai lần phương pháp tích phân từng phần đối với u và tích phân nhận được ta thu được

$$u=8\int e^{2t}\cos(5t)dt=8\left[\frac{1}{5}\sin(5t)e^{2t}-\frac{2}{5}\int e^{2t}\sin(5t)dt\right]$$

$$=8\left[\frac{1}{5}\sin(5t)e^{2t}-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}\cos(5t)e^{2t}+\frac{2}{5}\int e^{2t}\cos(5t)dt\right)\right]$$

$$=\frac{8}{25}\left[5\sin(5t)+2\cos(5t)\right]e^{2t}-\frac{32}{25}\int e^{2t}\cos(5t)dt.$$

Để ý rằng tích phân cuối cùng trong biểu thức trên có thể biểu diễn được theo u, ta có đẳng thức:

$$u=\frac{8}{25}\left[5\sin(5t)+2\cos(5t)\right]e^{2t}-\frac{4}{25}u+K,\ K\in\mathbb{R}.$$

Từ đó tìm được $u=\frac{8}{29}\left[5\sin(5t)+2\cos(5t)\right]e^{2t}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Do đó $\quad I=uv=\frac{8}{29}\left[5\sin(5t)+2\cos(5t)\right]e^{2t}+Ce^{-2t}.$

Điều kiện ban đầu $I(0)=0$ dẫn đến $C=-\frac{16}{29}.$

Vậy biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch là

$$I=uv=\frac{8}{29}\left[5\sin(5t)+2\cos(5t)\right]e^{2t}-\frac{16}{29}e^{-2t}.$$

Tóm tắt các dạng phương trình vi phân cấp một

1. Phương trình với biến số phân ly
2. Phương trình đẳng cấp
3. Phương trình tuyến tính
4. Phương trình Bernoiulli
5. Phương trình vi phân toàn phần

BÀI TẬP CHƯƠNG 4 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Các bài từ 4.1-4.5, kiểm tra hàm số cho trước có phải là nghiệm của phương trình vi phân?

	Nghiệm	**Phương trình vi phân**
4. 1.	$N = Ce^{kt}$	$\dfrac{dN}{dt} = k\ N(t)$
4. 2.	$y = \dfrac{1}{1+Ce^{-t}}$	$\dfrac{dy}{dx} = ky(1-y)$
4. 3.	$y = C\sqrt{x^2+4}$	$\left(x^2+4\right)\dfrac{dy}{dx} = xy$
4. 4.	$N = 100e^{2t}$	$\dfrac{dN}{Ndt} = 2,\ N(0) = 100$
4. 5.	$y^2 = Cx^3$	$2xy' - 3y = 0$

Các bài tập từ 4.6-4.9, giải các phương trình vi phân với điều kiện ban đầu

	Phương trình vi phân	**Điều kiện ban đầu**
4. 6.	$\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2\sin x,$	sao cho $y_0 = 1$ khi $x_0 = 0.$
4. 7.	$\dfrac{ds}{dt} = 2e^{-3t},$	biết $s(0) = 2.$
4. 8.	$\dfrac{dy}{dx} = 2y,$	sao cho $y_0 = -2$ khi $x_0 = 0.$
4. 9.	$\dfrac{dN}{dt} = 2(3-N),$	biết $N(0) = 10.$

Các bài 4.10-4.14, giải các phương trình vi phân sau

4. 10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

4. 11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

4. 12. $ydx - (2x+1)dy = 0$

4. 13. $xy' + y = 0$

4. 14. $xy' = (y+1)$

Các bài *4.15-4.20*, giải các phương trình vi phân đẳng cấp

4. 15. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$

4. 16. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$

4. 17. $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y}{x}}$

4. 18. $y'+\frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)=0$

4. 19. $\left(x^3-xy^2\right)dx+\left(xy^2-y^3\right)dy=0$

4. 20. $\left(x^2+y^2\right)dx+3xydy=0$

Các bài 4.21-4.27, giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một

4. 21. $y'-y=4$

4. 22. $y'+2xy=4x$

4. 23. $y'-\frac{y}{x}=x^2$

4. 24. $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x$

4. 25. $y'-\frac{1}{x}y=\frac{3}{x^2}.$

4. 26. $y'+\frac{2y}{x+3}=\frac{1}{x^2}$

4. 27. $y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2+1}$

Các bài 4.28-4.32, giải các phương trình Bernoulli

4. 28. $y'+y=xy^2$

4. 29. $y'+3xy=x^2y^3$

4. 30. $y'+xy=\frac{x}{y}$

4. 31. $y'+\frac{y}{x}=xy^2$

4. 32. $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^3}{x^2}$

Giải các phương trình vi phân cấp một sau bằng một phương pháp thích hợp

4. 33. $(x^2+9)y'=xy$

4. 34. $y'x=y\ln y$

4. 35. $x\sqrt{y}dx-y(x+1)dy=0$

4. 36. $y'+2xy=xy^2$

4. 37. $y'=\frac{x^2+y^2}{x\left(x+y\right)}$

4. 38. $\left(y^2+2\right)y'=3x^2y\left(1+\frac{1}{x^3+1}\right)$

4. 39. $xy'=y-x\cos^2\frac{y}{x}$

4. 40. $y'-y\sin x=\sin 2x$

4. 41. $y'+4x^3y=x^3$

4. 42. $\frac{dy}{dx}-2\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2}$

Bài tập ứng dụng phương trình vi phân

4. 43. Giả sử tốc độ tăng trưởng kích thước trung bình của một quần thể theo thời gian là một hằng số $r = 0,3.$ Biết kích thước ban đầu của một quần thể là 2000. Ký hiệu $N(t)$ là kích thước của quần thể tại thời điểm $t.$ Hãy đưa ra mô hình cho kích thước của quần thể rồi giải.

Các bài tập từ 4.44-4.46 liên quan đến mô hình giảm nhiệt độ

4. 44. Giả sử nhiệt độ của một vật, ký hiệu là $y = y(t)$, biến đổi theo phương trình

$$\frac{dy}{dt} = -2\left(y - 10\right) \text{ với } y(0) = 30.$$

Tìm $y(t)$ và nhiệt độ của vật khi $t = 4.$

4. 45. Một cốc cà phê được mang ra cho khách hàng. Giả sử cốc cà phê có nhiệt độ 95°C và nhiệt độ của môi trường là 28°C. Sau 5 phút thì thấy nhiệt độ của cốc cà phê còn 95°C 90°C. Hỏi sau 10 phút thì nhiệt độ của cốc cà phê là bao nhiêu.

4. 46. Một thanh sắt được mang từ trong lò ra. Một giờ sau một chuyên gia đo thì nhiệt độ của thanh sắt còn 820°C. Một giờ sau lại đo một lần nữa thì nhiệt độ của thanh sắt còn 600°C. Tính nhiệt độ lúc ra lò của thanh sắt biết rằng nhiệt độ của môi trường là 35°C.

Các bài tập từ 4.47-4.48 liên quan đến mô hình phân rã các chất phóng xạ

Phân rã chất phóng xạ. Giả sử khối lượng của một chất phóng xạ theo thời gian ký hiệu b $m(t).$ Dựa trên giả thuyết tốc độ phóng xạ tỷ lệ thuận với lượng chất phóng xạ, quá trình phóng xạ được mô hình bởi phương trình

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m(t) \text{, với } m(0) = m_0, \ (4.56)$$

trong đó λ là một hằng số dương, được gọi là *hằng số phóng xạ*.

4. 47. Radium có chu kỳ bán rã là 1599 năm. Giả sử ban đầu có 10 gam Radium. Hỏi sau sau 600 năm thì khối lượng Radium còn bao nhiêu?

4. 48. Phương pháp Carbon 14. Gọi $m(t)$ là khối lượng C14 có trong một một mẫu cổ vật. Do C14 là một chất phóng xạ nên $m(t)$ tuân theo mô hình đưa ra trong Bài 21. Một đặc trưng của tự nhiên là trong mỗi loại sinh vật sống tỷ lệ C14 là không đổi, sau khi sinh vật chết đi quá trình phân rã C14 bắt đầu với chu kỳ bán rã là $T = 5730$ năm. Từ đó người ta đã đưa ra một phương pháp để xác định tuổi của một cổ vật, gọi là phương pháp Carbon 14.

a) Xác định hằng số phóng xạ λ của C14.

b) Giả sử trong một mẫu cổ vật hàm lượng C14 đo được là 138 (g). Để xác định tuổi của cổ vật người ta lấy một tiêu bản mới tương tự mẫu cổ vật (ví dụ lấy một cành cây tươi cùng loại gỗ với cổ vật) rồi đo hàm lượng C14. Giả sử hàm lượng C14 trong tiêu bản mới là 210 (g). Hãy xác định tuổi của cổ vật.

c) Hỏi sau bao nhiêu lâu hàm lượng C14 trong mẫu cổ vật giảm còn 100 (g).

Bài toán trộn

4. 49. Một bình ban đầu chứa 30 lít rượu trắng có nồng độ 30 độ. Giả sử bình được bổ sung thêm một loại rượu 45 độ qua một vòi chảy vào bình với tốc độ 2 lít/phút, đồng thời một vòi thứ hai chảy ra từ bình với tốc độ 3 lít/phút. Giả sử hỗn hợp trong bình luôn được trộn đều.

a) Hỏi sau 5 phút thì nồng độ rượu trong bình là bao nhiêu.

b) Sau bao nhiêu lâu thì nồng độ rượu trong bình là 40 độ.

Bài toán vật thể rơi với sức cản của không khí

Chúng ta xem xét vận tốc của một vật rơi từ trên cao xuống dưới tác động của trọng lực và tính đến cả lực cản của không khí. Chúng ta giả thiết lực cản của không khí lên vật là tỷ lệ thuận với vận tốc v của vật. Gọi khối lượng của vật là m và hằng số gia tốc trọng trường là g. Khi đó vật tạo ra một lực hướng xuống dưới có độ lớn là $F = mg - kv,$ với $k \geq 0$ là một hằng số. Mặt khác theo định luật 2 Newtơn thì $F = ma = m\dfrac{dv}{dt},$ từ đó dẫn đến một phương trình vi phân cho vận tốc của vật là

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv, \text{ hay}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \qquad (4.57)$$

4. 50. Một vật có khối lượng 5 kg được vứt ra khỏi một máy bay trực thăng từ độ cao 2000 mét. Giả sử sau 5 giây vật có vận tốc xấp xỷ 30 mét/giây. Sử dụng mô hình trên hãy:

a. Tìm vận tốc của vật như một hàm của thời gian.

b. Viết biểu thức vị trí của vật như là một hàm của thời gian.

c. Ước lượng vận tốc của vật khi chạm đất.