CALCULUS

EARLY TRANSCENDENTALS

SIXTH EDITION

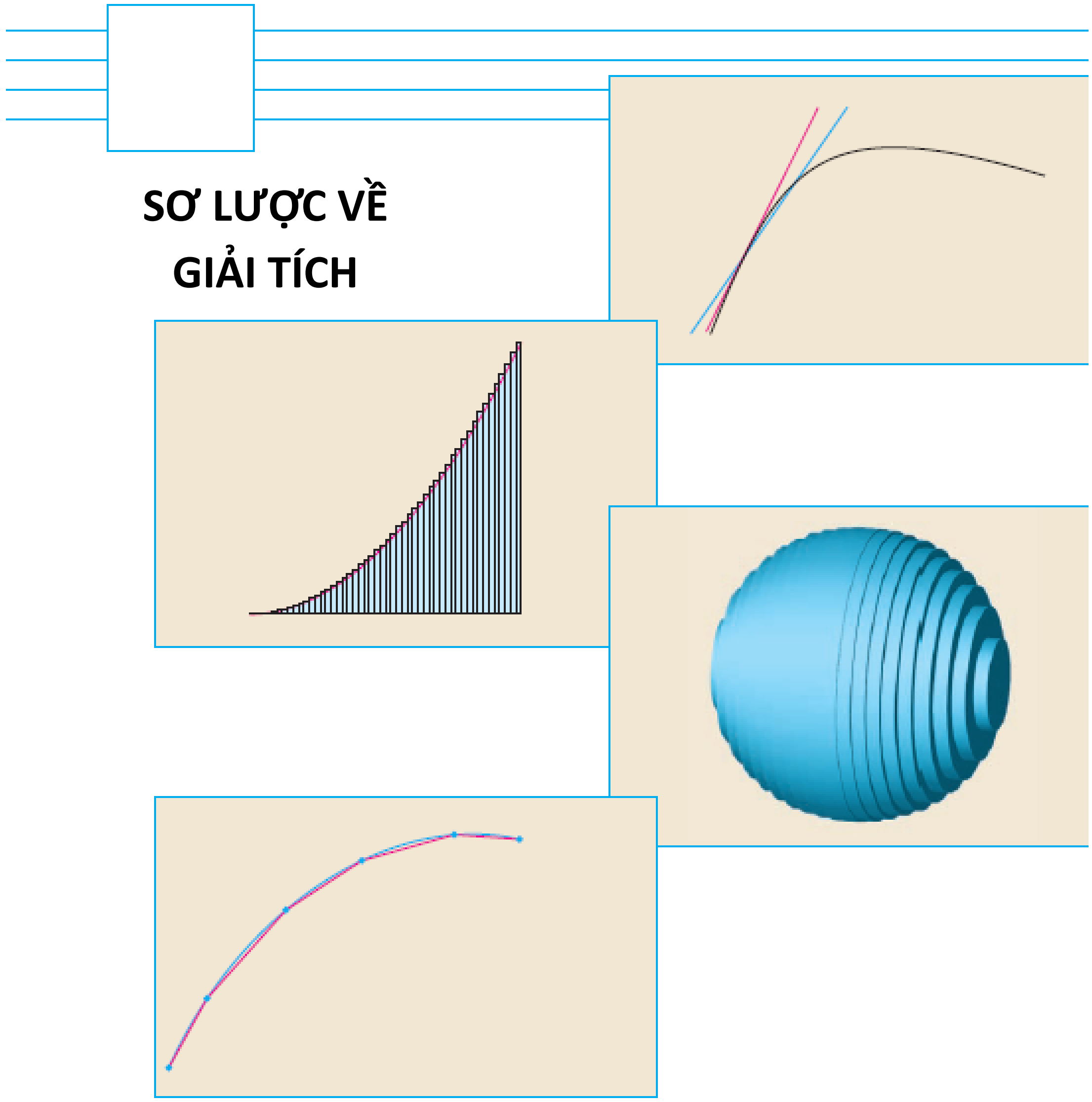
JAMES STEWART
McMASTER UNIVERSITY

Người dịch: TRẤN QUANG NGHĨA

THOMSON
BROOKS/COLE

AUSTRALIA • BRAZIL • CANADA • MEXICO • SINGAPORE • SPAIN • UNITED KINGDOM • UNITED STATES

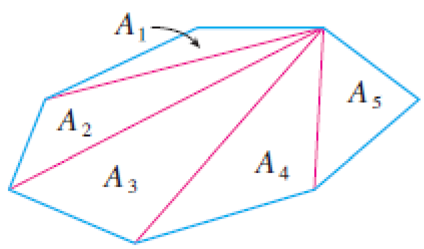
SƠ LƯỢC VỀ GIẢI TÍCH



Về cơ bản thì giải tích khác với các ngành toán học khác mà bạn từng học trước đây: giải tích thì ít tĩnh hơn và động hơn. Nó liên quan đến biến thiên và chuyển động; nó giải quyết các đại lượng tiến gần đến các đại lượng khác. Vì lý do đó nên ta cần nhìn qua một cách tổng quan về môn học này trước khi bắt đầu đi sâu vào chi tiết. Trong phần này ta sẽ nhìn lướt qua một số ý tưởng chính của giải tích bằng cách đưa ra những tình huống trong đó khái niệm về giới hạn phải xuất hiện khi ta nỗ lực đi tìm lời giải một số bài toán khác nhau.

BÀI TOÁN DIỆN TÍCH

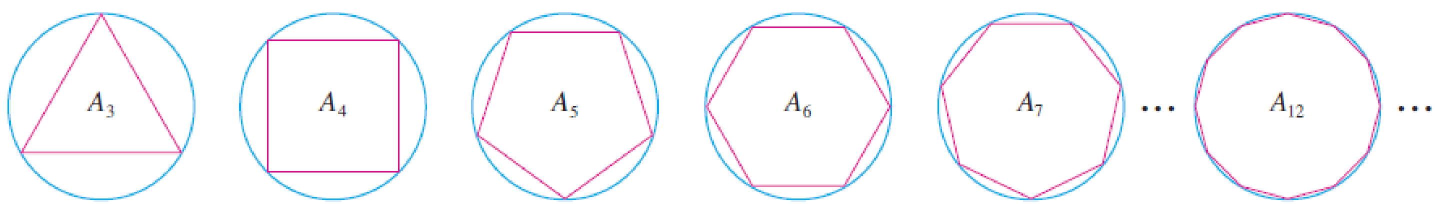
Nguồn gốc của giải tích bắt đầu ít nhất cách đây 2500 năm vào thời Hy Lạp cổ đại, khi các nhà toán học biết dùng "phương pháp vét cạn" để tính diện tích. Họ đã biết cách tính diện tích A của một đa giác bất kỳ bằng cách phân tích nó ra thành các tam giác như trong Hình 1 và cộng các diện tích ấy lại.



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

Nhưng đến khi tìm diện tích của một hình cong thì khó khăn hơn. Phương pháp vét cạn của người Hy Lạp là nội tiếp các đa giác trong hình đó và ngoại tiếp các đa giác ngoài hình đó và rồi cho số cạnh của các đa giác tăng lên. Hình 2 minh họa tiến trình này cho trường hợp hình tròn với các đa giác đều nội tiếp.

HÌNH 1 **HÌNH 2**

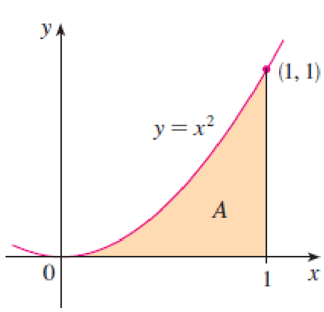


Gọi A_n là diện tích đa giác đều nội tiếp có n cạnh. Khi n tăng lên, ta thấy rằng A_n càng tiến gần đến diện tích hình tròn. Ta bảo rằng diện tích hình tròn là *giới hạn* của diện tích cac đa giác nội tiếp và ta viết

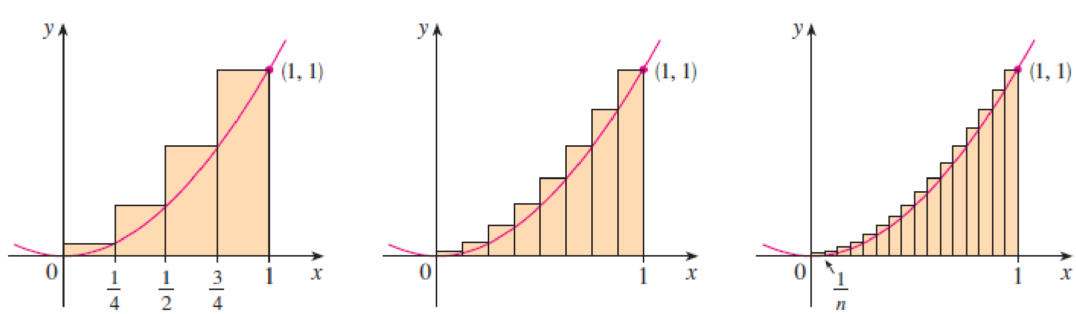
$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Các người Hy Lạp không dùng khái niệm giới hạn một cách tường minh. Tuy nhiên, bằng cách lập luận gián tiếp, Eudoxus (thế kỷ thứ năm trước Công Nguyên) đã sử dụng phương pháp vét cạn để chứng minh công thức quen thuộc về diện tích hình tròn là $A = \pi r^2$.

Ta sẽ áp dụng một ý tưởng tương tự trong Chương 5 để tìm diện tích các miền thuộc loại như trong Hình 3. Ta sẽ tính xấp xỉ diện tích cần tìm A bằng diện tích các hình chữ nhật (như trong Hình 4), cho chiều rộng các hình chữ nhật giảm, và rồi tính A bằng giới hạn của những tổng diện tích các hình chữ nhật này.



HÌNH 3

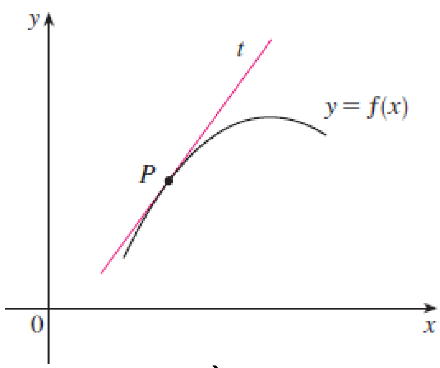


HÌNH 4

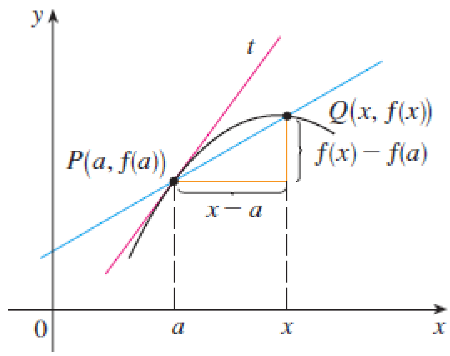
Bài toán diện tích là bài toán trung tâm của môn giải tích được gọi là *phép tính tích phân.* Các thuật toán mà ta phát triển trong Chương 5 để tìm diện tích cũng giúp ta tính được thể tích của một khối, độ dài một đoạn cong, thủy lực tác động lên đập, khối lượng và trọng tâm của một cố thể và công cần dùng để bơm nước ra khỏi bể nước.

BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

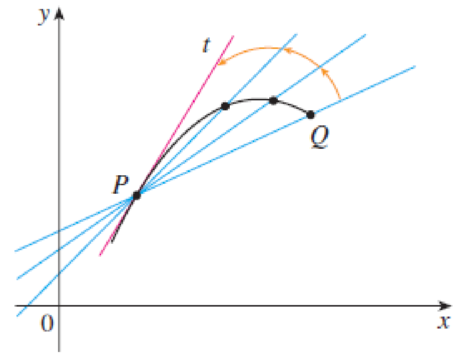
Xét bài toán tìm phương trình tiếp tuyến t của một đường cong có phương trình y = f(x) tại điểm P. (Ta sẽ đưa ra định nghĩa chính xác của đường tiếp tuyến trong Chương 2. Lúc này bạn có thể tạm xem nó như là một đường thẳng chạm đường cong tại điểm P như trong Hình 5.)



HÌNH 5



HÌNH 6



HÌNH 7

Vì ta biết rằng điểm P nằm trên tiếp tuyến t, nên ta có thể tìm phương trình của nó nếu ta biết độ dốc m của nó. Thông thường là ta cần biết hai điểm để tính độ dốc của một đường thẳng, mà bây giờ ta chỉ biết co1mot điểm P trên t. Để giải quyết bài toán, trước tiên ta tính giá trị xấp xỉ của m bằng cách lấy thêm một điểm thứ hai Q trên đường cong và gần P và ta tạm tính độ dốc m_{PQ} của cát tuyến PQ. Từ Hình 6 ta thấy rằng

1
$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Bây giờ tưởng tượng Q di chuyển dọc theo đường cong tiến đến điểm P như trong Hình 7. Bạn có thể thấy rằng cát tuyến quay quanh điểm P và tiến gần đến vị trí của đường tiếp tuyến như một giới hạn của nó. Điều này có nghĩa độ dốc m_{PQ} của cát tuyến càng lúc càng tiến gần đến độ dốc m của tiếp tuyến. Ta viết

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

và ta nói rằng m là giới hạn của m_{PQ} khi Q tiến đến P trên đường cong. Vì x tiến đến a khi Q tiến đến P, ta có thể dùng Phương trình 1 để viết

2
$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Những ví dụ cụ thể của tiến trình này sẽ được trình bày trong Chương 2.

Bài toán tiếp tuyến đã khai mào một ngành mới của giải tích gọi là *phép vi phân,* chỉ được khai sáng hơn 2000 năm sau phép tích phân. Những ý tưởng chủ yếu của phép vi phân là do nhà toán học Pháp Pierre Fermat (1601-1665) khai sinh và nhà toán học Anh John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677), và Isaac Newton (1642-727) và nhà toán học Đức Gottfried Leibniz (1646-1716) phát triển. Hai ngành giải tích và những bài toán chủ yếu của chúng, bài toán diện tích và bài toán tiếp tuyến, nom trông có vẻ rất khác nhau, nhưng hóa ra có mối liên hệ sát sườn. Bài toán tiếp tuyến và bài toán diện tích là những bài toán thuận nghịch trong ý nghĩa sẽ được mô tả trong Chương 5.

VẬN TỐC

Khi ta nhìn vào vận tốc kế của một ô tô và đọc thấy kim chỉ số 48 cho biết ô tô đang chạy với vận tốc 49 dặm/h, thông tin này cho ta biết điều gì? Ta biết rằng nếu vận tốc không đổi, thì sau một giờ ta sẽ đi được một quãng đường dài 48 dặm. Nhưng nếu vận tốc ô tô thay đổi, nói vận tốc ô tô hiện giờ là 48 dặm/h có ý nghĩa thế nào?

Để phân tích câu hỏi này, hãy theo dõi chuyển động của ô tô trên một đường thẳng và giả dụ là ta có thể đo được quãng đường đi được của ô tô d (tính bằng ft) từng giây một như trong bảng trị số sau:

t = Time elapsed (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distance (ft)	0	2	9	24	42	71

Bước đầu tiên trước khi đi tìm vận tốc lúc 2 giây, ta đi tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian 2 ≤ t ≤ 4:

$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{quãng\ đuong}{thoi\ gian\ đi}$$

$$= \frac{42-9}{4-2} = 16.5\ ft/s$$

Tương tự, vận tốc trung bình trong khoảng thời gian 2 ≤ t ≤ 3 là

$$\text{Vận tốc trung bình} = \frac{24-9}{3-2} = 15\ ft/s$$

Ta có cảm giác là vận tốc tại thời điểm t = 2 không thể khác nhiều so với vận tốc trung bình trong khoảng thời gian rất ngắn bắt đầu từ lúc t = 2. Vì thế hãy tưởng tượng ta có thể đo được quãng đường đi của ô tô từng 0.1 giây như trong bảng sau:

t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	9.00	10.02	11.16	12.45	13.96	15.80

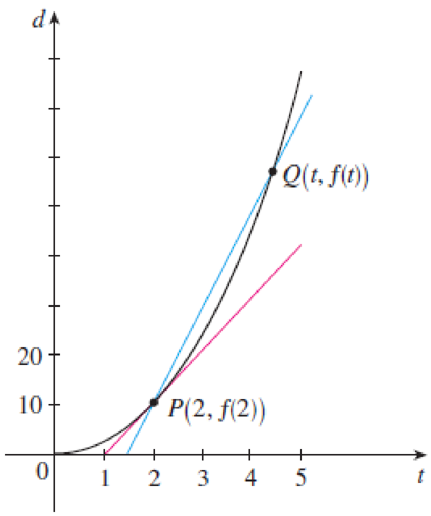
Thế thì ta có thể tính, chẳng hạn, vận tốc trung bình trong khoảng thời gian [2, 2.5]:

$$\text{Vận tốc trung bình} = \frac{15.80-9.00}{2.5-2} = 13.6\ ft/s$$

Kết quả những phép tính như thế được ghi trong bảng dưới

Khoảng thời gian	[2, 3]	[2, 2.5]	[2, 2.4]	[2, 2.3]	[2, 2.2]	[2, 2.1]
Vận tốc trung bình ft/s	15.0	13.6	12.4	11.5	10.8	10.2

Các vận tốc trung bình qua những khoảng thời gian càng ngắn có vẻ như là càng tiến gần đến một số gần bằng 10, và do đó ta hy vọng vận tốc tại đúng thời điểm t = 2 là khoảng 10 ft/s. Trong Chương 2 ta sẽ định nghĩa vận tốc tức thời của một động tử như là giới hạn của những vận tốc trung bình trên những khoảng thời gian càng lúc càng ngắn.



HÌNH 8

Hình 8 minh họa đồ thị chuyển động của một ô tô bằng cách xem quãng đường ô tô đi như hàm số theo thời gian. Nếu ta viết d = f(t), thì f(t) là số feet mà ô tô đi được sau t giây. Vận tốc trung bình trên khoảng thời gian [2, t] là

$$\text{Vận tốc trung bình} = \frac{\textit{quãng đuong}}{\textit{thoi gian đi}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

Cũng chính là độ dốc của cát tuyến PQ trong Hình 8. Vận tốc v khi t = 2 là giá trị giới hạn của vận tốc trung bình này khi t tiến đến 2, nghĩa là

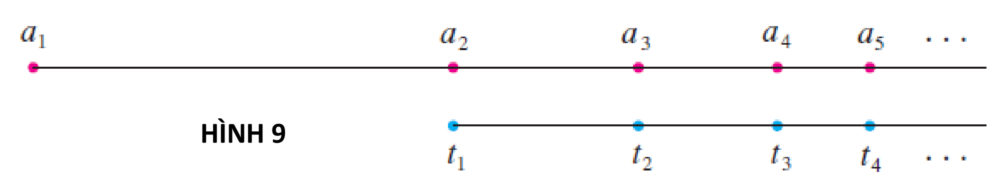
$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

và ta nhận ra từ Phương trình 2 đây cũng giống như là độ dốc của tiếp tuyến của đường cong tại P.

Do đó, khi ta giải bài toán tiếp tuyến trong phép tính vi phân, ta cũng đồng thời giải luôn bài toán liên quan đến vận tốc. Và tiến trình này cũng giúp ta giải những bài toán liên quan đến tỷ số biến thiên trong mọi ngành khoa học tự nhiên và xã hội.

GIỚI HẠN CỦA MỘT DÃY SỐ

Trong thế kỷ thứ năm trước Công Nguyên triết gia Zeno ở Elea đưa ra bốn bài toán, giờ được mang tên là *nghịch lý của Zeno,* nhằm thách thức một số ý tưởng liên quan đến quan điểm không gian và thời gian của thời ấy. Nghịch lý thứ hai của Zeno nói về cuộc chạy đua giữa người anh hùng Hy Lạp Achilles và con rùa. Con rùa được cho chạy trước Achilles một khoảng ngắn. Zeno cho rằng, dù vậy, Achilles không thể nào đuổi kịp và qua mặt cụ rùa chậm chạp kia. Ông lập luận rằng giả sử Achille bắt đầu khởi hành ở điểm a_1 và cụ rùa khởi hành ở điểm t_1 . (Xem Hình 9) Khi Achilles chạy đến $a_2 = t_1$, thì cụ rùa đã đi đến t_2. Khi Achilles đến $a_3 = t_2$ thì cụ rùa đã ở điểm t_3. Tiến trình này tiếp tục đến vô hạn và như thế hiển nhiên là lúc nào cụ rùa cũng đi trước Achilles một khoảng dù ngắn! Và lập luận này đã thách thức tư duy thông thường.



HÌNH 9

Có một cách giải thích nghịch lý này là dùng khái niệm *dãy số.* Những vị trí liên tiếp của Achilles (a_1, a_2, a_3 , . . .) hoặc vị trí liên tiếp của cụ rùa (t_1, t_2 , t_3, . . .) được coi như là một dãy số.

Tổng quát, một dãy số $\{a_n\}$ là một tập hợp những số sắp xếp theo một thứ tự xác định. Chẳng hạn, dãy số

{1, 1/2, 1/3, ¼, 1/5, . . . }

được mô tả bằng công thức sau cho biết số hạng thứ n:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Ta có thể hình dung dãy số này bằng cách biểu diễn số hạng của nó trên trục số như trong Hình 10(a) hoặc bằng cách vẽ đồ thị như trong Hình 10(b). Quan sát một trong hai hình này, bạn thấy rằng các số hạng $a_n = 1/n$ càng lúc càng tiến sát số 0 khi n tăng lên. Ta có thể tìm những số hạng nhỏ như ta muốn bằng cách lấy n đủ lớn. Ta nói rằng giới hạn của dãy là 0, và ta ký hiệu bằng cách viết

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Tổng quát, ký hiệu

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

được dùng nếu số hạng a_n tiến gần đến số L khi n càng lớn. Điều này có nghĩa là số a_n có thể làm gần sát đến số L tùy ý muốn bằng cách lấy số đủ lớn.

Khái niệm giới hạn của dãy số xuất hiện bất cứ khi nào ta dùng biểu diễn thập phân của một số thực. Chẳng hạn, nếu

$$\begin{aligned} a_1 &= 3.1 \\ a_2 &= 3.14 \\ a_3 &= 3.141 \\ a_4 &= 3.1415 \\ a_5 &= 3.14159 \\ a_6 &= 3.141592 \\ a_7 &= 3.1415926 \\ &\vdots \end{aligned}$$

thế thì

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

Số hạng trong dãy số này là giá trị hữu tỷ gần đúng của số π.

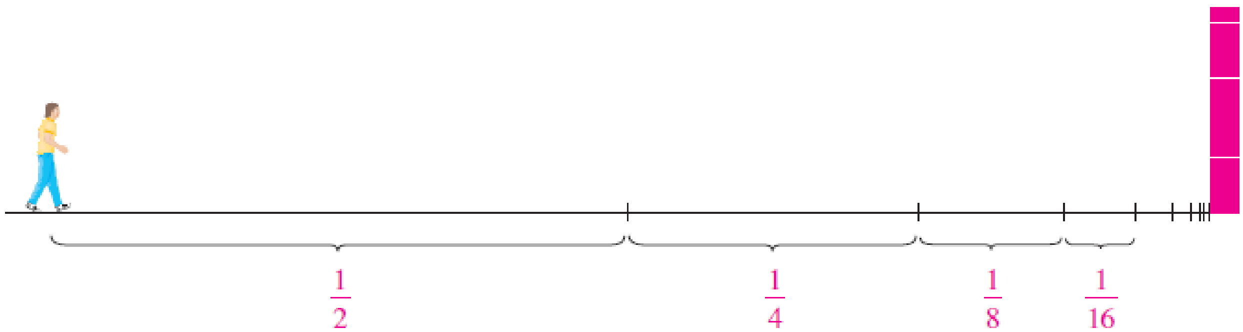
Hãy trở lại với nghịch lý Zeno. Những vị trí liên tiếp của Achilles và cụ rùa tạo thành các dãy số $\{a_n\}$ và $\{t_n\}$, trong đó $a_n < t_n$ với mọi n. Ta có thể chứng tỏ rằng cả hai đều có cùng giới hạn:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = p = \lim_{n \to \infty} t_n$$

Chính tại điểm p này mà Achilles bắt kịp cụ rùa.

TỔNG CỦA CHUỖI SỐ

Một nghịch lý của Zeno, do Aristotle truyền lại cho chúng ta như sau: "Một người đứng trong một căn phòng không thể nào bước đến tường phòng được. Để làm được điều đó, trước tiên y phải đi qua nửa đoạn đường, rồi tiếp theo qua phân nửa của đoạn đường còn lại, và rồi tiếp tục nửa đoạn đường còn lại. Tiến trình này được lặp lại vô số lần và không bao giờ kết thúc." (Xem Hình 11)



Dĩ nhiên, ta biết rằng y thực sự đến được bức tường phòng trong khoảng thời gian T ngắn ngủi. Nếu tính thời gian mà y phải đi qua vô số đoạn bị Zeno cắt nhỏ, thì tổng thời gian y bỏ ra là

$$T\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{2^n}+\ .\ .\ .\right)$$

Đây là tổng của vô số số nên có lẽ Zeno cho rằng tổng này sẽ cho ta một số vô cùng lớn, và như thế có nghĩa là y không bao giờ đi tới được bức tường. Nhưng Zeno không biết rằng thật ra tổng vô hạn đó bằng 1:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{2^n}+\ .\ .\ .=1 \qquad \mathbf{3}$$

Zeno lập luận rằng cộng vô số số không có gì hợp lý cả. Nhưng thật ra có nhiều tình huống trong đó ta cộng một tổng vô hạn mà không biết. Chẳng hạn, trong biểu diễn thập phân, ký hiệu $0.\overline{3}=0.3333\ .\ .\ .$ có nghĩa là

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10,000}+\ .\ .\ .$$

Và như thế thật hợp lý khi viết

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10,000}+\ .\ .\ .=\frac{1}{3}$$

Tổng quát hơn, nếu d_n chỉ chữ số thứ n trong biểu diễn thập phân của một số, thế thì

$$0.d_1d_2d_3d_4\ .\ .\ .=\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{100}+\frac{d_3}{1000}+.\ .\ .+\frac{d_n}{10^n}+\ .\ .\ .$$

Do đó một vài tổng vô hạn, hay chuỗi vô hạn như tên thường gọi, mang một ý nghĩa. Nhưng ta phải định nghĩa cẩn thận tổng của một chuỗi vô hạn là gì.

Trở lại đến chuỗi trong Phương trình 3, ta gọi s_n là tổng n số hạng đầu tiên của chuỗi. Như vậy

$$s_1 = \tfrac{1}{2} = 0.5$$

$$s_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0.75$$

$$s_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0.875$$

$$s_4 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0.9375$$

$$s_5 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0.96875$$

$$s_6 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0.984375$$

$$s_7 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0.9921875$$

$$\vdots$$

$$s_{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0.99902344$$

$$\vdots$$

$$s_{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0.99998474$$

Nhận xét rằng khi ta cộng càng nhiều số hạng, tổng thành phần càng lúc càng gần số 1. Thật ra, ta có thể chứng tỏ rằng bằng cách lấy n đủ lớn (nghĩa là, bằng cách cộng đủ nhiều số hạng của chuỗi), ta có thể làm tổng từng phần s_n càng lúc càng gần số 1. Do đó hình như hợp lý khi nói rằng tổng của chuỗi vô hạn bằng 1 và ký hiệu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{2^n}+\ .\ .\ .=1$$

Nói cách khác, lý do khiến tổng của chuỗi bằng 1 là

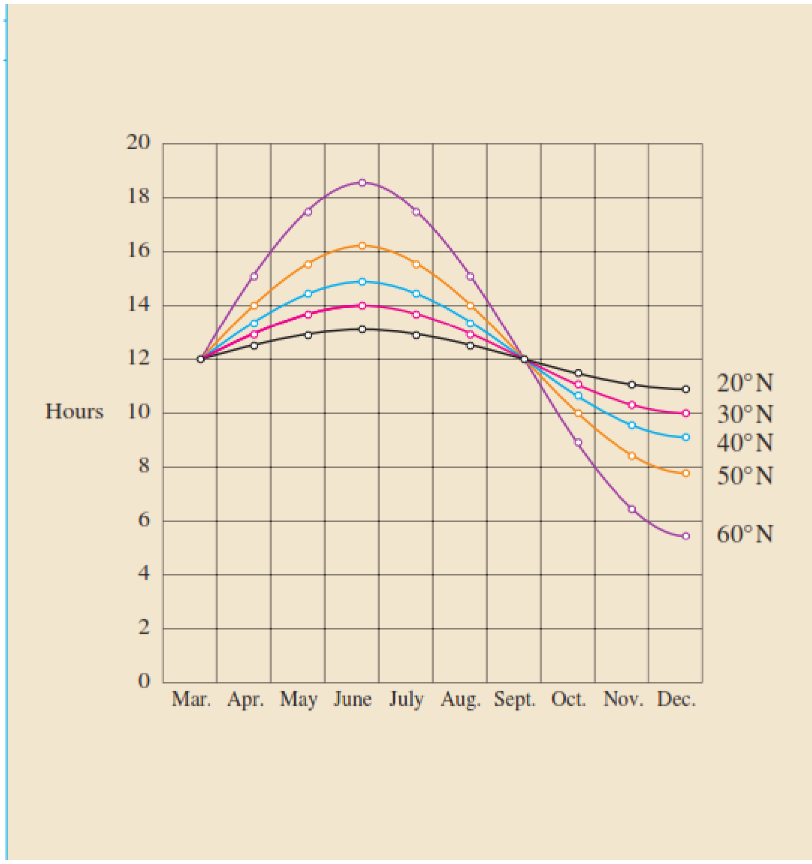
$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

TÓM TẮT

Ta đã thấy là khái niệm giới hạn xuất hiện khi ta cố tìm diện tích của một miền, tiếp tuyến của một đường cong, vận tốc của ô tô hoặc tổng của một chuỗi vô hạn. Trong mỗi trường hợp, chủ đề chung là tính một đại lượng coi như giới hạn của một đại lượng khác dể tính hơn. Chính ý tưởng cơ bản này của giới hạn khiến giải tích trở thành một ngành toán học tách riêng khỏi những lãnh vực toán học khác. Thật ra, ta có thể định nghĩa giải tích là một ngành toán học nhằm giải quyết những vấn đề về giới hạn.

Sau khi Sir Isaac Newton sáng tạo ra giải tích, ông dùng nó để giải thích sự chuyển động của các hành tinh quanh mặt trời. Ngày nay giải tích được dùng để tính các quỹ đạo của vệ tinh và phi thuyền, dự đoán kích thước dân số, ước tính giá cà phê tăng ra sao, dự báo thời tiết, đo lường lực đập của tim, tính toán phí bảo hiểm, và trong nhiều bài toán thực tế đa dạng trong nhiều lãnh vực của đời sống.

CHƯƠNG 1. HÀM SỐ VÀ MÔ HÌNH



1.1. Hàm Số ……………………………………………………………11
1.2. Các Mô Hình Toán Học…………………………………..25
1.3. Các Phép Biến Đổi Hàm Số……………………………41
1.5. Hàm Số Mũ……………………………….. ……………….53
1.6. Hàm Số Ngược Và Lôgarit………………………………61
ÔN CUỐI CHƯƠNG………………………………………………76
PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN…………………………………88

Chương 1. Hàm Số

BÀI 1. 1. BỐN CÁCH BIỂU THỊ HÀM SỐ

Hàm số xuất hiện khi nào có một đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác. Xét 4 trường hợp sau:

A. Diện tích A của một hình tròn phụ thuộc vào bán kính r của nó. Quy tắc tính A theo r là $A = \pi r^2$. Với mỗi số dương r ta liên kết một giá trị duy nhất A, ta nói A là *hàm số theo r*.

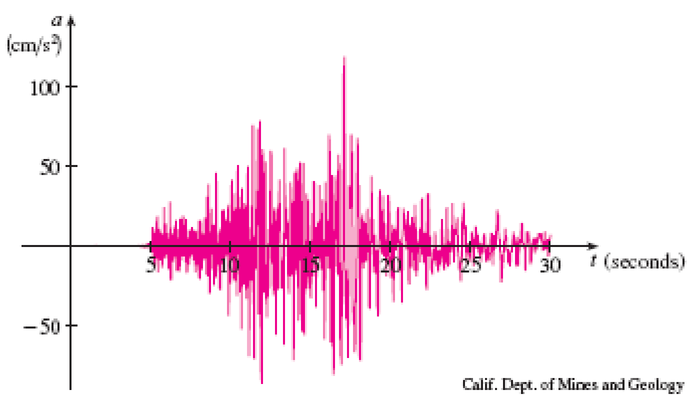
B. Dân số của thế giới phụ thuộc vào thời điểm t. Bảng bên trái cho ta giá trị gần đúng của dân số thế giới P(t) tại thời điểm t. Ví dụ: P(1950) = 2.560.000.000.

Với mỗi giá trị của t tương ứng một giá trị P, ta nói P là *hàm số theo t*.

Năm	Dân số (triệu)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

C. Cước phí C gởi thư bằng đường hàng không phụ thuộc vào trọng lượng w của thư. Mặc dù ta không có công thức đơn giản để tính C theo w, nhưng bưu cục có quy tắc xác định cước phí C khi biết w.

D. Gia tốc dọc a (cm/s^2 trên trục tung) của địa chấn theo thời gian t (giây trên trục hoành) đo được trong một trận động đất ở Los Angeles năm 1994 cho bởi hình 1. Với thời điểm t cho trước, biểu đồ cho phép ta tìm được giá trị a tương ứng.



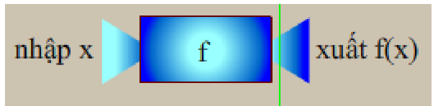
Hình 1

Mỗi trong bốn ví dụ này cho ta qui luật theo đó, cho trước một số (r, t, w, hoặc t), ta tìm được một số khác (A, P, C hoặc a) tương ứng. Trong mỗi trường hợp, ta nói rằng số thứ hai là hàm số của số thứ nhất. Như vậy:

> **Hàm số f** là một qui luật gán cho mọi số x thuộc tập D đúng một phần tử duy nhất , gọi là f(x), thuộc tập E.

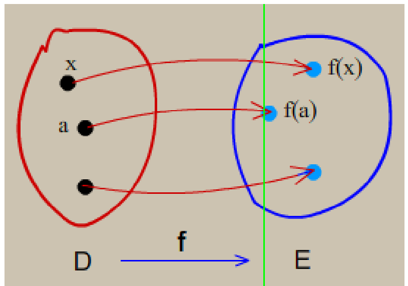
Tập D và E thường là tập các số thực. D gọi là tập xác định của hàm số . Số f(x) gọi là giá trị của f tại x và đọc là " f của x". Tập giá trị của f là tập tất cả những số f(x) khi x đi khắp tập D. Kí hiệu chỉ một giá trị bất kì của tập xác định được gọi là biến độc lập, kí hiệu chỉ một giá trị bất kì của tập giá trị được gọi là biến phụ thuộc. Trong ví dụ đầu, r là biến độc lập và A là biến phụ thuộc.

Cũng rất hữu ích khi chúng ta xem hàm số như một bộ máy (Hình 2). Nhập vào máy giá trị x thuộc tập xác định, máy sẽ xuất ra giá trị f(x) theo qui luật của máy. Máy tính bỏ túi là một tổ hợp của những "máy" hàm số thông dụng như máy "bình phương" (bấm nút x^2), máy "khai phương) (bấm $\sqrt{x}$), ...



HÌNH 2

Một cách khác để hình dung hàm số là dùng giản đồ mũi tên như trong hình 3. Mỗi mũi tên nối một phần tử của D đến một phân tử của E: f(x) tương ứng với x, f(a) tương ứng với a, . . .



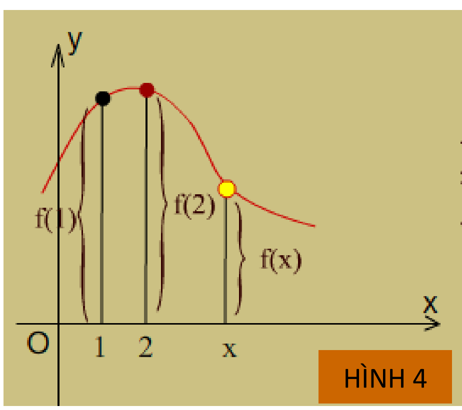
HÌNH 3

Một cách thông dụng nhất để hình dung hàm số là sử dụng đồ thị của nó. Nếu f là hàm số có tập xác định D, thì đồ thị G của nó là tập các cặp thứ tự

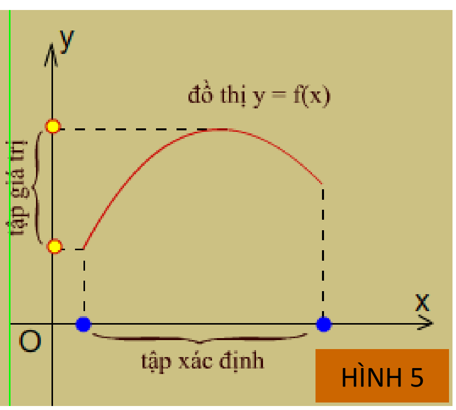
$$\{(x, f(x) / x \in D\}$$

Nói cách khác, đồ thị của f chứa tất cả những điểm (x, y) trong mặt phẳng toạ độ sao cho y = f(x) và x thuộc D.

Từ đồ thị ta biết được "lý lịch" của f. Giá trị của f(x) chính là chiều cao của đồ thị tại điểm x (Hình 4). Qua đồ thị ta cũng biết được tập xác định và tập giá trị của f (Hình 5).



HÌNH 4



HÌNH 5

VÍ DỤ 1 Cho hàm số f có đồ thị như hình 6.

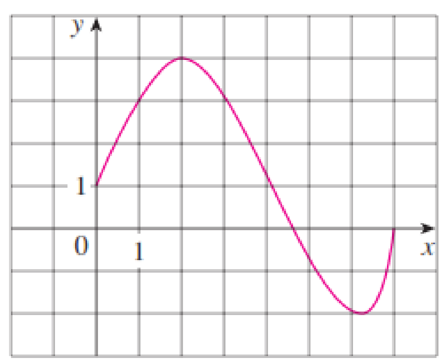
(a) Tìm f(1) và f(5).

(b) Tìm tập xác định và tập giá trị của f.

GIẢI

(a) Theo hình 6, ta thấy điểm (1, 3) thuộc đồ thị, do đó giá trị của f tại 1 là f(1) = 3.
Khi x = 5, đồ thị cách trục hoành khoảng 0.7 và ở phía dưới trục hoành, do đó ta ước tính f(5) $\approx$ 0.7.

(b) Ta thấy là f(x) được xác định khi $0 \le x \le 7$, do đó tập xác định của f là đoạn [1, 7]. Nhận xét rằng f nhận mọi giá trị từ -2 đến 4, do đó



HÌNH 6

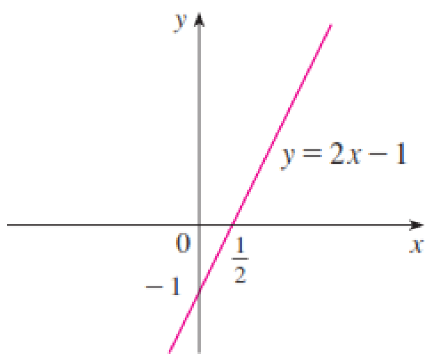
tập giá trị của f là đoạn [-2, 4].

VÍ DỤ 2 Vẽ đồ thị và tìm tập xác định và tập giá trị của các hàm số sau;

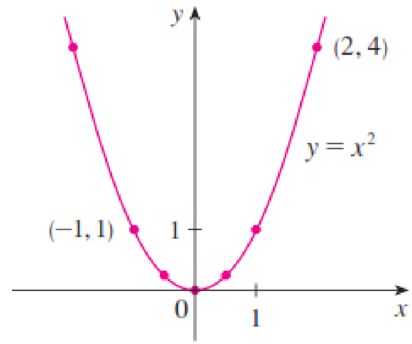
(a) $y = 2x - 1$ (b) $y = x^2$

GIẢI

(a) Đồ thị của hàm số $y = 2x - 1$ ta biết là một đường thẳng có hệ số góc là 2 và tung độ gốc là – 1 (tức là giao điểm của đường thẳng với trục tung là điểm – 1). Nhờ đó ta có thể vẽ được một phần của đường thẳng như trong hình 7. Biểu thức $2x - 1$ xác định với mọi số thực x, nên tập xác định là tập các số thực, ký hiệu là R. Từ đồ thị, ta suy ta tập giá trị cũng là R.



HÌNH 7



HÌNH 8

(b) Ta biết đồ thị của hàm số $y = x^2$ là một parabol có đỉnh là điểm gốc (0, 0), và đi qua các điểm (1, 1), (2, 4), (- 1, 1), (- 2, 4) . . . Nối những điểm này ta có đồ thị của hàm số (hình 8). Tập xác định của g là R. Tập giá trị của g là tập tât cả những giá trị $g(x) = x^2$. Vì $x^2 \geq 0$ với mọi x, và mọi số không âm y đều là bình phương của một số. Do đó tập giá trị của g là $\{y|\ y \geq 0\} = [0, \infty)$. Kết quả này cũng có thể suy ra từ hình 8.

VÍ DỤ 3 Nếu $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, và $h \neq 0$, tính $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

GIẢI Trước hết ta tính f(a + h) bằng cách thế x bằng a + h trong biểu thức f(x):

$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 - 5(a + h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a + h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

Và:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(2a^2+4ah+2h^2-5a-5h+1)-(2a^2-5a+1)}{h} \\ &= \frac{4ah+2h^2-5h}{h} = 4a+2h-5 \end{aligned}$$

- Ghi chú: Phân thức $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ rất quen thuộc trong giải tích. Trong chương 2, ta sẽ biết nó biểu thị tốc độ biến thiên trung bình giữa a + h và a của hàm số f(x).

BỐN CÁCH BIỂU THỊ HÀM SỐ

Có 4 cách biểu thị một hàm số:

- Bằng lời (dùng lời nói để diễn tả cách xác định f(x))
- Bằng số (dùng bảng số)
- Bằng hình ảnh (dùng đồ thị)
- Bằng đại số (dùng công thức tường minh)

Trở lại 4 ví dụ ở đầu bài:

* Trong ví dụ A, hàm số xác định bằng công thức $A = \pi r^2$.

* Trong ví dụ B, hàm số được xác định bằng bảng số.

* Ví dụ C, hàm số cước phí xác định bằng văn bản. Bưu chính Hoa Kỳ năm 2007 qui định như sau: đối với những thư không quá 1 ounce, cước phí là 37 xu, với mỗi ounce tăng thêm cước phí tính thêm 24 xu, cho đến trọng lượng tối đa là 13 ounce. Quá trọng lượng này thư phải gởi theo đường bưu phẩm.

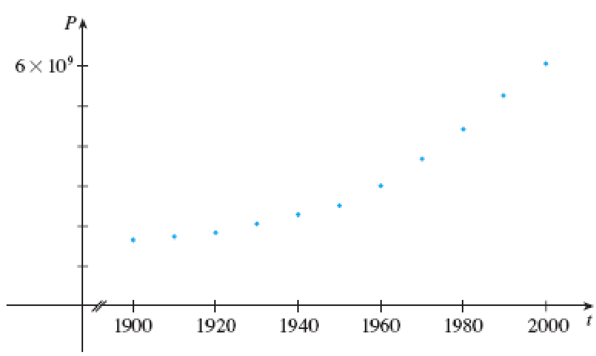
* Ví dụ D cho ta xác định hàm số bằng đồ thị của nó.

Lẽ dĩ nhiên ta có thể, từ cách xác định ban đầu, suy ra những cách xác định còn lại. Ví dụ trong trường hợp A, ta có thể lập bảng số tính A theo r, hoặc diễn tả bằng lời công thức $A = \pi r^2$ và cuối cùng có thể vẽ đồ thị của hàm số đó (nửa parabol). Nhưng đối với tình huống A, xác định hàm số công thức là ngắn gọn nhất.

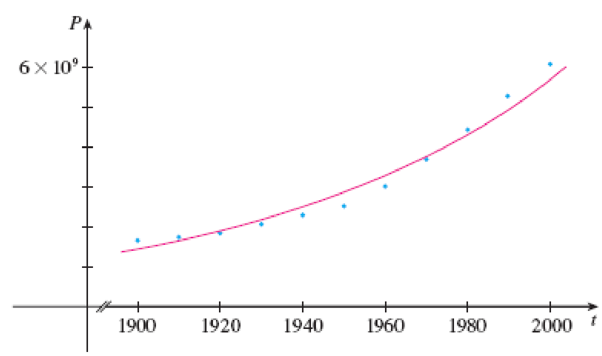
Năm	Dân số (triệu)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

Trong tình huống B, từ bảng số ta có thể vẽ đồ thị mô tả dân số P ở những năm từ 1900 đến 2000: đồ thị là 11 điểm rời rạc (Hình 9). Còn về công thức thì sao? Dĩ nhiên chúng ta không thể tìm ra một công thức chính xác P(t) để tìm dân số tại bất kì thời điểm t nào. Nhưng có thể tìm một hàm số f(t) tính xấp xỉ giá trị P(t):

$$P(t) \approx f(t) = (0.008079266)(1.013731)t$$



Hình 9



Hình 10

có đồ thị là đường màu đỏ trong hình 10, gần như đi qua 11 điểm đã vẽ.

w (ouces)	C (dollars)
$0 < w \leq 1$	0.39
$1 < w \leq 2$	0.63
$2 < w \leq 3$	0.87
$3 < w \leq 4$	1.11
$4 < w \leq 5$	1.35
.	.
.	.
.	.
$12 < w \leq 13$	3.27

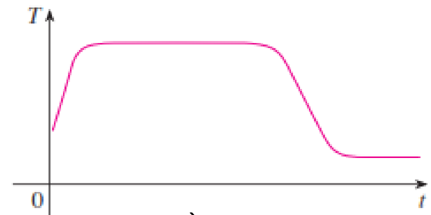
Cũng vậy, đối với tình huống C, ta có thể dễ dàng lập bảng số tính cước phí C theo w (xem bảng bên trái), hoặc thiết lập công thức C(w) hoặc vẽ đồ thị như trong ví dụ 10. Nhưng như thế không tiện dụng đối với người dân bình thường.

Đối với tình huống D thì bảng số và công thức thậm chí có thể thiết lập dù rất phức tạp, nhưng cái mà các nhà địa chất cần biết - biên độ và mô hình - có thể tìm thấy dễ dàng qua đồ thị.

Trong ví dụ sau, ta sẽ vẽ đồ thị của hàm số được cho bằng một phát biểu bằng lời.

VÍ DỤ 4 Khi bạn mở một vòi nước nóng, nhiệt độ T của nước phụ thuộc vào thời gian nước chảy ra được bao lâu. Vẽ đồ thị thô sơ của hàm số nhiệt độ T theo thời gian t của nước chảy ra kể từ lúc mở vòi.

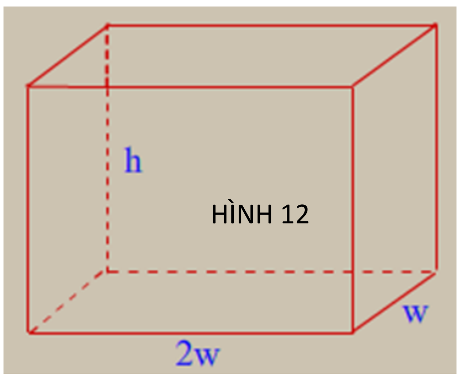
GIẢI Nhiệt độ ban đầu của vòi nước chảy gần bằng với nhiệt độ phòng vì nước còn ở trong đường ống. Khi nước nóng từ bình chứa chảy đến vòi, nhiệt độ tăng lên nhanh chóng. Sau đó, nhiệt độ bằng với nhiệt độ của nước trong bình chứa. Khi bình chứa cạn nước, T giảm xuống bằng nhiệt độ của nguồn nước. Nhờ đó ta vẽ được đồ thị thô sơ của T theo t như Hình 11.



HÌNH 11

Trong ví dụ sau, từ một hàm số được xác định bằng văn bản, ta sẽ thiết lập công thức tường minh. Kỹ năng này rất hữu ích để giải những bài toán cực trị trong thực tế hay trong hình học.

VÍ DỤ 5 Một bình chứa hình hộp chữ nhật không nắp có dung lượng là 10m3. Chiều dài của đáy gấp hai chiều rộng. Chất liệu làm đáy giá 10 USD một mét vuông, chất liệu làm mặt xung quanh giá 6 USD một mét vuông. Biểu diễn giá thành (USD) làm bình chứa theo chiều rộng của đáy.



GIẢI Gọi w là chiều rộng, 2w là chiều dài của đáy và h là chiều cao bình chứa. Diện tích đáy là (2w)w = $2w^2$, do đó giá thành làm đáy là 10. $2w^2$ = $20w^2$. Hai mặt bên có diện tích wh, hai mặt bên còn lại có diện tích 2wh, do đó giá thành làm mặt xung quanh là 6[2(wh) + 2(2wh)] = 36wh. Vậy giá thành làm bình chứa là:

$$C = 20w^2 + 36wh$$

Để tính C theo w, ta phải tính h theo w từ giả thiết dung lượng bình chứa là 10 (m^3), nghĩa là:

$$w(2w)h = 10 \iff h = 10/2w^2 = 5/w^2$$

Thế vào biểu thức của C, ta được:

$$C = 20w^2 + 36w.\ 5/w^2 = 20w^2 + 180/w \text{ với } w > 0$$

Đó là hàm số cần tìm.

VÍ DỤ 6 Tìm tập xác định các hàm số sau:

(a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

GIẢI

(a) Vì căn bậc hai của một số âm không có nghĩa do đó tập xác định của f là tập hợp những x sao cho x + 2 ≥ 0 <=> x ≥ - 2. Vậy tập xác định là [- 2, oo).

(b) g(x) không xác định khi x^2 - x = 0 <=> x = 0 hay x = 1.

Vậy tập xác định của g là tập những x sao cho x ≠ 0 và x ≠ 1, tức tập R \ {0, 1} hay (- oo, 0) U (0, 1) U (1, + oo).

Ghi nhớ: *nếu hàm số được cho bằng một công thức và không cho biết tập xác định , thì tập xác định được hiểu là tập những giá trị sao cho công thức đó có nghĩa, tức là một số thực.*

Nhớ các tính chất sau:

** Biểu thức 1/A có nghĩa khi A có nghĩa và khác o.*

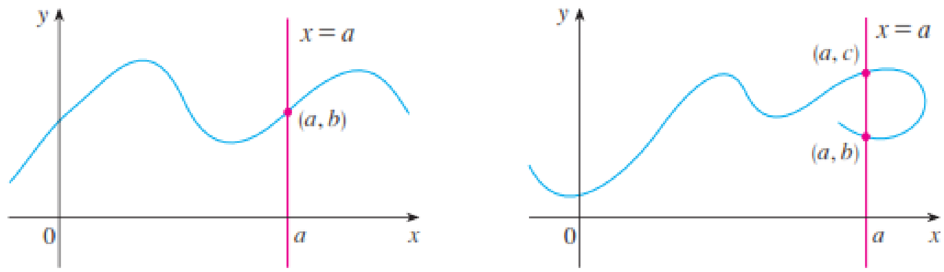
** Biểu thức $\sqrt{A}$ có nghĩa khi A có nghĩa và A ≥ o.*

Đồ thị của hàm số là một đường cong trong mặt phẳng xy. Ngược lại, đường cong nào trong mặt phẳng xy mới là đồ thị của một hàm số? Để trả lời câu hỏi này, ta phải dùng kiểm định sau:

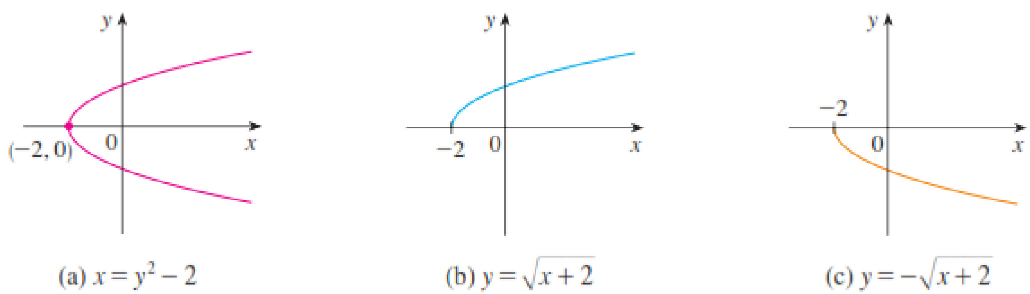
KIỂM ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG ĐỨNG Một đường cong trong mặt phẳng xy là đồ thị một hàm số khi và chỉ khi không tồn tại một đường thẳng đứng nào cắt đường cong tại nhiều hơn hai điểm.

Hình 1 3 sẽ cho chúng ta thấy phép kiểm định trên là đúng. Nếu mọi đường thẳng đứng x = a chỉ cắt đường cong tại 1 điểm duy nhất (a, b) thì giá trị của hàm số được xác định bởi f(a) = b. Nhưng nếu đường thẳng đứng x = a cắt đường cong tại 2 điểm (a, b) và (a, c), thế thì đường cong không biểu thị một hàm số vì một hàm số không thể có 2 giá trị khác nhau tại a.

HÌNH 13



Ví dụ parabol x = y^2- 2 trong hình 14(a) không phải là đồ thị của hàm số theo x, vì như bạn thấy, tồn tại những đường thẳng đứng cắt đường này tại 2 điểm. Tuy nhiên parabol này chứa đồ thị của hai hàm số theo x. Nhận xét rằng phương trình x = y^2 – 2 ⇔ y^2 = x + 2 ⇔ y = $\pm\sqrt{x+2}$. Như vậy phân nửa trên và dưới của parabol là đồ thị của hàm số f(x) = $\sqrt{x+2}$ và g(x) = $-\sqrt{x+2}$ (Hình 14(b) và 14(c).



Hình 14(a) Hình 14(b) Hình 14(c)

Chú ý rằng nếu đảo ngược vai trò của x và y thì phương trình x = h(y) = y^2 – 2 xác định một hàm số x theo y với y là biến độc lập còn x là biến phụ thuộc.

HÀM SỐ GHÉP

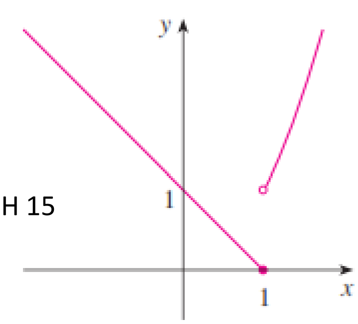
Bây giờ ta xét những hàm số xác định bằng nhiều công thức khác nhau trong những khoảng khác nhau của tập xác định.

VÍ DỤ 7 Cho hàm số định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & khi\ x \le 1 \\ x^2 & khi\ x > 1 \end{cases}$$

Tính f(0), f(1), f(2) và vẽ đồ thị của hàm số

HÌNH 15



GIẢI Nhớ hàm số là một qui luật. Qui luật này nói rằng trước hết hãy nhìn vào giá trị nhập vào x. Nếu x ≤ 1 thì giá trị của f(x) là 1 - x. Ngược lại nếu x > 1 thì giá trị của f(x) là x^2.

Vì 0 ≤ 1 nên f(0) = 1 - 0 = 1

Vì 1 ≤ 1 nên f(1) = 1 - 1 = 0

Vì 2 > 1 nên f(2) = 2^2 = 4

Đồ thị được vẽ như thế nào:

* Khi x ≤ 1 thì y = 1 - x nên đồ thị là phần của đường thẳng y = 1 - x và nằm ở bên trái đường thẳng đứng x = 1. Phần này

cắt trục tung tại điểm (0, 1) và kết thúc tại điểm (1, 0).

* Khi x > 1 thì $y = x^2$ nên đồ thị là phần của đường parabol $y = x^2$ và nằm ở bên phải đường thẳng đứng x = 1.

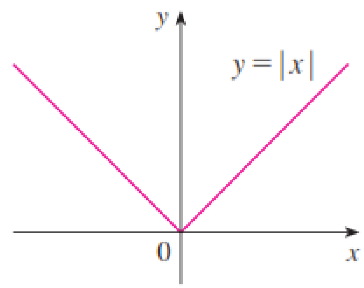
Chú ý chấm đặc đỏ cho biết điểm (1, 0) là điểm của đồ thị còn chấm rỗng đỏ cho biết điểm (1, 1) không phải là điểm của đồ thị.

Trong ví dụ sau ta đề cập đến hàm số chứa giá trị tuyệt đối. Nhớ rằng trị tuyệt đối của số a được định nghĩa như sau:

$$|a| = \begin{cases} a & khi\, a \geq 0 \\ -a & khi\, a < 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ 8 Vẽ đồ thị của hàm số f(x) = |x|.

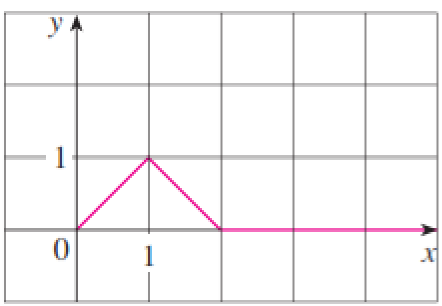
GIẢI Theo định nghĩa ta có: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & khi\, x \geq 0 \\ -x & khi\, x < 0 \end{cases}$



HÌNH 16

Dùng phương pháp như trong ví dụ 7, đồ thị của hàm số f trùng với đồ thị y = x ở bên phải trục tung và trùng với đồ thị hàm số y = - x ở bên trái trục tung (Hình 16).

VÍ DỤ 9 Tìm công thức của hàm số f có đồ thị trong hình dưới.



HÌNH 17

GIẢI Đường thẳng qua hai điểm (0, 0) và (1, 1) có hệ số góc m = 1 và tung độ góc b = 0 nên có phương trình y = x . Do đó, ứng với phần của đồ thị f nối hai điểm (0, 0) và (1, 1), ta có

$$f(x) = x \quad \text{với } 0 \leq x \leq 1$$

Phương trình đường thẳng có độ dốc (hệ số góc) m và qua điểm (x_o, y_o) có dạng $y - y_o = m(x - x_o)$. Do đó phương trình đường thẳng qua (1, 1) và (2, 0) có độ dốc – 1 là

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \quad \text{hay} \quad y = 2 - x$$

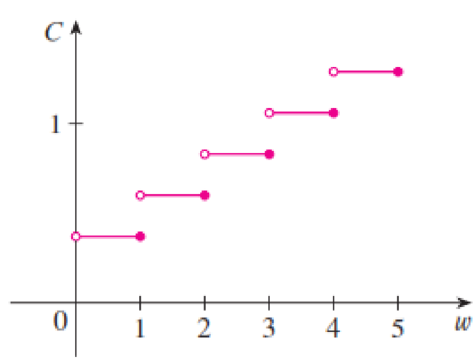
Vậy ta có $\quad f(x) = 2 - x \quad \text{khi } 1 < x \leq 2$

Ta cũng thấy là đồ thị của f trùng với trục hoành khi x > 2. Kết hợp những điều này, ta được công thức ghép của f như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x & khi\, 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & khi\, 1 < x \leq 2 \\ 0 & khi\, x > 2 \end{cases}$$

VÍ DỤ 10 Trở lại tình huống C trong đó ta có hàm số C(w) tính cước phí thư theo trọng lượng w của thư đã đề cập ở đầu bài. Đây thực sự là hàm số cho bởi nhiều công thức, dựa vào bảng giá trị, ta có:

$$C(w) = \begin{cases} 0.39 & khi\, 0 < w \leq 1 \\ 0.63 & khi\, 1 < w \leq 2 \\ 0.87 & khi\, 2 < w \leq 3 \\ 1.11 & khi\, 3 < w \leq 4 \\ . \\ . \\ . \end{cases}$$



HÌNH 18

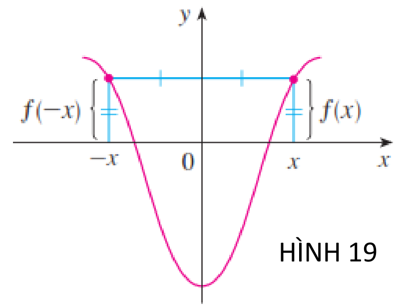
Đồ thị cho bởi hình 18. Bạn có thể hiểu tại sao những hàm số có đồ thị thuộc dạng này được gọi là **những hàm số bậc thang** - chúng nhảy từ giá trị này đến giá trị kia.

SỰ ĐỐI XỨNG

Nếu hàm số f thỏa $\boxed{f(-x) = f(x)}$ với mọi x thuộc tập xác định thì f được gọi là **hàm số chẵn**. Ví dụ hàm số $f(x) = x^2$ là hàm số chẵn vì

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Ý nghĩa hình học của hàm số chẵn là đồ thị của nó đối xứng qua trục Oy (hình 19). Do đó muốn vẽ đồ thị của hàm số chẵn, ta chỉ cần vẽ phần đồ thị ứng với $x \geq 0$, rồi lấy đối xứng của phần này qua Oy.

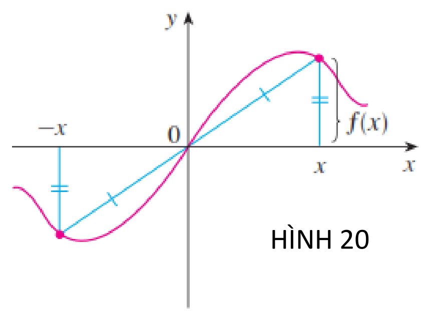


HÌNH 19

Nếu hàm số f thỏa $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ với mọi x thuộc tập xác định thì f được gọi là **hàm số lẻ**. Ví dụ hàm số $f(x) = x^3$ là hàm số lẻ vì

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Ý nghĩa hình học của hàm số lẻ là đồ thị của nó đối xứng qua điểm gốc O (hình 20). Do đó muốn vẽ đồ thị của hàm số lẻ, ta chỉ cần vẽ phần đồ thị ứng với $x \geq 0$, rồi quay phần này một góc 180^o quanh điểm gốc O.



HÌNH 20

VÍ DỤ 11 Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn, hàm số lẻ, hoặc không chẵn cũng không lẻ?

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = |x| - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

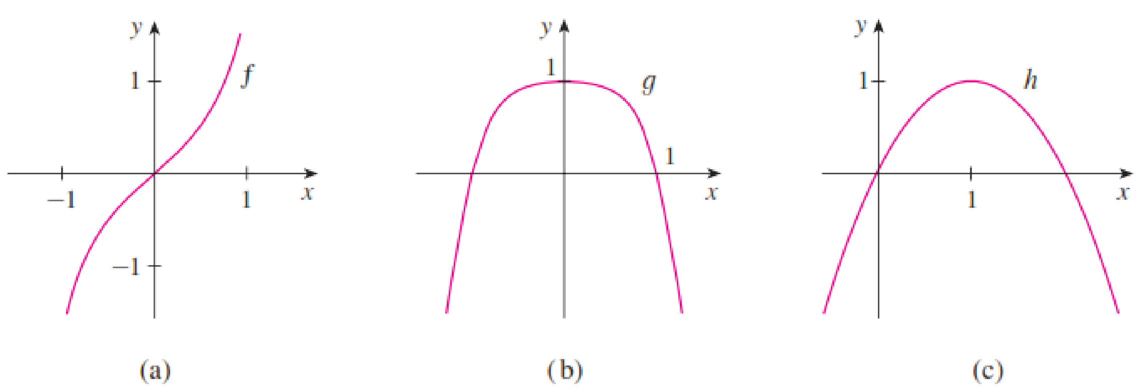
GIẢI

* (a) f là hàm số lẻ vì $f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -(x^5 + x) = -f(x)$, mọi x.

* (b) g là hàm số chẵn vì $g(-x) = |-x| - (-x)4 = |x| - x^4 = g(x)$, mọi x.

* (c) h không chẵn cũng không lẻ vì $h(-x) = 2(-x) - (-x)2 = -2x - x^2 \Rightarrow h(-x) \neq h(x)$ và $h(-x) \neq -h(x)$, chẳng hạn lấy x = 1 thì h(1) = 1 và h(-1) = -3. Ta kết luận h không chẵn cũng không lẻ.

Đồ thị các hàm số trong ví dụ cho bởi Hình 21. Chú ý là đồ thị hàm số h không đối xứng qua O cũng không đối xứng qua trục y.

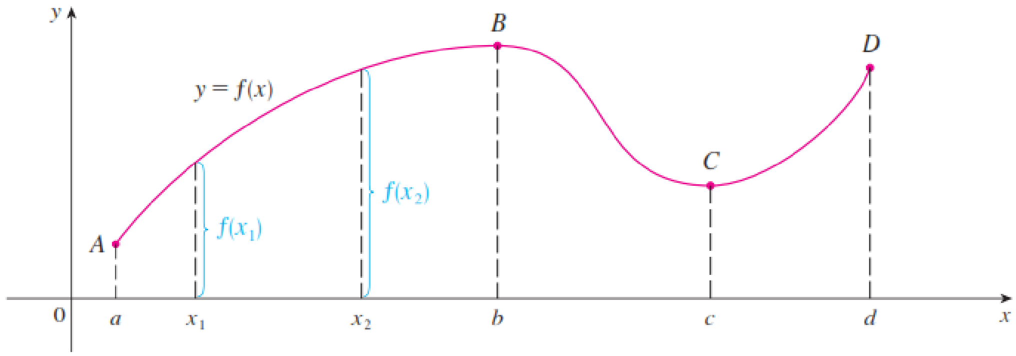


HÌNH 21

HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN

Trong hình 22 bên dưới, đồ thị đi lên từ A đến B, đi xuống từ B đến C, rồi lại đi lên từ C đến D. Ta nói hàm số đồng biến trên đoạn [a, b], nghịch biến trên đoạn [b, c] và lại đồng biến trên đoạn [c, d]. Chú ý là nếu x_1 và x_2 là hai số bất kỳ giữa a và b với $x_1 < x_2$, thế thì $f(x_1) < f(x_2)$. Ta sử dụng tính chất này để định nghĩa tính đồng biến của hàm số.

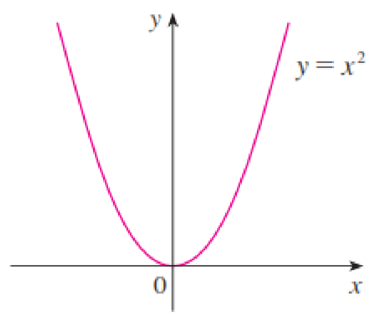
HÌNH 22



* Hàm số f gọi là **đồng biến** trên khoảng I nếu
$f(x_1) < f(x_2)$ với bất kỳ $x_1 < x_2$ trong I
* Hàm số f gọi là **nghịch biến** trên khoảng I nếu
$f(x_1) > f(x_2)$ với bất kỳ $x_1 < x_2$ trong I

Trong định nghĩa của hàm số đồng biến, nghịch biến, cần nhớ rằng bất đẳng thức $f(x_1) < f(x_2)$ phải thỏa với mọi cặp x_1, x_2 thuộc I sao cho $x_1 < x_2$.

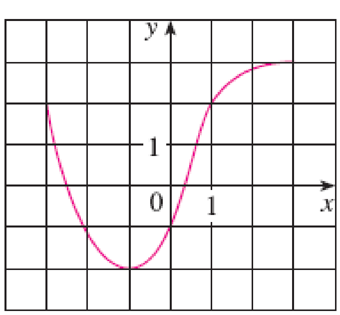
Trong hình dưới là đồ thị hàm số $y = x^2$, ta có thể thấy rằng hàm số nghịch biến trên (- oo, 0] và đồng biến trên [0, + oo).



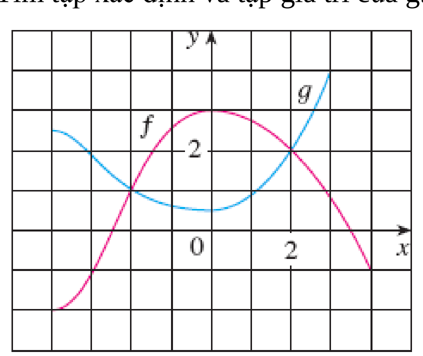
HÌNH 23

BÀI TẬP 1.1.

1. Đồ thị hàm số cho bởi hình dưới.
   (a) Tìm giá trị của f(- 1).
   (b) Ước tính giá trị của f(2).
   (c) Tìm x biết f(x) = 2.
   (d) Ước tính tri của x sao cho f(x) = 0.
   (e) Tìm tập xác định và tập giá trị của f.
   (f) Trên khoảng nào hàm số đồng biến?



2. Đồ thị hàm số f và g cho bởi hình dưới .
   (a) Tìm giá trị của f(- 4) và g(3).
   (b) Tìm x sao cho f(x) = g(x).
   (c) Ước tính nghiệm của phương trình f(x) = - 1.
   (d) Trên khoảng nào f nghịch biến?.
   (e) Tìm tập xác định và tập giá tri của f.
   (f) Tìm tập xác định và tập giá tri của g.

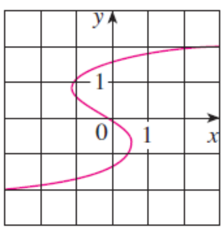


3. Hình 1 được vẽ bằng công cụ tại Phòng Mỏ và Địa Chất của Đại Học California. Hãy dùng đồ thị để tìm tập
giá trị của hàm số gia tốc dọc trong trận động đất đó.

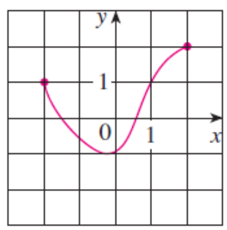
4. Trong bài này ta đã đề cập đến những ví dụ về những hàm số trong thực tế đời sống: Dân số là hàm số theo thời gian, cước phí bưu điện là hàm số theo trọng lượng thư, nhiệt độ nước là hàm số theo thời gian. Hãy cho 3 ví dụ khác trong thực tế trong đó hàm số được xác định bằng ngôn từ. Trong mỗi hàm số đó, bạn hãy cho biết tập xác định và tập giá trị của nó. Nếu có thể, hãy phác họa sơ đồ thị của chúng.

5-8 Những đường sau, đường nào là đồ thị hàm số? Nếu đúng, hãy cho biết tập xác định và tập giá trị của hàm số ấy.

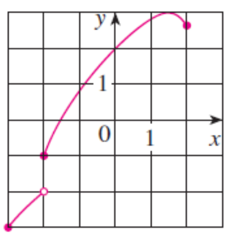
5.



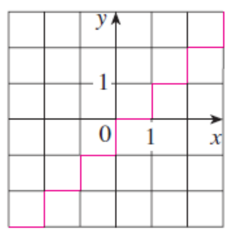
6.



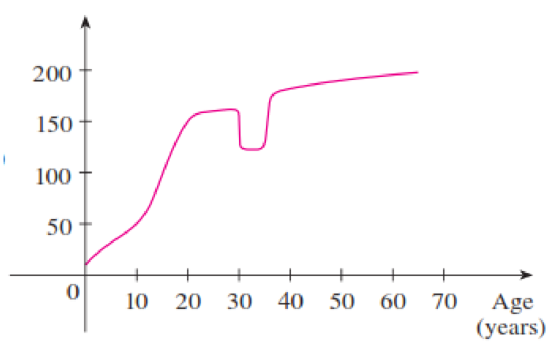
7.



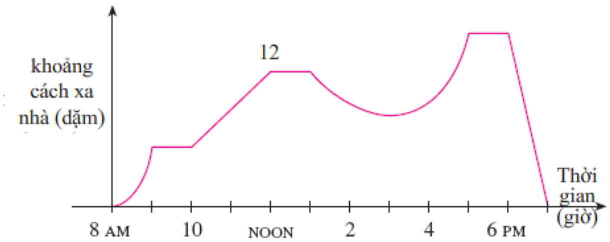
8.



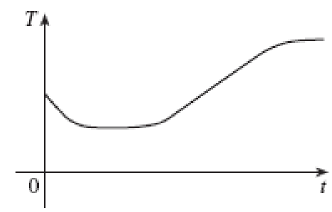
9. Đồ thị bên dưới cho biết thể trọng (theo cân Anh) của một người theo độ tuổi. Mô tả bằng lời cân nặng của người đó thay đổi ra sao theo tuổi tác. Theo bạn điều gì đã xảy ra khi y 30 tuổi.



10. Đồ thị dưới cho biết khoảng cách từ một người chào hàng đến nhà mình theo thời gian trong một ngày đi làm. Hãy mô tả bằng lời điều gì đồ thị đã cho biết về chuyến đi làm của y.



11. Cho vài cục nước đá vào ly rồi đổ đầy nước. Mô tả sự biến thiên của nhiệt độ của nước trong ly theo thời gian. Sau đó thử phác hoạ đồ thị của hàm số nhiệt độ theo thời gian.



12. Hãy vẽ phác đồ thị của hàm số cho biết số giờ ban ngày theo thời gian trong năm.

13. Hãy vẽ phác đồ thị hàm số cho biết nhiệt độ ngoài trời trong một ngày tiêu biểu trong mùa xuân.

14. Hãy vẽ phác đồ thị của hàm số cho biết giá thị trường của một ô tô kể từ lúc còn mới theo thời gian sử dụng kéo dài đến 20 năm. Giả thiết là ô tô được gìn giữ kỹ lưỡng.

15. Hãy vẽ phác đồ thị hàm số cho biết số lượng cà phê của một thương hiệu nào đó được bán ra tại một cửa hàng theo giá tiền của cà phê.

16. Bạn cho một ổ bánh đã được đông lạnh vào một lò nướng và nướng trong một giờ. Sau đó lấy ra để nguội trước khi ăn. Hãy mô tả cách nhiệt độ của bánh thay đổi theo thời gian. Sau đó phác họa đồ thị của hàm số nhiệt độ theo thời gian.

17. Một gia chủ cắt cỏ sân nhà mỗi chiều thứ tư hàng tuần. Hãy phác họa đồ thị của hàm số cho biết chiều cao của cỏ theo thời gian trong khoảng thời gian bốn tuần.

18. Một phi cơ cất cánh từ một phi trường để đáp xuống một phi trường khác cách đó 400 dặm sau một giờ bay. Gọi t là thời gian (phút) kể từ lúc phi cơ rời khỏi chỗ đậu, x(t) là khoảng cách ngang phi cơ đi được, và y(t) là cao độ của phi cơ.
(a) Phác họa đồ thị khả dĩ của x(t).
(b) Phác họa đồ thị khả dĩ của y(t).

(c) Phác họa đồ thị khả dĩ của tốc độ ngang.

(d) Phác họa đồ thị khả dĩ của tốc độ dọc.

19. Bảng dưới cho biết N, số người sử dụng mạng di động trên thế giới (đơn vị triệu) trong các năm .

(a) Dùng số liệu để phác hoạ đồ thị của hàm số N theo t.

(b) Dùng đồ thị để ước tính số người sử dụng di động trong những năm 1995 và 1999.

t	1990	1992	1994	1996	1998	2000
N	11	26	60	160	340	650

20. Nhiệt độ T (độ F) được ghi nhận mỗi hai giờ từ nửa đêm đến 2:00 PM ở Dallas vào ngày 2/6/2001. Thời gian t được tính bằng giờ kể từ lúc nửa đêm.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

(a) Dùng bảng số trên để phác họa đồ thị của hàm số T theo t.

(b) Dùng đồ thị này để ước tính nhiệt độ lúc 11:00 AM.

21. Nếu $f(x) = 3x^2 - x + 2$, tìm $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ và $f(a+h)$.

22. Quả bóng hình cầu bán kính r có thể tích là $V(r) = 4\pi r^3/3$. Tìm hàm số biểu thị lượng không khí cần thiết để bơm quả bóng từ bán kính r tăng đến bán kính r + 1.

23 - 26. Tính thương thức chỉ ra đối với các hàm số cho trước. Nhớ đơn giản biểu thức.

23. $f(x) = 4 + 3x - x^2$; $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$

24. $f(x) = x^3$; $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

25. $f(x) = 1/x$; $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

26. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

27 - 31. Tìm tập xác định các hàm số sau:

27. $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$

28. $f(x) = \dfrac{5x+4}{x^2+3x+2}$

29. $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$

30. $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4-u}$

31. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-5x}}$

32. Tìm tập xác định và tập giá trị và vẽ đồ thị của hàm số $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

33 - 44. Tìm tập xác định và vẽ đồ thị của hàm số:

33. $f(x) = 5$

34. $F(x) = ½ (x + 3)$

35. $f(t) = t^2 - 6t$

36. $H(t) = \dfrac{4-t^2}{2-t}$

37. $g(x) = \sqrt{x-5}$

38. $F(x) = |2x + 1|$

39. $G(x) = \dfrac{3x+|x|}{x}$

40. $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

41. $f(x) = \begin{cases} x+2 & khi\ x<0 \\ 1-x & khi\ x\ge 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 3-\dfrac{1}{2}x & khi\ x\le 2 \\ 2x-5 & khi\ x>0 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x+2 & khi\ x\le -1 \\ x^2 & khi\ x>-1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x+9 & khi\ x<-3 \\ -2x & khi\ |x|\le 3 \\ -6 & khi\ x>3 \end{cases}$

45 – 50. Xác định hàm số có đồ thị là đường cho trước.

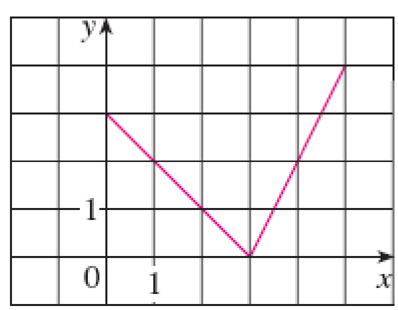
45. Đoạn thẳng nối hai điểm (1, - 3), (5, 7).

46. Đoạn thẳng nối hai điểm (- 5, 10), (7, - 10).

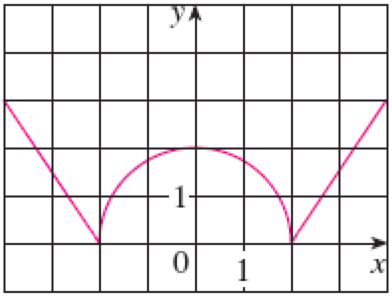
47. Phân nửa dưới của parabol $x + (y - 1)^2 = 0$.

48. Phân nửa trên của đường tròn $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

49.



50.



51 - 55. Tìm công thức cho các hàm số được mô tả như dưới đây và cho biết tập xác định của chúng:

51. Hình chữ nhật có chu vi 20m. Biểu diễn diện tích của nó theo độ dài của một cạnh.

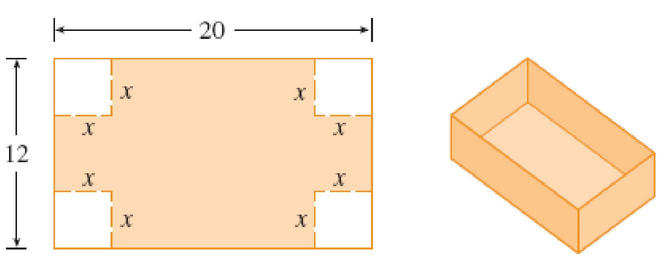
52. Hình chữ nhật có diện tích $16m^2$. Biểu diễn chu vi của nó theo đô dài của một cạnh.

53. Biểu diễn diện tích của hình lập phương theo thể tích của nó.

55. Một hộp hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $2m^3$ có đáy là hình vuông. Biểu diễn diện tích của hộp theo độ dài cạnh đáy.

56. Khung cửa sổ Norman có hình chữ nhật chồng lên một nửa hình tròn. Nếu chu vi cửa sổ là 30 ft, biểu diễn diện tích A của khung cửa theo chiều rộng x của khung cửa.

57. Một hộp giấy hình hộp chữ nhật không nắp làm từ một giấy bìa hình chữ nhật kích thước 20 x 12 (in) bằng cách cắt ra 4 hình vuông bằng nhau có cạnh bằng x ở bốn góc, rồi gấp lên (xem hình). Biểu diễn thể tích hộp theo x.



58. Một công ty taxi tính cước như sau: đối với đoạn đường 1 dặm (hay ít hơn) đầu tiên tính 2 đôla, với mỗi 1/10 dặm (hoặc ít hơn) tiếp theo tính thêm 20 xu. Biểu diễn cước phí C (đôla) theo độ dài đường đi x (dặm) với $0 < x < 2$ và vẽ đồ thị hàm số này.

59. Định mức thuế thu nhập của một quốc gia được tính như sau.

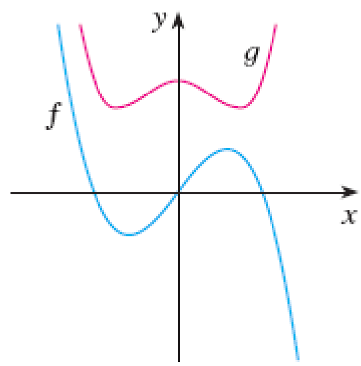
* Nếu thu nhập không quá 10,000 $ thì khỏi đóng thuế.
* Với phần thu nhập từ 10,000$ trở lên đến 20,000$, mức thuế là 10%.
* Với phần thu nhập từ 20,000$ trở lên, mức thuế là 15%.

(a) Vẽ đồ thị của tỉ suất thuế R theo thu nhập I.
(b) Tính tiền thuế khi thu nhập là 14,000$, 26,000$.
(c) Vẽ đồ thị tiền thuế phải đóng T theo thu nhập I.

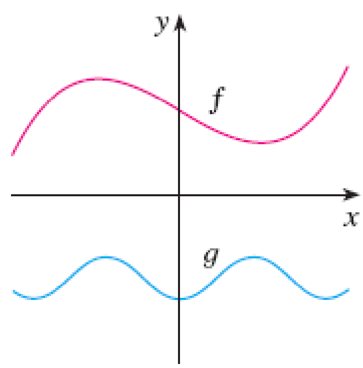
60. Các hàm số của bài 58 và 59(a) là các hàm số bậc thang. Hãy cho thêm hai ví dụ về *các hàm số bậc thang* trong đời sống thực tế.

61 - 62. Cho các đồ thị f và g, đồ thị nào chẵn, lẻ hay không chẵn cũng không lẻ. Giải thích.

61.



62.



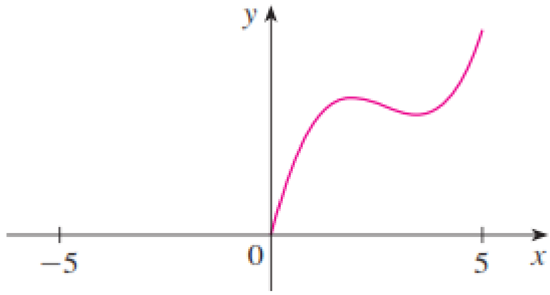
63. (a) Nếu điểm (5, 3) thuộc đồ thị một hàm số chẵn, thì điểm nào khác cũng phải thuộc đồ thị ấy?

(b) Nếu điểm (5, 3) thuộc đồ thị một hàm số lẻ, thì điểm nào khác cũng phải thuộc đồ thị ấy?

64. Một hàm số f có tập xác định là [-5, 5] và một phần đồ thị của nó được vẽ như hình dưới.

(a) Hãy hoàn tất đồ thị biết f là hàm số chẵn.

(b) Hãy hoàn tất đồ thị biết f là hàm số lẻ.



65-70. Xét tính chẵn, lẻ hay không chẵn cũng không lẻ.

65. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **66.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

67. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ **68.** $f(x) = x|x|$

69. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$ **70.** $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

ĐÁP SỐ (những bài tập đánh số lẻ)

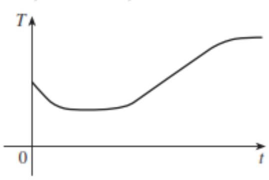
1. (a) -2 (b) 2.8 (c) $-3, 1$ (d) $-2.5, 0.3$
(e) $[-3, 3], [-2, 3]$ (f) $[-1, 3]$

3. $[-85, 115]$ **5.** No

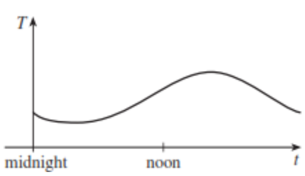
7. Yes, $[-3, 2], [-3, -2) \cup [-1, 3]$

9. Diet, exercise, or illness

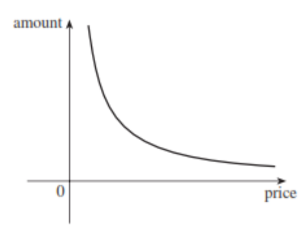
11.



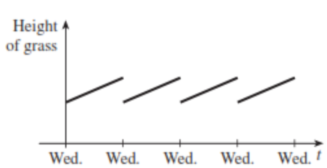
13.



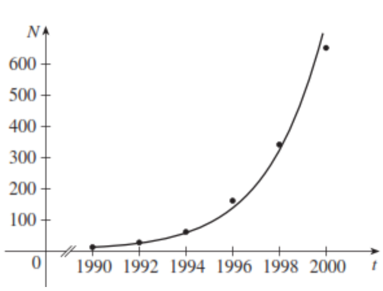
15.



17.



19. (a)



(b) In millions: 92; 485

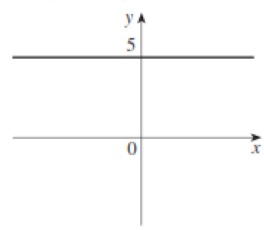
21. $12, 16, 3a^2 - a + 2, 3a^2 + a + 2, 3a^2 + 5a + 4,$
$6a^2 - 2a + 4, 12a^2 - 2a + 2, 3a^4 - a^2 + 2,$
$9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4, 3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$

23. $-3 - h$ **25.** $-1/(ax)$

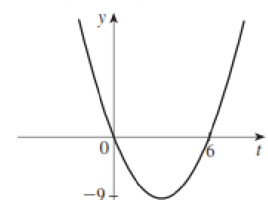
27. $\{x \mid x \neq \frac{1}{3}\} = (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

29. $[0, \infty)$ **31.** $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

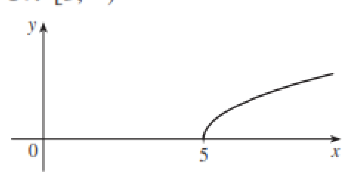
33. $(-\infty, \infty)$



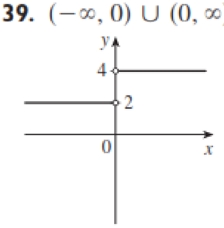
35. $(-\infty, \infty)$



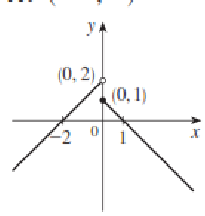
37. $[5, \infty)$



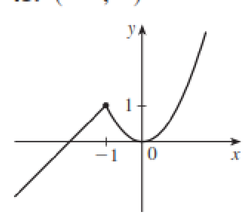
39. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



41. $(-\infty, \infty)$



43. $(-\infty, \infty)$



45. $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}, 1 \leqslant x \leqslant 5$ **47.** $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$

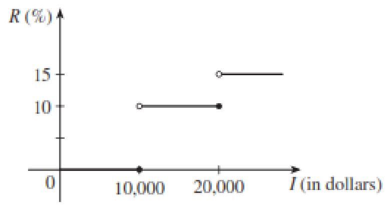
49. $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x - 6 & \text{if } 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$

51. $A(L) = 10L - L^2, 0 < L < 10$

53. $A(x) = \sqrt{3}x^2/4, x > 0$ **55.** $S(x) = x^2 + (8/x), x > 0$

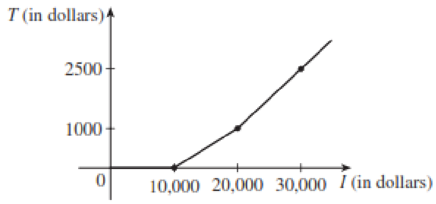
57. $V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x, 0 < x < 6$

59. (a)



(b) \$400, \$1900

(c)



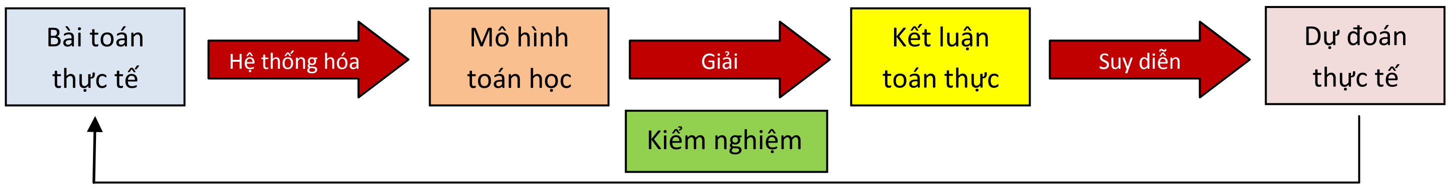
61. f is odd, g is even

63. (a) $(-5, 3)$ (b) $(-5, -3)$

65. Odd **67.** Neither **69.** Even

BÀI 1. 2. CÁC MÔ HÌNH TOÁN HỌC: BẢNG CÁC HÀM SỐ CƠ BẢN

Một mô hình toán học là một cách biểu diễn toán học (thường bằng một hàm số hoặc một phương trình) về một hiện tượng trong thế giới thực như dân số, số cầu của một sản phẩm, tốc độ rơi của một vật, độ kết tủa của một sản phẩm trong một phản ứng hóa học, tuổi thọ dự đoán của một người ngay khi sinh ra, hay chi phí xử lý chất thải. Mục đích của mô hình là tìm hiểu hiện tượng và có thể là giúp dự đoán về sự cố trong tương lai.



HÌNH 1

Hình 1 minh họa tiến trình mô hình hóa toán học. Cho trước một bài toán thực tế, nhiệm vụ của chúng ta là hệ thống hóa nó thành một mô hình toán học bằng nhận diện đâu là biến độc lập, đâu là biến phụ thuộc và đưa ra những giả định để làm sao có thể đơn giản hóa hiện tượng đến mực có thể xử lý nó bằng toán học. Chúng ta sử dụng kiến thức của mình về hiện trạng vật lý và kỹ năng toán học để thiết lập những phương trình liên quan đến những biến số. Trong những tình thế không tìm được những qui luật vật lý chỉ dẫn, chúng ta có thể thu thập dữ liệu (từ thư viện hay từ mạng Internet hay bằng cách tiến hành các thử nghiệm của riêng mình) và nghiên cứu những dữ liệu ấy dưới dạng bảng số nhờ đó có thể nhận diện những mô thức. Từ cách biểu thị hàm số này ta có thể tìm được đồ thị bằng cách biểu diễn các dữ liệu bằng biểu đồ phân tán. Trong một số trường hợp, đồ thị tìm được có thể gợi ý một công thức đại số thích hợp.

MÔ HÌNH TUYẾN TÍNH

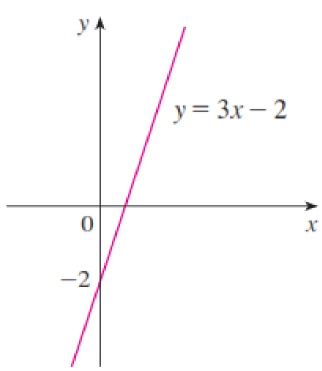
Khi ta nói rằng y là **hàm số tuyến tính** theo x, ta muốn nói là đồ thị hàm số ấy là một đường thẳng, do đó ta có thể dùng phương trình dạng độ dốc-tung độ gốc của đường thẳng thẳng để viết công thức cho hàm số ấy là

$$y = f(x) = mx + b$$

trong đó m là độ dốc (hệ số góc) và b là tung độ gốc.

Một đặc điểm của hàm số tuyến tính là chúng biến thiên với tốc độ không đổi. Chẳng hạn, Hình 2 cho thấy đồ thị của hàm số tuyến tính $f(x) = 3x – 2$ và một bảng những giá trị mẫu. Chú ý là hể khi nào x tăng lên 0.1, giá trị của f(x) tăng lên 0.3. Nghĩa là f(x) tăng nhanh gấp ba lần x. Do đó độ dốc của đồ thị $y = 3x – 2$, cụ thể là 3, có thể được giải thích như là tốc độ biến thiên của y đối với x.

HÌNH 2



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

VÍ DỤ 1

(a) Khi không khí khô bay lên, nó giản nở và mát lên. Nếu nhiệt độ mặt đất lá 20°C và nhiệt độ tại cao độ 1 km là 10°C, hãy biểu diễn nhiệt độ T (tính theo °C) như là hàm số theo độ cao h (tính theo km), giả định là ở đây ta có mô hình tuyến tính.

(b) Vẽ đồ thị của hàm số ở phần (a). Độ dốc biểu thị điều gì?

(c) Tìm nhiệt độ tại cao độ 2.5 km.

GIẢI

(a) Vì ta giả định T là hàm số tuyến tính theo h, nên ta có

$$T = mh + b$$

Ta có T = 20 khi h = 0, nên

$$20 = m \,.\, 0 + b = b$$

Nói cách khác, tung độ góc là b = 20.

Ta cũng có T = 10 khi h = 1, nên

$$10 = m \,.\, 1 + 20$$

Độ dốc của đường thẳng do đó là m = 10 – 20 = - 10 và hàm số tuyến tính cần tìm là

$$T = -10h + 20$$

(b) Đồ thị cho bởi Hình 3. Độ dốc m = - 10°C/km biểu thị tốc độ biến thiên của nhiệt độ đối với độ cao.

(c) Tại cao độ h = 2.5 km, nhiệt độ là

$$T = -10(2.5) + 20 = -5^{o}C$$

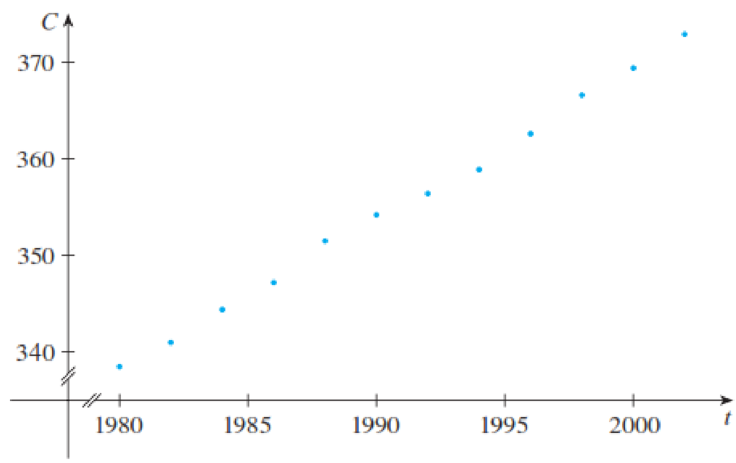
Nếu không có nguyên lý hay quy luật vật lý giúp chúng ta hệ thống hóa một mô hình, ta có thể tiến hành một **mô hình thực nghiệm**, dựa hoàn toàn vào dữ liệu thu thập được. Sau đó ta tìm một đường cong “khớp” với các dữ liệu theo nghĩa là đường đó phải nắm bắt được khuynh hướng cơ bản của điểm dữ liệu.

VÍ DỤ 2 Bảng 1 liệt kê mức carbon dioxide (CO_2) trung bình trong không khí, đơn vị ppm tại Viện Quan Sát Mauna Loa từ năm 1980 đến 2002. Dùng dữ liệu trong Bảng 1 để tìm một mô hình cho mức carbon dioxide.

GIẢI Ta dùng Bảng 1 để vẽ những điểm trong đó t là thời gian (tính bằng năm) và C chỉ mức CO_2 (tính bằng ppm).

BẢNG 1

Year	CO_2 level (in ppm)	Year	CO_2 level (in ppm)
1980	338.7	1992	356.4
1982	341.1	1994	358.9
1984	344.4	1996	362.6
1986	347.2	1998	366.6
1988	351.5	2000	369.4
1990	354.2	2002	372.9



HÌNH 4

Nhận xét rằng những điểm dữ liệu gần như thẳng hàng, do đó thật là tự nhiên nếu ta chọn mô hình tuyến tính trong trường hợp này. Nhưng có nhiều đường thẳng xấp xỉ những điểm dữ liệu này, ta biết chọn đường nào? Theo hình, ta nhận thấy có thể chọn đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của điểm dữ liệu. Độ dốc của đường này là

$$\frac{372.9 - 338.7}{2002 - 1980} = \frac{34.2}{22} \approx 1.5545$$

và phương trình nó là

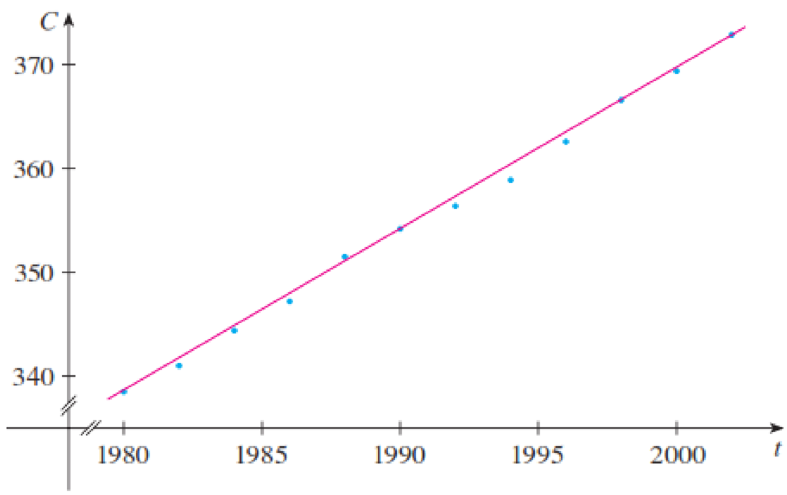
$$C - 338.7 = 1.5545(t - 1980)$$

Hay

(1) $$C = 1.5545t - 2739.21$$

Phương trình 1 cho ta một mô hình tuyến tính khả dĩ đối với mức cacbonic; và đồ thị được vẽ trong Hình 5.

HÌNH 5



Mặc dù mô hình chúng ta khớp với dữ liệu khá tốt, nó vẫn cho những mức cacbonic phần lớn cao hơn là trong thực tế. Một hình tuyến tính tốt hơn có thể tìm được bằng phương pháp thống kê gọi là *phép hồi quy tuyến tính*. Nếu sử dụng máy tính, sau khi nhập các dữ liệu của Bảng 1 và chọn lệnh hồi quy tuyến tính, máy sẽ cho ta độ dốc và tung độ gốc của đường này như sau

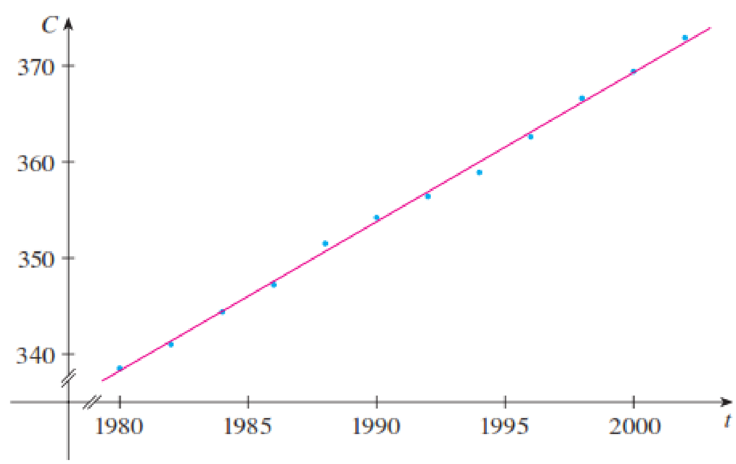
$$M = 1.55192 \qquad b = -2734.55$$

Như vậy mô hình tốt hơn là đường có phương trình

(2) $$C = 1.55192t - 2734.55$$

Trong Hình 6, ta vẽ đường hồi quy cũng như các điểm dữ liệu. So sánh với Hình 5, ta thấy nó ăn khớp hơn là mô hình tuyến tính ta chọn trước đây.

HÌNH 6



VÍ DỤ 3 Dùng mô hình tuyến tính cho bởi phương trình 2 để ước tính mức độ cacbonic trong năm 1987 và du875 đoán mức độ trong năm 2010. Theo mô hình này, khi nào mức CO_2 vượt quá 400 ppm?

GIẢI Dùng phương trình 2 với t = 1987, ta ước tính mức CO_2 trong năm 1987 là

$$C(1987) = (1.55192)(1987) - 2734.55 \approx 349.12$$

Đây là một ví dụ về *phép nội suy* vì ta đã ước tính một giá trị *giữa* các giá trị thu thập được. (Thật ra, Viện Quan Sát Mauna Loa đã thông báo là mức CO_2 trung bình trong năm 1987 là 348.93 ppm, như vậy ước tính của ta khá chính xác.)

Với t = 2010, ta được

$$C(2010) = (1.55192)(2010) - 2734.55 \approx 384.81$$

Vậy ta dự đoán là mức CO_2 trung bình trong năm 2010 sẽ là 384.8 ppm. Đây là ví dụ về *phép ngoại suy* vì ta đã dự đoán một giá trị *ở ngoài* vùng khảo sát. Hậu quả là chúng ta ít chắc chắn hơn về độ chính xác của dự đoán.

Dùng phương trình 2, ta thấy rằng mức CO_2 vượt quá 400 ppm khi

$$1.55192t - 2734.55 > 400$$

Giải bất phương trình này, ta được

$$t > \frac{3134.55}{1.55192} \approx 2019.79$$

Vậy ta dự đoán rằng mức CO_2 sẽ vượt quá 400 ppm vào năm 2019. Dự đoán này phần nào rủi ro vì thời điểm này quá xa so với khảo sát của chúng ta.

ĐA THỨC

Một hàm số P được gọi là **đa thức** nếu

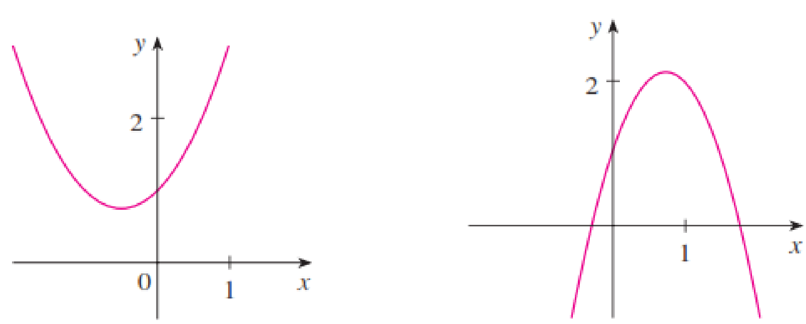
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

trong đó n là số nguyên không âm và các số $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những hằng số, gọi là **hệ số** của đa thức. Tập xác định của bất kỳ đa thức nào cũng là R = (- oo, oo). Nếu hệ số đầu $a_n \neq 0$, thì **bậc** của đa thức là n. Ví dụ, hàm số

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + {}^2/_5 x^3 + \sqrt{2}$$

là đa thức bậc 6.

Đa thức bậc 1 có dạng P(x) = mx + b và đó là hàm số tuyến tính. Một đa thức bậc 2 có dạng $P(x) = ax^2 + bx + c$ và được gọi là **hàm bậc hai.** Đồ thị luôn là một parabol, có được bằng cách dời tịnh tiến parabol $y = ax^2$, như ta sẽ thấy trong bài sau. Parabol có bề lõm quay xuống dưới nếu a > 0 và có bề lõm quay lên trên nếu a < 0. (Xem Hình 7.)



(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

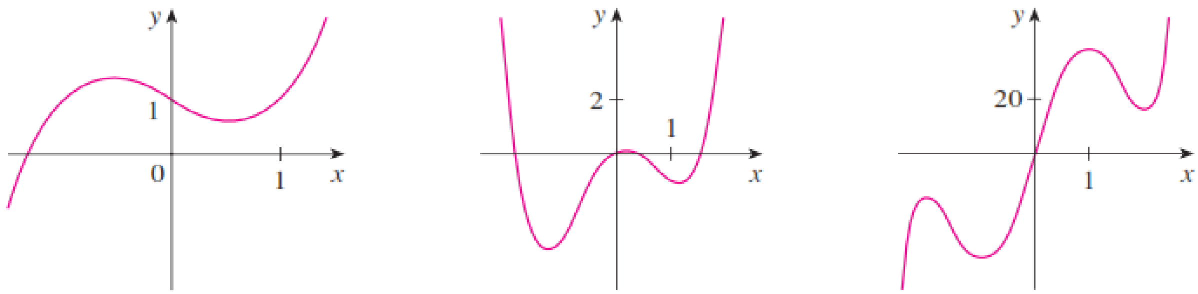
HÌNH 7

Một đa thức bậc 3 có dạng

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

Hình 8 cho thấy đồ thị của hàm bậc 3 trong phần (a) và đồ thị của đa thức bậc 4 và 5 trong phần (b) và (c). Sau này ta sẽ biết tại sao đồ thị có hình dạng như thế.

HÌNH 8



(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Đa thức thường được sử dụng để mô hình hóa những đại lượng khác nhau xảy ra trong các môn khoa học tự nhiên và xã hội. Chẳng hạn, trong bài 3.7 ta sẽ giải thích tại sao những nhà kinh tế thường dùng đa thức P(x) để biểu diễn chi phí sản xuất x đơn vị hàng hóa. Trong ví dụ sau ta dùng hàm số bậc hai để mô hinh hóa chuyển động rơi của một quả bóng.

VÍ DỤ 4 Một quả bóng được thả rơi từ tầng trên của Tháp CN cách mặt đất 450 m. Độ cao của quả bóng được ghi nhận sau mỗi giây, cho bởi Bảng 2. Tìm mô hình khớp với dữ liệu và sử dụng mô hình này để dự đoán thời điểm quả bóng chạm đất.

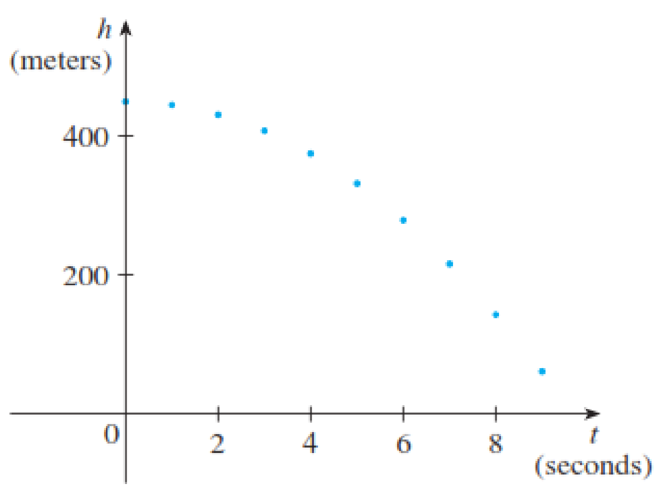
Time (seconds)	Height (meters)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

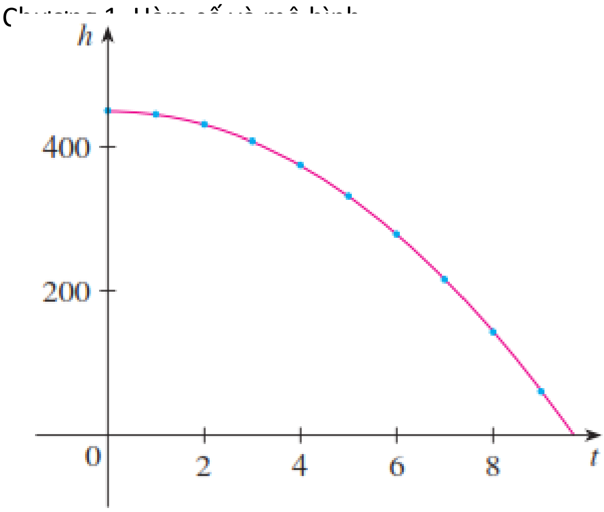
BẢNG 2

GIẢI Ta vẽ biểu đồ phân tán của dữ liệu trong bảng như Hình 9. Các điểm dữ liệu có vẻ như nằm trên một parabol, do đó ta thử chọn mô hình bậc hai cho chúng. Dùng máy tính ta được mô hình bậc hai sau:

(3) $$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2$$

HÌNH 9





HÌNH 10

Trong Hình 10 ta vẽ đồ thị của phương trình 3 và thấy rằng mô hình bậc hai ăn khớp tuyệt vời với những điểm dữ liệu đã thu thập.

Quả bóng chạm mặt đất khi h = 0, ta có phương trình bậc hai

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

Giải ra, ta được

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

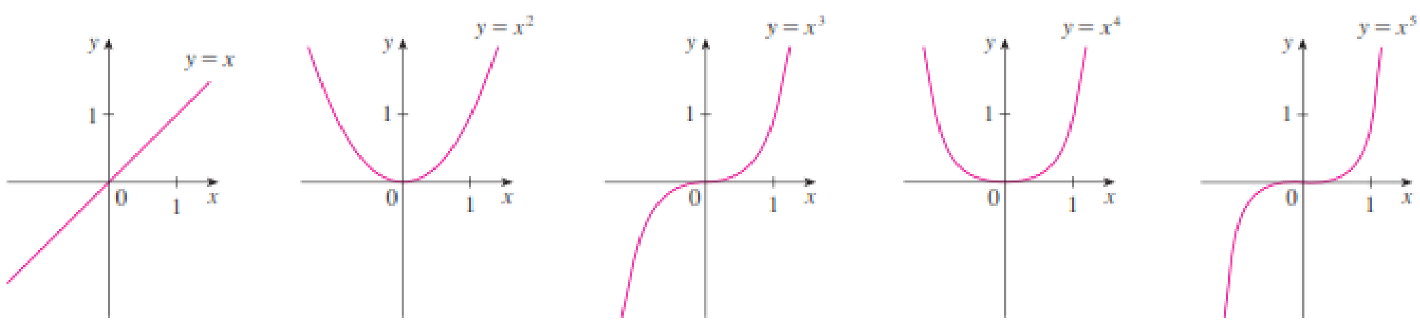
Nghiệm dương là **t** ≈ 9.67, nên ta dự đoán quả bóng sẽ chạm đất sau khoảng 9.7 giây.

HÀM SỐ LŨY THỪA

Một hàm số có dạng $f(x) = x^a$, trong đó a là hằng số, được gọi là **hàm số lũy thừa.** Ta sẽ xét vài trường hợp .

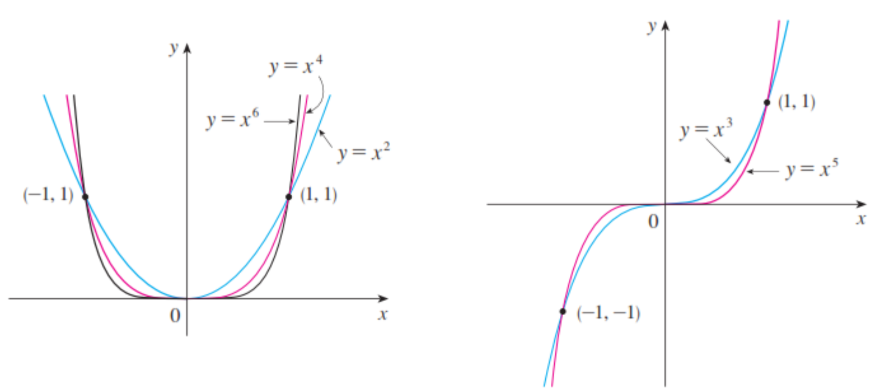
(i) a = n, trong đó n là số nguyên dương

Đồ thị của $f(x) = x^n$ với n = 1, 2, 3, 4, và 5 được trình bày trong Hình 11. (Đây là những đa thức chỉ có một số hạng.) Ta đã biết đồ thị của y = x là đường thẳng qua gốc toạ độ và có độ dốc là 1 và của $y = x^2$ là một parabol.



HÌNH 11

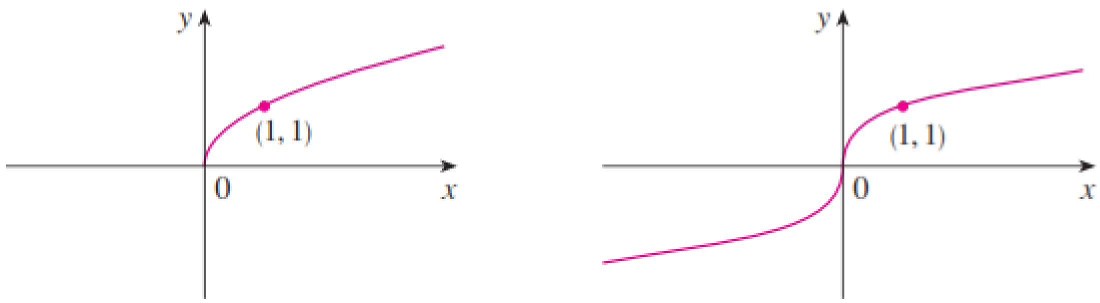
Dạng tổng quát của đồ thị $f(x) = x^n$ phụ thuộc vào n chẵn hay lẻ. Nếu n chẵn, thế thì $f(x) = x^n$ là hàm số chẵn và đồ thị của nó tương tự như parabol $y = x^2$. Nếu n lẻ, thế thì $f(x) = x^n$ là hàm số lẻ và đồ thị của nó tương tự với đồ thị $y = x^3$. Nhưng cần nhận xét, như trong Hình 12, là khi n tăng lên, đồ thị $y = x^n$ trở nên dẹt hơn khi gần 0 và dốc hơn khi $|x| \geq 1$. (Nếu x nhỏ, x^2 càng nhỏ hơn, x^3 lại nhỏ hơn nữa, x^4 còn nhỏ hơn, và cứ thế.)



HÌNH 12

(ii) a = 1/n, trong đó n là số nguyên dương

Hàm số f(x) = $x^{1/n}$ = $\sqrt[n]{x}$ là **hàm số vô tỷ**. Với n = 2, ta có hàm số y = $\sqrt{x}$, có tập xác định là [0,oo) và có đồ thị là phần trên của parabol x = y^2 . (Hình 13(a).] Với những giá trị chẵn khác của n, đồ thị y = $\sqrt[n]{x}$ tương tự với đồ thị y = $\sqrt{x}$. Với n = 3, ta có hàm số f(x) = $\sqrt[3]{x}$, có tập xác định là R và có đồ thị như Hình 13(b). Với n lẻ (n >3) đồ thị y = $\sqrt[n]{x}$ tương tự với đồ thị của y = $\sqrt[3]{x}$.



(a) $f(x)=\sqrt{x}$ (b) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

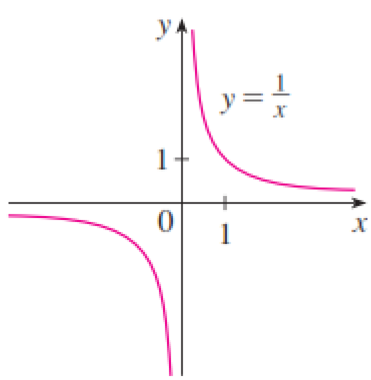
HÌNH 13

(iii) a = - 1

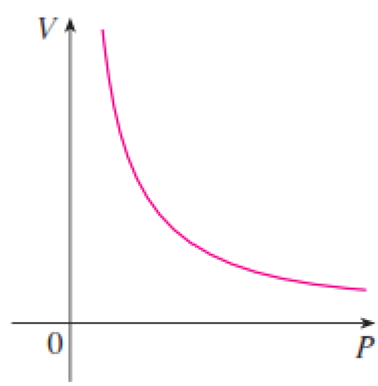
Đồ thị của **hàm số nghịch đảo** f(x) = x^{-1} = 1/x được cho trong Hình 14. Đồ thị của nó có phương trình xy = 1, nên là một hyperbol mà các trục toạ độ là đường tiệm cận. Hàm số này xuất hiện trong lý và hóa liên quan đến Định luật Boyle, nói rằng, khi nhiệt độ không đổi, thì thể tích V của một chất khí tỷ lệ nghịch với áp suất P:

$$V = \frac{C}{P}$$

trong đó C là hằng số. Do đó đồ thị của V xét n hư một hàm số theo P (xem Hình 15) có cùng dạng tổng quát như phần nửa bên phải của Hình 14.



HÌNH 14



HÌNH 15

Một tình huống khá.c trong đó hàm số lũy thừa được sử dụng để mô hình hóa một hiện tượng vật lý sẽ được xét đến trong Bài tập 26

HÀM SỐ HỮU TỶ

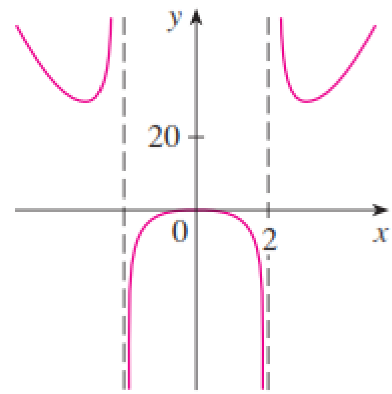
Hàm số hữu tỷ f là thương thức với tử và mẫu là hai đa thức:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Trong đó P và Q là những đa thức. Tập xác định là tập hợp những giá trị của x sao cho Q(x) ≠ 0. **Một ví dụ đơn gai3n của hàm số hữu tỷ là hàm số f(x) = 1/x, có tập xác định là {x|x≠ 0}; đây là hàm số nghịch đảo đã vẽ trong Hình 14. Hàm số**

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Là hàm số hữu tỷ có tập xác định là {x|x ≠ ±2}. Đồ thị cho bởi Hình 16.



HÌNH 16

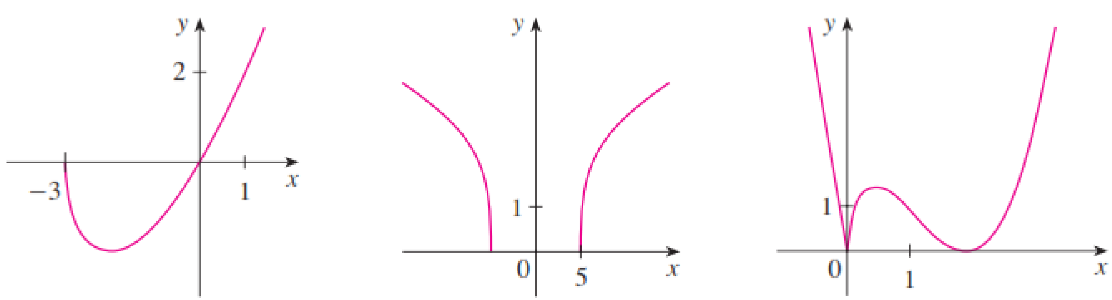
HÀM SỐ ĐẠI SỐ

Một hàm số f gọi là hàm số đại số nếu nó tạo ra từ những đa thức nối kết bằng các phép tính đại số (như công, trừ, nhân, chia và rút căn). Bất kỳ hàm số hữu tỷ nào cũng tự động là hàm số đại số. Sau đây là thêm vài ví dụ về loại hàm số này.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x-2)\sqrt[3]{x+1}$$

Khi ta vẽ đồ thị những hàm số đại số ở Chương 4, ta sẽ nhận ra rằng đồ thị của chúng rất đa dạng. Hình 17 cho tamột số đồ thị như thế.

HÌNH 17



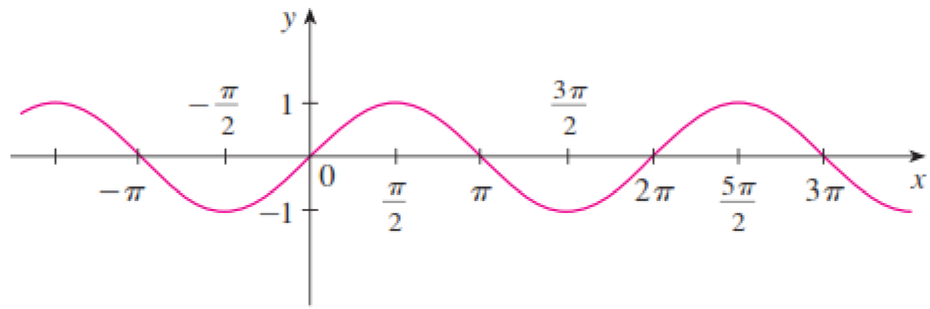
(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

Một ví dụ về hàm số đại số xuất hiện trong thuyết tương đối. Khối lượng của một chất điểm di chuyển với tốc độ v là

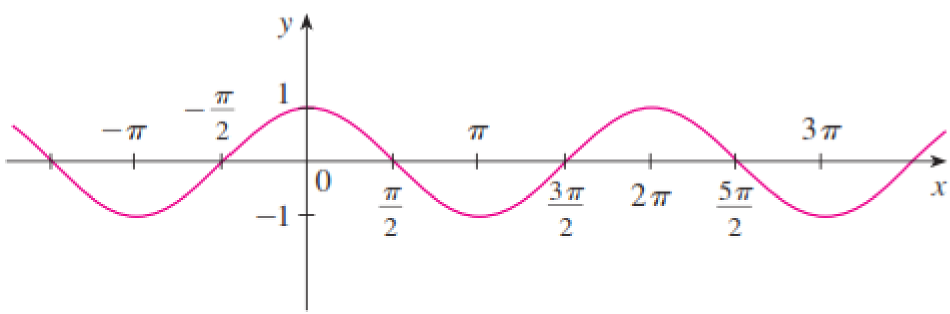
$$m = f(v) = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

trong đó m_o là khối lượng lúc đứng yên của chất điểm và c = 3.0 x 10^5 km/s là tốc độ của ánh sáng trong chân không.

Trong giải tích ta luôn quy ước đơn vị dùng để đo góc là radian (trừ khi được nói khác đi). Chẳng hạn, khi ta đề cập đến hàm số f(x) = sin x, có nghĩa là sin của một góc có số đo radian là x. Đồ thị của hàm số sin x, cos x được biểu diễn trong Hình 18 bên dưới.



(a) $f(x) = \sin x$



(b) $g(x) = \cos x$

HÌNH 18

Nhận xét rằng hai hàm số này có tập xác định là R và tập giá trị là đoạn [-1, 1]. Như vậy, với mỗi giá trị x, ta có

$$\boxed{-1 \le \sin x \le 1 \qquad -1 \le \cos x \le 1}$$

hay

$$|\sin x| \le 1 \qquad |\cos x| \le 1$$

Zero của hàm số sin x xảy ra tại những bội số nguyên của π, nghĩa là

$$\sin x = 0 \quad \text{khi} \quad x = n\pi, \text{ n số nguyên}$$

Một tính chất quan trọng của hàm số sin và cosin là chúng có tính tuần hoàn với chu kỳ là 2π. Điều này có nghĩa là , với mọi x,

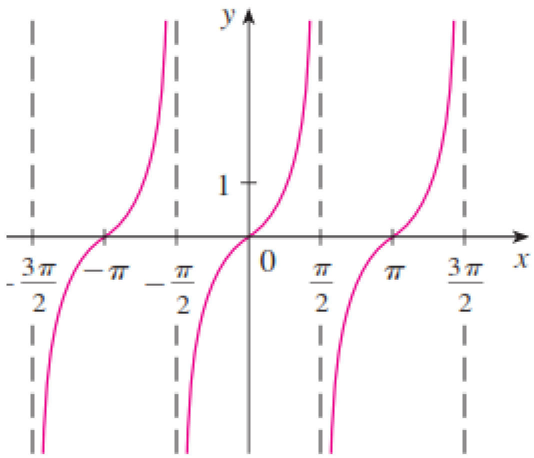
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Tính tuần hoàn của những hàm số này khiến chúng thích hợp làm mô hình của những hiện tượng lặp đi lặp lại, như thủy triều, dao động lò xo, và sóng âm. Chẳng hạn, trong Ví dụ 4 của Bài 1.3 ta sẽ gặp một mô hình hợp lý về số giờ ban ngày ở Philadelphia vào t ngày sau tháng 1 được cho bằng hàm số

$$L(t) = 12 + 2.8\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]$$

Hàm số tan được định nghĩa từ hàm số sin và cosin như sau:

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, có đồ thị được cho trong Hình 19.



Hàm số tan x không xác định khi cosx = 0, tức khi x = $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, . . .
Tập giá trị là (- ∞, ∞). Chú ý là hàm số tan có chu kỳ là π, tức là:

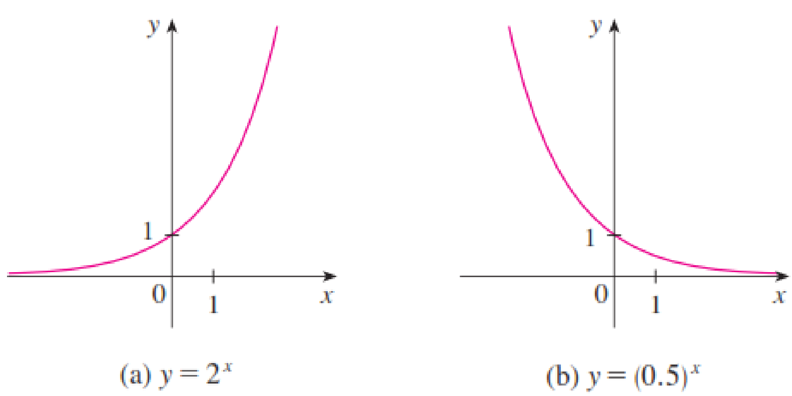
$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{với mọi } x$$

Ba hàm số lượng giác còn lại (cosec, sec, và cot) là những nghịch đảo của sin, cosin và tan.

HÌNH 19

HÀM SỐ MŨ

Hàm số mũ là những hàm số có dạng f(x) = a^x , trong đó cơ số a là một hằng số dương. Đồ thị của hàm số y = 2^x và y = $(0.5)^x$ được cho trong Hỉnh 20.

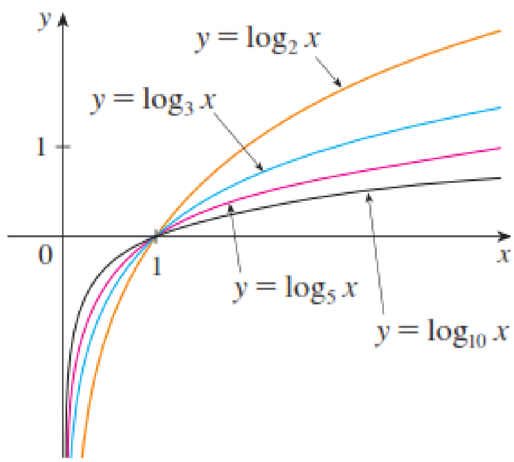


HÌNH 20

Hàm số mũ sẽ được khảo sát tường tận trong Bài 1.5, và ta sẽ thấy chúng rất hữu ích cho việc mô hình hóa nhiều hiện tượng tự nhiên, như là độ tăng dân số (nếu a > 1) và sự phân rã phóng xạ (nếu a < 1).

HÀM SỐ LOGARIT

Hàm số logarit f(x) = $\log_a(x)$, trong đó cơ số a là hằng số dương, là hàm số ngược của hàm số mũ. Chúng sẽ được khảo sát trong Bài 1.6, Hình 21 cho thấy đồ thị của bốn hàm số logarit với những cơ số khác nhau. Trong mỗi trường hợp tập xác định là (0, ∞), tập giá trị là (- ∞, ∞), và hàm số đồng biến chậm khi x > 1



HÌNH 21

HÀM SỐ SIÊU VIỆT

Đây là những hàm số không phải là hàm số đại số. Tập hợp những hàm số đại số bao gồm hàm số lượng giác, lượng giác ngược, mũ, và logarit, nhưng nó cũng bao gồm nhiều vô kể những hàm số khác không được đặt tên. Trong Chương 11 ta sẽ nghiên cứu về hàm số siêu việt được xác định như là tổng của những chuỗi vô hạn.

VÍ DỤ 5 Phân loại những hàm số sau theo một trong các dạng hàm số như đã trình bày.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$ (c) $h(x) = \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

GIẢI

(a) $f(x) = 5^x$ là hàm số mũ. (x là số mũ.)
(b) $g(x) = x^5$ là hàm số lũy thừa. (x là cơ số.) Ta cũng xem nó là một đa thức bậc 5.
(c) $h(x) = \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ là hàm số đại số.
(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ là đa thức bậc 4.

BÀI TẬP

1-2 Phân loại mỗi hàm số sau là hàm số lũy thừa, hàm số căn thức, đa thức (cho biết bậc), hàm số hữu tỷ, hàm số đại số, hàm số lượng giác, hàm số mũ, hay logarit.

1. (a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ (b) $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

(c) $h(x) = x^9 + x^4$ (d) $r(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

(e) $s(x) = \tan 2x$ (f) = $t(x) = \log_{10} x$

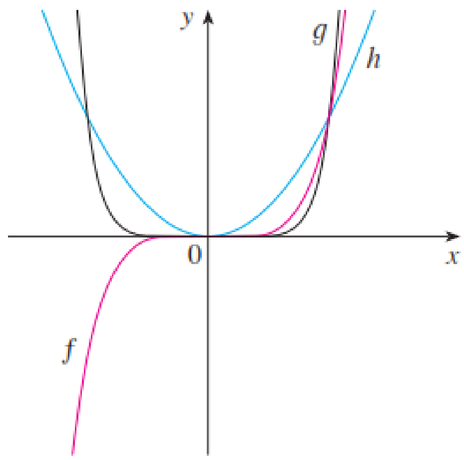
2. (a) $y = \dfrac{x-6}{x+6}$ (b) = $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

(c) $y = 10^x$ (d) $y = x^{10}$

(e) $y = 2t^6 + t^4 - \pi$ (f) $y = \cos\alpha + \sin\alpha$

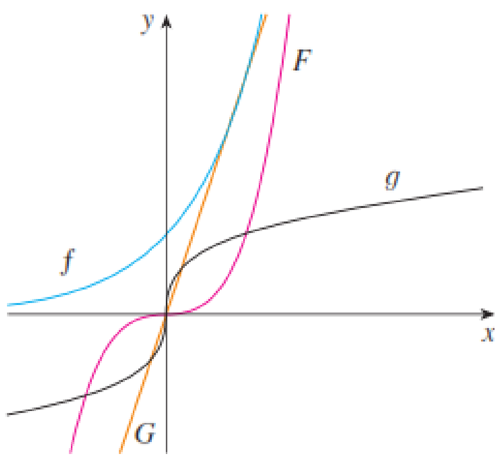
3.-4 Cặp đôi mỗi phương trình với đồ thị của nó. Giải thích tại sao bạn lựa chọn như thế. (Không được dùng máy tính có chức năng vẽ.)

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) = y = 3x (b) $y = 3^x$

(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$



5. (a) Tìm một phương trình của họ các hàm số tuyến tính có độ dốc 2 và vẽ một số đồ thị trong họ này.

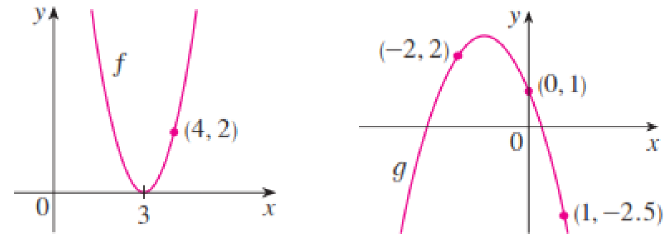
(b) Tìm một phương trình của họ những hàm số tuyến tính sao cho f(2) = 1 và vẽ một số đồ thị của họ này.

(c) Hàm số nào thuộc về cả hai họ.

6. Mọi thành viên của họ hàm số tuyến tính f(x) = 1 + m(x + 3) có chung điều gì? Vẽ một vài đồ thị của họ này.

7. Mọi thành viên của họ hàm số tuyến tính f(x) = c - x có chung điều gì? Vẽ một vài đồ thị của họ này.

8. Xác định các hàm số bậc hai mà đồ thị cho bởi các hình dưới.



9. Tìm hàm số bậc ba f biết f(1) = 6 và f(-1) = f(0) = f(2) = 0.

10. Các nghiên cứu gần đây đã chỉ ra rằng nhiệt độ trung bình của bề mặt trái đất đã tăng một cách liên tục. Một số nhà khoa học đã mô hình hóa nhiệt độ bằng hàm số tuyến tính T = 0.02t + 8.50 trong đó T là nhiệt độ (^{o}C) và t là số năm kể từ 1900.

(a) Tìm độ dốc và tung độ gốc.

(b) Dùng phương trình để dự đoán nhiệt độ bề mặt trái đất vào năm 2100.

11. Nếu liều lượng người lớn được chỉ định cho loại thuốc D (tính bằng mg), thế thì để xác định liều lượng thích hợp c cho một đứa trẻ ở độ tuổi a, các dược sĩ sử dụng phương trình c = 0.0417D(a + 1). Giả sử liều lượng cho người lớn là 200 mg.

(a) Tìm độ dốc của đồ thị của c. Nó biểu thị điều gì?

(b) Tìm liều lượng cho bé mới sinh.

12. Một quản lý khu chợ trời rút ra từ kinh nghiệm quy luật là nếu cho thuê mặt bằng với giá x đôla, thì số lô cho thuê được y cho bởi phương trình y = 200 – 4x.

(a) Phác họa đồ thị của phương trình tuyến tính này. (Nhớ là số lô cho thuê và giá thuê không thể là số âm.)

(b) Tìm độ dốc, tung độ gốc, hoành độ gốc của đồ thị.

13. Liên hệ giữa nhiệt độ Fahrenheit và nhiệt độ Celsius (C) được cho bởi hàm số tuyến tính $F = {}^9/_5\, C + 32$.

(a) Phác họa đồ thị của hàm số này.

(b) Tìm độ dốc và ý nghĩa của nó. Tìm tung độ gốc và ý nghĩa của nó.

14. Jason rời Detroit lúc 2:00PM và lái với tốc độ không đổi về hướng Tây theo xa lộ I-96. Anh đi qua Ann Arbor, cách Detroit 40 dặm, lúc 2:50 PM.

(a) Biểu diễn quảng đường đi được theo thời gian.

(b) Vẽ đồ thị của phương trình này.

15. Các nhà sinh học đã nhận xét rằng tần suất gáy của một dòng dế nào đó có liên quan đến nhiệt độ, và mối liên quan rất gần với mô hình tuyến tính. Một con dế phát ra 113 tiếng gáy mỗi phút ở $70^{o}F$ và 173 tiếng mỗi phút ở $80^{o}F$.

(a) Tìm phương trình tuyến tính của nhiệt độ T như hàm số theo N, tần suất gáy mỗi phút.

(b) Độ dốc đồ thị là bao nhiêu? Nó biểu thị điều gì?

(c) Nếu dế kêu 150 lần mỗi phút, hãy ước tính nhiệt độ khi đó.

16. Người quản lý xưởng đồ gỗ nhận thấy rằng chi phí để sản xuất 100 ghế trong một ngày là 2,200 đôla và 300 ghế trong một ngày là 4,800 đôla.

(a) Biểu diễn chi phí như một hàm số theo số ghế sản xuất, giả sử hàm số này tuyến tính. Sau đó phác họa đồ thị.

(b) Tìm độ dốc của đồ thị và cho biết nó biểu thị điều gì?

(c) Tìm tung độ gốc của đồ thị và cho biết nó biểu thị điều gì?

17. Trên bề mặt đại dương, áp suất nước cũng giống như áp suất không khí phía trên mặt nước, là 15 lb/m^2. Bên dưới mặt nước, áp suất nước tăng 4.34 lb/m^2 mỗi 10 ft độ sâu.

(a) Biểu diễn áp suất nước như một hàm số theo độ sâu dưới mặt biển.

(b) Ở độ sâu bao nhiêu thì áp suất là 100 lb/m^2?

18. Chi phí hàng tháng để lái ô tô tùy thuộc vào số đường dài. Lynn thấy rằng vào tháng 5 cô mất 380$ để đi 490 dặm còn tháng 6 chỉ mất 460$ để đi 800 dặm.

(a)Biểu diễn chi phí hàng tháng C như một hàm số theo đường dài d, giả sử mô hình tuyến tính thích hợp với mối quan hệ này.

(b) Dùng phần (a) để tiên đoán chi phí khi lái 1500 dặm mỗi tháng.

(c) Vẽ đồ thị hàm số này. Độ dốc đồ thị có ý nghĩa gì?

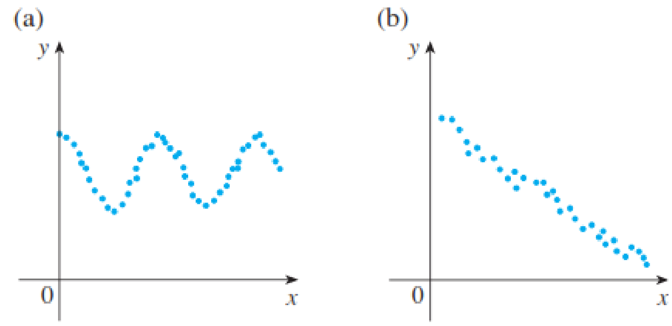
(d) Tung độ gốc biểu thị điều gì?

(e) Tại sao hàm số tuyến tính thích hợp trong tình huống này.

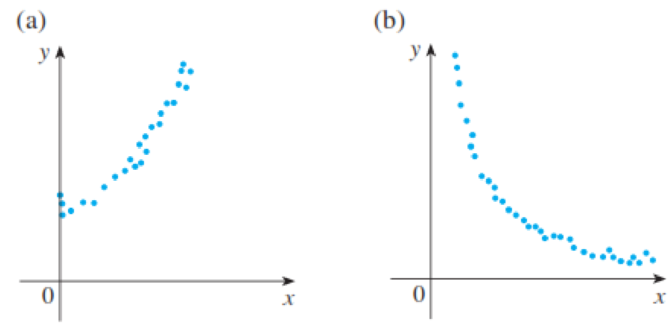
19-20

Vơi mỗi biểu đồ phân tán bên dưới, hãy chọn loại hàm số theo ý bạn có thể dùng làm mô hình cho dữ liệu. Giải thích sự lựa chọn của mình.

19.



20.



21. Bảng dưới cho biết tỷ lệ bách phân số người mắc bệnh loét dạ dày đối với thu nhập gia đình khác nhau do Viện Thăm Dò Sức Khỏa Quốc Gia công bố.

Income	Ulcer rate (per 100 population)
$4,000	14.1
$6,000	13.0
$8,000	13.4
$12,000	12.5
$16,000	12.0
$20,000	12.4
$30,000	10.5
$45,000	9.4
$60,000	8.2

(a) Biểu diễn đồ thị phân tán của dữ liệu này và cho biết liệu mô hình tuyến tính có thích hợp không?

(b) Tìm và vẽ đồ thị tuyến tính sử dụng điểm đầu và điểm cuối của dữ liệu.

(c) Tìm và vẽ đường hồi quy theo phương pháp bình phương cực tiểu bằng máy tính bỏ túi.

(d) Dùng kết quả của phấn (c) để ước tính tỷ lệ mắc bịnh loét dạ dày đối với thu nhập 25,000$.

(e) Theo mô hình, một người có thu nhập 80,000$ có tỷ lệ mắc bịnh là bao nhiêu?

(f) Bạn có nghĩ là mô hình này có thể áp dụng một cách hợp lý cho những người có thu nhập 200,000$ không?

22. Các nhà sinh học đã nhận xét rằng tần suất gáy của một dòng dế nào đó có liên quan đến nhiệt độ. Bảng dưới đây cho thấy tần suất gáy theo với nhiệt độ.

Temperature (°F)	Chirping rate (chirps/min)	Temperature (°F)	Chirping rate (chirps/min)
50	20	75	140
55	46	80	173
60	79	85	198
65	91	90	211
70	113		

(a) Biểu diễn đồ thị phân tán của dữ liệu này.
(b) Tìm và vẽ đồ thị tuyến của đường hồi quy (bằng máy tính bỏ túi có chức năng vẽ).
(c) Dùng kết quả của phần (b) để ước tính tần suất gáy ở nhiệt độ 100°F.

23. Bảng dưới cho kết quả thi nhảy sào đoạt huy chương vàng trong các kỳ Thế Vận Hội Olympic trong thế kỷ 20.

Year	Height (ft)	Year	Height (ft)
1900	10.83	1956	14.96
1904	11.48	1960	15.42
1908	12.17	1964	16.73
1912	12.96	1968	17.71
1920	13.42	1972	18.04
1924	12.96	1976	18.04
1928	13.77	1980	18.96
1932	14.15	1984	18.85
1936	14.27	1988	19.77
1948	14.10	1992	19.02
1952	14.92	1996	19.42

(a) Biểu diễn đồ thị phân tán của dữ liệu này và cho biết liệu mô hình tuyến tính có thích hợp không?
(b) Tìm và vẽ đường hồi quy bằng máy tính bỏ túi.
(c) Dùng mô hình tuyến tính để dự đoán kết quả vô địch nhảy sào trong Olympic 2000 và so sánh với kết quả thực sự là 1936 feet.
(d) Bạn có nghĩ là có thể dùng mô hình này để dự đoán hợp lý kết quả vô địch nhảy sào trong kỳ Olympic 2100 được không?

24. Một nghiên cứu của Phòng Khoa Học và Kỹ Thuật Mỹ trong năm 1972 ước tính chi phí (bằng đô la năm 1972) để giảm thiểu bách phân lượng khí thải do ô tô phun ra:

Reduction in emissions (%)	Cost per car (in \$)	Reduction in emissions (%)	Cost per car (in \$)
50	45	75	90
55	55	80	100
60	62	85	200
65	70	90	375
70	80	95	600

Tìm một mô hình nắm bắt được khuynh hướng “” của những dữ liệu này.

25. Dùng dữ liệu trong bảng để mô hình hóa dân số thế giới trong thế kỷ 20 bằng một hàm số bậc ba. Sau đó dùng mô hình của bạn để ước tính dân số năm 1925.

Year	Population (millions)	Year	Population (millions)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

26. Bảng dưới cho thấy khoảng cách trung bình d của hành tinh từ mặt trời (đơn vị là khoảng cách từ trái đất đến mặt trời) và chu kỳ T của chúng (thời gian quay một vòng quanh mặt trời).

Planet	d	T
Mercury	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Earth	1.000	1.000
Mars	1.523	1.881
Jupiter	5.203	11.861
Saturn	9.541	29.457
Uranus	19.190	84.008
Neptune	30.086	164.784

(a) Tìm một mô hình lũy thừa thích hợp với dữ liệu.
(b) Định Luật Thứ Ba của Kepler về Chuyển Động Các Hành Tinh nói rằng

“Bình phương chu kỳ quay của hành tinh tỷ lệ với lập phương của khoảng cách trung bình từ nó đến mặt trời.”

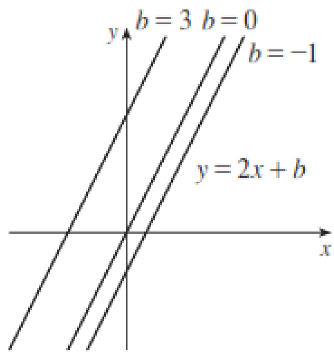
Mô hình của bạn có củng cố Định Luật Thứ Ba này không?

ĐÁP SỐ

1. (a) Vô tỷ (b) Đại số (c) Đa thức
(d) Hữu tỷ (e) Lượng giác (f) Lôgarit

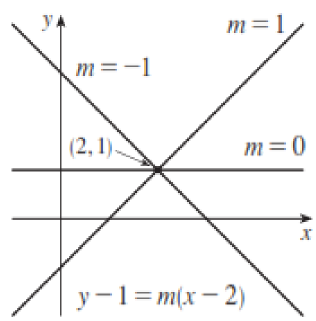
3. (a) h (b) f (c) g

5. (a) y = 2x + b với b là tung độ gốc

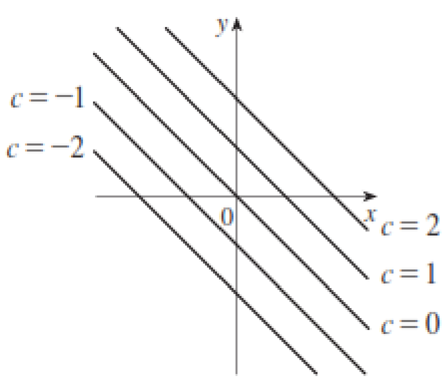


(b) y = mx + 1 – 2m, trong đó m là độ dốc

(c) y = 2x - 3



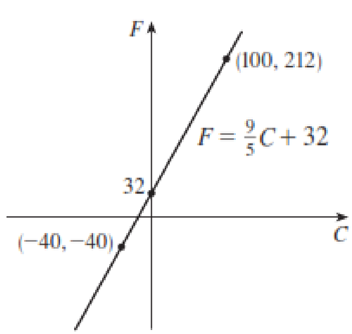
7. Đồ thị của chúng có độ dốc – 1.



9. f(x) = - 3x(x + 1)(x – 2)

11. (a) 8.34, độ biến thiên mg với mỗi năm biến thiên.
(b) 8.34 mg

13. (a)



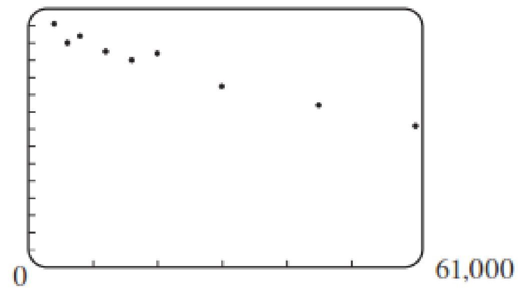
(b) 9/5, độ biến thiên °F với mỗi 1°C biến thiên; 32, nhiệt độ Fahrenheit tương ứng với 0°C.

15. (a) T = $\frac{1}{6}N + \frac{307}{6}$ (b) 1/6, biến thiên °F với mỗi tiếng gáy mỗi phút biến thiên (c) 76°F

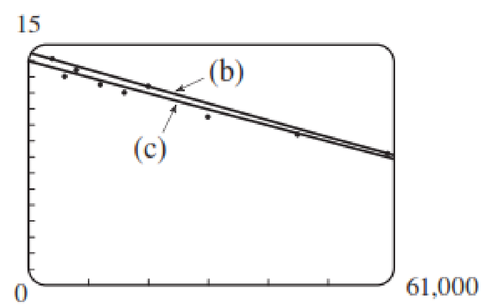
17. (a) P = 0.434d + 15 (b) 196 ft

19. (a) Cosin (b) Tuyến tính

21. (a) 15 Mô hình tuyến tính là thích hợp

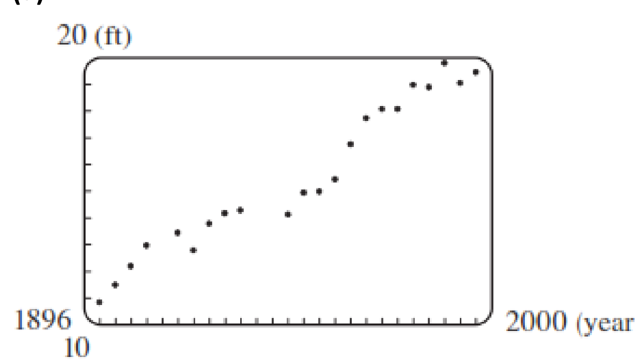


(b) Y = - 0.000105x + 14.521

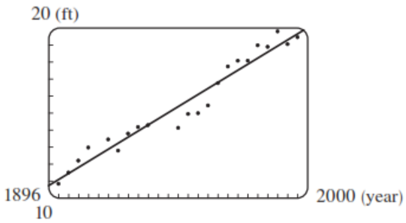


(c) y = - 0.00009979x + 13.951 [xem hình trên]
(d) Khoảng 11.5 % dân số (e) Khoảng 6%
(e) Không

23. (a)



Mô hình tuyến tính là thích hợp.
(c) y = 0.08912x – 158.24 (c) 20 ft
(d) Kh
(e) Không



25. $y \approx 0.0012937x^3 - 7.06142x^2 + 12{,}823x - 7{,}743{,}770$;
1914 million

BÀI 1. 3. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HÀM SỐ

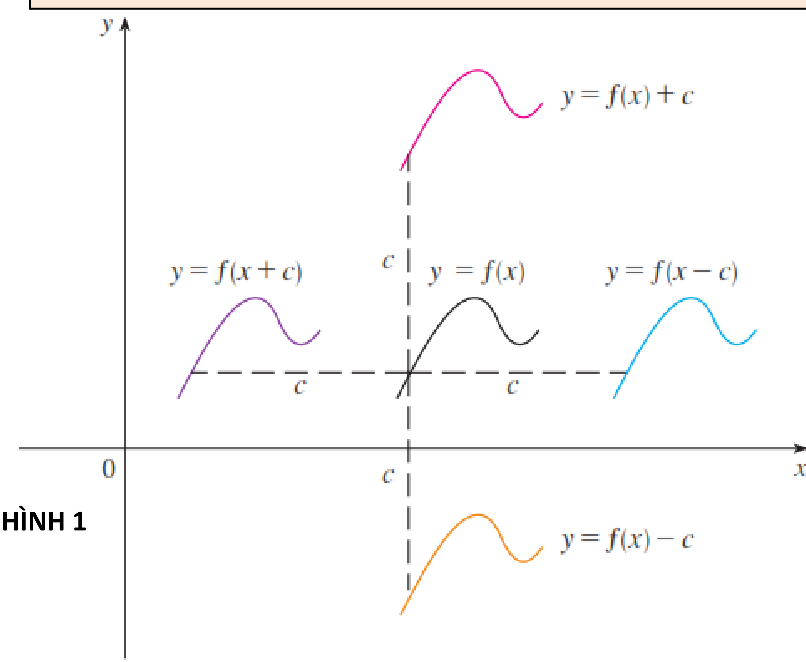
Từ một hàm số cho trước, ta có thể tạo ra các hàm số mới bằng cách dời, co giãn hay phản chiếu các đồ thị của chúng. Chúng ta cũng có thể kết hợp các cặp hàm số bằng các phép tính số học tiêu chuẩn hoặc bằng phép hợp.

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HÀM SỐ

Bằng cách biến đổi đồ thị của một hàm số ta sẽ được một đồ thị khác của một hàm số khác có liên hệ với hàm số ban đầu. Việc này cho phép ta vẽ được nhiều đồ thị có liên quan một cách mau chóng, cũng như cho phép ta viết được phương trình của nhiều đồ thị cho trước.

Trước tiên hãy xét **phép tịnh tiến**. Nếu c là một số dương thì đồ thị hàm số y = f(x) + c chính là đồ thị hàm số y = f(x) dời thẳng lên một khoảng c đơn vị (bởi vì mỗi tung độ y được tăng thêm cùng một số c). Cũng thế, với c > 0 thì đồ thị hàm số y = g(x) = f(x - c) chính là đồ thị hàm số y = f(x) dời ngang bên phải c đơn vị (bởi vì giá trị của g ứng với x thì bằng với giá trị của f tại x - c (c đơn vị về bên trái của x). Xem Hình 1.

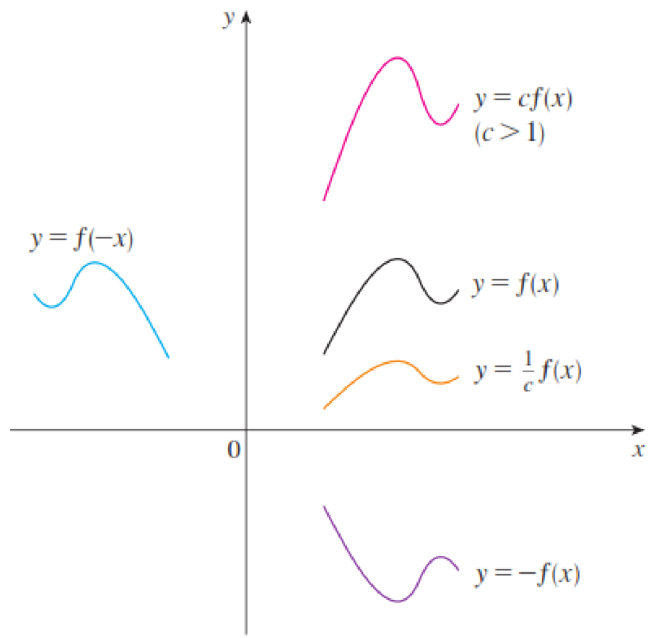
DỜI DỌC VÀ DỜI NGANG Giả sử c > 0. Để được đồ thị
y = f(x) + c, dời đồ thị y = f(x) lên c đơn vị
y = f(x) – c, dời đồ thị y = f(x) xuống c đơn vị
y = f(x – c), dời đồ thị y = f(x) qua phải c đơn vị
y = f(x + c), dời đồ thị y = f(x) qua trái c đơn vị



HÌNH 1

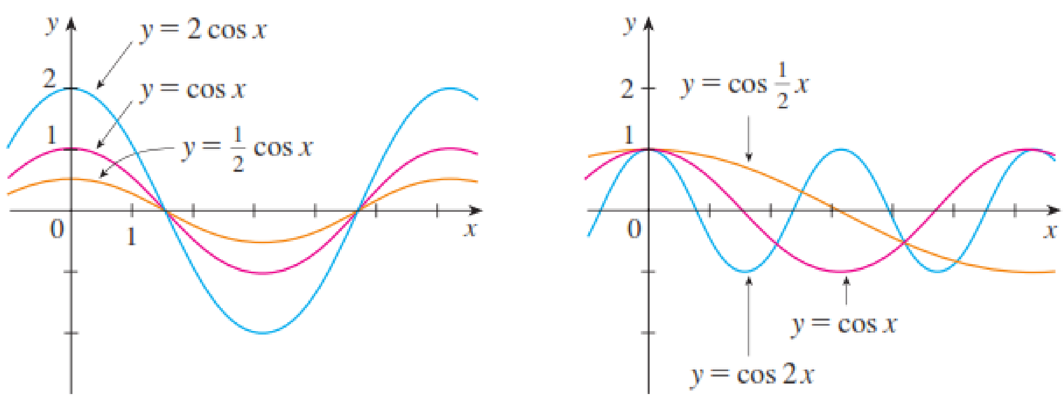
Giờ hãy xét **phép co giãn** và **phản chiếu**. Nếu c > 1, thì đồ thị y = cf(x) là đồ thị hàm số y = f(x) được kéo giãn ra một hệ số c theo phương thẳng đứng (bởi vì tung độ được nhân cho cùng hệ số c). Đồ thị của hàm số y = - f(x) là đồ thị của hàm số y = f(x) phản chiếu qua trục Ox (đối xứng qua trục Ox) bởi vì điểm (x, y) được thay bằng điểm (x, - y) đối xứng nhau qua trục Ox.

CO GIÃN NGANG DỌC VÀ PHẢN CHIẾU Giả sử c > 1. Để được đồ thị
y = cf(x), kéo giãn đồ thị y = f(x) theo chiều dọc một hệ số c
y = (1/c)f(x), kéo co đồ thị y = f(x) theo chiều dọc một hệ số c
y = f(cx), kéo co đồ thị y = f(x) theo chiều ngang một hệ số c
y = f(x/c), kéo giãn đồ thị y = f(x) theo chiều ngang một hệ số c
y = – f(x), phản chiếu (đối xứng) đồ thị y = f(x) qua trục hoành
y = f(– x), phản chiếu (đối xứng) đồ thị y = f(x) qua trục tung



HÌNH 2

Hình 3 minh họa những phép co giãn khi áp dụng cho đồ thị hàm số y = cosx với hệ số co giãn c = 2. Chẳng hạn, để được đồ thị hàm số y = 2cos x ta nhân tung độ của mỗi điểm trên đồ thị y = cos x cho 2. Điều này có nghĩa là đồ thị y = cos x đã được kéo giãn ra theo chiều dọc với hệ số là 2.



HÌNH 3

VÍ DỤ 1 Cho đồ thị y = $\sqrt{x}$, dùng phép biến đổi để vẽ đồ thị hàm số y = $\sqrt{x}-2$, $y=\sqrt{x-2}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, và $y=\sqrt{-x}$ I hệ số 2

GIẢI Đồ thị y = $\sqrt{x}$ ta đã vẽ trong Hình 13(a) của Bài 1.2, được vẽ lại trong Hình 4(a).

Đồ thị y = $\sqrt{x}$ - 2 là dời của đồ thị y = $\sqrt{x}$ về phía dưới.2 đơn vị.

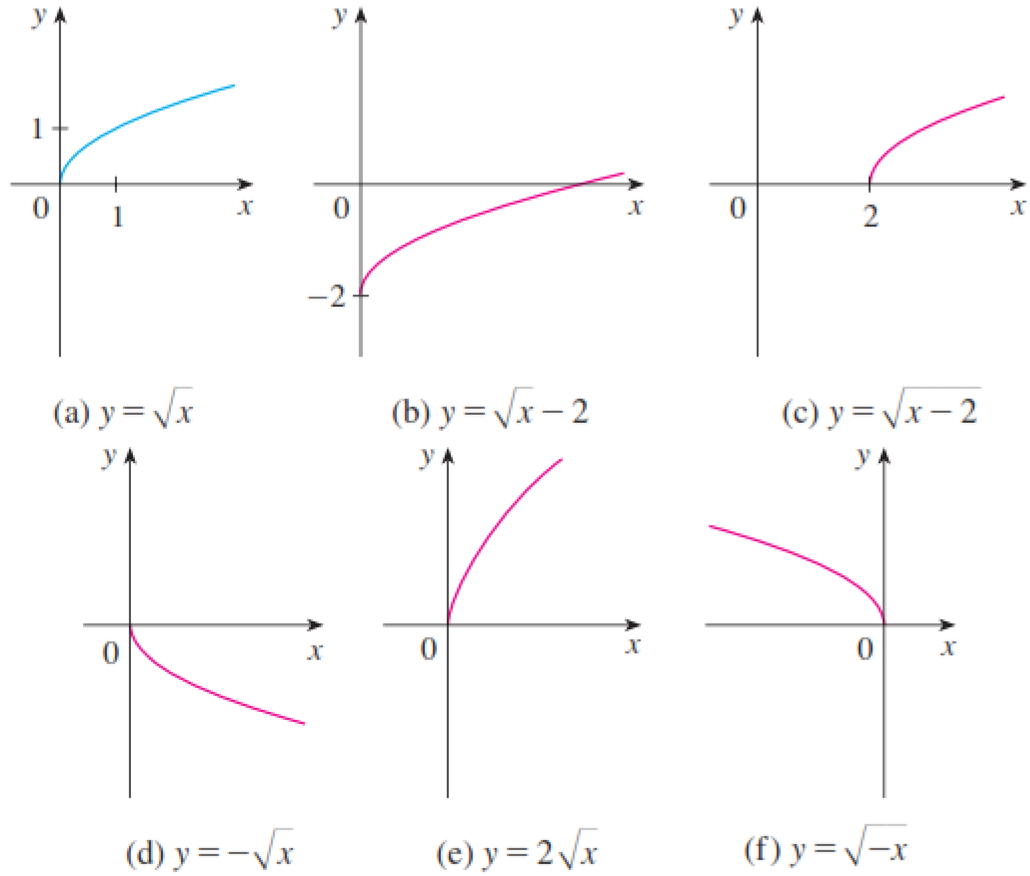
Đồ thị y = $\sqrt{x-2}$ là dời của đồ thị y = $\sqrt{x}$ sang phải 2 đơn vị.

Đồ thị y = - $\sqrt{x}$ là đối xứng của đồ thị y = $\sqrt{x}$ qua trục x.

Đồ thị của y = $2\sqrt{x}$ có được bằng cách kéo giãn theo chiều dọc đồ thị y = $\sqrt{x}$ với hệ số 2.

Đồ thị y = $\sqrt{-x}$ là đối xứng của đồ thị y = $\sqrt{x}$ qua trục y.

HÌNH 4



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x-2}$

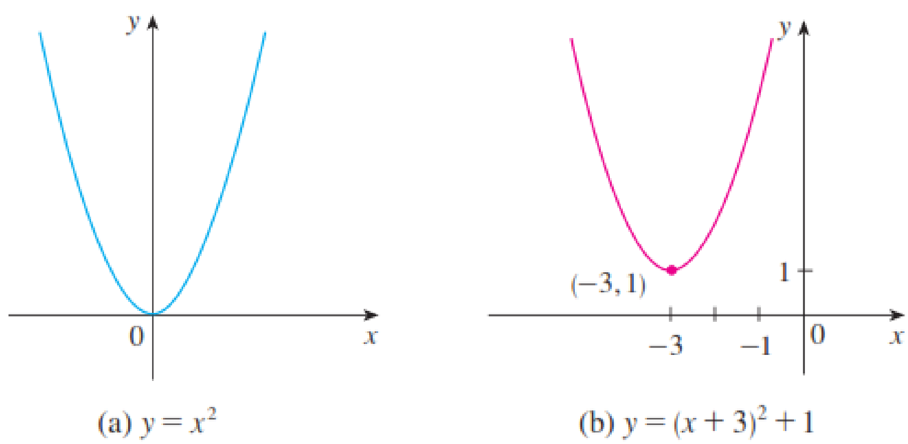
(d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

VÍ DỤ 2 Vẽ đồ thị hàm số f(x) = $x^2 + 6x + 10$ từ parabol y = x^2.

GIẢI Viết lại f(x) có chứa một bình phương đúng:

$$f(x) = (x^2 + 6x + 9) + 1 = (x + 3)^2 + 1$$

Suy ra đồ thị hàm số f(x) (màu đỏ) có được bằng cách dời parabol y = x^2 (màu xanh) về bên trái 3 đơn vị và dời lên 1 đơn vị (xem Hình 5) .



(a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$

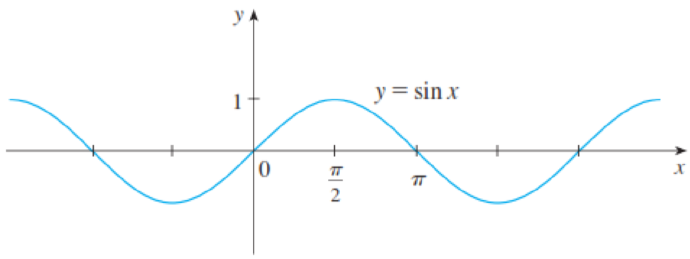
HÌNH 5

VÍ DỤ 3 Từ đồ thị hàm số y = sinx (hình dưới), vẽ đồ thị các hàm số sau:

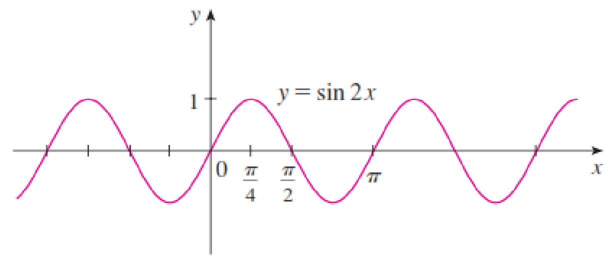
(a) y = sin2x (b) y = 2 - sinx

GIẢI

(a) Ta được đồ thị hàm số y = sin2x bằng cách sử dụng phép co theo trục hoành với hệ số 2 cho đồ thị y = sinx (xem Hình 6 và 7). Do đó trong khi chu kì của y = sinx là 2π thì chu kì của y = sin2x là π.

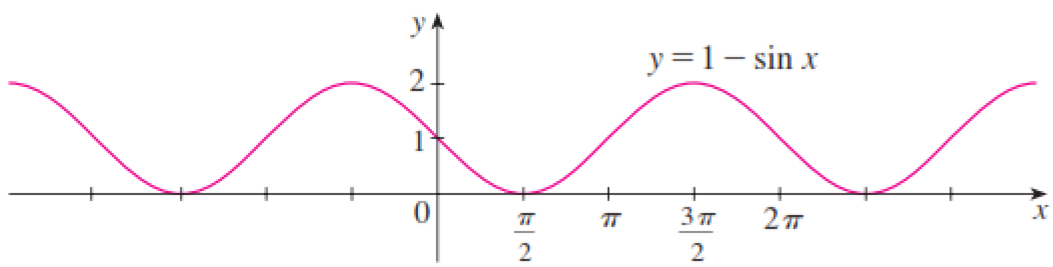


HÌNH 6



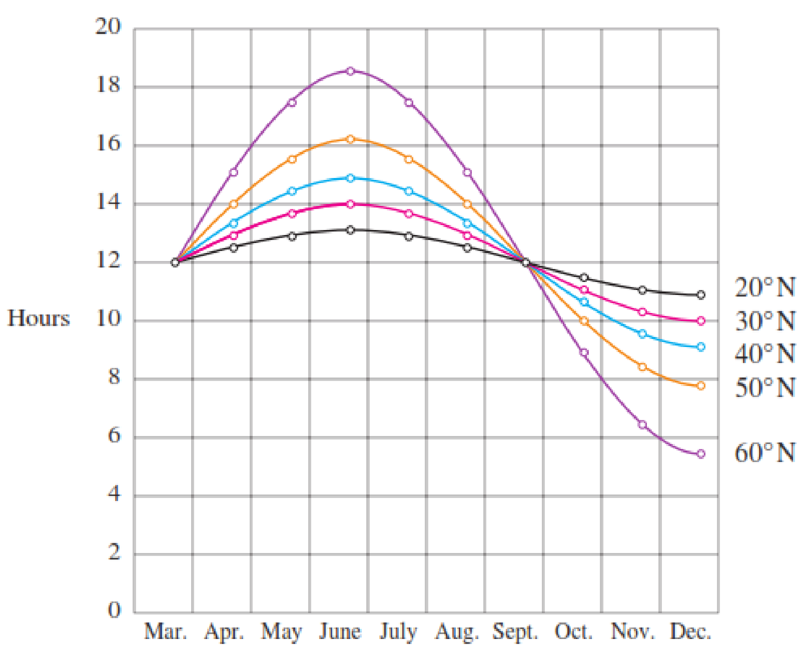
HÌNH 7

(b) Để được đồ thị hàm số y = 1 - sinx, ta bắt đầu bằng cách lấy đối xứng qua Ox của đồ thị y = sinx, được đồ thị y = - sinx. Sau đó dời đồ thị này lên trên 1 đơn vị (xem Hình 8).



HÌNH 8

VÍ DỤ 4 Hình 9 cho thấy những đồ thị của số giờ ban ngày từ 21/3 đến 21/12 trong năm coi như hàm số theo thời gian trong năm tại những kinh độ khác nhau trên địa cầu. Biết rằng Philadelphia tọa lạc tại xấp xỉ kinh độ 40°N, tìm hàm số mô hình hóa thời gian ban ngày ở Philadelphia.



HÌNH 9

GIẢI Nhận xét rằng các đồ thị tương tự như đồ thị hàm số được dời đi và kéo giãn ra. Nhìn vào đường cong màu xanh ta thấy là, tại kinh độ của Philadelphia, số giờ ban ngày kéo dài khoảng 14.8 giờ vào 21/6 và 9.2 giờ vào 21/12, do đó biên độ của ình thời gian ường cong (hệ số theo đó ta phải kéo giãn đồ thị hình sin theo chiều dọc) là ½(14.8 – 9.2) = 2.8.

Ta sẽ sử dụng hệ số nào để kéo giãn đồ thị hình sin rheo chiều ngang nếu ta tính đơn vị thời gian là ngày? Vì một năm có 365 ngày, chu kỳ của mô hình chúng ta là 365. Nhưng chu kỳ của y = sin t là 2π, do đó hệ số co giãn sẽ là c = 2π/365.

Ta cũng chú ý là đường cong bắt đầu chu kỳ ở 21/3, ngày thứ 80 của năm, vì thế ta phải dời đường cong 80 đơn vị sang phải. Ngoài ra ta phải dời 12 đơn vị lên trên. Do đó ta mô hình hóa số giờ ban ngày ở Philadelphia vào ngày thứ t trong năm bằng hàm số

$$L(t) = 12 + 2.8\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]$$

Một phép biến đổi thú vị khác là là lấy *trị tuyệt đối* của một hàm số. Nếu y = |f(x)|, thế thì theo định nghĩa của trị tuyệt đối, ta có:

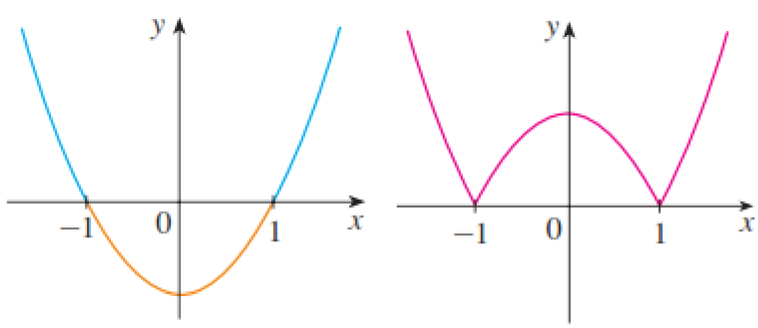
$$y = \begin{cases} f(x) & khi\ \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & khi\ \ f(x) < 0 \end{cases}$$

Điều này cho phép ta vẽ được đồ thị của y = |f(x)| từ đồ thị của hàm số y = f(x) bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị của y = f(x) nằm phía trên trục hoành;
- Còn phần đồ thị của y = f(x) nằm bên dưới trục hoành được phản chiếu (lật đối xứng) qua trục hoành.

VÍ DỤ 5 Vẽ đồ thị của hàm số y = $|x^2 - 1|$

GIẢI Trước hết ta vẽ đồ thị hàm số y = $x^2 - 1$ gtrong Hình 10(a) bằng dời đồ thị y = x^2 xuống dưới 1 đơn vị. Ta thấy rằng đồ thị nằm phía dưới trục hoành khi – 1< x < 1, vì thế ta lật đối xứng phần này qua trục hoành để được đồ thị y = $|x^2 - 1|$ (Hình 10(b)).



(a) $y = x^2 - 1$ (b) $y = |x^2 - 1|$

Hình 10

TỔ HỢP CÁC HÀM SỐ

Hai hàm số f và g có thể tổ hợp để tạo ra các hàm số mới f + g, f - g, fg và f/g như ta cộng, trừ, nhân và chia các số thực. Tổng và hiệu hai hàm số được định nghĩa bởi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Nếu tập xác định của f là A và tập xác định của g là B, thì tập xác định của f + g và f - g là $A \bigcap B$. Ví dụ tập xác định của $f(x) = \sqrt{x}$ là [0, oo) và tập xác định của $g(x) = \sqrt{2-x}$ là (- oo, 2], thế thì tập xác định của $(f + g)(x) = \sqrt{x}+\sqrt{2-x}$ là $A \bigcap B = [0, 2]$.

Tương tự tích và thương hai hàm số được định nghĩa :

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Tập xác định của fg là $A \bigcap B$, nhưng vì chúng ta không được chia cho 0 nên tập xác định của f/g là $\{x \in A \bigcap B \,/\, g(x) \neq 0\}$. Ví dụ nếu $f(x) = x^2$ và $g(x) = x - 1$, thế thì tập xác định của $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ là $\{x / x \neq 1\}$, hay (- oo, 1) U (1, oo).

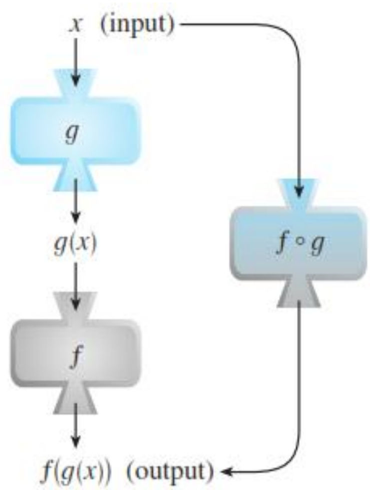
HÀM SỐ HỢP

Có một cách khác để tổ hợp hai hàm số. Ví dụ cho $y = f(u) = \sqrt{u}$ và $u = g(x) = x^2 + 1$. Vì y là hàm số theo u còn u là hàm số theo x, do đó y cũng là hàm số theo x. Ta tính y theo x bằng phép thế

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2+1}$$

Thủ tục trên gọi là *phép hợp hai hàm số* vì hàm số mới có được bằng cách hợp hai hàm số đã cho.

Tổng quát, cho hai hàm số f và g, chúng ta bắt đầu bằng một giá trị x thuộc tập xác định của g và tìm ảnh g(x). Nếu g(x) thuộc tập xác định của hàm số f, thế thì chúng ta có thể tính giá trị của f(g(x)). Kết quả là một hàm số mới h(x) = f(g(x)) có được bằng cách thế g vào f. Hàm số này được gọi là *hàm số hợp* của f và g và kí hiệu fog (đọc f tròn g).



> **ĐỊNH NGHĨA** Cho hai hàm số f và g, hàm số hợp fog được định nghĩa bởi
>
> (fog)(x) = f(g(x))

Tập xác định của fog là tập những giá trị x sao cho g(x) thuộc tập xác định của f. Nói cách khác, (fog)(x) xác định khi g(x) và f(g(x)) xác định. Hình trên biểu diễn hàm số hợp theo hình tượng máy.

VÍ DỤ 6 Nếu $f(x) = x^2$ và $g(x) = x - 3$. Tìm hàm số hợp fog và gof.

GIẢI Ta có

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

CHÚ Ý Từ kết quả ví dụ 6, ta có thể thấy rằng thường thì fog $\neq$ gof . Nhớ rằng kí hiệu fog có nghĩa là phải áp dụng hàm số g trước rồi sau đó đến f, trong khi với gof thì ngược lại.

VÍ DỤ 7 Cho f(x) = $\sqrt{x}$ và g(x) = $\sqrt{2-x}$, tìm các hàm số sau và cho biết tập xác định của chúng.

(a) fog (b) gof (c) fof (d) gog

GIẢI

(a) (fog)(x) = f(g(x)) = f($\sqrt{2-x}$) = $\sqrt{\sqrt{2-x}}$ = $\sqrt[4]{2-x}$

Tập xác định của fog là (- oo, 2]

(b) (gof)(x) = g(f(x)) = g($\sqrt{x}$) = $\sqrt{2-\sqrt{x}}$.

Tập xác định của gof là tập những x sao cho x ≥ 0 và 2 - $\sqrt{x}$ ≥ 0, tức $\sqrt{x} \le 2$ hay x ≤ 4.

Vậy tập xác định của gof là [0, 4].

(c) (fof)(x) = f(f(x)) = f($\sqrt{x}$) = $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$.

Tập xác định của fof là [0, oo).

(d) (gog)(x) = g(g(x)) = g($\sqrt{2-x}$) = $\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$.

Tập xác định của gog là tập những x sao cho 2 - x ≥ 0 và 2 - $\sqrt{2-x}$ ≥ 0.

Bất phương trình đầu cho x ≤ 2. Bất phương trình sau thành $\sqrt{2-x}$ ≤ 2 hay 2 - x ≤ 4 <=> x ≥ - 2.

Vậy tập xác định là [- 2, 2].

Có thể hợp ba hàm số hay nhiều hơn. Ví dụ hàm số hợp fogoh có được bằng cách áp dụng h, rồi đến g và f theo quy tắc sau:

(fogoh)(x) = f(g(h(x)))

VÍ DỤ 8 Tìm fogoh nếu f(x) = x/(x + 1), g(x) = x^{10}, h(x) = x + 3.

GIẢI (fogoh)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x + 3))

$$= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$$

Ta thường dùng phép hợp để tạo ra các hàm số phức tạp từ các hàm số đơn giản. Nhưng trong giải tích có thể hữu ích nếu ta biết cách phân tích một hàm số phức tạp thành hàm số hợp của những hàm số đơn giản, như trong ví dụ sau.

VÍ DỤ 7 Cho hàm số F(x) = $\cos^2(x + 9)$, tìm f, g, h sao cho F = fogoh.

GIẢI Vì F(x) = $[\cos(x + 9)]^2$, quy tắc tính F chỉ ra rằng trước tiên cộng x cho 9, rồi lấy cosin của kết quả, cuối cùng bình phương nó. Vì vậy ta đặt

h(x) = x + 9, g(x) = cosx và f(x) = x^2

Thế thì

(fogoh)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(cos(x + 9))
= [cos(x + 9)]2 = F(x)

BÀI TẬP

1. Cho hàm số f với đồ thị đã biết. Viết phương trình của đồ thị mới có được từ đồ thị của f trong các phép biến đổi sau:

(a) Dời lên 3 đơn vị.

(b) Dời xuống 3 đơn vị.

(c) Dời qua phải 3 đơn vị.

(d) Dời qua trái 3 đơn vị.

(e) Đối xứng qua trục x.

(f) Đối xứng qua trục y.

(g) Giãn theo phương thẳng đứng một hệ số 3.

(h) Co lại theo phương thẳng đứng một hệ số 3.

2. Giải thích đồ thị sau có được như thế nào từ cách biến đổi đồ thị (C) của hàm số y = f(x).

(a) y = 5f(x) (b) y = f(x - 5)

(c) y = - f(x) (d) y = - 5f(x)

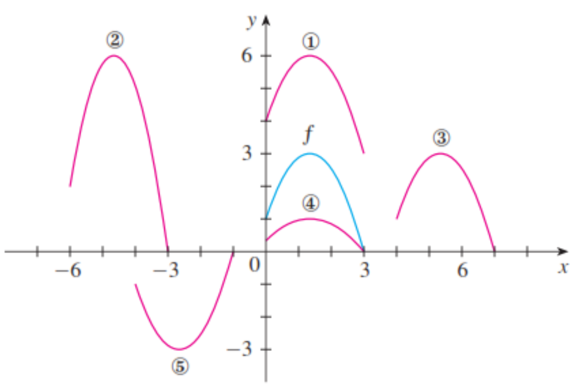
(e) y = f(5x) (f) y = 5f(x) – 3

3. Cho biết đồ thị của hàm số y = f(x). Cặp đôi mỗi phương trình với đồ thị và giải thích sự chọn lựa của bạn.

(a) y = f(x - 4) (b) y = f(x) + 3

(c) y = 1/3f(x) (d) y = - f(x + 4)

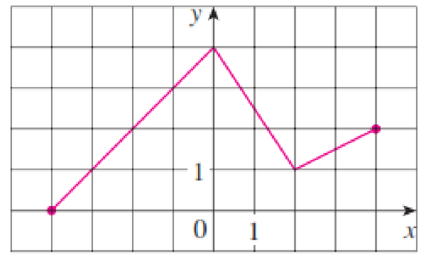
(e) y = 2f(x + 6)



4. Cho biết đồ thị của hàm số f. Hãy vẽ đồ thị các hàm số sau:

(a) y = f(x + 4) (b) y = f(x) + 4

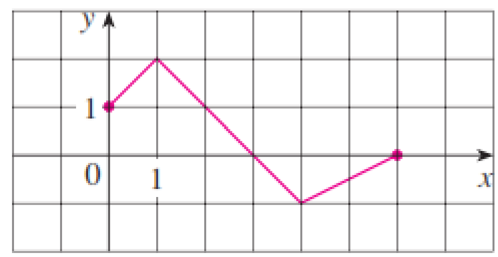
(c) y = 2f(x) (d) y = - 1/2 f(x) + 3



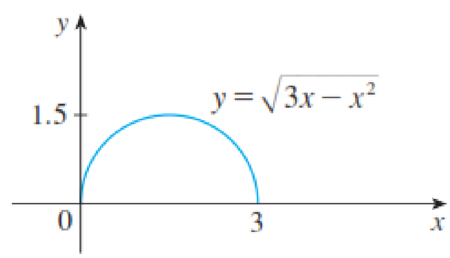
5. Cho biết đồ thị của hàm số f. Hãy vẽ đồ thị các hàm số sau:

(a) y = f(2x) (b) y = $f(\frac{1}{2}x)$

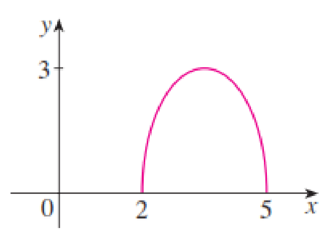
(c) y = f(- x) (d) y = y = - f(- x)



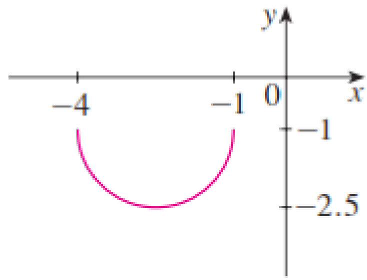
6-7. Cho biết đồ thị của hàm số y = $\sqrt{3x - x^2}$ như hình dưới . Hãy viết phương trình của các đồ thị qua một phép biến đổi.



6.



7.



8. (a) Đồ thị hàm số y = 2sin x liên hệ với đồ thị hàm số y = sin x như thế nào? Dùng đồ thị Hình 6 để vẽ đồ thị hàm số y = 2sin x dựa vào trả lời của bạn.

(b) Đồ thị hàm số y = 1 + $\sqrt{x}$ liên hệ với đồ thị hàm số y = $\sqrt{x}$ như thế nào? Dùng đồ thị Hình 4(a) để vẽ đồ thị hàm số y = 1 + $\sqrt{x}$ dựa vàotrả lời của bạn.

9 - 24. Bắt đầu với đồ thị chuẩn đã trình bày trong Bài 1.2 hãy vẽ đồ thị các hàm số sau bằng một phép biến đổi thích hợp.

9. $y = -x^2$
10. $y = 1 - x^2$
11. $y = (x + 1)^2$
11. $y = x^2 - 4x + 3$
13. y = 1 + 2cos x
14. y = 4sin 3x
15. y = sin (x/2)
16. $y = \dfrac{1}{x-4}$
17. $y = \sqrt{x+3}$
18. $y = (x + 2)^4 + 3$
19. $y = \dfrac{1}{2}(x^2 + 8x)$
20. $y = 1 + \sqrt[3]{x-1}$
21. $y = \dfrac{2}{x+1}$
22. $y = \dfrac{1}{4}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
23. y = |sin x|
24. $y = |x^2 - 2x|$

25. Thành phố New Orleans tọa lạc ở kinh độ 30°N. Dùng Hình 9 để tìm một hàm số nhằm mô hình hóa số giờ ban ngày tại New Orleans như một hàm số theo thời điểm trong năm. Để kiểm tra độ chính xác của mô hình của bạn, hãy dùng sự kiện là vào 31/3 mặt trời mọc lúc 5:51 AM và lặn lúc 6:18 PM ở New Orleans.

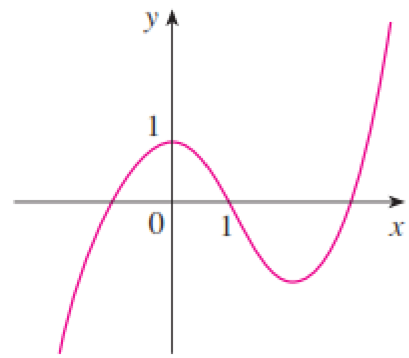
26. Một vì sao không ổn định là vì sao mà độ sáng của nó thay phiên nhau tăng giảm. Đối với sao Delta Cephei, một ngôi sao nhìn được rõ nhất, thời gian giữa những thời kỳ sáng tối đa là 5.4 ngày, độ sáng trung bình của sao là 4.0 và độ sáng nó thay đổi bằng ± độ sáng trung bình. Tìm một hàm số mô hình hóa độ sáng của sao Delta Cephei như một hàm số theo thời gian.

27. (a) Đồ thị hàm số y = f(|x|) với đồ thị hàm số f liên hệ nhau thế nào?

(b) Vẽ đồ thị hàm số y = sin |x|.

(c) Vẽ đồ thị hàm số y = $\sqrt{|x|}$.

28. Dùng đồ thị cho sẵn của f để vẽ đồ thị hàm số y = 1/f(x). Đặc điểm nào của f là quan trọng nhất trong việc vẽ y = 1/f(x)? Giải thích chúng được sử dụng như thế nào.



29-30 Tìm f + g, f – g, fg, và f/gva2 cho biết tập xác định của chúng.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$

30. f(x) = $\sqrt{3-x}$, g(x) = $\sqrt{x^2-1}$

31-36 Tìm hàm số (a) f ο g, (b) g ο f, (c) f ο f, và (d) g ο g và cho biết tập xác định của chúng.

31. $f(x) = x^2 - 1$, g(x) = 2x + 1

32. f(x) = x – 2, $g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. f(x) = 1 – 3x, g(x) = cos x

34. f(x) = $\sqrt{x}$, g(x) = $\sqrt[3]{1-x}$

35. f(x) = $x + \dfrac{1}{x}$, g(x) = $\dfrac{x+1}{x+2}$

36. f(x) = $\dfrac{x}{1+x}$, g(x) = sin 2x

37-40 Tìm f ο g ο h.

37. f(x) = x + 1, g(x) = 2x, h(x) = x – 1

38. f(x) = 2x – 1, $g(x) = x^2$, h(x) = 1 – x

39. $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3 + 2$

40. f(x) = tan x, g(x) = $\dfrac{x}{x-1}$, h(x) = $\sqrt[3]{x}$

41-46 Biểu diễn hàm số dưới dạng f o g.

41. F(x) = $(x^2 + 1)^{10}$ **42.** F(x) = $\sin\left(\sqrt{x}\right)$

43. F(x) = $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ **44.** G(x) = $\sqrt[3]{\dfrac{x}{1+x}}$

45. u(t) = $\sqrt{\cos t}$ **46.** u(t) = $\dfrac{\tan t}{1+\tan t}$

47-49 Biểu diễn hàm số dưới dạng f o g o h.

47. H(x) = $1-3^{x^2}$ **48.** H(x) = $\sqrt[8]{2+|x|}$

49. H(x) = $\sec^4\left(\sqrt{x}\right)$

50. Dùng bảng số để tính những giá trị sau.

(a) f (g(1)) (b) g (f(1)) (c) f (f(1))

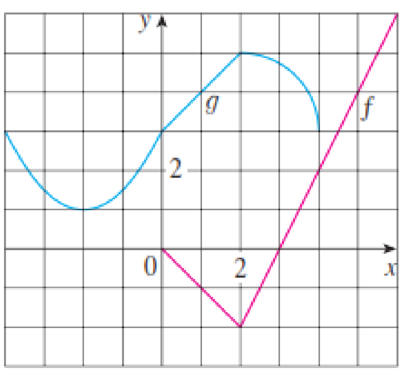
(d) g (g(1)) (e) (g o f)(3) (f) (f o g)(6)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

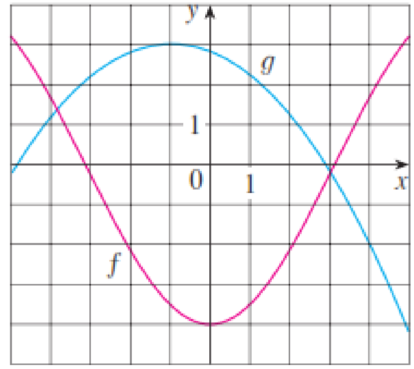
51. Dùng các đồ thị cho trước f và g để tính giá trị các biểu thức sau.

(a) f (g(2)) (b) g (f(0)) (c) (fog)(0)

(d) (gof)(6) (e) (gog)(- 2) (f) (fof)(4)



52. Dùng các đồ thị cho trước f và g để ước tính giá trị của f (g(x)) với x = - 5, - 4, - 3, . . . , 5. Dùng giá trị này để vẽ đồ thị thô của f o g.



53. Ném một hòn đá xuống hồ, tạo ra một đường gợn sóng tròn lan tỏa ra ngoài với tốc độ 60 cm/s.

(a) Biểu diễn bán kính r của sóng tròn này xem như một hàm số theo thời gian t (tính bằng giây).

(b) Nếu A là diện tích của hình tròn này xem như một hàm số theo bán kính, tìm A o r và giải thích nó.

54. Một quả bóng hình cầu được bơm hơi và bán kính nó tăng dần với tốc độ 2 cm/s.

(a) Biểu diễn bán kính r của quả cầu này xem như một hàm số theo thời gian t (tính bằng giây).

(b) Nếu V là thể tích của quả cầu này xem như một hàm số theo bán kính, tìm V o r và giải thích nó.

55. Một con tàu di chuyển với tốc độ 30 km/h song song với đường bờ biển thẳng tắp. Con tàu cách bờ biển 6 km và đi qua cột hải đăng lúc trưa.

(a) Biểu diễn khoảng cách s giữa cột hải đăng và con tàu như một hàm số theo d, khoảng đường con tàu đi được kể từ trưa; nghĩa là tìm f sao cho s = f(d).

(b) Biểu diễn d như một hàm số theo t, thời gian trôi qua kể từ trưa; nghĩa là tìm g sao cho d = g(t).

(c) Tìm f o g. Hàm số này biểu diễn điều gì?

56. Một phi cơ bay vi tốc độ 350 dặm/h ở cao độ 1 dặm và bay qua một trạm ra đa dưới mặt đất lúc t = 0.

(a) Biểu diễn khoảng cách ngang d (tính bằng dặm) mà phi cơ bay được như hàm số theo thời gian t.

(b) Biểu diễn khoảng cách s giữa phi cơ và trạm ra đa như một hàm số theo d.

(c) Dùng hàm số hợp biểu thị s như hàm số theo t.

57. Hàm số Heaviside là hàm số định bởi

$$H(t)=\begin{cases}0 & khi\ \ t<0\\ 1 & khi\ \ t\geq 0\end{cases}$$

Hàm số này được sử dụng trong các nghiên cứu điện để biểu thị sự cố có điện hay điện thế khi đóng cầu dao điện.

(a) Vẽ đồ thị của hàm số Heaviside.

(b) Vẽ đồ thị của điện thế V(t) của dòng điện nếu cầu dao đóng lại lúc t = 0 và điện thế 120 volts được áp ngay lập tức vào dòng điện. Viết công thức của V(t) theo H(t).

(c) Vẽ đồ thị của V(t) trong dòng điện nếu cầu dao đóng lúc t = 5 giây và điện thế 240 volts được áp ngay lập tức vào dòng điện. Viết công thức của V(t) theo H(t). (Chú ý là bắt đầu lúc t = 5 tương ứng với một phép tịnh tiến.

58. Hàm số Heaviside định nghĩa trong Bài tập 57 có thể dùng để định nghĩa hàm số biến điện y = ctH(t), biểu thị một sự gia tăng điện thế dần dần trong một dòng điện.

(a) Vẽ đồ thị của hàm số biến điện y = tH(t).

(b) Vẽ đồ thị của điện thế V(t) của dòng điện nếu cầu dao đóng lại lúc t = 0 và điện thế tăng từ từ đến 120 volts trong khoảng thời gian 60 giây. Viết công thức của V(t) theo H(t) với t ≤ 60.

(c) Vẽ đồ thị của V(t) trong dòng điện nếu cầu dao đóng lúc t = 7 giây và điện thế tăng từ từ đến 100 volts trong khoảng thời gian 25 giây. Viết công thức của V(t) theo H(t) với t ≤ 32.

59. Cho f và g là các hàm số tuyến tính có phương trình $f(x) = m_1x + b_1$ và $g(x) = m_2x + b_2$. Thế thì f ο g có phải cũng là hàm số tuyến tính không? Nếu phải, độ dốc của đồ thị này là gì?

60. Nếu bạn đầu tư x đô la với lãi suất hàng năm 4%, thế thì số tiền đầu tư A(x) sau một năm là A(x) = 1.04x. Tìm A ο A, A ο A ο A và A ο A ο A ο A. Những hàm số hợp này biểu thị điều gì? Tìm công thức cho hàm số hợp với n hàm số A.

61. (a) Nếu g(x) = 2x + 1 và $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, tìm hàm số f sao cho f ο g = h.

(b) Nếu f(x) = 3x + 5 và $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, tìm hàm số g sao cho f ο g = h.

62. Nếu f(x) = x + 4 và h(x) = 4x - 1, tìm hàm số g sao cho g ο f = h.

63. (a) Giả sử f và g là những hàm số chẵn. Bạn có thể nói gì về f + g và fg?

(b) Kết quả ra sao nếu f và g đều lẻ?

64. Giả sử f chẵn và g lẻ. Bạn có thể nói gì về fg?

65. Giả sử g là hàm số chẵn và cho h = f ο g. Có phải h luôn luôn là hàm số chẵn không?

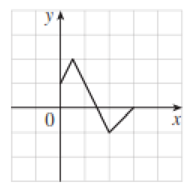
66. Giả sử g là hàm số lẻ và cho h = f ο g. Có phải h luôn luôn là hàm số lẻ không? Kết quả thế nào nếu f lẻ? nếu f chẵn?

ĐÁP SỐ

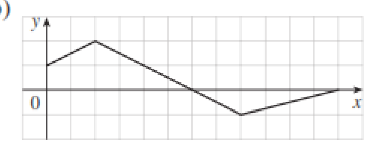
1. (a) $y = f(x) + 3$ (b) $y = f(x) - 3$ (c) $y = f(x - 3)$
(d) $y = f(x + 3)$ (e) $y = -f(x)$ (f) $y = f(-x)$
(g) $y = 3f(x)$ (h) $y = \frac{1}{3}f(x)$

3. (a) 3 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 2

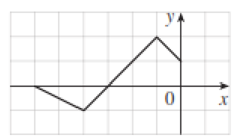
5. (a)



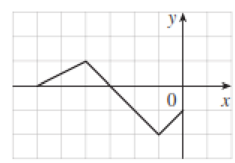
(b)



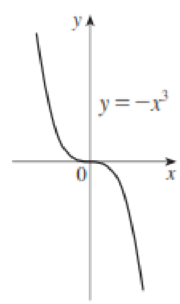
(c)



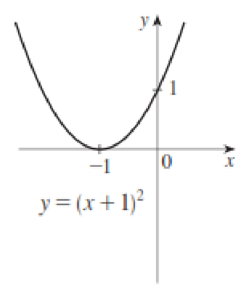
(d)



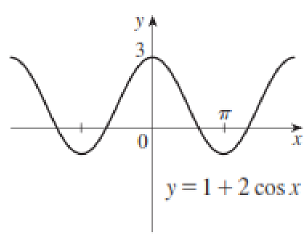
9.



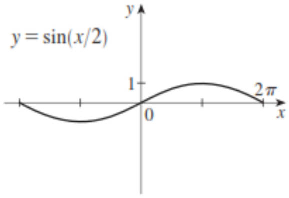
11.



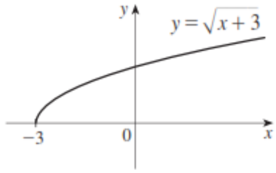
13.



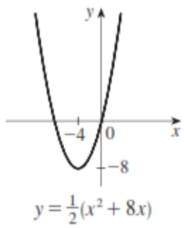
15.



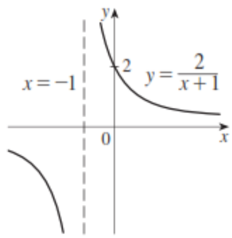
17.



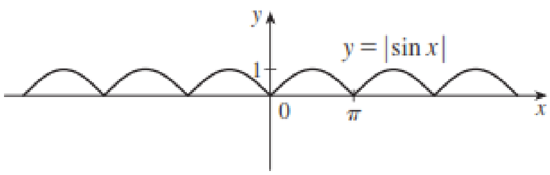
19.



21.



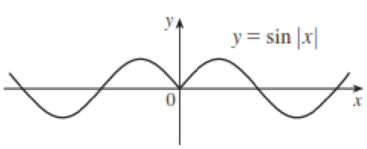
23.



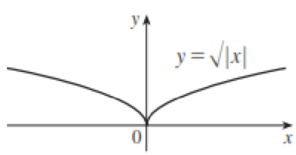
25. $L(t) = 12 + 2\sin\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$

27. (a) The portion of the graph of $y = f(x)$ to the right of the y-axis is reflected about the y-axis.

(b)



(c)



29. $(f + g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1$, $(-\infty, \infty)$
$(f - g)(x) = x^3 - x^2 + 1$, $(-\infty, \infty)$
$(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2$, $(-\infty, \infty)$
$(f/g)(x) = (x^3 + 2x^2)/(3x^2 - 1)$, $\{x \mid x \neq \pm 1/\sqrt{3}\}$

31. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x$, $(-\infty, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1$, $(-\infty, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2$, $(-\infty, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = 4x + 3$, $(-\infty, \infty)$

33. (a) $(f \circ g)(x) = 1 - 3\cos x$, $(-\infty, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = \cos(1 - 3x)$, $(-\infty, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = 9x - 2$, $(-\infty, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = \cos(\cos x)$, $(-\infty, \infty)$

35. (a) $(f \circ g)(x) = (2x^2 + 6x + 5)/[(x + 2)(x + 1)]$, $\{x \mid x \neq -2, -1\}$
(b) $(g \circ f)(x) = (x^2 + x + 1)/(x + 1)^2$, $\{x \mid x \neq -1, 0\}$
(c) $(f \circ f)(x) = (x^4 + 3x^2 + 1)/[x(x^2 + 1)]$, $\{x \mid x \neq 0\}$
(d) $(g \circ g)(x) = (2x + 3)/(3x + 5)$, $\{x \mid x \neq -2, -\frac{5}{3}\}$

37. $(f \circ g \circ h)(x) = 2x - 1$

39. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x^6 + 4x^3 + 1}$

41. $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^{10}$

43. $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x/(1 + x)$

45. $g(t) = \cos t$, $f(t) = \sqrt{t}$

47. $h(x) = x^2$, $g(x) = 3^x$, $f(x) = 1 - x$

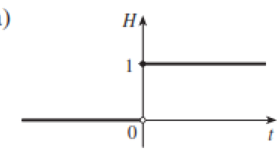
49. $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sec x$, $f(x) = x^4$

51. (a) 4 (b) 3 (c) 0 (d) Does not exist; $f(6) = 6$ is not in the domain of g. (e) 4 (f) -2

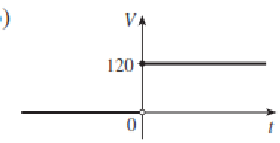
53. (a) $r(t) = 60t$ (b) $(A \circ r)(t) = 3600\pi t^2$; the area of the circle as a function of time

55. (a) $s = \sqrt{d^2 + 36}$ (b) $d = 30t$
(c) $s = \sqrt{900t^2 + 36}$; the distance between the lighthouse and the ship as a function of the time elapsed since noon

57. (a)

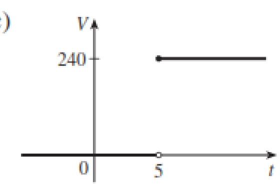


(b)



$V(t) = 120H(t)$

(c)



$V(t) = 240H(t - 5)$

59. Yes; $m_1 m_2$

61. (a) $f(x) = x^2 + 6$ (b) $g(x) = x^2 + x - 1$

63. (a) Even; even (b) Odd; even

65. Yes

BÀI 1. 5. HÀM SỐ MŨ

Hàm số $f(x) = 2^x$ được gọi là hàm số mũ bởi vì biến số x là số mũ. Không nên lầm lẫn với hàm số lũy thừa $f(x) = x^2$, trong đó biến số x là cơ số.

Tổng quát, **hàm số mũ** là hàm số có dạng

$$f(x)= a^x$$

trong đó a là một hằng số dương. Hãy nhìn lại điều này có nghĩa là gì.

Nếu x = n, một số nguyên dương, thế thì

$$a^x = \underbrace{a \,.\, a \,.\,.\,.\,.\, a}_{\text{n thừa số}}$$

Nếu x = 0, thì $a^0 = 1$, và nếu x = - n, với n nguyên dương, thì

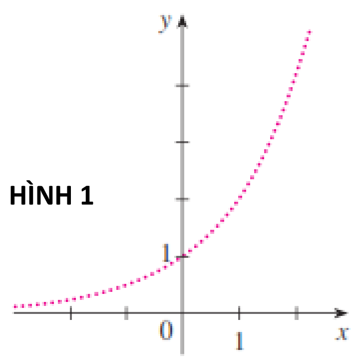
$$a^{-n} = 1/a^n$$

Nếu x là số hữu tỷ, x = p/q, trong đó p, q là số nguyên và q > 0, thế thì

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Nhưng a^x có nghĩa là gì nếu x là số vô tỷ? Chẳng hạn, $2^{\sqrt{3}}$ hoặc 5^π có nghĩa là gì?

Để trả lời câu hỏi này trước tiên chúng ta hãy nhìn đồ thị hàm số $y = 2^x$ trong đó x là số hữu tỷ (Hình 1). Chúng ta muốn mở rộng tập xác định của hàm số này để bao gồm cả số hữu tỷ lẫn vô tỷ.



HÌNH 1

Đồ thị hàm số này có nhiều lỗ hổng ứng với những giá trị vô tỷ của x. Chúng ta muốn lấp đầy những lỗ hổng bằng cách định nghĩa $f(x) = 2^x$, trong đó $x \in R$, sao cho f là hàm số đồng biến. Đặc biệt , vì số vô tỷ $\sqrt{3}$ thỏa

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

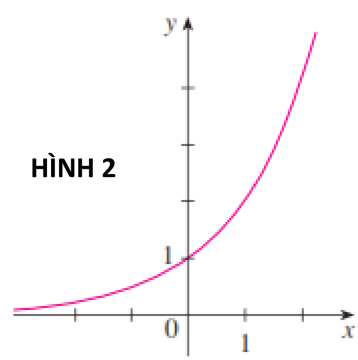
Chúng ta phải có

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

và chúng ta hiểu ý nghĩa của số $2^{1.7}$ và $2^{1.8}$ vì các số 1.7 và 1.8 hữu tỷ. Tương tự nếu chúng ta sử dụng giá trị gần đúng tốt hơn cho $\sqrt{3}$, chúng ta sẽ được giá trị gần đúng tốt hơn cho $2^{\sqrt{3}}$.

$$1.73 < \sqrt{3} < 1.74 \quad \Rightarrow 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74}$$
$$1.732 < \sqrt{3} < 1.733 \quad \Rightarrow 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733}$$
$$1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 \quad \Rightarrow 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321}$$

. . . .
. . . .
. . . .



HÌNH 2

Ta có thể chứng tỏ rằng có đúng một số lớn hơn tất cả những số

$$2^{1.7}, 2^{1.73}, 2^{1.732}, 2^{1.7320}, \ldots$$

và nhỏ hơn tất cả những số

$$2^{1.8}, 2^{1.74}, 2^{1.733}, 2^{1.7321}, \ldots$$

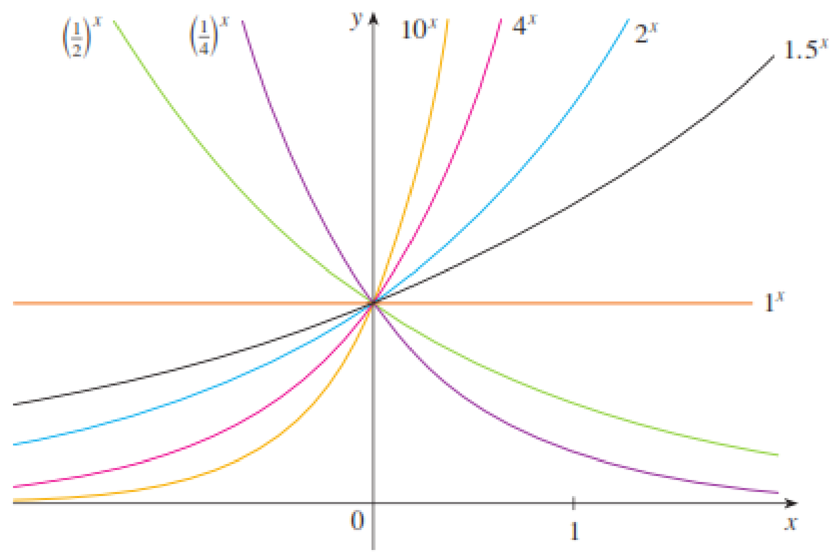
Ta định nghĩa số này là $2^{\sqrt{3}}$. Sử dụng các phép tinh gần đúng trên ta có thể tính $2^{\sqrt{3}}$ đúng với sáu chữ số thập phân:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

Tương tự ta có thể định nghĩa 2^x (hoặc a^x, nếu a > 0) trong đó x là số vô tỷ. Như thế ta đã lấp đầy những lỗ hổng trong đồ thị ở Hình 1 và đồ thị bây giờ có dạng như Hình 2.

Đồ thị của họ hàm số $y = a^x$ được vẽ trong Hình 3 với những giá trị khác nhau của cơ số a. Chú ý là những đồ thị đều qua điểm (0, 1) vì $a^0 = 1$ với mọi $a > 0$. Cũng lưu ý rằng khi cơ số a càng lớn, hàm số mũ tăng rất nhanh (với $x > 0$.

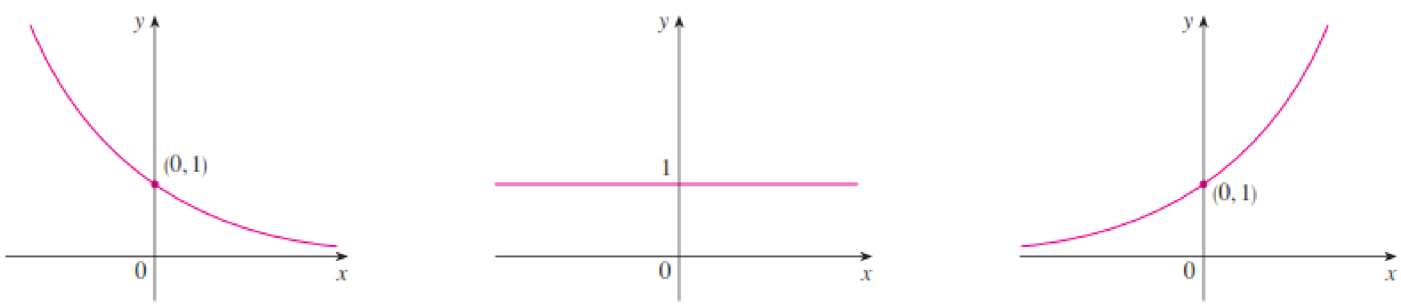
Nếu $0 < a < 1$ thì a^x tiến đến 0 khi x càng lớn. Nếu $a > 1$ thì a^x tiến đến 0 khi x giảm bằng những giá trị âm. Trong cả hai trường hợp, trục hoành là tiệm cận ngang. Vấn đề này sẽ được đề cập trung Bài 2.6.



HÌNH 3

Qua hình vẽ, ta có thể thấy có 3 loại hàm số mũ. Nếu $0 < a < 1$, hàm số mũ nghịch biến ; nếu a = 1, ta có hàm số hằng, nếu a > 1 hàm số mũ đồng biến. Ba trường hợp này được minh họa trong hình 4. Nhận xét là hàm số mũ $y = a^x$ có tập xác định là R và tập giá trị là (0, oo). Cũng chú ý rằng, vì $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, nên đồ thị hàm số $y = (1/a)^x$ chính là đối xứng của đồ thị $y = a^x$ qua trục y.

HÌNH 4



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

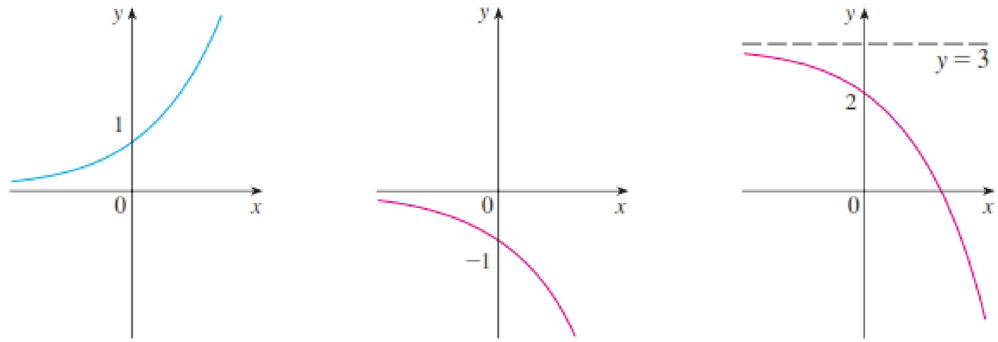
Một lý do cho thấy sự quan trọng của hàm số mũ là tính chất sau của nó. Nếu x, y là những số hữu tỷ, những qui luật này ta đã biết trong đại số. Nhưng với x, y thực thì qui luật trên vẫn đúng.

QUI LUẬT SỐ MŨ Nếu a và b là những số dương và x, y là những số thực, thế thì

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ 2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ 3. $(a^x)^y = a^{xy}$ 4. $(ab)^x = a^x b^x$

VÍ DỤ 1 Vẽ đồ thị hàm số $y = 3 - 2^x$ và xác định tập xác định và tập giá trị của nó.

GIẢI Trước hết ta lấy đối xứng của đồ thị $y = 2^x$ [trong Hình 2 và 5(a)] qua trục x để được đồ thị hàm số $y = - 2^x$ trong Hình 5(b). Sau đó ta dời tịnh tiến đồ thị $y = - 2^x$ lên trên 3 đơn vị để được đồ thị $y = 3 – 2^x$ (Hình 5(c). Tập xác định là R và tập giá trị là (- oo, 3).



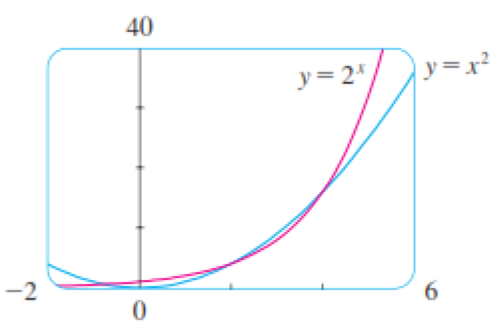
(a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$

HÌNH 5

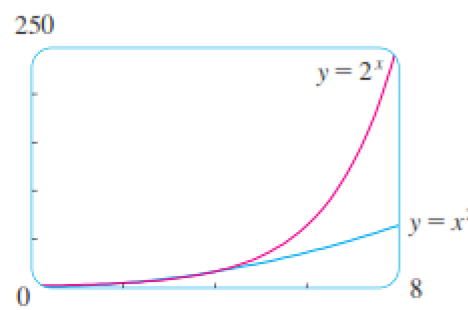
VÍ DỤ 2 Dùng phần mềm vẽ đồ thị để so sánh hàm số mũ $f(x) = 2^x$ và hàm số lũy thừa $g(x) = x^2$. Hàm số nào tăng nhanh hơn khi x lớn.

GIẢI Hình 6 cho thấy đồ thị của hai hàm số trong khung hình chữ nhật [- 2, 6] và [0, 40]. Ta thấy rằng đồ thị của chúng giao nhau ba lần, nhưng với x > 4 đồ thị của $f(x) = 2^x$ nằm phía trên đồ thị $g(x) = x^2$. Hình 7 cho ta một cái nhìn bao quát hơn, chứng tỏ rằng đối với những giá trị lớn của x, hàm số mũ $y = 2^x$ tăng vượt xa hàm số lũy thừa $y = x^2$ một cách nhanh chóng.

Để thí nghiệm xem $y = 2^x$ tăng nhanh cở nào, ta lấy một tờ giấy có độ dày 1/1000 inxơ. Sau đó gấp tờ giấy làm đôi, rồi làm đôi nữa, cứ thế đến 50 lần. Mỗi lần gấp làm đôi độ dày trang giấy tăng lên 2 lần , như vậy cuối cùng độ dày trang giấy là $2^{50}/1000$ in-xơ. Bạn nghĩ là bao nhiêu? Bạn có tin không: dày đến 17 triệu dặm!



HÌNH 6



HÌNH 7

ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ MŨ

Hàm số mũ xuất hiện rất thường trong các mô hình toán học của tự nhiên và xã hội. Ở đây ta chỉ ra một cách vắn tắt sự hiện diện của nó trong sự gia tăng dân số. Trong chương 3 ta sẽ trở lại vấn đề này và những ứng dụng khác chi tiết hơn.

Trước tiên chúng ta xét dân số của vi khuẩn trong môi trương dinh dưỡng đồng nhất. Giả sử lấy mẫu dân số trong một khoảng thời gian nào đó, ta thấy rằng dân số vi khuẩn tăng gấp đôi mỗi giờ. Nếu số vi khuẩn tại thời điểm t là p(t), trong đó t đo bằng đơn vị giờ, và p(0) = 1000, thế thì ta có

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

Tổng quát ta có

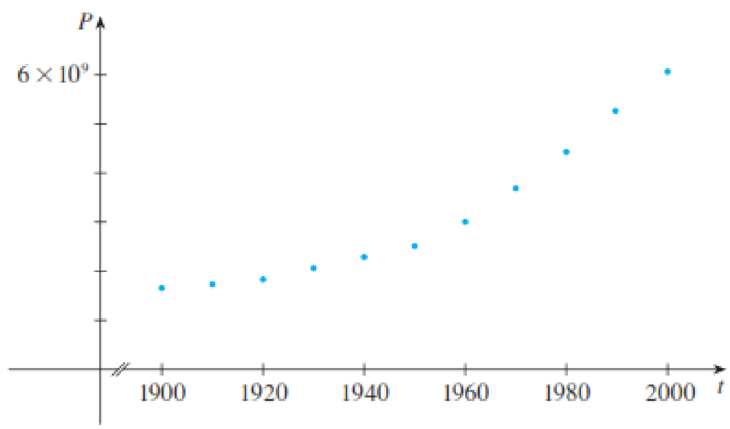
$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

Dân số này là bội số của hàm số mũ $y = 2^t$, cho thấy sự gia tăng dân số mau lẹ như ta đã thấy trong Hình 2 và 7. Trong những điều kiện lý tưởng (không gian và dinh dưỡng vô giới hạn và không bị bệnh tật) sự tăng trưởng mũ tiến là điển hình của những gì xãy ra trong tự nhiên.

Còn về dân số nhân loại thì sao? Bảng I cho thấy những dữ liệu dân số thế giới trong thế kỷ 20 và hình dưới là biểu đồ phân tán của chúng.

TABLE I

Year	Population (millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

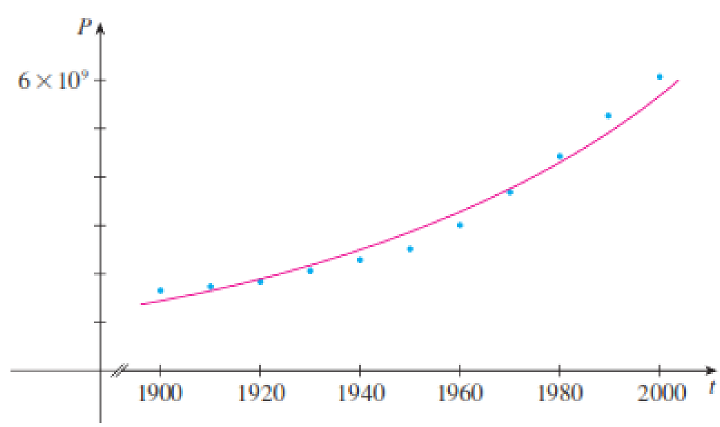


HÌNH 8

Cách bố trí các điểm dữ liệu cho thấy sự tăng trưởng là theo hàm số mũ. Sử dụng máy vẽ đồ thị có công cụ hồi quy theo hàm mũ bằng phương pháp bình phương cực tiểu, ta được mô hình mũ như sau:

$$P = (0.008079266) .(1.013731)^t$$

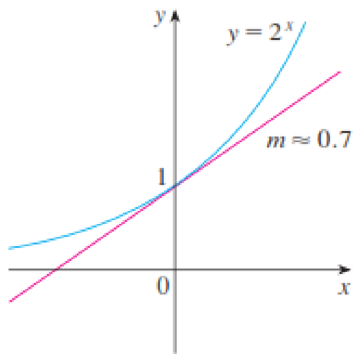
Hình 9 cho thấy đồ thị hàm số mũ này rất khớp với đồ thị các điểm phân tán của dân số. Thời kỳ tăng trưởng dân số tương đối chậm có thể giải thích là do hai cuộc thế chiến và Cuộc Đại Suy Thoái những năm 1930.



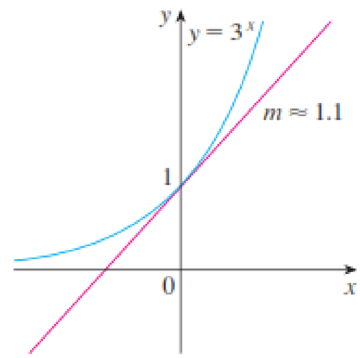
HÌNH 9

SỐ e

Trong tất cả cơ số của hàm số mũ, có một cơ số rất thuận tiện cho mục đích giải tích. Việc lựa chọn một cơ số a bị ảnh hưởng bởi cách thức đồ thị hàm số $y = a^x$ đi ngang qua trục y. Hai hình dưới cho thấy những tiếp tuyến với đồ thị $y = 2^x$ và $y = 3^x$ tại điểm (0, 1). (Đường tiếp tuyến sẽ được định nghĩa chính xác trong phần 2.7. Vì mục tiêu trước mắt, ta tạm hiểu tiếp tuyến của đồ thị hàm số mũ tại một điểm là đường thẳng chỉ chạm đồ thị tại điểm đó.) Nếu chúng ta đo độ dốc (hệ số góc) của những tiếp tuyến tại điểm (0, 1), ta được m $\approx$ 0.7 với y = 2^x và m $\approx$ 1.1 với y = 3^x.

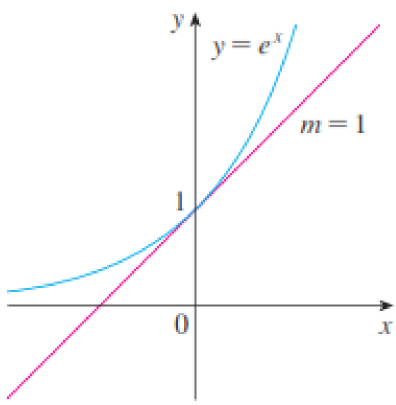


HÌNH 10

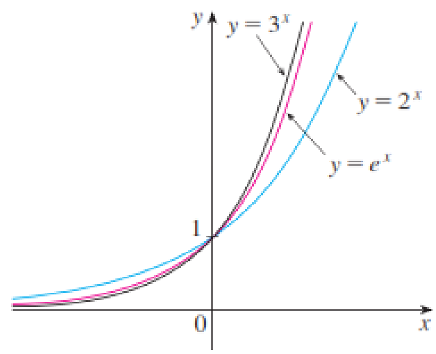


HÌNH 11

Vấn đề là, như chúng ta sẽ thấy trong Chương 3, một số công thức sẽ thành đơn giản hơn khi ta chọn cơ số a sao cho độ dốc của tiếp tuyến tại điểm (0, 1) *đúng* bằng 1. (Xem Hình 12). Đúng là có một số như thế và nó được kí hiệu là e. (Kí hiệu này do nhà toán học Thụy Sĩ Leonhard Euler chọn vào năm 1727 chắc chắn bởi vì đó là kí tự đều tiên của *từ exponential* (mũ.) Dựa vào hai hình trên, có thể thấy ngay là số e nằm giữa 2 và 3 và đồ thị y = e^x nằm giữa đồ thị y = 2^x và y = 3^x. (Hình 13.) Trong Chương 3 chúng ta sẽ biết rằng giá trị e, đúng đến năm chữ số thập phân, là
e $\approx$ 2.71828. Hàm số y = e^x được gọi là *hàm số mũ tự nhiên*.



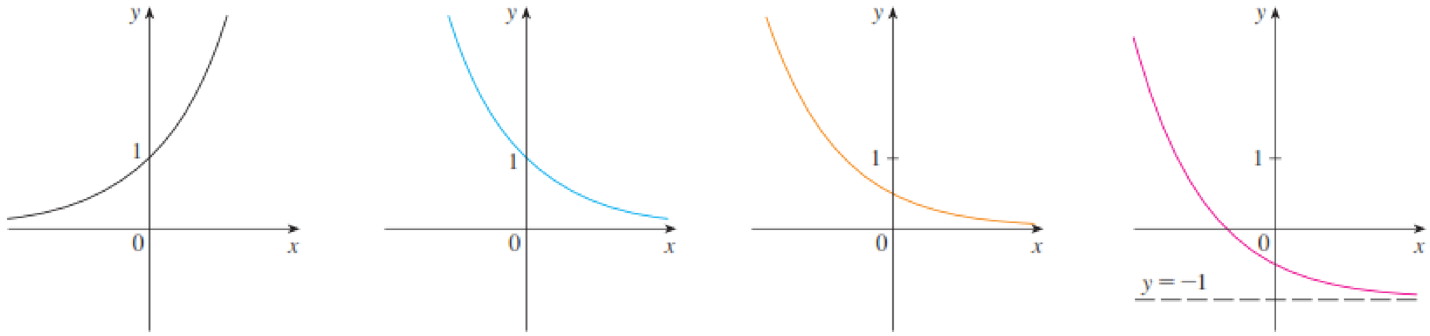
HÌNH 12



HÌNH 13

VÍ DỤ 3 Vẽ đồ thị hàm số y = $\frac{1}{2}e^{-x}$ - 1 và cho biết tập xác định và tập giá trị.

GIẢI Bắt đầu bằng đồ thị y = e^x từ Hình 12 và 14(a) rồi lấy đối xứng của nó qua trục y để được đồ thị y = e^{-x} như trong Hình 14(b). (Chú ý đồ thị qua trục y với độ dốc là - 1. Sau đó ta co dọc đồ thị theo hệ số 2 để được đồ thị y = $\frac{1}{2}e^{-x}$ như Hình 14(c). Cuối cùng, ta dời tịnh tiến đồ thị xuống dưới 1 đơn vị để được đồ thị cần tìm như trong Hình 14(d). Tập xác định là R và tập giá trị là (- 1, oo).



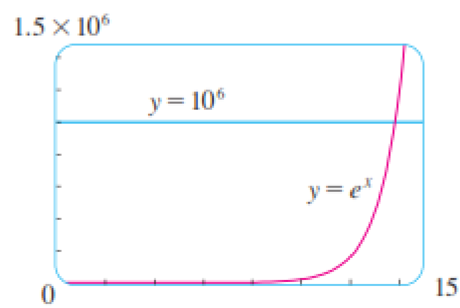
(a) $y = e^x$ (b) $y = e^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

HÌNH 14

Theo bạn, phải lấy x bằng bao nhiêu để giá trị của e^x vượt quá một triệu. Ví dụ sau sẽ cho thấy hàm số $y = e^x$ tăng lên nhanh cỡ nào, sẽ khiến bạn phải ngạc nhiên.

VÍ DỤ 4 Dùng phần mềm vẽ đồ thị để tìm giá trị của x sao cho $e^x > 1{,}000{,}000$.

GIẢI Trong Hình 15, ta vẽ đồ thị hàm số $y = e^x$ và đường thẳng $y = 1{,}000{,}000$ nằm ngang. Ta thấy rằng những đường này cắt nhau khi $x \approx 13.8$. Do đó $e^x > 10^6$ khi $x > 13.8$. Đúng là khá ngạc nhiên khi chỉ cần x = 14 là e^x đã vượt quá một triệu.



HÌNH 15

BÀI TẬP

1. (a) Viết một phương trình định nghĩa hàm số mũ với cơ số a > 0.

(b) Tìm tập xác định của hàm số này.

(c) Nếu $a \neq 1$, tập giá trị là gì?

(d) Phác họa dạng tổng quát của đồ thị của hàm số mũ trong mỗi trường hợp sau.

(i) a > 1 (ii) a = 1 (iii) 0 < a < 1

2. (a) Số e được định nghĩa như thế nào?

(b) Giá trị gần đúng của e là bao nhiêu?

(c) Hàm số mũ tự nhiên là gì?

3-6 Dùng máy vẽ đồ thị hàm số đã cho trên cùng một hệ trục. Những đồ thị này liên hệ sau như thế nào?

3. $y = 2^x$; $y = e^x$; $y = 5^x$; $y = 20^x$.

4. $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $y = 8^x$; $y = 8^{-x}$

5. $y = 3^x$; $y = 10^x$; $y = 1/3)^x$; $y = (1/10)^x$

6. $y = 0.9^x$; $y = 0.6^x$; $y = 0.3^x$; $y = 0.1^x$

7-12 Vẽ phác đồ thị các hàm số sau, không dùng máy, chỉ dùng đồ thị đã vẽ trong Hình 3 và 12, và nếu cần, sử dụng các phép biến đổi trong Bài 1.3.

7. $y = 4^x - 3$ **8.** $y = 4^{x-3}$

9. $y = -2^{-x}$ **10.** $y = 1 + 2e^x$

11. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$ **12.** $Y = 2(1 - e^x)$

13. Bắt đầu với đồ thị hàm số y = ex, hãy viết phương trình của đồ thị có được bằng cách
(a) dời xuống 2 đơn vị
(b) dời phải 2 đơn vị
(c) lật đối xứng qua trục x
(d) lật đối xứng qua trục y
(e) lật đối xứng qua trục x rồi qua trục y

14. Bắt đầu với đồ thị hàm số y = ex, hãy viết phương trình của đồ thị có được bằng cách
(a) lật đối xứng qua đường thẳng y = 4
(b) lật đối xứng qua đường thẳng x = 2

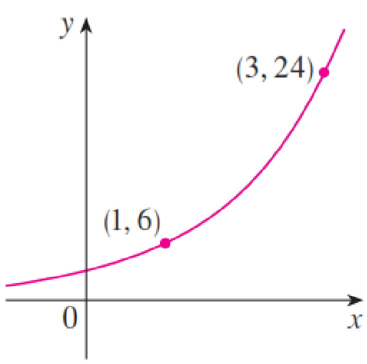
15-16 Tìm tập xác định hàm số.

15. (a) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$

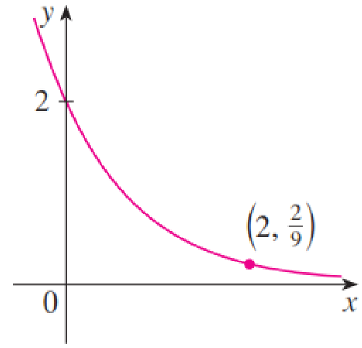
16. (a) $g(t) = \sin(e^{-t})$ (b) $g(t) = \sqrt{1-2^t}$

17 -18. Tìm hàm số mũ có dạng $f(x) = Ca^x$ có đồ thị cho bởi hình dưới.

17.



18.



19. Nếu $f(x) = 5^x$, chứng tỏ rằng

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h-1}{h}\right)$$

20. Giả sử bạn được giao một công việc kéo dài một tháng 30 ngày. Trong 2 cách trả lương cho bạn sau đây, bạn thích cách nào?
I. Một triệu đô la nhận cuối tháng.
II. Một xu vào ngày thứ nhất, hai xu vào
ngày thứ hai, bốn xu vào ngày thứ ba, và , tổng quát 2^{n-1} xu vào ngày thứ n.

21. Gỉa sử các đồ thị $f(x) = x^2$ và $g(x) = 2^x$ được vẽ trong cùng một hệ trục có đơn vị là 1 in-xơ. Chứng tỏ rằng, ở khoảng cách 2 ft về bên phải của điểm gốc,. chiều cao của đồ thị f là 48 ft trong khi chiều cao của đồ thị g là 265 dặm.

22. So sánh hàm số $f(x) = x^5$ và $g(x) = 5^x$ bằng cách vẽ chúng (bằng máy) trong vài màn hình có kích thước khác nhau. Tìm tât cả giao điểm của hai đồ thị đúng đến một chữ số thập phân. Hàm số nào tăng nhanh hơn khi x lớn.

23. So sánh hàm số $f(x) = x^{10}$ và $g(x) = e^x$ bằng cách vẽ chúng (bằng máy) trong vài màn hình có kích thước khác nhau. Khi nào đồ thị g cuối cùng vượt qua đồ thị f?

24. Dùng đồ thị vẽ bằng máy để ước tính giá trị x sao cho $e^x > 1,000,000,000$.

25. Trong điều kiện lý tưởng một dân số vi khuẩn tăng gấp đôi mỗi 3 giờ. Giả sữ dân số ban đầu là 100 vi khuẩn.
(a) Tìm kích thước dân số sau 15 giờ.
(b) Tìm kích thước dân số sau t giờ.

(c) Ước tính kích thước dân số sau 20 giờ.

(d) Vẽ đồ thị hàm số dân số bằng máy và ước tính thời gian khi dân số đạt đến 50,000.

26. Một dân số vi khuẩn khởi đầu có 500 con, và tăng gấp đôi mỗi nửa giờ.

(a) Tìm kích thước dân số sau 3 giờ.

(b) Tìm kích thước dân số sau t giờ.

(c) Tìm kích thước dân số sau 40 phút.

(d) Vẽ đồ thị hàm số dân số bằng máy và ước tính thời gian khi dân số đạt đến 100,000.

27. Dùng máy tính bỏ túi có cơ chế tìm đường hồi quy hàm mũ để mô hình hóa dân số của thế giới từ năm 1950 đến 2000 cho bởi Bảng 1 trong bài. Dùng mô hình này để ước tính dân số năm 1993 và dự đoán dân số năm 2010.

28. Bảng dưới đây ghi lại dân số của Hoa Kỳ, đơn vị triệu, trong những năm 1900-2000. Dùng máy tính tìm đường hồi quy dạng mũ để mô hình hóa dữ liệu này. Dùng mô hình này để ước tính dân số năm 1925 và dự đoán dân số năm 2010 và 2020.

Year	Population	Year	Population
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	281
1950	150		

29. Nếu bạn vẽ đồ thị hàm số

$$f(x)=\frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$$

bạn sẽ thấy f có vẻ là một hàm số lẻ. Hãy chứng tỏ điều đó.

30. Vẽ bằng máy vài thành viên của họ đồ thị hàm số

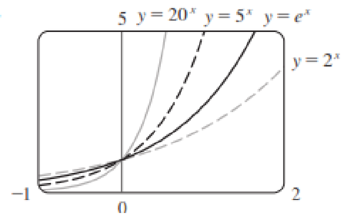
$$f(x)=\frac{1}{1+ae^{bx}}$$

trong đó a > 0. Đồ thị thay đổi thế nào khi b thay đổi? Khi a thay đổi.

ĐÁP SỐ

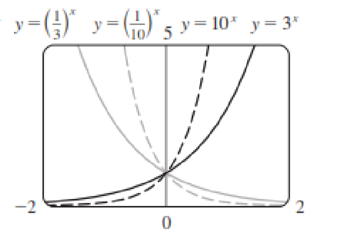
1. (a) $f(x)=a^x, a>0$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $(0,\infty)$
(d) See Figures 4(c), 4(b), and 4(a), respectively.

3.



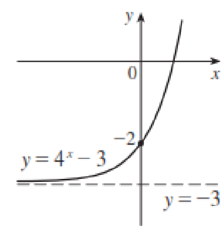
Tất cả đều tiến đến 0 khi x → ∞, tất cả đều qua điểm (0, 1), và tất cả đều đồng biến. Cơ số càng lớn, tốc độ biến thiên càng lớn

5.

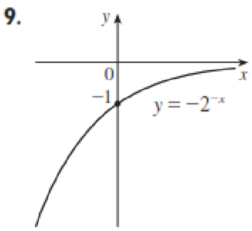


Hàm số với cơ số > 1 thì đồng biến, với cơ số < 1 thì nghịch biến. Cái này là đối xứng của cái kia qua trục y.

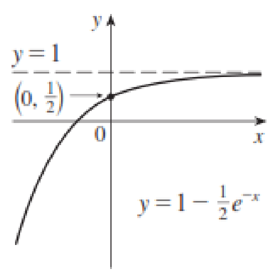
7.



9.



11.



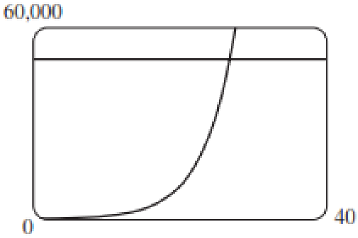
13. (a) $y=e^x-2$ (b) $y=e^{x-2}$ (c) $y=-e^x$
(d) $y=e^{-x}$ (e) $y=-e^{-x}$

15. (a) $(-\infty,\infty)$ (b) $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

17. $f(x)=3\cdot 2^x$ **23.** At $x\approx 35.8$

25. (a) 3200 (b) $100\cdot 2^{t/3}$ (c) 10,159

(d) 60,000 $t\approx 26.9$ h



27. $y=ab^t$, where $a\approx 3.154832569\times 10^{-12}$ and $b\approx 1.017764706$; 5498 million; 7417 million

BÀI 1. 6. HÀM SỐ NGƯỢC VÀ LÔGARIT

Bảng 1 cho ta dữ kiện từ một thí nghiệm trong đó môi trường nuôi cấy vi khuẩn bắt đầu với 100 con; kích thước của dân số vi khuẩn được ghi lại từng giờ. Số vi khuẩn N là hàm số theo thời gian t: N = f(t).

Giả sử nhà sinh học muốn thay đổi quan điểm của mình và tỏ ra quan tâm đến thời gian để kích thước dân số vi khuẩn đạt đến mức độ khác nhau. Nói cách khác bà ta nghĩ rằng t là hàm số theo N. Hàm số này được gọi là *hàm số ngược* của f , được kí hiệu f^{-1}, và đọc là "f ngược". Do đó t = $f^{-1}(N)$ là thời gian cần thiết để dân số đạt đến giá trị N. Giá trị của f^{-1} có thể tìm được bằng cách đọc bảng 1 trừ phải sang trái hoặc xem trực tiếp Bảng 2. Ví dụ , $f^{-1}(550) = 6$ bởi vì f(6) = 550.

BẢNG 1

t (giờ)	$N = f(t)$ = dân số tại giờ t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

BẢNG 2

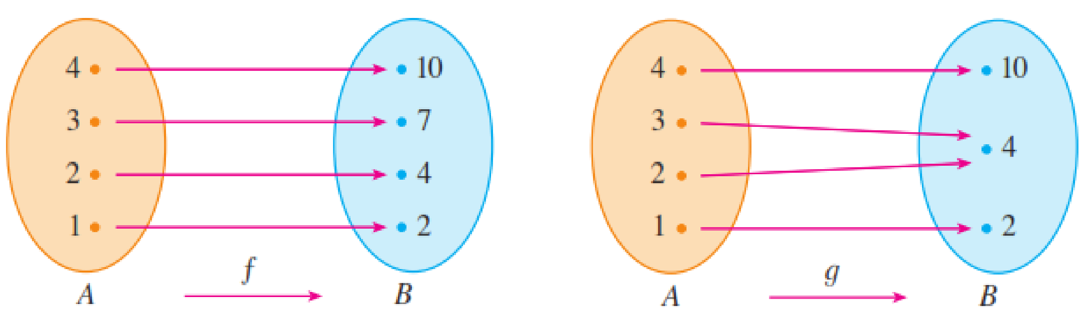
N	$t = f^{-1}(N)$ = thời gian được N vi khuẩn
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

Không phải mọi hàm số đều có hàm số ngược. Hãy so sánh các hàm số f và g có giãn đồ mũi tên như Hình 1. Chú ý là f không lấy cùng một giá trị đến hai lần (bất kì hai số nhập vào A đều có hai số xuất ra khác nhau), trong khi g lấy hai giá trị như nhau hai lần (cả 2 và 3 đều xuất ra cùng số 4). Dùng kí hiệu ta có:

$$g(2) = g(3)$$

nhưng $f(x_1) \neq f(x_2)$ bất cứ khi nào $x_1 \neq x_2$

Các hàm số f có tính chất này gọi là *hàm số một-một.*



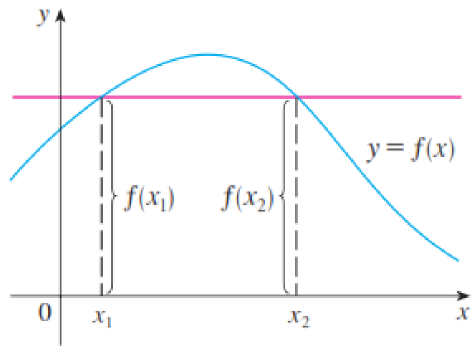
HÌNH 1

> **I ĐỊNH NGHĨA** Một hàm số gọi là hàm số một-một nếu nó không bao giờ xuất cùng một giá tri đến hai lần, nghĩa là,
>
> $f(x_1) \neq f(x_2)$ khi nào $x_1 \neq x_2$

Nếu một đường thẳng nằm ngang cắt đồ thị f tại nhiều hơn một điểm, thế thì (xem hình dưới) chúng ta thấy rằng có hai số x_1 và x_2 sao cho $f(x_1) = f(x_2)$. Điều này có nghĩa là f không một-một. Do đó chúng ta có phương pháp hình học sau đây nhằm xác định xem một hàm số có phải một-một hay không.

HÌNH 2

Hàm số này không một-một vì $f(x_1) = f(x_2)$



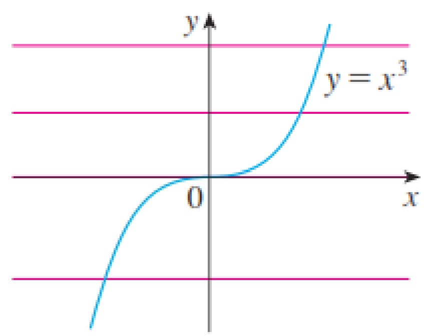
KIỂM TRA BẰNG ĐƯỜNG NẰM NGANG Một hàm số là một-một khi và chỉ khi không có đường nằm ngang nào cắt đồ thị của nó tại nhiều hơn một điểm.

VÍ DỤ 1 Hàm số $f(x) = x^3$ có một-một không?

GIẢI

Cách 1 Nếu $x_1 \neq x_2$, thì $x_1^3 \neq x_2^3$ (hai số khác nhau không thể có chung một lập phương). Do đó f là hàm số một-một.

Cách 2 Nếu vẽ được đồ thị hàm số f (Hình 3), ta thấy rằng không có đường nằm ngang nào cắt đồ thị tại nhiều hơn một điểm. Do đó f là hàm số một-một.



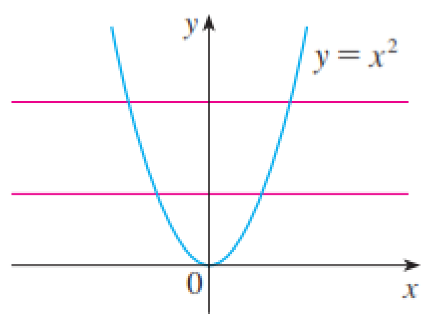
HÌNH 3

VÍ DỤ 2 Hàm số $f(x) = x^2$ có một-một không?

GIẢI

Cách 1 Hàm số này không một-một vì, chẳng hạng, g(1) = 1 = g(- 1) và như thế 1 và - 1 có cùng số xuất.

Cách 2 Với đồ thị của hàm số ở hình bên ta thấy có (và có vô số !) những đường nằm ngang cắt đồ thị tại nhiều hơn một điểm. Do đó g không một-một.



HÌNH 4

Hàm số một-một quan trọng bởi vì chúng là hàm số sở hữu hàm số ngược theo định nghĩa sau.

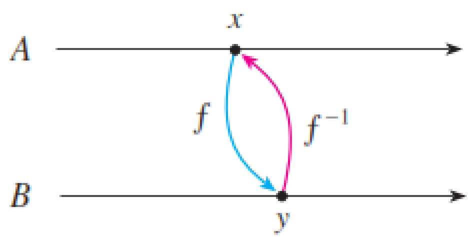
2 ĐỊNH NGHĨA Nếu f là hàm số một-một với tập xác định A và tập giá trị B. Thế thì hàm số ngược f^{-1} có tập xác định B và tập giá trị A và định bởi

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

với mọi y thuộc B.

Định nghĩa này cho thấy nếu f ánh xạ x vào y, thì f^{-1} ánh xạ y trở lại vào x. (Nếu f không một-một thì f^{-1} không tồn tại.) Giãn đồ mũi tên trong Hình 5 chỉ ra rằng f^{-1} làm đảo ngược chức năng của f. Chú ý rằng

tập xác định của f^{-1} = tập giá trị của f
tập giá trị của f^{-1} = tập xác định của f



HÌNH 5

Ví dụ, hàm số ngược của $f(x) = x^3$ là $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ bởi vì nếu $y = x^3$ thì

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

CẨN THẬN Đừng lầm lẫn khi nghĩ rằng số - 1 trong ký hiệu f^{-1} là một lũy thừa. Tức là

f^{-1} **không** phải là $\dfrac{1}{f(x)}$

Tuy vậy ***số*** nghịch đảo 1/f(x) có thể được viết là $[f(x)]^{-1}$.

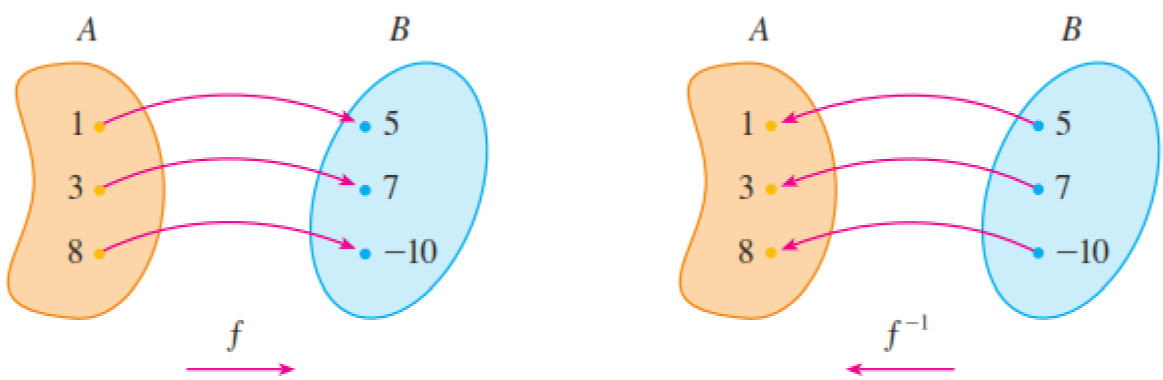
VÍ DỤ 1 Nếu f(1) = 5, f(3) = 7, và f(8) = - 10, tìm $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$, và $f^{-1}(-10)$.

GIẢI Từ định nghĩa của f^{-1} ta có ngay

$f^{-1}(7) = 3$ vì $f(3) = 7$
$f^{-1}(5) = 1$ vì $f(1) = 5$
$f^{-1}(-10) = 8$ vì $f(8) = -10$

Giãn đồ trong Hình 6 cho thấy rõ f^{-1} đảo ngược chức năng của f như thế nào.

HÌNH 6



` Kí tự x theo truyền thống được dùng để chỉ biến số độc lập, vì thế nếu đặt trọng tâm vào f^{-1} chứ không vào f , ta phải hoán đổi vai trò của x và y trong định nghĩa 2 và viết lại như sau

3 $\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$

Trong định nghĩa 2 thế y và trong định nghĩa (3) thế x, ta được các đẳng thức "hoá giải" sau:

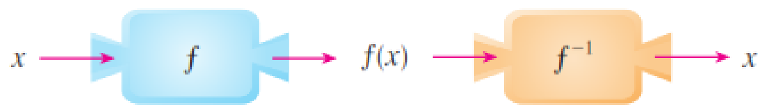
4

$f^{-1}(f(x)) = x$ với mọi x thuộc A

$f(f^{-1}(x)) = x$ với mọi x thuộc B

Đẳng thức này chỉ ra rằng nếu bắt đầu bằng x, sử dụng f, và rồi sử dụng f^{-1}, ta trở về giá trị x ban đầu. Tức f^{-1} đã "hoá giải" f. Đẳng thức sau chứng tỏ f "hoá giải" f^{-1}.

HÌNH 7



Ví dụ, nếu $f(x) = x^3$, thì $f^{-1}(x) = x^{1/3}$, đẳng thức trên thành

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})3 = x$$

Những đẳng thức này cho thấy rằng hàm số bậc ba và hàm số căn bậc ba "hóa giải" lẫn nhau.

Bây giờ ta sẽ chỉ cách tìm hàm số ngược. Nếu ta có hàm số y = f(x) và có thể giải phương trình này để tính x theo y, thế thì theo định nghĩa 2 ta phải có $x = f^{-1}(y)$. Nếu chúng ta muốn gọi x là biến số độc lập, chúng ta phải hoán đổi vai trò của x và y và được phương trình $y = f^{-1}(x)$.

5 CÁCH TÌM HÀM SỐ ĐẢO CỦA HÀM SỐ MỘT-MỘT f

Bước 1 Viết y = f(x).

Bước 2 Giải phương trình này để tính x theo y (nếu có thể).

Bước 3 Để biểu diễn f^{-1} thành hàm số theo x, ta hoán đổi x và y. Kết quả là $y = f^{-1}(x)$

VÍ DỤ 4 Tìm hàm số ngược của hàm số $f(x) = x^3 + 2$.

GIẢI Theo phương pháp 5 ta viết

$$y = x^3 + 2$$

Ta sẽ giải phương trình này để tìm x:

$$x^3 = y - 2 \qquad \text{hay} \qquad x = \sqrt[3]{y-2}$$

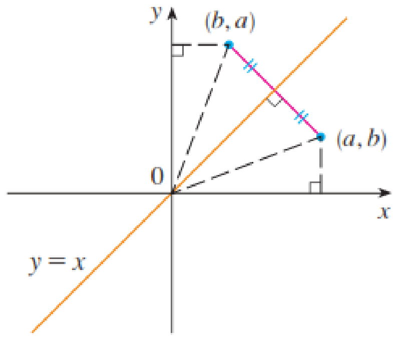
Cuối cùng, ta hoán đổi x và y:

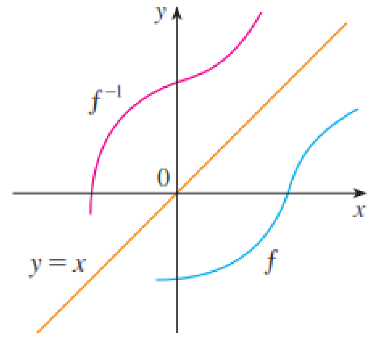
$$y = \sqrt[3]{x-2}$$

Do đó hàm số ngược cần tìm là $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

Nguyên tắc hoán đổi x và y khi tìm hàm số ngược cũng cho ta phương pháp tìm được đồ thị của f^{-1} từ đồ thị của f. Vì f(a) = b khi và chỉ khi $f^{-1}(b) = a$, điểm (a, b) thuộc đồ thị f khi và chỉ khi điểm (b, a) thuộc đồ thị của f^{-1}. Nhưng ta thấy ngay điểm (b, a) là đối xứng của điểm (a, b) qua đường thẳng y = x (Hình 8.)

HÌNH 8





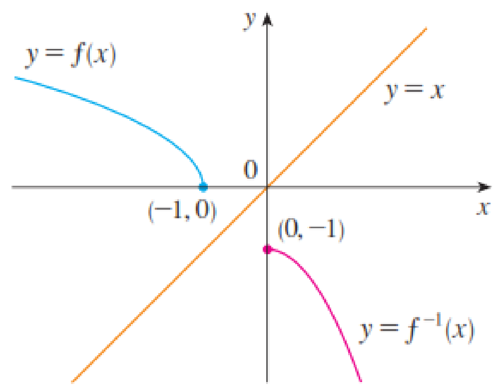
HÌNH 9

Do đó, như minh họa ở Hình 9:

Đồ thị của f^{-1} có được bằng cách lấy đối xứng của đồ thị f qua đường thẳng y = x

VÍ DỤ 5 Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{-1-x}$ và hàm số ngược của nó trong cùng một hệ trục toạ độ.

GIẢI Đầu tiên ta vẽ đồ thị $y = \sqrt{-1-x}$ (nửa phần trên của parabol $y^2 = -1 - x$, hoặc $x = -y^2 - 1$) và sau đó lấy đối xứng qua đường thẳng y = x thì được đồ thị hàm số f^{-1}. (Xem Hình 10.) Để kiểm tra, nhận xét rằng biểu thức f^{-1} là $f^{-1}(x) = -x^2 - 1,\ x \geq 0)$. Vì thế đồ thị của f^{-1} là nửa phải của của parabol $y = -x^2 - 1$ và điều này phù hợp với hình bên.



HÌNH 10

HÀM SỐ LÔGARIT

Nếu a > 0 và a ≠ 1, hàm số mũ $f(x) = a^x$ hoặc đồng biến hoặc nghịch biến và do đó là hàm số một - một theo phép kiểm tra bằng đường nằm ngang. Do đó nó có hàm số ngược f^{-1}, được gọi là ***hàm số lôgarit cơ số a*** và được kí hiệu *là* log_a. Nếu dùng định nghĩa (3) của hàm số ngược,

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

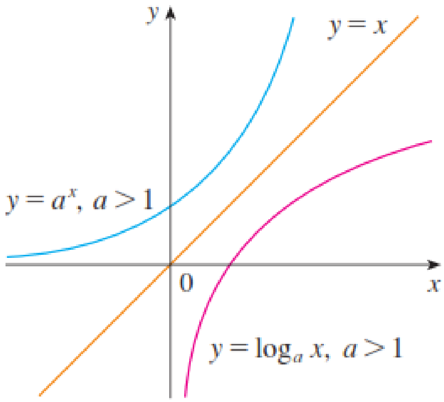
ta được

6 $$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

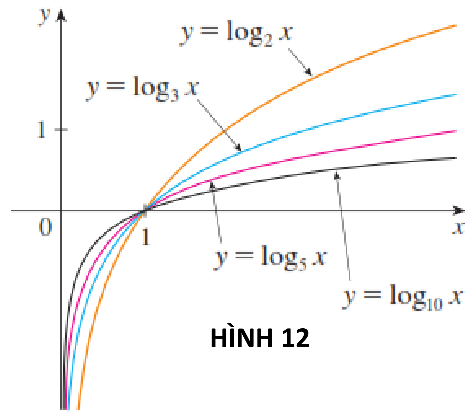
Do đó, nếu x > 0, thế thì $\log_a x$ chính là số mũ phải nâng lên cho cơ số a để được x. Ví dụ $\log_{10} 0.001 = -3$ vì $10^{-3} = 0.001$. Các đẳng thức (4) áp dụng cho hàm số $f(x) = a^x$ và $f^{-1}(x) = \log_a x$ sẽ thành

7 $$\begin{array}{ll} \log_a\left(a^x\right) = x & \forall x \in R \\ a^{\log_a x} = x & \forall x > 0 \end{array}$$

Hàm số lôgarit có tập xác định (0, oo) và tập giá trị R. Đồ thị của nó là đối xứng của đồ thị hàm số $y = a^x$ qua đường thẳng y = x.



HÌNH 11



HÌNH 12

Hỉnh 11 ứng với a > 1. (Những hàm số lôgarit quan trọng nhất có cơ số a > 1.) Do hàm số $y = a^x$ tăng rất nhanh khi x > 0 nên suy ra hàm số $y = \log_a x$ tăng rất chậm khi x > 1.

Hình 12 cho thấy những đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ với những giá trị khác nhau của a > 1. Vì $\log_a 1 = 0$ nên đồ thị của tất cả hàm số lôgarit đều qua điểm (1, 0).

Các tính chất sau đây của mọi hàm số lôgarit là kết quả của các tính chất của hàm số mũ trong bài học trước.

QUY TẮC LÔGARIT Nếu x và y là những số dương, thế thì:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\text{loga}(x/y) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (r là số thực bất kỳ)

VÍ DỤ 6 Sử dụng quy tắc lôgarit để tính $\log_2 80 - \log_2 5$.

GIẢI Theo quy tắc 2, ta có

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2(80/5) = \log_2(16) = 4$$

vì $2^4 = 16$.

LÔGARIT TỰ NHIÊN

Với mọi cơ số a của lôgarit, như ta sẽ thấy trong Chương 3 rằng lôgarit thuận tiện nhất có cơ số là e, đã biết trong bài trước. Lôgarit với cơ số e được gọi là **lôgarit tự nhiên** và được kí hiệu đặc biệt :

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Trong các giáo trình giải tích và khoa học, cũng như trong máy tính bỏ túi, người ta thường dùng ký hiệu ln x để chỉ lôgarit tự nhiên, và log x để chỉ lôgarit thông dụng, $\log_{10} x$. Nhưng trong các tài liệu toán và khoa học cao cấp, cũng như trong thuật ngữ vi tính ta lại hay dùng log x để chỉ logarit tự nhiên.

Nếu đặt a = e và thay $\log_e$ bằng "ln" trong (6) và (7), định nghĩa lôgarit tự nhiên sẽ thành

8 $$\boxed{\ln x = y \iff e^y = x}$$

9 $$\boxed{\begin{aligned} \ln(e^x) &= x, \quad x \in R \\ e^{\ln x} &= x, \quad x > 0 \end{aligned}}$$

Đặc biệt, nếu cho x = 1, ta được

$$\boxed{\ln e = 1}$$

VÍ DỤ 7 Tìm x nếu ln x = 5.

GIẢI Từ (8) ta thấy rằng

$$\ln x = 5 \quad \text{có nghĩa} \quad e^5 = x$$

Do đó $x = e^5$.

VÍ DỤ 8 Giải phương trình $e^{5-3x} = 10$.

GIẢI Lấy lôgarit tự nhiên cả hai vế của phương trình và sử dụng (9):

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$

$$5 - 3x = \ln 10$$

$$3x = 5 - \ln 10$$

$$x = {}^1/_3(5 - \ln 10)$$

Vì lôgarit tự nhiên có mặt trong máy tính bỏ túi, chúng ta có thể tính xấp xỉ giá trị của nghiệm đúng đến 4 chữ số thập phân: $x \approx 0.8991$.

VÍ DỤ 9 Biểu diễn $\ln a + {}^1/_2 \ln b$ thành một lôgarit duy nhất.

GIẢI Dùng quy tắc 3 và 1 của phép tính lôgarit, ta có

$$\ln a + {}^1/_2 \ln b = \ln a + \ln b^{1/2}$$

$$= \ln a + \ln \sqrt{b}$$

$$= \ln (a\sqrt{b})$$

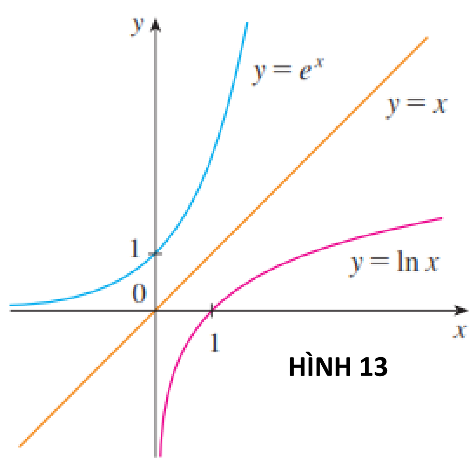
Công thức sau đây chứng tỏ lôgarit của bất kỳ cơ số nào đều cũng có thể tính theo lôgarit tự nhiên.

> **10 CÔNG THỨC ĐỔI CƠ SỐ** Với mọi số dương a (a ≠ 1), ta có
>
> $$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

CM Đặt $y = \log_a x$. Từ (6), ta có $a^y = x$. Lấy lôgarit hai vế của phương trình này, ta được $y \ln a = \ln x$. Suy ra

$$y = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \text{(ĐPCM)}$$

Máy tính có phím để tính lôgarit tự nhiên, vì thế công thức 10 cho phép ta sử dụng máy tính để tính lôgarit với bất kỳ cơ số nào (như trong ví dụ sau). Tương tự, công thức 10 cho phép ta vẽ đồ thị của bất kỳ hàm số lôgarit nào bằng phần mềm vẽ đồ thị.



HÌNH 13

VÍ DỤ 10 Tính $\log_8 5$ đúng đến sáu chữ số thập phân.

GIẢI Công thức 10 cho

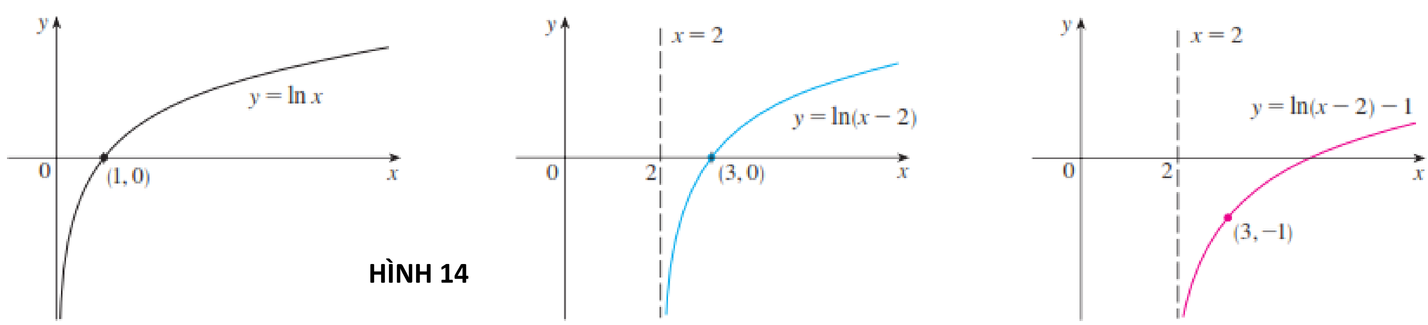
$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$

Đồ thị của hàm số mũ y = e^x và hàm số ngược của nó, hàm số lôgarit tự nhiên, được cho trong Hình 13. Vì đồ thị y = e^x qua trục y với độ dốc là 1, suy ra đồ thị đối xứng y = ln x khi qua trục x có độ dốc là 1.

Lôgarit tự nhiên, cũng như mọi lôgarit có cơ số lớn hơn 1, là hàm số đồng biến trên (0, oo) và có tiệm cận đứng là trục y. (Điều này có nghĩa giá trị của ln x tiến đến - oo khi x tiến đến 0.)

VÍ DỤ 11 Vẽ đồ thị hàm số y = ln (x - 2) - 1.

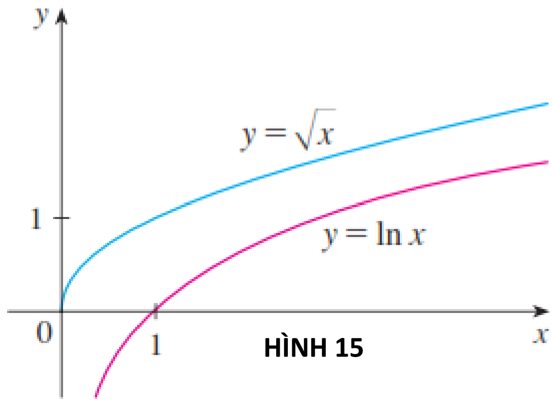
GIẢI Trước tiên ta vẽ đồ thị hàm số y = ln x như hình trên. Sau đó dời đồ thị 2 đơn vị về bên phải để được đồ thị y = ln (x - 2) và sau đó dời xuống 1 đơn vị sẽ được đồ thị y = ln (x - 2) – 1 (Hình 14.)



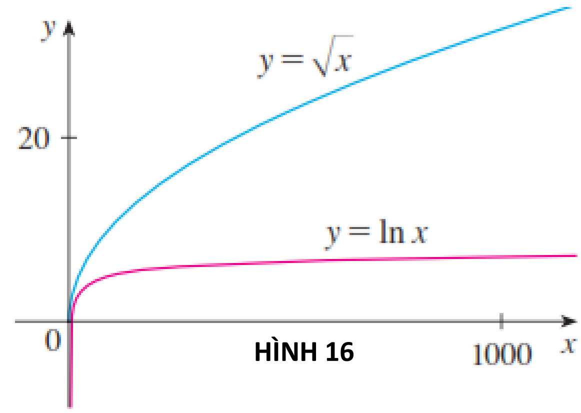
HÌNH 14

Mặc dù ln x là hàm số đồng biến, nó tăng rất chậm khi x > 1. Thật ra, ln x tăng chậm hơn bất kỳ lũy thừa dương nào của x. Để minh họa, ta hãy so sánh giá trị gần đúng của hàm số y = ln x và y = $x^{1/2} = \sqrt{x}$.
trong bảng sau và chúng ta vẽ đồ thị của chúng trong Hình 15 và 16. Bạn có thể thấy là lúc đầu hai đồ thị tăng gần như nhau, nhưng sau đó hàm số căn bỏ xa lôgarit.

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10,000	100,000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04



HÌNH 15

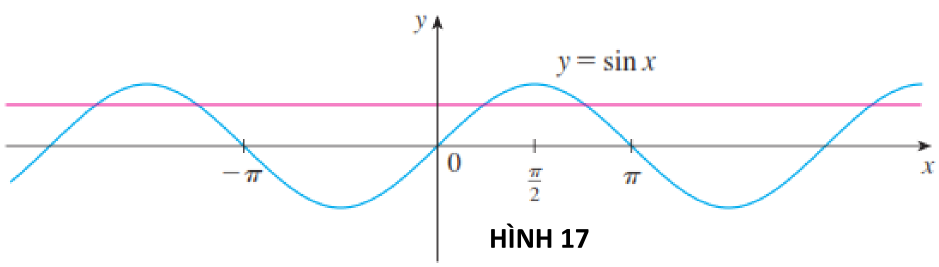


HÌNH 16

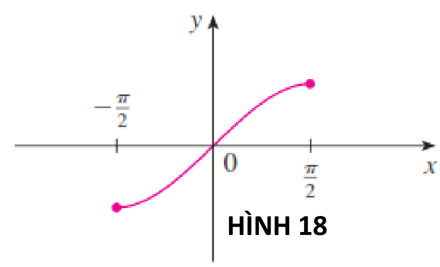
HÀM SỐ LƯƠNG GIÁC NGƯỢC

Khi ta cố tìm những hàm số ngược, ta gặp một khó khăn nhỏ: Vì hàm số lượng giác không phải là hàm số một-một, chúng không có hàm số ngược. Ta giải quyết khó khăn này bằng cách hạn chế tập xác định của những hàm số này để chúng trở nên một-một.

Bạn có thể thấy từ Hình 17 là hàm số y = sin x không phải là hàm số một-một (sử dụng phép kiểm Tra Đường Nằm Ngang). Nhưng hàm số f(x) = sin x với – π/2 ≤ x ≤ π/2, lại là hàm số một-một (Hình 18). Hàm số ngược của hàm số sin đã được hạn chế này tồn tại và được ký hiệu $\sin^{-1}$ hay arcsin, và được gọi là hàm số sin ngược hay hàm số arcsin.



HÌNH 17



HÌNH 18

Vì định nghĩa hàm số ngược nói rằng

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

ta có

$$\boxed{\sin^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x \quad \text{và} \quad -\pi/2 \le y \le \pi/2}$$

Do đó, nếu $-1 \le x \le 1$, thì $\sin^{-1} x$ là một số giữa – π/2 và π/2 và có sin bằng x.

VÍ DỤ 12 Tính (a) $\sin^{-1}(^1/_2)$ và (b) tan(arcsin $^1/_3$).

GIẢI

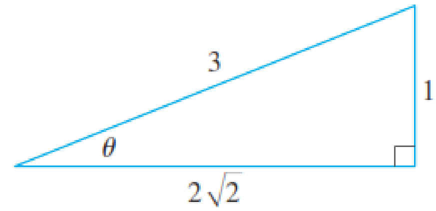
(a) Ta có

$$\sin^{-1}(^1/_2) = \pi/6$$

vì sin (π/6) = ½ và π/6 nằm giữa – π/2 và π/2.

(b) Đặt θ = arcsin $^1/_3$, suy ra sin θ = 1/3. Ta vẽ tam giác vuông có góc θ như trong Hình 19 và dùng Định Lý –Pitago ta tìm được cạnh thứ ba có độ dài lá $\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$. Do đó, từ tam giác trên, ta được

$$\tan(\arcsin\frac{1}{3})=\tan\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$



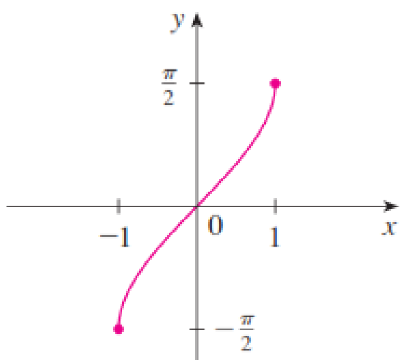
HÌNH 19

Quy tắc hóa giải trong hàm số ngược cho ta,

$\sin^{-1}(\sin x) = x$ với $-\pi/2 \le x \le \pi/2$

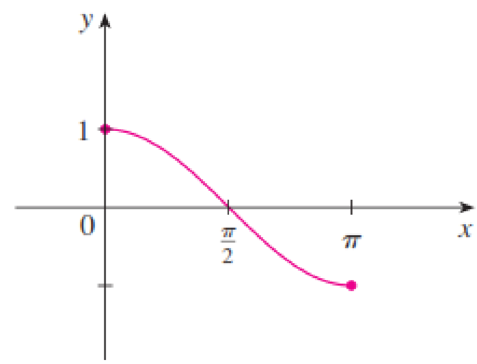
$\sin(\sin^{-1} x) = x$ với $-1 \le x \le 1$

Hàm số $\sin^{-1}$ có tập xác định là [- 1, 1] và tập giá trị là [- π/2, π/2], và đồ thị cho bởi Hình 20, lấy đối xứng của Hình 18 qua đường y = x).



HÌNH 20

$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$



HÌNH 21

$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$

Hảm số cosin ngược cũng được định nghĩa tương tự. Hàm số cos được hạn chế f(x) = cos x , 0 ≤ x ≤ π, là hàm số một-một (Hình 21) và do đó nó có hàm số ngược, ký hiệu $\cos^{-1}$ hay arccos.

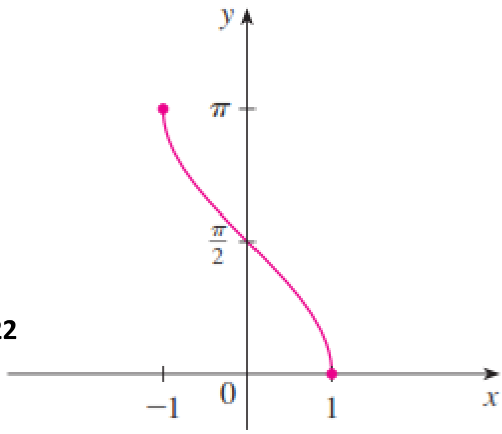
$\cos^{-1} x = y \Leftrightarrow \cos y = x$ và $0 \le y \le \pi$

Quy tắc hóa giải cho

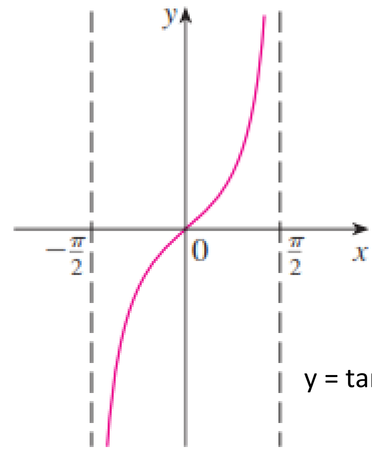
$\cos^{-1}(\cos x) = x$ với $0 \le x \le \pi$

$\cos(\cos^{-1} x) = x$ với $-1 \le x \le 1$

Hàm số arccos hay $\cos^{-1}$ có tập xác định là [-1, 1] và tập giá trị là [0, π], đồ thị cho bởi Hình 22.



HÌNH 22



HÌNH 23

y = tan x , - π/2 < x < π/2

Hàm số tan có thể trở thành một-một khi ta hạn chế tập xác định là (- π/2, π/2). Do đó **hàm số tan ngược** được định nghĩa như là hàm số ngược của hàm số f(x) = tan x, - π/2 < x < π/2.)(Xem Hình 23), được ký hiệu là $\tan^{-1}$ hay arctan.

$$\tan^{-1} x = y \iff \tan y = x \text{ và } -\pi/2 < y < \pi/2$$

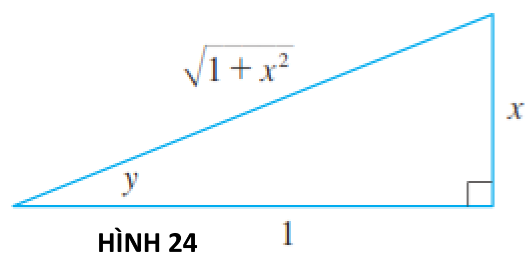
VÍ DỤ 13 Đơn giản biểu thức $\cos(\tan^{-1}x)$.

GIẢI 1 Đặt $y = \tan^{-1}x$. Thế thì tan y = x và $-\pi/2 < y < \pi/2$. Ta tìm cos y bằng công thức

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\frac{1}{\cos y} = \sqrt{1+x^2} \quad (\text{vì } \cos y > 0 \text{ do } -\pi/2 < y < \pi/2)$$

Do đó $\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



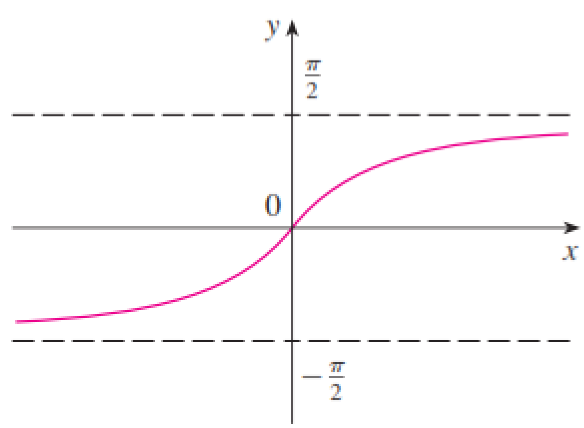
HÌNH 24

GIẢI 2 Thay vì dùng công thức lượng giác như trong cách giải 1, ta có thể dùng giãn đồ. Nếu $y = \tan^{-1}x$, thì tan y = x, và từ Hình 24 (minh họa trường hợp y > 0), ta có

$$\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Hàm số tan ngược, $\tan^{-1}$ = arctan, có tập xác định R và tập giá trị (- π/2, π/2). Đồ thị được cho trong Hình 25.

Ta biết rằng những đường thẳng $x = \pm\pi/2$ là những đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tan. Vì đồ thị hàm số $\tan^{-1}$ là đối xứng của đồ thị hàm số tan có hạn chế qua đường thẳng y = x, nên những đường y = π/2 và y = - π/2 là những đường tiệm cận ngang của đồ thị $\tan^{-1}$.



HÌNH 25

Những hàm số lượng giác ngược không được thông dụng lắm, nên chỉ được tóm tắt như dưới đây:

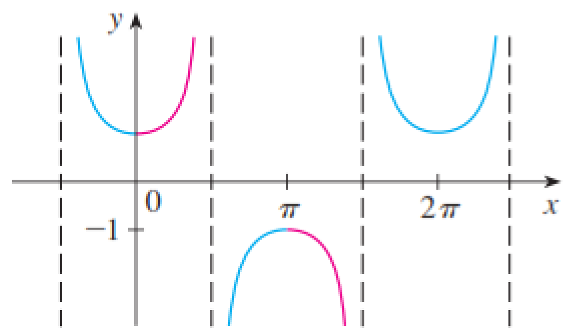
11

$$y = \csc^{-1}x \;\; (|x| \geqslant 1) \iff \csc y = x \;\text{ and }\; y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$$

$$y = \sec^{-1}x \;\; (|x| \geqslant 1) \iff \sec y = x \;\text{ and }\; y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$$

$$y = \cot^{-1}x \;\; (x \in \mathbb{R}) \iff \cot y = x \;\text{ and }\; y \in (0, \pi)$$

Việc lựa chọn khoảng cho y trong phần định nghĩa hàm số $\csc^{-1}$ và $\sec^{-1}$ thường không được nhất trí tán đồng. Chẳng hạn, một số tác giả dùng y ∈ [0, π/2] U (π/2, π] khi định nghĩa $\sec^{-1}$. [Bạn có thể thấy từ đồ thị hàm số sec trong Hình 26 là cả hai sự lựa chọn này đều tốt.]



HÌNH 26

BÀI TẬP

1. (a) Hàm số một-một là gì?

(b) Làm sao biết được hàm số là một-một bằng cách dựa vào đồ thị của nó?.

2. (a) Giả sử f là hàm số một-một có tập xác định A và tập giá trị B. Hàm số ngược f^{-1} được định nghĩa như thế nào? Tập xác định của f^{-1} là gì? Tập giá trị của f^{-1} là gì?

(b) Nếu cho trước công thức của f, làm cách nào tìm được công thức cho f^{-1}?

(c) Nếu cho trước đồ thị của f, làm cách nào tìm được đồ thị của f^{-1}?

3-14 Một hàm số được cho bằng một bảng giá trị, một đồ thị, một công thức hay một phát biểu bằng lời. Hãy xác định hàm số này có phải là một-một.

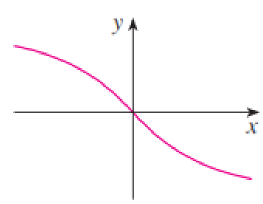
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

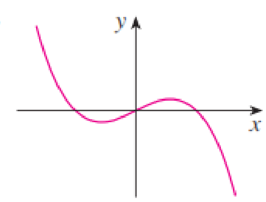
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

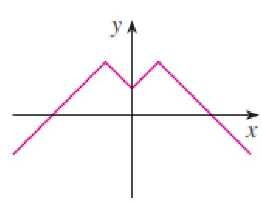
5.



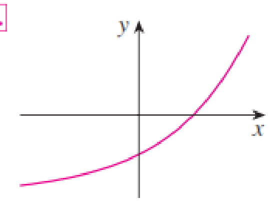
6.



7.



8.



9 $f(x) = x^2 - 2x$

10. $f(x) = 10 - 3x$

11. $g(x) = 1/x$

12. g(x) = cosx

13. f(t) là độ cao của quả bóng lúc t giấy sau khi bị đá lên.

14. f(t) là chiều cao của bạn lúc t tuổi.

15. Nếu f là hàm số một-một sao cho f(2) = 9, thế $f^{-1}(9)$bằng bao nhiêu?

16. Cho $f(x) = 3 + x^2 + \tan(\pi x/2)$, trong đó $-1 < x < 1$.

(a) Tìm $f^{-1}(3)$ (b) Tìm $f(f^{-1}(5))$.

17. Nếu g(x) = 3 + x + $e^{x,\text{ tì,}}$ $g^{-1}(4)$.

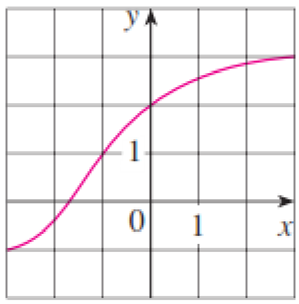
18. Cho đồ thị f như hình dưới.

(a) Tại sao f là hàm số một-một?

(b) Tìm tập xác định và tập giá trị của f^{-1}.

(c) Tìm giá trị của $f^{-1}(2)$.

(d) Ước lượng giá trị của $f^{-1}(0)$.



19. Công thức C = $^5/_9$(F – 32), trong đó F ≥ - 459.67, biểu diễn nhiệt độ Celsius C như một hàm số theo nhiệt độ Fahrenheit F. Tìm công thức của hàm số ngược và cho biết đó là gì? Tìm tập xác định của hàm số ngược này.

20. Trong thuyết tương đối, khối lượng của một chất điểm di chuyển với tốc độ v là

$$m = f(v) = \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

trong đó m_o là khối lượng của chất điểm khi đứng yên và c là tốc độ của ánh sáng trong chân không. Tìm hàm số ngược của f và giải thích ý nghĩa của nó.

21-26 Tìm công thức của hàm số ngược của một hàm số cho trước.

21. f (x) = $\sqrt{10-3x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$

23. f(x) = e^{x^3} **24.** y = $2x^3 + 3$

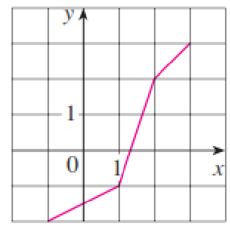
25. y = ln(x + 3) **26.** y = $\dfrac{e^x}{1+2e^x}$

27-28 Tìm công thức tường minh cho f^{-1} và dùng nó để vẽ đồ thị (bằng máy tính bỏ túi) f^{-1}, f và đường thẳng y = x trên cùng một hệ trục. Kiểm tra xem hai đồ thị có đối xứng qua đường thẳng không.

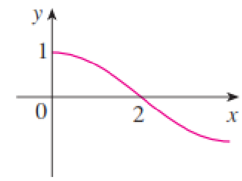
27. f(x) = x^4 + 1, x ≥ 0 **28.** f(x) = 2 - e^x

29-30. Dùng đồ thị cho trước của f để vẽ đồ thị của f^{-1}.

29.



30.



31. (a) Hàm số y = $\log_a x$ được định nghĩa như thế nào?

(b) Tập xác định của hàm số này là gì?

(c) Tập giá trị của hàm số này là gì?

(d) Phác họa dạng tổng quát của đồ thị hàm số y = $\log_a x$ khi a > 1.

32. (a) Logarit tự nhiên là gì?

(b) Logarit thông dụng là gì?

(c) Phác họa đồ thị hàm số logarit tự nhiên và hàm số mũ tự nhiên trong cùng một hệ trục.

33-36 Tìm giá trị đúng của các biểu thức sau.

33.(a) $\log_5 125$ (b) $\log_3 \dfrac{1}{27}$

34. (a) ln(1/e) (b) $\log_{10} \sqrt{10}$

35. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

(b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

36.(a) $e^{-2\ln 5}$ (b) ln $\left(\ln e^{e^{10}}\right)$

37-39. Biểu diễn biểu thức sau bằng một logarit duy nhất.

37. ln 5 + 5ln 3

38. ln(a + b) + ln(a – b) – 2ln c

39. ln(1 + x^2) + $^1/_2$ln x – ln sin x

40. Dùng công thức 10 để tính các logarit sau đúng đến sáu chữ số thập phân.

(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8.4$

41-42 Dùng công thức 10 và máy tính bỏ túi để vẽ đồ thị các hàm số đã cho trong cùng một hệ trục. Những đồ thị này liên hệ nhau thế nào?

41. y = $\log_{1.5}$ x, y = ln x, y = $\log_{10}$ x, y = $\log_{50}$ x

42. y = ln x, y = $\log_{10}$ x, y = e^x, y = 10^x

43. Giả sử đồ thị y = $\log_2$ x được vẽ trong một hệ trục có đơn vị là 1 in-xơ. Hỏi ta phải đi bao nhiêu dặm về bên phải điểm gốc để đường cong lên cao đến 3 ft?

44. So sánh các hàm số $f(x) = x^{0.1}$ và $g(x) = \ln x$ bằng cách vẽ đồ thị (bằng máy tính) của f và g trong những khung hình có kích thước khác nhau. Khi nào đồ thị của f cuối cùng vượt qua đồ thị g?

45-46 Phác họa đồ thị của mỗi hàm số sau, không dùng máy tính. Chỉ được dùng các đồ thị cho trong Hình 12 và 13 và, nếu cần, các phép biến đổi của Bài 1.3.

45. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

46. (a) $y = \ln(-x)$ (d) $y = \ln|x|$

47-50 Giải các phương trình ẩn x.

47. (a) $2\ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

48. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

49. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

50. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, $a \neq b$

51-52 Giải các bất phương trình ẩn x.

51. (a) $e^x < 10$ (b) $\ln x > -1$

52. (a) $2 < \ln x < 9$ (b) $e^{2-3x} > 4$

53-54 Tìm (a) tập xác định của f (b) f^{-1} và tập xác định của nó.

53. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$ **54.** $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

55. Vẽ bằng máy tính đồ thị hàm số f(x) = $\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ và giải thích tại sao nó một-một. Tìm biểu thức tường minh của f^{-1} bằng máy tính. Máy sẽ cho ba biểu thức. Giải thích tại sao trong đó có hai biểu thức đều không thích hợp.

56. (a) **Nếu $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geq 0$, sử dụng máy tính để tìm biểu thức của $g^{-1}(x)$.**

(b) Dùng biểu thức trong phần (a) để vẽ đồ thị $y = g(x)$, $y = x$, và $y = g^{-1}(x)$ trên cùng một khung hình.

57. Nếu số lượng vi khuẩn bắt đầu với 100 con và tăng gấp đôi mỗi ba giờ, thế thì số vi khuẩn sau t giờ là $n = f(t) = 100.\ 2^{t/3}$.

(a) Tìm hàm số ngược của f và giải thích ý nghĩa của nó.

(b) Khi nào số vi khuẩn đạt đến 50,000?

58. Khi một đèn flash máy ảnh lóe lên, pin lập tức sạc lại tụ điện của đèn flash, nơi lưu trữ số điện lượng cho bởi

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(Điện lượng lưu giữ tối đa là Q_0 và t đo bằng giây.)

(a) Tìm hàm số ngược của hàm số này và giải thích ý nghĩa của nó.

(b) Cần bao nhiêu thời gian để nạp lại 90% điện lượng nếu a = 2?

59-64 Tìm giá trị đúng của các biểu thức sau.

59. (a) $\sin^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

60. (a) $\tan^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)$ (b) $\sec^{-1} 2$

61. (a) arctan1 (b) $\sin^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$

62. (a) $\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ (b) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

63. (a) tan(arctan 10) (b) $\sin^{-1}(\sin(7\pi/3))$

64. (a) $\tan(\sec^{-1} 4)$ (b) $\sin\left(2\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)$

65. Chứng tỏ rằng $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

66-68 Đơn giản biểu thức.

66. $\tan(\sin^{-1} x)$ **67**. $\sin(\tan^{-1} x)$

68. $\cos(2\tan^{-1} x)$

69-70 Vẽ bằng máy tính đồ thị hàm số cho trước trên cùng một khung hình. Những đồ thị này liên hệ như thế nào?

69. $y = \sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; $y = \sin^{-1} x$; $y = x$

70. $y = \tan x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; $y = \tan^{-1} x$; $y = x$

71. Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số

$$g(x) = \sin^{-1}(3x + 1)$$

72. (a) Vẽ bằng máy tính đồ thị hàm số $f(x) = \sin(\sin^{-1} x)$ và giải tích hình dạng của nó.

(b) Vẽ bằng máy tính đồ thị hàm số $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ và giải tích hình dạng của nó.

73. (a) Nếu ta dời đường cong về bên trái, điều gì xảy ra với đường đối xứng của nó qua trục x? Dựa vào nguyên tắc hình học này, hãy tìm một biểu thức của hàm số ngược của hàm số $g(x) = f(x + c)$, trong đó f là hàm số một-một.

(b) Tìm một biểu thức của hàm số ngược của hàm số $h(x) = f(cx)$, trong đó $x \neq 0$.

ĐÁP SỐ

1. (a) See Definition 1.
(b) It must pass the Horizontal Line Test.

3. No **5.** Yes **7.** No **9.** No **11.** Yes

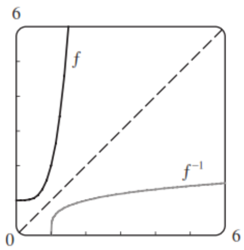
13. No **15.** 2 **17.** 0

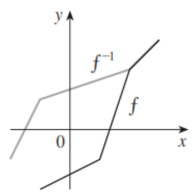
19. $F = \frac{9}{5}C + 32$; the Fahrenheit temperature as a function of the Celsius temperature; $[-273.15, \infty)$

21. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3},\ x \geqslant 0$ **23.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln x}$

25. $y = e^x - 3$

27. $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x - 1}$ **29.**



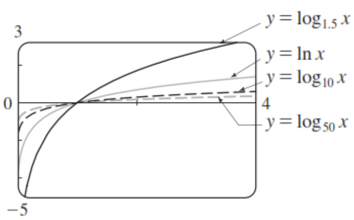


31. (a) It's defined as the inverse of the exponential function with base a, that is, $\log_a x = y \iff a^y = x$.
(b) $(0, \infty)$ (c) $\mathbb{R}$ (d) See Figure 11.

33. (a) 3 (b) -3 **35.** (a) 3 (b) -2 **37.** $\ln 1215$

39. $\ln \dfrac{(1 + x^2)\sqrt{x}}{\sin x}$

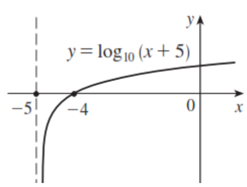
41.



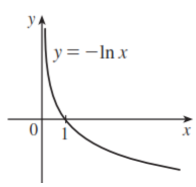
Tất cả đồ thị đều → -∞ khi x → 0^+, đều qua điểm (1, 0), và đều đồng biến. Cơ số càng tốc đô độ biến thiên càng nhỏ

43. About 1,084,588 mi

45. (a)



(b)



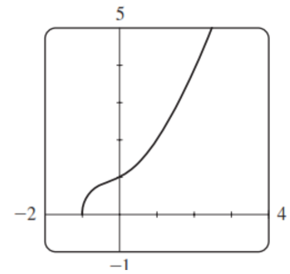
47. (a) $\sqrt{e}$ (b) $-\ln 5$

49. (a) $5 + \log_2 3$ or $5 + (\ln 3)/\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4e}\right)$

51. (a) $x < \ln 10$ (b) $x > 1/e$

53. (a) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\ln 3\right]$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(3 - x^2)$, $\left[0, \sqrt{3}\right)$

55.



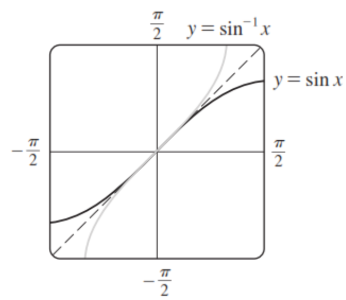
Đồ thị thỏa kiểm nghiệm đường thẳng đứng

57. (a) $f^{-1}(n) = (3/\ln 2)\ln(n/100)$; the time elapsed when there are n bacteria (b) After about 26.9 hours

59. (a) $\pi/3$ (b) π **61.** (a) $\pi/4$ (b) $\pi/4$

63. (a) 10 (b) $\pi/3$ **67.** $x/\sqrt{1 + x^2}$

69.



Đồ thị thứ hai đối xứng của đồ thị thứ nhất qua y = x

71. (a) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ (b) $[-\pi/2, \pi/2]$

73. (a) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - c$ (b) $h^{-1}(x) = (1/c)f^{-1}(x)$

ÔN CHƯƠNG 1

KIỂM TRA KHÁI NIỆM

1. (a) Hàm số là gì? Tập xác định và giá trị của nó là gì?
(b) Đồ thị hàm số là gì?
(c) Làm sao biết được một đường cho trước là đồ thị của một hàm số hay không?

2. Trình bày bốn cách biểu diễn một hàm số. Minh họa cách biểu diễn bằng các ví dụ.

3. (a) Hàm số chẵn là gì? Làm sao nhìn đồ thị mà biết được đó là đồ thị của hàm số chẵn.

4. Thế nào là một hàm số đồng biến?

5. Mô hình toán học là gì?

6. Cho một ví dụ về mỗi loại hàm số sau.
(a) Hàm số tuyến tính (b) Hàm số lũy thừa
(c) Hàm số mũ (d) Hàm số bậc hai
(e) Hàm số đa thức bậc 5 (f) Hàm số hữu tỷ

7. Vẽ bằng tay trên cùng một hệ trục đồ thị các hàm số sau.
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Phác họa bằng tay đồ thị các hàm số sau.
(a) $y = \sin x$ (b) $y = \tan x$
(c) $y = y = e^x$ (d) $y = \ln x$
(e) $y = 1/x$ (f) $y = | x |$
(g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \tan^{-1} x$

9. Giả sử f có tập xác định là A và g có tập xác định là B.
(a) Tìm tập xác định của f + g.
(b) Tìm tập xác định của fg.
(c) Tìm tập xác định của f/g.

10. Hàm số hợp $f \circ g$ được định nghĩa như thế nào? Tập xác định của nó là gì?

11. Giả sử cho trước đồ thị của f. Viết phương trình cho mỗi đồ thị sau suy ra từ đồ thị của f theo cách sau.
(a) Dời lên trên 2 đơn vị.
(b) Dời xuống dưới 2 đơn vị.
(c) Dời sang phải 2 đơn vị.
(d) Dời sang trái 2 đơn vị.
(e) Lấy đối xứng qua trục x.
(f) Lấy đối xứng qua trục y.
(g) Giãn theo chiều dọc với hệ số 2.
(h) Co theo chiều dọc với hệ số 2.
(i) Giãn theo chiều ngang với hệ số 2.

12. (a) Hàm số một-một là gì? Làm sao biết được một hàm số là một-một bằng cách nhìn đồ thị?
(b) Nếu f một-một, hàm số ngược f^{-1} được định nghĩa thế nào? Làm sao vẽ được đồ thị hàm số ngược f^{-1} từ đồ thị hàm số f.

13. (a) Hàm số ngược $f(x) = \sin^{-1} x$ được định nghĩa thế nào? Tập xác định và giá trị của nó là gì?

(b) Hàm số ngược $f(x) = \cos^{-1} x$ được định nghĩa thế nào? Tập xác định và giá trị của nó là gì?

(c) Hàm số ngược $f(x) = \tan^{-1} x$ được định nghĩa thế nào? Tập xác định và giá trị của nó là gì?

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG-SAI

Xác định các phát biểu sau đúng hay sai. Nếu đúng, giải thích tại sao. Nếu sai, giải thích tại sao hoặc nêu một ví dụ để phản bác phát biểu đó.

1. Nếu f là một hàm số, thì $f(s + t) = f(s) + f(t)$.

2. Nếu $f(s) = f(t)$ thì $s = t$.

3. Nếu f là một hàm số, thì $f(3x) = 3f(x)$.

4. Nếu $x_1 < x_2$ và f là hàm số nghịch biến, thì $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Một đường thẳng đứng cắt đồ thị của hàm số tại nhiều nhất một điểm.

6. Nếu f và g là những hàm số, $f \circ g = g \circ f$.

7. Nếu f là một-một, thì $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

8. Bạn lúc nào cũng chia được cho e^x.

9. Nếu $0 < a < b$, thì $\ln a < \ln b$.

10. Nếu $x > 0$, thì $(\ln x)^6 = 6\ln x$.

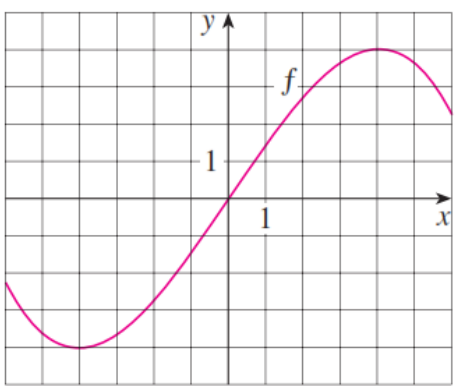
11. Nếu x > 0 và a > 1, thì $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln\dfrac{x}{a}$.

12. $\tan^{-1}(-1) = 3\pi/4$.

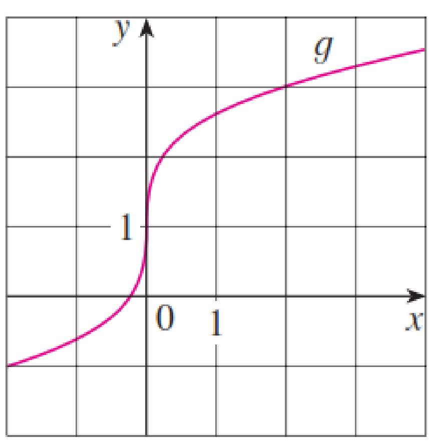
13. $\tan^{-1} x = \dfrac{\sin^{-1}}{\cos^{-1}}$

BÀI TẬP

1. Cho f là hàm số có đồ thị cho trước.
   (a) Ước tính giá trị của f(2).
   (b) Ước tính giá trị của x sao cho f(x) = 3.
   (c) Tìm tập xác định của f.
   (d) Tìm tập giá trị của f.
   (e) Hàm số f đồng biến trên khoảng nào?
   (f) Hàm số f có một-một không? Giải thích.
   (g) f có chẵn không, có lẻ không, hay không chẵn cũng không lẻ? Giải thích.



2. Đồ thị của g được cho trước.
   (a) Tính giá trị g(2).
   (b) Tại sao g một-một?
   (c) Ước tính giá trị $g^{-1}(2)$.
   (d) Ước tính tập xác định của g^{-1}.
   (e) Vẽ đồ thị hàm số g^{-1}.



3. Nếu $f(x) = x^2 - 2x + 3$, tính thương thức

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

4. Phác họa đồ thị thô của lượng thu hoạch xem như một hàm số của lượng phân bón đã sử dụng.

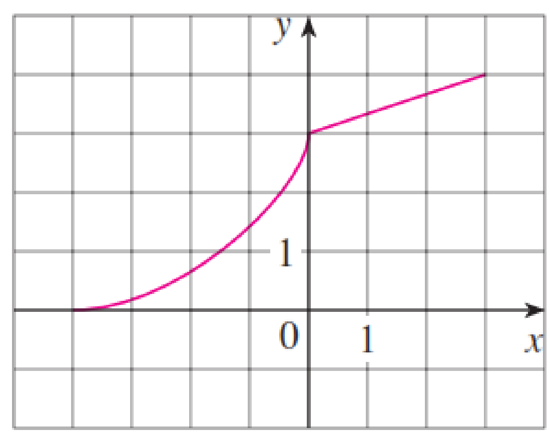
5-8 Tìm tập xác định và giá trị của các hàm số sau.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$
6. $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$
8. $F(t) = 3 + \cos 2t$

9. Giả sử cho trước đồ thị f. Cho biết các đồ thị của hàm số sau có thể được suy từ đồ thị của f như thế nào.
(a) $y = f(x) + 8$
(b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 1 + 2f(x)$
(d) $y = f(x - 2) - 2$
(e) $y = -f(x)$
(f) $y = f^{-1}(x)$

10. Cho trước đồ thị f. Vẽ đồ thị các hàm số sau.
(a) $y = f(x - 8)$
(b) $y = -f(x)$
(c) $y = 2 - f(x)$
(d) $y = \dfrac{1}{2}f(x) - 1$
(e) $y = f^{-1}(x)$
(f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11-16 Dùng các phép biến đổi để vẽ đồ thị các hàm số sau.

11. $y = -\sin 2x$
12. $y = 3\ln(x - 2)$

13. $y = \dfrac{1}{2}(1 + e^x)$
14. $y = 2 - \sqrt{x}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

16. $f(x)=\begin{cases} -x & khi\ x<0 \\ e^x-1 & khi\ x\ge 0 \end{cases}$

17. Xác định f chẵn, lẻ, hay không chẵn cũng không lẻ.

(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$ (b) $f(x) = x^3 - x^7$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$ (d) $f(x) = 1 + \sin x$

18. Tìm biểu thức của hàm số mà đồ thị gồm một đoạn thẳng nối hai điểm (- 2, 2) đến điểm (- 1, 0) hợp với nửa đường tròn phía trên có tâm là điểm gốc và có bán kính 1.

19. Nếu $f(x) = \ln x$ và $g(x) = x^2 - 9$, tìm các hàm số (a) f o g, (b) g o f, (c) f o f, (d) g o g, và tập xác định của chúng.

20. Biểu diễn hàm số $F(x) = 1/\sqrt{x+\sqrt{x}}$ xem như hợp của ba hàm số.

21. Tuổi thọ con người tăng rõ rệt trong thế kỷ 20. Bảng dưới cho biết tuổi thọ kỳ vọng lúc mới sinh (tính bằng năm) của các bé trai ở Mỹ.

Năm sinh	Tuổi thọ kỳ vọng	Năm sinh	Tuổi thọ kỳ vọng
1900	48.3	1960	66.6
1910	51.1	1970	67.1
1920	55.2	1980	70.0
1930	57.4	1990	71.8
1940	62.5	2000	73.0
1950	65.6		

Sử dụng biểu đồ phân tán để lựa chọn một mô hình thích hợp. Sử dụng mô hình này để dự đoán tuổi thọ của một bé trai sinh trong năm 2910.

22. Một xưởng nhỏ thấy rằng chi phí để sản xuất 1000 máy nước bánh mì trong một tuần là 9000$ và để sản xuất 1500 máy nướng bánh mì trong một tuần là 12000$.

(a) BIểu diễn chi phí như một hàm số theo số máy nướng sản xuất được, giả sử đó là hàm số tuyến tính. Sau đó vẽ đồ thị hàm số.

(b) Tìm độ dốc của đồ thị và cho biết nó biểu thị điều gì?

(c) Tìm tung độ gốc của đồ thị và cho biết nó biểu thị điều gì?

23. Nếu $f(x) = 2x + \ln x$, tìm $f^{-1}(2)$.

24. Tìm hàm số ngược của $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

25. Tìm giá trị chính xác của các biểu thức sau.

(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

(c) $\tan(\arcsin\frac{1}{2})$ (d) $\sin(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right))$

26. Giải các phương trình ẩn x sau.

(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$

(c) $e^{e^x} = 2$ (d) $\tan^{-1} x = 1$

27. Dân số của một loài nào đó trong một môi trường giới hạn với dân số lúc đầu là 100 và dân số tối đa là 1000 cho bởi

$$P(t) = \frac{100{,}000}{100+900e^{-t}}$$

trong đó t tính bằng đơn vị năm.

(a) Vẽ bằng máy đồ thị của hàm số này và ước tính phải mất bao lâu dân số mới đến 900.

(b) Tìm hàm số ngược của hàm số này và giải thích ý nghĩa của nó.

(c) Dùng hàm số ngược để tìm thời gian cần thiết để dân số đạt đến 900. So sánh với kết quả tìm được ở câu (a).

28. Vẽ bằng máy đồ thị của ba hàm số $y = x^n$, $y = a^x$, và $y = \log_a x$ trên cùng một khung hình với hai hay ba giá trị của a > 1. Với những giá trị lớn của x, hàm số nào đạt giá trị lớn nhất và hàm số nào đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐÁP SỐ

True-False Quiz

1. False **3.** False **5.** True **7.** False **9.** True
11. False **13.** False

Exercises

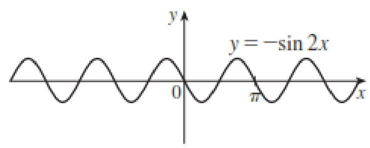
1. (a) 2.7 (b) 2.3, 5.6 (c) $[-6, 6]$ (d) $[-4, 4]$
(e) $[-4, 4]$ (f) No; it fails the Horizontal Line Test.
(g) Odd; its graph is symmetric about the origin.

3. $2a + h - 2$ **5.** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

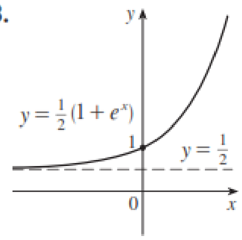
7. $(-6, \infty)$, $\mathbb{R}$

9. (a) Shift the graph 8 units upward.
(b) Shift the graph 8 units to the left.
(c) Stretch the graph vertically by a factor of 2, then shift it 1 unit upward.
(d) Shift the graph 2 units to the right and 2 units downward.
(e) Reflect the graph about the *x*-axis.
(f) Reflect the graph about the line $y = x$ (assuming f is one-to-one).

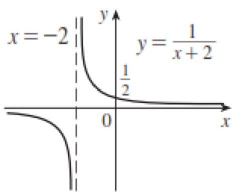
11.



13.



15.



17. (a) Neither (b) Odd (c) Even (d) Neither

19. (a) $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$, $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

(b) $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9$, $(0, \infty)$

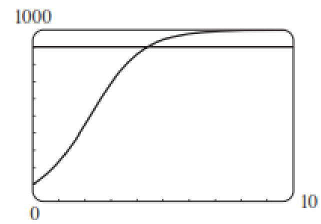
(c) $(f \circ f)(x) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$

(d) $(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9$, $(-\infty, \infty)$

21. $y = 0.2493x - 423.4818$; about 77.6 years

23. 1 **25.** (a) 9 (b) 2 (c) $1/\sqrt{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

27. (a)



≈ 4.4 years

(b) $t = -\ln\left(\dfrac{1000 - P}{9P}\right)$; the time required for the population to reach a given number P.

(c) $\ln 81 \approx 4.4$ years

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Không có những qui tắc nhanh và cứng nhắc nhằm bảo đãm thành công trong việc giải toán. Tuy nhiên, ta có thể phác họa một số bước tổng quát trong tiến trình giải toán và đưa ra một vài nguyên tắc có thể hữu ích trong việc giải một số bài toán. Những bước và nguyên tắc này đều là lẽ thường và được làm cho tường minh. Những kiến thức sau được rút từ tác phẩm *Giải Toán Như Thế Nào* của George Polya.

1. TÌM HIỂU BÀI TOÁN

Bước đầu tiên là đọc đề bài và chắc chắn là mình hiểu rõ đề bài. Hãy tự hỏi những câu hỏi sau:

Điều gì chưa biết?
Những đại lượng nào đã được cho trước?
Điều kiện cho trước là gì?

Đối với nhiều bài toán đôi khi có ích nếu ta

vẽ giản đồ

và nhận diện những đại lượng cho trước và những đại lượng phải tìm ra trên giản đồ.

Thường cũng cần thiết phải

đưa vào những kí hiệu thích hợp

Trong việc lựa chọn biểu tượng cho ẩn số ta thường dùng những mẫu tự như a, y và z, nhưng trong vài trường hợp ta thường dùng ký tự đầu để gọi đại lượng ấy cho dễ nhớ; như t (**t**ime) chỉ thời gian, V chỉ thể tích (**v**olume: thể tích).

2. TÌM RA KẾ HOẠCH GIẢI

Tìm một mối liên hệ giữa những thông tin cho trước và ẩn số nhớ đó bạn có thể tính được ẩn số. Thường hữu ích khi tự hỏi một cách rõ ràng : "Làm cách nào mình có thể liên hệ cái đã biết với cái chưa biết?" Nếu bạn không thấy ngay mối liên hệ , những gợi ý sau đây có thể giúp bạn thiết kê một kế hoạch giải.

Cố Nhớ Đến Một Điều Quen Thuộc Liên hệ tình huống đã cho với kiến thức đã biết và cố nhớ một bài toán quen thuộc hơn có ẩn số giông giống.

Cố Nhận Ra Những Mô Típ Vài bài toán có thể giải được bằng cách nhận ra một loại mô típ nào đó. Mô típ có thể thuộc hình học, hoặc số học, hoặc đại số. Nếu bạn có thể nhìn ra tính qui cũ hoặc tính lặp lại của bài toán, nhờ đó bạn có thể đoán nhận được mô tip tiếp diễn và rồi chứng minh nó.

Sử Dụng Tính Tương Tự Cố gắng nghĩ đến một bài toán tương tự với bài toán đã cho , một bài toán có liên hệ, nhưng dễ hơn bài toán gốc. Nếu bạn có thể giải được bài toán tương tự và đơn giản hơn này, hi vọng là bạn có thể tìm được manh mối giúp bạn giải được bài toán ban đầu, bài toán khó hơn. Ví dụ, nếu bài toán ban đầu liên hệ đến những số rất lớn, bạn có thể cố giải một bài toán tương tự với những số nhỏ hơn. Hoặc nếu bài toán là bài toán hình không gian, bạn có thể tìm một bài toán tương tự trong hình phẳng. Hoặc nếu bài toán có tính tổng quát, bạn hãy thử giải bài toán có tính cá biệt.

Đưa Vào Các Yếu Tố Bổ Sung Đôi khi cần phải đưa vào điều gì đó mới mẻ, có tính hổ trợ, giúp tạo ra mối liên kết giữa cái chưa biết và cái được cho biết. Ví dụ, trong bài toán hình học, đôi khi chỉ cần vẽ thêm một đoạn là mọi sự được liên kết, bắc cầu. Còn trong bài toán đại số, có thể phải tìm ra một ẩn số mới trước vì ẩn số này có liên hệ với ẩn số cần tìm.

Xét Nhiều Trường Hợp Đôi khi chúng ta phải sàng lọc bài toán thành nhiều trường hợp nhỏ và giải quyết từng mỗi trường hợp. Ta thường sử dụng chiến thuật này khi giải phương trình có trị tuyệt đối chẳng hạn.

Phân Tích Thụt Lùi Thi thoảng cần phải tưởng tượng bài toán của bạn đã được giải rồi và bạn phân tích ngược lên, tùng bước một, cho đến khi đến giả thiết ban đầu. Sau đó bạn có thể đi ngược trở lại những bước giải và nhờ đó tìm được cách giải bài toán ban đầu. Tiến trình này thường được dùng để giải phương trình. Ví dụ để giải phương trình $3x - 5 = 7$, ta giả sữ x là một số thỏa mãn phương trình $3x - 5 = 7$ và bắt đầu phân tích đi lên. Chúng ta cộng 5 vào hai vế của phương trình và rồi chia hai vế cho 3 sẽ được $x = 4$. Vì mỗi bước này đều tương đương, nên ta đã giải xong phương trình.

Thiết Lập Những Mục Tiêu Trung Gian Trong một bài toán phức tạp thường cần thiết phải đặt ra những mục tiêu phụ (trong đó bài oán chỉ được giải một phần). Nếu chúng ta có thể đạt được mục tiêu phụ đầu tiên , ta có thể hoàn thành mục tiêu trung gian tiếp theo và cuối cùng đến được đích cuối cùng.

Chứng Minh Phản Chứng Phương pháp này cho phép ta tấn công bài toán một cách gián tiếp. Để chứng minh P suy ra Q, ta giả sữ P đúng và Q sai và cố tìm ra tại sao điều này không thể xảy ra. Ta thường đi đến một nghịch lí với một chân lí mà ta biết một cách tuyệt đối là đúng.

Phép Qui Nạp Trong những phát biểu phụ thuộc đến một số nguyên dương n, đôi khi ta sử dụng nguyên lý của phép chứng minh qui nạp sau đây.

> **NGUYÊN LÝ QUI NẠP TOÁN HỌC** Cho S_n là mệnh đề phụ thuộc số nguyên dương n. Giả sữ
>
> 1. S_1 đúng
> 2. S_{k+1} đúng bất cứ khi nào S_k đúng
>
> Thế thì S_n đúng với mọi số nguyên dương n.

Lý luận này hợp lý vì S_1 đúng, nên theo điều kiện 2 (với $k = 1$) suy ra S_2 cũng đúng. Tiếp theo, cũng do điều kiện 2 với $k = 2$, ta suy ra S_3 cũng đúng. Tiếp theo với $k = 3$, điều kiện 2 cho ta S_4 cũng đúng . Tiến trình này có thể lặp lại đến vô cùng.

3.THỰC HIỆN KẾ HOẠCH GIẢI Trong bước 2 một kế hoạch giải đã được thiết kế. Khi thực hiện kế hoạch, chúng ta phải kiểm tra mỗi giai đoạn của kế hoạch giải và viết ra chi tiết chứng minh bảo đảm mỗi giai đoạn đều chính xác.

4. NHÌN LẠI Sau khi hoàn tất bài giải, nên duyệt lại nó, một phần để xem ta có phạm những sai sót gì không , phần nữa để xem có thể đưa ra một cách giải đơn giản hơn, hay hơn. Một lý do phải xem lại bài giải là nhờ đó nó giúp ta thêm thân thiết với phương pháp đã sử dụng và điều này góp thêm kinh nghiệm giải những bài toán trong tương lai. Descartes nói, " Mỗi bài toán tôi giải đều trở thành một qui luật sẽ là kim chỉ nam giúp tôi giải được những bài toán khác."

Những nguyên tắc giải toán này sẽ được minh học trong các ví dụ sau . Trước khi bạn xem lời giải, hãy cố giải những bài toán này, tham chiếu vào những Nguyên Tắc Giải Toán mỗi khi bạn bế tắc. Bạn nên thường xuyên tham khảo phần này khi giải những bài tập từ đây đến hết quyển sách.

Sau khi hoàn tất bài giải, nên duyệt lại nó, một phần để xem ta có phạm những sai sót gì không , phần nữa để xem có thể đưa ra một cách giải đơn giản hơn, hay hơn. Một lý do phải xem lại bài giải là nhờ đó nó giúp ta thêm thân thiết với phương pháp đã sử dụng và điều này góp thêm kinh nghiệm giải những bài toán trong tương lai. Descartes nói, “ Mỗi bài toán tôi giải đều trở thành một qui luật sẽ là kim chỉ nam giúp tôi giải được những bài toán khác.”

Những nguyên tắc giải toán được minh học trong các ví dụ sau . Trước khi bạn xem lời giải, hãy cố giải những bài toán này, tham chiếu vào những Nguyên Tắc Giải Toán mỗi khi bạn bế tắc. Bạn nên thường xuyên tham khảo phần này khi giải những bài tập từ đây đến hết quyễn sách.

VÍ DỤ 1 Biểu diễn cạnh huyền h của tam giác vuông có diện tích 25 m^2 như một hàm số theo chu vi P.

GIẢI Hãy liệt kê xem ta có gì và cần tìm gì:

Tím hiểu bài toán

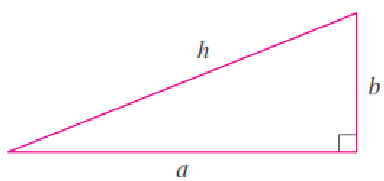
Không biết: cạnh huyền h

Cho biết: chu vi P, diện tích $25m^2$

Để thuận tiện ta vẽ hình và ghi những kí hiệu cần thiết như dưới đây

Vẽ hình

Liên kết đã biết với chưa biết
Đưa vào yếu tố bổ sung



Để liên kết đại lượng cho trước với ẩn số, ta đưa vào hai biến a và b, lần lượt là độ dài hai cạnh góc vuông. Việc này giúp ta sử dụng được giả thiết tam giác vuông thông qua định lí Pythagore:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Những liên hệ khác giữa các biến sẽ thể hiện khi ta viết các biểu thức diện tích và chu vi:

$$25 = \tfrac{1}{2} ab \qquad P = a + b + h$$

Vì P cho trước, nhận xét là ta có 3 phương trình cho ba ẩn a, b và h:

$$h^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$
$$25 = \tfrac{1}{2} ab \quad (2)$$
$$P = a + b + h \quad (3)$$

Tìm ra điều quen thuộc

Mặc dù đã thiết lập được đầy đủ phương trình, giải chúng một mạch thật không dễ dàng. Nhưng nếu ta sử dụng chiến thuật giải toán là cố nhận ra điều gì đó quen thuộc, thế thì ta có thể giải được hệ này bằng một phương pháp dễ dàng hơn. Nhìn các vế phải của hệ phương trình 1, 2, 3. Những biểu thức có gợi ý cho bạn điều gì quen thuộc không? Chú ý là chúng chứa những nhân tố của hằng đẳng thức

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Sử dụng ý tưởng này, ta biểu diễn $(a + b)^2$ bằng hai cách. Từ phương trình 1 và 2 ta có

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

Từ phương trình 3 ta có

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Do đó $$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100 = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Đây là biểu thức tính h theo P cần tìm.

Như trong minh họa của ví dụ sau, ta phải *xét nhiều trường hợp* khi gặp những biểu thức chứa trị tuyệt đối.

VÍ DỤ 2 Giải bất đẳng thức $|x - 3| + |x + 2| < 11$

GIẢI Nhớ định nghĩa của trị tuyệt đối: $|x| = \begin{cases} x & khi \quad x \geq 0 \\ -x & khi \quad x < 0 \end{cases}$

Suy ra $|x + 2| = \begin{cases} x+2 & khi \quad x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & khi \quad x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & khi\, x \geq -2 \\ -x-2 & khi\, x < -2 \end{cases}$

Tương tự $|x - 3| = \begin{cases} x-3 & khi \quad x \geq 3 \\ -x+3 & khi \quad x < 3 \end{cases}$

Những biểu thức này chứng tỏ rằng ta phải xét ba trường hợp:

Xét nhiều trường hợp

$x < -2 \qquad -2 \leq x < 3 \qquad x \geq 3$

TRƯỜNG HỢP I Khi $x < -2$, ta có

$$|x - 3| + |x + 2| < 11$$

$$-x + 3 - x - 2 < 11$$

$$-2x < 10$$

$$x > -5$$

Vì ta đang xét $x < -2$ nên ta được $-5 < x < -2$.

TRƯỜNG HỢP II Khi $-2 \leq x < 3$, bất phương trình trở thành

$$-x + 3 + x + 2 < 11$$

$$5 < 11 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy ta được $-2 \leq x < 3$.

TRƯỜNG HỢP III Khi $x \geq 3$, bất phương trình trở thành

$$x - 3 + x + 2 < 11$$

$$2x < 12$$

$x < 6$

Vì ta đang xét $x \geq 3$ nên ta được $3 \leq x < 6$.

Kết hợp các trường hợp I, II, III bất phương trình thỏa mãn khi $-5 < x < 6$.

Tập nghiệm là khoảng (- 5, 6).

Trong ví dụ sau trước tiên chúng ta đoán nhận đáp số bằng cách xét những trường hợp đặc biệt và nhận ra một mô típ. Sau đó ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Khi sử dụng Nguyên Lý Qui Nạp Toán Học, ta tiến hành ba bước:

BƯỚC 1 Chứng tỏ S_n đúng khi n = 1.

BƯỚC 2 Giả sử S_n đúng khi n = k, ta chứng minh S_n đúng khi n = k + 1.

BƯỚC 3 Kết luận S_n đúng với mọi n bằng Nguyên Lý Qui Nạp Toán Học.

VÍ DỤ 3 Nếu $f_o(x) = x/(x + 1)$ và $f_{n+1} = f_o \circ f_n$ với n = 0, 1, 2, ... Hãy tìm một công thức cho $f_n(x)$.

GIẢI Ta bắt đầu bằng cách tìm công thức cho $f_n(x)$ với các trường hợp đặc biệt n = 1, 2 và 3.

Giải một bài toán tương tự, đơn giản hơn

$$f_1(x) = (f_o \circ f_o) = f_o(f_o(x)) = f_o\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_o \circ f_1)(x) = f_o(f_1(x)) = f_o\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f_3(x) = (f_o \circ f_2)(x) = f_o(f_2(x)) = f_o\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

Tìm một mô típ

$$= \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1} = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Ta đã nhận ra một mô típ: Hệ số của x trong mẫu số của $f_n(x)$ là n + 1 trong cả ba trường hợp ta đã tính toán. Do đó ta dự đoán trong trường hợp tổng quát

$$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1} \qquad (1)$$

Để chứng minh đẳng thức này, ta dùng Nguyên Lý Qui Nạp Toán Học.

Ta đã kiểm tra (1) đúng khi n = 1.

Giả sữ (1) đúng với n = k, nghĩa là.

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x+1}$$

Thế thì $f_{k+1}(x) = (f_o \circ f_k)(x) = f_o(f_k(x)) = \dfrac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \dfrac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \dfrac{x}{(k+2)x+1}$

Biểu thức này chứng tỏ (1) đúng khi n = k + 1. Do đó, theo quy nạp toán học, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

BÀI TẬP

1. Một tam giác vuông có một cạnh góc vuông có độ dài là 4 cm. Biểu diễn chiều cao vẽ từ đỉnh góc vuông theo độ dài cạnh huyền.

2. Chiều cao từ đỉnh góc vuông của một tam giác vuông là 12 cm. Biểu diễn độ dài cạnh huyền theo chu vi tam giác.

3. Giải phương trình: $|2x - 1| - |x + 5| = 3$

4. Giải bất phương trình: $|x - 1| - |x - 3| > 5$

5. Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$

6. Vẽ đồ thị hàm số $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$

7. Vẽ đồ thị của phương trình

$$x + |x| = y + |y|$$

8. Vẽ đồ thị của phương trình

$$x^4 - 4x^2 - x^2y^2 + 4y^2 = 0$$

9. Vẽ miền của mặt phẳng gồm tất cả điểm (x, y) sao cho: $|x| + |y| \le 1$

10. Vẽ miềncủa mặt phẳng gồm tất cả điểm (x, y) sao cho $|x - y| + |x| - |y| \le 2$

11. Tính $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)...(\log_{31} 32)$.

12. (a) Chứng tỏ rằng hàm số

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

là hàm số lẻ.

(b) Tìm hàm số ngược của nó.

13. Giải bất phương trình

$$\ln(x^2 - 2x - 2) \le 0$$

14. Sủ dụng phương pháp phản chứng để chứng minh $\log_2 5$ là một số vô tỉ.

15. Một tài xế khởi hành ra đi. Trong nửa quảng đường đều tiên anh ta lái chậm với tốc độ 30 dặm/giờ; trong nửa quảng đường còn lại anh ta tăng tốc độ đến 60 dặm/giờ. Tìm tốc độ trung bình trên toàn quảng đường.

16. Đẳng thức sau có đúng không?

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$

17. Chứng tỏ nếu n là số nguyên dương thì $7^n - 1$ chia hết cho 6.

18. Chứng tỏ :

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

19. Nếu $f_o(x) = x^2$ và $f_{n+1}(x) = fo(f_n(x))$ với n = 0, 1, 2 , . . ., tìm công thức tính $f_n(x)$.

20. (a) Nếu $f_o(x) = \dfrac{1}{2-x}$ và $f_{n+1} = f_o \circ f_n$ với n = 0, 1, 2, . . ., tìm công thức của $f_n(x)$ rồi chứng minh bằng qui nạp.

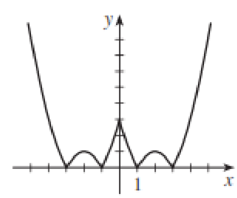
(b) Dùng máy tính để vẽ đồ thị f_o, f_1, f_2, f_3 trên cùng một màn hình và cho biết hiệu ứng sinh bởi phép hợp lặp đi lặp lại.

ĐÁP SỐ

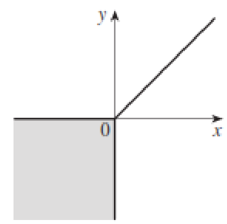
1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, trong đó a là chiều cao và h là độ dài cạnh huyền.

3. – 7/3, 9

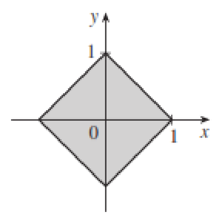
5.



7.



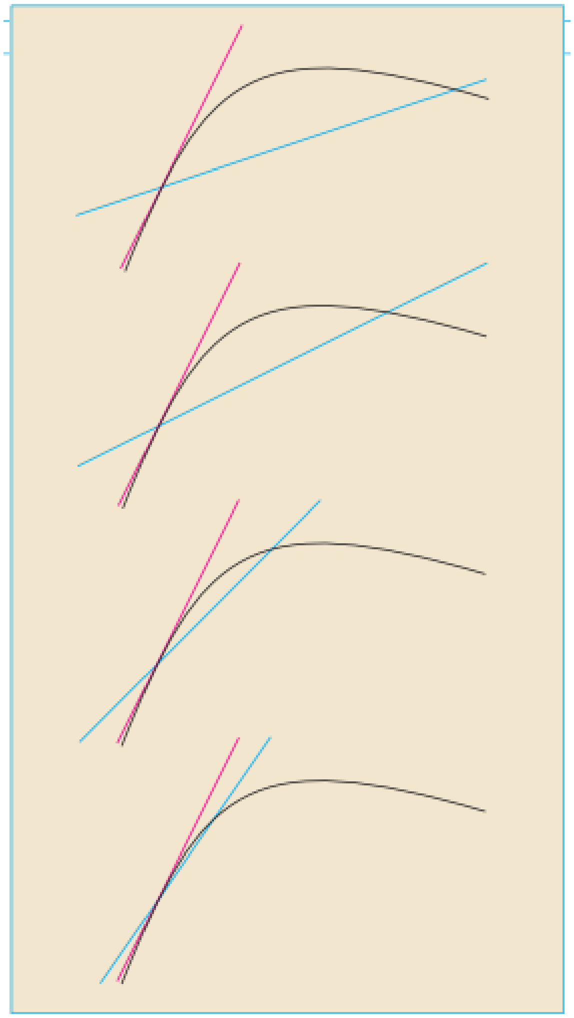
9.



11. 5 **13.** $x \in [-1, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, 3]$

15. 40 mi/h **19.** $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

Chương 2. GIỚI HẠN VÀ ĐẠO HÀM



Trần Quang Nghĩa dịch

2.1. Bài Toán Tiếp Tuyến Và Vận Tốc 88
2.2. Giới Hạn Của Hàm Số 93
2.3. Tính Giới Hạn Bằng Các Quy Tắc Giới Hạn........106
2.4. Định Nghĩa Chính Xác Của Giới Hạn 117
2.5. Tính Liên Tục...128
2.6. Giớ Hạn ở Vô Tận: Tiện Cận Ngang...................141
2.7. Đạo Hàm Và Tốc Độ Biến Thiên.........................156
2.8. Đạo Hàm Xem Như Một Hàm Số 168
ÔN CUỐI CHƯƠNG...182
PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN......................................186

BÀI 2. 1. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN VÀ VẬN TỐC

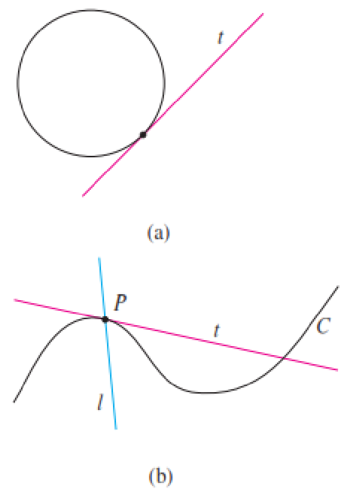
Trong phần này ta sẽ thấy vấn đề giới hạn được nêu lên khi giải quyết bài toán tiếp tuyến của một đường cong và vận tốc của một vật thể di động.

BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

Thuật ngữ tangent (tiếp tuyến) có nguồn gốc từ tiếng Latin tangents, có nghĩa là "tiếp xúc". Do đó một tiếp tuyến của đường cong là một đường thẳng tiếp xúc với đường cong đó. Nói cách khác, một tiếp tuyến phải có cùng hướng với đường cong tại điểm tiếp xúc. Phải diễn tả ý tưởng này làm sao cho chính xác thêm?

Đối với đường tròn ta chỉ có thể viện dẫn Euclid và nói rằng một tiếp tuyến là đường thẳng chỉ có điểm chung duy nhất với đường tròn và chỉ một (Hình 1(a)) . Với những đường cong phức tạp hơn định nghĩa này không đủ. Hình 1(b) cho thấy hai đường l và t đều qua điểm P của đường cong C. Đường l cắt C tại một điểm duy nhất, nhưng nó không có vẽ gì là tiếp tuyến. Đường t, trái lại, trông có vẻ là tiếp tuyến nhưng nó lại cắt C tại 2 điểm.

Như vậy ta cần một định nghĩa chính xác hơn của tiếp tuyến . Xét trường hợp một parabol $y = x^2$ và ta thử tìm tiếp tuyến của nó trong ví dụ sau.



HÌNH 1

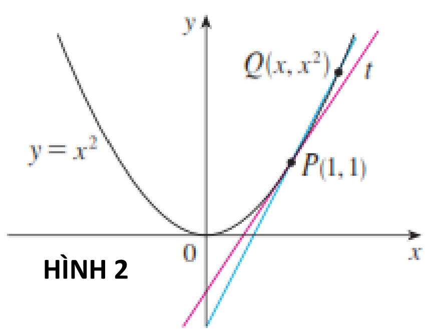
VÍ DỤ 1 Viết phương trình của tiếp tuyến với parabol $y = x^2$ tai điểm P(1, 1).

GIẢI Ta có thể tìm được tiếp tuyến t ngay khi biết độ dốc m của nó. Cái khó là ta chỉ biết mỗi điểm P của t trong khi phải cần đến hai điểm mới tính được độ dốc. Nhưng để ý rằng ta có thể tính giá trị xấp xỉ của m bằng cách chọn một điểm gần P là $Q(x, x^2)$ trên parabol (Hình 2) và tính độ dốc m_{PQ} của cát tuyến PQ.
Ta chon $x \neq 1$ để $Q \neq P$. Thế thì

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Chẳng hạn, với điểm Q(1.5, 2.25) thì

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$



HÌNH 2

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Bảng bên trái trên cho ta những giá trị của m_{PQ} ứng với vài giá trị của x gần bằng 1 nhưng lớn hơn 1, bảng dưới ứng với giá trị của x gần bằng 1 nhưng nhỏ hơn 1. Qua 2 bảng ta nhận thấy Q càng gần P thì giá trị m_{PQ} càng gần đến số 2. Và ta đoán rằng độ dốc của tiếp tuyến t có thể là m = 2.

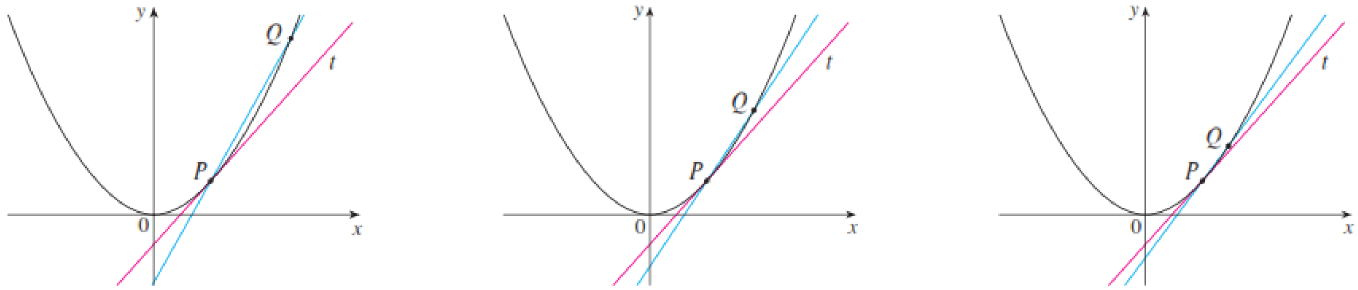
Ta nói rằng độ dốc của tiếp tuyến là giới hạn của độ dốc các đường cát tuyến, và ta viết như sau

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \quad \text{và} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

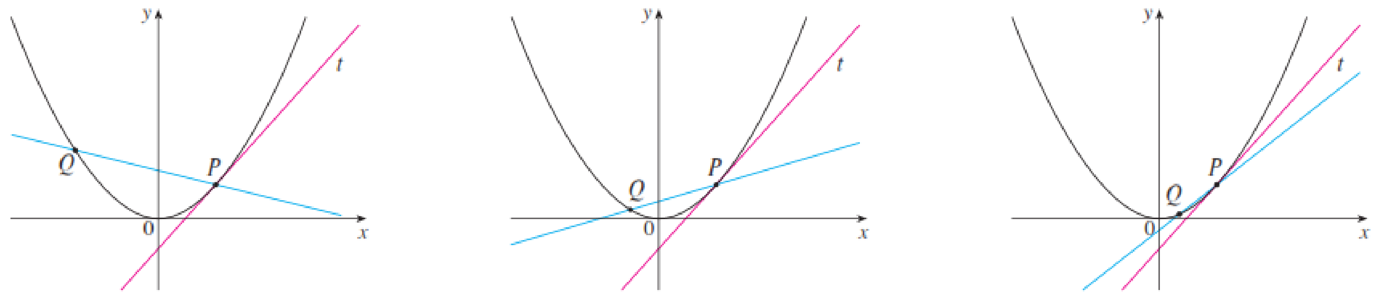
Giả sử độ dốc của tiếp tuyến chính là 2, ta viết được phương trình tiếp tuyến qua P(1, 1) và có độ dốc 2 là

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{hay} \quad y = 2x - 1$$

Hình 3 cho thấy tiến trình giới hạn khi Q tiến gần đến P trên parabol và cát tuyến quay quanh P và tiến đến gần tiếp tuyến t.



Q tiến đến P từ bên phải



Q tiến đến P từ bên trái

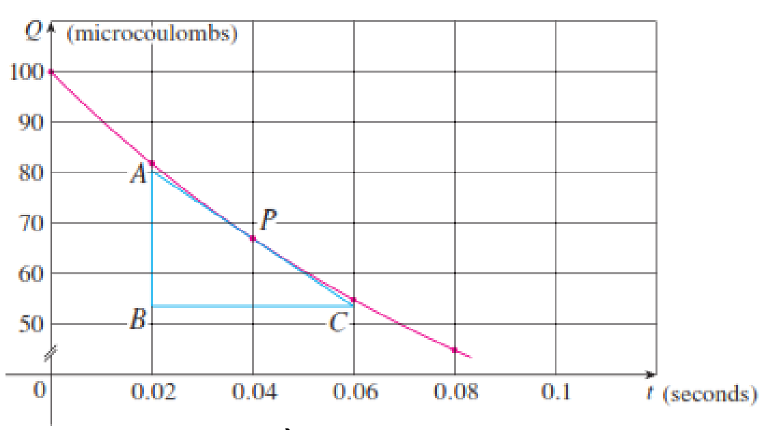
HÌNH 3

Nhiều hàm số xuất hiện trong khoa học không được biểu diễn bằng một công thức tường minh; chúng chỉ được định nghĩa bằng những dữ liệu thực nghiệm. Ví dụ sau cho thấy cách thức ta ước tính độ dốc của tiếp tuyến của một hàm số như thế.

VÍ DỤ 2 Bóng đèn flash trên máy ảnh hoạt động bằng cách tích trữ điện trong một tụ điện và phóng ra tức thì khi ta bấm nút đèn flash. Dữ liệu trong bảng mô tả điện lượng Q còn lại trong tụ điện (đơn vị microcoulomb) tại thời điểm t (tính bằng giây sau khi đèn flash bật sáng). Dùng dự liệu này để vẽ đồ thị của hàm số này và ước tính độ dốc của tiếp tuyến tại điểm t = 0.04. [*Ghi chú:* Độ dốc của tiếp tuyến biểu thị cường độ dòng điện chạy từ tụ điện đến bóng đèn flash (tính bằng microampere.]

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

GIẢI Trong Hình 4 ta vẽ những của dữ liệu và dùng chúng để phác họa đồ thị gần đúng của hàm số.



H 12

HÌNH 4

Cho các điểm P(0.04, 67.03) và R(0.00, 100.00) trên đồ thị, ta tìm được độ dốc của cát tuyến PR là

$$m_{PQ} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

Bảng bên dưới cho thấy kết quả những phép tính tương tự để tìm độ dốc của cát tuyến. Qua bảng này, ta dự đón

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

độ dốc của tiếp tuyến tại t = 0.04 nằm đâu đó giữa - 742 và – 607.5 . Trung bình cộng của hai giá trị này là

$$\frac{1}{2}(-742-607.5)=-674.75$$

Do đó ta ước tính độ dốc của tiếp tuyến là – 675.

Một phương pháp khác là vẽ một đường tiếp tuyến gần đúng tại P và đo các độ dài cạnh tam giác vuông ABC, như trong Hình 4. Nhờ đó ta có thể ước tính độ dốc của tiếp tuyến như sau

$$-\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{80.4-53.6}{0.06-0.02}=-670$$

BÀI TOÁN VẬN TỐC

Nếu bạn nhìn vào đồng hồ vận tốc của một chiếc xe khi bạn lái trong thành phố, bạn sẽ thấy rằng kim đồng hồ không đứng yên thật lâu; chứng tỏ rằng vận tốc của xe thay đổi. Nhìn vào đồng hồ vận tốc , ta cho rằng xe có một vận tốc xác định tại mội thời điểm, nhưng thế nào là vận tốc "tức thời" xác định? Hãy theo dõi ví dụ của một quả bóng rơi.

VÍ DỤ 2 Giả sử một quả bóng rơi từ đài quan sát của tháp CN ở Toronto, cao 450m cách mặt đất. Tìm vận tốc của quả bóng 5 giây sau khi bắt đầu rơi.

GIẢI Qua thực nghiệm được tiến hành cách đây bốn thế kỷ, Galileo khám phá ra rằng quảng đường đi của một vật thể rơi tự do tỉ lệ với bình phương thời gian rơi (không kể sức cản của gió). Nếu s(t) mét chỉ quảng đường rơi trong t giây, thế thì định luật Galileo cho bởi phương trình

$$(t) = 4.9t^2$$

Cái khó khăn khi tìm vận tốc sau 5 giây là ta chỉ có một thời điểm duy nhất là t = 5, trong khi tính vận tốc phải cần có hai mốc thời gian. Tuy nhiên ta có thể tính vận tốc xấp xỉ bằng cách gính tộc độ trung bình trong khoảng thời gian ngắn ngủi là 1/10 giây từ t = 5 đến t = 5.1.

$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{\text{Quảng đường đi được}}{\text{Thời gian đi}}$$

$$=\frac{s(5.1)-s(5)}{0.1}$$

$$=\frac{4.9(5.1)^2-4.9(5)^2}{0.1}=49.49m/s$$

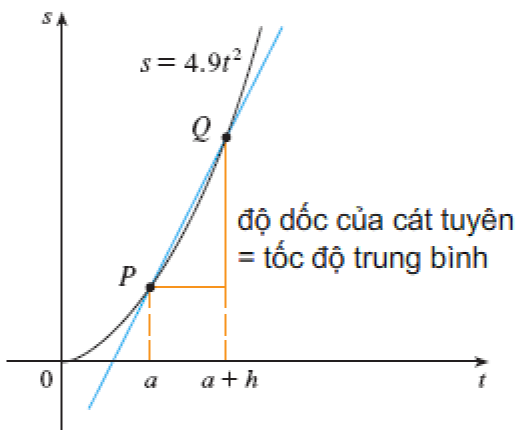
Bảng bên cho ta những giá trị của vận tốc trung bình trong các khoảng thời gian càng lúc càng nhỏ.
Có vẻ như là vận tốc trung bình dần tiến sát hơn đến số 49m/s. **Vận tốc tức thời** khi t = 5 được định nghĩa là giá trị giới hạn của vận tốc trung bình giữa hai mốc thời gian càng lúc càng giảm bắt đầu với t = 5. Như vậy vận tốc (tức thời) sau 5 giây là v = 4 9m/s.

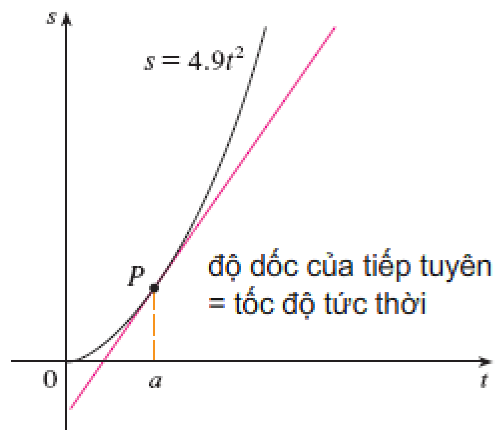
khoảng thời gian	tốc độ trung bình
$5 \leq t \leq 6$	53.9
$5 \leq t \leq 5.1$	49.49
$5 \leq t \leq 5.05$	49.245
$5 \leq t \leq 5.01$	49.049
$5 \leq t \leq 5.001$	49.0049

Đến đây hẳn bạn cảm thấy rằng những phép tính thực hiện trong bài toán này cũng tương tự như trong bài toán tiếp tuyến. Thật ra, có sự liên hệ mật thiết giữa hai bài toán tiếp tuyến và vận tốc. Nếu ta vẽ đồ thị hàm số quảng đường (Hình 5) , và xét hai điểm P(a, $4.9a^2$) và Q(a + h, $4.9(a + h)^2$) trên đồ thị, thế thì độ dốc của cát tuyến PQ là

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{(a+h)-a}$$

cũng chính là vận tốc trung bình trong khoảng thời gian [a, a + h]. Do đó vận tốc ở thời điểm t = a (giới hạn của những vận tốc trung bình này khi h tiến đến 0) phải bằng độ dốc của tiếp tuyến tại điểm P (giới hạn của những độ dốc của cát uyến).





Ví dụ 1 và 2 chứng tỏ rằng để giải bài toán tiếp tuyến và vận tốc ta phải tìm giới hạn. Sau khi học qua những phương pháp tìm giới hạn trong 5 bài tiếp theo ta sẽ trở lại bài toán này trong bài 2.7.

BÀI TẬP

1. Một bồn nước chứa 1000 galon nước, vòi nước ở đáy bồn sẽ làm cạn bồn trong nửa giờ. Giá trị trong bảng dưới cho biết dung tích V của nước còn lại trong bồn (tính bằng galon) sau t phút.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

(a) Nếu P là điểm (15, 250) trên đồ thị của V, tìm độ dốc của cát tuyến PQ trong đó Q là điểm trên đồ thị với t = 5, 10, 20, 25, và 30.
(b) Ước tính độ dốc của tiếp tuyến tại P bằng cách lấy trung bình độ dốc của hai cát tuyến.
(c) Dùng đồ thị của hàm số để ước tính độ dốc tại P. (Độ dốc này biểu thị vận tốc nước chảy ra khỏi bồn sau 15 phút.)

2. Một máy đo tim được dùng để đo tốc độ tim đập của một bệnh nhân sau khi giải phẩu. Nó tính số nhịp đập sau t phút. Khi dữ liệu trong bảng được đồ thị hóa, độ dốc của tiếp tuyến biểu thị tốc độ tim đập mỗi phút.

t (min)	36	38	40	42	44
Heartbeats	2530	2661	2806	2948	3080

Máy ước tính giá trị này bằng cách tính độ dốc của cát tuyến. Dùng dữ liệu này để ước tính tốc độ tim đập sau 42 phút dùng cát tuyến giữa những điểm với giá trị t cho trước.

(a) t = 36 và t = 42 (b) t = 38 và t = 42

(c) t = 40 và t = 42 (d) t = 42 và t = 44

3. Điểm P(1, 1/2) thuộc đồ thị y = x/(1 + x).

(a) Nếu Q là điểm (x, x/(1 + x)), dùng máy tính để tìm độ dốc của cát tuyến PQ (đúng đến sáu chữ số thập phân) với những giá trị sau đây của x:

(i) 0.5 (ii) 0.9 (iii) 0.99 (iv) 0.999

(v) 1.5 (vi) 1.1 (vii) 1.01 (viii) 1.001

(b) Dùng kết quả của phần (a), hãy tiên đoán giá trị của độ dốc của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm P(1, 1/2).

(c) Dùng độ dốc của (b), hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm P(1, 1/2).

4. Điểm P(3, 1) thuộc đồ thị y = $\sqrt{x-2}$.

(a) Nếu Q là điểm (x, $\sqrt{x-2}$), dùng máy tính để tìm độ dốc của cát tuyến PQ (đúng đến sáu chữ số thập phân) với những giá trị sau đây của x:

(i) 2.5 (ii) 2.9 (iii) 2.99 (iv) 2.999

(v) 3.5 (vi) 3.1 (vii) 3.01 (viii) 3.001

(b) Dùng kết quả của phần (a), hãy tiên đoán giá trị của độ dốc của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm P(3, 1).

(c) Dùng độ dốc của (b), hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm P(3, 1).

(d) Vẽ đồ thị hàm số, hai trong số các cát tuyến, và tiếp tuyến.

5. Một quả bóng được ném lên không với vận tốc 40 ft/s, độ cao quả bóng tính bằng feet sau t giây là y = 40t - 16t^2.

(a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian bắt đầu với t = 2 và kéo dài trong

(i) 0.5 giây (ii) 0.1 giây

(iii) 0.05 giây (v) 0.01 giây

(b) Ước tính vận tốc tức thời khi t = 2.)

6. Một viên đá được ném lên không trên Hỏa Tinh với vận tốc 10 m/s, độ cao viên đá tính bằng mét sau t giây được cho bởi y = 10t – 1.86t^2.

(a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian cho trước.

(i) [1, 2] (ii) [1, 1.5] (iii) [1, 1.1]

(iv) [1, 1.01] (v) [1, 1.001]

(b) Ước tính vận tốc tức thời khi t = 1.

7. Bảng dưới biểu thị vị trí của một vận động viên xe đạp.

t (seconds)	0	1	2	3	4	5
s (meters)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

(a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian cho trước

(i) [1, 3] (ii) [2, 3] (iii) [3, 5] (iv) [3, 4]

(b) Dùng đồ thị của s xem như hàm số theo t để ước tính vận tốc tức thời khi t = 3.

8. Quảng đường (tính bằng cm) của một chất điểm di chuyển qua lại trên một đường thẳng được cho bởi phương trình chuyển động s = 2 sin πt + 3 cos πt, trong đó t tính bằng giây.

(a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian cho trước

(i) [1, 2] (ii) [1, 1.1]

(iii) [1, 1.01] (iv) [1, 1.001]

(b) Ước tính vận tốc tức thời của chất điểm khi t = 1.

9. Điểm P(1, 0) nằm trên đường cong y = sin(10π/x).

(a) Nếu Q là điểm (x, sin(10π/x)), tìm độ dốc của cát tuyến PQ (đúng đến bốn chữ số thập phân) với x = 2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, và 0.9. Độ dốc có vẻ tiến gần đến một giới hạn nào hay không?

(b) Dùng đồ thị của hàm số (vẽ bằng máy) để giải thích tại sao những độ dốc của cát tuyến trong phần (a) không tiến sát đến độ dốc của tiếp tuyến tại P.

(c) Bằng cách chọn những cát tuyến thích hợp,ước tính độ dốc của tiếp tuyến tại P.

ĐÁP SỐ

1. (a) $-44.4, -38.8, -27.8, -22.2, -16.\overline{6}$
(b) -33.3 (c) $-33\frac{1}{3}$

3. (a) (i) 0.333333 (ii) 0.263158 (iii) 0.251256
(iv) 0.250125 (v) 0.2 (vi) 0.238095 (vii) 0.248756
(viii) 0.249875 (b) $\frac{1}{4}$ (c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

5. (a) (i) -32 ft/s (ii) -25.6 ft/s (iii) -24.8 ft/s
(iv) -24.16 ft/s (b) -24 ft/s

7. (a) (i) 4.65 m/s (ii) 5.6 m/s (iii) 7.55 m/s
(iv) 7 m/s (b) 6.3 m/s

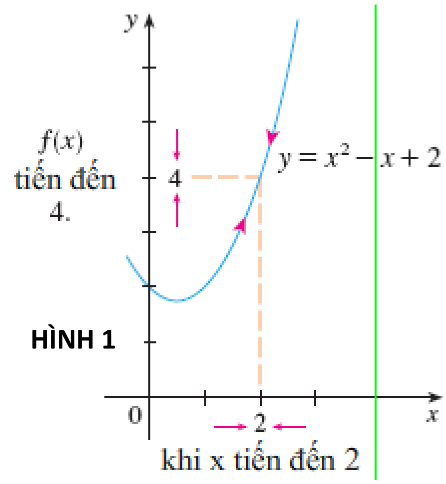
9. (a) 0, 1.7321, -1.0847, -2.7433, 4.3301, -2.8173, 0, -2.1651, -2.6061, -5, 3.4202; no (c) -31.4

BÀI 2. 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Trong bài trước ta đã thấy khái niệm giới hạn đã xuất hiện như thế nào trong bài toán tiếp tuyến và vận tốc, bây giờ ta tìm hiểu giới hạn một cách tổng quát và tính các giới hạn đó bằng phương pháp đồ thị và bảng số.

Hãy theo dõi cách mà hàm số f định bởi $f(x) = x^2 - x + 2$ thay đổi khi x lấy những giá trị gần 2. Bảng sau đây cho ta những giá trị của f khi gần bằng 2, nhưng không bằng 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001



HÌNH 1

Từ bảng trên và đồ thị hàm số f (một parabol) (Hình 1) ta thấy rằng khi x gần sát đến 2 (về cả hai phía), f(x) sát đến 4. Thật ra, ta có thể có được những giá trị của f(x) gần đến số 4 như mong muốn bằng cách lấy x càng gần bằng 2. Ta diễn tả điều này bằng cách nói rằng "giới hạn của hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$ khi x tiến đến 2 là bằng 4." Kí hiệu là

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Tổng quát, ta có phát biểu sau

> **1 ĐỊNH NGHIA** Ta viêt
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> và phát biểu "giới hạn của f(x)là L khi x tiến đến a" nếu ta có thể có được những giá trị của f(x) gần bằng L như ý muốn bằng cách cho x những giá trị đủ gần a (ở phía trái hay phải) nhưng không bằng a.

Nói một cách thô thiển, điều này có nghĩa giá trị của f(x) có khuynh hướng càng gần số L khi x càng gần số a (ở về cả hai phía) nhưng $x \neq a$. Định nghĩa chính xác hơn sẽ được đưa ra trong bài 2.4.

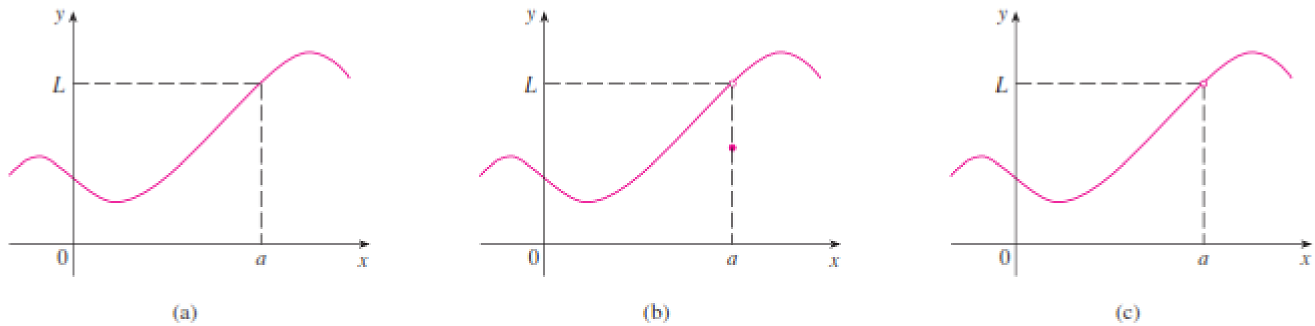
Một kí hiệu khác cho $\lim_{x \to a} f(x) = L$ là

$$f(x) \to \quad \text{khi} \quad x \to a$$

và thường được đọc: "f(x) tiến đến L khi x tiến đến a."

Chú ý điều kiện "$x \neq a$" trong định nghĩa của giới hạn. Điều này có nghĩa là trong khi tìm giới hạn của f(x) khi x tiến đến a, chúng ta không được xét x = a. Thật ra, f(x) không cần phải xác định khi x = a. Điều duy nhất cần thiết là f xác định khi x gần số a.

Hình dưới là đồ thị ba hàm số. Chú ý trong phần (c), f(a) không xác định và trong phần (b) f(a) ≠ L. Nhưng trong cả ba trường hợp, dù ở a như thế nào, thì ta vẫn có lim f(x) = L.



HÌNH 2

VÍ DỤ 1 Dự đoán lim $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$

GIẢI Ta thấy rằng hàm số f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1) không xác định khi x = 1, nhưng không hề gì vì định nghĩa của giới hạn lim f(x) khi x -> a cho phép ta chỉ xét những giá trị của x gần bằng a nhưng không bằng a.

Bảng bên trái cho ta những giá trị của f(x) (đúng đến sáu chữ số) với những giá trị của x gần bằng 1 (nhưng không bằng 1). Dựa vào bảng ta dự đoán rằng

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

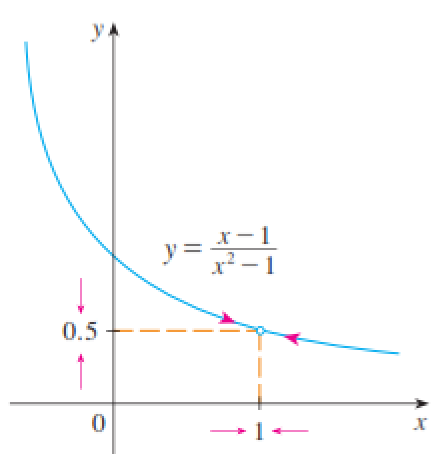
$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

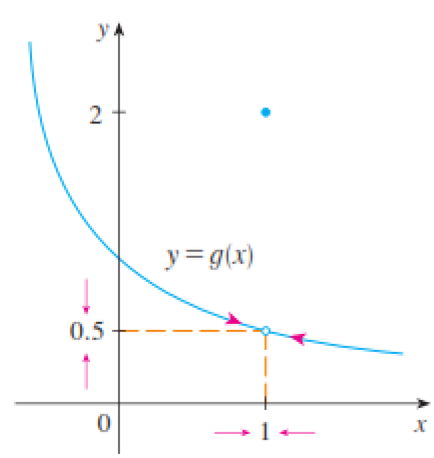
Ví dụ 1 được minh họa bởi đồ thị của f trong Hình 3. Giờ ta thay đổi hàm f chút ít bằng cách cho nó giá trị 2 khi x = 1 và gọi hàm số mới này là g:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & khi \quad x \neq 1 \\ 2 & khi \quad x = 1 \end{cases}$$

Hàm số mới này vẫn có cùng giới hạn khi x tiến đến 1 (Hình 4)



HÌNH 3



HÌNH 4

VÍ DỤ 2 Ước tính giá trị của $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

GIẢI Bảng bên liệt kê những giá trị của hàm số với một vài giá trị của t gần 0. Dựa vào bảng, ta thấy giá trị của f tiến gần đến 0.1666666. . . và ta dự đoán

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

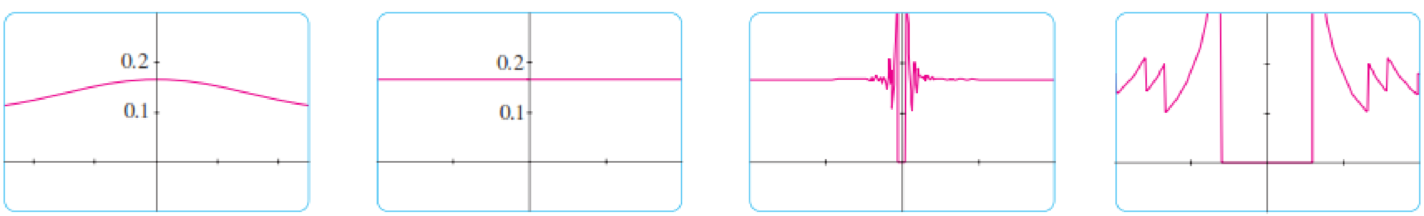
Trong ví dụ 2 điều gì sẽ xảy ra nếu ta lấy những giá trị t càng nhỏ hơn nữa? Bảng bên cho thấy kết quả ta được từ máy tính bỏ túi; bạn có thấy điều gì bất thường không?

Nếu dùng máy tính của mình, bạn có thể có kết quả hơi khác, nhưng tựu trung bạn cuối cùng được giá trị là 0 nếu lấy t đủ nhỏ. Điều này có phải là giới hạn của biểu thức là 0 chứ không phải 1/6 như ta đã dự đoán? Không, đáp số đúng là 1/6, như ta sẽ chứng minh trong bài sau. Vấn đề là máy tính đã tính sai vì $\sqrt{t^2+9}$ rất gần số 3 khi t nhỏ. (Thật ra là khi t đủ nhỏ, máy tính cho $\sqrt{t^2+9}$ là giá trị là 3.000. . . với tât cả chữ số thập phân mà máy tính có thể tính được.)

Một sự có tương tự cũng xảy ra khi ta vẽ bằng máy đồ thị hàm số

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

của vị dụ 3. Phần (a) và (b) của Hình 5 cho thấy đồ thị chính xác của f, và giới hạn của f(x) khi x tiến đến 0 là 1/6. Nhưng nếu ta phóng đại khung hình lên nhiều lần, như trong phần (c) và (d), đồ thị không còn đúng nữa, vì có vấn đề với bài toán trừ.



(a) $[-5, 5]$ by $[-0.1, 0.3]$ (b) $[-0.1, 0.1]$ by $[-0.1, 0.3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ by $[-0.1, 0.3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ by $[-0.1, 0.3]$

HÌNH 5

VÍ DỤ 3 Dự đoán giá trị của $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

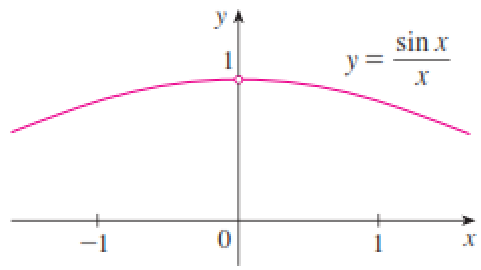
GIẢI Hàm số f(x) = (sinx)/x không xác định khi x = 0. Dùng máy tính (và nhớ rằng nếu x thuộc R, sinx nghĩa là sin của một góc tính bằng đơn vị radian), ta được bảng số bên phải, đúng đến 8 chữ số thập phân. Dựa vào bảng và đồ thị của hàm số ta dự đoán

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Dự đoán ta hoàn toàn đúng như ta sẽ chứng minh bằng luận cứ hình học trong Chương 3.

HÌNH 6



VÍ DỤ 4 Khảo sát $\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$.

GIẢI Lần nữa hàm số f(x) = sin(π/x) không xác định khi x = 0. Tính giá trị của hàm số với một số giá trị nhỏ của x, ta được

f(1) = sinπ = 0 f(1/2) = sin2π = 0

f(1/3) = sin3π = 0 f(1/4) = sin4π = 0

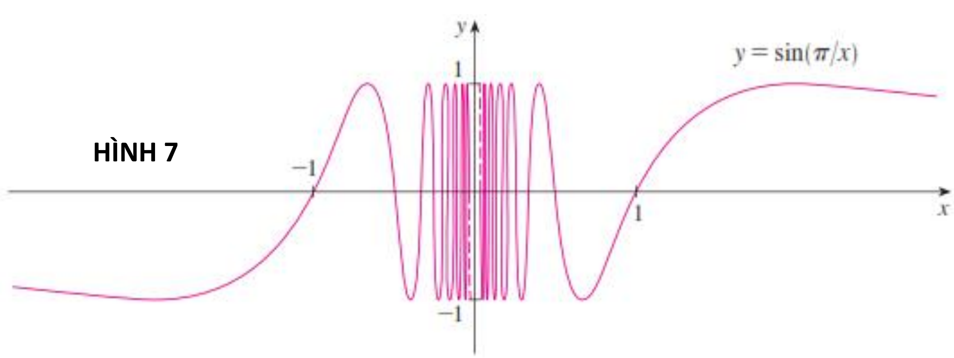
f(0.1) = sin10π = 0 f(0.01) = sin100π = 0

Tương tự, f(0.001) = f(0.0001) = 0. Dựa vào kết quả này ta có thể chắc ý rằng

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}=0$$

nhưng lần này dự đoán của ta là SAI. Chú ý rằng mặc dù f(1/n) = sinnπ = 0 với mọi số nguyên n, nhưng ta cũng có f(x) = 1 với vô số các giá trị của x = 2/(4n + 1) tiến đến 0. Đồ thị của f cho bởi Hình 7.

HÌNH 7



Nét chấm chấm trong đồ thị chỉ ra rằng giá trị của sin(π/x) dao động giữa số 1 và - 1 vô số lần khi x tiến đến 0. Vì giá trị của f(x) không tiến đến một số cố định nào khi x tiến đến 0, nên

$\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ không tồn tại.

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

VÍ DỤ 5 Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}\right)$

GIẢI Như trước, ta lập bảng số. Từ bảng số bên, hình như

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000}\right) = 0$$

Nhưng nếu lấy thêm những giá trị nhỏ hơn của x, bảng số thứ hai đề nghị

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000}\right) = 0.000100 = \frac{1}{10{,}000}$$

Sau này ta sẽ thấy $\lim_{x\to 0} \cos 5x = 1$; và từ đó giới hạn đúng là bằng 0.0001.

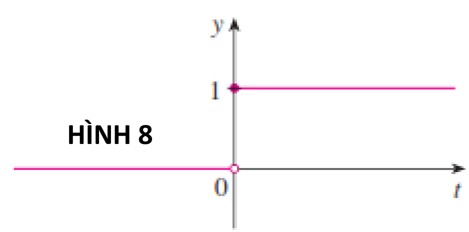
Ví dụ 4 và 5 minh họa những vấp váp có thể xảy ra khi dự đoán giá trị của giới hạn bằng bảng số. Có thể ta đoán sai nếu dùng những giá trị không thích hợp của x, nhưng ta khó biết khi nào phải ngưng tính toán. Trong bài sau ta sẽ phát triển những phương pháp tìm giới hạn một cách chính xác.

VÍ DỤ 6 Hàm số Heaviside H định bởi

$$H(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad t < 0 \\ 1 & khi \quad t \ge 0 \end{cases}$$

[Hàm số này có tên của kỹ sư điện Oliver Heaviside (1850-1925) và có thể được sử dụng để mô tả dòng điện đóng lại tại thời điểm t = 0.] Đồ thị của nó được vẽ trong Hình 8.

Khi t tiến đến 0 từ bên trái, H(t) tiến đến 0. Còn khi t tiến đến 0 từ bên phải, H(t) tiến đến 1. Không có một giá trị duy nhất để H(t) tiến đến đó khi t tiến đến 0. Do đó, $\lim_{t\to 0} H(t)$ không tồn tại.



HÌNH 8

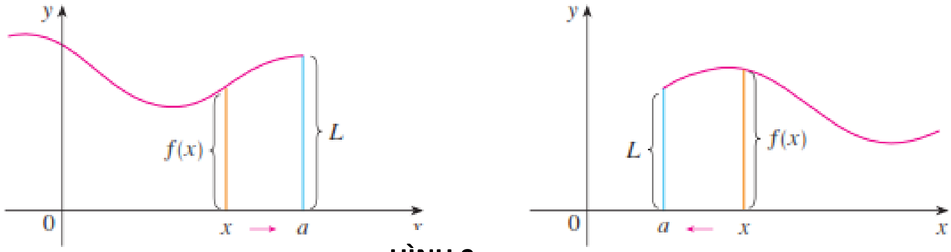
GIỚI HẠN MỘT BÊN

Ta nhận xét trong ví dụ 6 rằng H(t) tiến đến 0 khi t tiến đến 0 từ bên trái và H(t) tiến đến 1 khi t tiến đến 0 từ bên phải. Ta diễn tả tình huống này bằng kí hiệu

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{và} \qquad \lim_{t\to 0^+} H(t) = 0$$

Kí hiệu " $t \to 0^-$ " chỉ ra rằng ta chỉ xét những giá trị của t nhỏ hơn 0. Tương tự, " $t \to 0^+$ " chỉ ra rằng ta chỉ xét những giá trị của t lớn hơn 0.

> **2 ĐỊNH NGHĨA** Ta viết
>
> $$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$
>
> và nói rằng **giới hạn bên trái của f(x) khi x tiến đến a** [hoặc **giới hạn của f(x) khi x tiến đến a từ bên trái**] thì bằng L nếu ta có thể có được những giá trị của f(x) gần bằng L tùy ý bằng cách lấy x đủ gần a và x nhỏ hơn a.



HÌNH 9

(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Chú ý Định nghĩa 2 khác định nghĩa 1 ở chỗ ta bắt x phải nhỏ hơn a. Tương tự, nếu ta bắt x lớn hơn a, ta được "**giới hạn bên phải của f(x) khi x tiến đến a** thì bằng L và ta kí hiệu

$$\lim_{x -> a^+} f(x) = L$$

Do đó kí hiệu " x -> a $^+$ " có nghĩa là ta chỉ xét x > a. Những định nghĩa được minh họa trong Hình 9 ởi trên.

Bằng cách so sánh định nghĩa 1 với định nghĩa của giới hạn một bên, ta suy ra điều sau đây là đúng

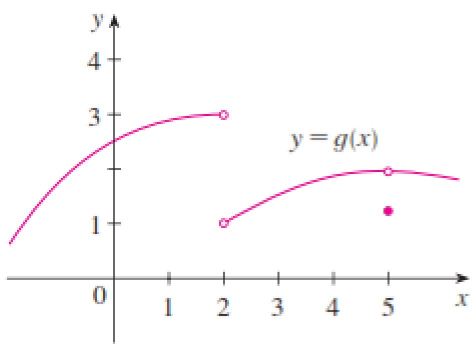
3 $\lim_{x -> a} f(x) = L$ khi và chỉ khi

$\lim_{x -> a^-} f(x) = L$ và $\lim_{x -> a^+} f(x)$ =L

VÍ DỤ 7 Đồ thị hàm số g được cho trong Hình 10 bên dưới. Dùng đồ thị này để cho biết những giá trị (nếu có) của những giới hạn sau:

(a) $\lim_{x -> 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x -> 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x -> 2} g(x)$

(d) $\lim_{x -> 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x -> 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x -> 5} g(x)$



HÌNH 10

GIẢI Từ đồ thị ta thấy rằng những giá trị của g(x) tiến đến 3 khi x tiến đến 2 từ bên trái, nhưng g(x) lại tiến đến 1 khi x tiến đến 2 từ bên phải. Do đó

(a) $\lim_{x -> 2^-} g(x)$ = 3 và (b) $\lim_{x -> 2^+} g(x)$ = 1

(c) Vì giới hạn bên trái và phải khác nhau, từ (3) ta kết luận $\lim_{x -> 2}$ g(x) không tồn tại.

Đồ thị cũng chứng tỏ rằng

(d) $\lim_{x -> 5^-} g(x)$ = 2 và (e) $\lim_{x -> 5^+} g(x)$ = 2

(f) Lần này giới hạn bên trái và phải bằng nhau nên, theo (3), ta được

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Dù vậy cần chú ý rằng g(5) ≠ 2 (điểm đỏ).

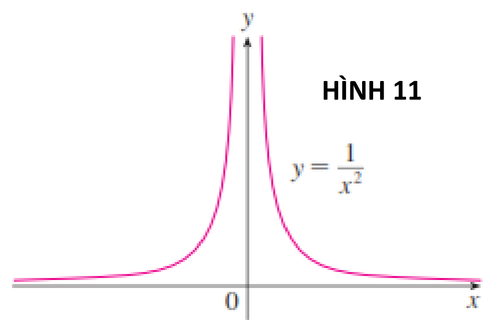
GIỚI HẠN VÔ TẬN

VÍ DỤ 8 Tìm $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ nếu giới hạn này tồn tại.

x -> 0

GIẢI Khi x đến gần 0, x^2 cũng tiến đến gần 0, và $1/x^2$ trở nên vô cùng lớn. (Nhìn bảng số bên dưới.) Thật ra, nhìn vào đồ thị hàm số $f(x) = 1/x^2$ trong Hình 11, ta thấy những giá trị của f(x) có thể lớn tuỳ ý nếu ta lấy giá trị x đủ gần số 0. Do đó những giá trị của f(x) không tiến gần một giá trị cụ thể nào, vì vậy lim x -> 0 (1/x2) không tồn tại.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000



HÌNH 11

Để mô tả tình huống này, ta dùng kí hiệu

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \text{oo}$$

Điều này không có nghĩa là ta coi oo là một số. Cũng không phải là giới hạn tồn tại. Kí hiệu chỉ biểu thị một trường hợp đặc biệt trong đó giới hạn không tồn tại: $1/x^2$ có thể làm cho lớn tùy ý muốn bằng cách lấy x đủ gần 0.

Tổng quát, ta kí hiệu tượng trưng

$$\lim_{x \to 5} g(x) = \text{oo}$$

để chỉ những giá trị của f(x) có khynh hướng càng lúc càng lớn (hoặc "tăng vô hạn") khi x càng lúc càng gần a.

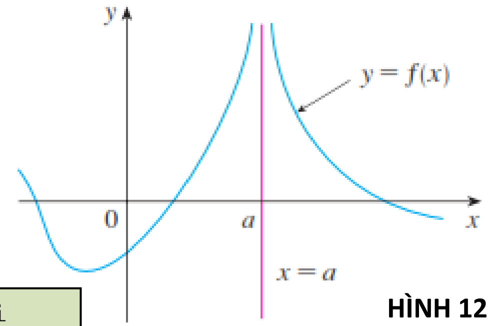
> **4 ĐỊNH NGHĨA** Cho f là hàm số xác định ở hai bên a, có thể trừ tại a. Thế thì
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \text{oo}$$
>
> có nghĩa là những giá trị của f(x) có thể làm lớn tùy ý bằng cách lấy x đủ gần a, nhưng không bằng a.

Một ký hiệu khác là f(x) → oo khi x → a

Nói lại là kí hiệu oo không phải là con số, tuy nhiên kí hiệu lim $_{x \to a}$ f(x) = oo vẫn thường được đọc là "giới hạn của f(x) là vô cực, khi x tiến đến a"

hoặc "f(x) tiến đến vô cực khi x tiến đến a" hoặc "f(x) tăng vô hạn khi x tiến đến a"

Định nghĩa này được minh hoạ trong Hình 12.



HÌNH 12

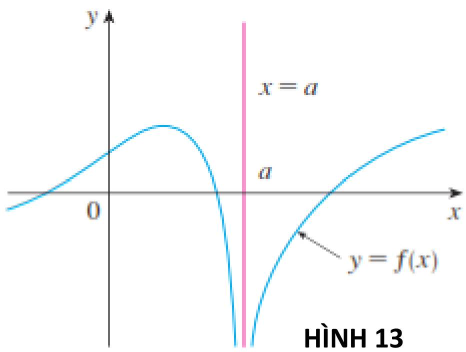
Một loại giới hạn tương tự cho hàm số trở nên âm lớn khi x đến gần số a được định nghĩa trong Định nghĩa 5 và được minh họa trong Hình 13.

.

5 ĐỊNH NGHĨA Cho f là hàm số xác định ở hai bên a, có thể trừ tại a. Thế thì

$$\lim_{x \to a} f(x) = \text{- oo}$$

có nghĩa là những giá trị của f(x) có thể làm lớn âm tùy ý bằng cách lấy x đủ gần a, nhưng không bằng a.



HÌNH 13

Kí hiệu $\lim_{x \to a} f(x)$ = - oo có thể đọc là : "giới hạn của f(x) là âm vô cực khi x tiến đến a" hoặc "f(x) giảm vô hạn khi x tiến đến a." Chẳng hạn:

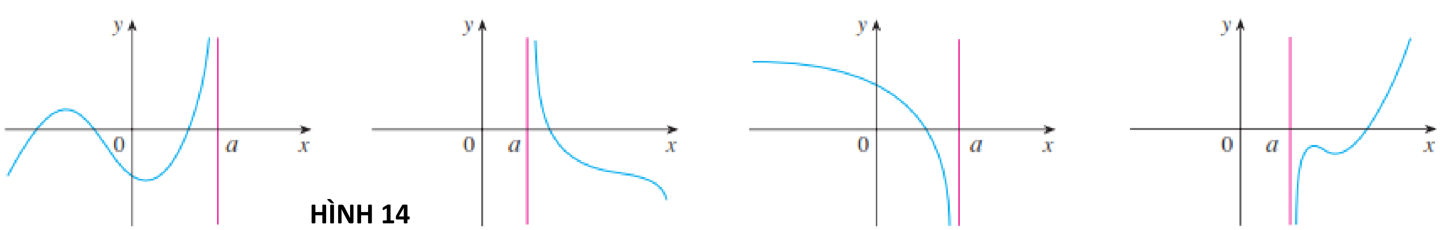
$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

Định nghĩa tương tự cho những giới hạn vô tận một bên

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \text{oo} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \text{= oo}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \text{- oo} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \text{= - oo}$$

nhớ rằng "$x \to a^-$" nghĩa là ta chỉ xét những giá trị của x nhỏ hơn a và tương tự "$x \to a^+$" nghĩa là ta chỉ xét $x > a$. Bốn trường hợp trên được minh họa trong các hình dưới.



HÌNH 14

(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

6 ĐỊNH NGHĨA Đường thẳng x = a được gọi là **tiệm cận đứng** của đồ thị y = f(x) nếu ít nhất một trong những phát biểu sau là đúng:

$\lim_{x \to a} f(x)$ = oo $\lim_{x \to a^-} f(x)$ = oo $\lim_{x \to a^+} f(x)$ = oo

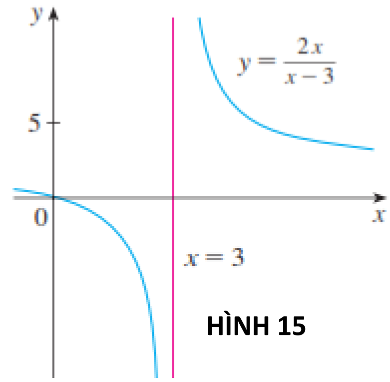
$\lim_{x \to a} f(x)$ = -oo $\lim_{x \to a^-} f(x)$ = -oo $\lim_{x \to a^+} f(x)$ = -oo

Ví dụ, trục y là tiệm cận đứng của đồ thị $y = 1/x^2$ vì $\lim_{x \to 0}(1/x^2) = 0$. Trong Hình 14, đường thẳng x = a là tiệm cận đứng của bốn đồ thị trong hình. Nói chung, kiến thức về tiệm cận đứng rất hữu ích trong việc vẽ đồ thị hàm số.

VÍ DỤ 9 Tìm $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$.

GIẢI Nếu x gần 3 nhưng lớn hơn 3, thế thì mẫu số x - 3 là một số dương rất nhỏ và 2x gần bằng 6. Vì thế thương số 2x/(x - 3) là số *dương* rất lớn. Do đó , theo trực giác, ta thấy rằng

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$



HÌNH 15

Tương tự, nếu x gần sát 3 nhưng nhỏ hơn 3, thế thì x - 3 là số âm nhỏ, 2x vẫn là số dương (gần bằng 6). Vì thế 2x/(x - 3) là số âm có đại lượng lớn. Do đó

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

Đồ thị hàm số y = 2x/(x - 3) được cho trong Hình 15. Đường x = 3 là một tiệm cận đứng

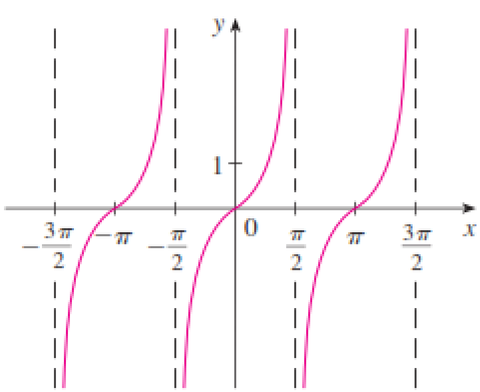
VÍ DỤ 10 Tìm các tiệm cận của đồ thị f(x) = tanx

GIẢI Vì $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

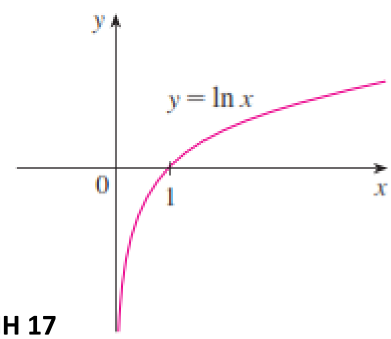
nên có thể có những tiệm cận đứng tiềm năng ở những nơi mà cosx = 0. Thật ra, vì cosx → 0^+ khi x → $(\pi/2)^-$ và cosx → 0^- khi x → $(\pi/2)^+$, trong khi sinx gần bằng 1 khi x gần π/2, ta có

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = \infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \to \pi/2^+} \tan x = -\infty$$

Điều này chứng tỏ đường thẳng x = π/2 là một tiệm cận đứng. Lý luận tương tự ta có những đường thẳng x = (2n + 1)π/2, trong đó n nguyên, là những tiệm cận đứng của f(x) = tanx. Đồ thị trong hình trên xác nhận diều này.



HÌNH 16



HÌNH 17

Một ví dụ khác mà đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là hàm số y = lnx (logarit tự nhiên). Từ Hình 17, ta thấy rằng

$$\boxed{\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty}$$

và như vậy đường thẳng x = 0 (tức trục y) là tiệm cận đứng. Điều này cũng đúng với đồ thị y = $\log_a x$ với a > 1.

BÀI TẬP

1. Giải thích theo ngôn từ của bạn ý nghĩa của phương trình sau:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

Có khi nào phát biểu trên đúng nhưng f(2) = 3 được không? Giải thích.

2. Giải thích những phát biểu sau có nghĩa gì?

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7$$

Trong tinh huống này có thể tồn tại $\lim_{x \to 1} f(x)$ không?

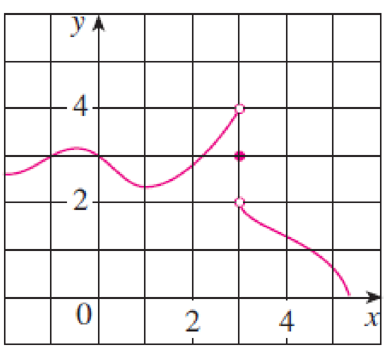
3. Giải thích ý nghĩa của những phát biểu sau.

(a) $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Cho hàm số f có đồ thị cho trước , hãy tìm các giá trị sau, nếu có. Nếu không tồn tại, hãy giải thích tại sao?

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

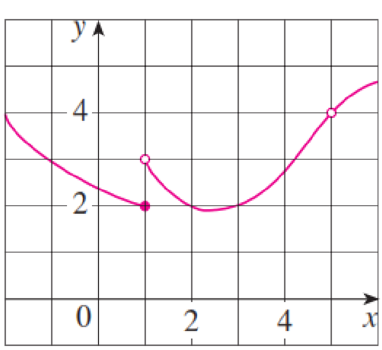
(c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) f(3)



5. Dùng đồ thị của hàm số f để tìm các giá trị sau, nếu có. Nếu không tồn tại, giải thích tại sao.

(a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 5} f(x)$ (e) f(5)



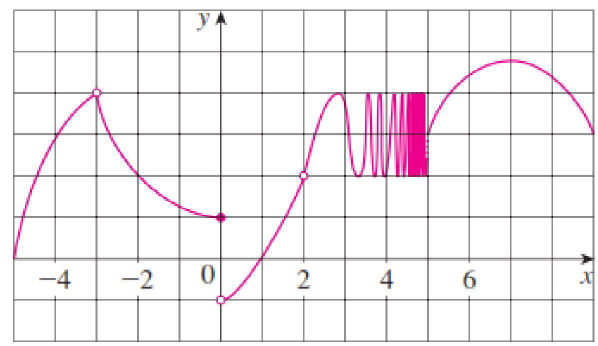
6. Cho hàm số h có đồ thị cho trước, tìm các giá trị sau, nếu nó tồn tại. Nếu không, giải thích tại sao.

(a) $\lim_{x\to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x\to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x\to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x\to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x\to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x\to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x\to 5^-} h(x)$

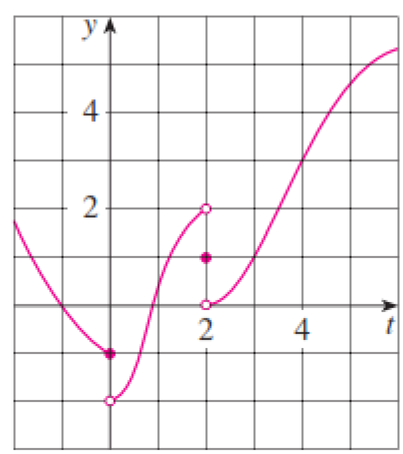


7. Cho hàm số g có đồ thị cho trước, tìm các giá trị sau, nếu nó tồn tại. Nếu không, giải thích tại sao.

(a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t\to 4} g(t)$

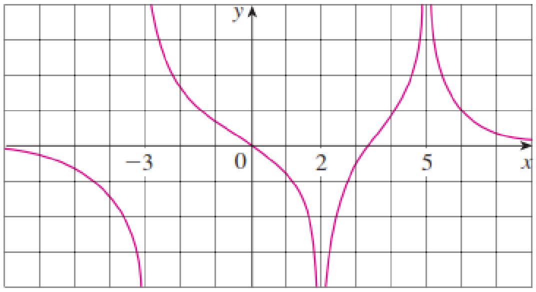


8. Cho hàm số R có đồ thị cho trước, tìm:

(a) $\lim_{x\to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x\to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x\to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x\to -3^+} R(x)$

(e) phương trình các tiệm cận đứng.

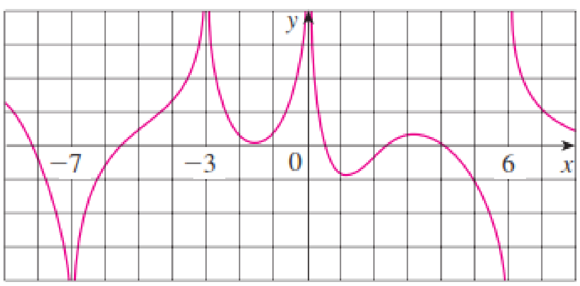


9. Cho hàm số f có đồ thị cho trước, tìm:

(a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

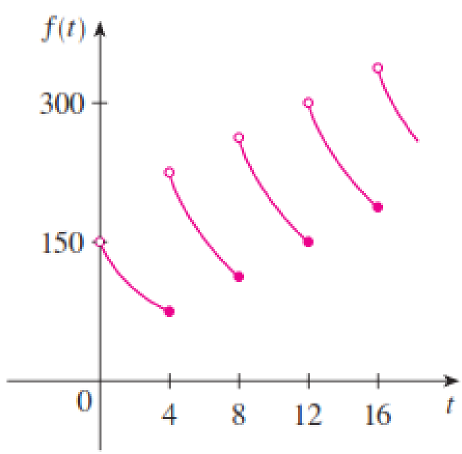
(f) phương trình các tiệm cận đứng.



10. Một bệnh nhân được tiêm 150-mg thuốc mỗi 4 giờ. Đồ thị dưới cho biết lượng f(t) của thuốc hiện diện trong máu bệnh nhận sau t giờ. Tìm

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \quad \text{và} \quad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

và giải thích ý nghĩa của những giới hạn một bên này.



11. Dùng máy để vẽ đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ để tìm mỗi giới hạn sau, nếu nó tồn tại. Nếu không, giải thích tại sao.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

12. Vẽ đồ thị các hàm số sau và dùng nó để xác định những giá trị a sao cho $\lim_{x\to a} f(x)$ tồn tại.

$$f(x)=\begin{cases} 2-x & khi \quad x<-1 \\ x & khi \quad -1\le x\le 1 \\ (x-1)^2 & khi \quad x\ge 1 \end{cases}$$

13-16 Phác họa dạng đồ thị của một hàm số f thỏa mãn tât cả điều kiện cho trước.

13. $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=-2,\quad f(1)=2$

14. $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-1,\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=0,$
$\lim_{x\to 2^+} f(x)=1,\quad f(2)=1,\quad f(0)$ is không xác định

15. $\lim_{x\to 3^+} f(x)=4,\quad \lim_{x\to 3^-} f(x)=2,\quad \lim_{x\to -2} f(x)=2,$
$f(3)=3,\quad f(-2)=1$

16. $\lim_{x\to 1} f(x)=3,\quad \lim_{x\to 4^-} f(x)=3,\quad \lim_{x\to 4^+} f(x)=-3,$
$f(1)=1,\quad f(4)=-1$

17-20. Dự đoán các giới hạn sau (nếu chúng tồn tại) bằng cách tính giá trị các hàm số tại những điểm cho trước (đúng đến sáu chữ số thập phân).

17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$, x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001, 1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999.

18. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$, x = 0, - 0.5, - 0.9, - 0.95, - 0.99, - 0.999, - 2, - 1.5, - 1.1, - 1.01, - 1.001.

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$, x = ± 1, ± 0.5, ± 0.1, ± 0.05, ± 0.001.

20. $\lim_{t\to 0^+} x\ln(x+x^2)$, x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0001.

21-24 Dùng bảng giá trị để ước tính giới hạn. Sau đó, dùng máy tính để vẽ đồ thị và kiểm tra kết quả của bạn bằng đồ thị.

21. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

22. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 5x}$

23. $\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^{10}-1}$

24. $\lim_{x\to 0}\frac{9^x-5^x}{x}$

25-32 Xác định các giới hạn vô tận sau.

25. $\lim_{x\to -3^+}\frac{x+2}{x+3}$

26. $\lim_{x\to -3^-}\frac{x+2}{x+3}$

27. $\lim_{x\to 1}\frac{2-x}{(x-1)^2}$

28. $\lim_{x\to 5^-}\frac{e^x}{(x-5)^3}$

29. $\lim_{x\to 3^+}\ln(x^2-9)$

30. $\lim_{x\to \pi^-}\cot x$

31. $\lim_{x\to 2\pi^-} x\csc x$

32. $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

33. Xác định $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^3-1}$ và $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^3-1}$

(a) bằng cách tính $f(x) = 1/(x^3-1)$ với những giá trị của x tiến đến 1 từ bên trái và từ bên phải.

(b) bằng cách lý luận như trong Ví dụ 9, và

(c) bằng đồ thị của f (vẽ bằng máy).

34. (a) Tìm tiệm cận đứng của hàm số

$$y=\frac{x^2+1}{3x-2x^2}$$

(b) Kiểm tra kết quả bạn làm bằng cách vẽ đồ thị bằng máy của hàm số.

35. (a) Ước tính giới hạn $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ đúng đến năm chữ số thập phân. Số giới hạn này trông có quen không?

(b) Kiểm tra kết quả bạn làm bằng cách vẽ đồ thị bằng máy của hàm số $y=(1+x)^{1/x}$.

36. (a) Bằng cách vẽ đồ thị (bằng máy) hàm số $f(x) = (\tan 4x)/x$ và phóng to đồ thị tại nơi đồ thị cắt trục y. Ước tính giá trị của $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Kiểm tra kết quả bạn đã làm trong phần (a) bằng cách tính giá trị của f(x) với những giá trị của x tiến đến 0.

37. (a) Tính giá trị của hàm số $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ với x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, và 0.05, và dự đoán giá trị của

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2-\frac{2^x}{1000}\right)$$

(b) Tính f(x) với x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003, và 0.001. Đoán lại lần nữa.

38. (a) Tính giá trị của hàm số $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ với x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, và 0.005.

(b) Dự đoán giá trị của $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$.

(c) Tính giá trị của h(x) với những giá trị của x còn nhỏ hơn nữa cho đến khi h(x) có giá trị bằng 0. Bạn có còn tin rằng dự đoán của mình trong phần (b) là đúng không? Giải thích tại sao cuối cùng bạn lại được giá trị bằng 0.

(d) Bằng cách vẽ đồ thị bằng máy với khung hình [-1, 1] x [0, 1]. Rồi phóng to đến chỗ đồ thị cắt trục y để ước tính giới hạn của h(x) khi x dần đến 0. Tiếp tục phóng to cho đến khi xuất hiện những biến dạng trên đồ thị của h. So sánh với kết quả của phần (c).

39. Vẽ bằng máy đồ thị hàm số $f(x) = \sin(\pi/x)$ của Ví dụ 4 trong khung hình chữ nhật [- 1, 1] x [- 1, 1]. Rồi phóng to đến chỗ điểm gốc vài lượt. Bình luận về hành vi của hàm số này.

40. Trong thuyết tương đối, khối lượng chất điểm tại vận tốc v cho bởi

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

trong đó m_o là khối lượng chất điểm khi đứng yên và c là vận tốc ánh sáng. Điều gì xảy ra khi $v\to c^-$?

41. Vẽ đồ thị bằng máy của hàm số để suy ra tât cả các tiệm cận đứng của nó

$$y = \tan(2\sin x) \qquad -\pi \le x \le \pi$$

42. (a) Dùng cơ sở đồ thị và tính toán để dự đoán giới hạn

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$$

(b) x phải gần 1 cỡ nào để có thể bảo đảm hàm số có giá trị cách giới hạn một khoảng nhỏ hơn 0.5?

ĐÁP SỐ

1. Có

3. (a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ nghĩa là giá trị của f(x) có thể làm lớn tùy ý bằng cách lấy x những giá trị đủ gần – 3 (nhưng không bằng – 3).

(b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$ nghĩa là giá trị của f(x) có thể làm lớn âm tùy ý bằng cách lấy x những giá trị đủ gần 4 và lớn hơn 4.

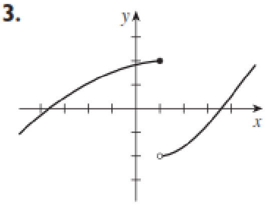
5. (a) 2 (b) 3 (c) không tồn tại
(d) 4 **(e)** không tồn tại

7. (a) - 1 (b) – 2 (c) không tồn tại
(d) 2 (e) 0 (f) không tồn tại
(g) 1 (h) 3

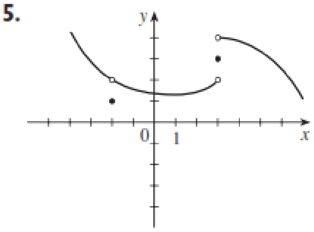
9. (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) ∞
(d) $-\infty$ (e) ∞

11. (a) 1 (b) 0 (c) không tồn tại

13.

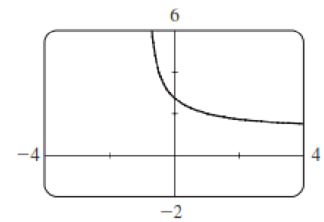


15.



17. $\frac{2}{3}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $\frac{1}{4}$ **23.** $\frac{3}{5}$ **25.** $-\infty$
27. ∞ **29.** $-\infty$ **31.** $-\infty$ **33.** $-\infty$; ∞

35. (a) 2.71828 (b)



37. (a) 0.998000, 0.638259, 0.358484, 0.158680, 0.038851, 0.008928, 0.001465; 0
(b) 0.000572, −0.000614, −0.000907, −0.000978, −0.000993, −0.001000; −0.001

39. Dù ta có phóng to bao nhiêu lần quanh điểm gốc, đồ thị cũng có vẻ như là những đường hầu như thẳng đứng. Điều này có nghĩa là khi x càng tiến đến 0, đồ thị càng có nhiều dao động hơn.

BÀI 2. 3. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG QUY TẮC GIỚI HẠN

Trong bài trước ta dùng máy tính và đồ thị để ước đoán giá trị của giới hạn, nhưng ta thấy rằng những phương pháp như thế không luôn luôn cho ta đáp số đúng. Trong phần này ta dùng những tính chất sau đây về giới hạn, gọi là Qui Tắc Giới Hạn để tìm các giới hạn.

QUY TẮC GIỚI HẠN Giả sử c là hằng số và những giới hạn

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{và} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

tồn tại. Thế thì

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)+g(x)] = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\,.\lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim g(x)}$ với $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Năm qui tắc này có thể được phát biểu bằng lời như sau:
1. Giới hạn của một tổng là tổng các giới hạn.
2. Giới hạn của một hiệu là hiệu các giới hạn.
3. Giới hạn của hằng số nhân với hàm số thì bằng hằng số nhân với giới hạn hàm số đó.
4. Giới hạn của một tích là tích các giới hạn.
5. Giới hạn của một thương là thương các giới hạn (nếu giới hạn của mẫu khác 0)

Dễ cảm nhận là những tính chất này là đúng. Chẳng hạn, nếu f(x) gần đến L và g(x) gần đến M, thật hợp lý khi cho rằng f(x) + g(x) sẽ gần đến L + M. Trực giác cho ta tin tưởng quy tắc 1 là đúng. Trong bài 2.4 ta sẽ biết đến định nghĩa chính xác của giới hạn và dùng nó để chứng minh qui tắc này.

VÍ DỤ 1 Dùng các Qui Tắc Giới Hạn và đồ thị của f và g trong hình bên để tìm các giới hạn sau, nếu chúng tồn tại.

(a) $\lim\limits_{x\to -2}[f(x)+5g(x)]$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ (c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

GIẢI

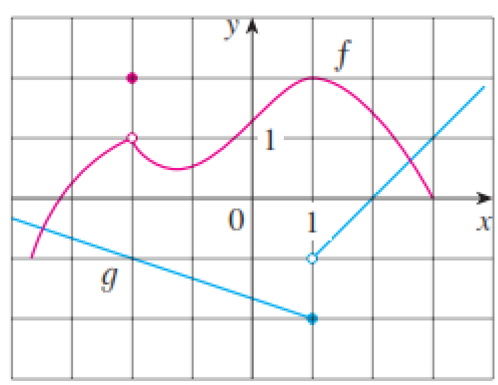
(a) Từ đồ thị của f và g ta suy ra

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to -2} g(x) = -1$$

Do đó, ta có

$$\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)] \text{ (qui tắc 1)}$$

$$= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) \quad \text{(qui tắc 3)}$$



HÌNH 1

= 1 + 5(- 1) = - 4

(b) Ta có lim $_{x\to 1}$ f(x) = 2. Nhưng lim $_{x\to 1}$ g(x) không tồn tại vì giới hạn bên trái và bên phải khác nhau:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \quad \text{trong khi} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$$

Vì thế ta không thể dùng qui tắc 4 để tìm giới hạn mong muốn. Nhưng ta có thể sử dụng qui tắc 4 cho giới hạn một bên:

$$\lim_{x\to 1^-} [f(x)g(x)] = 2\,.\,(-2) = -4 \qquad \lim_{x\to 1^+} [f(x)g(x)] = 2\,.\,(-1) = -2$$

Các giới hạn bên trái và bên phải khác nhau, vì thế lim $_{x\to 1}$ [f(x)g(x)] không tồn tại.

(c) Đồ thị cho thấy $\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4$ và $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$

Vì giới hạn của mẫu là 0 nên ta không thể dùng qui tắc 5. Giới hạn đã cho không tồn tại vì mẫu tiến đến 0 trong khi tử tiến đến một số khác 0.

Nếu ta sử dụng qui tắc nhân nhiều lần với g(x) = f(x), ta sẽ được qui tắc sau:

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ trong đó n là số nguyên dương

Để có thể sử dụng các qui tắc này, ta cần đến hai giới hạn đặc biệt sau:

7. $\lim_{x\to a} c = c$	**8.** $\lim_{x\to a} x = a$

Những giới hạn này là hiển nhiên dựa vào trực giác. Nếu ta cho f(x) = x trong qui tắc 6 và sử dụng qui tắc 8, ta suy ra được một giới hạn đặc biệt :

9. lim $x^n = a^n$ trong đó n là số nguyên dương

Một giới hạn tương tự cho căn thức được phát biểu như sau:

10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ trong đó n là số nguyên dương (Nếu n chẵn, ta phải có a > 0)

Tổng quát hơn, ta có qui tắc sau:

11. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ trong đó n là số nguyên dương (Nếu n chẵn, ta phải có lim f(x) > 0)

VÍ DỤ 2 Tính các giới hạn sau và chỉ rõ quy tắc đã sử dụng trong từng bước.

(a) $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

GIẢI

(a) $\lim_{x\to 5}(2x^2-3x+4) = \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5} 4$ (theo qui tắc 2 và 1)

$= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4$ (theo qui tắc 3)

$= 2(5^2) - 3(5) + 4$ (theo 9, 8, 7)

$= 39$

(b) Trước tiên ta sử dụng quy tắc 5, nhưng quy tắc chỉ dùng được khi giới hạn của tử và mẫu đều tồn tại và giới hạn của mẫu phải khác 0.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to -2}(3-2x)}$$ (theo qui tắc 5)

$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to =2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x}$$ (theo 1, 2 và 3)

$$= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} = -1/11$$ (theo 9, 8 và 7)

NEWTON VÀ GIỚI HẠN

Isaac Newton sinh vào ngày giáng sinh năm 1642, năm Galileo qua đời. Khi ông vào Đại học Cambridge vào năm 1661 Newton không biết nhiều về toán, nhưng ông đã học rất nhanh bằng cách đọc Euclidvà Descartes và bằng cách tham dự các khóa học của Isaac Barrow. Cambridge đóng cửa vì bệnh dịch hoành hành trong năm 1665 và 1666, và Newton phải trở về quê nhà để tiếp tục suy ngẫm về những điều đã học. Hai năm này chính là thời gian sáng tạo sung mãn đáng kinh ngạc vì trong hai năm đó ông đã có bốn phát minh lớn: (1) biểu diễn hàm số bằng tổng vô hạn; (2) phát minh phép tính vi tích phân; (3) khám phá định luật chuyển động và định luật hấp dẫn; và (4) thí nghiệm lăng kính về bản chất của ánh sáng trắng. Vì ông sợ phải tranh luận và chỉ trích, nên ông không cho xuất bản công trình của mình và chỉ đến năm 1687, theo đông viên của nhà thiên văn học Halley, Newton mới cho in tác phẩm Nguyên Tắc Toán Học . Trong luận thuyết khoa học vĩ đại nhất từng được viết này, Newton trình bày khai phá giải tích của mình và cách thức sử dụng nó để nghiên cứu cơ học, động lực học chất lõng, và chuyển động sóng và giải thích chuyển động các hành tinh và sao chổi.

Những kiến thức giải tích sơ khai đã manh nha trong phép tính diện tích và thể tích của các học giả Hi lạp cổ như Eudoxus và Archimedes. Mặc dù những ý tưởng của giới hạn chỉ là tiềm ẩn trong "phương pháp vét cạn" , Eudoxus và Archimedes không bao giờ đề cập trực tiếp khái niệm giới hạn. Ngay cả, những nhà toán học như Cavalier, Fermat, và Barrow, những người tiền phong của Newton trong công cuộc chinh phục vi tich phân cũng không sử dụng giới hạn. Chính Newton là người đầu tiên phát biểu tường minh về giới hạn. Ông giải thích rằng ý tưởng chủ yếu đằng sau giới hạn là những đại lượng "tiến gần hơn bất cứ hiệu số nào cho trước." Newton cho rằng giới hạn là khái niệm cơ bản của giải tích, nhưng phải đợi đến nhà toán học sau này như Cauchy mới đưa ra một định nghĩa chính xác về giới hạn đúng như ý ông nói.

GHI CHÚ Nếu ta đặt $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, thì $f(5) = 39$. Nói cách khác, ta sẽ được đáp số đúng trong ví dụ 2(a) bằng cách thế 5 vào x. Tương tự, thế trực tiếp cũng cho ta đáp số đúng trong phần (b). Các hàm số trong ví dụ 2 là hàm đa thức và phân thức theo thứ tự, và thay vì sử dụng các qui tắc giới hạn, đối với các hàm số này ta có thể thế trực tiếp. Ta có thể phát biểu như sau:

TÍNH CHẤT THẾ TRỰC TIẾP Nếu f là hàm đa thức hay phân thức và a thuộc tập xác định của f, thế thì

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Các hàm số thỏa tính chất thế trực tiếp được gọi là **liên tục tại a** và sẽ được khảo sát trong bài 2.5. Tuy nhiên, không phải mọi giới hạn có thể được tính bằng thế trực tiếp như ví dụ sau sẽ chỉ rõ.

VÍ DỤ 3 Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

GIẢI Đặt f(x) = $(x^2 - 1)/(x - 1)$. Ta không thể tìm giới hạn bằng cách thế trực tiếp vì f(1) không xác định. Ta cũng không thể sử dụng Qui Tắc Thương vì giới hạn của mẫu bằng 0. Thay vào đấy, ta cần thực hiện một chút tính toán đại số. Ta phân tích tử thành nhân tử và có:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

Tử và mẫu có nhân tử chung là x - 1. Khi tìm giới hạn ta cho x tiến đến 1, nhưng x ≠ 1, do đó x - 1 0. Do đó ta có thể đơn giản nhân tử chung và tìm giới hạn như sau:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

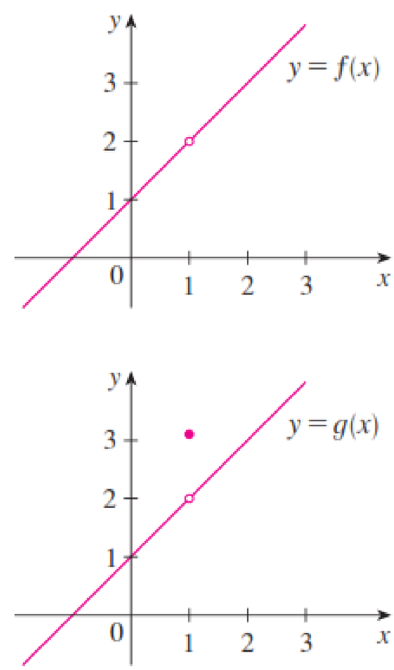
Giới hạn này ta đã gặp trong bài 2.1 khi ta cố tìm tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm (1, 1).

GHI CHÚ Trong ví dụ 3 ta có thể tính giới hạn bằng cách thay hàm số đã cho f(x) = $(x^2 - 1)/(x - 1)$ bằng hàm số đơn giản hơn g(x) = x + 1, với cùng giới hạn. Điều này là đúng vì f(x) = g(x) trừ khi x = 1, và trong khi tính giới hạn khi x tiến đến 1, ta không phải xét điều gì xảy ra khi x đúng bằng 1. Tổng quát, ta có kết quả hữu dụng sau.

Nếu f(x) = g(x) khi x ≠ a, thế thì $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$, miễn là các giới hạn này tồn tại

VÍ DỤ 4 Tìm $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ biết

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & khi \quad x\neq 1 \\ \pi & khi \quad x=1\end{cases}$$



HÌNH 2

GIẢI Ở đây g được xác định khi x = 1 và g(1) = π, nhưng giá trị giới hạn khi x tiến đến 1 không phụ thuộc vào giá trị của hàm số tại x = 1. Vì g(x) = x + 1 khi x ≠ 1, ta có

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Chú ý rằng những giá trị của hàm số trong ví dụ 3 và 4 như nhau trừ khi x = 1 (xem Hình 2) và vì thế chúng có cùng giới hạn khi x tiến đến 1.

VÍ DỤ 5 Tính $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

GIẢI Nếu ta đặt

$$F(h)=\frac{(3+h)^2-9}{h}$$

thế thì, như trong ví dụ 3, ta không thể tính $\lim_{h\to 0}$ F(h) bằng cách thế h = 0 vì F(0) không xác định. Nhưng nếu ta đơn giản biểu thức F(h) bằng đại số, ta được:

$$F(h) = \frac{(3+h)^2-9}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h$$

(Nhớ rằng ta chỉ xét h $\neq$ 0 khi cho h tiến đến 0.) Do đó

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$$

VÍ DỤ 6 Tìm $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

GIẢI Ta không thể áp dụng qui tắc thương ngay liền được, vì giới hạn của mẫu bằng 0. Ở đây ta cần biến đổi đại số, sử dụng kỹ thuật hữu tỷ hóa tử số như sa

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t\to 0}(t^2+9)}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Kết quả này khẳng định ước đoán của ta trong ví dụ 2 bài 2.2 là đúng.

Có khi giới hạn phải được tính riêng lẻ giới hạn bên trái và bên phải. Định lí sau đây là nhắc lại điều ta đã phát hiện ở bài 2.2, cho rằng giới hạn tồn tại khi và chỉ khi giới hạn hai bên đều tồn tại và bằng nhau.

1 ĐỊNH LÝ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *khi và chi khi* $\lim_{x\to a-} f(x) = L = \lim_{x\to a+} f(x) = L$

Khi tính giới hạn một bên, ta nhớ rằng những Quy Tắc Giới Hạn vẫn đúng cho những giới hạn một bê n.

VÍ DỤ 7 Chứng tỏ rằng $\lim_{x\to 0}|x| = 0$

GIẢI Nhớ là

$$|x| = \begin{cases} x & khi \quad x \geq 0 \\ -x & khi \quad x < 0 \end{cases}$$

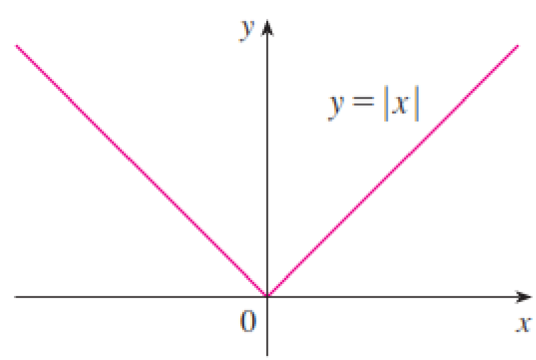
Vì | x | = x với x > 0, ta có

$$\lim_{x\to 0+}|x| = \lim_{x\to 0+} x = 0$$

Với x < 0 ta có | x | = - x và vì thế

$$\lim_{x\to 0-}|x| = \lim_{x\to 0-} x = 0$$

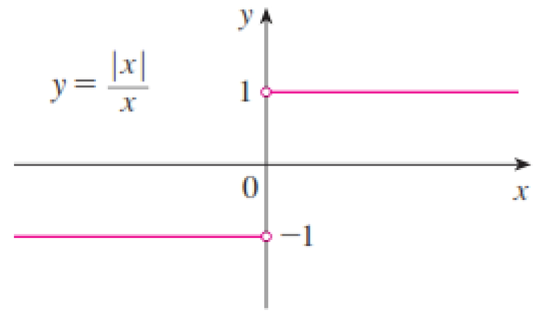
Do đó, theo định lí I:



HÌNH 3

$$\lim_{x\to 0}|x|=0$$

VÍ DỤ 8 Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ không tồn tại.



HÌNH 4

GIẢI
$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0+}1=1$$

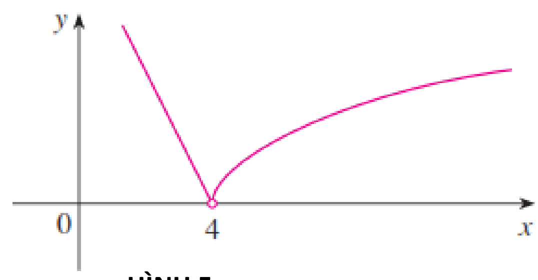
$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0+}(-1)==-1$$

Vì giới hạn trái và phải khác nhau, nên theo định lí I, ta có lim $_{x\to 0}$ | x |/x không tồn tại. Đồ thị của hàm số f(x) = |x|/x được vẽ trong Hình 4bên, qua đó ta củng cố kết quả đã tìm được.

VÍ DỤ 9 Nếu

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-4} & khi\ \ x>4\\ 8-2x & khi\ \ x<4\end{cases}$$

cho biết lim $_{x\text{->}4}$ f(x) có tồn tại không?



HÌNH 5

GIẢI Vì f(x) = $\sqrt{x-4}$ khi x > 4, ta có

$$\lim_{x\to 4+}f(x)=\lim_{x\to 4+}\sqrt{x-4}=0$$

Vì f(x) = 8 - 2x khi x < 4, ta có

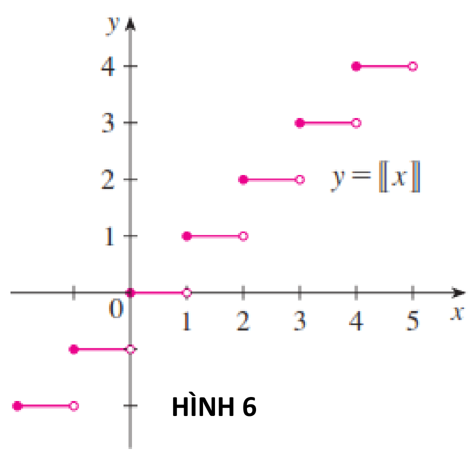
$$\lim_{x\to 4-}f(x)=\lim_{x\to 4-}8-2x=8-2(4)=0$$

Giới hạn bên phải và bên trái bằng nhau. Do đó giới hạn tồn tại và

$$\lim_{x\to 4}f(x)=0$$

Đồ thị của f được cho trong Hình.

VÍ DỤ 10 Hàm số phần nguyên được định bởi [[x]] = số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hay bằng x. (Ví dụ , [[4]] = 4, [[4.8]] = 4, [[π]] = 3, [[$\sqrt{2}$]] = 1 [[- 1/2]] = - 1.) Chứng tỏ rằng lim $_{x\text{->}3}$ [[x]] không tồn tại.



HÌNH 6

GIẢI Đồ thị của hàm số lớn nhất được cho trong Hình 6.

Vì [[x]] = 3 khi 3 ≤ x < 4, ta có

$$\lim_{x\to 3+}[[x]]=\lim_{x\to 3+}3=3$$

Vì [[x]] = 2 khi 2 ≤ x < 3, ta có $\lim\limits_{x\to 3-}[[x]]=\lim\limits_{x\to 3-}2=2$

Vì giới hạn trái và phải không bằng nhau, lim $_{x\to 3}$ [[x]] không tồn tại theo định lí I.

Hai định lí sau cho ta thêm những tính chất của giới hạn. Phần chứng minh được cho trong phần Phụ lục.

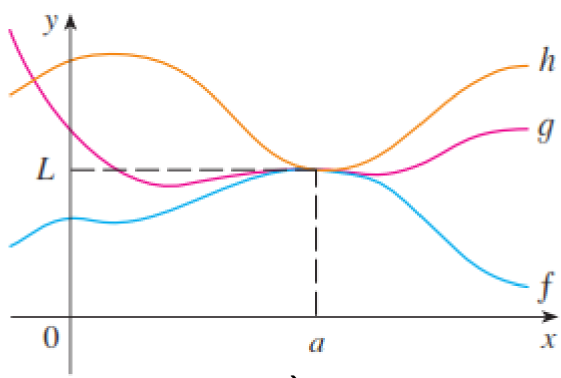
2 ĐỊNH LÍ Nếu f(x)≤ g(x) khi x gần a (có thể trừ ra tại a) và những giới hạn của f và g tồn tại khi x tiến đến a, thế thì

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

3 ĐỊNH LÍ KẸP GIỮA Nếu f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) khi x gần a (có thể trừ ra tại a) và

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

thế thì $$\lim_{x\to a} g(x) = L$$



HÌNH 7

Định lí Kẹp Giữa, đôi khi còn được gọi là Định Lí Bánh Kẹp Thịt, được minh họa trong Hình7 trên. Theo đó nếu g(x) bị kẹp giữa f(x) và h(x) khi x gần a, và nếu f và h có cùng giới hạn L tại a, thế thì g bắt buộc phải có cùng giới hạn L tại a.

VÍ DỤ 11 Chứng tỏ rằng $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$.

GIẢI Đầu tiên chú ý rằng ta không thể dùng

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \,.\, \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

vì $\lim_{x\to 0}$ sin(1/x) không tồn tại (xem lại ví dụ 4 trong bài 2.2). Tuy nhiên, vì

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$$

ta có, như Hình 8 minh họa,

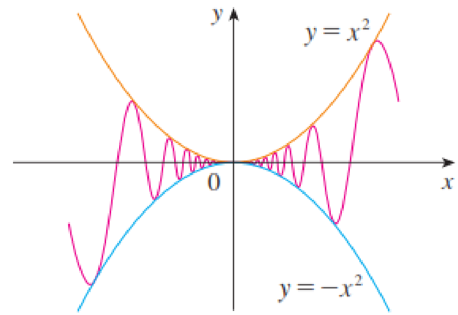
$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

Ta biết rằng

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{và} \qquad \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$$

Xem f(x) = - x^2 , g(x) = x^2sin(1/x), và h(x) = x^2 như trong Định Lí Kẹp Giữa, ta được

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$



BÀI TẬP

1. Cho biết

$$\lim_{x->2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x->2} f(x) = -2 \qquad \lim_{x->2} f(x) = 0$$

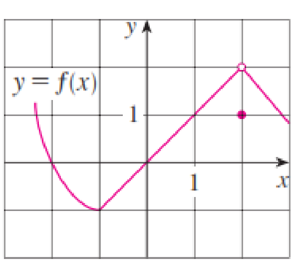
tìm những giới hạn sau đây nếu chúng tồn tại. Nếu giới hạn không tồn tại, giải thích tại sao.

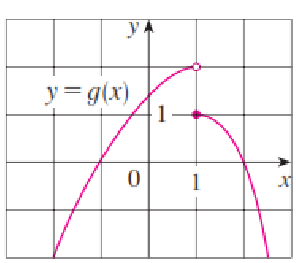
(a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Đồ thị của f và g được cho. Hãy dùng chúng để tính giới hạn nếu chúng tồn tại. Nếu giới hạn không tồn tại, giải thích tại sao.





(a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}[x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x\to 1}\sqrt{3 + f(x)}$

3-9 Tìm giới hạn bằng các quy tắc giới hạn, nêu quy tắc nào được sử dụng sau mỗi bước thực hiện.

3. $\lim_{x\to -2}(3x^4 + 2x^2 - x + 1)$ **4.** $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4}$

5. $\lim_{x\to 8}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$ **6.** $\lim_{t\to -1}(t^2 + 1)^3(t + 3)^5$

7. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4}\right)^3$ **8.** $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9. $\lim_{x\to 4^-}\sqrt{16 - x^2}$

10. (a) Phương trình sau có gì sai?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Theo phần (a), giải thích tại sao phương trình

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)$$

là đúng

11-30 Tính các giới hạn sau, nếu chúng tồn tại.

11. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

12. $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

13. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+6}{x-2}$

14. $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

15. $\lim_{t\to -3}\dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

16. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

17. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(4+h)^2-16}{h}$

18. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

19. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$

20. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

21. $\lim_{t\to 9}\dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

22. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

23. $\lim_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

24. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

25. $\lim_{x\to -4}\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

26. $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t}\right)$

27. $\lim_{x\to 16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

28. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

31. (a) Tính giá trị của

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

bằng cách vẽ đồ thị (bằng máy) của hàm số f(x) = $\dfrac{x}{(\sqrt{1+3x}-1)}$

(b) Lập bảng giá trị của f(x) với những giá trị của x gần 0 và dự đoán giá trị của giới hạn.

(c) Dùng Quy Tắc Giới Hạn để chứng minh dự đoán của bạn là đúng.

32. (a) Dùng đồ thị của

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$$

để ước tính giá trị của $\lim_{x\to 0}$ f(x) đúng đến hai chữ số thập phân.

(b) Lập bảng giá trị của f(x) để ước tính giới hạn đúng đến bốn chữ số thập phân.

(c) Dùng Quy Tắc Giới Hạn để ctìm giá trị đúng của giới hạn.

33. Dùng Định Lý Kẹp Giữa để chứng tỏ rằng

$\lim_{x\to 0}(x^2\cos 20\pi x) = 0$.

Minh họa bằng cách vẽ (bằng máy) đồ thị các hàm số $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2\cos 20\pi x$, và $h(x) = x^2$ trên cùng một khung hình.

34. Dùng Định Lý Kẹp Giữa để chứng tỏ rằng

$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x^3+x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}\right) = 0$.

Minh họa bằng cách vẽ (bằng máy) đồ thị các hàm số f, g, và h trong Định Lý trên cùng một khung hình.

35. Nếu $4x - 9 \le f(x) \le x^2 - 4x + 7$ khi $x \ge 0$, tìm

$\lim_{x\to 4} g(x)$.

36. Nếu $2x \le g(x) \le x^4 - x^2 + 2$ với mọi x, hãy tính

$\lim_{x\to 1} g(x)$.

37. Chứng tỏ rằng $\lim_{x\to 0} x^4\cos\dfrac{2}{x}=0$.

38. Chứng tỏ rằng $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)}=0$

39-44. Tìm giới hạn, nếu tồn tại. Nếu giới hạn không tồn tại, giải thích tại sao.

39. $\lim_{x\to 3}(2x+|x-3|)$

40. $\lim_{x\to -6}\dfrac{2x+12}{|x+6|}$

41. $\lim_{x\to 0.5^-}\dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

42. $\lim_{x\to -2}\dfrac{2-|x|}{2+x}$

43. $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

44. $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

45. *Hàm số dấu,* ký hiệu là sgn, được xác định bởi

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 & khi\ x<0\\ 0 & khi\ x=0\\ 1 & khi\ x>0\end{cases}$$

(a) Vẽ đồ thị của hàm số này.

(b) Tìm những giới hạn sau hoặc giải thích tại sao nó không tồn tại.

(i) $\lim_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x\to 0+}|\operatorname{sgn} x|$

46. Cho

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 & khi\ x\le 2\\ x-1 & khi\ x>2\end{cases}$$

(a) Tìm $\lim_{x\to 2-} f(x)$ và $\lim_{x\to 2+} f(x)$.

(b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ có tồn tại không?

(c) Vẽ đồ thị của f.

47. Cho $F(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

(a) Tìm

(i) $\lim_{x\to 1+} F(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1-} F(x)$

(b) $\lim_{x\to 1} F(x)$ có tồn tại không?

(c) Vẽ đồ thị của F.

48. Cho

$$g(x) = \begin{cases} x & khi\ x<1 \\ 3 & khi\ x=1 \\ 2-x^2 & khi\ 1<x\le 2 \\ x-3 & khi\ x>2 \end{cases}$$

(a) Tình mỗi giới hạn sau, nếu nó tồn tại.

(i) $\lim_{x\to 1-} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1+} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (iv) $\lim_{x\to 2-} g(x)$

(v) $\lim_{x\to 2+} g(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$

(b) Vẽ đồ thị của g.

49. (a) Ký hiệu [[ ]] chỉ hàm số phần nguyên đã định nghĩa trong Ví dụ 10, hãy tính

(i) $\lim_{x\to 2+}$ [[x]] (ii) $\lim_{x\to 2}$ [[x]]

(iii) $\lim_{x\to -2.4}$ [[x]]

(b) Nếu n là số nguyên, hãy tính

(i) $\lim_{x\to n-}$ [[x]] (ii) $\lim_{x\to n+}$ [[x]]

(c) Với những giá trị của a thì $\lim_{x\to a}$ [[x]] tồn tại?

50. Cho f(x) = [[cos x]], $-\pi \le x \le \pi$.

(a) Vẽ đồ thị của f.

(b) Tính các giới hạn sau nếu chúng tồn tại.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)-} f(x)$

(iii) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)+} f(x)$ (iv) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)} f(x)$

(c) Với những giá trị của a thì $\lim_{x\to a} f(x)$ tồn tại?

51. Nếu f(x) = [[x]] + [[- x]], chứng tỏ rằng $\lim_{x\to 2} f(x)$ tồn tại nhưng không bằng f(2).

52. Trong thuyết tương đối , công thức co Lorentz

$$L = L_o\sqrt{1-v^2/c^2}$$

biểu thị độ dài L của một vật thể như một hàm số theo vận tốc di chuyển v của nó đối với người quan sát, trong đó L_o là độ dài của vật thể lúc đứng yên và c là vận tốc ánh sáng. Tìm $\lim_{v\to c-} L$ và giải thích kết quả. Tại sao phải lấy giới hạn bên trái?

53. Nếu p là đa thức, chứng tỏ rằng $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

54. Nếu r là hàm hữu tỷ, dùng Bài tập 53 để chứng tỏ rằng $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ với mọi số a trong tập xác định của r.

55. Nếu $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-8}{x-1} = 10$, tìm $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

56. Nếu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, tìm những giới hạn sau.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

57. Nếu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & khi\ \ x\ \ huu\ ty \\ 0 & khi\ \ x\ \ vô\, ty \end{cases}$$

chứng tỏ rằng $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

58. Chứng tỏ bằng một ví dụ là $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ có thể tồn tại ngay cả khi $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ lẫn $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ đều không tồn tại.

59. Chứng tỏ bằng một ví dụ là $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$ có thể tồn tại ngay cả khi $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ lẫn $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ đều không tồn tại.

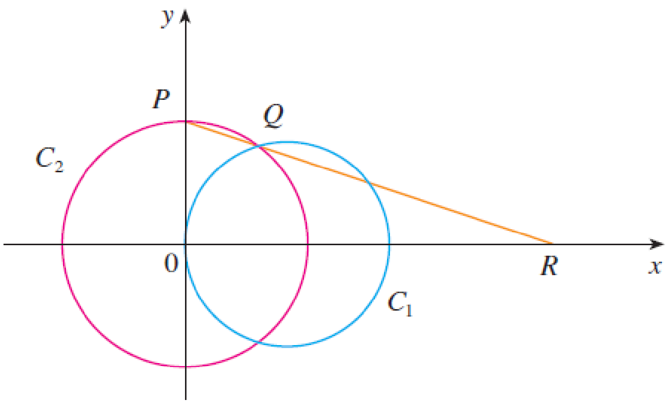
60. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$.

61. Có số a nào sao cho

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

tồn tại không? Nếu có, hãy tìm a và giá trị của giới hạn.

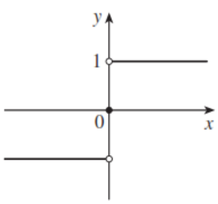
62. Hình dưới là đường tròn cố định C_1 có phương trình $(x-1)^2 + y^2 = 1$ và một đường tròn đang co lại C_2 có bán kính r và tâm là điểm gốc. P là điểm (0, r). Q là giao điểm phía trên của hai đường tròn, và R là giao điểm của đường PQ và trục x. Điều gì xảy ra cho R khi C_2 co lại, tức là $r \to 0^+$?



ĐÁP SỐ

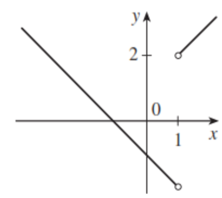
1. (a) -6 (b) -8 (c) 2 (d) -6
(e) không tồn tại (f) 0

3. 59 **5.** 390 **7.** $\frac{1}{8}$ **9.** 0 **11.** 5
13. không tồn tại **15.** $\frac{6}{5}$ **17.** 8 **19.** $\frac{1}{12}$ **21.** 6
23. $\frac{1}{6}$ **25.** $-\frac{1}{16}$ **27.** $\frac{1}{128}$ **29.** $-\frac{1}{2}$ **31.** (a), (b) $\frac{2}{3}$
35. 7 **39.** 6 **41.** -4 **43.** không tồn tại
45. (a)



(b) (i) 1
(ii) -1
(iii) không tồn tại
(iv) 1

47. (a) (i) 2 (ii) -2 (b) No (c)



49. (a) (i) -2 (ii) Does not exist (iii) -3
(b) (i) $n-1$ (ii) n (c) a is not an integer.
55. 8 **61.** 15; -1

BÀI 2. 4. ĐỊNH NGHĨA CHÍNH XÁC CỦA GIỚI HẠN

Định nghĩa giới hạn trong bài 2. 2 không đủ chính xác vì các phát biểu như "x tiến gần đến 2" và "f(x) càng lúc càng gần L" là mơ hồ. Để có thể chứng minh thuyết phục là

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos 5x}{10{,}000}=0.0001\right) \quad \text{hay} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x=1}$$

ta phải tìm một định nghĩa chính xác của giới hạn.

Để tạo một động lực cho định nghĩa của giới hạn, hãy xét hàm số

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & khi\ \ x\neq 3\\ 6 & khi\ \ x=3\end{cases}$$

Trực giác cho ta thấy rằng khi x gần đến 3 nhưng x ≠ 3 thì f(x) gần đến 5, vì thế $\lim_{x\to 3}$ f(x) = 5.

Để có một thông tin chí tiết hơn về cách thức f(x) thay đổi khi x tiến đến 3, ta hãy tự đặt câu hỏi sau:

x phải sát đến 3 cỡ nào thì f(x) mới cách 5 một khoảng nhỏ hơn 0.1?

Khoảng cách từ x đến 3 là |x - 3| và khoảng cách từ f(x) đến 5 là |f(x) - 5|, thế thì bài toán là tìm số δ sao cho

$|f(x) - 5| < 0.1$ nếu $|x - 3| < \delta$ nhưng $x \neq 3$

Nếu |x - 3| > 0 thì x ≠ 3, do đó bài toán thành ra tìm số δ sao cho

$|f(x) - 5| < 0.1$ nếu $0 < |x - 3| < \delta$

Chú ý là nếu 0 < |x – 3| < (0.1)/2 = 0.05, thì

$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 0.1$

nghĩa là , $|f(x) - 5| < 0.1$ nếu $0 < |x - 3| < 0.05$

Do đó giá trị δ cần tìm là $\delta = 0.05$; nghĩa là nếu x nằm trong khoảng cách 0.05 kể từ 3, thì f(x) sẽ nằm trong khoảng cách 0.1 kể từ 5.

Nếu ta thay đổi số 0.1 trong bài toán bằng một số nhỏ hơn là 0.01, thế thì lý luận tương tự ta thấy rằng f(x) sẽ cách 5 một khoảng nhỏ hơn 0.01 khi x cách 3 một khoảng nhỏ hơn (0.01)/2 = 0.005:

$|f(x) - 5| < 0.01$ nếu $0 < |x - 3| < 0.005$

Tương tự: $|f(x) - 5| < 0.001$ nếu $0 < |x - 3| < 0.0005$

Những số 0.1, 0.01, và 0.001 mà ta đã xét là những *dung sai* được phép cho trước. Để 5 là giới hạn chính xác của f(x) khi x tiến đến 3, ta không chỉ có thể mang hiệu số của f(x) và 5 nhỏ hơn mỗi ba số này, mà phải nhỏ hơn bất kỳ số dương nào. Với lý luận tương tự, điều này có thể thực hiện! Nếu ta gọi ε (tiếng Hi lạp đọc là epsilon) là một số dương bất kỳ, ta viết được

1 $|f(x) - 5| < \varepsilon$ nếu $0 < |x - 3| < \delta = \varepsilon/2$

Đây là một cách chính xác để nói f(x) tiến gần đến 5 khi x tiến đến gần 3 bởi vì (1) bảo rằng là ta có thể cho giá trị của f(x) cách 5 một khoảng nhỏ hơn ε tùy ý bằng cách cho những giá trị của x cách 3 một khoảng nhỏ hơn $\varepsilon/2$ (và $x \neq 3$) .

Chú ý (1) có thể viết lại như sau:

nếu $3 - \delta < x < 3 + \delta$ $(x \neq 3)$ thì $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$

và được minh họa trong Hình 1. Bằng cách lấy những giá trị của x ($\neq$ 3) trong khoảng $(3 - \delta, 3 + \delta)$ ta có thể được những giá trị của f(x) nằm trong khoảng $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

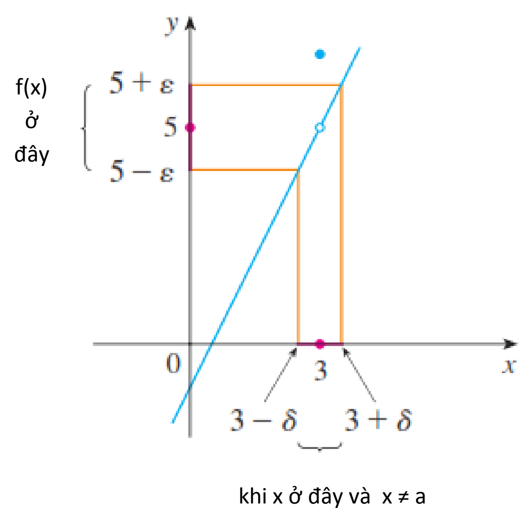
Dùng (1) làm mẫu, ta đưa ra định nghĩa chính xác của giới hạn như sau:

2 ĐỊNH NGHĨA Cho f là hàm số xác định trên một khoảng chứa số a, có thể trừ điểm a. Ta bảo **giới hạn của f(x) là L khi x tiến đến a**, kí hiệu

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < e$



HÌNH 1

Vì |x - a| là khoảng cách từ x đến a và |f(x) - L| là khoảng cách từ f(x) đến L và vi ε có thể là một số nhỏ tùy ý, định nghĩa của giới hạn có thể phát biểu thành lời như sau:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ có nghĩa là khoảng cách giữa f(x) và L có thể làm nhỏ tùy ý bằng cách lấy khoảng cách từ x đến a đủ nhỏ (nhưng không bằng 0).

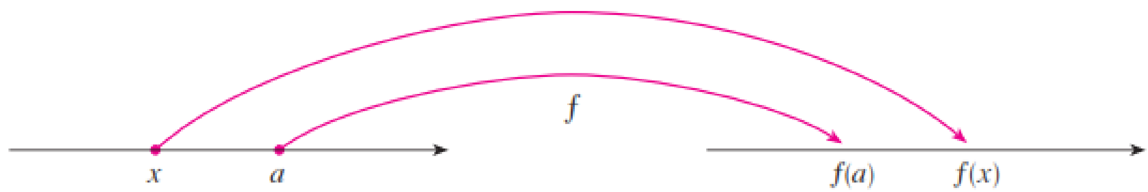
Cũng vậy,

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ có nghĩa là giá trị của f(x) có thể làm gần sát đến L tùy ý muốn bằng cách lấy x đủ gần sát đến a (nhưng không bằng a).

Vì |x - a| < δ <=> a - δ < x < a + δ và |f(x) - L| < ε <=> L - ε < f(x) < L + ε, và 0 < |x- a| ⇔x ≠ a, định nghĩa (2) có thể viết lại như sau:

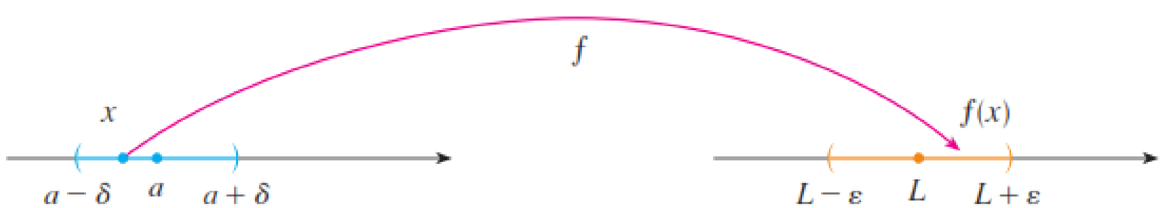
lim $_{x\to a}$ f(x) nghĩa là với mọi số ε > 0 tùy ý ta có thể tìm δ > 0 sao cho
nếu x thuộc khoảng (a - δ, a + δ) và x ≠ a thì f(x) thuộc khoảng (L - ε, L + ε)

Ta minh họa định nghĩa này bằng giãn đồ mũi tên mô tả hàm số f từ tập con của R vào một tập con của R như trong Hình 2.



HÌNH 2

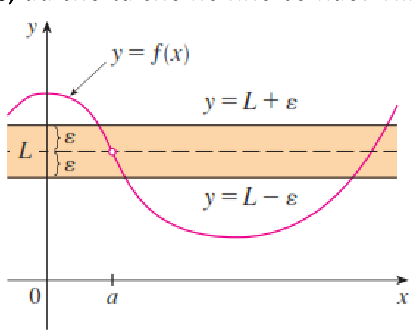
Định nghĩa giới hạn nói rằng nếu cho bất kì khoảng (L - ε, L + ε) quanh điểm L, ta có thể tìm được khoảng (a - δ, a + δ) quanh điểm a sao cho f sẽ ánh xạ những điểm của khoảng (a - δ, a + δ) vào khoảng (L - ε, L + ε).



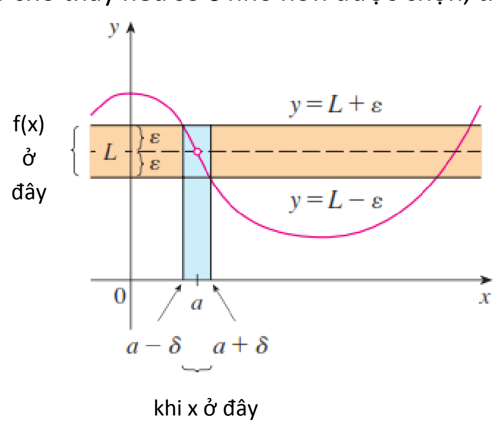
HÌNH 3

Ta có thể dùng đồ thị hàm số để qua đó đưa ra một giải thích hình học khác về giới hạn. Nếu ε > 0 cho trước, ta vẽ những đường thẳng nằm ngang y = L + ε và y = L - ε và đồ thị của f. (Xem Hình 4.) Nếu lim $_{x\to a}$ f(x) = L, thế thì ta có thể tìm được một số δ > 0 sao cho nếu ta hạn chế chỉ cho x nằm trong khoảng (a - δ , a + δ) và lấy x ≠ a, thế thì phần đường cong y = f(x) sẽ nằm giữa các đường y = L – ε và y = L + ε. (Xem Hình 5.) Bạn có thể thấy rằng nếu số δ như thế đã được tìm thấy, thì bất kỳ số δ nào nhỏ hơn nữa cũng thỏa điều kiện.

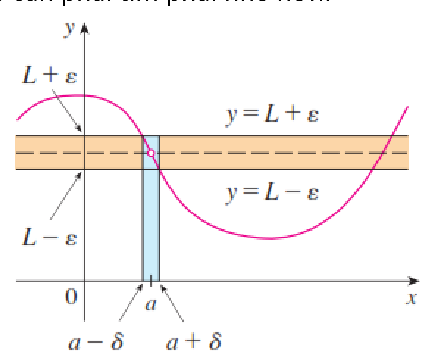
Điều quan trọng là hiểu ra rằng tiến trình đã minh họa trong Hình 4 và 5 phải thực hiện được với mọi số dương ε, dù cho ta cho nó nhỏ cỡ nào. Hình 6 cho thấy nếu số ε nhỏ hơn được chọn, thì số δ cần phải tìm phải nhỏ hơn.



HÌNH 4



HÌNH 5



HÌNH 6

VÍ DỤ 1 Dùng đồ thị để tìm δ sao cho

Nếu $|x - 1| < \delta$ thì $|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$

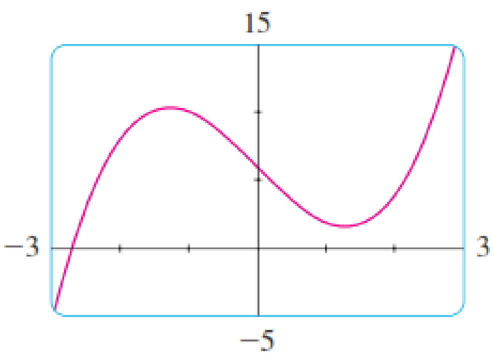
Nói cách khác, tìm một số d tương ứng với số e = 0.2 trong định nghĩa giới hạn hàm số $f(x) = x^3 - 5x + 6$ với a = 1 và L = 2.

GIẢI Một đồ thị của f được cho trong Hình 7; chúng ta quan tâm đến miền gần điểm điểm (1, 2). Chú ý rằng ta có thể viết lại bất đẳng thức

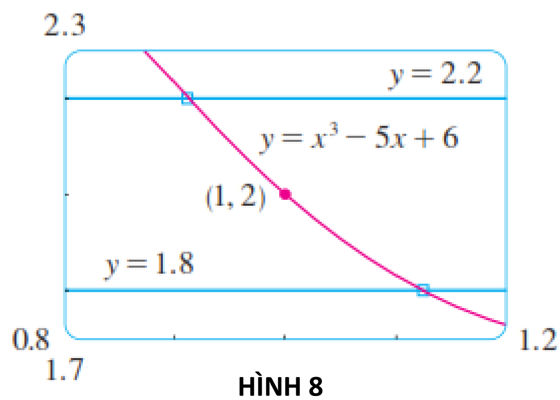
$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

thành

$$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$



HÌNH 7



HÌNH 8

Vì thế ta cần xác định những giá trị của x sao cho đường cong $y = x^3 - 5x + 6$ nằm giữa các đường nằm ngang y = 1.8 và y = 2.2. Do đó ta vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x + 6$ và y = 1.8, và y = 2.2 gần điểm (1, 2) trong Hình 8. Rồi ta điều chỉnh con trỏ để ước tính hoành độ của giao điểm của đường thẳng y = 2.2 và đường cong $y = x^3 - 5x + 6$ vào khoảng 0.911. Tương tự, $x^3 - 5x + 6$ cắt đường thẳng y = 1.8 khi $x \approx 1.124$. Do đó, để an toàn ta làm tròn, và thấy rằng

nếu $0.92 < x < 1.12$ thì $1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$

Khoảng này (0.92, 1.12) không có tâm (trung điểm) là x = 1. Khoảng cách từ x = 1 đến đầu mút trái là 1 – 0.92 = 0.08 và khoảng cách đến đầu mút phải là 0.12. Ta có thể chọn δ là số nhỏ hơn trong hai số này, tức δ = 0.08. Và ta có thể phát biểu như sau:

nếu $|x - 1| < 0.08$ thì $|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$

Nói cách khác, bằng cách giữ x cách 1 không quá 0.08, ta có thể giữ f(x) cách 2 không quá 0.2.

Mặc dù ta chọn δ = 0.08, ta có thể lấy bất kỳ số δ nào nhỏ hơn 0.08 cũng được.

Tiến trình dùng đồ thị như trong ví dụ trên đây là minh họa cho định nghĩa trong trường hợp e = 0.2, nhưng không thể dùng để chứng minh giới hạn là 2. Muốn chứng minh ta phải đưa ra một sô d cho mọi số e cho trước tùy ý.

Trong quá trình chứng minh một phát biểu về giới hạn, ta nên nghĩ mình đối mặt với một thử thách. Trước tiên bạn gặp thử thách với số ε. Sau đó bạn phải đưa ra một số δ thích hợp. Bạn phải chắc chắn là mình làm điều này với mọi số ε > 0, chứ không chỉ một vài số e cá biệt.

Tưởng tượng một cuộc thách đấu giữa hai người, A và B, và tưởng tượng mình chính là B. Bên A yêu sách là số cố định L phải được xấp xỉ với những giá trị của f(x) với mức độ chính xác ε (chẳng hạn 0.01). Bên B sau đó phải tìm ra một số δ sao cho nếu $0 < |x - a| < \delta$, thì $|f(x) - L| < \varepsilon$. Sau đó A sẽ ra yêu sách ngặt nghèo hơn với số ε nhỏ hơn (chẳng hạn 0.0001). Lần nữa B phải đáp lại bằng cách tìm một số δ tương ứng thỏa điều kiện. Thường thì e càng nhỏ, giá trị tương ứng của δ cũng nhỏ hơn. Nếu B luôn thắng, dù cho A có nêu ra ε nhỏ bao nhiêu, thế thì ta khẳng định $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

VÍ DỤ 2 Chứng tỏ $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$.

GIẢI

1. Phân tích sơ khởi bài toán (dự đoán giá trị của δ) Cho ε một số dương. Ta muốn tìm một số d sao cho

nếu $0 < |x - 3| < \delta$ thì $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$

Nhưng $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3|$. Do đó, ta muốn

nếu $0 < |x - 3| < \delta$ thì $4|x - 3| < \varepsilon$

cũng là nếu $0 < |x - 3| < \delta$ thì $|x - 3| < \varepsilon/4$

Điều này gợi ý ta nên chọn $\delta = \varepsilon/4$.

2. Chứng minh (chứng tỏ số δ này nhận được) . Cho trước ε > 0, chọn $\delta = \varepsilon/4$. Nếu $0 < |x - 3| < \delta$, thì

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4(\varepsilon/4) = \varepsilon$$

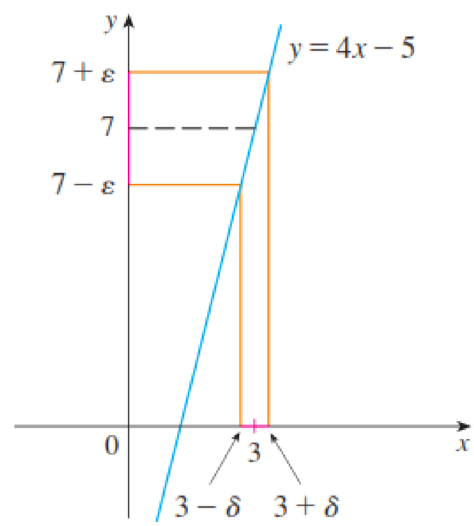
Như vậy

nếu $0 < |x - 3| < \delta$ thì $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$

Do đó, theo định nghĩa giới hạn,

$$\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$$

Ví dụ này được minh họa trong hình bên.



HÌNH 9

Chú ý là trong lời giải của Ví dụ 2 có hai bước – dự đoán và chứng minh. Chúng ta phân tích sơ khởi nhờ đó giúp dự đoán được giá trị của d. Sau đó trong bước 2 ta phải đi ngược lại để chứng minh một cách nghiêm nhặt số mà ta dự đoán là đúng. Tiến trình này là tiến trình kiểu mẫu thường dùng trong toán học. Theo đó, trước tiên ta cần đưa ra một dự đoán thông minh về lời giải của bài toán rồi sau đó chứng minh dự đoán đó là đúng.

Các định nghĩa trực giác về giới hạn một bên mà ta đưa ra trong Bài 2.2 có thể được phát biểu chính xác hơn như sau:

3 ĐỊNH NGHĨA GIỚi HẠN BÊN TRÁI

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

nếu với mọi số ε > 0 tồn tại số δ > 0 sao cho

nếu $a - \delta < x < a$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$

4 ĐỊNH NGHĨA GIỚi HẠN BÊN PHẢI

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

nếu với mọi số ε > 0 tồn tại số δ > 0 sao cho

nếu $a < x < a + \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$

Chú ý định nghĩa 3 cũng giống như định nghĩa 2 trừ ra x chỉ được nằm trong nửa bên trái (a - δ, a) của khoảng (a - δ, a + δ). Trong định nghĩa 4, x chỉ được nằm trong nửa bên phải (a, a + δ) của khoảng (a - δ, a + δ).

CAUCHY VÀ GIỚI HẠN

Sau khi phép tính vi tích phân được phát minh vào thế kỷ 17, tiếp theo là một thời kì phát triển tự do của giải tích học trong thế kỷ 18. Các nhà toán học như anh em nhà Bernouilli và Euler hăng hái khai thác sức mạnh của phép tính vi tích phân và mạnh dạn thám sát các kết quả của lý thuyết mới mẻ và phi thường này mà không lo lắng quá nhiều về sự đúng đắn hoàn toàn của các phép chứng minh của họ.

Thế kỷ 19, trái lại, là THời Đại Của Sự Nghiêm Nhặt. Có hẳn một phong trào trở lại nền tảng của khái niệm - để cung cấp những định nghĩa tỉ mỉ và các phép chứng minh nghiêm nhặt. Đi đầu trong phong trào này là nhà toán học Pháp Cauchy (1789 - 1857), khởi nghiệp là một kỹ sư trong quân đội trước khi trở thành một giáo sư toán học ở Paris. Cauchy giữ lại ý tưởng về giới hạn của Newton, đã được nhà toán học Alembert trân trọng vào thế kỷ 18, và làm nó chính xác hơn . Định nghĩa của ông như sau: "Khi những giá trị liên tiếp được gán cho một biến tiến gần một cách không xác định đến một giá trị cố định, chỉ khác giá trị này một khoảng cách nhỏ tuỳ ý, giá trị này sẽ được gọi là giới hạn của những giá trị kia." Nhưng khi Cauchy dùng định nghĩa này trong các ví dụ và các chứng minh, ông thường dùng bất đẳng thức delta-epsilon tương tự như ta đã dùng trong bài này. Một chứng minh điển hình của Cauchy bắt đầu bằng: "Gọi δ và ε là hai số rất nhỏ; . . . " Ông dùng ε bởi vì sự tương ứng giữa epsilon và từ erreur (sai số) của tiếng Pháp và δ vì delta tương ứng với từ difference (hiệu số) của tiếng Pháp. Sau đó, nhà toán học Đức Weierstrass (1815 - 1897) phát biểu định nghĩa của giới hạn chính xác như định nghĩa 2 của chúng ta.

VÍ DỤ 3 Dùng định nghĩa 4 , chứng minh $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$

GIẢI

1. Dự đoán một giá trị của δ. Gọi ε là một số dương cho trước. Ở đây a = 0 và L = 0. vì thế ta muốn tìm số d sao cho

nếu $0 < x < \delta$ thì $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$

hay nếu $0 < x < \delta$ thì $\sqrt{x} < \varepsilon$

hay nếu $0 < x < \delta$ thì $x < \varepsilon^2$

Điều này cho phép ta nên chọn $\delta = \varepsilon^2$.

2. Chứng minh. Cho trước $\varepsilon > 0$, lấy $\delta = \varepsilon^2$. Nếu $0 < x < \delta$, thì

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

hay $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$

Theo định nghĩa 4, điều này chứng tỏ $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$.

VÍ DỤ 4 Chứng minh $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$.

GIẢI

1. Dự đoán giá trị của δ. Cho trước ε > 0. Ta phải tìm một số δ. > 0 sao cho

nếu $0 < |x - 3| < \delta$ thì $|x^2 - 9| < \varepsilon$

Để liên kết $|x^2 - 9|$ với $|x - 3|$ ta viết $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Thế thì ta muốn

nếu $0 < |x - 3| < \delta$ thì $|(x - 3)(x + 3)| < \varepsilon$

Chú ý rằng nếu ta có thể tìm một hằng số dương C sao cho $| x + 3 | < C$, thì

$$| x + 3 | \, |x - 3 | < C| x - 3 |$$

và ta có thể làm $C| x - 3 | < \varepsilon$ bằng cách lấy $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$.
Ta có thể tìm một số C như thế nếu ta giới hạn x thuộc một khoảng nào đó có tâm ở 3. Thật ra, vì ta chỉ quan tâm đến những giá trị của x gần bằng 3, thành ra thật hợp lí khi ta giả định x cách số 3 một khoảng nhỏ hơn 1, nghĩa là $| x - 3 | < 1$. Thế thì $2 < x < 4$ thành ra $5 < x + 3 < 7$. Do đó ta có $| x + 3 | < 7$, và như thế $C = 7$ là sự lựa chọn thích hợp cho hằng số C.
Nhưng bây giờ ta có đến hai hạn chế cho $|x - 3|$, đó là

$$| x - 3 | < 1 \quad \text{và} \quad | x - 3 | < \varepsilon/C = \varepsilon/7$$

Để bảo đảm cả hai bất đẳng thức này đều được thỏa mãn, ta phải lấy δ là số nhỏ hơn trong hai sô 1 và ε/7. Kí hiệu chỉ số này là $\delta = \min(1, \varepsilon/7)$.

2. Chứng minh δ là số cần tìm. Cho trước $\varepsilon > 0$, gọi $\delta = \min(1, \varepsilon/7)$. Nếu $0 < | x - 3 | < \delta$ thì $| x - 3 | < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow | x + 3 | < 7$ (như trong phần 1). Ta cũng có $| x - 3 | < \varepsilon/7$, do đó

$$| x^2 - 9 | = | (x + 3) | \, | (x - 3) | < 7. \ \varepsilon/7 = \varepsilon$$

Chứng tỏ $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

Ví dụ trên chứng tỏ rằng việc chứng minh giới hạn bằng định nghĩa e, d không phải lúc nào cũng dễ dàng. Thật ra, nếu ta gặp một hàm số phức tạp hơn chẳng hạn $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, viêc tìm số d đòi hỏi một kỹ năng tinh xảo. May thay, điều này không cần thiết vì ta có thể chứng minh những quy tắc tính giới hạn đã được trình bày trong bài 2.3, và sau đó dùng những quy tắc này ta có thể tìm được giới hạn của những hàm số phức tạp một cách nghiêm nhặt mà không cần tìm một cách trực tiếp.

Ta bắt đầu bằng cách chứng minh quy tắc cộng giới hạn :

Nếu $\lim_{x\to a} f(x) = L$ và $\lim_{x\to a} g(x) = M$, thế thì $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

CHỨNG MINH QUY TẮC CỘNG GIỚI HẠN Cho trước $e > 0$. Ta phải tìm $d > 0$ sao cho

nếu $0 < |x - a| < d$ thì $| f(x) + g(x) - (L + M) | < e$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác ta có thể viết

5 $$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq | f(x) - L| + | g(x) - M| \quad (*)$$

Ta làm $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ nhỏ hơn e bằng cách làm mỗi số hạng $| f(x) - L|$ và $| g(x) - M|$ đều nhỏ hơn e/2.
Vì $e/2 > 0$ và $\lim_{x\to a} f(x) = L$, nên tồn tại số d_1 sao cho

nếu $0 < |x - a| < d_1$ thì $| f(x) - L| < e/2$

Tương tự, vì $\lim_{x\to a} g(x) = M$, nên tồn tại số d_2 sao cho

nếu $0 < |x - a| < d_2$ thì $| g(x) - M| < e/2$

Chọn $d = \min(d_1, d_2)$. Chú ý rằng

nếu $0 < |x - a| < d$ thì $0 < |x - a| < d_1$ và $0 < |x - a| < d_2$

và như thế $| f(x) - L| < e/2$ và $| g(x) - M| < e/2$

Suy ra theo (*)

|f(x) + g(x) - (L + M)| ≤ |f(x) - L| + |g(x) - M|

< e/2 + e/2 = e

Tóm lại

nếu 0 < |x - a| < d thì |f(x) + g(x) - (L + M)| < e

Do đó theo định nghĩa của giới hạn, ta kết luận

lim [f(x) + g(x)] = L + M

Các quy tắc khác được chứng minh trong phần phụ lục.

GIỚI HẠN VÔ TẬN

Những giới hạn vô tận cũng có thể được định nghĩa chính xác. Định nghĩa sau là phiên bản chính xác của định nghĩa đã đề cập trong bài 2.2.

6 ĐỊNH NGHĨA Cho f là hàm số xác định trên một khoảng chứa số a, có thể trừ điểm a. Thế thì

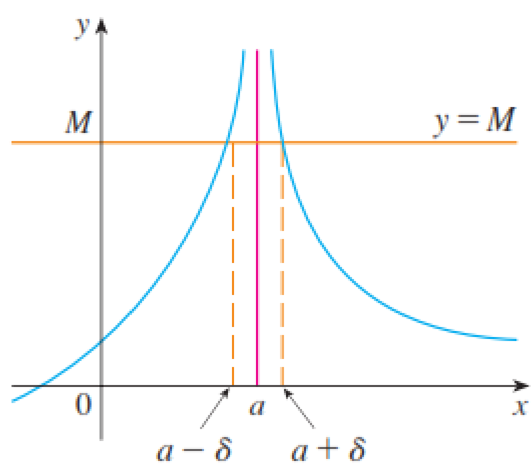
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

có nghĩa là với mỗi số dương M tồn tại một số dương δ sao cho

nếu 0 < |x - a| < δ thì f(x) > M

Điều này có nghĩa là những giá trị của f(x) có thể được làm lớn tùy ý (lớn hơn bất kỳ số M nào cho trước) bằng cách lấy x đủ gần a (bên trong khoảng cách δ, trong đó δ phụ thuộc vào M, nhưng với x ≠ a). Minh họa hình học của định nghĩa được cho trong Hình 10.

Cho bất kỳ đường nằm ngang y = M, ta có thể tìm được một số δ > 0 sao cho nếu ta hạn chế x nằm trong khoảng (a - δ, a + δ) nhưng x ≠ a, thế thì phần đường cong y = f(x) tương ứng sẽ nằm phía trên đường y = M. Bạn có thể thấy rằng nếu cho trước một số M lớn hơn , thế thì ta cần chọn một số δ nhỏ hơn.



HÌNH 10

VÍ DỤ 5 Dùng định nghĩa 6 để chứng minh $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$.

GIẢI Cho trước một số dương M. Ta muốn tìm một số δ sao cho

nếu $0 < |x| < \delta$ thì $1/x^2 > M$

Nhưng $1/x^2 > M \iff x^2 < 1/M \iff |x| < 1/\sqrt{M}$

Vì thế nếu ta chọn $\delta = 1/\sqrt{M}$ và $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, thì $1/x^2 > M$. Điều này chứng tỏ rằng $1/x^2 \to \infty$ khi $x \to 0$.

Tương tự, ta có định nghĩa chính xác sau đây thay thế Định nghĩa 5 trong Bài 2.2, và được minh họa bằng Hình 11.

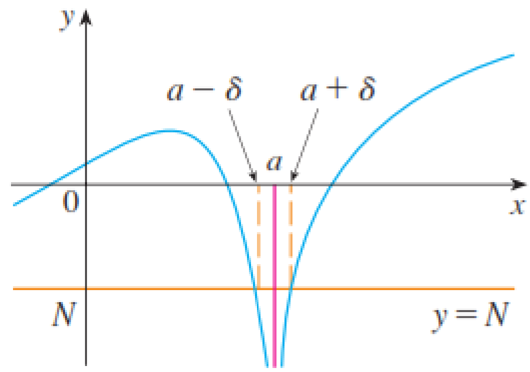
7 ĐỊNh NGHĨA Cho f là hàm số xác định trên một khoảng chứa số a, có thể trừ điểm a. Thế thì

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

có nghĩa là với mỗi số âm N tồn tại một số dương d sao cho

nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $f(x) < N$

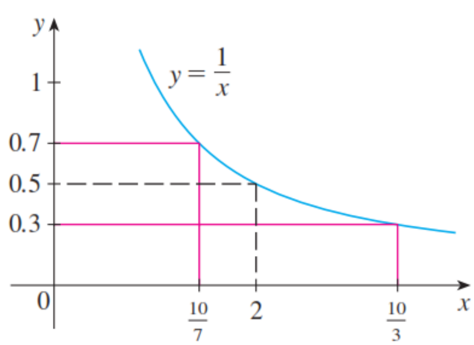
HÌNH 11



BÀI TẬP

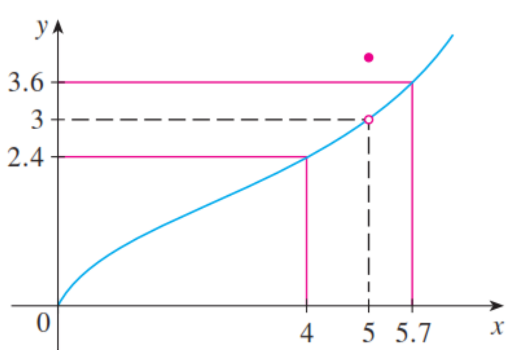
1. Dùng đồ thị của hàm số f(x) = 1/x để tìm δ sao cho

nếu $|x - 2| < \delta$ thì $\left|\frac{1}{x} - 0.5\right| < 0.2$



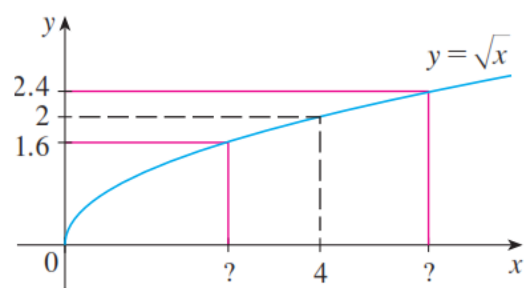
2. Dùng đồ thị của hàm số f để tìm δ sao cho

nếu $|x - 5| < \delta$ thì $|f(x) - 3| < 0.6$



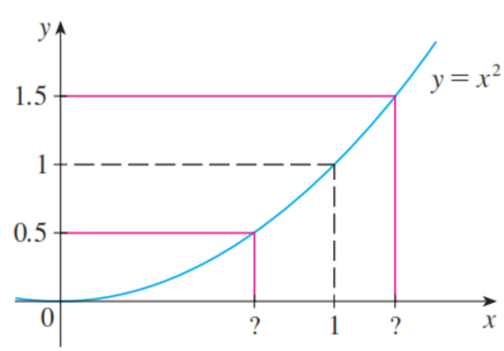
3. - Dùng đồ thị của hàm số f (x) = $\sqrt{x}$ để tìm δ sao cho

nếu $|x - 4| < \delta$ thì $\left|\sqrt{x} - 2\right| < 0.4$



4. Dùng đồ thị của hàm số f(x) = x^2 để tìm δ sao cho

nếu $|x - 1| < \delta$ thì $\left|x^2 - 1\right| < 1/2$



5. Dùng đồ thị để tìm δ sao cho

nếu $|x - \pi/4| < \delta$ thì $|\tan x| < 0.2$

6. Dùng đồ thị để tìm δ sao cho

nếu $|x - 1| < \delta$ thì $\left|\dfrac{2x}{x^2+4} - 0.4\right| < 0.1$

7. Đối với giới hạn

$$\lim_{x\to 1}(4 + x - 3x^2) = 2$$

Hãy minh họa Định nghĩa 2 bằng cách tìm những giá trị δ tương ứng với ε = 1 và ε = 0.1.

8. Đối với giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Hãy minh họa Định nghĩa 2 bằng cách tìm những giá trị δ tương ứng với ε = 0.5 và ε = 0.1.

9. Cho biết $\lim_{x\to\pi/2}\tan^2 x = \infty$, hãy minh họa Định nghĩa 6 bằng cách tìm những giá trị của δ tương ứng với (a) M = 1000 và (b) M = 10,000.

10. Dùng đồ thị để tìm δ sao cho

Nếu $5 < x < 5 + \delta$ thì $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-5}} > 100$

11. Một thợ máy được yêu cầu sản xuất một đĩa kim loại có diện tích 1000 cm^2.

(a) Bán kính của đĩa ấy bằng bao nhiêu?

(b) Nếu thợ máy được cho phép phạm sai số ± 5 cm^2 đối với diện tích đĩa, thế thì người thợ máy có thể phạm sai số đối với bán kính lý tưởng nói ở phần (a) là bao nhiêu?

(c) Theo định nghĩa chính xác của giới hạn $\lim_{x\to a} f(x) = L$ sử dụng ε và δ, x là gì? f(x) là gì? a là gì? L là gì? Giá trị nào của ε được cho trước? Giá trị tương ứng của δ là bao nhiêu?

12. Một lò tăng trưởng thủy tinh được sử dụng để xác định cách chế tạo tốt nhất loại thủy tinh được dùng trong thành phần điện tử của tàu con thoi. Để thủy tinh tăng trưởng đúng cách, nhiệt độ phải được điều chỉnh chính xác bằng cách gia giảm năng lượng cung cấp. Giả sử mối liên hệ này được cho bởi

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

trong đó T là nhiệt độ C và w là năng lượng cung cấp tính bằng watt.

(a) Phải cần bao nhiêu năng lượng để duy trì nhiệt độ ở mức 200°C?

(b) Nếu cho phép nhiệt độ thay đổi ± 1° quanh 200°C, năng lượng cung cấp có thể thay đổi trong khoảng nào?

(c) Theo định nghĩa chính xác của giới hạn $\lim_{x\to a} f(x) = L$ sử dụng ε và δ, thì x là gì? f(x) là gì? a là gì? L là gì? Giá trị nào của ε được cho trước? Giá trị tương ứng của δ là bao nhiêu?

13. (a) Tìm δ sao cho nếu $|x - 2| < \delta$, thì $|4x - 8| < \varepsilon$, trong đó ε = 0.1.

(b) Lặp lại phần (a) với ε = 0.01.

14. Cho biết $\lim_{x\to 2}(5x - 7) = 3$,minh họa Định nghĩa 2 bằng cách tìm những giá trị của δ tương ứng với ε = 0.1, ε = 0.05, và ε =0.01.

15-18. Chứng minh phát biểu sau, dùng định nghĩa chính xác của giới hạn và minh họa với giãn đồ như Hình 9.

15. $\lim_{x\to 1}(2x + 3) = 5$

16. $\lim_{x\to -2}(\frac{1}{2}x + 3) = 2$

17. $\lim_{x\to -3}(1 - 4x) = 13$

18. $\lim_{x\to 4}(7 - 3x) = -5$

19-32. Chứng minh phát biểu sau, dùng định nghĩa chính xác của giới hạn.

19. $\lim_{x\to 3}\frac{x}{5} = \frac{3}{5}$

20. $\lim_{x\to 6}\left(\frac{x}{4} + 3\right) = \frac{9}{2}$

21. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

22. $\lim_{x\to -1.5}\frac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

23. $\lim_{x\to a} x = a$

24. $\lim_{x\to a} c = c$

25. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x\to 0}|x| = 0$

28. $\lim_{x\to 9^-}\sqrt[4]{9 - x} = 0$

29. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x\to 3}(x^2 + x - 4) = 8$

31. $\lim_{x\to -2}(x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Chứng thực rằng một lựa chọn khác cho δ trong việc chứng tỏ $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ trong Ví dụ 4 là δ =min(2, ε/8).

34. Chứng thực, bằng một luận cứ hình học, rằng sự lựa chọn lớn nhất có thể của δ trong việc chứng minh $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ là $\delta = \sqrt{6+\varepsilon} - 3$.

35. (a) Đối với giới hạn $\lim_{x\to 1}(x^3 + x + 1) = 3$,hãy dùng đồ thị để tìm giá trị của δ ứng với $\varepsilon = 0.4$.

(b) Bằng cách vùng phần mềm đại số để giải phương trình bậc ba $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, tìm giá trị lớn nhất có thể của δ tương ứng với bất kỳ $\varepsilon > 0$ cho trước nào.

(c) Cho $\varepsilon = 0.4$ trong đáp số của bạn ở phần (b) và so sánh với đáp số của bạn ở phần (a).

36. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

37. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$, nếu a > 0.

[*Gợi ý: Dùng* $|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$].

38. Nếu H là hàm số Heaviside định nghĩa trong Ví dụ 6 ở Bài 2.2, chứng minh, bằng Định nghĩa 2, rằng $\lim_{t\to 0} H(t)$ không tồn tại. [*Gợi ý: Dùng phép chứng minh phản chứng. Giả sử tồn tại giới hạn L. Lấy ε = ½ theo định nghĩa của giới hạn và cố đi đến một sự nghịch lý.]*

39. Nếu hàm số f được đinh bởi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & khi \quad x \in Q \\ 1 & khi \quad x \notin Q \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng $\lim_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

40. Bằng cách so sánh Định nghĩa 2, 3, và 4, chứng minh Định lý 1 trong Bài 2.3.

41. Ta phải lấy x gần sát – 3 cỡ nào để

$$\frac{1}{(x+3)^4} > 10{,}000$$

42. Dùng Định nghĩa 6 để chứng minh

$$\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^4} = \infty$$

43. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x = -\infty$.

44. Giả sử $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ và $\lim_{x\to a} g(x) = c$, trong đó c là một số thực. Chứng minh

(a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \infty$

(b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \infty$ nếu c > 0

(c) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$ nếu c < 0

ĐÁP SỐ

1. 4/7 (hoặc một số dương nhỏ hơn)

3. 1.44 (hoặc một số dương nhỏ hơn)

5. 0.0906 (hoặc một số dương nhỏ hơn)

7. 0.11, 0.012 (hoặc một số dương nhỏ hơn)

9. (a) 0.031 (b) 0.010

11. (a) $\sqrt{1000/\pi}cm$

(b) trong khoảng xấp xỉ 0.0445 cm

(c) Bán kính; diện tích; $\sqrt{1000/\pi}$; 1000; 5; ≈ 0.0445.

13. (a) 0.025 (b) 0.0025

35. (a) 0.093 (b) $\delta = (B^{2/3} - 12)/(6B^{1/3}) - 1$, trong đó $B = 216 + 108\varepsilon + 12\sqrt{336+324\varepsilon+81\varepsilon^2}$

41. Trong vòng 0.1

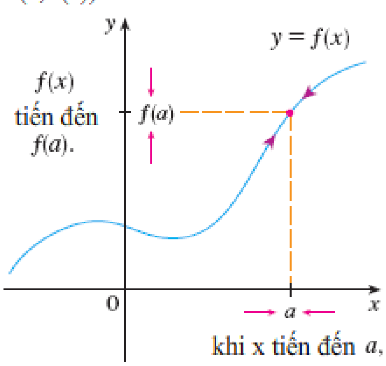
BÀI 2. 5. TÍNH LIÊN TỤC

Trong bài 2.3, ta thấy rằng giới hạn của một hàm số đa thức f(x) khi x tiên đến a là f(a). Hàm số có tính chất này được gọi là *liên tục tại a*. Ta sẽ thấy rằng định nghĩa toán học của sự liên tục tương ứng mật thiết với ý nghĩa thông thường của từ liên tục mà ta dùng thường ngày. (Một tiến trình liên tục là tiến trình xảy ra tuần tự, không có gián đoạn hoặc thay đổi đột ngột.)

1 Định nghĩa Một hàm số f **liên tục tại a** nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Như được minh họa trong hình dưới, nếu f liên tục tại a thì điểm (x, f(x)) tiến đến điểm (a, f(a)) trên đồ thị . Vì thế không có khe hở trên đồ thị tại điểm (a, f(a)).



HÌNH 1

Chú ý là định nghĩa 1 ám chỉ ba điều phải thỏa mãn nếu f liên tục tại a:

1. f(a) xác định (nghĩa là thuộc tập xác định của f)
2. lim f(x) tồn tại
3. lim f(x) = f(a)

Định nghĩa nói rằng f liên tục tại a nếu f(x) tiến đến f(a) khi x tiến đến a. Do đó một hàm số liên tục f có tính chất là một sự thay đổi nhỏ của x chỉ sinh ra một thay đổi nhỏ của f(x). Đúng ra, sự thay đổi của f(x) có thể giữ cho nhỏ như ý muốn bằng cách giữ cho thay đổi của x đủ nhỏ.

Nếu f xác định gần điểm a (nói cách khác , f xác định trên một khoảng chứa điểm a, có thể trừ điểm a), thì ta nói f **gián đoạn tại a** nếu f không liên tục tại a.

Các hiện tượng vật lý thường là liên tục. Chẳng hạn, sự di chuyển hoặc vận tốc của một phương tiện thay đổi một cách liên tục với thời gian, chiều cao của một người cũng vậy. Nhưng sự gián đoạn thường xảy ra trong những tình huống của dòng điện.

[Xem lại ví dụ 6 trong bài 2.2 trong đó hàm số Heaviside gián đoạn tại 0 vì $\lim_{t\to 0}$ H(t) không tồn tại.

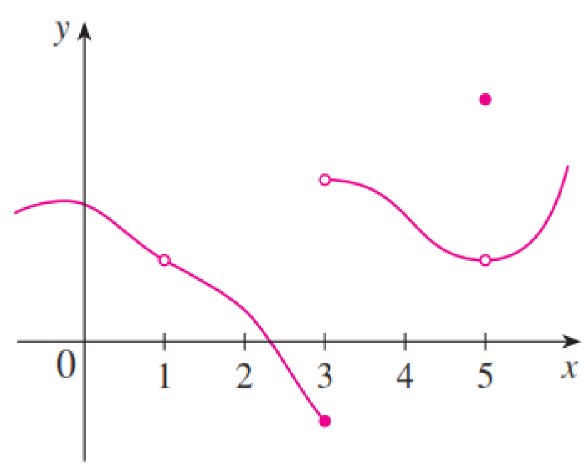
Về hình học, bạn có thể nghĩ về hàm số liên tục tại mỗi điểm trong một khoảng là hàm số mà đồ thị của nó không chỗ nào đứt đoạn. Khi vẽ đồ thị của hàm số liên tục, ta không cần nhấc viết lên khỏi mặt giấy.

VÍ DỤ 1 Hình 2 là đồ thị của một hàm số f. Tại điểm nào f gián đoạn? Tại sao?

GIẢI Có vẻ như f gián đoạn tại a = 1 vì đồ thị đứt đoạn tại đây. lý do f gián đoạn tại 1 là f(1) không xác định.
Đồ thị cũng đứt đoạn khi a = 3, nhưng lý do lại khác. Ở đây, f(3) xác định , nhưng $\lim_{x\to 3}$ f(x) không tồn tại (vì giới hạn trái và phải khác nhau). Vì thế f gián đoạn tại 3.
Tại a = 5 thì sao? Ở đây, f(5) xác định và $\lim_{x\to 5}$ f(x) tồn tại (vì giới hạn bên trái và phải bằng nhau). Nhưng

$$\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$$

Vì thế f gián đoạn tại 5.



HÌNH 2

VÍ DỤ 2 Mỗi hàm số được cho dưới đây gián đoạn tại điểm nào?

(a) f(x) = $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & khi \quad x \neq 0 \\ 1 & khi \quad x = 0 \end{cases}$

(c) f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & khi \quad x \neq 2 \\ 1 & khi \quad x = 2 \end{cases}$

(d) f(x) = [[x]]

GIẢI

(a) Chú ý f(2) không xác định, do đó f gián đoạn tại 2. Sau này ta sẽ thấy được tại sao f liên tục tại tất cả những điểm khác.

(b) Ở đây f(0) = 1 được xác định nhưng

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

không tồn tại. (Xem ví dụ 8 trong bài 2.2.) Vì thế f gián đoạn tại 0.

(c) Ở đây f(2) = 1 được xác định và

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3$$

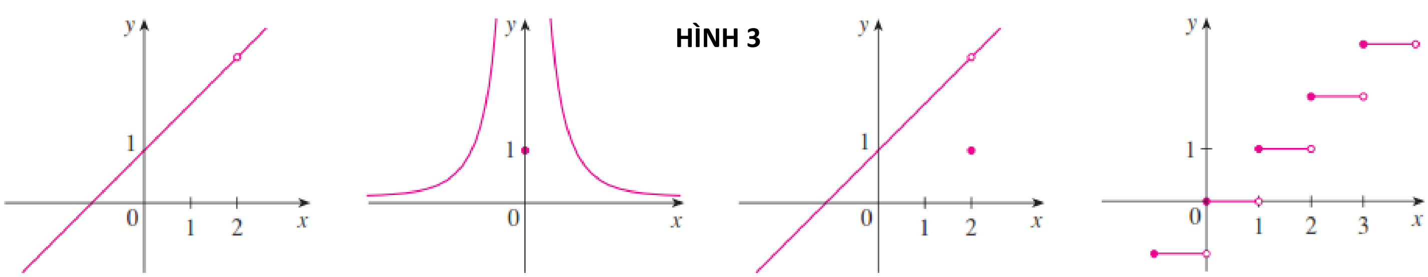
tồn tại. Nhưng $\lim_{x\to 2} f(x) \neq$ f(2)

vì thế f gián đoạn tại 2.

(d) Hàm số phần nguyên f(x) = [[x]] gián đoạn tại tất cả những số nguyên vì lim $_{x \to n}$ [[x]] không tồn tại nếu n là số nguyên. (Xem Ví dụ 10 và Bài tập 49 trong Bài 2.3.)

Hình dưới cho thấy các đồ thị của hàm số trong Ví dụ 2. Trong mỗi trường hợp đồ thị không thể vẽ nếu không nhấc viết lên khỏi mặt giấy vì có "ổ gà" hoặc đứt đoạn hoặc có bước nhảy trong đồ thị. Loại gián đoạn trong phần (a) và (c) được gọi **có thể dở bỏ** vì ta có thể dở bỏ những gián đoạn bằng cách định nghĩa lại f chỉ tại điểm 2. [Hàm số g(x) = x + 1 liên tục.] Còn gián đoạn trong phần (b) được gọi là **gián đoạn vô hạn**. Gián đoạn trong phần (d) gọi là **gián đoạn bước nhảy** vì hàm số "nhảy" từ giá trị này đến giá trị khác.

HÌNH 3



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{if } x \neq 2 \\ 1 & \text{if } x = 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = [\![x]\!]$

2 ĐỊNH NGHĨA Một hàm số f gọi là **liên tục bên phải** tại a nếu

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

và f gọi là **liên tục bên trái tại** a nếu

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

VÍ DỤ 3 Tại mỗi số nguyên n , hàm số f(x) = [[x]] [xem Hình 3(d) của ví dụ trước] liên tục bên phải nhưng gián đoạn bên trái vì

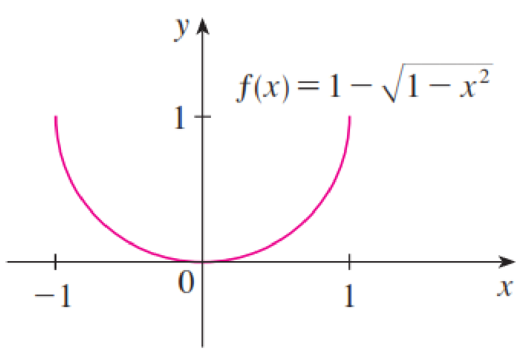
$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+} [[x]] = n = f(n)$$

nhưng $$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} [[x]] = n-1 \neq f(n)$$

3 ĐỊNH NGHĨA Một hàm số f gọi là **liên tục trên khoảng (a, b)** nếu nó liên tục tại mỗi điểm thuộc khoảng (a, b).
* **Liên tục trên nửa khoảng [a, b)** nghĩa là liên tục trên (a, b) và liên tục bên phải tại a.
* **Liên tục trên nửa khoảng (a, b]** nghĩa là liên tục trên (a, b) và liên tục bên trái tại b.
* Liên tục trên đoạn [a, b] nghĩa là liên tục trên (a, b), liên tục bên phải tại a và liên tục bên trái tại b.

VÍ DỤ 4 Chứng tỏ rằng f(x) = 1 - $\sqrt{1-x^2}$ liên tục trên đoạn [- 1, 1]

GIẢI Nếu – 1 < a < 1 thế thì sử dụng quy tắc tìm giới hạn ta có



$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(1-\sqrt{1-x^2}$$

$$= 1 - \lim_{x\to a}\sqrt{1-x^2} \quad \text{(Quy tắc 2 và 7)}$$

$$= 1 - \sqrt{\lim_{x\to a}(1-x^2)} \quad \text{(Quy tắc 11)}$$

$$= 1 - \sqrt{1-a^2} \quad \text{(Quy tắc 2, 7, và 9)}$$

$$= f(a)$$

Do đó, theo Định nghĩa 1, f liên tục tại a nếu - 1 < a < 1. Tính tương tự , ta được

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{và} \qquad \lim_{x\to 1-} f(x) = 1 = f(1)$$

nên f liên tục bên phải tại - 1 và liên tục bên trái tại 1. Do đó theo định nghĩa 3, f liên tục trên [- 1, 1].
Đồ thị của f được cho trong Hình 4. Đó là phân nửa phía dưới của đường tròn $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Thay vì lúc nào cũng dùng các Định nghĩa 1, 2 và 3 để chứng minh tính liên tục của một hàm số như ta đã làm trong các ví dụ trên, thường thuận tiện hơn nếu dùng định lí sau đây, cho ta cách thiết lập những hàm số liên tục phức tạp từ những hàm số đơn giản.

ĐỊNH LÍ Nếu f và g liên tục tại a và c là một hằng số, thế thì những hàm số sau cũng liên tục tại a:

1. f + g **2.** f - g **3.** Cf

4. fg **5.** f/g nếu g(a) ≠ 0

Chứng Minh Năm phần của định lí này là hệ quả của các quy tắc giới hạn tương ứng trong bài 2.3. Chẳng hạn, ta thử chứng minh phần 1. Vì f và g liên tục tại a, ta có

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{và} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{(quy tắc 1)} \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a)\end{aligned}$$

Chứng tỏ f + g liên tục tại a.

Từ định lí 4 và định nghĩa 3 ta suy ra nếu f và g liên tục trên một khoảng, thế thì f + g , f - g, cf, fg và f/g (nếu g luôn khác 0) cũng liên tục trên khoảng đó. Định lí sau là đã được phát biểu trong Bài 2.3 dưới dạng Tính Chất Thế Trực Tiếp.

5 ĐỊNH LÍ
(a) Mọi đa thức đều liên tục trên R.
(b) Mọi phân thức đều liên tục trên tập xác định của nó.

CM

(a) Một đa thức là một hàm số có dạng

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_o$$

Trong đó $c_o, c_1, \ldots, c_n$ là hằng số. Ta biết rằng

$$\lim_{x \to a} c_o = c_o \qquad \text{(Quy tắc 7)}$$

và

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \quad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(Quy tắc 9)}$$

Phương trình này chính xác là phát biểu rằng hàm số $f(x) = x^m$ là hàm số liên tục. Do đó, theo phần 3 của Định lý $g(x) = cx^m$ là liên tục vì là tổng các hàm số liên tục. Vì P là tổng các hàm số dạng này và một hàm số liên tục, suy ra theo phần 1 của Định lý 4 P là liên tục.

(b) Một hàm số hữu tỷ là hàm số có dạng

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

trong đó P và Q là các đa thức. Tập xác định của f là $D = \{x \in R | Q(x) \neq 0\}$. Ta biết từ phần (a) là P và Q là liên tục trên R. Do đó, theo phần 5 của Định lý 4 f liên tục tại mỗi số thuộc D.

Như một ví dụ cho Định lý 5 này, xét thể tích của khối cầu theo bán kính r là hàm số $V = 4/3\pi r^3$ Đây là một đa thức, do đó V thay đổi liên tục theo r. Cũng vậy, nếu ném quả bóng lên không thẳng đứng với vận tốc 50 ft/s, thế thì độ cao của quả bóng ở thời điểm t cho bởi công thức $h = 50 - 16t^2$ Đây là một đa thức, do đó độ cao là hàm số liên tục theo thời gian.

Hiểu biết về hàm số nào liên tục cho phép chúng ta có thể tính được giới hạn rất mau lẹ, như ví dụ sau sẽ chứng tỏ. So sánh ví dụ này với Ví dụ 2(b) trong Bài 2.3.

VÍ DỤ 5 Tìm $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$.

GIẢI Hàm số

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$$

là hàm số hữu tỷ, vì thế theo Định lý 5, nó liên tục trên tập xác định của nó, đó là $\{x \mid x\neq 5/3\}$.
Do đó

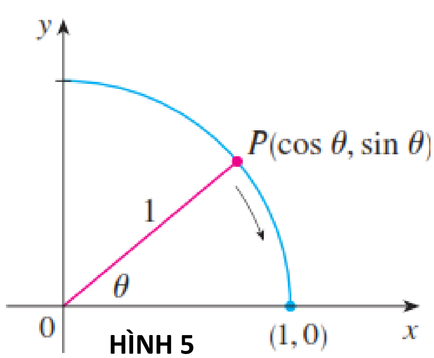
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\lim_{x\to -2} f(x)= f(-2)$$
$$=\frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}=-\frac{1}{11}$$

Thành ra hầu hết những hàm số quen thuộc đều liên tục tại mọi điểm trong tập xác định của chúng. Chẳng hạn, quy tắc 10 có thể phát biểu lại chính xác là hàm số căn thức đều liên tục.

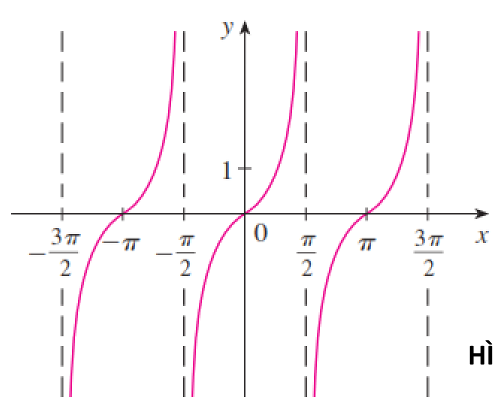
Từ hình dạng của đồ thị của hàm số sin và cos (Hình 18 trong Bài 1.2), ta chắc chắn nhận ra rằng chúng liên tục. Ta biết từ định nghĩa của sin θ và cos θ rằng toạ độ của điểm P trong Hnh 5 là (cosθ, sinθ). Khi θ tiên đến 0, ta thấy điểm P tiên đến điểm (1, 0), vì thế cosθ tiến đến 1 và sinθ tiến đến 0. Do đó:

6 $$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1 \qquad \lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0$$

Vì cos0 = 1 và sin0 = 0, mục 6 chứng tỏ hàm số cosin và sin là hàm số liên tục tại 0. Dùng công thức cộng cho hàm số cosin và sin, ta có thể suy ra rằng hàm số này liên tục mọi nơi.



HÌNH 5



HÌNH 6

Tiếp theo vì tanx = sinx/cosx, do đó theo mục 5 hàm số tanx liên tục tại mọi điểm trừ khi cosx = 0. Điều này xảy ra khi x là bội số nguyên lẻ của π/2, vì thế tanx có vô số điểm gián đoạn tại x = ± π/2, ± 3π/2, ± 5π/2, . . . (xem Hình 6).

Hàm số ngược của một hàm số liên tục thì liên tục. Điều này có thể suy dễ dàng từ đồ thị của chúng. Vì đồ thị của hàm số ngược f^{-1} là đối xứng của đồ thị f qua đường thẳng y = x. Do đó nếu f liên tục tức đồ thị của nó không đứt đoạn thì do đó đồ thị của f^{-1} cũng thế, thành ra f^{-1} cũng liên tục.

Trong bài 1.5, ta định nghĩa hàm số $y = a^x$ bằng cách lấp đầy những lỗ trong đồ thị của hàm số $y = a^x$ khi x hữu tỷ. Nói cách khác, ngay từ định nghĩa của $y = a^x$ ta đã thấy hàm số này liên tục trên R. Do đó hàm số ngược $y = \log_a x$ liên tục trên $(0, \infty)$.

7 ĐỊNH LÝ Những loại hàm số sau đây đều liên tục trên tập xác định của chúng

đa thức phân thức căn thức
hàm số lượng giác hàm số lượng giác ngược
hàm số mũ hàm số logarit

VÍ DỤ 6 Tìm những điểm liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$

GIẢI Theo định lí 7, ta biết rằng hao y = lnx liên tục khi x > 0 và $y = \tan^{-1} x$ liên tục trên R. Do đó, theo phần 1 của định lí 4, hàm số $y = \ln x + \tan^{-1} x$ liên tục trên $(0, \infty)$. Còn mẫu thức, $y = x^2 - 1$ là một đa thức, vì thế nó liên tục mọi nơi. Do đó, theo phần 5 của định lí 4. f liên tục tại mỗi số dương x trừ khi $x^2 - 1 = 0$. Vì thế f liên tục trên khoảng (0, 1) và $(1, \infty)$.

VÍ DỤ 7 Tìm $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

GIẢI Định lí 7 cho ta y = sin x liên tục. Còn hàm số ở mẫu, y = 2 + cosx, là tổng của hàm số liên tục, do đó liên tục. Nhận xét rằng hàm số này không bao giờ bằng 0 vì cosx ≥ - 1 với mọi x nên 2 + cosx > 0 ở mọi nơi. Do đó tỉ số

$$f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$$

liên tục trên R. Suy ra, theo định nghĩa của hàm số liên tục,

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x} = \lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\sin \pi}{2+\cos \pi} = \frac{0}{2-1} = 0$$

Một cách khác để phối hợp hai hàm số liên tục để được một hàm số liên tục mới là tạo hàm số hợp f o f . Tính chất này là kết quả của định lí sau:

8 ĐỊNH LÝ Nếu f liên tục tại b và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, thế thì

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b),$$

Nói cách khác

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Theo trực giác, Định lý 8 thật hợp lý vì x gần sát a, nên g(x) gần sát b, và vì f liên tục tại b, nếu g(x) gần sát b, thì f(g(x)) cũng sát gần f(b). Phần chứng minh Định lý 8 này xin xem trong Phụ lục F.

VÍ DỤ 8 Tính $\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

GIẢI Vì arcsin là hàm số liên tục, ta có thể áp dụng Định lý 8:

$$\lim_{x\to 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$$

$$= \arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right)$$

$$= \arcsin\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Giờ ta áp dụng Định lý 8 trong trong trường hợp f(x) = $\sqrt[n]{x}$ trong đó n là số nguyên dương. Thế thì

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

và

$$f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Nếu ta thế hai biểu thức này vào Định lý 8, ta được

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Và vì thế Quy tắc Giới Hạn đã được chứng minh. (Ta giả sử các căn thức tồn tại.)

9 ĐỊNH LÍ Nếu g liên tục tại a và f liên tục tại g(a), thế thì hàm số hợp f o g định bởi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

cũng liên tục tại a.

Định lý này thường được phát biểu là “một hàm số liên tục của một hàm số liên tục là một hàm số liên tục.”

CHỨNG MINH Vì g liên tục tại a, ta có

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Vì f liên tục tại b = g(a), ta có thể áp dụng Định lý 8 để được

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

Chứng tỏ hàm số h(x) = f(g(x)) liên tục tại a; đó là $f \circ g$ liên tục tại a.

VÍ DỤ 9 Những hàm số sau liên tục tại những điểm nào?

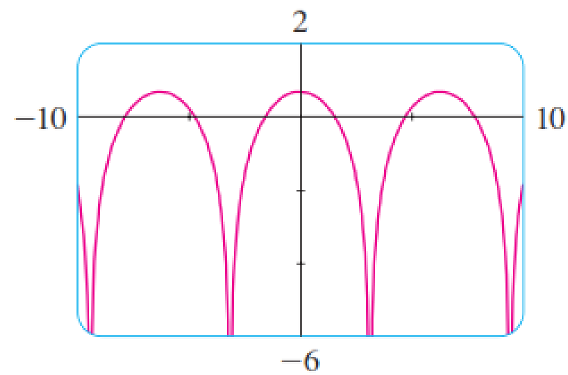
(a) $h(x) = \sin(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

GIẢI Ta có h(x) = f(g(x)), trong đó

$$g(x) = x^2 \qquad \text{và} \qquad f(x) = \sin x$$

g thì liên tục trên R vì nó là đa thức, còn f cũng liên tục mọi nơi. Do đó h = f o g liên tục trên R theo Định lí 9.

(b) Ta biết từ Định lí 7 là f(x) = lnx liên tục trên tập xác định và g(x) = 1 + cosx liên tục trên R (vì cả hai hàm số y = 1 và y = cosx đều liên tục trên R). Do đó, theo Định lí 9, F(x) = f(g(x)) cũng liên tục tại mọi điểm mà nó xác định. Ta biết ln(1 + cosx) xác định khi 1 + cosx > 0. Vì vậy nó không xác định khi cosx = - 1, và điều này xảy ra khi x = ± π, ± 3π, . . . Do đó F gián đoạn tại những giá trị x là bội số lẻ của π và liên tục trên những khoảng giữa các giá trị liên tiếp này (xem Hình 7).

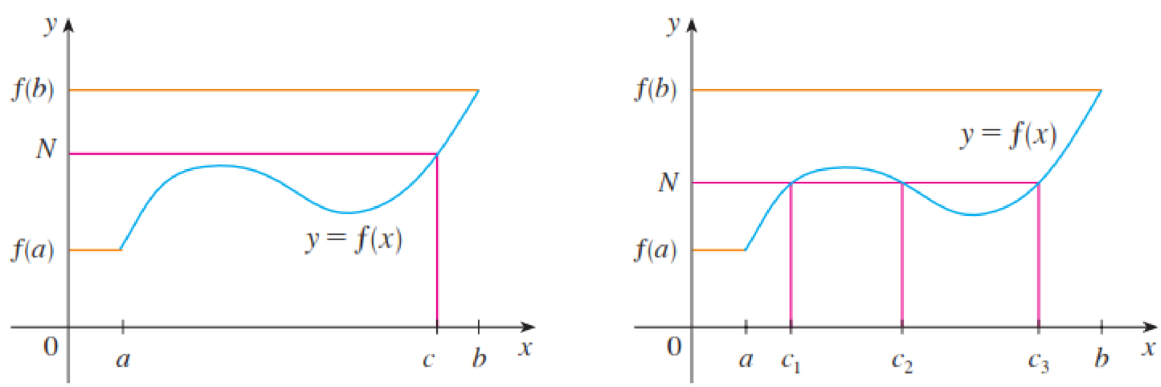


HÌNH 7

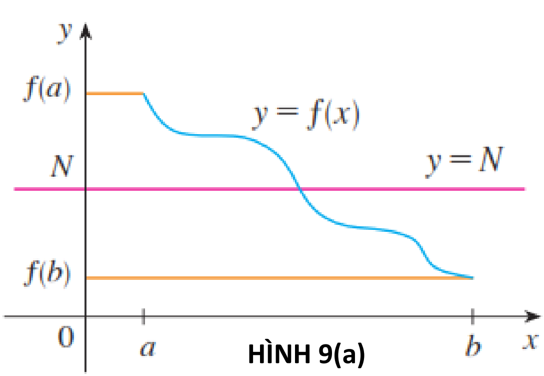
Một tính chất quan trọng của hàm số liên tục cho bởi định lí sau, phần chứng minh của định lí có thể được tìm thấy trong những bộ sách giải tích cao cấp hơn.

> **10 ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG GIAN** Cho f hàm số liên tục trên đoạn [a, b] và gọi N là một số bất kỳ giữa f(a) và f(b), trong đó f(a) ≠ f(b). Thế thì tồn tại một số c thuộc (a, b) sao cho f(c) = N.

Định lí này nói rằng một hàm số liên tục nhận mọi giá trị trung gian giữa hai giá trị f(a) và f(b) của hàm số . Hình 8 bên dưới minh họa tính chất này. Nhận xét rằng giá trị N có thể nhận một lần (a) hay hai lần (b).

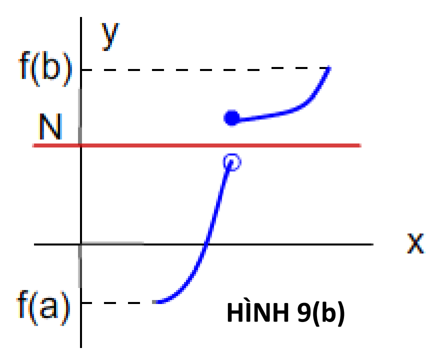


(a) **HÌNH 8** (b)



HÌNH 9(a)

Vì đồ thị của hàm số liên tục là một đường liền lạc, không có "ổ gà", không đứt đoạn, nên định lí này có thể cảm nhận là đúng. Ý nghĩa hình học của định lí này là một đường thẳng nằm ngang bất kì y = N nằm giữa hai đường thẳng y = f(a) và y = f(b) chắc chắn sẽ cắt đồ thị tại ít nhất một điểm (Hình9(a). Điều này không luôn đúng trong đồ thị một hàm số không liên tục (Hình 9(b)).



HÌNH 9(b)

Một ứng dụng của định lí giá trị trung gian là để định vị nghiệm của một phương trình như trong ví dụ dưới đây.

VÍ DỤ 9 Chứng tỏ rằng phương trình

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

có nghiệm trong khoảng (1, 2).

GIẢI Cho $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Ta tìm một nghiệm của phương trình đã cho , tức tìm một số c giữa 1 và 2 sao cho $f(c) = 0$. Do đó ta lấy $a = 1$, $b = 2$ và $N = 0$ trong Định lí 10. Ta có

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$
$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Như vậy $f(1) < 0 < f(2)$; nghĩa là $N = 0$ là một số nằm giữa f(1) và f(2). Mà f là hàm số liên tục vì f là một đa thức, Định Lý Giá Trị Trung Gian nói rằng tồn tại số c giữa 1 và 2 sao cho $f(c) = 0$. Nói cách khác phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng (1, 2).

Thật ra, dùng định lí này, ta có thể định vị nghiệm phương trình chính xác hơn như ý muốn. Vì

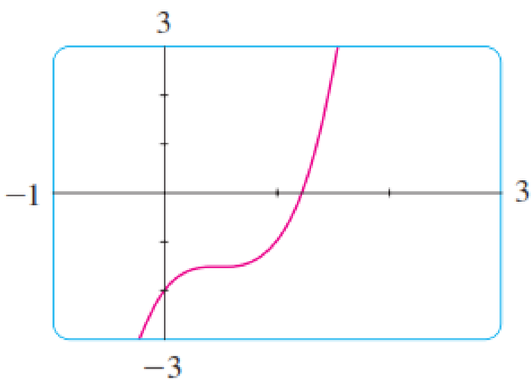
$$f(1.2) = -0.128 < 0 \quad \text{và} \quad f(1.3) = 0.548 > 0$$

nên có một nghiệm thuộc (1.2, 1.3). Và nếu sử dụng máy tính, ta có thể đến gần hơn nữa bằng cách thử đúng sai.

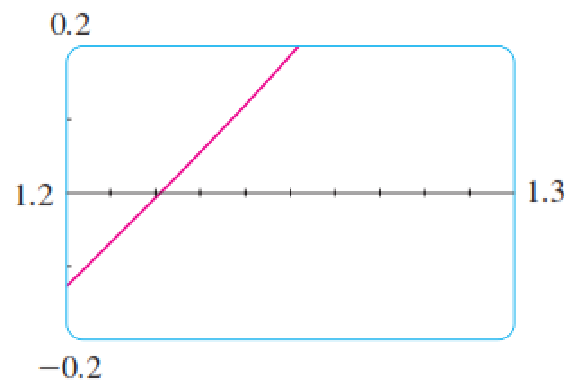
$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \quad \text{và} \quad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

nên nghiệm phải nằm trong khoảng (1.22, 1.23).

Ta có thể dùng máy tính để minh họa cách sử dụng Định Lý Giá Trị Trung Gian trong Ví dụ 10. Hình 10 cho thấy đồ thị của f trong khung hình chữ nhật [-1, 3] x [-3, 3] và bạn có thể thấy là đồ thị cắt qua trục x tại điểm giữa 1 và 2. Hình 11 cho thấy kết quả chính xác hơn khi ta phóng to khung hình chữ nhật [1.2, 1.3] x [- 0.2,0.2].



HÌNH 10



HÌNH 11

Thật ra, Định Lý Giá Trị Trung Gian đóng một vai trò quan trọng trong cơ chế hoạt động của máy tính. Máy tính tính một số điểm hữu hạn trên đồ thị và bật các điểm ảnh chứa những điểm được tính này. Máy giả định là hàm số là liên tục và nhận tất cả giá trị trung gian giữa hai điểm liên tiếp. Do đó máy nối lại những điểm ảnh bằng cách bật những điểm ảnh trung gian.

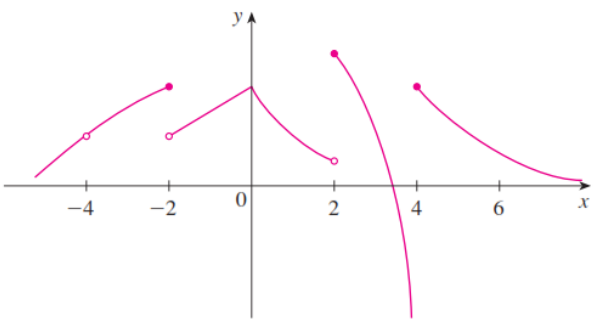
BÀI TẬP

1. Viết một phương trình diễn tả hàm số f liên tục tại x = 4.

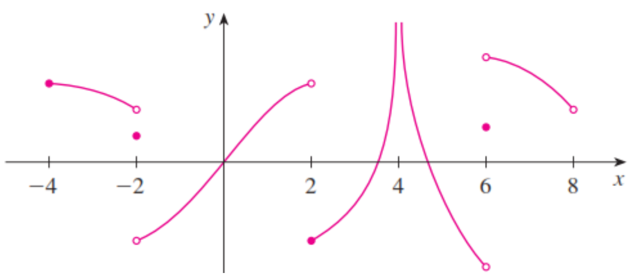
2. Nếu f liên tục trên R, bạn có thể nói gì về đồ thị của nó?

3. (a) Từ đồ thị của f, cho biết những điểm gián đoạn của f và giải thich tại sao.

(b) Tại những điểm xét trong phần (a), cho biết f có liên tục bên trái hay bên phải hay không?



4. Từ đồ thị của g, cho biết những khoảng hay đoạn trên đó f liên tục.



5. Vẽ đồ thị một hàm số liên tục mọi nơi trừ tại x = 3 nó chỉ liên tục bên trái.

6. Vẽ đồ thị một hàm số bị gián đoạn bước nhảy tại x = 2 và gián đoạng có thể dở bỏ tại x = 4, nhưng liên tục tại mọi nơi khác.

7. Một bãi đậu xe tính cước là $3 cho giờ đâu xe đầu tiên (hoặc ít hơn một giờ), và $2 cho mỗi giờ tiếp theo (hoặc ít hơn), đến tối đa là $10 trọn ngày.

(a) Hãy vẽ đồ thị của hàm số cước phí đâu xe theo thời gian.

(b) Biện luận sự gián đoạn của hàm số này và ý nghĩa của chúng đối với người đậu xe.

8. Giải thích tại sao các hàm số sau liên tục hay gián đoạn.

(a) Nhiệt độ tại một địa điểm cụ thể nào đó xem như hàm số theo thời gian.

(a) Nhiệt độ vào thời điểm nào đó xem như một hàm số theo khoảng cách từ Newyork tính theo hướng tây.

(c) Độ cao trên mặt nước biển xem như hàm số theo khoảng cách từ Newyork tính theo hướng tây.

(d) Giá cước đi taxi xem như hàm số khoảng đường đi được.

(e) Cường độ dòng điện để chiếu sáng phòng xem như hàm số theo thời gian.

9. Nếu f và g là hàm số liên tục với f(3) = 5 và $\lim_{x\to 3}$ [2f(x) – g(x)]= 4, tìm g(3).

10-12. Dùng định nghĩa của hàm số liên tục và tính chất của giới hạn để chứng tỏ hàm số liên tục tại điểm a cho trước.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{x-7}$, a = 4

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4$, a = - 1

12. $h(t) = \dfrac{2t-3t^2}{1+t^3}$, $a=1$

13-14. . Dùng định nghĩa của hàm số liên tục và tính chất của giới hạn để chứng tỏ hàm số liên tục trên khoảng cho trước.

13. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$, $(2,\infty)$

14. $g(x) = 2\sqrt{3-x}$, $(-\infty,3]$

15-20 Giải thích tại sao hàm số gián đoạn tại điểm cho trước a. Vẽ đồ thị hàm số.

15. $f(x) = \ln|x-2|$ $\quad a=2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & khi\ x \neq 1 \\ 2 & khi\ x = 1 \end{cases}$ $\quad a=1$

17. $f(x) = \begin{cases} e^x & khi\ x < 0 \\ x^2 & khi\ \geq 0 \end{cases}$ $\quad a=0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} & khi\ x \neq 1 \\ 1 & khi\ x = 1 \end{cases}$ $\quad a=1$

19. $f(x)=\begin{cases}0 & khi\ x=0\\ 1-x^2 & khi\ x>0\end{cases}$ $\quad a=0$

20. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-5x-3}{x-3} & khi\ x\neq 3\\ 6 & khi\ x=3\end{cases}$ $\quad a=3$

21-28 Giải thích, dùng Định lý 4, 5, 7, và 9, tại sao hàm số liên tục tại mỗi điểm trong tập xác định. Tìm tập xác định.

21. $F(x)=\dfrac{x}{x^2+5x+6}$ 22. $G(x)=\sqrt[3]{x}(1+x^3)$

23. $R(x)=x^2+\sqrt{2x-1}$ 24. $h(x)=\dfrac{\sin x}{x+1}$

25. $L(t)=e^{-5t}\cos 2\pi t$ 26. F(x) = $\sin^{-1}(x^2-1)$

27. G(t) = $\ln(t^4-1)$ 28. H(x) = $\cos(e^{\sqrt{x}})$

29-30. Xác định những điểm gián đoạn của hàm số và minh bằng đồ thị.

29. $y=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ 30. Y = $\ln(\tan^2 x)$

31-34. Dùng tính liên tục để tìm các giới hạn sau.

31. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$ **32.** $\lim\limits_{x\to\pi}\sin(x+\sin x)$

33. $\lim\limits_{x\to 1}e^{x^2-x}$ **34.** $\lim\limits_{x\to 2}\arctan\left(\dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)$

35-36. Chứng tỏ rằng f liên tục trên R.

35. $f(x)=\begin{cases}x^2 & khi\ x<1\\ \sqrt{x} & khi\ x\geq 1\end{cases}$

36. $f(x)=\begin{cases}\sin x & khi\ x<\pi/4\\ \cos x & khi\ x\geq\pi/4\end{cases}$

37-39. Tìm những điểm gián đoạn của f và chỉ rõ tại đó f có liên tục bên trái, bên phải hay không. Vẽ đồ thị hàm số f.

37. $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & khi\ x\leq 0\\ 2-x & khi\ 0<x\leq 2\\ (x-2)^2 & khi\ x>2\end{cases}$

39. $f(x)=\begin{cases}x+2 & khi\ x<0\\ e^x & khi\ 0\leq x\leq 1\\ 2-x & khi\ x>1\end{cases}$

40. Trọng lực của trái đất tác dụng lên một khối lượng đơn vị cách tâm trái đất một khoảng r cho bởi công thức

$$F(r)=\begin{cases}\dfrac{GMr}{R^3} & khi\ r<R\\ \dfrac{GM}{r^2} & khi\ r\geq R\end{cases}$$

trong đó M là khối lượng trái đất, R bán kính của nó, và G là hằng số trọng lực. F có phải là hàm số liên tục theo r không?

41. Với giá trị nào của hằng số c hàm số f sau đây liên tục trên R?

$$f(x)=\begin{cases}cx^2+2x & khi\ x<2\\ x^3-cx & khi\ x\geq 2\end{cases}$$

42. Tìm giá trị của a và b sao cho f dưới đây liên tục mọi nơi.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & khi\ x<2\\ ax^2-bx+3 & khi\ 2<x<3\\ 2x-a+b & khi\ x\geq 3\end{cases}$$

43. Hàm số f nào dưới đây có điểm gián đoạn dở bỏ được tại a? Nếu gián đoạn dở bỏ được, tìm hàm số g bằng với f với mọi x ≠ a và liên tục tại a.

(a) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x-1},\quad a=1$

(b) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2x}{x-2},\quad a=2$`

(c) $f(x)=[[\sin x]],\quad a=\pi$

44. Giả sử f là hàm số liên tục trên [0, 1] trừ tại điểm 0.25 và f(0) = 1 và f(1) = 3. Cho N = 2. Vẽ hai đồ thị có thể có của f, một đồ thị không thỏa kết luận của ĐL Giá Trị Trung Gian và đồ thị kia cho thấy f có thể thỏa kết luận của ĐL Giá Trị Trung Gian (ngay cả khi nó không thỏa giả thiết của ĐL).

45. Nếu f(x) = x^2 + 10 sin x, chứng tỏ rằng tồn tại số c sao cho f(c) = 1000.

46. Giả sử f liên tục trên [1, 5] và các nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = 6 là x = 1 và x = 4. Nếu f(2) = 8, giải thích tại sao f(3) > 6.

47-50. Dùng ĐLGTTG để chứng tỏ rằng các phương trình sau có nghiệm trong khoảng đã chỉ ra.

47. $x^4 + x - 3 = 0$, (1, 2)
48. $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $(0, 1)$
49. cos x = x, (0, 1)
50. ln x = e^{-x}, (1, 2)

51-52. (a) Chứng tỏ các phương trình sau có ít nhất một nghiệm thực.

(b) Dùng máy tính để tìm một khoảng có độ dài 0.01 chứa nghiệm đó.

51. cos x = x^3
52. ln x = 3 – 2x

53-54. (a) Chứng tỏ các phương trình sau có ít nhất một nghiệm thực.

(b) Dùng máy vẽ đồ thị để tìm nghiệm đúng đến ba chữ số thập phân.

53. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$
54. arctan x = 1 – x

55. Chứng tỏ rằng f liên tục tại a khi và chỉ khi

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

56. Để chứng minh hàm số sin liên tục, ta cần chứng tỏ rằng $\lim_{x\to a}$ sin x = sin a với mọi số thực a. Theo Bài tập 55, ta có phát biểu tương đương sau

$$\lim_{h\to 0} \sin(a+h) = \sin a$$

Dùng (6) để chứng tỏ rằng điều này là đúng.

57. Chứng tỏ rằng hàm số cos là hàm số liên tục.

58. (a) Chứng minh Định lý 4, phần 3.

(b) Chứng minh Định lý 4, phần 5.

59. Với giá trị nào của x thì f liên tục?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & khi\ \ x \in Q \\ 1 & khi\ x \notin Q \end{cases}$$

60. Với giá trị nào của x thì g liên tục?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & khi\ \ x \in Q \\ x & khi\ x \notin Q \end{cases}$$

61. Có số nào lớn hơn lập phương của nó đúng 1?

62. Nếu a và b là những số dương, chứng tỏ rằng phương trình

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

Có ít nhất một nghiệm trong khoảng (- 1, 1).

63. Chứng tỏ rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x) & khi\ \ x \neq 0 \\ 0 & khi\ \ x = 0 \end{cases}$$

liên tục trên R.

64. (a) Chứng tỏ rằng hàm số trị tuyệt đối F(x) = | x| liên tục mọi nơi.

(b) Chứng tỏ nếu f liên tục trên một khoảng, thì hàm số |f| cũng liên tục trên khoảng ấy.

(c) Phần đảo của (b) có đúng không? Nói cách khác, nếu |f| liên tục, thì có kéo theo f liên tục không? Nếu có, hãy chứng minh. Nếu không, hãy cho một phản ví dụ.

65. Một nhà sư Tây Tạng rời tu viện lúc 7:00 AM và đi

lên đỉnh núi theo con đường quen thuộc và đến nơi lúc 7:00 PM. Sáng hôm sau, sư khởi hành từ đỉnh lúc 7:00 AM và theo lộ trình cũ, trở lại tu việc đúng 7:00 PM. Dùng Định Lý Giá Trị Trung Gian để chỉ ra rằng có một điểm trên lộ trình mà nhà sư đi qua vào cùng một thời điểm trong hai ngày đi và về.

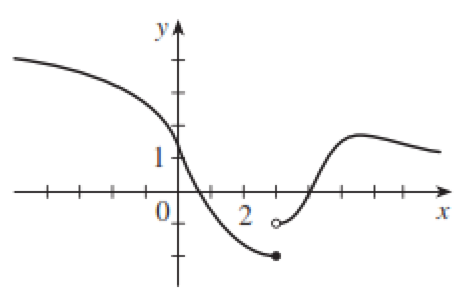
ĐÁP SỐ

1. $\lim_{x\to 4}$ f(x) = f(4)

3. (a) – 4 (dở bỏ được), - 2(bước nhảy), 2 (bước nhảy), 4 (vô hạn)

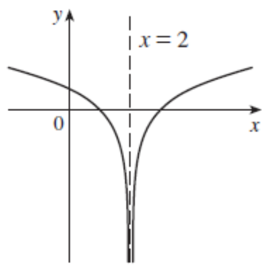
(b) – 4, không cả; - 2, trái; 2, phải; 4, phải

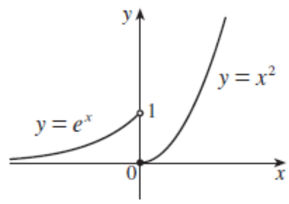
5.



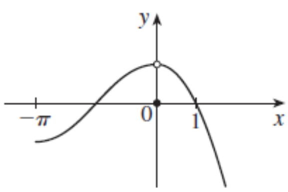
9. 6

15. f(2) không xác định **17.** $\lim_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại



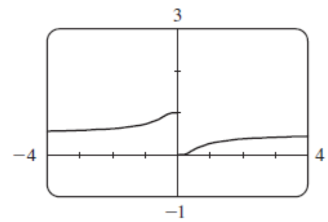


19. $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ **21.** $\{x \mid x \neq -3, -2\}$



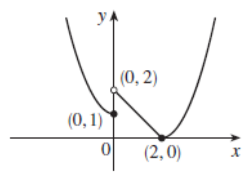
23. $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ **25.** $(-\infty, \infty)$ **27.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

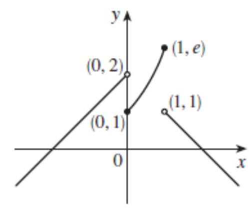
29. $x = 0$



31. $\frac{7}{3}$ **33.** 1

37. 0, left **39.** 0, right; 1, left





41. $\frac{2}{3}$ **43.** (a) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ (b) $g(x) = x^2 + x$

51. (b) (0.86, 0.87) **53.** (b) 70.347

59. None **61.** Yes

BÀI 2. 6. GIỚI HẠN Ở VÔ TẬN; TIỆM CẬN NGANG

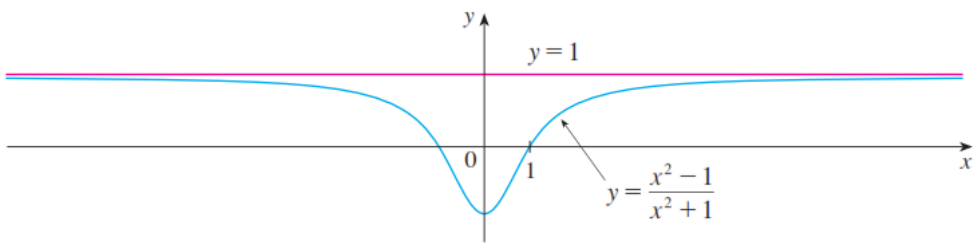
Trong bài 2.2 và 2.4 ta đã học về các giới hạn vô tận và các tiệm cận đứng. Ở đó ta cho x tiến đến một số và kết quả là những giá trị của y trở nên vô cùng lớn (dương hay âm). Trong bài này ta cho x trở nên vô cùng lớn (dương hoặc âm) và xem điều gì xảy ra.

Hãy bắt đầu bằng cách quan sát hàm số f định bởi

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

khi cho x những giá trị càng lúc càng lớn. Bảng bên trái ghi giá trị của f(x) đúng đến 6 chữ số thập phân. Đồ thị của f được vẽ bằng máy tính cho bởi hình dưới.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998



HÌNH 1

Khi x càng lớn bạn có thể thấy những giá trị của f(x) càng lúc càng tiến gần đến 1. Thật ra, có vẻ như là ta có thể làm cho giá trị của f(x) sát gần đến 1 như mong muốn bằng cách lấy x đủ lớn. Ta diễn tả sự kiện này bằng cách viết

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Tổng quát, ta dùng kí hiệu $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

để chỉ những giá trị của f(x) càng lúc càng tiến gần đến L khi x càng lớn.

> **1 ĐỊNH NGHĨA** Cho hàm số f xác định trên khoảng (a, ∞). Thế thì
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
>
> có nghĩa là những giá trị của f(x) có thể làm sát gần đến L như ý muốn bằng cách lấy x đủ lớn.

Một kí hiệu khác cho lim $_{x \to \infty}$ f(x) = L là

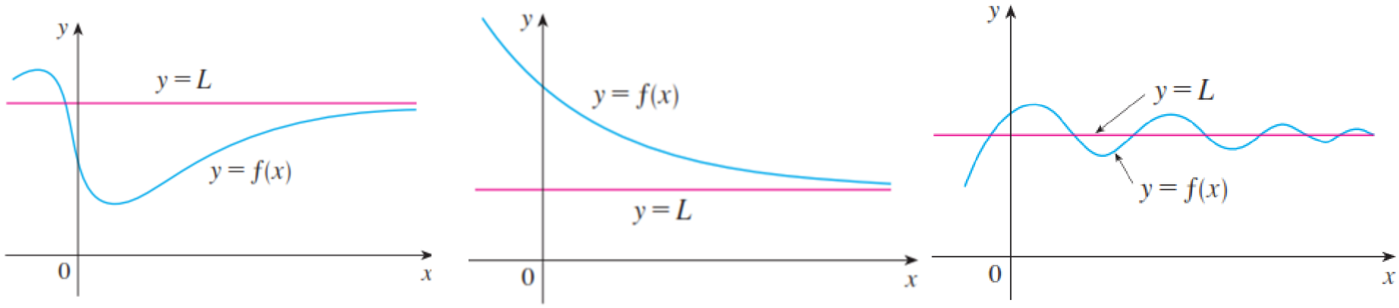
f(x) $\to$ L khi x $\to \infty$

Mặc dù kí hiệu ∞ không biểu thị một con số cụ thể, nhưng kí hiệu $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ vẫn thường được đọc là

"giới hạn của f(x) là L khi x tiến ra vô cực"

Định nghĩa chính xác hơn sử dụng ε, δ như trong Bài 2.4 được cho ở cuối bài.

Những minh họa hình học của định nghĩa 1 cho bởi các Hình 2 bên dưới. Chú ý có nhiều cách để đồ thị f tiến gần đến đường thẳng y = L (mà ta gọi là *đường tiệm cận ngang*) khi ta nhìn về phần mút bên phải của đồ thị .



HÌNH 2

Trở lại đồ thị của hàm số f ở đầu bài ta thấy những giá trị của f(x) cũng tiến gần đến 1 với những giá trị âm rất lớn của x. Bằng cách cho x giảm vô tận qua những giá trị âm ta có thể làm cho f(x) gần đến 1 như mong muốn. Ta diễn tả điều này bằng cách viết

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

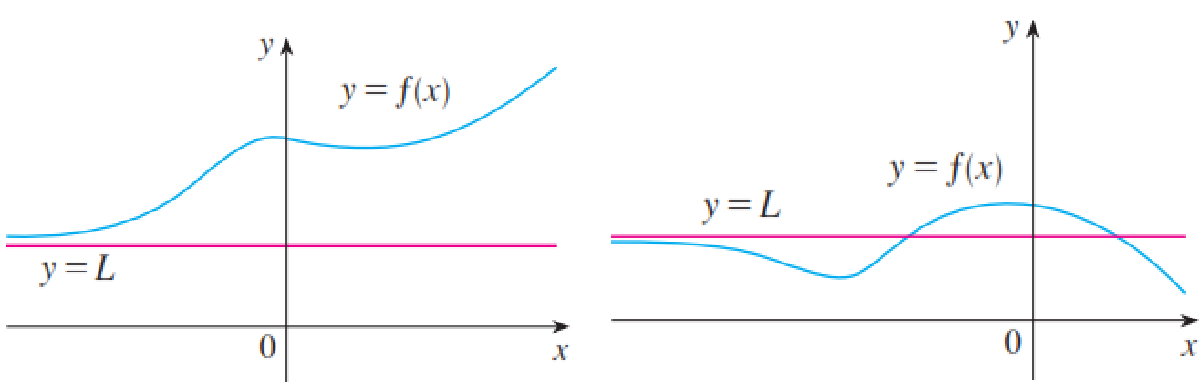
Định nghĩa tổng quát như sau

> **2 ĐỊNH NGHĨA** Cho hàm số f xác định trên khoảng (- ∞,a). Thế thì
>
> $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$
>
> có nghĩa là những giá trị của f(x) có thể làm sát gần đến L như ý muốn bằng cách lấy x âm đủ lớn.

Mặc dù kí hiệu ∞ không biểu thị một con số cụ thể, nhưng kí hiệu $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ vẫn thường được đọc là

"giới hạn của f(x) là L khi x tiến ra âm vô cực"

Định nghĩa 2 được minh họa trong các Hình 3 bên dưới . Chú ý đồ thị tiến gần đến đường thẳng y = L khi ta nhìn phần mút bên phải của đồ thị.



HÌNH 3

3 ĐỊNH NGHĨA Đường thẳng y = L gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị y = f(x) nếu

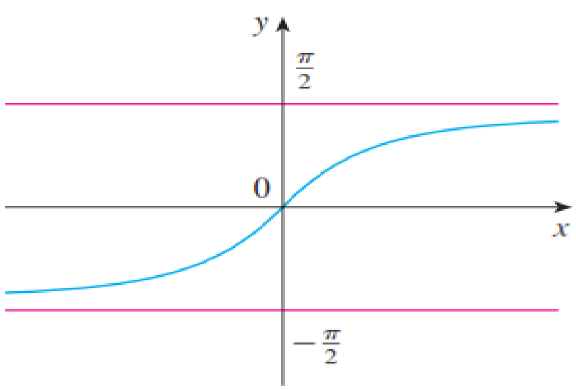
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Chẳng hạn đồ thị trong Hình 1 nhận đường thẳng y = 1 làm tiệm cận ngang vì

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

Một đồ thị có thể có hai tiệm cận ngang, chẳng hạn đồ thị của y = $\tan^{-1}x$ có hai tiệm cận ngang y = - π/2 và y = π/2 (Hình 4). Lý do là vì

4 $$\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x = \pi/2 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x = -\pi/2$$



nên y = ± π/2 là các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số y = $\tan^{-1}x$. (Điều này là kết quả của việc x = ± π/2 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số y = tanx.

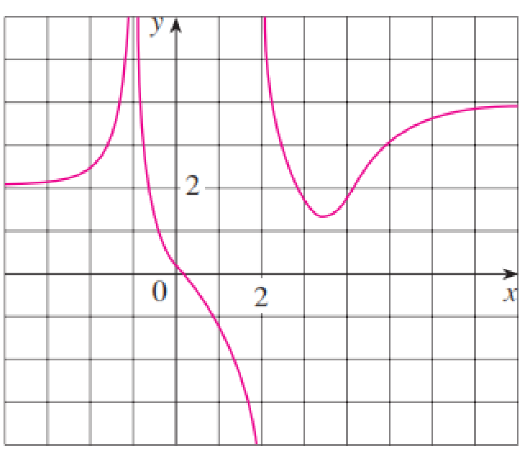
HÌNH 4

VÍ DỤ 1 Tìm các giới hạn vô tận, giới hạn ở vô tận, và các đường tiệm cận của hàm số có đồ thị cho bởi Hình 5.

GIẢI Ta thấy rằng các giá trị của f(x) trở nên lớn khi x tiến đến - 1 từ cả hai bên, vì thế

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \infty$$

Chú ý rằng f(x) trở nên lớn âm khi x tiến đến 2 từ bên trái, nhưng lớn dương khi x tiến đến 2 từ bên phải. Vì thế



$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$$

Do đó cả hai đường thẳng x = - 1 và x = 2 là tiệm cận đứng.

Khi x trở thành lớn, ta thấy f(x) tiến gần đến 4. Nhưng khi x giảm qua những giá trị âm, f(x) tiến gần đến 2. Do đó

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

Điều này có nghĩa y = 4 và y = 2 là các tiệm cận ngang của đồ thị.

HÌNH 5

VÍ DỤ 2 Tìm $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ và $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$

GIẢI Nhận xét rằng khi x lớn , thì 1/x nhỏ. Chẳng hạn

$$\frac{1}{100}=0.01 \qquad \frac{1}{10{,}000}=0.00001 \qquad \frac{1}{1{,}000{,}000}=0.000001$$

Cụ thể, bằng cách lấy x đủ lớn, ta có thể làm cho 1/x gần bằng 0 như ý muốn. Do đó theo định nghĩa 1, ta có

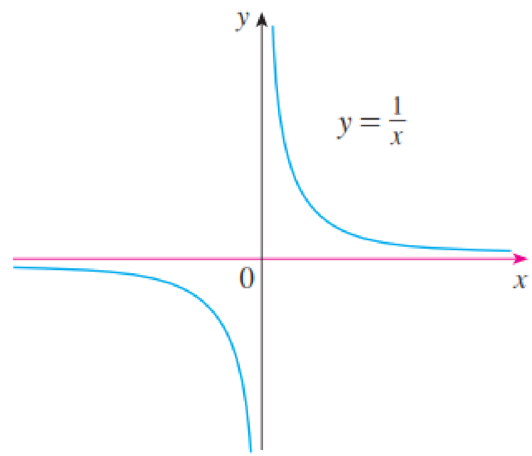
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Lý luận tương tự chứng tỏ rằng khi x lớn âm, 1/x nhỏ âm, vì thế ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$

Suy ra đường thẳng y = 0 (tức trục x) là tiệm cận ngang của đồ thị y = 1/x (Đây là một hypebol đều; xem Hình 6).

Phần lớn những Quy tắc Giới Hạn đề cập trong Bài 2.3 cũng đúng đối với những giới hạn ở vô tận. Ta có thể chứng minh rằng những Quy Tắc Giới Hạn liệt kê trong Bài 2.3 (trừ quy tắc 9 và 10) đều còn giá trị khi ta thay "x $\to$ a" bằng "x $\to\infty$" hoặc "x $\to$ - ∞). Đặc biệt, nếu ta phối hợp quy tắc 6 và 11 với kết quả của ví dụ 2, ta được quy luật quan trọng sau để tính giới hạn.



HÌNH 6

5 ĐỊNH LÍ Nếu r > 0 là một số hữu tỷ, thế thì

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

Nếu r > 0 là một số hữu tỷ sao cho x^r được xác định với mọi x, thế thì

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

VÍ DỤ 3 Tính

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$$

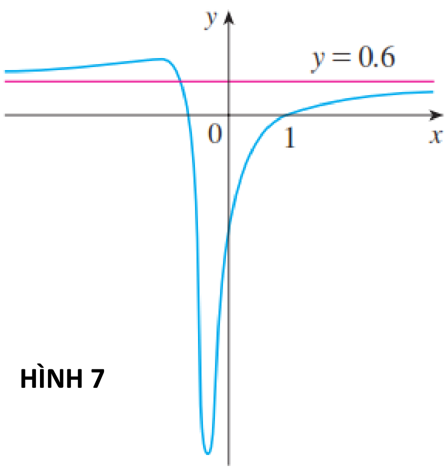
và chỉ ra tính chất giới hạn nào đã được sử dụng trong mỗi bước.

GIẢI Khi x trở thành lớn, cả tử và mẫu đều lớn, vì thế không điều gì là hiển nhiên với tỉ số của chúng. Chúng ta cần thực hiện vài phép tính đại số.

Để tính giới hạn ở vô tận của một phân thức, đầu tiên ta cần chia tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x ở mẫu. (Ta có thể giả sử x $\neq$ 0, vì ta chỉ quan tâm đến những giá trị lớn của x.). Trong ví dụ này lũy thừa có bậc cao nhất của mẫu là x^2 , vì thế ta có

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x-2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$ Quy tắc 5



HÌNH 7

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$$ Quy tắc 1, 2, và 3

$$=\frac{3-0-0}{5+0+0}$$ Quy tắc 7 và Định lý 5

= 3/5

Phép tính tương tự chứng tỏ giới hạn khi x → ∞ cũng là 3/5. Hình 7 minh họa kết quả của những phép tính trên, cho thấy đúng là đồ thị có tiệm cận ngang là y = 3/5.

VÍ DỤ 4 Tìm các tiệm cận ngang và đứng của đồ thị hàm số

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

GIẢI Chia tử và mẫu cho x và sử dụng tính chất giới hạn ta có

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}}$$ (vì $\sqrt{x^2}=x \quad khi \quad x>0$)

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}=\frac{\sqrt{2+0}}{3-0}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Do đó đường thẳng y = $\sqrt{2}$ / 3 là tiệm cận ngang của đồ thị f.

Để tính giới hạn của khi x → ∞ ta phải nhớ rằng với x < 0, ta có $\sqrt{x^2}=|x|=-x$. Do đó khi ta chia tử cho x, vì x < 0, ta được

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+1}=-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2+1}=-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

Do đó

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$==\frac{-\sqrt{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}{3-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{-\sqrt{2}}{3}$$

Do đó đường thẳng y = - $\sqrt{2}$ / 3 là tiệm cận ngang của đồ thị f.

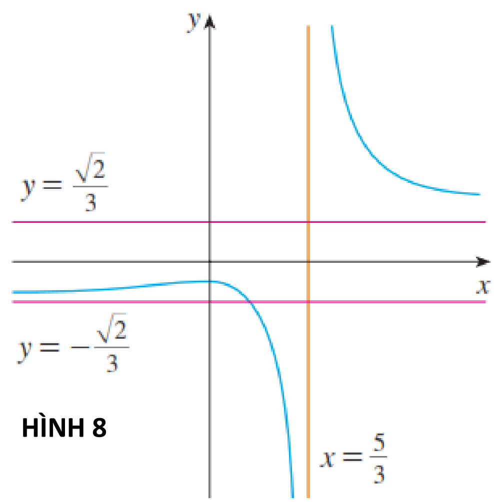
Một tiệm cận đứng xảy ra khi mẫu số 3x - 5 = 0 , đó là khi x = 5/3. Nếu x tiến sát đến 5/3 và x > 5/3, thế thì mẫu số sát đến 0 và dương. Trong khi tử số $\sqrt{2x^2+1}$ luôn dương và > 1, vì thế f(x) tiến đến dương vô cực. Thành ra

$$\lim_{x\to 5/3+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\infty$$

Nếu x sát đến 5/3 nhưng x < 5/3, thế thì 3x - 5 < 0 và do đó f(x) tiến đến âm vô cực. Thành ra

$$\lim_{x\to 5/3-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\infty$$

Tiệm cận đứng là x = 5/3. Tất cả ba tiệm cận được minh họa trong Hình 8 bên.



HÌNH 8

VÍ DỤ 5 Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

GIẢI Vì cả $\sqrt{x^2+1}$ và x đều lớn khi x lớn, thật khó biết điều gì xảy ra với hiệu của chúng, vì thế trước tiên ta phải biến đổi đại số chút ít. Nhân và chia biểu thức cho lượng liên hiệp của nó, ta được

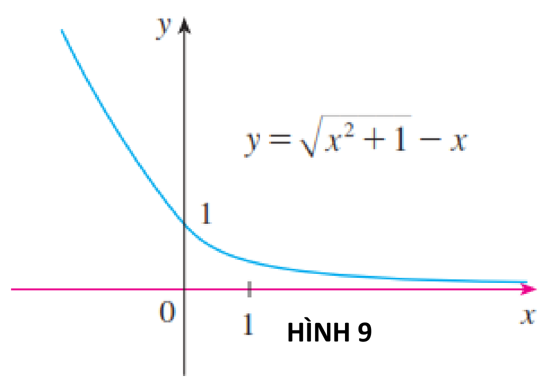
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Có thể sử dụng Định Lý Kẹp Giữa để chứng tỏ giới hạn này bằng 0. Nhưng phương pháp dễ hơn là chia tử và mẫu cho x, sử dụng quy tắc giới hạn, ta có

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

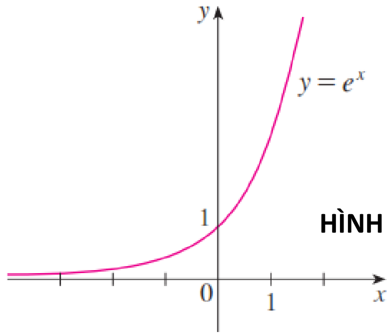


HÌNH 9

Hình 9 minh họa kết quả này.

Đồ thị của hàm số y = e^x có đường y = 0 (trục hoành) là tiệm cận ngang. (Điều này cũng đúng đối với hàm số mũ với cơ số bất kỳ a > 1.) Cụ thể, từ đồ thị trong hình dưới và bảng giá trị bên cạnh, ta thấy rằng

6 $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0}$$



HÌNH 10

x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

Chú ý rằng giá trị của e^x tiến đến 0 rất nhanh.

VÍ DỤ 6 Tính $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$

GIẢI Nếu ta đặt t = 1/x, ta biết rằng t tiến đến - ∞ khi x tiến đến 0^-. Do đó, theo (6)

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{x\to-\infty} e^t = 0.\quad \text{(Xem Bài tập 71)}$$

VÍ DỤ 7 Tính $\lim_{x\to\infty} \sin x$

GIẢI Khi x tăng, các giá trị của sinx dao động giữa 1 và - 1 vô số lần và vì thế chúng không tiến gần đến bất kỳ một số nhất định nào. Do đó $\lim_{x\to\infty}$ sin x không tồn tại.

GIỚI HẠN VÔ TẬN Ở VÔ TẬN

Kí hiệu $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

được dùng để chỉ là những giá trị của f(x) trở thành lớn khi x trở thành lớn . Ý nghĩa tương tự được gán cho những kí hiệu sau:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

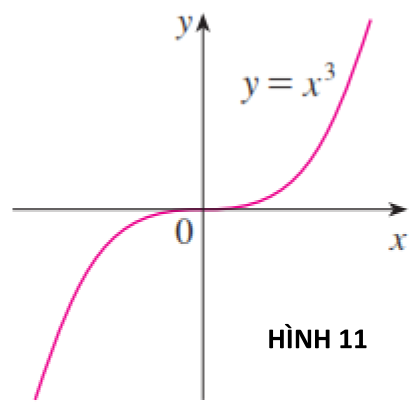
VÍ DỤ 8 Tìm $\lim_{x\to\infty} x^3$ và $\lim_{x\to-\infty} x^3$

GIẢI Khi x trở thành lớn, x^3 cũng trở thành lớn. Chẳng hạn

$10^3 = 1000 \qquad 100^3 = 1{,}000{,}000 \qquad 1000^3 = 1{,}000{,}000{,}000$

Thật ra, ta có thể làm x^3 lớn tùy ý bằng cách cho x những giá trị đủ lớn. Do đó ta có thể viết

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

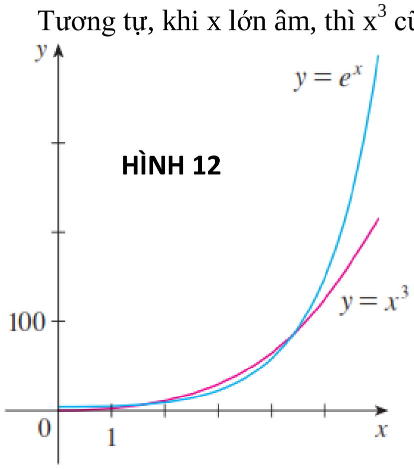


HÌNH 11

Tương tự, khi x lớn âm, thì x^3 cũng vậy. Do đó

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Những phát biểu về giới hạn này cũng có thể được nhìn thấy từ đồ thị hàm số y = x^3 ở Hình 11 trên.



HÌNH 12

Nhìn Hình 12 vẽ đồ thị hàm số y = e^x và y = x^3 ta thấy rằng dù

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

nhưng y = e^x tiến ra vô hạn nhanh hơn y = x^3 nhiều.

VÍ DỤ 9 Tìm $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x)$

GIẢI Viết như thế này là sai

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty$$

Các quy tắc giới hạn không thể áp dụng cho những giới hạn vô tận vì ∞ không phải là một số (∞ - ∞ do đó không có nghĩa). Tuy nhiên, ta có thể viết

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x-1) = \infty$$

vì cả x và x - 1 đều trở thành vô cùng lớn và do đó tích của chúng cũng thế.

VÍ DỤ 10 Tìm $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{3-x}$

GIẢI Như trong ví dụ 3, ta chia tử và mẫu cho lũy thừa của x có bậc cao nhất ở mẫu, ở đây chính là x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\frac{3}{x}-1} = -\infty$$

vì x + 1 → ∞ và 3/x - 1 → - 1 khi x → ∞.

Ví dụ sau cho thấy bằng cách dùng những giới hạn vô tận ở vô tận, cùng với các giao điểm với hai trục, ta có thể phác họa được đồ thị của đa thức mà không cần phải vẽ nhiều điểm.

VÍ DỤ 11 Vẽ đồ thị hàm số $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ bằng cách tìm những giao điểm với hai trục và những giới hạn khi x → ∞ và khi x → - ∞.

GIẢI Giao điểm với trục tung là $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ và những giao điểm với trục hoành có được bằng cách cho y = 0: x = 2, - 1, 1. Chú ý là $(x - 2)^4$ dương, hàm số không đổi dấu khi x qua giá trị 2; do đó đồ thị không xuyên qua trục hoành tại 2. Đồ thị đi xuyên qua trục hoành tại - 1 và 1.

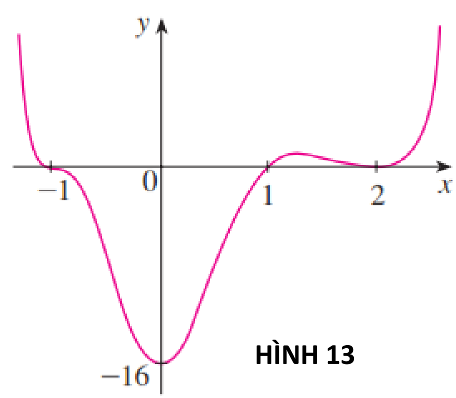
Khi x dương lớn, cả ba nhân tử đều dương lớn, do đó

$$\lim_{x\to\infty}(x-2)^4(x+1)^3(x-1) = \infty$$

Khi x âm lớn, nhân tử đầu dương lớn và nhân tử thứ hai và thứ ba đều âm lớn, do đó

$$\lim_{x\to-\infty}(x-2)^4(x+1)^3(x-1) = \infty$$

Phối hợp các thông tin này, ta phác họa được đồ thị như Hình 13 bên.



HÌNH 13

Ví dụ sau cho thấy bằng cách dùng những giới hạn vô tận ở vô tận, cùng với các giao điểm với hai trục, ta có thể phác họa được đồ thị của đa thức mà không cần phải vẽ nhiều điểm.

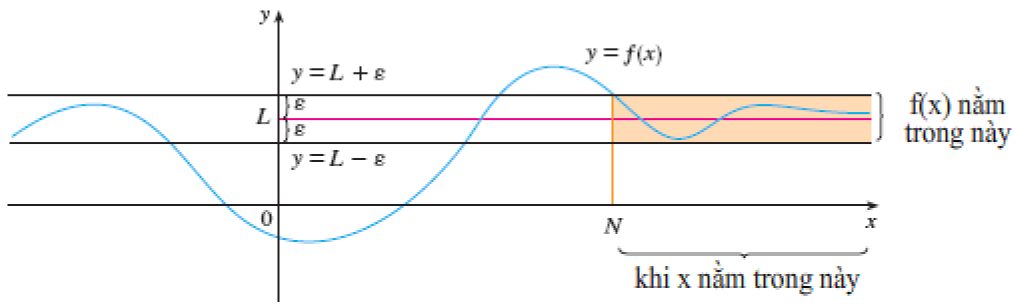
ĐỊNH NGHĨA CHÍNH XÁC

Định nghĩa 1 có thể được phát biểu chính xác như sau

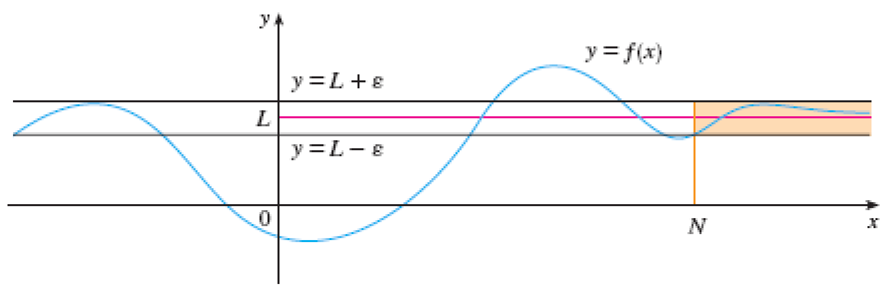
> **7 ĐINH NGHĨA** Cho f hàm số xác định trên khoảng (a, ∞). Thế thì
>
> $$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$
>
> có nghĩa là với mọi ε > 0 cho trước ta tìm được số N sao cho
>
> nếu x > N thì |f(x) - L| < ε

Nói cách khác, điều này có nghĩa là có thể làm f(x) sát gần L (trong khoảng cách ε, trong đó ε là một số dương bất kỳ) bằng cách lấy x đủ lớn (lớn hơn N, trong đó N phụ thuộc vào ε). Về đồ thị, điều này có nghĩa là bằng cách chọn x đủ lớn (lớn hơn số N) ta có thể làm đồ thị của f nằm giữa những đường thẳng nằm ngang cho trước y = L - ε và y = L + ε như trong Hình 14 dưới. Điều này vẫn đúng dù ta chọn ε nhỏ thế nào đi chăng nữa. Hình 15 dưới tiếp theo cho thấy nếu ta chọn ε nhỏ hơn, thì phải lấy một số N lớn hơn.

HÌNH 14

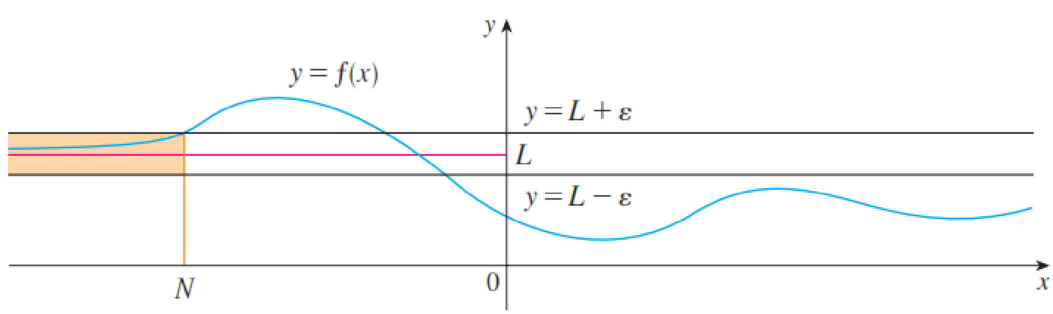


HÌNH 15



Tương tự, định nghĩa 2 có thể phát biểu lại chính xác như sau:

> **8 ĐỊNH NGHĨA** Cho f hàm số xác định trên khoảng (- ∞, a). Thế thì
>
> $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$
>
> có nghĩa là với mọi ε > 0 cho trước ta tìm được số N sao cho
>
> nếu x < N thì |f(x) - L| < ε



HÌNH 16

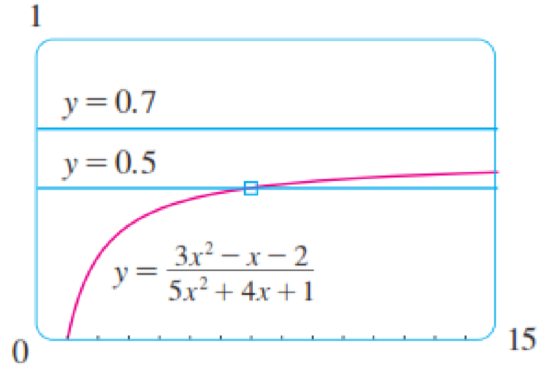
Trong Ví dụ 3 ta đã tính được

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\frac{3}{5}$$

Trong ví dụ tiếp theo ta sẽ dùng máy tính để liên hệ kết quả này với Định nghĩa 7 ứng với L = 3/5 và ε = 0.1

VÍ DỤ 12 Dùng đồ thị để tìm một số N sao cho

$$\text{nếu } x > N \quad \text{thì} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x\ \ + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$



GIẢI VIết lại bất đẳng thức cho thành

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

HÌNH 17

Ta cần xác định những giá trị của x sao cho phần đường cong tương ứng nằm giữa các đường nằm ngang y = 0.5 và y = 0.7. Muốn thế, ta vẽ đồ thị (bằng máy) và những đường này như trong Hình 17. Sau đó dùng con trỏ để xác định hoành độ giao điểm của đường cong với đường y = 0.5 là x ≈ 6.7. Ở bên phải số này đường cong luôn nằm giữa các đường y = 0.5 và y = 0.7. Làm tròn để được an toàn, ta có thể nói

$$\text{nếu} \quad x > 7 \quad \text{thì} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x\ \ + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

Nói cách khác, với ε - 0.1 ta có thể chọn N = 7 (hay bất kỳ số nào lớn hơn) trong Định nghĩa 7.

VÍ DỤ 13 Dùng Định nghĩa 7 để chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

GIẢI Cho trước ε > 0, ta muốn tìm số N sao cho

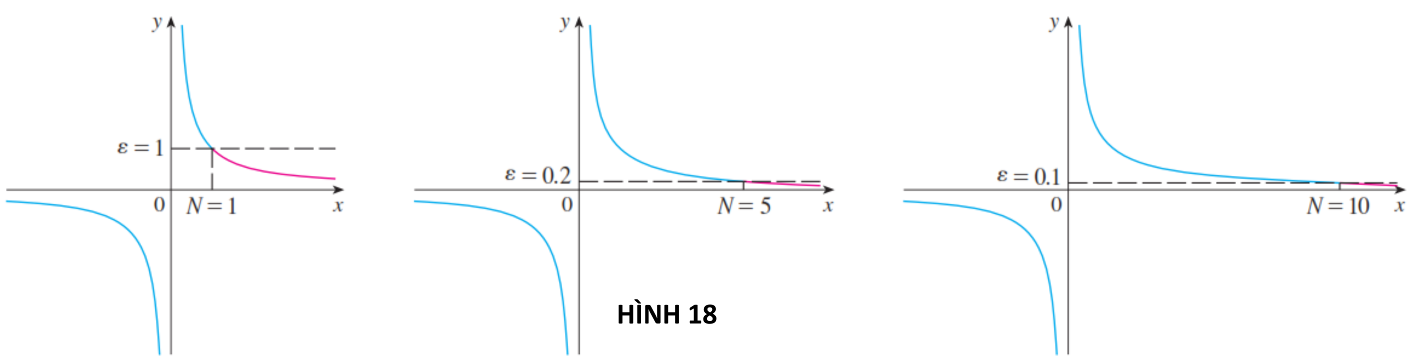
$$\text{nếu} \quad x > N \quad \text{thì} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Vì xét x → ∞, ta có thể giả định x > 0. Như vậy 1/x < ε ⇔ x > 1/ε. Hãy chọn N = 1/ε, ta có

$$\text{nếu} \quad x > N = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{thì} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

Do đó theo Đinh nghĩa 7, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Hình 18 minh họa kết quả này bằng cách đưa ra vài giá trị của ε và giá trị tương ứng của N.



HÌNH 18

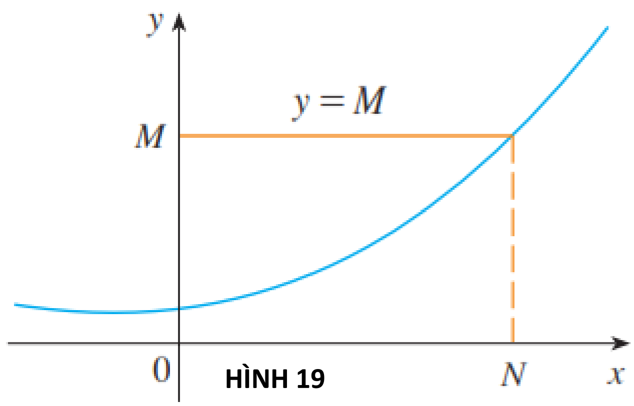
Cuối cùng ta cần chú ý là một giới hạn vô tận ở vô tận có thể được định nghĩa như sau. Minh họa hình học được cho trong Hình 19.

9 ĐINH NGHĨA Cho f hàm số xác định trên khoảng (a, ∞). Thế thì

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

có nghĩa là với mọi số dương M cho trước ta tìm được số dương N tương ứng sao cho

nếu x > N thì f(x) > M



HÌNH 19

Ta có các định nghĩa tương tự khi thay ∞ bằng - ∞. (Xem Bài tập 70.)

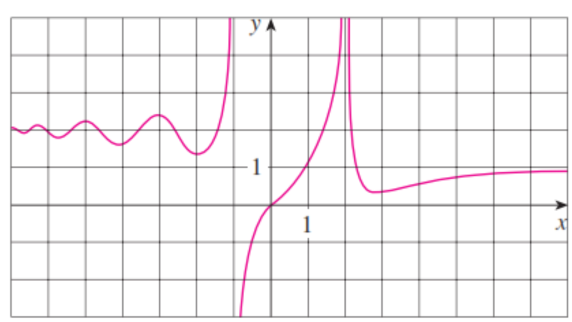
BÀI TẬP

1. Giải thích bằng lời lẽ riêng của bạn ý nghĩa của các phát biểu sau.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2. (a) Đồ thị y = f(x) có thể cắt đường tiệm cận đứng không? Có thể cắt đường tiệm cận ngang không? Minh họa bằng cách vẽ đồ thị.

(b) Một đồ thị y = f(x) có thể có bao nhiêu đường tiệm cận ngang? Vẽ đồ thị để minh họa trả lời của bạn.



3. Với đồ thị f cho bên dưới, tìm .

(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1-} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 1+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

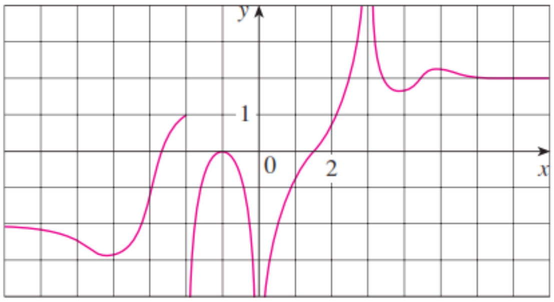
(e) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (e) phương trình các tiệm cận

4. Với đồ thị g cho bên dưới, tìm .

(a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(e) $\lim_{x\to 2+} f(x)$ (e) phương trình các tiệm cận



5-10. Vẽ đồ thị của một hàm số tùy chọn thỏa mãn tất cả các điều kiện cho trước.

5. f(0) = 0, f(1) = 1, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, f lẻ

6. $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$

7. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$,
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -3$

9. $f(0) = 3$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$,
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \infty$,
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$

10. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f is even

11. Dự đoán giá trị của giới hạn

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2^x}$$

bằng cách tính các giá trị của hàm số f(x) = $x^2 / 2^x$ với x 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50, và 100. Rồi dùng đồ thị hàm số vẽ bằng máy tính để xem bạn dự đoán đúng hay sai?

12. (a) Dùng đồ thị hàm số $f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

Để ước tính giá trị của giới hạn lim $_{x \to \infty}$ f(x) đúng đến hai chữ số thập phân.

(b) Dùng bảng giá trị của f(x) để ước rính giới hạn đúng đến bốn chữ số thập phân.

13-14. Tìm các giới hạn và chỉ ra những tính chất gì bạn sử dụng trong mỗi bước.

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$ 14. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15-36. Tìm các giới hạn sau.

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2x + 3}$ **16.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$ **18.** $\lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$ **20.** $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1}$

21. $\lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{4u^4 + 5}{(u^2 - 2)(2u^2 - 1)}$ **22.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$ **24.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$ **26.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$

29. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$ **30.** $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 1}$

31. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + x^5)$ **32.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 2x + 3}{5 - 2x^2}$

33. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$ **34.** $\lim\limits_{x \to \infty} \tan^{-1}(x^2 - x^4)$

35. $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{-2x} \cos x)$ **36.** $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^+} e^{\tan x}$

37. (a) Ước tính giới hạn

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

bằng cách vẽ đồ thị hàm số f(x) = $\sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

(b) Dùng bảng giá trị của f(x) để dự đoán giới hạn.

(c) Chứng tỏ dự đoán của bạn là đúng.

38. (a) Dùng đồ thị hàm số

f(x) = $\sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ để ước tính giới hạn lim $_{x \to \infty}$ f(x) đến một chữ số thập phân.

(b) Dùng bảng giá trị của f(x) để ước tính giới hạn đến bốn chữ số thập phân.

(c) Tìm giá trị chính xác của giới hạn.

39-44. Tìm tiệm cận đứng và ngang của mỗi đường cong sau. Nếu bạn có máy tính vẽ, hãy dùng nó để kiểm tra kết quả bạn làm.

39. $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$

40. $y = \dfrac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$

41. $y = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2+x-2}$

42. $y = \dfrac{1+x^4}{x^2-x^4}$

43. $y = \dfrac{x^3-x}{x^2-6x+5}$

44. $y = \dfrac{2e^x}{e^x-5}$

45. Ước tính tiệm cận ngang của hàm số

$$f(x) = \frac{3x^3+500x^2}{x^3+500x^2+100x+2000}$$

bằng cách vẽ đồ thị của f với $-10 \le x \le 10$. Sau đó tìm lại phương trình tiệm cận ngang bằng phép tính giới hạn. Bạn giải thích sao khia hai kết quả không khớp nhau?

46. (a) Vẽ đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Bạn thấy có bao nhiêu tiệm cận ngang và dọc? Dùng đồ thị để ước tính giá trị của giới hạn sau

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} \quad \text{và} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

(b) Bằng cách tính những giá trị của f(x), ước tính các giới hạn trong phần (a).

(c) Tính giá trị chính xác của giới hạn trong phần (a). Bạn thu được kết quả giống hay khác cho hai giới hạn này ?

47. Tìm một công thức cho một hàm số f thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

48. Tìm một công thức cho hàm số có tiệm cận đứng x = 1 và x = 3 và tiệm cận ngang y = 1.

49-52. Tìm các giới hạn khi $x \to \infty$ và khi $x \to -\infty$. Dùng thông tin này cùng với các giao điểm với hai trục, để phác họa nên đồ thị thô của hàm số như trong Ví dụ 11.

49. $y = x^4 - x^6$

50. $y = x^3(x+2)^2(x-1)$

51. $y = (3-x)(1+x)^2(1-x)^4$

52. $y = x^2(x^2-1)^2(x+2)$

53. (a) Dùng Định Lý Kẹp Giữa để tính $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

(b) Vẽ đồ thị f(x) = (sin x)/x. Đồ thị cắt đường tiệm cận bao nhiều lần?

54. Ta gọi *ứng xử sau rốt* của một hàm số là ứng xử của những giá trị của nó khi $x \to \infty$ hay khi $x \to -\infty$.

(a) Mô tả và so sánh ứng xử sau rốt của các hàm số

$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$

Bằng cách vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng một khung hình có kích thước lần lượt [- 2, 2] x [- 2, 2] và [-10, 10] x [- 10,000, 10,000].

(b) Hai hàm số được gọi là có cùng cách ứng xử sau rốt nếu tỷ số của chúng tiến đến 1 khi $x \to \infty$. Chứng tỏ rằng P và Q có cùng ứng xử sau rốt.

55. Cho P và Q là hai đa thức. Tìm

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

nếu bậc của P

(a) nhỏ hơn bậc của Q

(b) lớn hơn bậc của Q.

56. Vẽ phác họa đường cong $y = x^n$ (n nguyên) trong 5 trường hợp sau

(i) n = 0 (ii) n > 0, n lẻ

(iii) n > 0, n chẵn (iv) n < 0, n lẻ

(v) n < 0, n chẵn

Rồi dùng các phác họa này để tìm các giới hạn sau

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^n$ (b) $\lim\limits_{x\to 0-} x^n$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$

57. Tìm $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nếu, với mọi x > 1,

$$\frac{10e^x-21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

58. (a) Một bình chứa 5000 L nước ngọt. Bơm nước biển chứa 30 g muối mỗi lít vào bình với lưu lương 25 L/phút. Chứng tỏ rằng nồng độ muối sau t phút (tính bằng gram mỗi lít) là

$$C(t) = \frac{30t}{200+t}$$

(b) Điều gì xảy ra với nồng độ khi $t \to \infty$?

59. Trong Chương 9 ta có thể chứng minh minh được, dưới một số giả định nào đó, vận tốc v(t) của giọt nước mưa rơi tại thời điểm t là

$$v(t) = v^* (1 - e^{-gt/v^*})$$

trong đó g là gia tốc trọng trường và v* là *vận tốc cuối* của giọt mưa.

(a) Tìm $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

(b) Vẽ đồ thị v(t) nếu v* = 1 m/s và g = 9.8 m/s^2. Trong bao lâu vận tốc giọt mưa đạt đến 99% tốc độ cuối của nó?

60. (a) Bằng cách vẽ đồ thị hàm số $y = e^{-x/10}$ và y = 0.1 trên cùng một khung hình, hãy cho biết bạn cần làm x lớn cỡ nào để được $e^{-x/10} < 0.1$?

(b) Bạn có thể giải phần (a) mà không dùng đến máy vẽ được không?

61. Dùng đồ thị để tìm số N sao cho

nếu x > N thì $\left|\dfrac{3x^2+1}{2x^2+x+1} - 1.5\right| < 0.05$

62. Đối với giới hạn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1} = 2$$

dùng đồ thị, hãy minh họa Định nghĩa 7 bằng cách tìm những giá trị của N tương ứng với ε = 0.5 và ε = 0.1.

63. Đối với giới hạn $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1} = -2$

dùng đồ thị, hãy minh họa Định nghĩa 8 bằng cách tìm những giá trị của N tương ứng với ε = 0.5 và ε = 0.1.

64. Đối với giới hạn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

dùng đồ thị, hãy minh họa Định nghĩa 9 bằng cách tìm những giá trị của N tương ứng với M = 100.

65. (a) Ta phải lấy x lớn cỡ nào để $1/x^2 < 0.0001$?

(b) Bằng cách lấy r = 2 trong Định lý 5, ta có phát biểu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Dùng Định nghĩa 7, chứng minh điều này một cách trực tiếp.

66. (a) Ta phải lấy x lớn cỡ nào để $1/\sqrt{x} < 0.0001$?

(b) Bằng cách lấy r = 1/2 trong Định lý 5, ta có phát biểu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Dùng Định nghĩa 7, chứng minh điều này một cách trực tiếp.

67. Dùng Định nghĩa 8 để chứng minh $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

68. Dùng Định nghĩa 9 để chứng minh $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3 = 0$.

69. Dùng Định nghĩa 9 để chứng minh $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

70. Hãy đưa ra một định nghĩa chính xác của

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Rồi dùng định nghĩa này để chứng minh

$$\lim_{x\to-\infty} (1+x^3) = -\infty$$

71. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0+} f(1/t)$$

và $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to 0-} f(1/t)$$

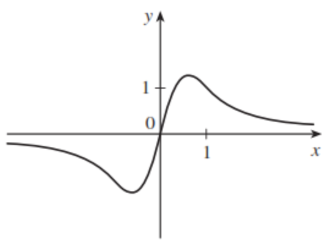
nếu những giới hạn này tồn tại.

ĐÁP SỐ

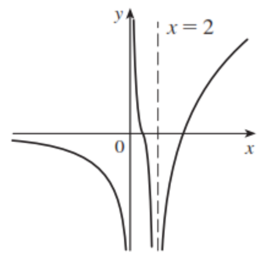
1. (a) Khi x tiến ra vô cực, f(x) tiến đến 5.
(b) Khi x tiến ra âm vô cực, f(x) tiến đến 3.

3. (a) ∞ (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) 1 (e) 2
(f) $x = -1, x = 2, y = 1, y = 2$

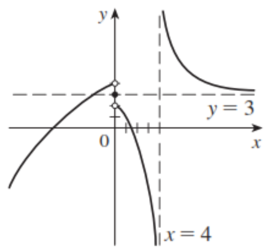
5.



7.

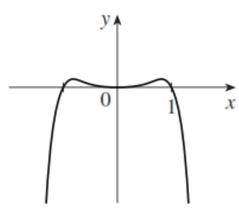


9.

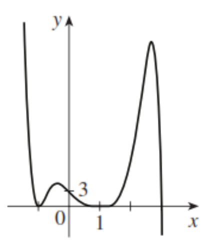


11. 0 **13.** $\frac{3}{2}$ **15.** 0 **17.** $-\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** 2

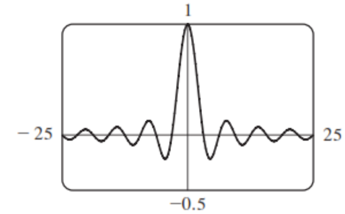
23. 3 **25.** $\frac{1}{6}$ **27.** $\frac{1}{2}(a - b)$ **29.** ∞ **31.** $-\infty$
33. $-\frac{1}{2}$ **35.** 0 **37.** (a), (b) $-\frac{1}{2}$ **39.** $y = 2; x = 2$
41. $y = 2; x = -2, x = 1$ **43.** $x = 5$ **45.** $y = 3$
47. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2(x - 3)}$
49. $-\infty, -\infty$



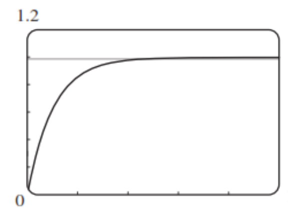
51. $-\infty, \infty$



53. (a) 0 (b) vô số lần



55. (a) 0 (b) $\pm\infty$ **57.** 5
59. (a) v^* (b) ≈ 0.47 s



61. $N \geqslant 15$ **63.** $N \leqslant -6, N \leqslant -22$ **65.** (a) $x > 100$

BÀI 2. 7. ĐẠO HÀM VÀ TỐC ĐỘ BIẾN THIÊN

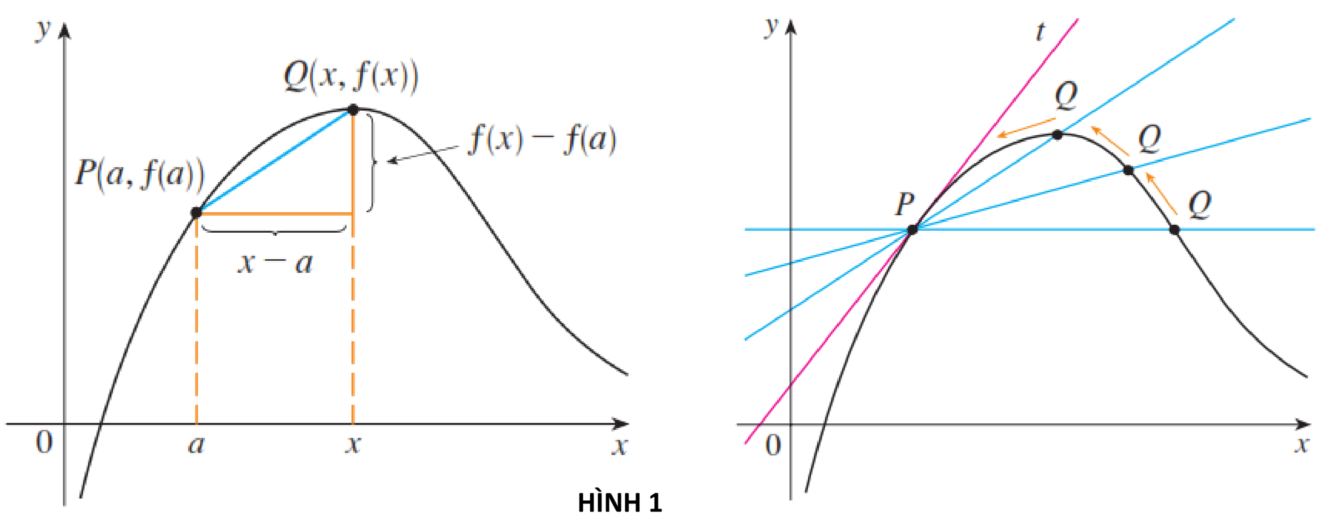
Bài toán tìm tiếp tuyến của một đường cong và bài toán tìm vận tốc của một vật thể cả hai đều liên quan đến cùng một loại giới hạn, như ta đã xét trong bài 2.1. Loại giới hạn đặc biệt này được gọi là đạo hàm và ta sẽ thấy rằng nó có thể được giải thích như là vận tốc biến thiên trong bất kỳ ngành khoa học kỹ thuật nào.

TIẾP TUYẾN

Nếu một đường cong C có phương trình f(x) = 0 và ta muốn tìm tiếp tuyến với C tại điểm P(a, f(a)), thì ta sẽ xét một điểm Q(x, f(x)) gần đó, với x ≠ a , và tính độ dốc của cát tuyến PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Thế thì để Q tiến đến P dọc theo đường cong C bằng cách cho x tiến đến a. Nếu m_{PQ} tiến đến một số m , thì ta định nghĩa **tiếp tuyến** t là đường thẳng qua P và có độ dốc m. (Điều này có nghĩa là tiếp tuyến là vị trí giới hạn của cát tuyến PQ khi Q tiến đến P. (Xem Hình 1.)



HÌNH 1

> **1. ĐỊNH NGHĨA** Tiếp tuyến với đường cong y = f(x) tại điểm P(a, f(a)) là đường thẳng qua P với độ dốc
>
> $$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> với điều kiện là giới hạn này tồn tại.

Trong ví dụ đầu tiên ta xác nhận sự tiên đoán mà ta đã thực hiện trong Ví dụ 1 bài 2.1.

VÍ DỤ 1 Tìm phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tai điểm P(1, 1).

GIẢI Ở đây ta có a = 1 và $f(x) = x^2$, do đó độ dốc là

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

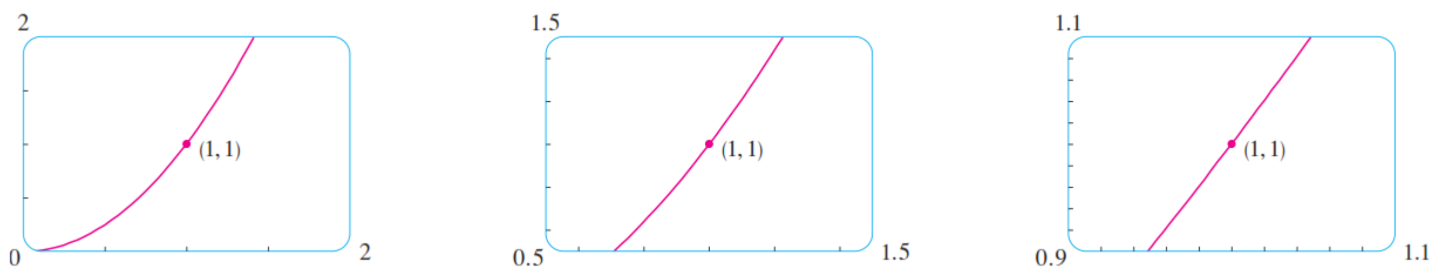
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

Biết rằng phương trình đường thẳng qua điểm (x_o, y_o) và có hệ số góc m là $y - y_o = m(x - x_0)$, do đó phương trình tiếp tuyến tại điểm (1, 1) cần tìm là:

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{hay} \quad y = 2x - 1$$

Ta đôi khi gọi độ dốc của tiếp tuyến tại một điểm là độ dốc của đường cong tại điểm đó. Lý do là nếu ta zoom hình vẽ vào sát điểm ấy, đường cong trông như một đường thẳng. Hình 2 dưới minh họa tình trạng này với đường cong $y = x^2$ trong Ví dụ 1. Ta càng zoom sát vào, parabol càng trông giống một đường thẳng. Nói cách khác, đường cong càng lúc càng không thể phân biệt với đường tiếp tuyến.



HÌNH 2

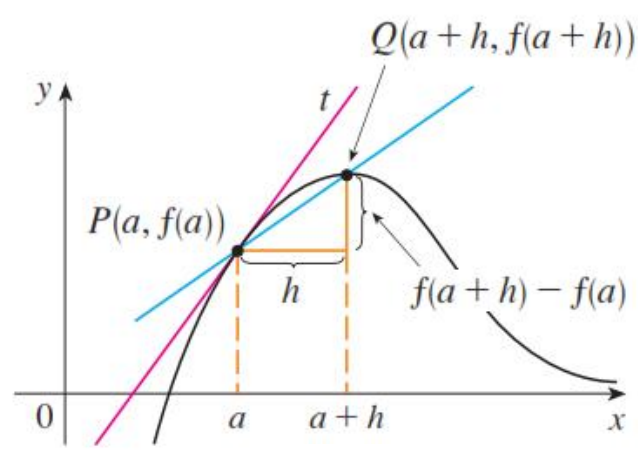
Có một biểu thức khác để tính độ dốc của tiếp tuyến đôi khi rất tiện dụng. Nếu đặt h = x - a, thì x = a + h thì độ dốc của cát tuyến PQ là

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(Xem Hình 3 bên ứng với h > 0 và Q ở bên phải P. Nếu h < 0 thì Q sẽ ở bên trái P.)

Chú ý rằng khi x tiến đến a, h tiến đến 0 (vì h = x - a) và suy ra biểu thức độ dốc của tiếp tuyến trong Định nghĩa 1 trở thành

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \qquad (2)$$



HÌNH 3

VÍ DỤ 2 Tìm phương trình tiếp tuyến của hypebol y = 3/x tại điểm (3, 1).

GIẢI Đặt f(x) = 3/x. Thế thì độ dốc của tiếp tuyến tại điểm (3, 1) là

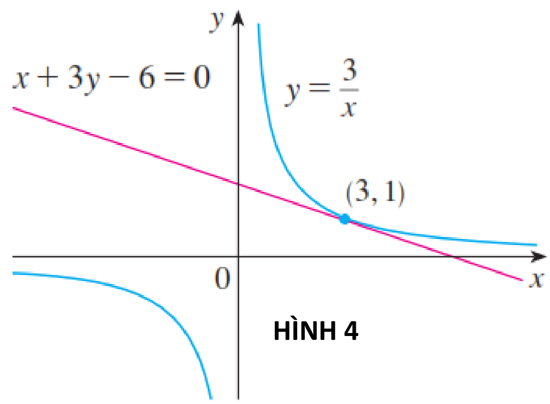
$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3}{3+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(3+h)} = -\frac{1}{3}$$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại điểm (3, 1) là

$$y - 1 = -1/3.\,(x - 3) \quad \text{hay} \quad x + 3y - 6 = 0$$

Hypebol và tiếp tuyến được minh họa trong Hình 4.



HÌNH 4

<u>VẬN TỐC</u>

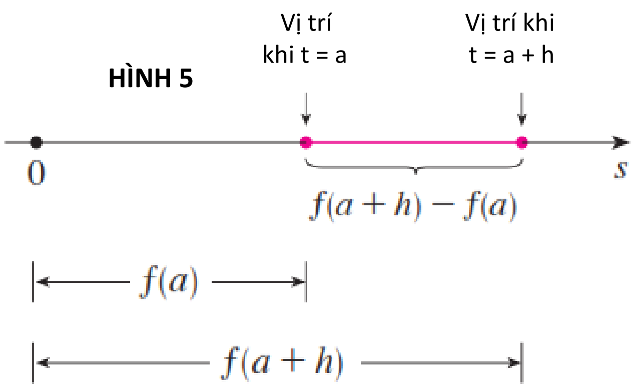
Trong bài 2.1 ta đã khảo sát chuyển động của một quả bóng khi nó rơi từ tháp cao và xác định vận tốc của nó bằng cách lấy giới hạn những vận tốc trung bình giữa hai thời điểm càng lúc càng gần nhau.

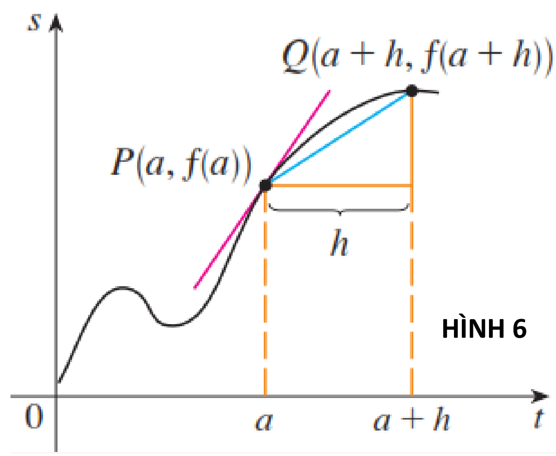
Tổng quát, giải sử một vật thể chuyển động trên một đường thẳng với phương trình chuyển động là s = f(t), trong đó s là vị trí của vật đối với điểm gốc tại thời điểm t. Hàm số f mô tả chuyển động gọi là **hàm số vị trí** của vật thể. Trong khoảng thời gian từ t = a đến t = a + h, sự thay đổi vị trí là f(a + h) - f(a) . Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian này là

$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{\text{quãng đường}}{\text{thời gian}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

cũng chính là độ dốc của cát tuyến PQ trong hình bên.

HÌNH 5





HÌNH 6

Giờ giả sử ta tính các vận tốc trung bình trong những khoảng thời gian càng lúc càng ngắn [a, a + h]. Nói cách khác, ta cho h tiến đến 0. Như trong ví dụ quả bóng rơi, ta định nghĩa vận tốc (tốc đô tức thời) v(a) ở thời điểm t = a chính là giới hạn của vận tốc trung bình

3 $$\boxed{v(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Điều này có nghĩa vận tốc (vận tốc tức thời) tại thời điểm t = a thì bằng độ dốc của tiếp tuyến tại P (so sánh phương trình 2 và 3).

Giờ sau khi đã biết tìm giới hạn, ta hãy xét lại bài toán quả bóng rơi.

VÍ DỤ 3 Giả sử quả bóng rơi từ tháp cao 450 m cách mặt đất.

(a) Tìm vận tốc rơi sau 5 giây.
(b) Tìm vận tốc khi quả bóng chạm đất.

GIẢI Trước hết ta sẽ tìm vận tốc tại thời điểm tổng quát t = a. Sử dụng phương trình chuyển động $s = f(t) = 4.9t^2$, ta có

$$v(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4.9(a+h)^2-4.9(a)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4.9(a^2+2ah+h^2-a^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4.9(2ah+h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}4.9(2a+h) = 9.8a$$

(a) Vận tốc sau 5 giây là v(5) = (9.8)(5) = 49m/s.
(b) Quả bóng chạm mặt đất khi nó đã đi một quảng đường 450m tại thời điểm t_1 thỏa $s(t_1) = 450$, nghĩa là

$$4.9t_1^2 = 450 \iff t_1^2 = \frac{450}{4.9}$$

$$\iff t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là

$$v(t) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

ĐẠO HÀM

Ta thấy rằng cùng một dạng giới hạn xuất hiện khi tìm độ dốc của tiếp tuyến hay vận tốc của vật thể. Thật ra, giới hạn dạng

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

xuất hiện bất cứ khi nào ta tính vận tốc biến thiên trong bất kỳ ngành khoa học hoặc kỹ thuật, như vận tốc phản ứng trong hóa học hoặc giá lề (marginal) trong kinh tế học. Vì dạng giới hạn này xảy ra quá phổ biến, nó đã được đặt cho một tên và một kí hiệu đặc biệt.

4. ĐỊNH NGHĨA Đạo hàm của hàm số f tại số a, kí hiệu f '(a), là

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Nếu ta viết x = a + h, thì ta có h = x - a và h tiến đến 0 nếu và chỉ nếu x tiến đến a. Do đó, một cách định nghĩa khác của đạo hàm là

5 $$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

VÍ DỤ 4 Tìm đạo hàm của hàm số f(x) = x^2 - 8x + 9 tại số a.

GIẢI Từ định nghĩa 4 ta có

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0}(2a + h - 8)$$

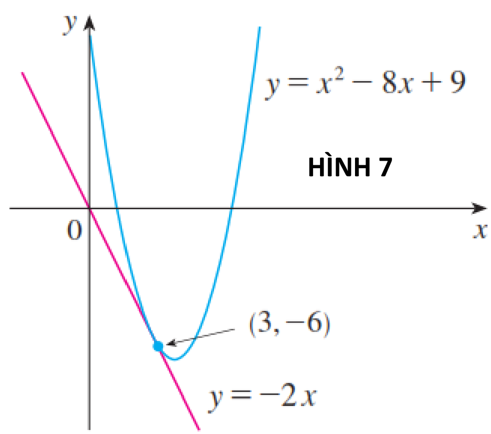
$= 2a - 8$

Ta định nghĩa tiếp tuyến của đường cong y = f(x) tại điểm P(a, f(a)) là đường thẳng qua P và có độ dốc m cho bởi phương trình 1 hoặc 2. Theo định nghĩa 4, độ dốc này chính là f '(a), ta có thể phát biểu như sau.

Tiếp tuyến với y = f(x) tại(a, f(a)) là đường thẳng đi qua điểm (a, f(a)) và có độ dốc là f'(a), đạo hàm của f tại a.

Nếu ta dùng dạng phương trình điểm-độ dốc của đường thẳng , ta có thể viết phương trình tiếp tuyến của đường cong y = f(x) tại điểm (a, f(a))

y - f(a) = f '(a)(x - a)



HÌNH 7

VÍ DỤ 5 Tìm phương trình của tiếp tuyến với parabol y = x^2 - 8x + 9 tại điểm (3, - 6).

GIẢI Từ ví dụ 4 ta biết rằng đạo hàm của f(x) = x^2 - 8x + 9 tại số a là f '(a) = 2a - 8. Do đó độ dốc của tiếp tuyến tại (3, - 6) là f '(3) = 2(3) - 8 = - 2. Suy ra phương trình tiếp tuyến (hình bên) là

y - (- 6) = - 2(x - 3) hay y = - 2x

TỐC ĐỘ BIẾN THIÊN

Giả sử y là một đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác. Như vậy y là một hàm số theo x và ta viết y = f(x). Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2, thì biến thiên của x (cũng gọi là gia số của x) là

$\Delta x = x_2 - x_1$

và biến thiên tương ứng của y là

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Tỉ số biến thiên

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

được gọi là **tốc độ biến thiên trung bình** của y đối với x trên đoạn $[x_1, x_2]$ và có thể hiểu như là độ dốc của cát tuyến PQ (Hình 8).

Tương tự với tốc độ, ta xem tốc độ biến thiên trung bình trên những đoạn càng lúc càng nhỏ bằng cách cho x_2 tiến đến x_1 tức là cho Δx tiến đến 0. Giới hạn của những tốc độ biến thiên trung bình này gọi là **tốc độ biến thiên (tức thời) của y đối với x** tại $x = x_1$, được coi như là độ dốc của tiếp tuyến của đường cong y = f(x) tại $P(x_1, f(x_1))$.

$$\text{tốc độ biến thiên tức thời} = \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x2 \to x1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

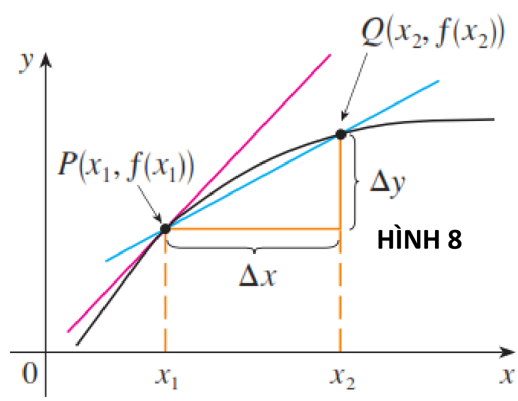
Ta nhận ra giới hạn này chính là đạo hàm f ' (x_1), và cũng chính là độ dốc của tiếp tuyến của đồ thị y = f(x) tại điểm có hoành độ là x_1. Như vậy ta có ý nghĩa thứ hai của đạo hàm .

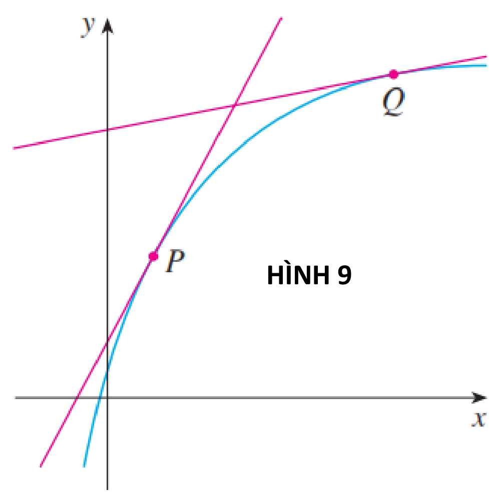
Đạo hàm f'(a) là tốc độ biến thiên tức thời của y = f(x) đối với x khi x = a

Như vậy khi đạo hàm lớn (tức đường cong dốc như ở điểm P trong Hình 9 bên), thì giá trị y thay đổi nhanh. Khi đạo hàm nhỏ, đường cong tương đối dẹt (như ở Q trong hình bên) thì giá trị y thay đổi chậm.

Trong ví dụ sau, ta biện luận ý nghĩa của đạo hàm của hàm số trong trường hợp hàm số được xác định bằng lời.

Tốc độ biến thiên trung bình = m_{PQ}
Tốc độ biến thiên tức thời = độ dốc tiếp tuyến tại P





VÍ DỤ 6 Một hãng sản xuất dây điện. Phí tổn để sản xuất x mét dây điện là C = f(x) đồng.

(a) Tìm ý nghĩa của đạo hàm f '(x). Đơn vị của nó là gì?

(b) Trong thuật ngữ thực tế, nói f '(1000) = 9 có nghĩa là gì?

(c) Bạn nghĩ số nào lớn hơn giữa hai số f '(50) và f '(500)? Còn f '(5000) thế nào?

GIẢI

(a) Đạo hàm là tốc độ biến thiên tức thời của C đối với x; tức f '(x) có nghĩa là tốc độ biến thiên của giá sản xuất đối với số mét dây sản xuất được. (Trong kinh tê học tốc độ biến thiên này gọi là *marginal cost (chi phí lề*). Ý nghĩa này sẽ được luận bàn chi tiết hơn trong bài 3.7 và 4.7.)

Vì

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

nên đơn vị của f '(x) cũng giống như đơn vị của $\Delta C/\Delta x$. Mà đơn vị đo ΔC là đồng, còn đơn vị đo Δx là mét, nên đơn vị của f ‘(x) là đồng/mét.

(b) Phát biểu f '(1000) = 9 có nghĩa là sau khi đã sản xuất1000 mét dây, tốc độ mà giá sản xuất tăng là 9 đồng mỗi mét. (Khi x = 1000, C tăng 9 lần nhanh hơn x)

Vì Δx = 1 nhỏ so với x = 1000, ta có thể tính xấp xỉ

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

và nói rằng giá sản xuất mét dây điện thứ 1000 (hay thứ 1001) là khoảng 9 đồng.

(c) Tốc độ tại đó giá sản xuất (mỗi mét) tăng khi x = 500 chắc chắn thấp hơn khi x = 50 (giá làm mét dây thứ 500 ít hơn giá làm mét dây thứ 50) vì càng làm nhiều thì giá sản xuất càng giảm. (Nhà sản xuất sử dụng hiệu quả hơn những phí tổn cố định của quá trình sản xuất.) Vì thế

$$f'(50) > f'(500)$$

Nhưng, khi sản xuất mở rộng, sự vận hành theo qui mô lớn sinh ra có thể kém hiệu quả và chi phí làm thêm giờ có thể nảy sinh. Do đó có thể tốc độ tăng chi phí sẽ bắt đầu lên cao. Vì thế có thể nảy sinh sự kiện

$$f'(5000) > f'(500)$$

Trong ví dụ sau ta ước tính tốc độ biến thiên của nợ công theo thời gian. Đây là hàm số không định nghĩa bằng một công thức mà bằng một bảng giá trị.

VÍ DỤ 7 Cho D(t) là nợ công của Mỹ ở thời điểm t. Bảng dưới cho ta giá trị xấp xỉ của hàm số này (tỉ đôla) tính sau mỗi năm, từ 1980 đến 2000. Hãy giải thích và ước tính giá trị của D '(1990).

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2

GIẢI Đạo hàm D '(1990) có nghĩa là tốc độ biến thiên của D đối với t khi t = 1990, đó là, tốc độ tăng của nợ công trong 1990.

Theo phương trình 5

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Ta tính giá trị của tỉ số các số gia (tốc độ biến thiên trung bình) như sau.

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09

Từ bảng này ta thấy D '((1990) nằm đâu đó trong khoảng giữa 257.48 và 348.14 tỉ đôla mỗi năm. [Ở đây ta đang giả định là nợ không dao động dữ dội trong khoảng 1980 và 2000.] Ta ước tính rằng tốc độ tăng của nợ công của Mỹ trong năm 1990 là trung bình của hai số này, cụ thể là

$$D'(1990) \approx 303 \text{ tỉ đô la mỗi năm}$$

Một phương pháp khác là vẽ đồ thị hàm số nợ và ước tính độ dốc của tiếp tuyến khi t = 1990.

Trong Ví dụ 3, 6, và 7 ta thấy ba ví dụ đặc biệt của tốc độ biến thiên: vận tốc di chuyển của một vật thể theo thời gian; chi phí lề (marginal cost) là tốc độ biến thiên của chi phí sản xuất đối với số lượng sản phẩm; tốc độ biến thiên của nợ đối với thời gian có tầm quan trọng trong kinh tế học. Đây là một số mẫu nhỏ trong các loại biến thiên: Trong vật lý, tốc độ biến thiên của công đối với thời gian gọi là *công suất*. Các nhà hóa học nghiên cứu phản ứng thì quan tâm đến tốc độ biến thiên của nồng độ của chất phản ứng đối với thời gian (gọi là *tốc độ phản ứng*). Nhà sinh học quan tâm đến tốc độ biến thiên của số vi khuẩn trong dung môi đối với thời gian. Thật ra, công việc tính các tốc độ biến thiên đều quan trọng trong mọi ngành khoa học tự nhiên, kỹ thuật, và ngay cả trong khoa học xã hội. Các ví dụ xa hơn sẽ được giới thiệu trong bài 3.7.

Mọi tốc độ biến thiên đều là đạo hàm và do đó có thể được xem như là độ dốc của tiếp tuyến. Điều này góp thêm ý nghĩa cho việc giải các bài toán tiếp tuyến. Bất cứ khi nào ta giải một bài toán về tiếp tuyến , ta không chỉ giải nmot bài toán hình . Ta cũng ngầm giải một bài toán liên quan đến tốc độ biến thiên trong khoa học và kỹ thuật.

BÀI TẬP

1. Một đường cong có phương trình y = f(x).
(a) Viết biểu thức tính độ dốc của cát tuyến qua hai điểm P(3, f(3)) và Q(x, f(x)).
(b) Viết biểu thức tính độ dốc của tiếp tuyến tại P.

2. Vẽ đồ thị hàm số $y = e^x$ trong các khung hình chữ nhật [-1, 1] x [0, 2], [- 0.5, 0.5] x [0.5, 1.5], và [- 0. 1, 0.1] x [0.9, 1.1]. Bạn có nhận xét gì về đường cong khi bạn phóng to quanh điểm (0, 1)?

3. (a) Tìm độ dốc của tiếp tuyến với parabol $y = 4x - x^2$ tại điểm (1, 3)
(i) bằng Định nghĩa 1 (ii) bằng Công thức 2
(b) Viết phương trình tiếp tuyến ở phần (a).
(c) Vẽ parabol và tiếp tuyến. Để kiểm tra kết quả của bạn, hãy phóng to quanh điểm (1, 3) cho đến khi parabol và tiếp tuyến gần như trùng khít nhau.

4. (a) Tìm độ dốc của tiếp tuyến với parabol $y = x - x^3$ tại điểm (1, 0)
(i) bằng Định nghĩa 1 (ii) bằng Công thức 2
(b) Viết phương trình tiếp tuyến ở phần (a).
(c) Vẽ đồ thị và tiếp tuyến trong những khung hình càng lúc càng nhỏ khi ta phóng to quanh điểm (1, 0) cho đến khI đường cong và tiếp tuyến gần như trùng khít nhau.

5-8. Viết phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại điểm cho trước.

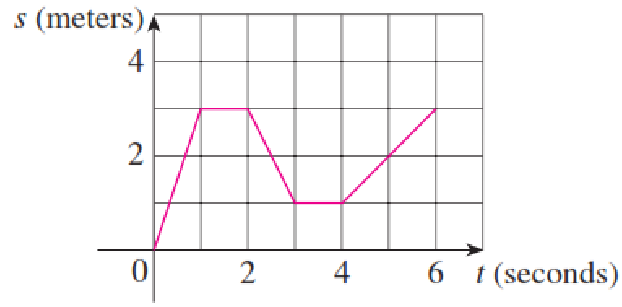
5. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$, (3, 2) **6.** $y = 2x^3 - 5x$, (−1, 3)

7. $y = \sqrt{x}$, (1, 1) **8.** $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$, (0, 0)

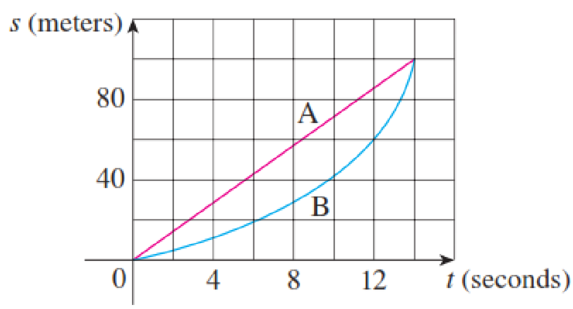
9. (a) Tìm độ dốc của tiếp tuyến với đường cong $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ tại điểm x = a.
(b) Tìm phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ 1 và 2.
(c) Vẽ đồ thị và cả hai tiếp tuyến trên cùng một khung hình.

10. (a) Tìm độ dốc của tiếp tuyến với đường cong $y = 1/\sqrt{x}$ tại điểm x = a.
(b) Tìm phương trình tiếp tuyến tại điểm (1, 1) và (4, 1/2).
(c) Vẽ đồ thị và cả hai tiếp tuyến trên cùng một khung hình.

11. (a) Một chất điểm bắt đầu chuyển động về bên phải trên đường nằm ngang; đồ thị của hàm số vị trí cho bởi hình dưới. Khi nào chất điểm di chuyển về bên phải? Di chuyển về bên trái? Đứng yên.
(b) Hãy vẽ đồ thị hàm số vận tốc.



12. Đồ thị dưới đây là của hàm số vị trí của hai vận động viên chạy bộ, A và B trong cuộc đua 100 mét và hai người hòa.



(a) Mô tả và so sánh cách thức chạy của hai vận động viên.

(b) Tại thời điểm nào khoảng cách hai người là lớn nhất?

(c) Lúc nào họ có cùng vận tốc?

13. Nếu ném một quả bóng lên không với vận tốc 40 ft/s, độ cao của nó (tính bằng feet) sau t giây được cho bởi công thức $y = 40t - 16t^2$. Tìm vận tốc của nó khi t = 2.

14. Nếu một hòn đá được ném lên trên sao Hỏa với vận tốc 10m/s, thì độ cao lúc thời điểm t cho bởi $H = 10t - 1.86t^2$.

(a) Tìm vận tốc của hòn đá sau một giây.

(b) Tìm vận tốc của hòn đá khi t = a.

(c) Khi nào hòn đá chạm mặt đất?

(d) Lúc chạm mặt đất, hòn đá có vận tốc là bao nhiêu?

15. Vị trí chuyển dịch của một chất điểm trên một đường thẳng (tính bằng mét) cho bởi phương trình chuyển động $s = 1/t^2$, t tính bằng giây. Tìm vận tốc của chất điểm khi t = a, t = 1, t = 2, và t = 3.

16. Vị trí chuyển dịch của một chất điểm trên một đường thẳng (tính bằng mét) cho bởi phương trình chuyển động $s = t^2 - 8t + 18$, t tính bằng giây.

(a) Tìm vận tốc trung bình trên những khoảng thời gian sau:

(i) [3, 4] (ii) [3.5, 4]

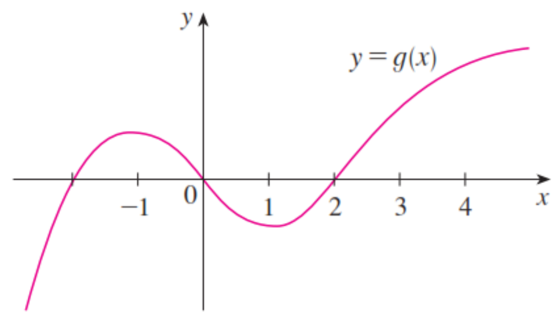
(iii) [4, 5] (iv) [4, 4.5]

(b) Tìm vận tốc tức thời lúc t = 4.

(c) Vẽ đồ thị của s như một hàm số theo t và vẽ những đường cát tuyến mà độ dốc biểu thị các vận tốc trung bình trong phần (a) và đường tiếp tuyến mà độ dốc là vận tốc tức thời trong phần (b).

17. Cho hàm số g có đồ thị bên dưới, hãy sắp xếp những số sau đây theo thứ tự tăng dần và giải thích lý luận của bạn.

0 g'(- 2) g'(0) g'(2) g'(4)



18. (a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số y = g(x) tại x = 5 biết g(5) = - 3 và g'(5) = 4.

(b) Nếu tiếp tuyến với y = f(x) tại điểm (4, 3) đi qua điểm (0, 2), hãy tìm f(4) và f '(4).

19. Hãy phác họa đồ thị của hàm số f thỏa f(0) = 0, f '(0) = 3, f '(1) = 0, và f '(2) = - 1.

20. Hãy phác họa đồ thị của hàm số g thỏa g(0) = g'(0) = 0, g '(- 1) =3, và g'(2) = 1.

21. Nếu $f(x) = 3x^2 - 5x$, tìm f '(2) và viết phương trình tiếp tuyến với parabol $y = 3x^2 - 5x$ tại điểm (2, 2).

22. Nếu $g(x) = 1 - x^3$, tìm g '(0) và viết phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = 1 - x^3$ tại điểm (0, 1).

23. (a) Nếu $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, tìm F'(2) và viết phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = 5x/(1 + x^2)$ tại điểm (2, 2).

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đồ thị và tiếp tuyến trong cùng một khung hình.

24. (a) Nếu G(x) = $4x^2 - x^3$, tìm G'(a) và viết phương trình tiếp tuyến với đường cong y = $4x^2 - x^3$ tại điểm (2, 8) và (3, 9).

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đồ thị và các tiếp tuyến trong cùng một khung hình.

25-30. Tìm f '(a).

25. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$ **26.** $f(t) = t^4 - 5t$

27. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$ **28.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$ **30.** $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

31-36. Mỗi giới hạn sau biểu thị đạo hàm của hàm số f nào đó tại số a. Hãy tìm f và a trong mỗi trường hợp.

31. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$ **32.** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

33. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2^x - 32}{x - 5}$ **34.** $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

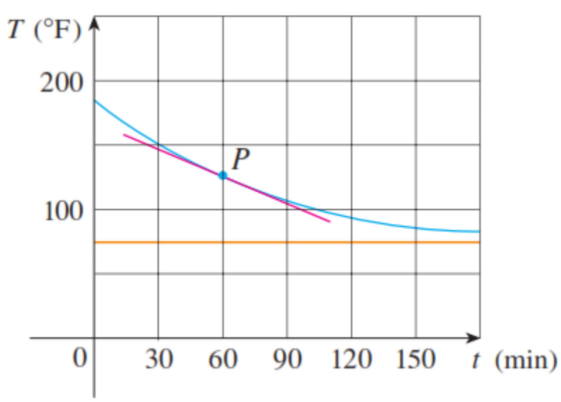
35. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$ **36.** $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

37-38. Một chất điểm di chuyển trên một đường thẳng với phương trình chuyển động s = f(t), trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tìm vận tốc khi t = 5.

37. f(t) = $100 + 50t - 4.9t^2$ **38**. f(t) = $t^{-1} - t$

39. Một can nước soda ấm được đặt vào ngăn làm lạnh. Phác họa đồ thị của nhiệt độ của nước soda như hàm số theo thời gian. Tốc độ biến thiên của nhiệt độ lúc ban đầu lớn hơn hay nhỏ hơn tốc độ biến thiên sau một giờ?

40. Một con gà tây được lấy ra từ lò nướng khi nhiệt độ đã đạt đến 185°F và được bày trên bàn ăn trong phòng có nhiệt độ 75°F.



Đồ thị bên trên cho thấy nhiệt độ của con gà tây giảm và cuối cùng tiến gần đến nhiệt độ phòng. Bằng cách đo độ dốc của tiếp tuyến, hãy ước tính tốc độ biến thiên của nhiệt độ sau một giờ.

41. Bảng dưới cho thấy ước tính phần trăm dân số P của châu Âu sử dụng điện thoại di động. (Số ước tính tính vào giữa năm.)

Year	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

(a) Tìm tốc độ tăng trưởng trung bình của điện thoại di động

(i) từ 2000 đến 2002 (ii) từ 2000 đến 2001

(iii) từ 1999 đến 2000

Trong mỗi trường hợp, hãy nêu ra đơn vị.

(b) Ước tính tốc độ tăng trưởng tức thời trong năm 2000 bằng cách lấy số trung bình giữa hai tốc độ biến thiên trung bình. Đơn vị của nó là gì?

(c) Ước tính tốc độ tăng trưởng tức thời trong năm 2000 bằng cách đo độ dốc của tiếp tuyến.

42. Số N tiệm cà phê được ưa chuộng được cho trong bảng dưới. (Số tiệm được tính vào ngày 30/6 mỗi năm.)

Year	1998	1999	2000	2001	2002
N	1886	2135	3501	4709	5886

(a) Tìm tốc độ tăng trưởng trung bình

(i) từ 2000 đến 2002 (ii) từ 2000 đến 2001

(iii) từ 1999 đến 2000

Trong mỗi trường hợp, hãy nêu ra đơn vị.

(b) Ước tính tốc độ tăng trưởng tức thời trong năm 2000 bằng cách lấy số trung bình giữa hai tốc độ biến thiên trung bình. Đơn vị của nó là gì?

(c) Ước tính tốc độ tăng trưởng tức thời trong năm 2000 bằng cách đo độ dốc của tiếp tuyến.

43. Chi phí (đôla) dùng để sản xuất x đơn vị sản phẩm nào đó là C(x) = $5000 + 10x + 0.05x^2$.

(a) Tìm tốc độ biến thiên trung bình của C đối với x khi mức sản xuất biến thiên

(i) từ x = 100 đến x = 105

(ii) từ x = 100 đến x = 101

(b) Tìm tốc độ biến thiên tức thời của C đối với x khi x = 100.(Số này gọi là *chi phí lề.* Ý nghĩa của nó sẽ được giải thích trong bài 3.7.)

44. Nếu một bình chứa hình trụ đựng 100,000 galông nước, có thể rút hết nước ra từ đáy bình trong vòng một giờ, thì theo Định luật Torricelli thể tích V của nước còn lại trong bình sau t phút là :

$$V(t) = 1000{,}000\left(1-\frac{t}{60}\right)^2 \quad 0 \le t \le 60$$

Tìm tốc độ nước chảy ra bình (tức tốc độ biến thiên tức thời của V đối với t) tại thời điểm t. Đơn vị của tốc độ là gì? Tìm tốc độ nước chảy ra và lượng nước còn lại trong bình chứa khi t = 0, 10, 20, 30, 40, 50, và 60 phút. Tóm tắt kết quả tìn kiếm của bạn trong một hai câu. Lúc nào thì tốc độ chảy ra là lớn nhất? Nhỏ nhất?

45. Chi phí sản xuất x ao-xơ vàng từ một mõ vàng là C = f(x) đô-la.

(a) Tìm ý nghĩa của đạo hàm f ‘(x). Đơn vị của nó là gì?

(b) Phát biểu f ‘(800) = 17 nghĩa là gì?

(c) Theo bạn f ‘(x) tăng hay giảm khi x nhỏ? Còn khi x lớn thì sao? Giải thích.

46. Số vi khuẩn sau t giờ trong phòng thí nghiệm được kiểm soát là n = f(t).

(a) Đạo hàm f ‘(5) có nghĩa là gì? Đơn vị của nó là gì?

(b) Giả sử ta có một không gian và nguồn dinh dưỡng vô hạn cho vi khuẩn. Theo bạn f ‘(5) và f ‘(10), số nào lớn hơn? Nếu hạn chế nguồn dinh dưỡng, kết luận của bạn sẽ ảnh hưởng ra sao? Giải thích.

47. Gọi T(t) là nhiệt độ (tính bằng ^{o}F) ở Dallas t giờ sau nữa đêm vào ngày 2/6/2001. Bảng dưới cho biết các giá trị của hàm số này ghi lại mỗi hai giờ. Ý nghĩa của T ‘(10) là gì? Hãy ước tính giá trị của nó.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

48. Số lượng (tính bằng cân) của loại café hảo hạng được tiêu thụ trong một cửa hàng với giá p độ-la mỗi cân là Q = f(p).

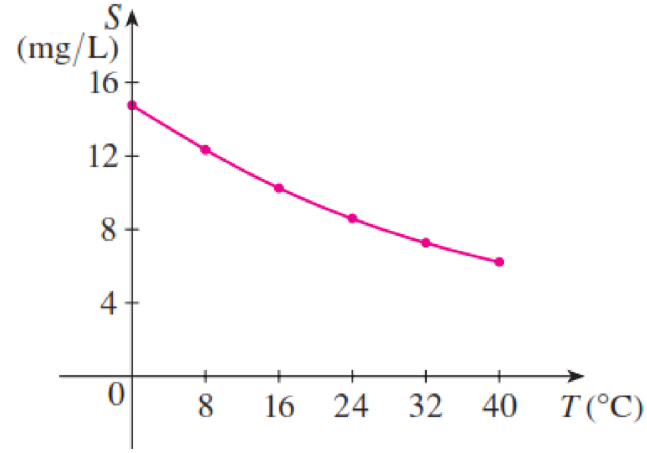
(a) Đạo hàm f ‘(8) nghĩa là gì? Đơn vị của nó là gì?

(b) f ‘(8) dương hay âm? Giải thích.

49. Lượng oxygen có thể hòa tan trong nước phụ thuộc vào nhiệt độ của nước. (Vì thế ô nhiễm nhiệt ảnh hưởng đến nồng độ oxygen trong nước.) Đồ thị cho thấy nồng độ S của oxygen thay đổi như một hàm số theo nhiệt độ T của nước.

(a) S ‘(T) nghĩa là gì? Đơn vị của nó là gì?

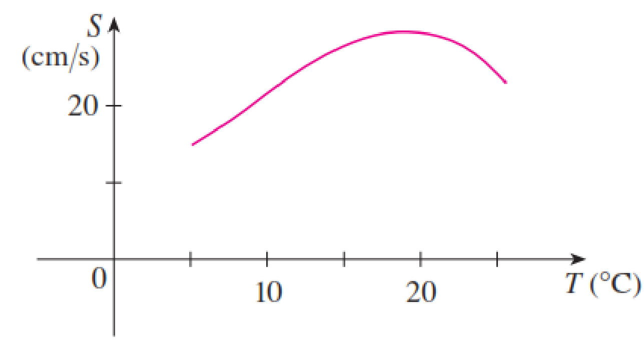
(b) Ước tính giá trị của S’ (16) và giải thích nó.



50. Đồ thị cho thấy ảnh hưởng của nhiệt độ T trên vận tốc bơi tối đa S của cá hồi Coho.

(a) S ‘(T) nghĩa là gì? Đơn vị của nó là gì?

(b) Ước tính giá trị của S’ (15) và S’(25) và giải thích chúng.



51-52. Cho biết f ‘(0) có tồn tại hay không?

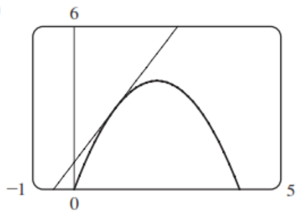
51. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & khi\ x\neq 0 \\ 0 & khi\ x=0 \end{cases}$

52. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & khi\ x\neq 0 \\ 0 & khi\ x=0 \end{cases}$

ĐÁP SỐ

1. (a) $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

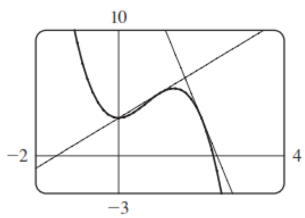
3. (a) 2 (b) $y = 2x + 1$ (c)



5. $y = -x + 5$ **7.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

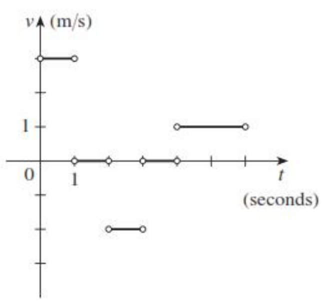
9. (a) $8a - 6a^2$ (b) $y = 2x + 3$, $y = -8x + 19$

(c)



11. (a) Bên phải: 0 < t < 1 và 4 < t < 6; bên trái: 2 < t < 3; đứng yên: 1< t < 2 và 3< t < 4

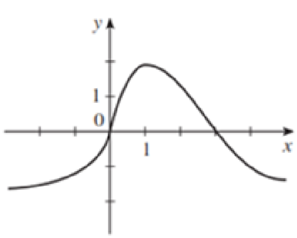
(b)



13. -24 ft/s **15.** $-2/a^3$ m/s; -2 m/s; $-\frac{1}{4}$ m/s; $-\frac{2}{27}$ m/s

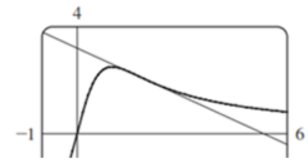
17. $g'(0)$, 0, $g'(4)$, $g'(2)$, $g'(-2)$

19.



21. 7; $y = 7x - 12$

23. (a) $-\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$ (b)



25. $-2 + 8a$ **27.** $\dfrac{5}{(a+3)^2}$ **29.** $\dfrac{-1}{2(a+2)^{3/2}}$

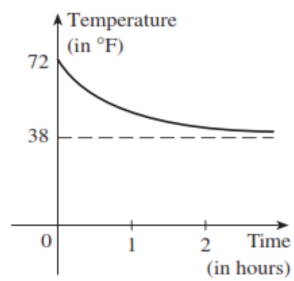
31. $f(x) = x^{10}$, $a = 1$ or $f(x) = (1 + x)^{10}$, $a = 0$

33. $f(x) = 2^x$, $a = 5$

35. $f(x) = \cos x$, $a = \pi$ or $f(x) = \cos(\pi + x)$, $a = 0$

37. 1 m/s; 1 m/s

39.



Lớn hơn

41. (a) (i) 11%/năm (ii) 13%/năm (iii) 16%/năm

(b) 14.5%/năm (c) 15%/năm

43. (a) (i) 20.25$/đơn vị (ii) 20.05%/đơn vị

(b) 20$/đơn vị n

45. (a) Tốc độ biến thiên của chi phí trên mỗi ao-xơ vàng được sản xuất; đô-la mỗi ao-xơ.

(b) Khi ao-xơ vàng thứ 800 được sản xuất, chi phí sản xuất là 17$/oz.

(c) Giảm khi x nhỏ; tăng khi x lớn.

47. Tốc độ biến thiên của nhiệt độ lúc 10:00 AM; 4^{o}F/h.

49. (a) Tốc độ biến thiên của nồng độ oxygen đối với nhiệt độ nước; (mg/L)/^{o}C

(b) S’(16) ≈ - 0.25; khi nhiệt độ tăng vượt qua 16^{o}C, nồng độ oxygen giảm với tốc độ 0.25 (mg/L)/^{o}C.

BÀI 2. 8. ĐẠO HÀM XÉT NHƯ MỘT HÀM SỐ

Trong bài trước ta xem đạo hàm của hàm số f tại một số a cố định là:

1 $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

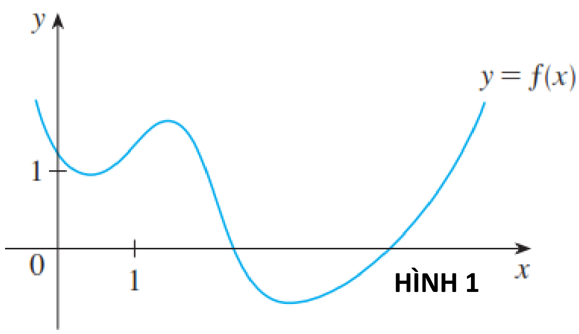
Ở đây ta thay đổi quan điểm của mình và cho số a thay đổi. Nếu ta thay a trong 1 bằng biến số x, ta được

2 $$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Với mọi số x cho trước mà giới hạn này tồn tại, ta gán cho nó một số f '(x). Vì thế ta có thể coi f ' như một hàm số mới, gọi là **đạo hàm của f** và được định nghĩa bằng Phương trình 2. Ta biết rằng giá trị của f ' tại x, tức f '(x), có ý nghĩa hình học là độ dốc của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm (x, f(x)).

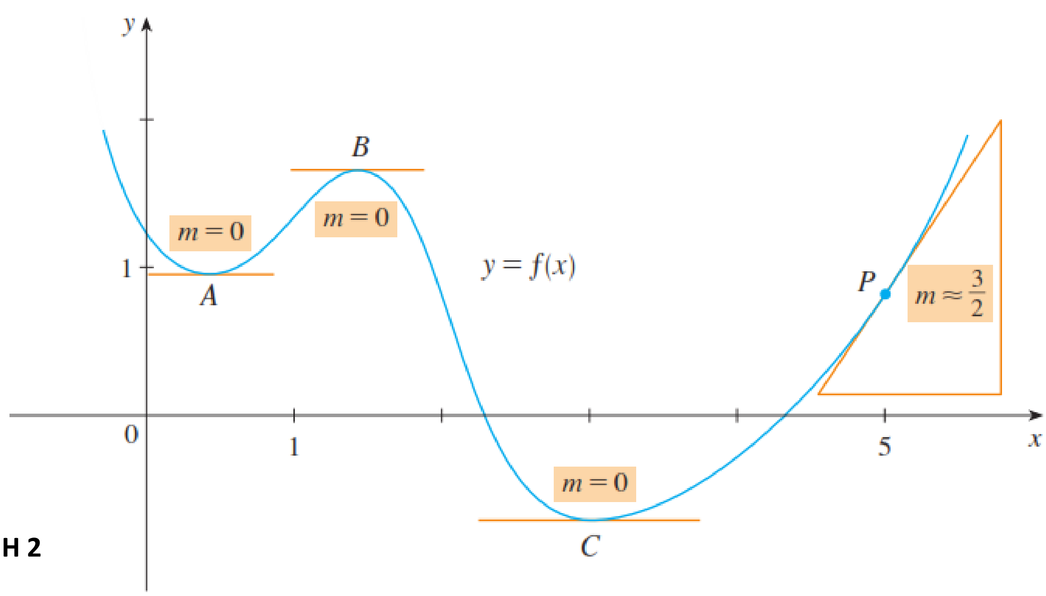
Hàm số f ' được gọi là đạo hàm của f bởi vì nó đã được 'rút ra' từ f bằng một phép lấy giới hạn. (Từ đạo hàm là derivative lấy từ gốc là derive nghĩa là 'rút ra'). Tập xác định của f ' là tập hợp {x/ f' (x) tồn tại} và có thể là tập con của của tập xác định của f.

VÍ DỤ 1 Đồ thị của hàm số f cho bởi hình dưới. Dùng đồ thị này để vẽ đồ thị của hàm số f '.



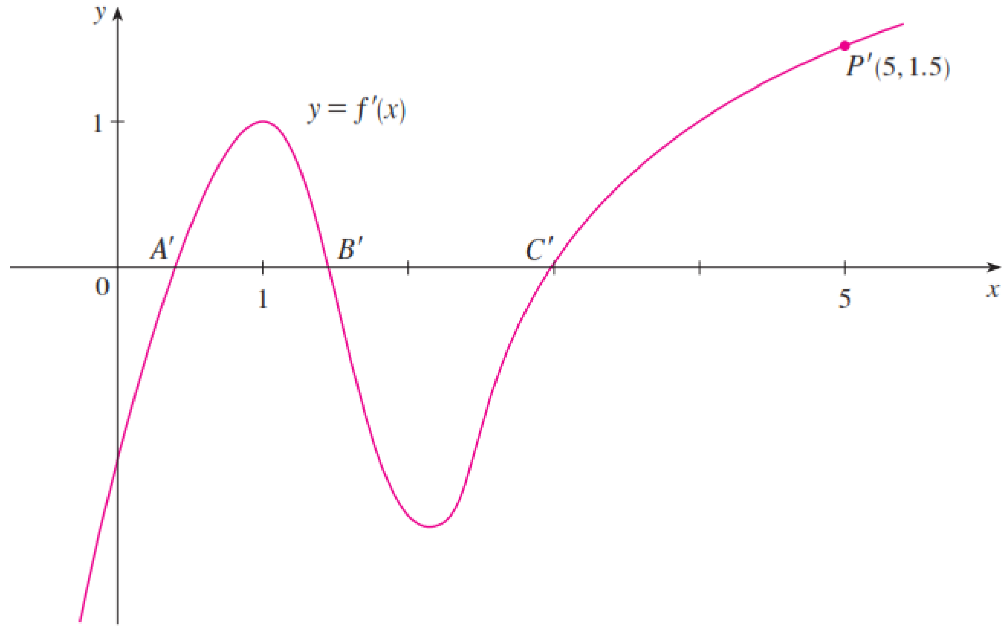
HÌNH 1

GIẢI Ta có thể ước tính đạo hàm tại bất kỳ giá trị nào của x bằng cách vẽ tiếp tuyến tại điểm (x, f(x)) và ước tính độ dốc của nó. Chẳng hạn, với x = 5, ta vẽ tiếp tuyến tại P trong Hình 2(a) và ước tính độ dốc khoảng 3/2., suy ra f '(5) ≈ 1. 5. Từ đó ta có thể vẽ được điểm P'(5, 1.5) trên đồ thị f ' ngay bên dưới điểm P. Lặp lại tiến trình này tại vài điểm, ta được đồ thị cho bởi Hình 2(b). Chú ý là tiếp tuyến tại A, B, và C nằm ngang, do đó đạo hàm tại những điểm này bằng 0 và đồ thị f ' cắt trục x tại điểm A', B' và C' ngay bên dưới A, B, và C. Giữa A và B các tiếp tuyến có độ dốc dương , do đó đạo hàm f '(x) tại đó cũng dương. Nhưng giữa B và C các tiếp tuyến có độ dốc âm, nên f '(x) tại đó cũng âm.



HÌNH 2

(a)



(b)

VÍ DỤ 2

(a) Nếu f(x) = x^3 - x , tìm công thức cho f '(x).

(b) Minh họa bằng cách so sánh đồ thị của f và f '.

GIẢI

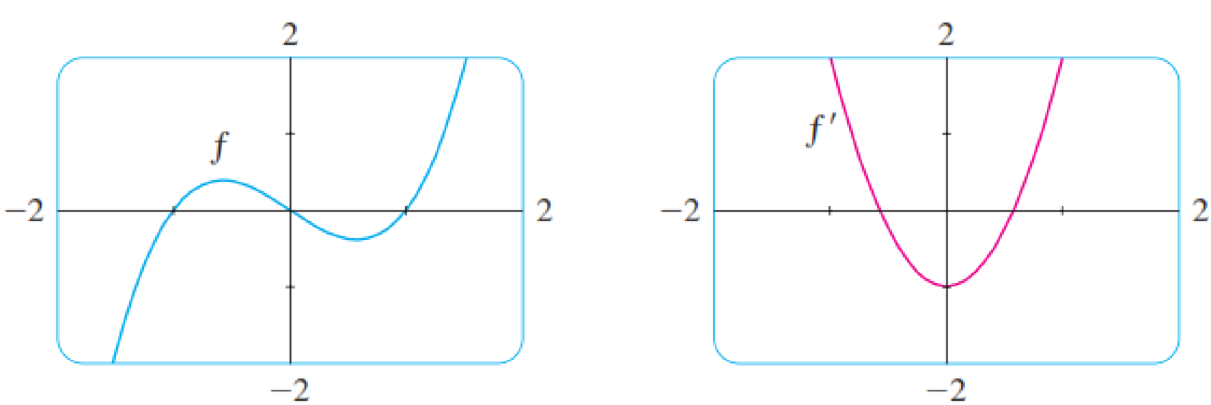
(a) Khi dùng Phương trình 2 để tính đạo hàm, ta phải nhớ biến là h và x được tạm thời coi như hằng số khi tính giới hạn.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

(b) Ta dùng phần mềm vẽ đồ thị để vẽ đồ thị của f và f ', kết qua cho bởi hình dưới. Chú ý là f '(x) = 0 khi f có tiếp tuyến nằm ngang và f '(x) dương khi tiếp tuyến có độ dốc dương. Vì thế những đồ thị coi như giúp ta kiểm tra kết quả đã làm ở câu (a).



VÍ DỤ 3 Nếu f(x) = $\sqrt{x}$, tìm đạo hàm của f. Cho biết tập xác định của f '.

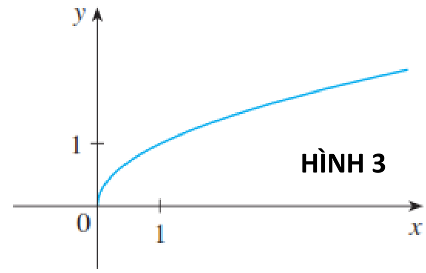
GIẢI

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

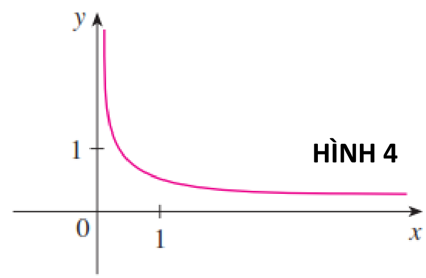
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



(a) $f(x)=\sqrt{x}$



(b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ta thấy rằng f '(x) tồn tại nếu x > 0, do đó tập xác định của f ' là (0, oo), trong khi tập xác định của f là [0, oo).

VÍ DỤ 4 Tìm f ' biết f(x) = $\dfrac{1-x}{2+x}$.

GIẢI

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)}-\dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(1-x-h)(2+x)-(1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2-x-2h-x^2-xh)-(2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h\to 0}\frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$

CÁC KÍ HIỆU KHÁC

Leibniz , nhà toán học Đức, cùng với Newton, đã tìm ra phép tính vi tích phân một cách độc lập. Newton khám phá trước, nhưng Leibniz mới là người đầu tiên xuất bản công trình vĩ đại của mình (1684). Các kí hiệu vi tích phân do ông đặt ra tiện lợi hơn của Newton)

Nếu ta dùng kí hiệu truyền thống y = f(x) để chỉ biến độc lập x và biến phụ thuộc y, thì một vài kí hiệu thông dụng cho đạo hàm sẽ như sau:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Biểu tượng D và d/dx được gọi là các **phép tính vi phân** vì chúng chỉ tiến trình tính một đạo hàm.

Biểu tượng dy/dx, được Leibniz giới thiệu, không nên được coi như là tỉ số (ngay lúc này); nó đơn giản chỉ là đồng nghĩa với f '(x). Dù sao, nó là kí hiệu rất hữu dụng, nhất là khi được dùng phối hợp với kí hiệu số gia. Tham chiếu phương trình 2.7.6, ta có thể viết lại định nghĩa của đạo hàm theo kí hiệu Leibniz dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nếu ta muốn chỉ giá trị của đạo hàm dy/dx theo kí hiệu Leibniz tại một số đặc biệt a, ta dùng kí hiệu sau

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad hay \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

đồng nghĩa với f '(a).

> **3 ĐỊNH NGHĨA** Một hàm số f được gọi là **khả vi** tại a nếu f'(a) tồn tại. Hàm số **khả vi trên khoảng (a, b)** [hoặc trên (a, ∞) hoặc (- ∞, a) hoặc (-∞, ∞) nếu nó khả vi tại mọi số thuộc khoảng đó.

VÍ DỤ 5 Hàm số f(x) = | x | khả vi tại đâu?

GIẢI Nếu x > 0, thì | x | = x và ta có thể chọn h đủ nhỏ sao cho x + h > 0 và do đó | x + h | = x + h. Suy ra, với x > 0, ta có

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

và vì thế f khả vi với mọi x > 0.

Tương tự với x < 0 , ta có | x | = - x và ta có thể chọn h đủ nhỏ sao cho | x + h | < 0 và do đó | x + h | = - (x + h). Suy ra, với x < 0

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$ và vì thế f khả vi với mọi x < 0.

Với x = 0 ta phải xét xem giới hạn sau có tồn tại không.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

Ta phải tìm giới hạn bên trái và bên phải riêng:

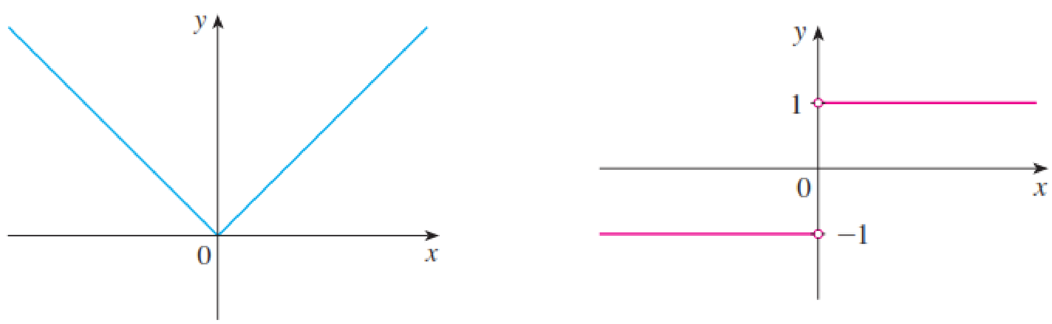
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1$$

Vì các giới hạn này khác nhau nên f ' (0) không tồn tại. Do đó f khả vi tại mọi x khác 0.
Biểu thức của f ' là

$$f'(x)=\begin{cases}1 & khi \quad x>0\\ -1 & khi \quad x<0\end{cases}$$

và đồ thị của f và f ' cho bởi Hình 5. Sự kiện f '(0) không tồn tại có thể đoán nhận hình học là do đường y = | x | không có tiếp tuyến tại điểm (0, 0) [Xem Hình 5(a))]



(a) $y = f(x) = |x|$ **HÌNH 5** (b) $y = f'(x)$

Tính liên tục và tính khả vi đều là các tính chất đáng mong muốn của một hàm số. Định lí sau chứng tỏ mối liên hệ giữa hai tính chất.

4 Định lý Nếu f khả vi tại a thì f liên tục tại a.

CM Để chứng minh f liên tục tại a, ta phải chứng minh

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ hay chứng minh f(x) - f(a) tiến đến 0 khi x tiến đến a.

Giả thiết là f khả vi tại a, nghĩa là

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

tồn tại. Để làm cầu nối giữa giả thiết và kết luận, ta chia và nhân f(x) - f(a) cho x - a (điều này thực hiện được vì x khác a):

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

Dùng qui tắc nhân của giới hạn và (2.7.5), ta có:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$$

$= f\,'(a).\ 0 = 0$

Mà $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} f(a)$ [qui tắc trừ giới hạn) , suy ra:

$$0 = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) \quad hay \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a)$$

Vậy f liên tục tại a.

GHI CHÚ : Phần đảo của định lí trên là sai, nghĩa là, hàm số có thể liên tục nhưng không khả vi. Chẳng hạn hàm số f(x) = | x | liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại 0 (Ví dụ 5)

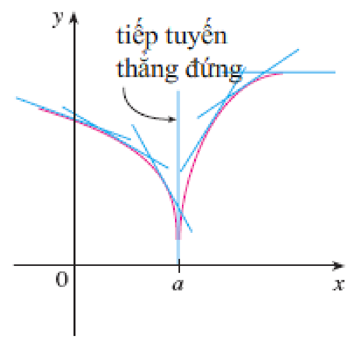
CÁCH NẢO MỘT HÀM SỐ KHÔNG THỂ KHẢ VI

Ta thấy rằng hàm số y = |x| trong ví dụ 5 không khả vi tại 0 và đồ thị của nó đổi hướng đột ngột khi qua x = 0. Tổng quát, nếu đồ thị của một hàm số f có một "điểm góc" hoặc "chênh" , thì đồ thị f không có tiếp tuyến tại điểm này và f không khả vi tại đó. [Khi cố tính f '(a), ta thấy rằng giới hạn bên trái và bên phải khác nhau.]

Định lí 4 cho ta một cách khác để biết hàm số không có đạo hàm. Theo đó nếu f không liên tục tại a, thì nó không khả vi tại a. Vì thế tại bất kỳ điểm gián đoạn nào hàm số sẽ không khả vi.

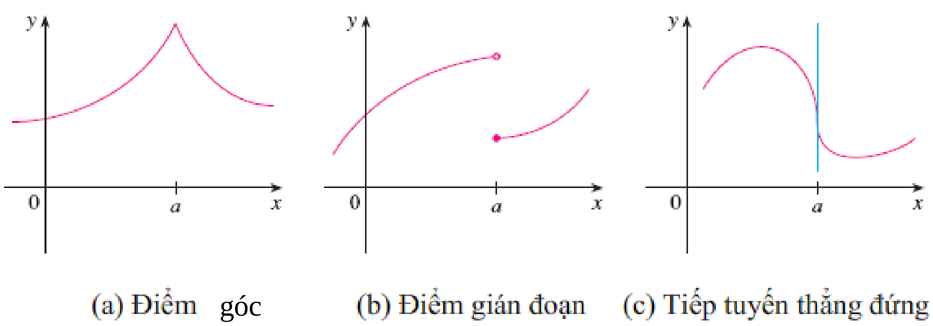
Một khả năng thứ ba là khi đồ thị có một tiếp tuyến thẳng đứng tại x = a; đó là, nếu f liên tục tại a và

$$\lim_{x\to a} |\, f\,'(x)\,| = \infty$$



HÌNH 6

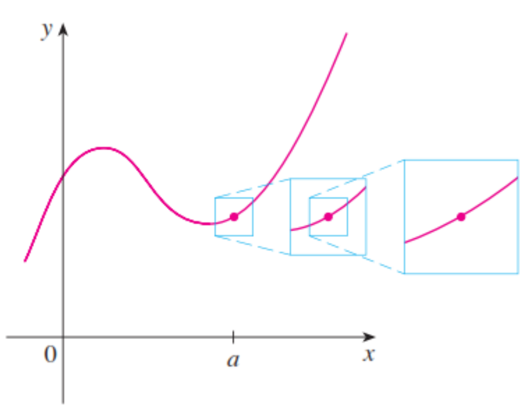
Điều này có nghĩa các tiếp tuyến càng lúc càng dốc khi x $\to$ a. Hình 6 bên minh họa điều này. Hình 7 dưới minh họa ba khả năng mà ta đã trình bày.

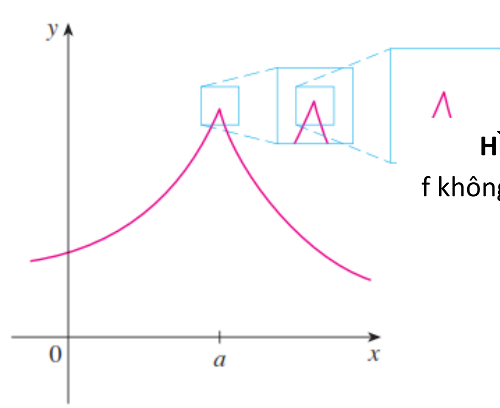


HÌNH 7
3 dạng f không khả vi tại a

Máy tính có vẽ cho ta thêm một phương cách nhìn vào tính khả vi. Nếu f khả vi tại a, thế thì khi ta phóng to quanh điểm (a, f(a)), đồ thị dẹt ra, càng lúc càng trông giống một đường thẳng.(Xem Hình 8. Ta đã được thấy một ví dụ của trường hợp này trong Hình 2 của Bài 2.7.) Nhưng dù cho ta có phóng to bao nhiêu lần đi nữa quanh các điểm trong Hình 6 và 7(a), ta cũng không thể loại bỏ được điểm nhọn hoặc điểm góc (Xem Hình 9)

HÌNH 8
f khả vi tại a





HÌNH 9
f không khả vi tại

ĐẠO HÀM CẤP CAO

Nếu f là hàm số khả vi, thì đạo hàm f ' của nó cũng là một hàm số, vì thế f ' có thể có một đạo hàm của riêng nó, kí hiệu (f ')' = f ". Hàm số mới f " này gọi là **đạo hàm cấp hai** của f. Sử dụng kí hiệu Leibniz, ta viết đạo hàm cấp hai của y = f(x) như sau

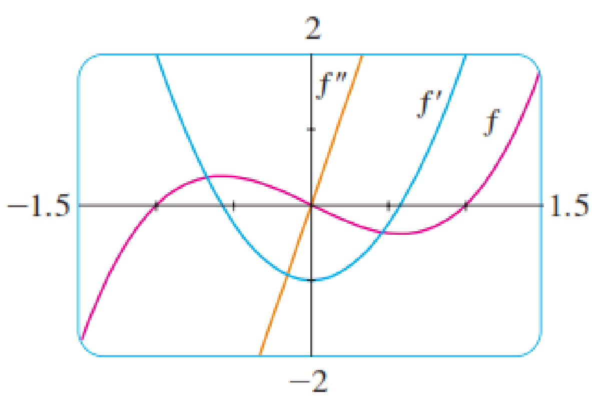
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

VÍ DỤ 6 Nếu $f(x) = x^3 - x$, tìm và giải thích ý nghĩa của f "(x).

GIẢI Trong Ví dụ 2, ta đã tìm được đạo hàm cấp một là $f'(x) = 3x^2 - 1$. Do đó đạo hàm cấp hai là

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2-1]-[3x^2-1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-1-3x^2+1}{h} = \lim_{h\to 0}(6x+3h) = 6x$$



HÌNH 10

Các đồ thị của f, f ' và f " được cho trong Hình 10.

Ta có thể giải thích f "(x) như là độ dốc của đường cong y = f '(x) tại điểm (x, f '(x)). Nói cách khác, đó là tốc độ biến thiên của độ dốc của đường cong ban đầu y = f(x).

Chú ý qua hình trên là f "(x) âm (đồ thị f " ở bên dưới trục x) khi y = f '(x) có độ dốc âm và dương (đồ thị f " ở bên trên trục x) khi y = f '(x) có độ dốc dương. Vì thế đồ thị có thể giúp ta kiểm tra kết quả của phép tính.

Tổng quát, ta có thể coi đạo hàm cấp hai như là tốc độ biến thiên của tốc độ biến thiên. Ví dụ quen thuộc nhất của khái niệm này là gia tốc, được định nghĩa như sau.

Nếu s = s(t) là hàm số vị trí của một vật thể chuyển động trên đường thẳng, ta biết đạo hàm cấp một của nó biểu thị vận tốc v(t) của vật thể là một hàm số theo thời gian.

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

Vận tốc biến thiên tức thời của vận tốc theo thời gian gọi là **gia tốc** a(t) của vật thể. Do đó hàm số gia tốc chính là đạo hàm của hàm số vận tốc và do đó nó là đạo hàm cấp hai của hàm số vị trí:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

hoặc, theo kí hiệu Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Đạo hàm cấp ba f "' là đạo hàm của đạo hàm cấp hai: f"' = (f ")'. Vì thế f "'(x) có thể được xem là độ dốc của đường cong y = f "(x) hoặc như là vận tốc biến thiên của f "(x). Nếu y = f(x), kí hiệu cho đạo hàm cấp ba là :

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^{3y}}{dx^3}$$

Tiến trình có thể được tiếp tục. Đạo hàm cấp 4 f "" thường được kí hiệu f $^{(4)}$. Tổng quát, đạo hàm cấp n của f được kí hiệu f $^{(n)}$ có được bằng cách lấy đạo hàm n lần. Nếu y = f(x), ta viết

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

VÍ DỤ 7 Nếu f(x) = x^3 - x, tìm f '''(x) và $f^{(4)}(x)$.

GIẢI Trong ví dụ 6 ta đã tìm được f "(x) = 6x. Đồ thị của đạo hàm cấp 2 có phương trình y = 6x, là đường thẳng có độ dốc bằng 6. Vì đạo hàm f '''(x) là độ dốc của f "(x), ta có

$$f'''(x) = 6$$

với mọi x. Suy ra f ''' là hàm số hằng và đồ thị là một đường thẳng nằm ngang. Do đó, với mọi x

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Ta đã thấy một ứng dụng của đạo hàm cấp 2 là gia tốc của chuyển động của một vật thể đi trên đường thẳng mà hàm số vị trí là s = s(t). Vì s”’ = (s”) ’, đạo hàm cấp ba của hàm số vị trí là đạo hàm của gia tốc và được gọi là **độ giật xốc:**

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

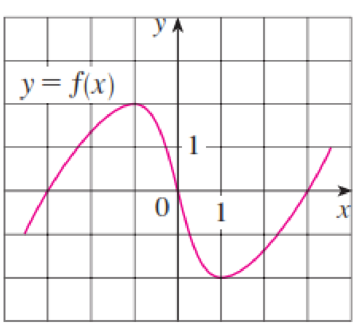
Do đó độ giật xốc j là tốc độ biến thiên của gia tốc. Sở dĩ được gọi là giật xốc vì nó có nghĩa là một sự thay đổi đột ngột về gia tốc, khiến vật thể chuyển động bất ngờ.

Trong bài 4.3 ta sẽ biết thêm vai trò của f " trong việc tạo dáng của đồ thị hàm số f. Và trong chương 11, ta sẽ biết bằng cách nào đạo hàm cấp hai và cấp cao hơn giúp chúng ta biểu diễn các hàm số thành tổng của một chuỗi vô hạn.

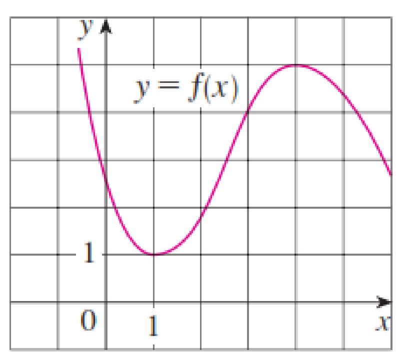
BÀI TẬP

1-2. Dùng đồ thị đã cho để ước tính giá trị của đạo hàm. Rồi phác họa đồ thị hàm số f '.

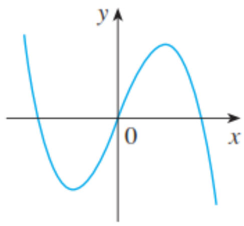
1. (a) f '(- 3)
(b) f '(- 2)
(c) f '(- 1)
(d) f '(0)
(e) f '(1)
(f) f '(2)
(g) f '(3)

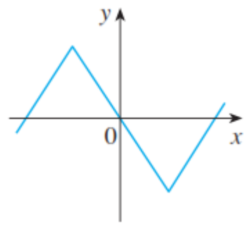


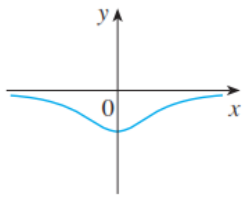
2. (a) f '(0)
(b) f '(1)
(c) f '(2)
(d) f '(3)
(e) f '(4)
(f) f '(5)

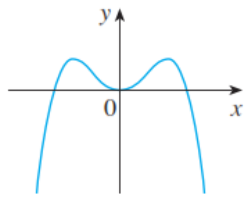


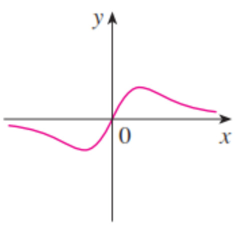
3. Cặp đôi đồ thị mỗi hàm số trong (a)-(d) với đồ thị của đạo hàm của nó trong I-IV. Cho biết lý do mà bạn chọn lựa.

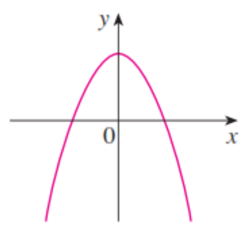
(a)


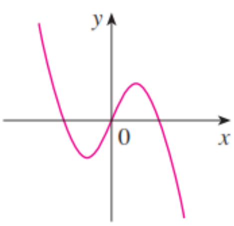
(b)


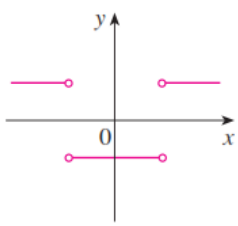
(c)


(d)


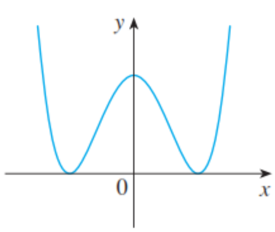
I


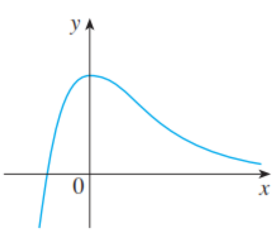
II


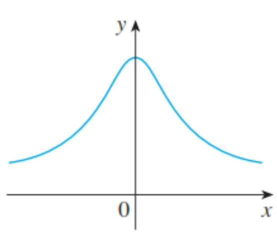
III


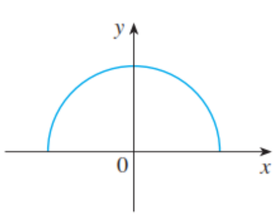
IV


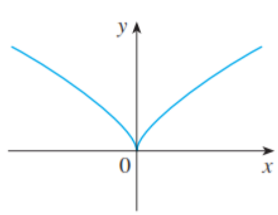
4-11 Sao chép đồ thị cho trước f. (Giả định hai trục có đơn vị như nhau.) Sau đó dùng phương pháp của Ví dụ 1 để phác họa đồ thị f ' ngay bên dưới đồ thị của f.

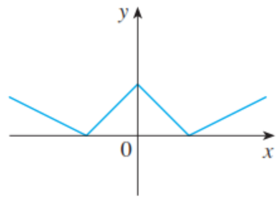
4.


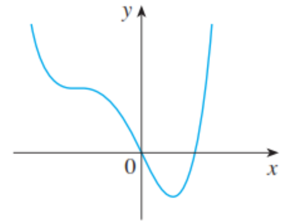
5.


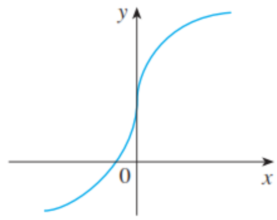
6.


7.


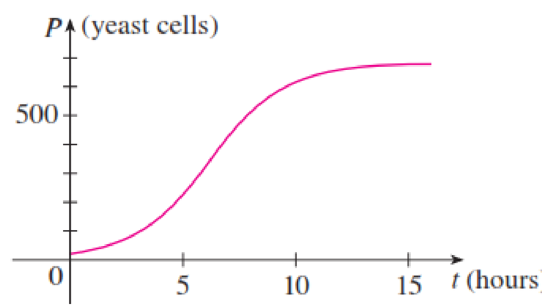
8.


9.


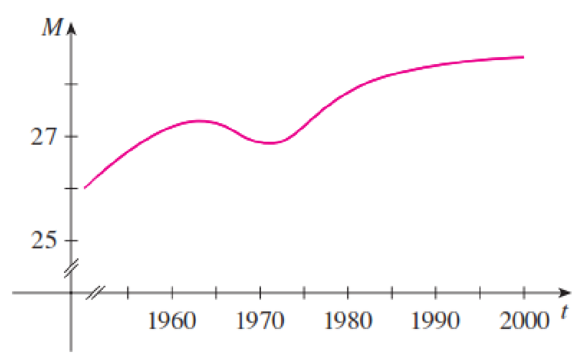
10.


11.


12. Đồ thị bên dưới là của hàm số dân số P(t) các tế bào men bia được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm. Dùng phương pháp của Ví dụ 1 để vẽ đồ thị đạo hàm P'(t). Đồ thị của P' cho chúng ta biết điều gì về dân số của men



13. Đồ thị cho thấy tuổi thọ trung bình của hôn nhân đầu tiên của đàn ông Nhật đã thay đổi trong nửa cuối của thế kỷ 20. Phác họa đồ thị của hàm số đạo hàm M'(t). Trong những năm nào thì đạo hàm là âm?



14-16 Vẽ đồ thị hàm số f và bên dưới nó phác họa đồ thị của hàm số f' theo cách của các Bài tập 4-11. Từ đồ thị của f ', bạn có thể đoán ra công thức của f ' không?

14. f(x) = sin x

15. f(x) = e^x

16. f(x) = ln x

17. Cho f(x) = x^2.

(a) Ước tính những giá trị của f '(0), f '(1/2), f '(1), và f'(2) bằng cách dùng máy tính vẽ để phóng to đồ thị của f.

(b) Dùng đối xứng để suy ra những giá trị của f '(- 1/2), f '(- 1), và f '(- 2).

(c) Dùng những kết quả từ phần (a) và (b) để dự đoán một công thức cho f '(x).

(d) Dùng định nghĩa của đạo hàm để chứng tỏ dự đoán của bạn trong phần (c) là đúng.

18. Cho $f(x) = x^3$.

(a) Ước tính những giá trị của f '(0), f '(1/2), f '(1), f '(2) và f'(3) bằng cách dùng máy tính vẽ để phóng to đồ thị của f.

(b) Dùng đối xứng để suy ra những giá trị của f '(- 1/2), f '(- 1), f '(- 2)và f '(- 3).

(c) Dùng những kết quả từ phần (a) và (b) để vẽ đồ thị của f '.

(d) Đoán một công thức cho f '(x).

(d) Dùng định nghĩa của đạo hàm để chứng tỏ dự đoán của bạn trong phần (d) là đúng.

19-29 Tìm đạo hàm của hàm số sau bằng cách dùng định nghĩa của đạo hàm. Cho biết tập xác định của hàm số và tập xác định của đạo hàm của nó.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x - {}^{1}/_{3}$

20. $f(x) = mx + b$

21. $f(t) = 5t - 9t^2$

22. $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

23. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

24. $f(x) = x + \sqrt{x}$

25. $g(x) = \sqrt{1+2x}$

26. $f(x) = \dfrac{3+x}{1-3x}$

27. $G(t) = \dfrac{4t}{t+1}$

28. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

30. (a) Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{6-x}$ từ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$ và các phép biến đổi của Bài 1.3.

(b) Dùng đồ thị của phần (a) để phác họa đồ thị hàm số f '.

(c) Dùng định nghĩa của đạo hàm để tìm f '. Tập xác định của f và f ' là gì?

(d) Dùng máy tính để vẽ đồ thị f ' và so sánh với đồ thị mà bạn phác họa trong phần (b).

31. (a) Nếu $f(x) = x^4 + 2x$, tìm f '(x).

(b) Bằng cách so sánh đồ thị của f và f ' (vẽ bằng máy) để kiểm tra kết quả bạn làm ở phần (a) xem có hợp lý không.

32. (a) Nếu $f(t) = t^2 - \sqrt{t}$, tìm f '(t).

(b) Bằng cách so sánh đồ thị của f và f ' (vẽ bằng máy để kiểm tra kết quả bạn làm ở phần (a) xem có hợp lý không.

33. Tỷ lệ thất nghiệp U(t) thay đổi theo theo thời gian. Bảng dưới (theo Thống Kê của Văn Phòng Lao Động) cho thấy phần trăm người thất nghiệp trong lực lượng lao động Mỹ từ 1993 đến 2002.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1993	6.9	1998	4.5
1994	6.1	1999	4.2
1995	5.6	2000	4.0
1996	5.4	2001	4.7
1997	4.9	2002	5.8

(a) U '(t) có nghĩa là gì? Đơn vị nó thế nào?

(b) Lập ra bảng giá trị của U '(t).

34. Cho P(t) là phần trăm dân số Mỹ dưới 18 tuổi tại thời điểm t. Bảng dưới cho những giá trị của hàm số này trong những năm thống kê dân số từ 1950 đến 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

(a) P'(t) có nghĩa là gì? Đơn vị nó thế nào?

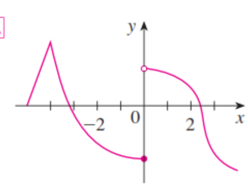
(b) Lập ra bảng giá trị ước tính của P '(t).

(c) Vẽ đồ thị P và P'.

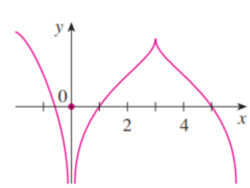
(d) Những giá trị của P '(t) có thể tính chính xác hơn bằng cách nào?

35-38. Đồ thị của f được cho trước. Cho biết, có giải thích, những điểm nào tại đó f không khả vi.

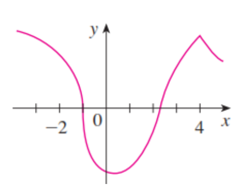
35.



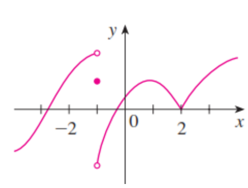
36.



37.



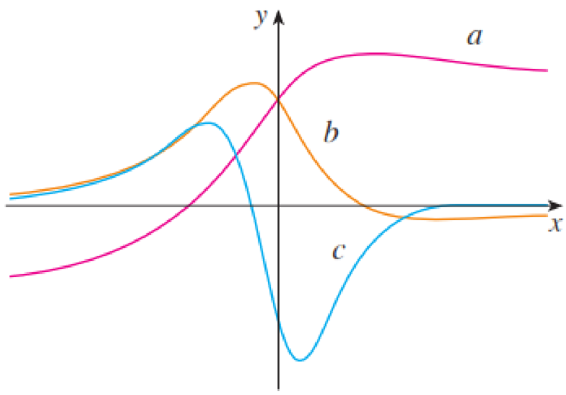
38.



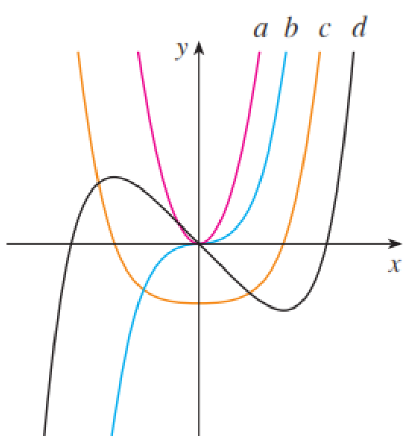
39. Vẽ đồ thị (bằng máy) hàm số f(x) = x + $\sqrt{|x|}$. Phóng to liên tiếp, trước tiên đến điểm (- 1, 0) và rồi đến điểm gốc. Dáng vẽ của f quanh điểm này có gì khác nhau? Bạn kết luận gì về tính khả vi của f?

40. Phóng to đến điểm (1, 0), và (- 1, 0) vào đồ thị (vẽ bằng máy) của hàm số g(x) = $(x^2 - 1)^{3/2}$. Bạn nhận xét gì? Điều bạn nhận xét có nghĩa gì đối với tính khả vi của g.

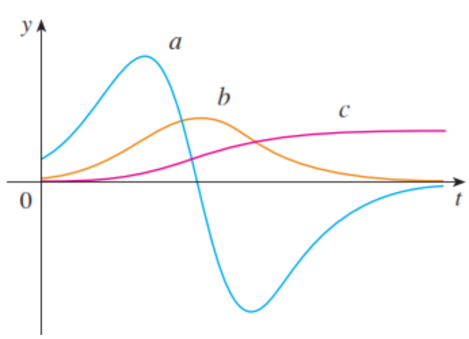
41. Hình dưới là đồ thị của f, f ‘, và f “. Hãy nhận diện mỗi đường cong và giải thích sự lựa chọn của bạn.



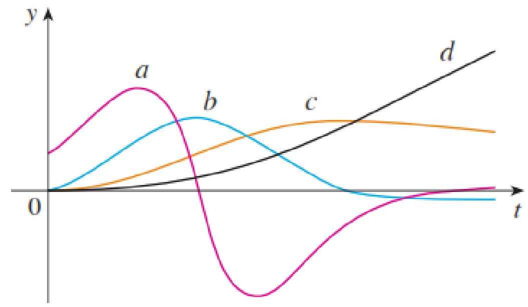
42. Hình dưới là đồ thị của f, f ‘, f “, và f ”’. Hãy nhận diện mỗi đường cong và giải thích sự lựa chọn của bạn.



43. Hình dưới là đồ thị của ba hàm số. Một là hàm số vị trí của một ô-tô, một là vận tốc của ô-tô đó, và một là gia tốc của nó. Hãy nhận diện mỗi đường cong và giải thích sự lựa chọn của bạn.



44. Hình dưới là đồ thị của bốn hàm số. Một là hàm số vị trí của một ô-tô, một là vận tốc của ô-tô đó, một là gia tốc của nó, và một là độ giật xốc Hãy nhận diện mỗi đường cong và giải thích sự lựa chọn của bạn.

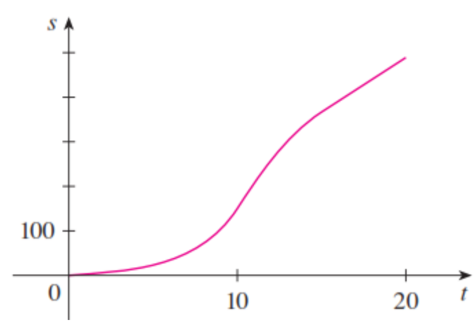


45-46 Dùng định nghĩa đạo hàm để tìm f ‘(x) và f “(x). Sau đó vẽ đồ thị f, f ‘, và f “ trên cùng một khung hình và kiểm tra xem bạn có trả lời hợp lý chưa.

45. f(x) = 1 + 4x – x^2 **46.** f(x) = 1/x

47. Biết f(x) = $2x^2 - x^3$, tìm f ‘(x), f “(x), f ”’(x), và $f^{(4)}(x)$. Vẽ đồ thị bốn hàm số này trên cùng một khung hình. Các đồ thị này có khớp với đoán nhận hình học của những đạo hàm này không?

48. (a) Đồ thị của một hàm số vị trí của một ô-tô được cho bên dưới, trong đó s tính bằng feet và t bằng giây. Dùng đồ thị này để vẽ đồ thị vận tốc và gia tốc của ô-tô. Tìm gia tốc lúc t = 10 giây.



(b) Dùng đồ thị gia tốc trong phần (a) để ước tính cú giật xốc lúc t = 10 giây. Đơn vị của độ giật xốc là gì?

49. Cho f(x) = $\sqrt[3]{x}$.

(a) Nếu a ≠ 0, dùng Phương trình 2.7.5 để tìm f ‘(a).

(b) Chứng tỏ f ‘(0) không tồn tại.

(c) Chứng tỏ rằng y = $\sqrt[3]{x}$ có tiếp tuyến thẳng đứng tại (0, 0). (Nhớ lại hình dạng của đồ thị f. Xem Hình 13 trong Bài 1.2.)

50. (a) Nếu g(x) = $x^{2/3}$, chứng tỏ rằng g ’(0) không tồn tại.

(b) Nếu a ≠ 0, tìm g ‘(a).

(c) Chứng tỏ rằng y = $x^{2/3}$ có tiếp tuyến thẳng đứng tại (0, 0).

(d) Minh họa phần (c) bằng cách vẽ đồ thị bằng máy của hàm số y = $x^{2/3}$.

51. Chứng tỏ hàm số f(x) = | x – 6 | không khả vi tại 6. Tìm công thức của f ‘ và phác họa đồ thị của nó.

52. Tại đâu thì hàm số phần nguyên f(x) = [[x]] không khả vi? Tìm công thức của f “ và phác họa đồ thị của nó.

53. (a) Vẽ đồ thị của hàm số f(x) = x | x |.

(b) Tìm x tại đó f khả vi.

(c) Tìm công thức cho f ‘.

54. Đạo hàm bên trái và **đạo hàm bên phải** của f tại a được định nghĩa bởi

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

và

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

nếu những giới hạn này tồn tại. Khi đó f ‘(a) tồn tại khi và chỉ khi những đạo hàm một bên này tồn tại và bằng nhau.

(a) Tìm $f'_-(4)$ và $f'_+(4)$ của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0 & khi\ \ x \le 0 \\ 5 - x & khi\ \ 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & khi\ x \ge 4 \end{cases}$$

(b) Vẽ đồ thị của f.

(c) Tìm những điểm gián đoạn của f.

(d) Tìm những điểm không khả vi của f.

55. Nhớ rằng hàm số f được gọi là *chẵn* nếu f(- x) = f(x) và lẻ nếu f(- x) = - f(x) với mọi x trong tập xác định. Chứng tỏ những tính chất sau.

(a) Đạo hàm của một hàm số chẵn là một hàm số lẻ.

(b) Đạo hàm của một hàm số lẻ là một hàm số chẵn.

(d) Tìm những điểm không khả vi của f.

56. Khi bạn mở vòi nước nóng, nhiệt độ T của nước phụ thuộc vào thời gian nước chảy.

(a) Phác họa một đồ thị có thể có của T xem như một hàm số theo thời gian t kể từ lúc vòi bắt đầu mở ra.

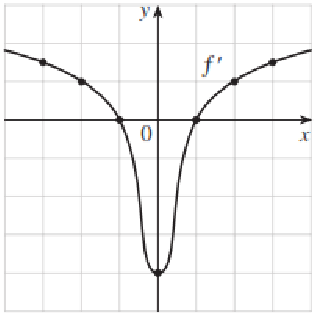
(b) Mô tả vận tốc biến thiên của T đối với t thay đổi thế nào khi t tăng lên.

(c) Phác họa đồ thị của đạo hàm của T.

57. Gọi l là đường tiếp tuyến voi parabol y = x^2 tại điểm (1, 1). *Góc nghiêng* của l là góc θ mà l hợp với tia Ox của hệ trục Oxy. Tính θ đúng đến độ gần nhất.

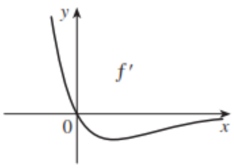
ĐÁP SỐ

1. (a) 1.5
(b) 1
(c) 0
(d) −4
(e) 0
(f) 1
(g) 1.5

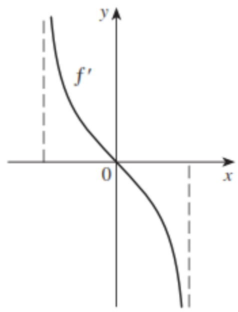


3. (a) II (b) IV (c) I (d) III

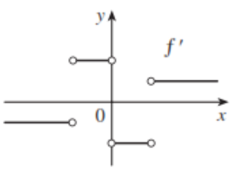
5.



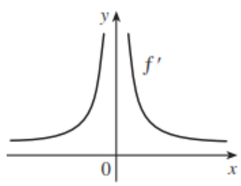
7.



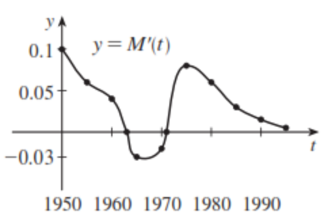
9.



11.

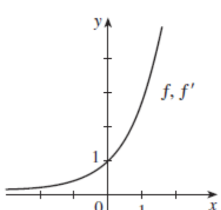


13.



1963 to 1971

15.



$f'(x) = e^x$

17. (a) 0, 1, 2, 4 (b) −1, −2, −4 (c) $f'(x) = 2x$

19. $f'(x) = \frac{1}{2}, \mathbb{R}, \mathbb{R}$ **21.** $f'(t) = 5 - 18t, \mathbb{R}, \mathbb{R}$

23. $f'(x) = 3x^2 - 3, \mathbb{R}, \mathbb{R}$

25. $g'(x) = 1/\sqrt{1+2x}, \left[-\frac{1}{2}, \infty\right), \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

27. $G'(t) = \dfrac{4}{(t+1)^2}, (-\infty, -1) \cup (-1, \infty), (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

29. $f'(x) = 4x^3, \mathbb{R}, \mathbb{R}$ **31.** (a) $f'(x) = 4x^3 + 2$

33. (a) Tốc độ mà tỷ lệ thất nghiệp thay đổi, tính theo đơn vị là số phần trăm thất nghiệp mỗi năm.

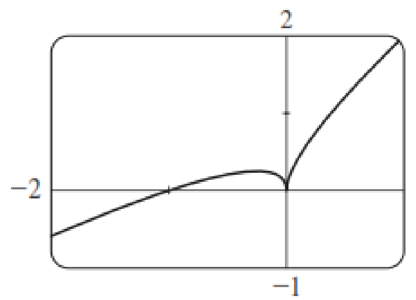
(b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1993	−0.80	1998	−0.35
1994	−0.65	1999	−0.25
1995	−0.35	2000	0.25
1996	−0.35	2001	0.90
1997	−0.45	2002	1.10

35. – 4 (điểm góc), 0 (gián đoạn)

37. – 1 (tiếp tuyến thẳng đứng), 4 (điểm góc)

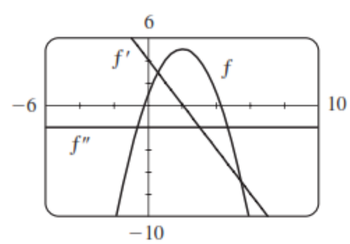
39. Khả vi tại – 1; không khả vi tại 0



41. a = f, b = f ‘, c = f “

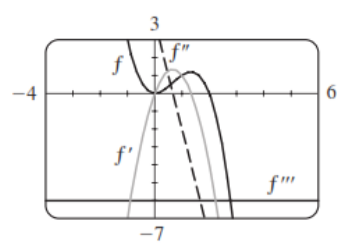
43. a = gia tốc, b : vận tốc, c = vị trí

45.



$f'(x) = 4 - 2x,$
$f''(x) = -2$

47.

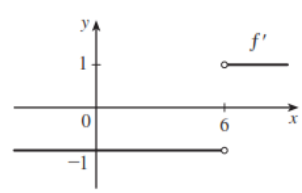


$f'(x) = 4x - 3x^2,$
$f''(x) = 4 - 6x,$
$f'''(x) = -6,$
$f^{(4)}(x) = 0$

49. (a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

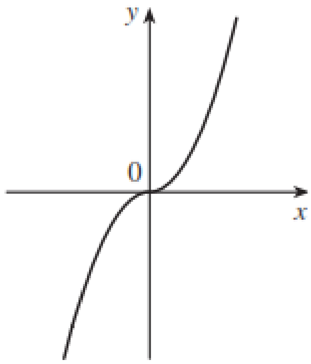
51. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 6 \\ 1 & \text{if } x > 6 \end{cases}$

or $f'(x) = \dfrac{x-6}{|x-6|}$



53. (b) Mọi x (c) $f'(x) = 2|x|$

(a)



57. 63^{o}

CHƯƠNG 2 . ÔN

KIỂM TRA CÁC KHÁI NIỆM ĐÃ HỌC

1. Giải thích những ký hiệu sau có nghĩa là gì và minh họa bằng một đồ thị.

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

(c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

(e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

2. Mô tả một số cách mà giới hạn không tồn tại. Minh họa bằng đồ thị.

3. Phát biểu các Quy Tắc Giới Hạn sau.
(a) Quy tắc Cộng (b) Quy tắc Trừ
(c) Quy tắc nhân hằng số (d) Quy tắc Nhân
(e) Quy tắc Thương (f) Quy tắc Lũy thừa
(g) Quy tắc Căn

4. Định lý Kẹp Giữa là gì?

5. (a) Nói đường thẳng x = a là tiệm cận đứng của đường cong y = f(x) có nghĩa là gì? Vẽ những đường cong để minh họa những tình huống tiệm cận khác nhau.

(b) Nói đường thẳng y = L là tiệm cận ngang của đường cong y = f(x) có nghĩa là gì? Vẽ những đường cong để minh họa những tình huống tiệm cận khác nhau.

6. Những đường cong nào dưới đây có tiệm cận đứng? Tiệm cận ngang?
(a) $y = x^4$ (b) y = sin x
(c) y = tan x (d) $y = \tan^{-1} x$
(e) $y = e^x$ (f) y = ln x
(g) y = 1/x (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) f liên tục tại a có nghĩa là gì?

(b) f liên tục trên khoảng (- ∞, ∞) có nghĩa là gì? Bạn có thể nói gì về đồ thị của một hàm số như thế?

8. Định Lý Giá Trị Trung Gian là gì?

9. Viết biểu thức tính độ dốc của tiếp tuyến với đồ thị y = f(x) tại điểm (a, f(a)).

10. Giả sử một chất điểm di chuyển trên đường thẳng với phương trình vị trí f(t) tại thời điểm t. Viết biểu thức tính vận tốc tức thời của chất điểm tại t = a. Làm cách nào bạn lý giải vận tốc này bằng cách dùng đồ thị của f?

11. Nếu y = f(x) và x biến thiên từ x_1 đến x_2, viết biểu thức của

(a) Tốc độ biến thiên trung bình của y đối với x trên đoạn $[x_1, x_2]$.
(b) Tốc độ biến thiên tức thời của y đối với x tại $x = x_1$.

12. Định nghĩa đạo hàm của f ‘(a). Luận bàn hai cách lý giải con số này.

13. Định nghĩa đạo hàm bậc hai của f. Nếu f(t) là hàm số vị trí của một chất điểm, bạn lý giải cách nào về đạo hàm bậc hai?

14. (a) f khả vi tại a có nghĩa là gì?

(b) Liên hệ giữa tính khả vi và tính liên tục của hàm số là gì?

(c) Phác họa đồ thị một hàm số liên tục nhưng không khả vi tại a = 2.

15. Mô tả một vài cách trong đó một hàm số có thể không khả vi. Minh họa bằng đồ thị.

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG-SAI

Xác định các phát biểu sau là đúng hay sai. Nếu đúng, giải thích tại sao. Nếu sai, giải thích tại sao đồng thời đưa ra một phản ví dụ.

1. $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{2x}{x-4} - \lim_{x\to 4}\frac{8}{x-4}$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4} = \frac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Nếu $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ và $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, thế thì $\lim_{x\to 5} [\, f(x)/g(x)\,]$ không tồn tại.

5. Nếu $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ và $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, thế thì $\lim_{x\to 5} [\, f(x)/g(x)\,]$ không tồn tại.

6. Nếu $\lim_{x\to 6} [f(x)g(x)]$ tồn tại, thế thì giới hạn phải là f(6)g(6).

7. Nếu p là đa thức, thế thì $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

8. Nếu $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ và $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, thế thì $\lim_{x\to 0} [\, f(x) - g(x)\,] = 0$.

9. Một hàm số có thể có hai tiệm cận ngang khác nhau.

10. Nếu f có tập xác định [0, ∞) và không có tiệm cận ngang, thế thì $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

11. Nếu đường thẳng x = 1 là tiệm cận đứng của y = f(x), thế thì f không xác định tại 1.

12. Nếu f(1) > 0 và f(3) < 0, thế thì tồn tại một số c giữa 1 và 3 sao cho f(c) = 0.

13. Nếu f liên tục tại 5 và f(5) = 2 và f(4) = 3, thế thì $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

14. Nếu f liên tục trên [-1, 1] và f(- 1) = 4 và f(1) = 3, thế thì tồn tại một số r sao cho | r | < 1 và f (r) = π.

15. Cho f là một hàm số sao cho $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Thế thì tồn tại một số δ sao cho nếu 0 < | x | < δ, thế thì | f(x) – 6 | < 1.

16. Nếu f(x) > 1 với mọi x và $\lim_{x\to 0} f(x)$ tồn tại, thế thì $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

17. Nếu f liên tục tại a, thế thì f khả vi tại a.

18. Nếu f ‘(r) tồn tại, thế thì $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

20. Phương trình $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ có một nghiệm thuộc khoảng (0, 2).

BÀI TẬP

1. Cho biết đồ thị của f.

(a) **Tìm mỗi giới hạn sau hoặc giải thích tại sao nó không tồn tại.**

(i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to 4} f(x)$

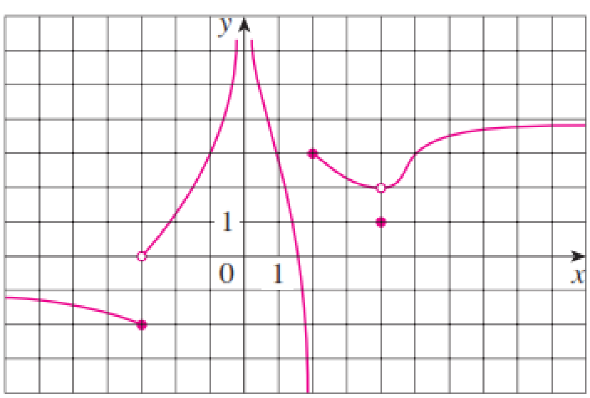
(v) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(vii) $\lim_{x\to \infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

(b) Tìm phương trình các tiệm cận ngang.

(c)) Tìm phương trình các tiệm cận đứng.

(d) Tìm những số tại đó f gián đoạn? Giải thích.



2. Phác họa đồ thị của một hàm số nào đó thỏa mãn tât cả những điều kiện sau:

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2,\quad \lim_{x\to \infty} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to -3} f(x) = \infty,$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2,$

3-20. Tìm các giới hạn sau.

3. $\lim_{x\to 1} e^{x^3 - x}$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

5. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

7. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h-1)^3 + 1}{h}$

8. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

9. $\lim_{r\to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\lim_{v\to 4^+} \dfrac{4 - v}{|4 - v|}$

11. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 + 5u^2 - 6u}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 3x^2}$

13. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

14. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

15. $\lim_{x\to \pi^-} \ln(\sin x)$

16. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1 - 2x^2 - x^4}{5 + x - 3x^4}$

17. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x\right)$

18. $\lim_{x\to \infty} e^{x - x^2}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)$

21-22 Dùng đồ thị (vẽ bằng máy tính) để tìm ra các tiệm cận của đường cong. Rồi chứng tỏ điều bạn tìm ra là đúng.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$

23. Nếu $2x - 1 \le f(x) \le x^2$ với $0 < x < 3$,tìm $\lim_{x \to 1} f(x)$.

24. Chứng tỏ rằng $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

25-28. Chứng minh các giới hạn sau, dùng định nghĩa chính xác của giới hạn.

25. $\lim_{x\to 2} (14 - 5x) = 4$ **26.** $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x) = -2$ **28.** $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x - 4}} = \infty$

29. Cho

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & khi\ \ x < 0 \\ 3 - x & khi\ \ 0 \le x < 3 \\ (x-3)^2 & khi\ \ x > 3 \end{cases}$$

(a) Tìm mỗi giới hạn sau, nếu nó tồn tại.

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) f gián đoạn tại đâu?
(c) Phác họa đồ thị của f.

30. Cho

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & khi\ \ 0 \le x \le 2 \\ 2 - x & khi\ \ 2 < x \le 3 \\ x - 4 & khi\ \ 3 < x < 4 \\ \pi & khi\ \ x \ge 4 \end{cases}$$

(a) Tại mỗi số 2, 3, và 4, hãy cho biết hoặc g liên tục bên trái, liên tục bên phải, hoặc liên tục.
(b) Phác họa đồ thị của g.

31-32. Chứng tỏ các hàm số sau liên tục trên tập xác định, mà ta phải xác định.

31. $h(x) = xe^{\sin x}$ **32.** $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$

33-34. Dùng Định Lý Giá Trị Trung Gian để chứng tỏ các phương trình sau có nghiệm trên khoảng cho trước.
33. $2x^3 + x^2 + 2 = 0$. (- 2, - 1)

34. $e^{-x^2} = x$, (0, 1)

35. (a) Tìm độ dốc của tiếp tuyến của đường cong $y = 9 - 2x^2$ tại điểm (2, 1).
(b) Tìm phương trình của tiếp tuyến này..

36. Tìm phương trình của tiếp tuyến với đường cong

$$y = \frac{2}{1 - 3x}$$

tại điểm có hoành độ 0 và – 1.

37. Một chất điểm di chuyển trên một đường thẳng có phương trình giờ là $s = 1 + 2t + \dfrac{1}{4}t^2$, t tính bằng giây, s bằng mét.
(a) Tìm vận tốc trung bình trên mỗi đoạn sau.
(i) [1, 3] (ii) [1, 2]
(iii) [1, 1.5] (iv) [1, 1.1]
(b) Tìm vận tốc tức thời khi t = 1.

38. Theo Định luật Boyle, nếu nhiệt độ của một chất khí trong một bình kín được giữ không đổi, thì tích của áp suất P và thể tích V là một hằng số. Giả sử, đối với một chất khí nào đó PV = 800, trong đó P tính bằng cân/in-xơ vuông và V tính bằng in-xơ khối.
(a) Tìm tốc độ biến thiên trung bình của P khi V tăng từ 200 in^3 đến 250 in^3.
(b) Biểu diễn V như hàm số theo P và chứng tỏ tốc độ biến thiên tức thời của V đối với P là tỷ lệ nghịch với bình phương của P.

39. (a) Dùng định nghĩa đạo hàm để tìm f ‘(2), trong đó $f(x) = x^3 - 2x$.
(b) Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 - 2x$ tại điểm (2, 4).
(c) Minh họa phần (b) bằng cách vẽ (bằng máy) đồ thị và tiếp tuyến trên cùng màn hình.

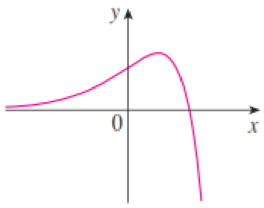
40. Tìm hàm số f và số a sao cho

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

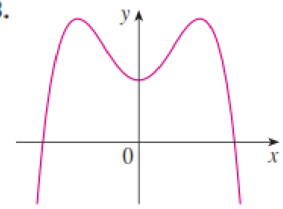
41. TỔng chi phí để trả nợ vay của sinh viên với lãi suất r% mỗi năm là C = f®.
(a) Tìm ý nghĩa của đạo hàm f ‘(r). Đơn vị của nó là gì?
(b) Phát biểu f ‘(10) = 1200 có nghĩa là gì?
(c) Có phải f ‘(r) luôn dương hay có thay đổi dấu?

42-44. Sao lại đồ thị của hàm số dưới đây rồi vẽ đồ thị của đạo hàm hàm số ngay bên dưới nó.

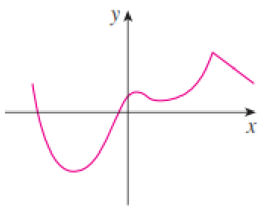
42.



43.



44.



45. (a) Nếu f(x) = $\sqrt{3-5x}$, dùng định nghĩa đạo hàm để tìm f ‘(x).

(b) Tìm tập xác định của f và f ‘.

(c) Vẽ đồ thị bằng máy tính trên cùng một khung hình. So sánh hai đồ thị để kiểm tra kết quả bạn làm ở phần (a).

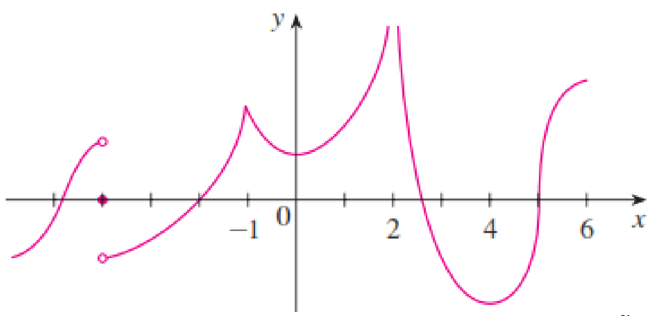
46. (a) Tìm các tiệm cận của đồ thị f(x) = $\dfrac{4-x}{3+x}$ và dùng chúng để vẽ đồ thị hàm số.

(b) Dùng đồ thị của phần (a) để suy ra đồ thị của f ‘.

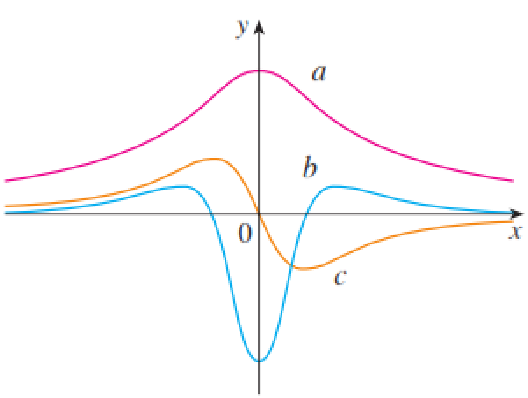
(c) Dùng định nghĩa đạo hàm để tìm f ‘(x).

(d) Dùng máy tính để vẽ f ‘ và so sánh với đồ thị bạn vẽ ở phần (b).

47. Cho biết đồ thị của f. Tìm có lập luận các số tại đó f không khả vi.



48. Hình dưới là đồ thị của f, f ‘, và f ”. Nhận diện mỗi đường cong, và giải thích sự lựa chọn của bạn.



49. Gọi C(t) là tổng số tiền (tiền đồng lẫn tiền giấy) mà Mỹ đang cho lưu hành tại thời điểm t. Bảng bên dưới cho thấy giá trị của hàm số này từ năm 1980 đến 2000 tính vào thời điểm 30/9, đơn vị tỷ đô la. Giải thích và ước tính giá trị của C ‘(1990).

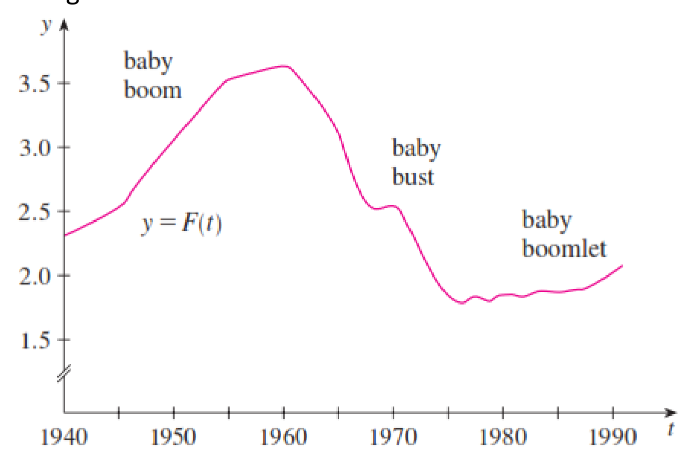
t	1980	1985	1990	1995	2000
$C(t)$	129.9	187.3	271.9	409.3	568.6

50. *Tỷ xuất mắn con* tại thời điểm t, ký hiệu F(t), là ước tính số con trung bình của mỗi phụ nữ (giả sử là tỷ xuất sinh tại thời điểm hiện hành là không đổi). Đồ thị cho thấy sự giao động của tỷ xuất mắn con của Mỹ từ 1940 đến 1990.

(a) Ước tính giá trị của F ‘(1950), F ‘(1965), và F ‘(1987).

(b) Ý nghĩa của những đạo hàm này là gì?

(c) Bạn có thể đưa ra lý do của những đạo hàm này không?



51. Giả sử | f(x) | ≤ g(x) với mọi x, trong đó $\lim_{x\to\alpha}$ g(x) **= 0.** Tìm $\lim_{x\to\alpha}$ f(x)**.**

52. Cho f(x) = [[x]] + [[- x]].

(a) Với những giá trị nào của a thì $\lim_{x\to a}$ f(x) tồn tại.

(b) Tại số nào thì f gian đoạn?

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Trong phần trình bày về các nguyên tắc giải toán của chúng tôi chúng tôi đã đề cập đến chiến thuật *Đưa vào các yếu tố bổ sung* (xem Phương Pháp Giải Toán cuối Chương 1). Trong các ví dụ sau chúng ta sẽ thấy nguyên tắc này đôi khi hữu dụng khi tính các giới hạn. Phương pháp là thay đổi biến số - bằng cách giới thiệu một biến số mới liên hệ đến biến số gốc – khiến bài toán tìm giới hạn được đơn giản hơn. Sau này, trong Bài 5.5, ta sẽ sử dụng rộng rãi hơn nguyên tắc này.
Do đó độ giật xốc j là tốc độ biến thiên của gia tốc. Sở dĩ được gọi là giật xốc vì nó có nghĩa là một sự thay đổi đột ngột về gia tốc, khiến vật thể chuyển động bất ngờ.

Trong bài 4.3 ta sẽ biết thêm vai trò của f " trong việc tạo dáng của đồ thị hàm số f. Và trong chương 11, ta sẽ biết bằng cách nào đạo hàm cấp hai và cấp cao hơn giúp chúng ta biểu diễn các hàm số thành tổng của một chuỗi vô hạn.

VÍ DỤ 1 Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$, trong đó c là hằng số khác 0.

GIẢI Bề ngoài xem ra giới hạn này có vẽ thử thách. Trong bài 2.3 ta tính vài giới hạn trong đó cả tử và mẫu đều tiến đến 0. Khi đó phương pháp chúng ta sử dụng là thực hiện một số biến đổi đại số để đưa đến sự ước lược các nhân tử chung, nhưng ở đây không rõ phải dùng đến loại biến đổi gì.

Vì thế ta thử đưa vào một biến mới t cho bởi phương trình

$$t = \sqrt[3]{1+cx}$$

Ta cần phải biểu diễn x theo t, do đó ta giải phương trình này:

$$t^3 = 1 + cx \qquad\qquad x = \frac{t^3-1}{c}$$

Chú ý là $x \to 0$ tương đương với $t \to 1$. Điều này cho phép ta biến đổi giới hạn đã cho thành giới hạn theo t:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x} = \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t^3-1)/c}$$
$$= \lim_{t\to 1}\frac{c(t-1)}{(t^3-1)}$$

Phép đổi biến cho phép ta thay một giới hạn tương đối phức tạp thành một giới hạn đơn giản hơn thuộc dạng ta đã từng làm. Phân tích mẫu ra nhân tử, ta được

$$\lim_{t\to 1}\frac{c(t-1)}{(t^3-1)} = \lim_{t\to 1}\frac{c(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$
$$= \lim_{t\to 1}\frac{c}{t^2+t+1} = \frac{c}{3}$$

Những bài tập sau mục đích để trắc nghiệm và thử thách kỹ năng giải toán của bạn. Một số bài đòi hỏi một lượng thời gian suy nghĩ đáng kể, vì thế đừng mất hy vọng nếu bạn chưa giải được ngay. Nếu bí, bạn có thể tìm sự giúp đỡ bằng cách xem lại phần biện giải về nguyên tắc giải toán ở bài đầu,

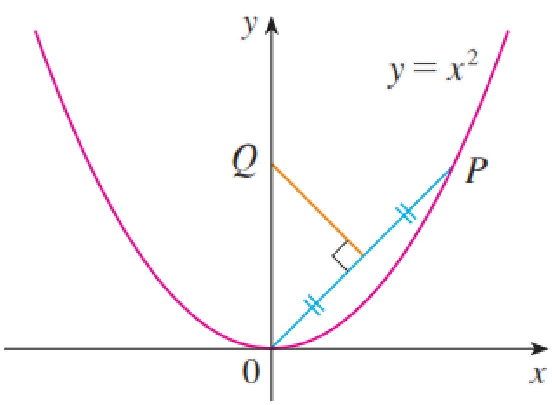
BÀI TẬP

1. Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

2. Tìm a và b sao cho $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$

3. Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1}{x}$

4. Hình dưới cho thấy điểm P trên parabol y = x^2 và điểm Q là điểm mà trung trực của OP cắt trục y. Khi P tiến đến điểm gốc dọc theo parabol, điều gì xảy ra với Q? Nó có tiến đến một giới hạn nào không? Nếu có, hãy tìm giới hạn ấy.



5. Nếu chỉ [[x]] là hàm số phần nguyên lớn nhất , tìm

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{[[x]]}$

6. Vẽ miền phẳng xác định bởi các phương trình sau.

(a) $[[x]]^2 + [[y]]^2 = 1$ (b) $[[x]]^2 - [[y]]^2 = 3$

(c) $[[x + y]]^2 = 1$ (d) [[x]] + [[y]] = 1

7. Tìm tất cả giá trị của a sao cho f liên tục trên R

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & khi \quad x \le a \\ x^2 & khi \quad x > a \end{cases}$$

8. Điểm bất biến của một hàm số f là một số c trong tập xác định sao cho f(c) = c. (hàm số không làm thay đổi c; nó bất biến.)

(a) Vẽ đồ thị của một hàm số liên tục có tập xác định là [0, 1] mà tập giá trị cũng nằm trong [0, 1]. Tìm điểm bất biến của f.

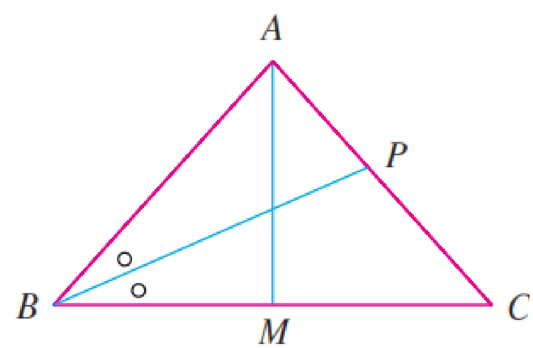
(b) Hãy ra sức vẽ đồ thị của một hàm số liên tục có tập xác định là [0, 1] mà tập giá trị cũng nằm trong [0, 1] sao cho nó không có điểm bất biến. Ta gặp trở ngại là gì?

(c) Dùng Định Lý Giá Trị Trung Gian để chứng minh rằng bất kỳ hàm số liên tục nào có tập xác định [0, 1] và tập giá trị là tập con của [0, 1] phải có một điểm bất biến.

9. Nếu $\lim_{x \to a}$ [f(x) + g(x)] = 2 và $\lim_{x \to a}$ [f(x) - g(x) = 1, tìm $\lim_{x \to a}$ [f(x)g(x)].

10. (a) Hình dưới là một tam giác cân ABC , cân tại A. Phân giác góc B cắt cạnh AC tại điểm P. Giả sử cạnh đáy BC cố định nhưng chiều cao |AM| của tam giác tiến đến 0, tức điểm A tiến đến trung điểm M của BC. Điều gì xảy ra với P trong quá trình này. Nó có tiến đến một giới hạn nào không? Nếu có, hãy tìm giới hạn ấy.

(b) Cố phác họa đường đi của điểm P trong quá trình này. Rồi tìm một phương trình của đường cong này và dùng phương trình ấy để vẽ đường cong.



11. (a) Nếu khởi hành từ vĩ độ 0^o và đi về hướng tây, ta gọi T(x) là nhiệt độ tại điểm x tại thời điểm cho trước. Giả sử T là hàm số liên tục theo x, chứng tỏ rằng tại thời điểm cho trước có ít nhất hai điểm đối tâm trên đường xích đạo có cùng nhiệt độ.

(b) Kết quả của câu (a) có vẫn đúng trên bất kỳ đường tròn nào nằm trên mặt địa cầu không?

(c) Kết quả của câu (a) có vẫn đúng cho khí áp và cho độ cao trên mặt nước biển.

12. Nếu f là hàm số khả vi và g(x) = xf(x), dùng định nghĩa đạo hàm để chứng tỏ rằng g '(x) = xf '(x) + f(x).

13. Giả sử f là hàm số thỏa phương trình

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

với mọi số thực x và y. Giả sử thêm rằng

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Tìm f(0) (b) Tìm f '(0) (c) Tìm f '(x)

14. Giả sử f là hàm số có tính chất $|f(x)| \le x^2$ với mọi x.
Chứng tỏ rằng f (0) = 0 và f '(0) = 0.

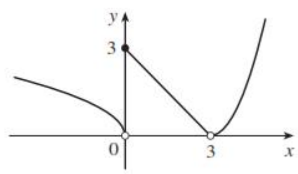
ĐÁP SỐ

Trắc nghiệm đúng - sai

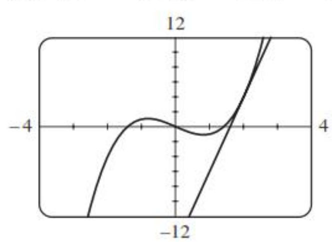
1. Sai **3.** Đúng **5.** Sai **7.** Đúng
9. Đúng **11.** Sai **13.** Đúng **15.** Đúng
17. Sai **19.** Sai

Bài tập

1. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) Does not exist (iv) 2
(v) ∞ (vi) $-\infty$ (vii) 4 (viii) -1
(b) $y = 4, y = -1$ (c) $x = 0, x = 2$ (d) $-3, 0, 2, 4$
3. 1 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** 3 **9.** ∞ **11.** $\frac{4}{7}$ **13.** $\frac{1}{2}$
15. $-\infty$ **17.** 2 **19.** $\pi/2$ **21.** $x = 0, y = 0$ **23.** 1
29. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) Does not exist (iv) 0 (v) 0 (vi) 0
(b) At 0 and 3 (c)

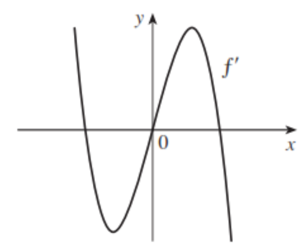


31. $\mathbb{R}$ **35.** (a) -8 (b) $y = -8x + 17$
37. (a) (i) 3 m/s (ii) 2.75 m/s (iii) 2.625 m/s
(iv) 2.525 m/s (b) 2.5 m/s
39. (a) 10 (b) $y = 10x - 16$
(c)

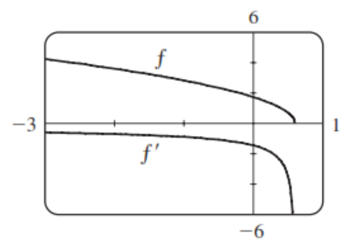


41. (a) Tốc độ biến thiên của chi phí đối với biến thiên của lãi suất; đô-la/(phần trăm mỗi năm)
(b) Khi lãi suất tăng quá 10%, chi phí tăng với tốc độ 1200$/(phần trăm mỗi năm).
(c) Luôn luôn dương

43.



45. (a) $f'(x) = -\frac{5}{2}(3 - 5x)^{-1/2}$ (b) $(-\infty, \frac{3}{5}], (-\infty, \frac{3}{5})$
(c)



47. – 4 (gián đoạn), - 1(điểm góc), 2 (gián đoạn), 5 (tiếp tuyến thẳng đứng)

49. Tốc độ biến thiên của tổng số tiền Mỹ (đv tỷ đô-la) đang lưu hành mỗi năm; 22.2 tỷ/năm.

51. 0

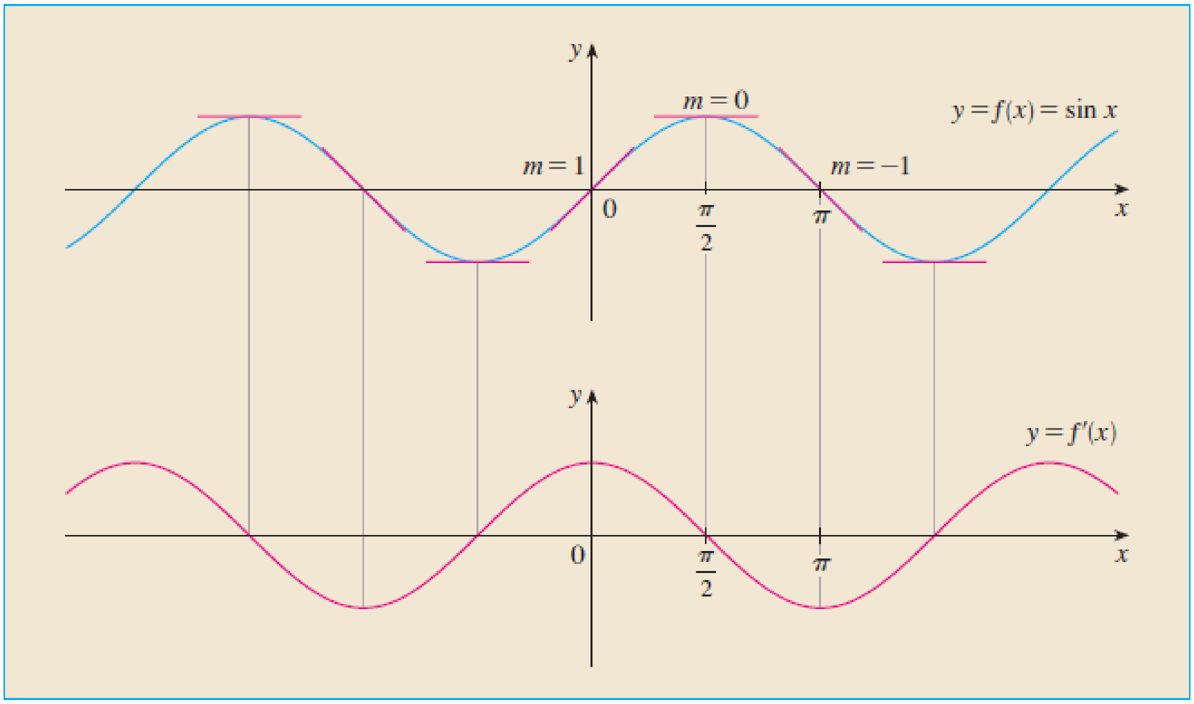
BÀI TẬP LÀM THÊM

1. 2/3 **3.** – 4 **5.** 1 **7.** $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

9. ¾ **11.** (b) Có (c) Không

13. (a) 0 (b) 1 (c) $f'(x) = x^2 + 1$

Chương 3. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

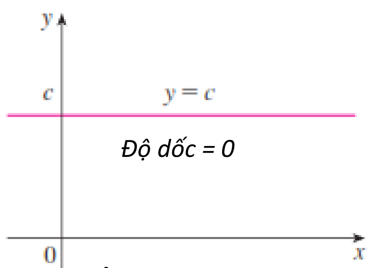


Trần Quang Nghĩa dịch

3.1. Đạo Hàm Của Đa thức và Hàm Số Mũ.............. 190
3.2. Đạo Hàm Của Tích và Thương............................201
3.3. Đạo Hàm Của Hàm Số Lượng Giác.......................209
3.4. Quy Tắc Dây Xích.......................... 217
3.5. Tính Liên Tục..228
3.6. Đạo Hàm Hàm Số Logarit....................................237
3.7. Tốc Độ Biến Thiên Trong Khoa Học Xã Hội
Và Tự Nhiên...244
3.8. Tăng Trưởng Và Phân Rã Theo Hàm Mũ...........259
3.9. Biến Thiên Của Đại Lượng Liên Hệ......................267
3.10. Tính Xấp Xỉ Bậc Nhất và Vi Phân.......................275
ÔN CUỐI CHƯƠNG...282
BÀI TẬP LÀM THÊM...287

BÀI 3. 1. ĐẠO HÀM CỦA ĐA THỨC VÀ HÀM SỐ MŨ

Trong bài này ta sẽ học cách tính đạo hàm hàm số hằng, hàm số lũy thừa, hàm số đa thức, và hàm số mũ.
Hãy bắt đầu với hàm số đơn giản nhất, hàm số hằng f(x) = c. Đồ thị hàm số này là một đường thẳng nằm ngang y = c, có độ dốc bằng 0 (Hình 1), vì thế ta có f '(x) = 0. Ta có thể chứng minh một cách chính thức như sau:



HÌNH 1

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Dùng kí hiệu Leibniz, ta viết quy tắc này như sau.

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HẰNG

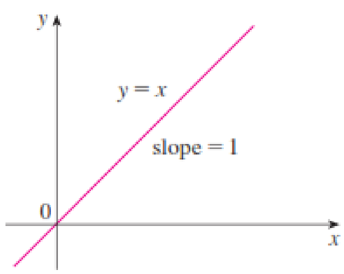
$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

<u>HÀM SỐ LŨY THỪA</u>

Ta xét hàm số f(x) = x^n, khi n là số nguyên dương. Nếu n = 1, đồ thị hàm số f(x) = x là đường thẳng y = x , có độ dốc bằng 1 (Hình 2). Do đó

1

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$



(Bạn có thể tìm lại công thức [1] từ định nghĩa của đạo hàm.) Ta đã xét trường hợp n = 2 và n = 3 . Thật vậy, trong các Bài tập 17, 18 của Bài 2.8, ta đã tìm được

2
$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Với n = 4 ta sẽ tìm được đạo hàm của f(x) = x^4 như sau:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3
\end{aligned}$$

Như vậy 3
$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

So sánh các công thức (1), (2), (3), ta nhận ra một mô-tip. Có vẻ hợp lý nếu ta dự đoán rằng nếu n nguyên dương thì (d/dx)(x^n) = nx^{n-1}. Mà quả đúng như vậy.

Quy Tắc Lũy thừa Nếu n là số nguyên dương thì

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

CM 1 Công thức $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$
có thể được kiểm chứng dễ dàng bằng cách khai triển vế trái. Áp dụng công thức này, ta tính đạo hàm tạ x = a:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1}) \\ &= a^{n-1}+a^{n-2}a+\ldots+a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

CM2 $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

Để tìm đạo hàm này, ta phải khai triển nhị thức $(x + h)^n$ bằng cách sử dụng Định Lý Nhị Thức:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

vì mỗi số hạng trừ số hạng đầu do chứa nhân tử h nên đều tiến đến 0.

Ta minh họa Quy Tắc Lũy Thừa bằng cách sử dụng nhiều ký hiệu khác nhau trong Ví dụ 1.

VÍ DỤ 1

(a) Nếu $f(x) = x^6$, thì $f'(x) = 6x^5$ (b) Nếu $y = x^{1000}$, thì $y' = 1000x^{999}$

(b) Nếu $y = t^4$, thì $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$ (d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

Còn đối với hàm số lũy thừa với số mũ nguyên âm thì sao? Trong Bài tập 61, bạn được yêu cầu chứng minh bằng định nghĩa đạo hàm là: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ta viết lại công thức này thành

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

và như vậy Quy tắc Lũy Thừa vẫn đúng với n = - 1. Thật ra, ta sẽ chứng tỏ trong Bài tập 58(c) của bài tới đây là quy tắc này vẫn đúng với mọi số nguyên âm.

Còn nếu lũy thừa là một phân số thì sao? Trong Ví dụ 3 của Bài 2.8 ta đã tìm được

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

và có thể viết lại như sau

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

Điều này chứng tỏ Quy Tắc Lũy Thừa cũng đúng khi n = 1/2. Thật ra, ta sẽ chứng tỏ trong Bài 3.6 là công thức trên đúng với mọi số thực n.

Quy Tắc Lũy thừa (Tổng Quát) Nếu n là số thực bất kỳ thì

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

VÍ DỤ 2 Tính đạo hàm của

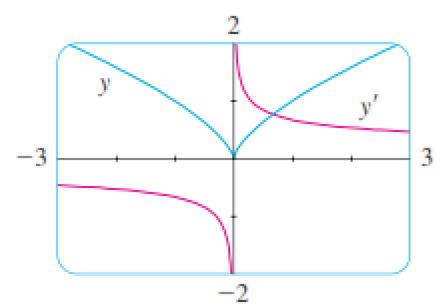
(a) $f(x) = 1/x^2$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

GIẢI Trong mỗi trường hợp ta đều viết lại hàm số theo lũy thừa của x.

(a) Vì $f(x) = x^{-2}$, nên áp dụng Quy Tắc Lũy Thừa với n = - 2:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^2}) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$



HÌNH 3

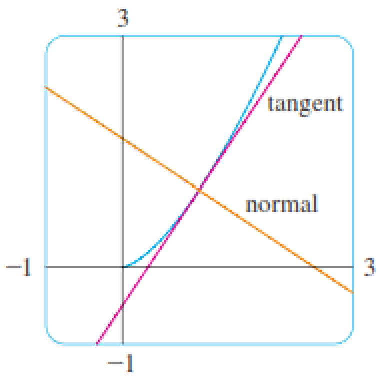
Hình 3 cho thấy đồ thị của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ và đạo hàm của nó. Chú ý là y không khả vi tại 0 (còn y' thì không xác định tại đây). Nhận xét là y' dương khi y đồng biến và âm khi y nghịch biến.

Quy Tắc Lũy Thừa cho ta tìm được phương trình tiếp tuyến của hàm số lũy thừa mà không cần tính đạo hàm bằng định nghĩa. Với đường pháp tuyến cũng vậy. **Pháp tuyến** của một đường cong C tại điểm P là đường thẳng qua P và vuông góc với tiếp tuyến tại P. (Trong nghiên cứu về quang học, ta cần xét góc hợp bởi một tia sáng và đường pháp tuyến của thấu kính.)

VÍ DỤ 3 Tìm phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong $y = x\sqrt{x}$ tại điểm (1, 1).

GIẢI Vì $f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$ nên

$$f'(x) = (3/2)x^{3/2-1} = 3/2.\ x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$



HÌNH 4

Do đó độ dốc của tiếp tuyến tại điểm (1, 1) là f '(1) = 3/2 , và phương trình tiếp tuyến là

$$y - 1 = 3/2\ (x - 1) \quad \text{hay} \quad y = (3/2)x - ½$$

Vì pháp tuyến vuông góc tiếp tuyến nên nó có hệ số góc là $\frac{-1}{3/2} = -\frac{2}{3}$

và phương trình pháp tuyến là

$$y - 1 = (- 2/3)(x - 1) \quad \text{hay} \quad y = (- 2/3)x + 5/3$$

Ta vẽ đồ thị và tiếp tuyến lẫn pháp tuyến trong Hình 4.

ĐẠO HÀM MỚI SUY TỪ ĐẠO HÀM CŨ

Khi các hàm số mới được tạo ra từ các hàm số cũ bằng phép cộng, trừ, nhân cho một hằng số, thì đạo hàm của chúng cũng có thể tính theo các đạo hàm của các hàm số cũ. Đặc biệt, công thức sau đây nói rằng đạo hàm của tích một hằng số với một hàm số thì bằng tích hằng số với đạo hàm của hàm số ấy.

Quy Tắc Nhân Hằng Số Nếu c là một hằng số và f là hàm số khả vi, thì

$$\frac{d}{dx}(cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

CM Đặt g(x) = cf(x). Thế thì

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \textit{(Theo Quy tắc Giới Hạn 3)}$$

$$= cf'(x)$$

VÍ DỤ 4

(a) $\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\frac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

Quy tắc sau nói rằng đạo hàm của tổng các hàm số là tổng đạo hàm các hàm số đó.

Quy Tắc Cộng Nếu f và g là các hàm số khả vi, thì

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

CM Đặt F(x) = f(x) + g(x). Thế thì

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x)+g'(x)$$

Quy Tắc Cộng có thể mở rộng đến tổng của nhiều hàm số. Chẳng hạn, dùng định lý này hai lần, ta được

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Bằng cách viết f – g là f + (- 1)g, áp dụng Quy Tắc Cộng và Quy Tắc Nhân Hằng Số, tađược Quy Tắc Trừ sau:

Quy Tắc Trừ Nếu f và g là các hàm số khả vi, thì

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

Các Quy Tắc Nhân Hằng Số, Quy Tắc Cộng, Trừ có thể sử dụng kết hợp với Quy Tắc Lũy Thừa để lấy vi phân bất cứ đa thức nào như các ví dụ dưới đây.

VÍ DỤ 5

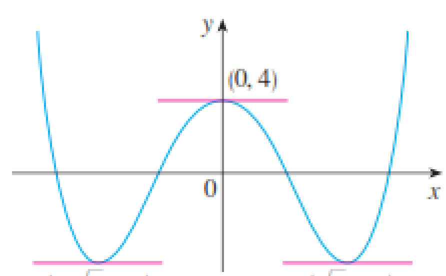
$$\frac{d}{dx}(x^8+12x^5-4x^4+10x^3-6x+5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8)+12\frac{d}{dx}(x^5)-4\frac{d}{dx}(x^4)+10\frac{d}{dx}(x^3)-6\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7+12(5x^4)-4(4x^3)+10(3x^2)-6(1)+0$$

$$= 8x^7+60x^4-16x^3+30x^2-6$$

VÍ DỤ 6 Tìm những điểm trên đường cong $y = x^4 - 6x^2 + 4$ tại đó tiếp tuyến với đồ thị nằm ngang.



HÌNH 5

GIẢI Tiếp tuyến nằm ngang xảy ra khi đạo hàm bằng 0. Ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4)-6\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(4)$$

$$= 4x^3-12x+0 = 4x(x^2-3)$$

Do đó dy/dx = 0 <=> x = 0 hay $x^2 - 3 = 0$ <=> x = 0 , x = $\pm\sqrt{3}$. Vậy tiếp tuyến nằm ngang khi x = 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. Những điểm tương ứng là (0, 4), ($\sqrt{3}$, - 5) và ($-\sqrt{3}$ - 5). (Xem Hình 5).

VÍ DỤ 7 Phương trình chuyển động của một chất điểm là $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, trong đó s tính bằng cm và t tính bằng giây. Tìm gia tốc như một hàm số theo thời gian. Sau 2 giây, gia tốc là bao nhiêu?

GIẢI Tốc độ và gia tốc là :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

Gia tốc sau 2 giây là a(2) = 14 cm/s^2.

HÀM SỐ MŨ

Ta hãy tính đạo hàm của hàm số mũ $f(x) = a^x$ bằng định nghĩa của đạo hàm

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

Số hạng a^x không phụ thuộc h, vì thế ta có thể đem ra ngoài dấu giới hạn:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

Chú ý $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ chính là giá trị của đạo hàm của f tại 0, tức

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = f'(0)$$

Như vậy ta đã chứng tỏ được rằng nếu hàm số $f(x) = a^x$ khả vi tại x = 0 thì nó khả vi mọi nơi và

4 $$f'(x) = f'(0).\, a^x$$

Phương trình 4 nói rằng rằng tốc độ biến thiên của hàm số mũ thì tỉ lệ với chính hàm số. (Độ dốc tỉ lệ với độ cao.)

Sự tồn tại của f '(0) được minh chứng qua bảng số bên phải ứng với a = 2 và a = 3 . (Các giá trị đúng đến bốn chữ số thập phân.) Có vẻ các giới hạn tồn tại và

với a = 2, $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h} \approx 0.69$

với a = 3, $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} \approx 1.10$

h	$\frac{2^h-1}{h}$	$\frac{3^h-1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

Thật ra, ta có thể chứng minh những giới hạn này tồn tại và, đúng đến sáu chữ số thập phân, những giá trị là

$$\frac{d}{dx}(2^x)_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)_{x=0} \approx 1.098612$$

Suy ra, từ phương trình 4, ta có

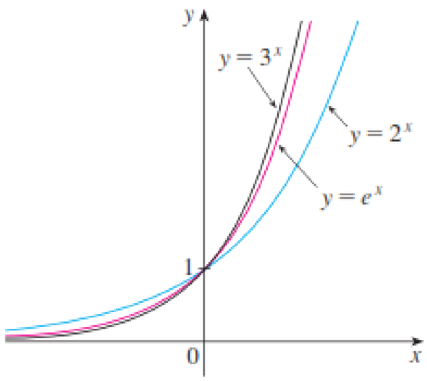
5 $$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

Trong các chọn lựa có thể của cơ số a trong phương trình 4, công thức vi phân đơn giản nhất xảy ra khi f '(0) = 1. Nếu xét những ước tính của f '(0) khi a = 2 và a = 3, có vẻ như hợp lý khi cho rằng tồn tại số a giữa 2 và 3 sao cho f '(0) = 1. Theo truyền thống ta gọi giá trị này là e. (Thật ra, đó là cách thức ta đã giới thiệu số e tronga2 Bài 1.5.). Và ta có định nghĩa sau đây

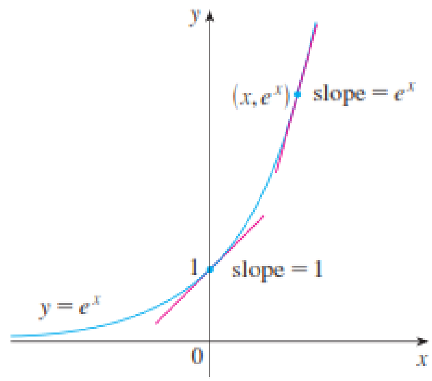
ĐỊNH NGHĨA SỐ e e là số sao cho

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

Về phương diện hình học, điều đó có nghĩa trong tất cả hàm số mũ y = a^x, hàm số y = e^x là hàm số mà tiếp tuyến tại (0, 1) có độ dốc f '(0) chính xác bằng 1. (Xem Hình 6 và 7)



HÌNH 6



HÌNH 7

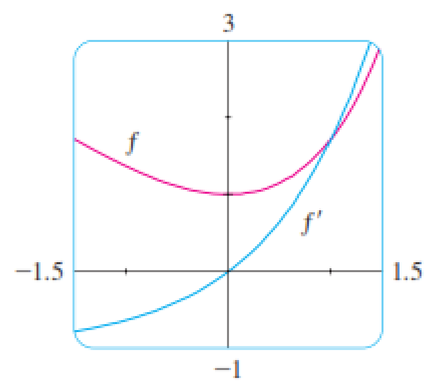
Nếu ta đặt a = e và f '(0) = 1 trong phương trình 4, ta được công thức vi phân quan trọng .

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ TỰ NHIÊN

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Như vậy hàm số mũ f(x) = e^x có tính chất là nó cũng là đạo hàm của chính nó. Về hình học điều này có nghĩa là độ dốc của tiếp tuyến với đường cong y = e^x thì bằng tung độ của tiếp điểm (Hình 7).

VÍ DỤ 8 Nếu f(x) = e^x - x , tìm f ' và f ''. So sánh đồ thị của f và f '.



GIẢI Dùng Quy Tắc Hiệu, ta có

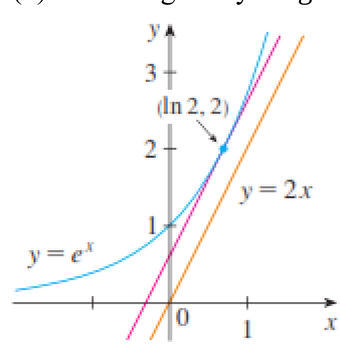
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

HÌNH 8

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

Đồ thị của f và f' được vẽ trong Hình 8. Chú ý rằng f có tiếp tuyến nằm ngang khi x = 0 ; vì f '(0) = 0. Cũng chú ý rằng với x > 0 thì f '(x) > 0 và f đồng biến. Khi x < 0 thì f '(x) < 0 và f nghịch biến.

VÍ DỤ 9 Tại điểm nào trên đường cong y = e^x thì tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 2x?



GIẢI Vì y = e^x, ta có y' = e^x. Gọi a là hoành độ của điểm cần tìm. Thế thì độ dốc của tiếp tuyến tại điểm này là e^a. Tiếp tuyến này song song với đường thẳng y = 2x nếu nó có cùng độ dốc với đường thẳng , tức bằng 2. Suy ra: $e^a = 2$ <=> a = ln2

Do đó điểm cần tìm là (a , e^a) = (ln2, 2). (Xem Hình 9.)

HÌNH 9

BÀI TẬP

1. (a) Số e được định nghĩa như thế nào?

(b) Dùng máy tính để ước tính những giá trị của giới hạn

$$\lim_{h\to 0}\frac{2.7^h-1}{h} \quad \text{và} \quad \lim_{h\to 0}\frac{2.8^h-1}{h}$$

Đúng đến hai chữ số thập phân. Bạn có thể kết luận gì về giá trị của e?

2. (a) Phác họa, bằng tay, đồ thị của hàm số $f(x) = e^x$, chú ý đặc biệt đến cách thức đồ thị đi qua trục y. Bạn làm điều nầy dựa vào sự kiện nào?

(b) $f(x) = e^x$ và $g(x) = x^e$ là những hàm số thuộc những dạng nào? So sánh công thức đạo hàm của f và g.

(c) Giữa f và g, hàm số nào tăng nhanh hơn khi x lớn?

3-32. Tính đạo hàm các hàm số sau.

3. $f(x) = 186.5$

4. $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$

6. $F(x) = \frac{3}{4}x^8$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$

9. $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $y = 5e^x + 3$

13. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

14. $R(t) = 5t^{-3/5}$

15. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

16. $B(y) = cy^{-6}$

17. $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$

18. $y = \sqrt[3]{x}$

19. $F(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^5$

20. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

21. $y = ax^2 + bx + c$

22. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$

25. $y = 4\pi^2$

26. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$

27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33-34. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm cho trước.

33. $y = \sqrt[4]{x}$, (1, 1)

34. $y = x^4 + 2x^2 - x$, (1, 2)

35-36. Tìm phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong tại điểm cho trước.

35. $y = x^4 + 2e^x$, (0, 2)

36. $y = x - \sqrt{x}$, (1, 0)

39-42. Tìm f '(x). So sánh đồ thị của f và f ' (dùng máy vẽ) từ đó giải thích tại sao đáp số của bạn là đúng.

39. $f(x) = e^x - 5x$

40. $f(x) = 3x^5 - 20x^2 + 50x$

41. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$

42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

43. (a) Dùng máy tính vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ trong khung hình chữ nhật [- 3, 5] x [10, 50].

(b) Dùng đồ thị ở phần (a) để ước tính độ dốc, từ đó phác họa đồ thị thô của f '. (Xem Ví dụ 1 trong Bài 2.8)

(c) Tính f '(x) và dùng biểu thức này, cùng với máy vẽ đồ thị, để vẽ đồ thị của f '. So sánh với phác họa của bạn ở phần (b).

44. (a) Dùng máy tính vẽ đồ thị hàm số $g(x) = e^x - 3x^2$ trong khung hình chữ nhật [- 1, 4] x [- 8, 8].

(b) Dùng đồ thị ở phần (a) để ước tính độ dốc, từ đó phác họa đồ thị thô của g '. (Xem Ví dụ 1 trong Bài 2.8)

(c) Tính g '(x) và dùng biểu thức này, cùng với máy vẽ đồ thị, để vẽ đồ thị của g '. So sánh với phác họa của bạn ở phần (b).

45-46. Tìm đạo hàm bậc nhất và bậc hai của hàm số.

45. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 16x$

46. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

47-48. Tìm đạo hàm bậc nhất và bậc hai của hàm số. Kiểm tra xem đáp số của bạn có hợp lý chưa bằng cách vẽ đồ thị bằng máy của f, f ' và f ''.

47. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

48. $F(x) = e^x - x^3$

49. Phương trình chuyển động của một chất điểm là $s = t^3 - 3t$, trong đó s tính bằng mét và t bằng giây. Tìm

(a) tốc độ và gia tốc theo t.

(b) gia tốc sau 2 giây, và

(c) gia tốc khi tốc độ bằng 0.

50. Phương trình chuyển động của một chất điểm là $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$, trong đó s tính bằng mét và t bằng giây.

(a) Tìm tốc độ và gia tốc theo t.

(b) Tìm gia tốc sau 1 giây.
(c) Vẽ đồ thị của hàm số vị trí, tốc độ, và gia tốc trên cùng một khung hình.

51. Tìm những điểm trên đường cong y = $2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ tại đó tiếp tuyến nằm ngang.

52. Với giá trị nào của x thì đồ thị của hàm số

$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

có tiếp tuyến nằm ngang?

53. Chứng tỏ đường cong y = $6x^3 + 5x - 3$ không có tiếp tuyến nào có độ dốc bằng 4.

54. Tìm phương trình của tiếp tuyến với đường cong y = $x\sqrt{x}$ song song với đường thẳng y = 1 + 3x.

55. Tìm phương trình của cả hai đường tiếp xúc với đường cong y = $1 + x^3$ và song song với đường thẳng 12x – y = 1.

56. Tại điểm nào trên đường cong y = $1 + 2e^x - 3x$ tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng 3x – y = 5? Minh họa bằng cách vẽ đường cong và đường thẳng.

57. Tìm phương trình của pháp tuyến của parabol y = $x^2 - 5x + 4$ song song với đường thẳng x – 3y = 5.

58. Đường pháp tuyến của parabol y = $x - x^2$ tại điểm (1, 0) lại cắt parabol tại điểm thứ hai, tìm điểm này. Minh họa bằng đồ thị.

59. Vẽ một giản đồ chứng tỏ rằng có hai tiếp tuyến với parabol cùng đi qua điểm (0, - 4). Tìm toạ độ những tiếp điểm.

60. (a) Tìm phương trình hai đường thẳng cùng đi qua điểm (2, - 3) và cùng tiếp xúc với parabol y = $x^2 + x$.
(b) Chứng tỏ rằng không có đường nào qua điểm (2, 7) và tiếp xúc với parabol. Sau đó vẽ đồ thị để thấy được tại sao.

61. Dùng định nghĩa đạo hàm để chứng tỏ rằng nếu f(x) = 1/x, thì f '(x) = $-1/x^2$. (Bài tập này nhằm chứng tỏ Quy Tắc Lũy Thừa trong trường hợp n = - 1.)

62. Tìm đạo hàm bậc n của mỗi hàm số bằng cách tính một số đạo hàm bậc đầu tiên và quan sát mô tip xuất hiện.
(a) f(x) = x^n (b) f (x) = 1/x

63. Tìm đa thức bậc hai P biết rằng P(2) = 5, P'(2) = 3, và P''(2) = 2.

64. Phương trình y'' + y' – 2y = x^2 được gọi là **phương trình vi phân** vì nó liên hệ đến một hàm số y chưa biết và các đạo hàm y', y'' của nó. Tìm các hằng số A, B, và C sao cho hàm số y = $Ax^2 + Bx + C$ thỏa mãn phương trình này. (Phương trình vi phân sẽ được trình bày trong Chương 9.)

65. Tìm hàm số bậc ba y = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ mà đồ thị coa tiếp tuyến nằm ngang tại những điểm (- 2, 6) và (2,0).

66. Tìm parabol có phương trình y = $ax^2 + bx + c$ có độ dốc bằng 4 tại x = 1, độ dốc bằng – 8 tại x = - 1, và đi qua điểm (2, 15).

67. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & khi \quad x \le 1 \\ x^2 - 2x + 2 & khi \quad x > 1 \end{cases}$$

f có khả vi tại 1 không? Vẽ đồ thị của f và f '.

68.

$$f(x) = \begin{cases} -1 - 2x & khi \quad x < -1 \\ x^2 & khi -1 \le x \le 1 \\ x & khi \quad x > 1 \end{cases}$$

Tìm công thức của g' và vẽ đồ thị của g và g'.

69. (a) Với những giá trị nào của x thì hàm số f(x) = | $x^2 - 9$ | khả vi? Tìm công thức của f '.
(b) Vẽ đồ thị của f và f '.

70. Hàm số h(x) = | x – 1 | + | x +2 | khả vi tại đâu? Tìm công thức của h' và vẽ đồ thị của h và h'.

71. Tìm parabol có phương trình y = $ax^2 + bx$ biết tiếp tuyến tại điểm (1, 1) có phương trình y = 3x - 2.

72. Đường cong y = $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ có tiếp tuyến tại x = 0 có phương trình y = 2x + 1 và tiếp tuyến tại x = 1 có phương trình y = 2 - 3x. Tìm a, b, c, d.

73. Tìm a và b biết rằng đường thẳng 2x + y = b tiếp xúc với parabol ax^2 khi x = 2.

74. Tím c sao cho đường thẳng y = $\frac{3}{2}$x + 6 tiếp xúc với đường cong y = $c\sqrt{x}$.

75. Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & khi \quad x \le 2 \\ mx + b & khi \quad x > 2 \end{cases}$$

Tìm những giá trị của m và b sao cho f khả vi với mọi x.

76. Một tiếp tuyến với hyperbol xy = c được vẽ tại điểm P.

(a) Chứng tỏ P là trung điểm của đoạn mà tiếp tuyến chắn với hai trục.

(b) Chứng tỏ rằng tam giác tạo bởi tiếp tuyến và hai truc có diện tích không đổi khi P thay đổi.

77. Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

78. Vẽ giản đồ cho thấy hai đường thẳng vuông góc nhau tại một điểm trên trục y và đều tiếp xúc với parabol $y = x^2$. Tìm toạ độ điểm ấy.

79. Nếu c > ½ , có bao nhiêu đường thẳng qua điểm (0, c) là pháp tuyến của parabol $y = x^2$? Kết quả ra sao nếu c ≤ ½?

80. Vẽ đồ thị các parabol $y = x^2$ và $y = x^2 - 2x + 2$. Theo bạn có đường thẳng nào tiếp xúc đồng thời với cả hai parabol? Nếu có, tìm phương trình của nó. Nếu không, cho biết tại sao.

ĐÁP SỐ

1. (a) Xem lại Định nghĩa số e

(b) 0.99, 1.03; 2.7 < e < 2.8

3. f ’(x) = 0 **5.** f ‘(t) = - 2/3

7. f ‘(x) = $3x^2 - 4$

9. $f'(t) = t^3$ **11.** $y' = -\frac{2}{5}x^{-7/5}$ **13.** $V'(r) = 4\pi r^2$

15. $A'(s) = 60/s^6$ **17.** $G'(x) = 1/(2\sqrt{x}) - 2e^x$

19. $F'(x) = \frac{5}{32}x^4$ **21.** $y' = 2ax + b$

23. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + (2/\sqrt{x}) - 3/(2x\sqrt{x})$

25. $y' = 0$ **27.** $H'(x) = 3x^2 + 3 - 3x^{-2} - 3x^{-4}$

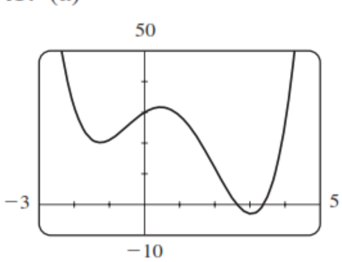
29. $u' = \frac{1}{5}t^{-4/5} + 10t^{3/2}$ **31.** $z' = -10A/y^{11} + Be^y$

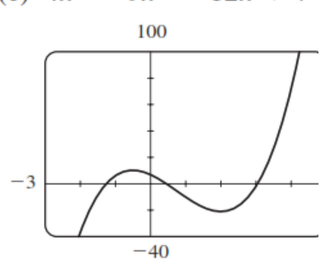
33. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

35. Tangent: $y = 2x + 2$; normal: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

37. $y = 3x - 1$ **39.** $e^x - 5$ **41.** $45x^{14} - 15x^2$

43. (a) (c) $4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$





45. $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 16$, $f''(x) = 12x^2 - 18x$

47. $f'(x) = 2 - \frac{15}{4}x^{-1/4}$, $f''(x) = \frac{15}{16}x^{-5/4}$

49. (a) $v(t) = 3t^2 - 3$, $a(t) = 6t$ (b) 12 m/s^2

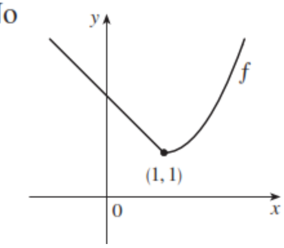
(c) $a(1) = 6$ m/s^2 **51.** $(-2, 21)$, $(1, -6)$

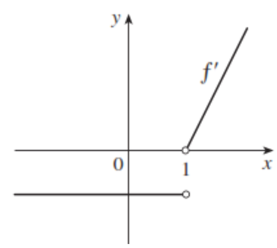
55. $y = 12x - 15$, $y = 12x + 17$ **57.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

59. $(\pm 2, 4)$ **63.** $P(x) = x^2 - x + 3$

65. $y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$

67. No

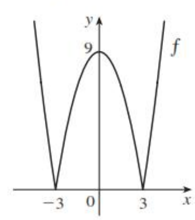


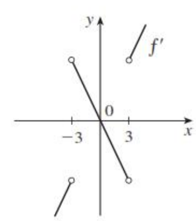


69. (a) Not differentiable at 3 or −3

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } |x| > 3 \\ -2x & \text{if } |x| < 3 \end{cases}$$

(b)



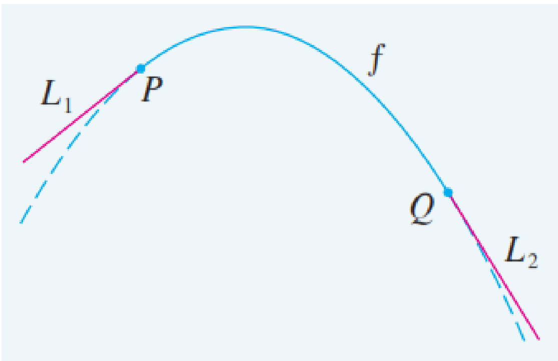


71. $y = 2x^2 - x$ **73.** $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$ **75.** $m = 4$, $b = -4$

77. 1000 **79.** 3; 1

DỰ ÁN ỨNG DỤNG THIẾT KẾ MỘT ĐƯỜNG XE UỐN LƯỢN

Giả sử bạn được yêu cầu phải thiết kế một đoạn lên dốc và xuống dốc của một đường xe uốn lượn trên không mới. Bằng cách nghiên cứu những tấm ảnh về các đường uốn lượn ưa thích của mình, bạn quyết định tạo độ dốc đoạn đi lên bằng 0.8 và độ dốc đoạn đi xuống là – 1.6. Bạn quyêt định nối hai đoạn thẳng lên xuống này $y = L_1(x)$ và $y = L_2(x)$ với một cung parabol $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó x và f(x) được tính bằng bộ. Để đoạn nối này được mượt mà, ta không được tạo ra những thay đổi đột ngột về chiều hướng, do đó bạn muốn đoạn L_1 và L_2 phải tiếp xúc với parabol tại những điểm nối P và Q.(Xem hình.) Để đơn giản hóa các phương trình bạn quyết định dời điểm gốc đến điểm P.



1.(a) Giả sử không cách ngang giữa P và Q là 100 ft. Hãy viết phương trình theo a, b và c để bảo đảm đường lượn được mượt mà tại những điểm nối.

(b) Giải hệ phương trình tìm được ở phần (a) theo a, b và c để tìm công thức của f(x).

(c) Vẽ L_1, f, và L_2 để kiểm tra bằng đồ thị là các đoạn nối được mượt mà.

(d) Tìm sai biệt về độ cao giữa P và Q.

2. Lời giải trong Bài Toán 1 có thể trông mượt mà, nhưng có thể không cho cảm giác mượt mà vì hàm số được định nghĩa bằng ba công thức $L_1(x)$ với $x < 0$, f(x) với $0 \le x \le 100$, và $L_2(x)$ với $x > 100$ không có đạo hàm bậc hai. Vì thế bạn quyết định cải thiện thiết kế bằng cách chỉ dùng hàm số bậc hai $q(x) = ax^2 + bx + c$ trên đoạn $10 \le x \le 90$ và nối nó với các hàm số bậc nhất bằng các hàm số bậc ba:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \quad (0 \le x < 10)$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \quad (90 < x \le 100)$$

(a) Viết hệ phương trình gồm 11 ẩn số, bảo đảm là các hàm số cùng đạo hàm bậc nhất và bậc hai của chúng tại những điểm kết nối là bằng nhau.

(b) Giải hệ phương trình ở phần (a) bằng máy tính để tìm công thức cho q(x), g(x), và h(x).

(c) Vẽ L_1, g, q, h, và L_2 và so sánh với đồ thị trong Bài Toán 1(c).

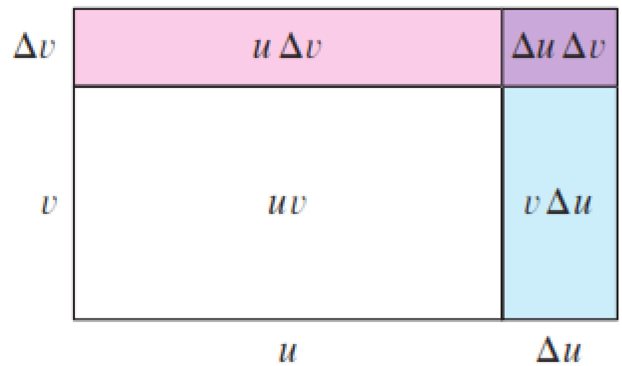
BÀI 3. 2. ĐẠO HÀM CỦA TÍCH VÀ THƯƠNG CÁCHÀM SỐ

QUY TẮC NHÂN

Tương tự như với quy tắc tổng và hiệu, ta dễ bị lừa khi đoán, như Leibniz đã lầm cách đây ba thế kỷ, rằng đạo hàm của tích hai hàm số là tích các đạo hàm của chúng. Ta có thể thấy ngay phát biểu trên sai bằng cách lấy một phản ví dụ với $f(x) = x$ và $g(x) = x^2$. Ta biết $f'(x) = 1$ và $g'(x) = 2x$. Nhưng $(fg)(x) = x^3$ có đạo hàm là $(fg)'(x) = 3x^2$. Suy ra rõ ràng $(fg)' \neq f'g'$. Công thức đúng được khám phá bởi Leibniz (ngay sau khi ông biết dự đoán ban đầu của mình là sai) và được gọi là Quy Tắc Tích.

Trước khi phát biểu quy tắc này, ta hãy thử khám phá nó. Ta bắt đầu bằng cách giả sử $u = f(x)$ và $v = g(x)$ đều là những hàm số khả vi và có giá trị dương. Thế thì ta có thể coi tích uv là diện tích hình chữ nhật có chiều dài hai cạnh là u và v. Nếu x biến đổi một lượng Δx, thì u và v biến đổi một lương Δu và Δv và

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$



HÌNH 1

và giá trị mới của tích $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$ có thể coi như diện tích của hình chữ nhật lớn hơn trong Hình 1 (giả sử Δu và Δv đều dương).

Số gia của diện tích hình chữ nhật là

1 $$\Delta (uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

= tổng diện tích các miền được tô màu

Chia hai vế cho Δx, ta được

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta u}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Cho Dx tiến đến 0, ta được đạo hàm của uv:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\
&= u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\
&= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0\cdot\frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

2 $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{gx}$$

(Chú ý rằng $\Delta u \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ vì f khả vi và do đó liên tục)

Mặc dù ta giả sử các đại lượng đang xét đều dương (để minh họa hình học), nhưng có thể thấy ngay các phương trình 1 và 2 cũng đúng với các đại lượng dương hay âm. Do đó ta có thể phát biểu quy tắc nhân sau đây

QUY TẮC NHÂN

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

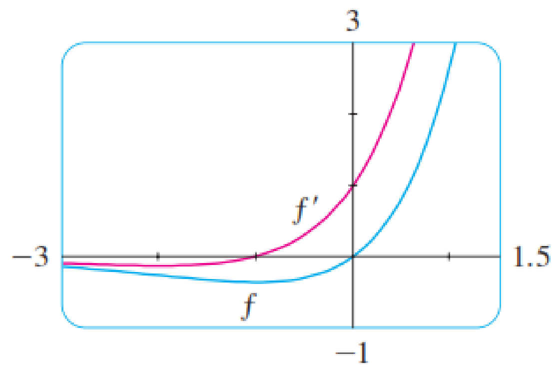
Quy tắc trên có thể viết ngắn gọn : $\boxed{(fg)' = fg' + gf'}$.

Bằng lời, quy tắc trên được phát biểu như sau: Đạo hàm của tích hai hàm số bằng hàm số thứ nhất nhân với đạo hàm hàm số thứ hai cộng cho hàm số thứ hai nhân đạo hàm hàm số thứ nhất.

VÍ DỤ 1

(a) Nếu $f(x) = xe^x$, tìm $f'(x)$.

(b) Tìm đạo hàm bậc n $f^{(n)}(x)$



HÌNH 2 *cho thấy đồ thị của f và f ' của Ví dụ 1. Nhận xét rằng f ' dương khi f đồng biến và f ' âm khi d nghịch biến*

GIẢI

(a) Theo Quy Tắc Nhân, ta có

$$f'(x) = (xe^x)' = x(e^x)' + e^x(x)'$$
$$= xe^x + e^x \,.\, 1 = (x+1)e^x$$

(b) Sử dụng quy tắc nhân lần thứ hai, ta được

$$f''(x) = [(x+1)ex]' = (x+1)(e^x)' + e^x(x+1)'$$
$$= (x+1)e^x + e^x \,.\, 1 = (x+2)e^x$$

Sử dụng tiếp quy tắc nhân, ta được

$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x$$

Mỗi lần tính đạo hàm cấp tiếp theo ta được thêm số hạng e^x , do đó

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

VÍ DỤ 2 Vi phân hàm số $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$

GIẢI 1 Sử dụng Quy Tắc Nhân, ta có

$$f'(t) = \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a+bt) + (a+bt)\frac{d}{dt}(\sqrt{t})$$
$$= \sqrt{t}\cdot b + (a+bt)\cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2}$$
$$= b\sqrt{t} + \frac{a+bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a+3bt}{2\sqrt{t}}$$

GIẢi 2 Nếu trước tiên ta dùng quy tắc lũy thừa để viết lại f(t), rồi sau d8o1 mới tiến hành việc lấy đạo hàm thì ta không cần phải dùng Quy Tắc Nhân: $f(t) = a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2}$

Suy ra $f'(t) = \dfrac{1}{2}at^{-1/2} + \dfrac{3}{2}bt^{1/2}$ (chính là kết quả đã được ở trên).

VÍ DỤ 3 Biết f(x) = $\sqrt{x}$ g(x), trong đó g(4) = 2 và g'(4) = 3, tìm f '(4).

GIẢI Áp dụng Quy Tắc Nhân, ta được

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[\sqrt{x}]$$

$$= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x)\cdot \tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \frac{2}{2\cdot 2} = 6.5$$

QUY TẮC CHIA

Ta tìm quy tắc tính đạo hàm của thương của hai hàm số u = f(x) và v = g(x) khả vi theo cách tương tự như với tích hai hàm số. Nếu x, u, và v biến thiên một số gia Δx, Δu và Δv , thì số gia tương ứng của u/v là

$$\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u+\Delta u)v - u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

Do đó

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

Khi Dx $\to$ 0, Dv $\to$ 0, vì v = g(x) khả vi và do đó liên tục. Do đó dùng Quy Tắc Giớ Hạn, ta được

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

QUY TẮC CHIA

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Quy tắc trên có thể viết ngắn gọn : $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}}$.

Bằng lời, quy tắc trên được phát biểu như sau: Đạo hàm của thương hai hàm số bằng tích của mẫu với đạo hàm của tử trừ đi tích của mẫu với đạo hàm của tử, tất cả chia cho bình phương của mẫu.

Quy Tắc Chia và những công thức khác giúp ta tính được đạo hàm của bất kỳ hàm số hữu tỷ nào, như ví dụ sẽ chỉ rõ.

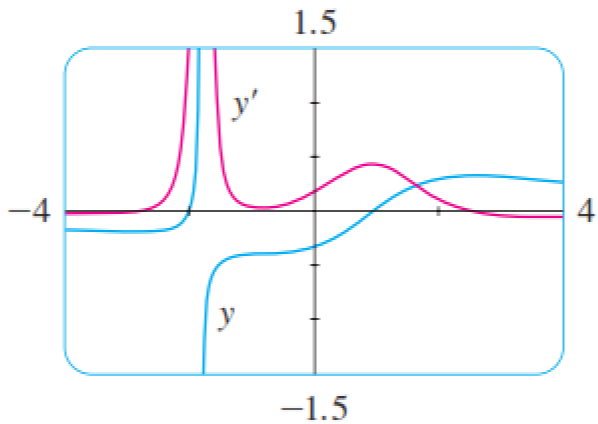
VÍ DỤ 4 Cho $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^3+6}$. Thế thì

$$y' = \frac{(x^3+6)\dfrac{d}{dx}(x^2+x-2)-(x^2+x-2)\dfrac{d}{dx}(x^3+6)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{(x^3+6)(2x+1)-(x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4+x^3+12x+6)-(3x^4+3x^3-6x^2)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}$$



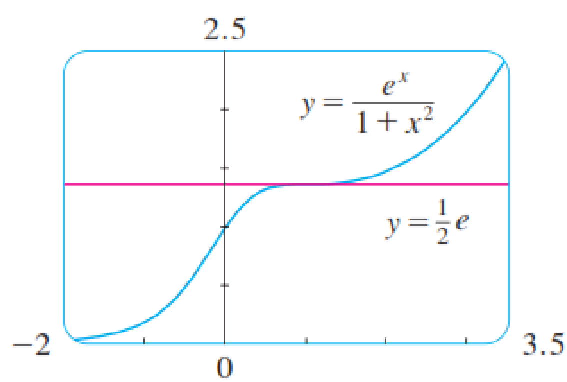
HÌNH 3 *cho thấy đồ thị của f và f ′ của Ví dụ 4. Nhận xét rằng khi f tăng rất nhanh (gần – 2), thì y ′ lớn. Và khi y tăng chậm thì y′ gần bằng 0.*

VÍ DỤ 5 Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong y = $\dfrac{e^x}{1+x^2}$ tại điểm (1, e/2).

GIẢI Theo Quy Tắc Chia, ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x)-e^x\dfrac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)e^x-e^x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$



HÌNH 4

Do đó độ dốc của tiếp tuyến tại điểm (1, e/2) là

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Điều này có nghĩa tiếp tuyến tại điểm (1, e/2) là đường nằm ngang và phương trình của nó là y = e/2. [Xem Hình 4. Nhận xét rằng hàm số đồng biến và đi qua đường tiếp tuyến tại (1, e/2).]]

Chú ý: Không nhất thiết phải dùng Quy Tắc Chia mỗi lần bạn gặp một thương thức. Đôi khi bạn có thể biến đổi sao cho việc tính đạo hàm được dễ dàng hơn. Ví dụ, để tính đạo hàm hàm số

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

thay vì sử dụng Quy Tắc ChiaThương, công việc sẽ dễ dàng hơn nếu trước tiên bạn thực hiện phép chia để có

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

rồi tính đạo hàm bằng Quy Tắc Cộng.

Ta tóm tắt các công thức tính đạo hàm vừa học như sau

BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$	

BÀI TẬP

1. Tìm đạo hàm của hàm số y = $(x^2 + 1)(x^3 + 1)$ bằng hai cách; dùng Quy Tắc Nhân và khai triển trước khi tính đạo hàm. Kết quả có khớp nhau không?

2. Tìm đạo hàm của hàm số

$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Bằng hai cách; dùng Quy Tắc Chia và đơn giản biểu thức trước khi tính đạo hàm. Bạn thích cách nào hơn?

3-26. Tính đạo hàm.

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \frac{e^x}{x^2}$

6. $y = \frac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \frac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \frac{2t}{4 + t^2}$

9. $V(x) = (2x^3 + 3)(x^4 - 2x)$

10. $Y(u) = (u^{-2} + u^{-3})(u^5 - 2u^2)$

11. $F(y) = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $R(t) = (t + e^t)(3 - \sqrt{t})$

13. $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \frac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \frac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

16. $y = \frac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = (r^2 - 2r)e^r$

18. $y = \frac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27 – 30. Tìm f ’(x) và f ”(x).

27. $f(x) = x^4e^x$

28. $f(x) = x^{5/2}e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{3 + e^x}$

31-32. Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong cho trước tại điểm cho trước.

31. $y = \dfrac{2x}{x+1}$. $(1, 1)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33-34. Tìm phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong cho trước tại điểm cho trước.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $(4, 0.4)$

35. (a) Đường cong $y = 1/(1 + x^2)$ được gọi là **phù thủy Maria Agnest.** Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong này tại điểm $(- 1, 1/2)$.

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đường cong và tiếp tuyến trên cùng một khung hình.

36. (a) Đường cong $y = x/(1 + x^2)$ được gọi là đường **serpentine.** Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong này tại điểm $(3, 0.3)$.

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đường cong và tiếp tuyến trên cùng một khung hình.

37. (a) Nếu $f(x) = e^x/x^3$, tìm f ’(x).

(b) So sánh đồ thị của f và f ’ để kiểm tra kết quả làm được ở phần (a).

38. (a) Nếu $f(x) = x/(x^2 – 1)$, tìm f ’(x).

(b) So sánh đồ thị của f và f ’ để kiểm tra kết quả làm được ở phần (a).

39. (a) Nếu $f(x) = (x – 1)e^x$, tìm f ’(x) và f ”(x).

(b) So sánh đồ thị của f, f ’ và f ” để kiểm tra kết quả làm được ở phần (a).

40. (a) Nếu $f(x) = x/(x^2 + 1)$, tìm f ’(x) và f ”(x).

(b) So sánh đồ thị của f, f ’ và f ” để kiểm tra kết quả làm được ở phần (a).

41. Biết $f(x) = x^2/(1 + x)$, tìm f ”(1).

42. Biết $g(x) = x/e^x$, tìm $g^{(n)}(x)$.

43. Biết f(5) = 1, f ’(5) = 6, g(5) = - 3, và g’(5) = 2. Tìm những giá trị sau:

(a) (fg) ’(5) (b) (f/g) ’(5)

(c) (g/f) ’(5)

44. Biết f(2) = - 3, f ’(2) = - 2, g(2) = 4, và g’(2) = 7. Tìm h ’(2) với

(a) h(x) = 5f(x) – 4g(x) (b) h(x) = f(x)g(x)

(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

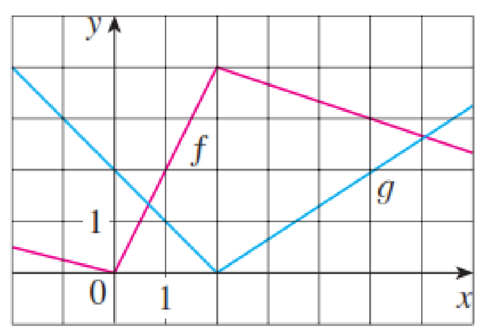
45. Biết $f(x) = e^xg(x)$, trong đó g(0) = 2 và g ‘(0) = 5, tìm f ’ (0).

46. Biết h(2) = 4 và h ’(2) = - 3, tìm

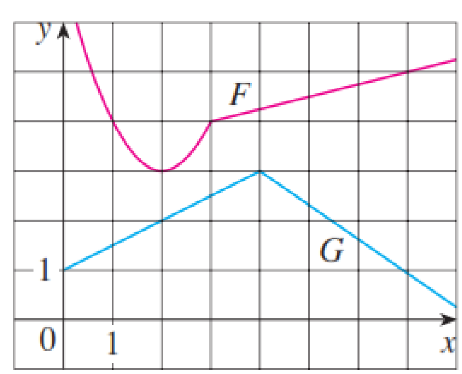
$$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\right|_{x=2}$$

47. Nếu f và g là những hàm số có đồ thị cho trong hình bên dưới, đặt u(x) = f(x)g(x) và v(x) = f(x)/g(x).

(a) Tìm u ’(1) (b) v ’(5)



48. Cho P(x) = F(x)G(x) và Q(x) = F(x)/G(x), trong đó F và G là những hàm số có đồ thị cho trong hình dưới.



(a) Tìm P ’(2) (b) Tìm Q ’(7)

49. Nếu f là hàm số khả vi, tìm đạo hàm của các hàm số sau.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$

(c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

50. Nếu f là hàm số khả vi, tìm đạo hàm của các hàm số sau.

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

51. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đường cong y = x/(x + 1) đi qua điểm (1, 2)? Tìm toạ độ những tiếp điểm.

52. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

song song với đường thẳng x – 2y = 2.

53. Trong bài tập này ta sẽ ước tính tốc độ tăng của lợi tức cá nhân toàn phần tại Richmond-Petersburg,Virginia. Trong năm 1999, dân số của địa phương này là 961,400 và dân số tăng khoảng 9200 mỗi năm. Lợi tức hàng năm trung bình là 30,593 đô-la mỗi đầu người, và trung bình tăng khoảng 1,400 đô-la mỗi năm (hơi cao hơn trung bình quốc gia là khoảng 1225 đô-la mỗi năm). Dùng Quy Tắc Nhân và những số liệu này để ước tính tốc độ tăng của lợi tức cá nhân toàn phần ở Richmond-Peterburg trong năm 1999. Hãy giải thích ý nghĩa của mỗi số hạng trong Quy Tắc Nhân.

54. Một nhà chế tạo sản xuất những xúc vải có khổ cố định. Số lượng q của vải (tính bằng ya) được bán ra là hàm số theo giá bán p (tính bằng đô-la mỗi ya), vì thế ta có thể viết q = f(p). Tổng thu nhập kiếm được với giá bán p là R(p) = pf(p).

(a) Nói f(20) = 10,000 và f ’(20) = - 350 có nghĩa là gì?

b) Với những giá trị cho ở phần (a), hãy tìm R’(20) và giải thích trả lời của bạn/

55. (a) Dùng Quy Tắc Nhân hai lần để chứng tỏ rằng nếu f, g, và h là các hàm số khả vi, thì

(fgh)’ = f’gh + fg’h + fgh’.

(b) Cho f = g = h ở phần (a), chứng tỏ rằng

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Dùng phần (b) để tính đạo hàm của $y = e^{3x}$.

56. (a) Nếu F(x) = f(x)g(x), trong đó f và g có đạo hàm đến bậc bất kỳ, chứng tỏ rằng

F ” = f ”g + 2f ’g’ + fg ”

(b) Tìm công thức tương tự cho F ”’ và $F^{(4)}$.

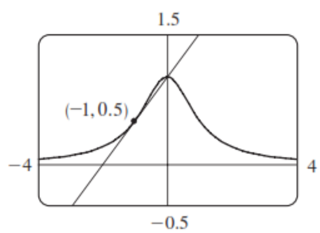
(c) Dự đoán công thức cho $F^{(n)}$.

57. Tìm biểu thức của năm đạo hàm đầu tiên của $f(x) = x^2e^x$. Bạn có nhận ra môtip trong những biểu thức này. Dự đoán công thức cho $f^{(n)}(x)$ và chứng minh công thức đó bằng nguyên lý quy nạp.

ĐÁP SỐ

1. $y' = 5x^4 + 3x^2 + 2x$
3. $f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2 + 2x + 2)$
5. $y' = (x - 2)e^x/x^3$ **7.** $g'(x) = 5/(2x + 1)^2$
9. $V'(x) = 14x^6 - 4x^3 - 6$
11. $F'(y) = 5 + 14/y^2 + 9/y^4$
13. $y' = \dfrac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$ **15.** $y' = \dfrac{2t(-t^4 - 4t^2 + 7)}{(t^4 - 3t^2 + 1)^2}$
17. $y' = (r^2 - 2)e^r$ **19.** $y' = 2v - 1/\sqrt{v}$
21. $f'(t) = \dfrac{4 + t^{1/2}}{(2 + \sqrt{t})^2}$ **23.** $f'(x) = -ACe^x/(B + Ce^x)^2$
25. $f'(x) = 2cx/(x^2 + c)^2$
27. $(x^4 + 4x^3)e^x$; $(x^4 + 8x^3 + 12x^2)e^x$
29. $\dfrac{2x^2 + 2x}{(1 + 2x)^2}$; $\dfrac{2}{(1 + 2x)^3}$
31. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ **33.** $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$

35. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)



37. (a) $e^x(x - 3)/x^4$ **39.** xe^x, $(x + 1)e^x$
41. $\frac{1}{4}$ **43.** (a) -16 (b) $-\frac{20}{9}$ (c) 20
45. 7 **47.** (a) 0 (b) $-\frac{2}{3}$
49. (a) $y' = xg'(x) + g(x)$ (b) $y' = [g(x) - xg'(x)]/[g(x)]^2$
(c) $y' = [xg'(x) - g(x)]/x^2$
51. Two, $\left(-2 \pm \sqrt{3}, \left(1 \mp \sqrt{3}\right)/2\right)$
53. \$1.627 billion/year **55.** (c) $3e^{3x}$
57. $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$,
$f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $f^{(4)}(x) = (x^2 + 8x + 12)e^x$,
$f^{(5)}(x) = (x^2 + 10x + 20)e^x$; $f^{(n)}(x) = [x^2 + 2nx + n(n - 1)]e^x$

BÀI 3. 3. ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

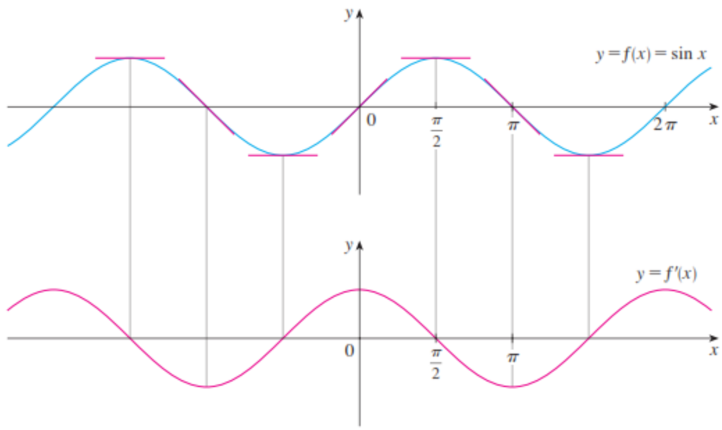
Trước khi bắt đầu bài học này bạn cần ôn lại những hàm số lượng giác. Đặc biệt, điều quan trọng cần nhớ là khi ta nói về hàm số f xác định với mọi x và

f(x) = sinx

phải hiểu là sinx là sin của một góc x tính bằng đơn vị radian. Quy ước đó cũng áp dụng cho hàm số cos, tan, csc, sec và cot. Ở bài 2. 5 ta biết rằng mọi hàm số lượng giác đều liên tục tại mỗi điểm mà nó xác định.

Nếu ta vẽ đồ thị của hàm số f(x) = sin x và dùng ý nghĩa của đạo hàm f '(x) như là độ dốc của tiếp tuyến của đồ thị sin để vẽ đồ thị f ' (xem Bài tập 14 của Bài 2.8), thế thì có vẻ như là đồ thị của f ' giống hệt đồ thị của hàm số cos (xem Hình 1).

HÌNH 1



Ta sẽ khẳng định dự đoán đạo hàm của f(x) = sin x là f '(x) = cosx. Từ định nghĩa của đạo hàm, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin x\cos h-\sin x}{h}+\frac{\cos x\sin h}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \qquad (1) \end{aligned}$$

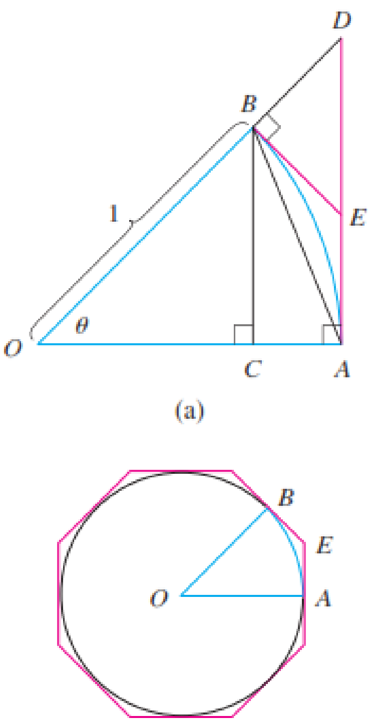
Hai trong bốn giới hạn này tính dễ dàng. Vì ta coi x như hằng số khi tính giới hạn với h → 0, ta có

$$\lim_{h\to 0}\sin x=\sin x \qquad \text{và} \qquad \lim_{h\to 0}\cos x=\cos x$$

Còn giới hạn (sin h)/h thì không hiển nhiên lắm. Trong ví dụ 3 bài 2.2, ta đã dự đoán dựa vào chứng cứ về giá trị và đồ thị, là

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad (2)$$

Giờ đây ta sẽ sử dụng công cụ hình học để chứng minh phương trình 2. Giả sử θ nằm giữa 0 và π/2 . Hình 2 (a) bên cho thấy một hình quạt trong đường tròn tâm O, góc tâm θ, và bán kính 1. Vẽ BC vuông góc với OA. Theo định nghĩa của radian : độ dài cung AB = θ (radian) , và |BC| = |OB| sin θ = sin θ. Theo hình vẽ, ta thấy rằng



(a)

(b)

HÌNH 2

|BC| < |AB| < cung AB

(kí hiệu |BC| chỉ độ dài đoạn AB)

Suy ra $\sin\theta < \theta$ thành ra $\dfrac{\sin\theta}{\theta} < 1$

Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B. Ta có thể thấy từ Hình 2 (b) là chu vi của đường tròn nhỏ hơn chu vi của đa giác ngoại tiếp, và do đó cung AB < |AE| + |EB|. Thành ra

$$\begin{aligned}\theta = \text{cung } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA|\tan\theta \\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

suy ra $\cos\theta < \dfrac{\sin\theta}{\theta} < 1$

Ta biết rằng $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ và $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$, do đó theo Định lý Kẹp Giữa, ta có

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Nhưng vì hàm số $(\sin\theta)/\theta$ là hàm số chẵn, nên giới hạn bên trái và bên phải đều bằng nhau. Từ đó, ta có

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Vậy Phương trình 2 được chứng minh.

Ta có thể suy ra giá trị của giới hạn còn lại trong (1) như sau

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1}\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}\right) \\ &= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} \\ &= -1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 \qquad \text{(by Equation 2)}\end{aligned}$$

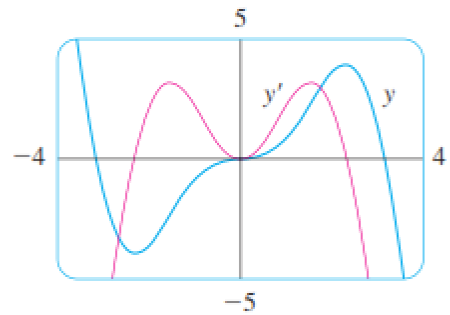
3
$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0}$$

Nếu ta thế giới hạn (2) và (3) vào (1), ta được

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\sin x \,.\, \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x \,.\, \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}$$
$$= (\sin x).\, 0 + (\cos x)\,.\,1 = \cos x$$

Như vậy ta đã chứng minh được công thức đạo hàm của hàm số sin:

4 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$$



HÌNH 3 Hình 3 cho thấy đồ thị của hàm số trong Vì dụ 1và đạo hàm của nó. Chú ý là y ‘ = 0 xảy ra bất cứ khi nào y có tiếp tuyến nằm ngang

VÍ DỤ 1 Tìm đạo hàm của $y = x^2 \sin x$

GIẢI Dùng Quy Tắc Nhân và Công Thức 4, ta có

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2\cos x + 2x\sin x$$

Dùng phương pháp chứng minh tương tự như chứng minh Công Thức 4, ta có thể chứng minh (xem Bài tập 20) rằng

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$$

Ta có thể tìm đạo hàm của hàm số tan bằng định nghĩa đạo hàm, nhưng sẽ dễ hơn nếu ta sử dụng Quy Tắc Chia cùng với Công Thức 4 và 5:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x\dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x}$$

Đạo hàm các hàm số lượng giác còn lại như csc, sec, và cot có thể được tìm thấy dễ dàng bằng cách dùng Quy Tắc Chia (được xem như bài tập). Ta tập hợp các công thức đạo hàm các hàm số lượng giác vào bảng dưới đây. Nhớ là chúng chỉ đúng khi x tính bằng radian.

*Để giúp bạn nhớ công thức này, chú ý rằng đối với các hàm số có CO đứng đầu như **co**sine (cos), **co**secant (csc), **co**tangent (cot)thì đạo hàm có **dấu trừ***

ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

VÍ DỤ 2 Tìm đạo hàm của hàm số f(x) = $\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$. Với giá trị nào của x đồ thị của f có tiếp tuyến nằm ngang?

GIẢI Quy Tắc Chia cho ta

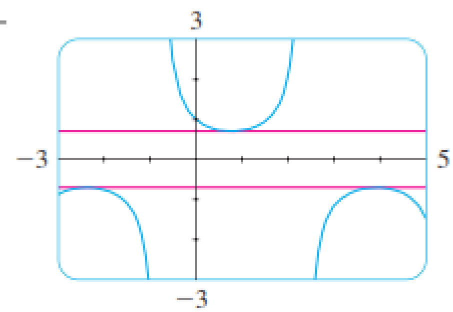
$$f'(x) = \frac{(1+\tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x\dfrac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x - 1)}{(1+\tan x)^2}$$

(Do $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$)



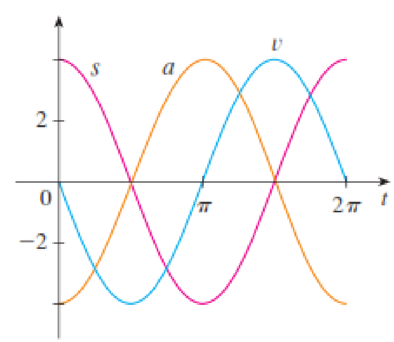
HÌNH 4

Vì sec x luôn khác 0, nên f ‘(x) = 0 khi tan x = 1, và điều này xảy ra khi x = nπ + π/4 , trong đó n là số nguyên bất kỳ (xem Hình 4).

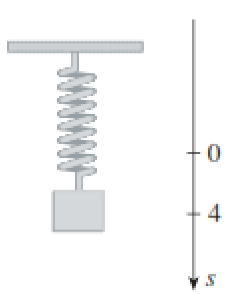
Hàm số lượng giác thường được sử dụng trong việc mô hình hóa các hiện tượng thực tế. Đặc biệt, các dao động, sóng, chuyển động co giãn, và những đại lượng thay đổi tuần hoàn khác có thể được mô tả bằng các hàm số lượng giác. Trong ví dụ sau, ta sẽ khảo sát một chuyển động điều hòa đơn giản.

VÍ DỤ 3 Một vật thể ở đầu một lò xo treo thẳng đứng được kéo căng 4 cm khỏi vị trí cân bằng và được buông ra ở thời điểm t = 0 (hình bên, chú ý chọn chiều dương là chiều đi xuống). Vị trí của nó tại thời điểm t là s = f(t) = 4cost

Tìm tốc độ và gia tốc tại thời điểm t và dùng chúng để phân tích chuyển động của vật thể.



HÌNH 5



GIẢI Tốc độ và gia tốc là

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4\cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4\sin t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4\sin t) = -4\frac{d}{dt}(\sin t) = -4\cos t$$

Vật thể dao động từ điểm thấp nhất (s = 4 cm) đến điểm cao nhất (s = - 4 cm). Chu kỳ dao động là 2 π, là chu kỳ của cost.

Tốc độ là |v| = 4|sint| lớn nhất khi |sint| = 1 , tức khi cost = 0 . Do đó vật thể chuyển động nhanh nhất khi nó đi qua vị trí cân bằng (s = 0). Tốc độ bằng 0 khi sint = 0, tức khi vật thể ở cao nhất hoặc thấp nhất.

Gia tốc a = - 4cost = 0 khi s = 0 . Độ lớn của gia tốc lớn nhất xảy ra tại những điểm cao nhất và thấp nhất. Xem Hình 6.

VÍ DỤ 4 Tìm đạo hàm bậc 27 của cos x.

GIẢI Hãy tính thử một vài đạo hàm đầu tiên của f(x) = cosx như sau:

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x,\ f^{(5)}(x) = -\sin x$$

Ta thấy rằng các đạo hàm tiếp theo xảy ra theo một chu kỳ có độ dài 4, đặc biệt , $f^{(n)}(x) = \cos x$ khi nào n là bội số của 4. Do đó

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

Tiếp tục đạo hàm ba lần tiếp theo, ta được

$$f^{(27)}(x) = \sin x$$

Mục đích sử dụng chính của giới hạn trong Phương trình 2 là để chứng minh đạo hàm của hàm số sin. Nhưng giới hạn này cũng được dùng để tìm một số giới hạn lượng giác, như hai ví dụ sau sẽ chỉ rõ.

VÍ DỤ 5 Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{4x}$.

GIẢI Để sử dụng được Phương trình 2, trước tiên ta viết lại hàm số như sau

$$\frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$$

Nếu đặt θ = 7x, thì θ → 0 khi x → 0, do đó theo Phương trình 2 ta có

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{7}{4} .1 = \frac{7}{4}$$

VÍ DỤ 6 Tình $\lim\limits_{x \to 0} x \cot x$

GIẢI Chia tử và mẫu cho x:

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \cos x}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} = 1$$

(Do hàm số cos liên tục và Phương trình 2)

BÀI TẬP

1-16. Tính đạo hàm các hàm số sau.

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$
2. $f(x) = \sqrt{x}\sin x$
3. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cot x$
4. $y = 2\csc x + 5\cos x$
5. $g(t) = t^3\cos t$
6. $g(t) = 4\sec t + \tan t$
7. $h(\theta) = \csc\theta + e^\theta\cot\theta$
8. $y = e^u(\cos u + cu)$
9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$
10. $y = \dfrac{1 + \sin x}{x + \cos x}$
11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$
12. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$
13. $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$
14. $y = \csc\theta\,(\theta + \cot\theta)$
15. $f(x) = xe^x\csc x$
16. $y = x^2\sin x\tan x$

17. Chứng minh $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$

18. Chứng minh $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$

19. Chứng minh $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

20. Dùng định nghĩa đạo hàm, chứng minh rằng nếu f(x) = cos x thì f ’(x) = - sin x.

21-24. Tìm phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại điểm cho trước.

21. y = sec x, (π/3, 2) **22.** y = e^xcos x, (0, 1)

23. y = x + cos x, (0, 1)

24. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$, (0, 1)

25. (a) Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong y = 2xsin x tại điểm (π/2, π).

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đồ thị hàm số và tiếp tuyến của nó trên cùng một khung hình.

26. (a) Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong y = sec x – 2cos x tại điểm (π/3, 1).

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đồ thị hàm số và tiếp tuyến của nó trên cùng một khung hình.

27. (a) Biết f(x) = sec x – x, tìm f ’(x).

(b) Kiểm tra xem kết quả của bạn ở phần (a) hợp lý chưa bằng cách vẽ đồ thị f và f ’ với | x | < π/2.

28. (a) Biết f(x) = e^x cos x, tìm f ’(x) và f ” (x).

(b) Kiểm tra xem kết quả của bạn ở phần (a) hợp lý chưa bằng cách vẽ đồ thị f, f ’ và f ”.

29. Biết H(θ) = θ sin θ, tìm H ’(θ) và H ” (θ).

30. Biết f(x) = sec x, tìm f ”(π/4).

31. (a) Dùng Quy Tắc Chia để lấy đạo hàm hàm số

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

(b) Đơn giản biểu thức f(x) bằng cách biểu diễn f(x) theo sin x và cos x, rồi tìm f ’(x).

(c) Chứng tỏ rằng kết quả bạn làm ở phần (a) và (b) là tương đương.

32. Giả sử f(π/3) = 4 và f ’(π/3) = - 2, và đặt

$$g(x) = f(x)\sin x$$

và
$$h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$$

Tìm (a) g’ (π/3) (b) h’(π/3)

33. Với giá trị nào của x thì đồ thị của f(x) = x + 2sin x có tiếp tuyến nằm ngang?

34. Tìm những điểm trên đường cong

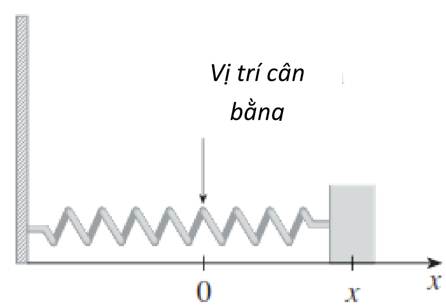
$$y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$$

tại đó tiếp tuyến nằm ngang.

35. Một khối lượng gắn trên một lò xo dao động ngang trên một mặt nằm ngang không ma sát (xem hình). Phương trình chuyển động là x(t) = 8sint, t tính bằng giây và x tình bằng cm.

a) Tìm tốc độ và gia tốc.

b) Tìm vị trí, tốc độ và gia tốc của khối lượng tại t = 2π/3. Lúc đó khối lượng đi về hướng nào?



36. Một dây cao su được treo trên một móc và đầu kia mang một khối lượng. Khi kéo khối lượng xuống và buông ra, nó dao động thẳng đứng. Phương trình chuyển động là s = 2cost + 3sint, t ≥ 0, tính bằng giây còn s tính bằng cm. (Chiều dương là chiều chỉ địa.)

a) Tìm tốc độ và gia tốc theo t.
b) Khi nào khối lượng đi qua vị trí cân bằng lần đầu tiên?
c) Khối lượng cách xa vị trí cân bằng nhất là bao xa?
d) Khi nào tốc độ lớn nhất?

37. Một cái thang dài 10 ft dựa vào một bức tường thẳng đứng. Gọi θ là góc tạo bởi đầu thang và bức tường và gọi x là khoảng cách từ chân thang đến bức tường. Nếu chân thang trượt ra xa bức tường, hỏi x biến thiên nhanh thế nào đối với θ khi θ = π/3?

38. Một vật thể nặng W được kéo lê trên một mặt phẳng nằm ngang bởi một lực tác động dọc theo sợi dây buộc vào vật thể. Nếu sợi dây tạo một góc θ với mặt phẳng, thế thì cường độ của lực là

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

trong đó μ là hằng số gọi là hệ số ma sát.
(a) Tìm tốc độ biến thiên của F đối với θ.
(b) Khi nào tốc độ biến thiên này bằng 0?
(c) Nếu W = 50 cân và μ = 0.6, vẽ đồ thị của F như một hàm số theo θ và dùng nó để định giá trị của θ sao cho dF/d θ = 0. Giá trị này có phù hợp với kết quả bạn làm ở phần (a).

39-48. Tím các giới hạn sau.

39. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

40. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 6x}$

41. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\tan 6t}{\sin 2t}$

42. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$

43. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin(\cos\theta)}{\sec\theta}$

44. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sin^2 3t}{t^2}$

45. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta + \tan\theta}$

46. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x}$

47. $\lim_{\pi \to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$

48. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}$

49. Lấy đạo hàm mỗi đẳng thức lượng giác sau để có một đẳng thức mới (hay quen thuộc).

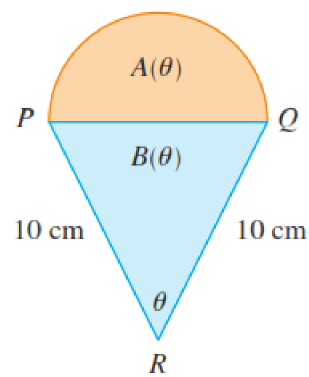
(a) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\sin x + \cos x = \dfrac{1 + \cot x}{\csc x}$

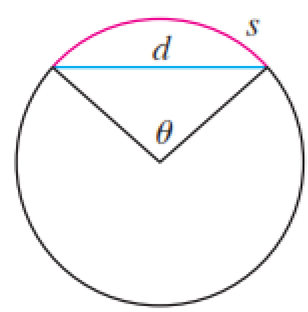
50. Một nửa hình tròn có đường kính PQ nằm trên một tam giác cân PQR tạo thành một hình giống như một que kem (hình dưới). Gọi A(θ) là diện tích của nửa hình tròn và B(θ) là diện tích của tam giác, tìm

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



51. Hình dưới cho thấy một cung tròn có chiều dài s và một dây cung có chiều dài d, chắn một góc ở tâm q. Tìm

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{s}{d}$$



ĐÁP SỐ

1. $f'(x) = 6x + 2\sin x$ **3.** $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\csc^2 x$

5. $g'(t) = 3t^2\cos t - t^3\sin t$

7. $h'(\theta) = -\csc\theta\cot\theta + e^\theta(\cot\theta - \csc^2\theta)$

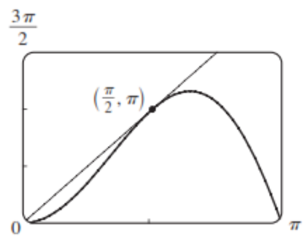
9. $y' = \dfrac{2 - \tan x + x\sec^2 x}{(2 - \tan x)^2}$ **11.** $f'(\theta) = \dfrac{\sec\theta\tan\theta}{(1 + \sec\theta)^2}$

13. $y' = (x\cos x - 2\sin x)/x^3$

15. $f'(x) = e^x\csc x(-x\cot x + x + 1)$

21. $y = 2\sqrt{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi + 2$ **23.** $y = x + 1$

25. (a) $y = 2x$ (b)



27. (a) $\sec x\tan x - 1$

29. $\theta\cos\theta + \sin\theta$; $2\cos\theta - \theta\sin\theta$

31. (a) $f'(x) = (1 + \tan x)/\sec x$ (b) $f'(x) = \cos x + \sin x$

33. $(2n + 1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi$, n an integer

35. (a) $v(t) = 8\cos t$, $a(t) = -8\sin t$

(b) $4\sqrt{3}$, -4, $-4\sqrt{3}$; to the left

37. 5 ft/rad **39.** 3 **41.** 3 **43.** $\sin 1$

45. $\frac{1}{2}$ **47.** $-\sqrt{2}$

49. (a) $\sec^2 x = 1/\cos^2 x$ (b) $\sec x\tan x = (\sin x)/\cos^2 x$

(c) $\cos x - \sin x = (\cot x - 1)/\csc x$

51. 1

BÀI 3. 4. QUY TẮC DÂY XÍCH

Giả sử bạn được yêu cầu vi phân (lấy đạo hàm) hàm số

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Các công thức vi phân đã học trong các phần trước không cho phép bạn tính được F'(x).

Nhận xét rằng F là hàm số hợp (xem lại Bài 1.3). Thật vậy, nếu đặt y = f(u) = $\sqrt{u}$ và đặt u = g(x) = $x^2 + 1$, thì ta có thể viết y = F(x) = f(g(x)), nghĩa là , F = f o g. Ta biết cách vi phân cả hai hàm số f và g, vì thế nếu có một quy tắc chỉ cách tìm đạo hàm của F = f o g , dựa vào đạo hàm của f và g thì thật là hữu ích.

Hóa ra đạo hàm của hàm số hợp f o g chính là tích của đạo hàm của f và g. Sự kiện này là một trong những quy tắc quan trọng nhất của vi phân và được gọi là Quy Tắc Dây Xích (chain rule). Nếu coi đạo hàm như là tốc độ biến thiên, thì du/dx là tốc độ biến thiên của u đối với x, dy/du là tốc độ biến thiên của y đối với u, và dy/dx là tốc độ biến thiên của y đối với x. Nếu u biến thiên nhanh gấp hai lần x và y biến thiên nhanh gấp ba lần u, thì thật hữu lý khi cho rằng y biến thiên nhanh gấp sáu lần x, và ta hi vọng rằng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

QUY TẮC DÂY XÍCH Nếu g khả vi tại x và f khả vi tại g(x), thì hàm số hợp F = f o h định bởi F(x) = f(g(x)) khả vi tại x và F' được cho bằng tích

F'(x) = f'(g(x)) . g'(x)

Viết theo ký hiệu Leibniz, nếu y = f(u) và u = g(x)đều là các hàm số khả vi, thì

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

CHÚ GIẢI VỀ CHỨNG MINH QUY TẮC DÂY XÍCH Gọi Δu là số gia của u ứng với số gia Δx, nghĩa là

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Thế thì số gia tương ứng của y là

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Có thể đến đây ta muốn viết

1

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}.\frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}.\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}.\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

(Chú ý là $\Delta u \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ vì g là hàm số liên tục)

Khuyết điểm duy nhất trong lý luận này là trong (1) có thể xảy ra trường hợp Δu = 0 (dù cho Δx ≠ 0) và, dĩ nhiên, lúc đó ta không thể chia cho 0 nên Δy/Δu là vô nghĩa. Dù sao, lý luận này cũng gợi ý được là Quy Tắc Dây Xích là đúng. Cách chứng minh đầy đủ của Quy Tắc Dây Xích được cho trong phần cuối của bài này.

Quy Tắc Dây Xích có thể được viết hoặc bằng ký hiệu dấu phẩy

2 $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

hoặc, nếu y = f(u) và u = g(x), bằng ký hiệu Leibniz:

3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Phương trình 3 dễ nhớ vì nếu dy/du và du/dx là những thương số, thì ta có thể khử du . Tuy nhiên nên nhớ là du vẫn chưa xác định và du/dx không nên được coi như là những thương số thực sự.

VÍ DỤ 1 Tìm F '(x) biết F(x) = $\sqrt{x^2+1}$

GIẢI 1 (Dùng công thức 1): Ta xem F như F(x) = (f o g)(x) = f(g(x)) với f(u) = $\sqrt{u}$ và g(x) = x^2 + 1. Vì

$$f'(u) = {}^1/_2 . u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{và} \qquad g'(x) = 2x$$

ta có

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} . 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

GIẢI 2 (dùng Phương trình 3): nếu ta đặt u = x^2 + 1 và y = $\sqrt{u}$, thì

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Khi dùng Công Thức 3 ta nên nhớ trong đầu là dy/dx chỉ đạo hàm của y khi y được xem là hàm số theo x (gọi là đạo hàm của y đối với x), trong khi dy/du chỉ đạo hàm của y khi xem nó là hàm số theo u (đạo hàm của y đối với u). Chẳng hạn, trong Ví dụ 1, y có thể coi là hàm số của x (y = $\sqrt{x^2+1}$) cũng như hàm số của u (y = $\sqrt{u}$). Chú ý là

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \textit{trong khi} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

GHI CHÚ Khi dùng Quy Tắc Dây Xích ta thực hiện từ ngoài vào trong. Công thức 2 bảo rằng ta lấy đạo hàm hàm số bên ngoài f [đối với hàm số bên trong g(x)] rồi sau đó nhân với đạo hàm của hàm số bên trong.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\text{hàm số ngoài}}\underbrace{(g(x))}_{\text{được tính đ/v hàm số trong}} \;\; \underset{\text{GIẢI}}{=} \;\; \underbrace{f'}_{\text{đạo hàm hs ngoài}}\underbrace{(g(x))}_{\text{được tính đ/v hàm số trong}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{đạo hàm hs trong}}$$

VÍ DỤ 2 Vi phân (a) $y = \sin(x^2)$ và (b) $y = \sin^2 x$

GIẢI

(a) Nếu $y = \sin(x^2)$, thế thì hàm số ngoài là hàm số sin và hàm số trong là hàm số bình phương, do đó Quy Tắc Dây Xích cho ta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{\sin}_{\text{hàm số ngoài}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{được tính đ/v} \\ \text{hàm số trong}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{đạo hàm hs} \\ \text{ngoài}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{được tính đ/v} \\ \text{hàm số trong}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{đạo hàm hs} \\ \text{trong}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

(b) Chú ý là $\sin^2 x = (\sin x)^2$. Ở đây hàm số ngoài là hàm số bình phương còn hàm số trong là hàm số sin. Do đó

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{(\sin x)^2}_{\text{hàm số trong}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{đạo hàm hs} \\ \text{ngoài}}} \cdot \underbrace{(\sin x)}_{\substack{\text{được tính đ/v} \\ \text{hàm số trong}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{đạo hàm hs} \\ \text{trong}}}$$

$$= \sin 2x \text{ (công thức nhân đôi)}$$

Trong Ví dụ 2(a) ta kết hợp Quy Tắc Dây Xích với quy tắc vi phân hàm số sin. Tổng quát, nếu $y = \sin u$, trong đó u là hàm số khả vi theo x, thế thì, theo Quy Tắc Dây Xích,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Do đó
$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

Tương tự, tất cả công thức vi phân hàm số lượng giác có thể được kết hợp với Quy Tắc Dây Xích.

Bây giờ xét trường hợp đặc biệt trong đó Quy Tắc Dây Xích được kết hợp với hàm số ngoài f là hàm số lũy thừa. Nếu $y = [g(x)]^n$, thế thì ta có thể viết $y = f(u) = u^n$ trong đó $u = g(x)$. Bằng cách sử dụng Quy Tắc Dây Xích và Quy Tắc Lũy Thừa, ta được

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}\, g'(x)$$

4 QUY TẮC LŨY THỪA KẾT HỢP VỚI QUY TẮC DÂY XÍCH Nếu n là một số thực bất kỳ và $u = g(x)$ khả vi, thế thì

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Viết cách khác,
$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Chú ý là đạo hàm trong Ví dụ 1 có thể được tính bằng cách lấy n = ½ trong Quy Tắc 4.

VÍ DỤ 3 Vi phân hàm số $y = (x^3 - 1)^{100}$.

GIẢI Đặt u = g(x) = $x^3 - 1$ và n = 100 trong (4), ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3-1)^{100} = 100(x^3-1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3-1)$$
$$= 100(x^3-1)^{99}.\ 3x^2 = 300x^2(x^3+1)^{99}$$

VÍ DỤ 4 Tìm f ’(x) biết f(x) = $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

GIẢI Trước tiên viết lại f: $f(x) = (x^2+x+1)^{-1/3}$

Do đó

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2+x+1)$$
$$= -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-4/3}(2x+1)$$

VÍ DỤ 5 Tìm đạo hàm của hàm số g(t) = $\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$

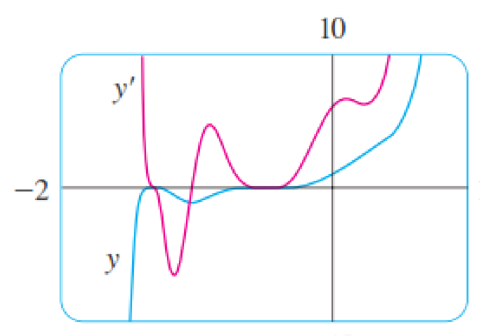
GIẢI Kết hợp Quy Tắc Lũy Thừa, Dây Xích, và Chia, ta được

$$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$
$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\frac{(2t+1).1-2(t-2)}{(2t+1)^2} = \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

VÍ DỤ 6 Vi phân hàm số y = $(2x+1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

GIẢI Trong ví dụ này ta phải dùng Quy Tắc Nhân trước khi dùng Quy Tắc Dây Xích:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)^5\frac{d}{dx}(x^3-x+1)^4 + (x^3-x+1)^4\frac{d}{dx}(2x+1)^5$$
$$= (2x+1)^5 . 4(x^3-x+1)^3\frac{d}{dx}(x^3-x+1) +$$
$$+ (x^3-x+1)^4 .5. (2x+1)^4\frac{d}{dx}(2x+1)$$
$$= 4(2x+1)^5(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + 5(x^3-x+1)^4(2x+1)^4 . 2$$
$$= 2(2x+1)^4 . (x^3-x+1)^3(17x^3+6x^2-9x+3)$$



HÌNH 1 *cho thấy đồ thị của f và f′ trong VD 6. Nhận xét y′ lớn khi y tăng nhanh và y′ = 0 khi y có tiếp tuyến nằm ngang. Vì vậy lời giải ta có vẽ hợp lý.*

VÍ DỤ 7 Vi phân hàm số y = $e^{\sin x}$.

GIẢI Ở đây hàm số trong là g(x) = sin x, còn hàm số ngoài là hàm số mũ f(x) = e^x. Do đó, Quy Tắc Dây Xích cho ta,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sin x}) = e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x}\cos x$$

Tổng quát, Quy Tắc Dây Xích cho ta

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

Ta có thể dùng Quy Tắc Dây Xích để vi phân hàm số mũ với cơ số a > 0 bất kỳ. Nhớ trong Bài 1.6 là $a = e^{\ln a}$, do đó

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

Quy Tắc Dây Xích cho

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x$$
$$= e^{(\ln a)x}\,.\ln a = a^x \ln a$$

vì lna là hằng số. Do đó ta có công thức

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

Đặc biệt, với a = 2, ta được

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

Trong Bài 3.1 ta ước tính $$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Điều này phù hợp với công thức chính xác (6) vì ln 2 ≈ 0.693147.

Lý do ta gọi tên "Quy Tắc Dây Xích" sẽ hiểu được khi ta thực hiện một "dây xích" dài hơn bằng cách thêm một liên kết. Giả sử y = f(u), u = g(x), và x = h(t), trong đó f, g, và h là các hàm số khả vi. Thế thì, để tính đạo hàm của y đối với t, ta dùng Quy tắc Dây Xích hai lần:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

VÍ DỤ 8 Vi phân $y = e^{\sec 3q}$.

GIẢI Hàm số ngoài là hàm số mũ, hàm số giữa là hàm số sec và hàm số trong là hàm số nhân ba. Do đó ta viết

$$\frac{dy}{d\theta} = e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta)$$
$$= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta \frac{d}{d\theta}(3\theta)$$
$$= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta$$

CHỨNG MINH QUY TẮC DÂY XÍCH Nhớ rằng nếu y = f(x) và x biến thiên từ a đến a + Δx, ta định nghĩa gia số của y là

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Từ định nghĩa đạo hàm, ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Do đó nếu ta gọi ε là hiệu số giữa tỉ số hai gia số và đạo hàm. ta được

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

Nhưng $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Nếu ta cho ε = 0 khi Δx = 0, thế thì ε trở thành hàm số liên tục theo Δx. Do đó, đối với hàm số f khả vi f, ta cói thể viết

7 $\quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \quad$ trong đó $\varepsilon \to 0$ khi $\Delta x \to 0$

và ε là hàm số liên tục theo Δx. Tính chất này của hàm số khả vi cho phép ta chứng minh được Quy Tắc Dây Xích.

CHỨNG MINH Giả sử u = g(x) khả vi tại a và y = f(u) khả vi tại b = g(a). Nếu là gia số của x và Δu và Δy là gia số tương ứng của u và y, theo công thức 7 ở trên ta có thể ta có thể viết

8 $\quad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$

trong đó $\varepsilon_1 \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Tương tự

9 $\quad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$

trong đó $\varepsilon_2 \to 0$ khi $\Delta u \to 0$. Thế Δu từ Phương trình 8 vào Phương trình 9, ta được

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2]\,[g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

hay $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Khi $\Delta x \to 0$, Phương trình 8 chứng tỏ rằng $\Delta u \to 0$. Do đó cả $\varepsilon_1 \to 0$ và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Thành ra

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}[f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Và Quy Tắc Dây Xích đã được chứng minh.

BÀI TẬP

1-6. Viết hàm số hợp theo dạng f(g(x)). [Nhận diện hàm số trong u = g(x) và hàm số ngoài y = f(u).] Sau đó tìm đạo hàm dy/dx.

1. $y = \sin 4x$ **2.** $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$ **4.** $y = \tan(\sin x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$ **6.** $y = \sin(e^x)$

7-46. Tìm đạo hàm các hàm số sau

7. $f(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$ **8.** $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$ **10.** $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$ **12.** $f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$ **14.** $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$ **16.** $y = 3\cot(n\theta)$

17. $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$

18. $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$ **20.** $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3$

22. $y = e^{-5x}\cos 3x$

23. $y = e^{x\cos x}$

24. $y = 10^{1-x^2}$

25. $F(z) = \sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$

26. $G(y) = \dfrac{(y-1)^4}{(y^2+2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+1}}$

28. $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

29. $y = \sin(\tan 2x)$

30. $G(y) = \left(\dfrac{y^2}{y+1}\right)^5$

31. $y = 2^{\sin \pi x}$

32. $y = \tan^2(3\theta)$

33. $y = \sec^2 x + \tan^2 x$

34. $y = x \sin \dfrac{1}{x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$

36. $f(t) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2+4}}$

37. $y = \cot^2(\sin\theta)$

38. $y = e^{k\tan\sqrt{x}}$

39. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$

40. $y = \sin(\sin(\sin x))$

41. $f(t) = \sin^2(e^{\sin^2 t})$

42. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$

44. $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\sin(\tan \pi x)}$

46. $y = [x + (x + \sin^2 x)^3]^4$

47-50. Tìm đạo hàm bậc nhất và bậc hai của các hàm số sau.

47. $h(x) = \sqrt{x^2+1}$

48. $y = xe^{cx}$

49. $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$

50. $y = e^{e^x}$

51-54. Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm cho trước.

51. $y = (1 + 2x)^{10}$, (0, 1)

52. $y = \sin x + \cos x$, (0, 0)

53. $y = \sin(\sin x)$, $(\pi, 0)$

54. $y = x^2 e^{-x}$, (1, 1/e)

55. (a) Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong

$$y = 2/(1 + e^{-x}) \text{ tại điểm } (0, 1).$$

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đồ thị của đường cong và tiếp tuyến trên cùng một khung hình.

56. (a) Đường cong $y = |x|/\sqrt{2-x^2}$ gọi là đường mũi đạn. Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong này tại điểm (1, 1).

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đồ thị đường cong và tiếp tuyến trên cùng một khung hình.

57. (a) Biết $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$, tìm $f'(x)$.

(b) Kiểm tra kết quả phần (a) bằng cách so sánh đồ thị của f và f '.

58. Hàm số $f(x) = \sin(x + \sin 2x)$, $0 \le x \le \pi$, xuất hiện trong các ứng dụng của tổng hợp điều chỉnh tần số.

(a) Dùng đồ thị của f vẽ bằng máy tính để phác họa đồ thị của f '.

(b) Tính $f'(x)$ và dùng biểu thức này cùng với máy tính để vẽ f '. So sánh với đồ thị bạn vẽ trong phần (a).

59. Tìm tất cả những điểm trên đồ thị hàm số

$$f(x) = 2\sin x + \sin^2 x$$

mà tiếp tuyến tại đó nằm ngang.

60. Tìm hoành độ những điểm trên đường cong

$$y = \sin 2x - 2\sin x$$

mà tiếp tuyến tại đó nằm ngang.

61. Biết $F(x) = f(g(x))$, trong đó $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, và $g'(5) = 6$, tìm $F'(5)$.

62. Biết $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, trong đó $f(1) = 7$ và $f'(1) = 4$, tìm $h'(1)$.

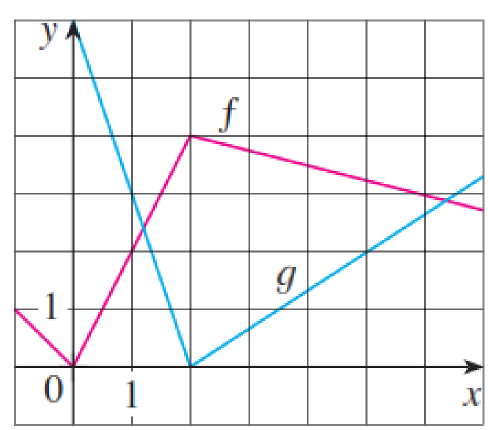
63. Bảng giá trị của f, g, f ', và g' được cho bên dưới.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) Biết $h(x) = f(g(x))$, tìm $h'(1)$.

(b) Biết $G(x) = g(g(x))$, tìm $G'(3)$.

65. Nếu f và g là những hàm số có đồ thị được cho bên dưới.

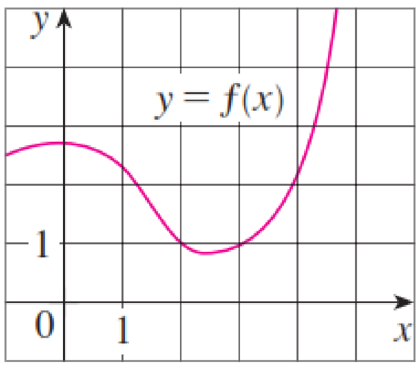


Đặt u(x) = f(g(x)), v(x) = g(f(x)), và w(x) = g(g(x)). Tìm mỗi đạo hàm, nếu tồn tại. Nếu không tồn tại, hãy giải thích tại sao.

(a) u'(1) (b) v'(1) (c) w'(1)

66. Nếu f là hàm số có đồ thị cho trước, đặt h(x) = f(f(x)) và g(x) = f(x^2). Dùng đồ thị của f để ước tính giá trị của mỗi đạo hàm.

(a) h'(2) (b) g'(2)



67. Giả sử f khả vi trên R. Đặt F(x) = f(e^x) và G(x) = $e^{f(x)}$. Tìm biểu thức của

(a) F'(x) (b) G'(x)

68. Giả sử f khả vi trên R và α là một số thực. Đặt F(x) = f(x^α) và G(x) = $[f(x)]^\alpha$. Tìm biểu thức của

(a) F'(x) (b) G'(x)

69. Đặt r(x) = f(g(h(x))), trong đó h(1) = 2, g(2) = 3, h'(1) = 4, g'(2) = 5, và f '(3) = 6. Tìm r '(1).

70. Nếu g là hàm số hai lần khả vi và f(x) = xg(x^2), tìm f " theo g, g', và g".

71. Biết F(x) = f(3f(4f(x))), trong đó f(0) = 0 và f '(0) = 2, tìm F'(0).

72. Biết F(x) = f(xf(xf(x)))), trong đó f(1) = 2, f(2) = 3, f '(1) = 4, f '(2) = 5, và f '(3) = 6, tìm F'(1).

73. Chứng tỏ rằng hàm số y = Ae^{-x} + Bxe^{-x} thỏa mãn phương trình vi phân y" + 2y' + y = 0.

74. Với giá trị nào của r hàm số y = e^{rx} thỏa mãn phương trình vi phân y" + 5y' – 6y = 0?

75. Tìm đạo hàm thứ 50 của y = cos 2x.

76. Tìm đạo hàm thứ 1000 của f(x) = xe^{-x}.

77. Một chất điểm trên một sợi dây dao động di chuyển với phương trình

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\sin(10\pi t)$$

trong đó s tính bằng cm và t tính bằng giây. Tìm tốc độ của chất điểm sau t giây.

78. Nếu phương trình chuyển động của một chất điểm cho bởi s = Acos(ωt + δ), chất điểm được gọi là chuyển động điều hòa đơn giản

(a) Tìm tốc độ của chất điểm tại thời điểm t.

(b) Khi nào tốc độ bằng 0.

79. Ngôi sao Cepheid là ngôi sao mà độ sáng của nó lần lượt tăng rồi giảm. Một ngôi sao dễ quan sát nhất là Delta Cephei, mà khoảng cách giữa các lần sáng tối đa là 5.4 ngày. Độ sáng trung bình của ngôi sao này là 4.0 và độ sáng của nó biến thiên ± 0.35. Dựa vào dữ kiện này, đô sáng của Delta Cephei tại thời điểm t, trong đó t tính bằng ngày, đã được mô hình hóa bằng hàm số

$$B(t) = 4.0 + 0.35\sin\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

(a) Tìm tốc độ biến thiên của độ sáng sau t ngày.

(b) Tìm, đúng đến hai chữ số thập phân, tốc độ tăng sau 1 ngày.

80. Trong Ví dụ 4 ở Bài 1.3 ta gặp mô hình về số giờ ban ngày (tính bằng giờ) ở Philadelphia vào ngày thứ t trong năm là:

$$L(t) = 12 + 2.8\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]$$

Dùng mô hình này để so sánh cách thức mà số giờ ban ngày tăng thế nào ở Philadelphia vào ngày 21/3 và 21/5.

81. Chuyển động của lò xo khi chịu một lực ma sát hay lực hảm (như một lực giảm sốc trong ô tô) thường được mô hình hóa bằng tích một hàm số mũ và một hàm số sin hay cos. Giả sử phương trình chuyển động của một điểm trên một lò xo như thế là

$$s(t) = 2e^{-1.5t}\sin 2\pi t$$

trong đó s tính bằng cm và t bằng giây. Tìm tốc độ sau t giây và vẽ đồ thị của hàm vị trí và hàm tốc độ với 0 ≤ t ≤ 2.

82. Dưới một số điều kiện một tin đồn được lan truyền theo phương trình

$$p(t) = \frac{1}{1+ae^{-kt}}$$

trong đó p(t) là tỷ lệ dân số nghe được tin đồn tại thời điểm t và a và k là những hằng số dương. [Trong Bài 9.4 ta sẽ thấy là phương trình này là phương trình hợp lý đối với p(t).]

(a) Tìm $\lim_{t\to\infty} p(t)$

(b) Tìm tốc độ lan truyền của tin đồn.

(c) Vẽ đồ thị p ứng với a = 10, k = 0.5 với t tính bằng giờ. Dùng đồ thị để ước tính trong bao lâu thì 80% dân số sẽ nghe được tin đồn.

83. Một chất điểm chuyển động dọc theo một đường thẳng với phương trình vị trí s(t), tốc độ v(t), và gia tốc a(t). Chứng tỏ rằng

$$a(t)=v(t)\frac{dv}{ds}$$

Giải thích sự khác biệt ý nghĩa giữa các đạo hàm dv/dt và dv/ds.

84. Không khí được bơm vào một khinh khí cầu dự báo thời tiết. Gọi V(t) là thể tích của quả cầu và r(t) là bán kính tại thời điểm t.

(a) Đạo hàm dV/dr và dV/dt biểu thị điều gì?

(b) Biểu diễn dV/dt theo dr/dt.

85. Đèn flash trên máy ảnh hoạt động bằng cách tích trữ điện lượng trong một tụ điện và phóng điện ra thình lình khi bật đèn flash. Dữ kiện sau đây mô tả điện lượng Q còn lại trong tụ điện (tính bằng microcoulomb, μC) tại thời điểm t (tính bằng giây).

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

(a) Dùng máy tính để tìm một mô hình mũ cho điện lượng.

(b) Đạo hàm Q'(t) biểu thị cường độ dòng điện (tính bằng microampe, μA) chạy từ tụ điện đến bóng đèn flash. Dùng kết quả phần (a) để ước tính cường độ khi t = 0.004 s. So sánh với kết quả trong Ví dụ 2 trong Bài 2.1.

86. Bảng dưới cho biết dân số của Mỹ từ 1790 đến 1860.

(a) Dùng máy tính để mô hình hóa dữ liệu trên thành hàm số mũ. Vẽ biểu đồ những điểm dữ liệu và mô hình mũ. Chúng có phù hợp có tốt không?

(b) Ước tính tốc độ tăng dân số trong năm 1800 và 1850 bằng cách tính trung bình các độ dốc của cát tuyến.

(c) Dùng mô hình mũ trong phần (a) để ước tính tốc độ tăng trưởng dân số trong năm 1800 và 1850. So sánh kết quả này với kết quả đã làm ở phần (a).

(d) Dùng mô hình mũ để dự đoán dân số trong năm 1870. So sánh kết quả này với dân số thực sự trong năm 1870 là 38,558,000. Bạn có thể giải thích tại sao có sự chênh lệch không?

Year	Population	Year	Population
1790	3,929,000	1830	12,861,000
1800	5,308,000	1840	17,063,000
1810	7,240,000	1850	23,192,000
1820	9,639,000	1860	31,443,000

87. Phần mềm của máy tính có các hệ thống đại số dùng để vi phân các hàm số, nhưng hình thức trình bày kết quả có nhiều khi bất tiện và phải cần thêm nhiều lệnh hơn để các đáp số được được đơn giản hóa.

(a) Dùng máy tính CAS để tìm đạo hàm trong Ví dụ 5 và so sánh với đáp án đã trình bày trong ví dụ đó. Sau đó dùng các lệnh đơn giản hóa và so sánh kết quả.

(b) Dùng máy tính CAS để tìm đạo hàm trong Ví dụ 6. Điều gì xảy ra nếu bạn dùng lệnh đơn giản hóa? Điều gì xảy ra nếu bạn dùng lệnh phân tích ra thừa số? Hình thức trả lời nào là tốt nhất cho việc định vị được các tiếp tuyến nằm ngang?

88. (a) Dùng máy tính CAS để vi phân hàm số

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^4-x+1}{x^4+x+1}}$$

và đơn giản hóa kết quả.

(b) Ở đâu đồ thị có tiếp tuyến nằm ngang?

(c) Vẽ đồ thị f và f ' trên cùng một khung hình. Đồ thị có phù hợp với trả lời của bạn ở phần (b) không?

89. Dùng Quy Tắc Dây Xích để chứng minh các mệnh đề sau.

(a) Đạo hàm của một hàm số chẵn là một hàm số lẻ.

(b) Đạo hàm của một hàm số lẻ là một hàm số chẵn.

90. Dùng Dùng Quy Tắc Dây Xích và Quy Tắc Nhân để chứng minh cách khác Quy Tắc Chia.

[Gợi ý: Viết $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

91. (a) Nếu n là số nguyên dương, chứng tỏ rằng

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^n x\cos nx\right)=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$$

(c) Tìm một công thức đạo hàm của y = $\cos^n x\cos nx$ tương tự công thức ở phần (a).

92. Giả sử y = f(x) là đường cong luôn nằm phía trên trục hoành và không hề có tiếp tuyến nằm ngang, và f khả vi ở mọi nơi. Với giá trị nào của y thì tốc độ biến thiên y^5 đối với x bằng tám chục lần tốc độ biến thiên của y đối với x?

93. Dùng Quy Tắc Dây Xích để chứng tỏ rằng nếu θ được tính bằng độ thì

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)=\frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Công thức này cho thấy tại sao quy ước dùng đơn vị radian luôn được sử dụng với hàm số lượng giác trong giải tích. Công thức vi phân sẽ không đơn giản khi dùng đơn vị độ.)

94. (a) Viết | x | = $\sqrt{x^2}$ rồi dùng Quy Tắc Dây Xích để chứng tỏ rằng

$$\frac{d}{dx}|x|=\frac{x}{|x|}$$

(b) Nếu f(x) = | sin x |, tìm f ’(x) và vẽ đồ thị hàm số f và f ’. f không khả vi tại đâu?

(c) Nếu g(x) = sin | x |, tìm g ’(x) và vẽ đồ thị hàm số g và g’. g không khả vi tại đâu?

95. Nếu y = f(u) và u = g(x), trong đó f và g là các hàm số hai lần khả vi, chứng tỏ rằng

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

96. Nếu y = f(u) và u = g(x), trong đó f và g có đạo hàm đến cấp ba, tìm công thức cho d^3y/dx^3 tương tự như công thức ở Bài tập 95.

ĐÁP SỐ

1. $4\cos 4x$ **3.** $-20x(1-x^2)^9$ **5.** $e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$

7. $F'(x)=10x(x^4+3x^2-2)^4(2x^2+3)$

9. $F'(x)=\dfrac{2+3x^2}{4(1+2x+x^3)^{3/4}}$ **11.** $g'(t)=-\dfrac{12t^3}{(t^4+1)^4}$

13. $y'=-3x^2\sin(a^3+x^3)$ **15.** $y'=e^{-kx}(-kx+1)$

17. $g'(x)=4(1+4x)^4(3+x-x^2)^7(17+9x-21x^2)$

19. $y'=8(2x-5)^3(8x^2-5)^{-4}(-4x^2+30x-5)$

21. $y'=\dfrac{-12x(x^2+1)^2}{(x^2-1)^4}$ **23.** $y'=(\cos x-x\sin x)e^{x\cos x}$

25. $F'(z)=1/[(z-1)^{1/2}(z+1)^{3/2}]$

27. $y'=(r^2+1)^{-3/2}$ **29.** $y'=2\cos(\tan 2x)\sec^2(2x)$

31. $y'=2^{\sin \pi x}(\pi\ln 2)\cos\pi x$ **33.** $y'=4\sec^2 x\tan x$

35. $y'=\dfrac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}\sin\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

37. $y'=-2\cos\theta\cot(\sin\theta)\csc^2(\sin\theta)$

39. $f'(t)=\sec^2(e^t)e^t+e^{\tan t}\sec^2 t$

41. $f'(t)=4\sin(e^{\sin^2 t})\cos(e^{\sin^2 t})\,e^{\sin^2 t}\sin t\cos t$

43. $g'(x)=2r^2p(\ln a)(2ra^{rx}+n)^{p-1}a^{rx}$

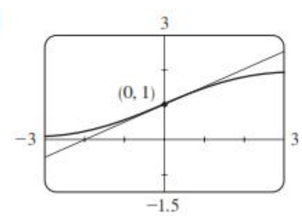
45. $y'=\dfrac{-\pi\cos(\tan\pi x)\sec^2(\pi x)\sin\sqrt{\sin(\tan\pi x)}}{2\sqrt{\sin(\tan\pi x)}}$

47. $h'(x)=x/\sqrt{x^2+1},\ h''(x)=1/(x^2+1)^{3/2}$

49. $e^{\alpha x}(\beta\cos\beta x+\alpha\sin\beta x);\ e^{\alpha x}[(\alpha^2-\beta^2)\sin\beta x+2\alpha\beta\cos\beta x]$

51. $y=20x+1$ **53.** $y=-x+\pi$

55. (a) $y=\frac{1}{2}x+1$ (b)



57. (a) $f'(x)=(2-2x^2)/\sqrt{2-x^2}$

59. $((\pi/2)+2n\pi,\,3),\ ((3\pi/2)+2n\pi,\,-1)$, n an integer

61. 24 **63.** (a) 30 (b) 36

65. (a) $\frac{3}{4}$ (b) Does not exist (c) -2

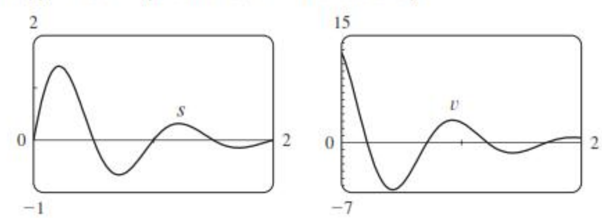
67. (a) $F'(x)=e^x f'(e^x)$ (b) $G'(x)=e^{f(x)}f'(x)$

69. 120 **71.** 96 **75.** $-2^{50}\cos 2x$

77. $v(t)=\frac{5}{2}\pi\cos(10\pi t)$ cm/s

79. (a) $\dfrac{dB}{dt}=\dfrac{7\pi}{54}\cos\dfrac{2\pi t}{5.4}$ (b) 0.16

81. $v(t)=2e^{-1.5t}(2\pi\cos 2\pi t-1.5\sin 2\pi t)$



83. dv/dt is the rate of change of velocity with respect to time; dv/ds is the rate of change of velocity with respect to displacement
85. (a) $y = ab^t$ where $a \approx 100.01244$ and $b \approx 0.000045146$
(b) $-670.63\ \mu A$
87. (b) The factored form
91. (b) $-n\cos^{n-1}x\sin[(n+1)x]$

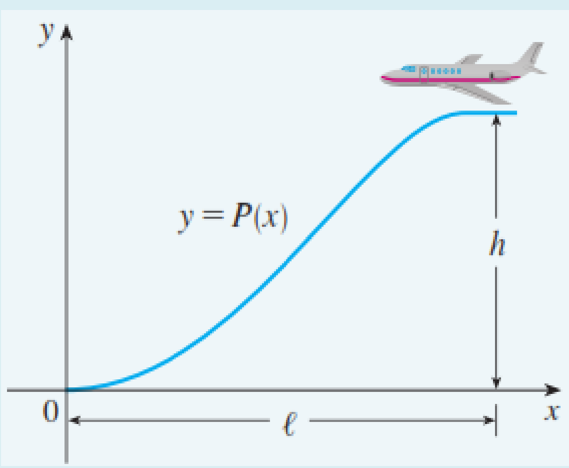
DỰ ÁN THỰC TẾ : Phi công nên bắt đầu đáp xuống khi nào?

Đường bay của một phi cơ khi đáp xuống được minh họa trong hình dưới và thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Độ cao là h khi phi cơ bắt đầu hạ cánh tại khoảng cách ngang là l đến điểm gốc là điểm chạm mặt đất.

(ii) Phi công phải duy trì tốc độ ngang không đổi v trong suốt quá trình đáp xuống.

(iii) Giá trị tuyệt đối của gia tốc thẳng đứng không được vượt quá một hằng số k (nhỏ hơn gia tốc trọng trường nhiều).



1. *Tìm đa thức bậc ba $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn điều kiện (i) bằng cách đặt ra những điều kiện thích hợp cho P(x) và P'(x) lúc bắt đầu hạ cánh và khi chạm mặt đất.*
2. *Dùng điều kiện (ii) và (iii) để chứng tỏ rằng*

$$\frac{6hv^2}{l^2} \le k$$

3. *Giả sử một công ty hàng không quyết định không cho phép gia tốc thẳng đứng khi đáp xuống vượt quá $k = 860$ mi/h^2. Nếu độ cao phi hành của một phi cơ là 35,000 ft và tốc độ là 300 mi/h, hỏi cách phi trường bao nhiêu thì phi công nên bắt đầu cho phi cơ đáp xuống?*
4. *Vẽ đồ thị đường bay khi hạ cánh nếu điều kiện trong Bài toán 3 được thỏa mãn.*
5.

BÀI 3. 5. VI PHÂN ẨN TÀNG

Các hàm số mà ta gặp từ trước đến giờ đều có thể được biểu diễn một cách tường minh bằng một công thức theo một biến số - chẳng hạn,

y = $\sqrt{x^3+1}$ hay y = x sin x

hay, nói một cách tổng quát y = f(x). Nhưng có một số hàm số lại được xác định một cách ẩn tàng bằng một hệ thức giữa x và y như là

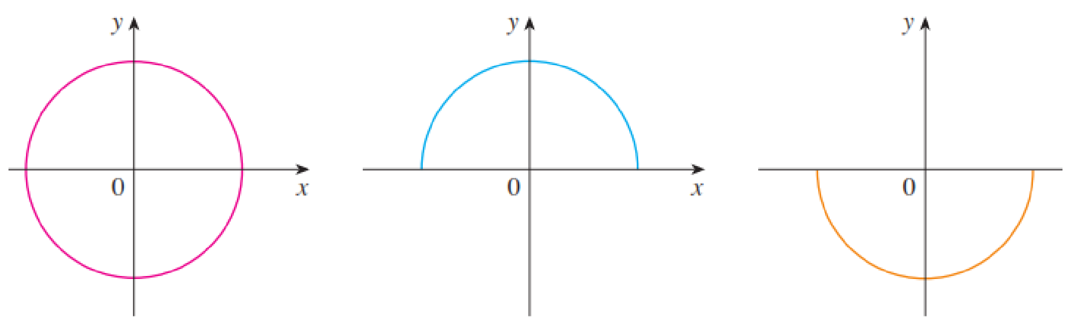
1 $x^2 + y^2 = 25$

hoặc

2 $x^3 + y^3 = 6xy$

Trong một vài trường hợp, ta có thể giải phương trình như thế để tính y thành một hàm số (hay vài hàm số) theo x. Chẳng hạn, nếu ta giải Phương trình 1 để tính y, ta được y = ± $\sqrt{25-x^2}$, do đó hai phương trình xác định bởi Phương trình ẩn tàng 1 là f(x) = $\sqrt{25-x^2}$ và g(x) = - $\sqrt{25-x^2}$. Đồ thị của f và g là nửa đường tròn ở phía trên và dưới trục hoành của đường tròn $x^2 + y^2 = 25$. (Xem Hình 1)

HÌNH 1



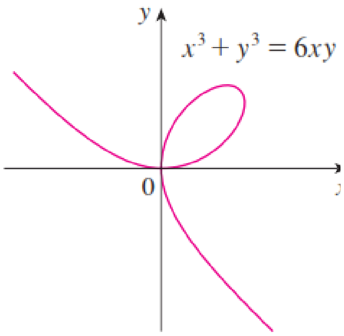
(a) $x^2+y^2=25$ (b) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ (c) $g(x)=-\sqrt{25-x^2}$

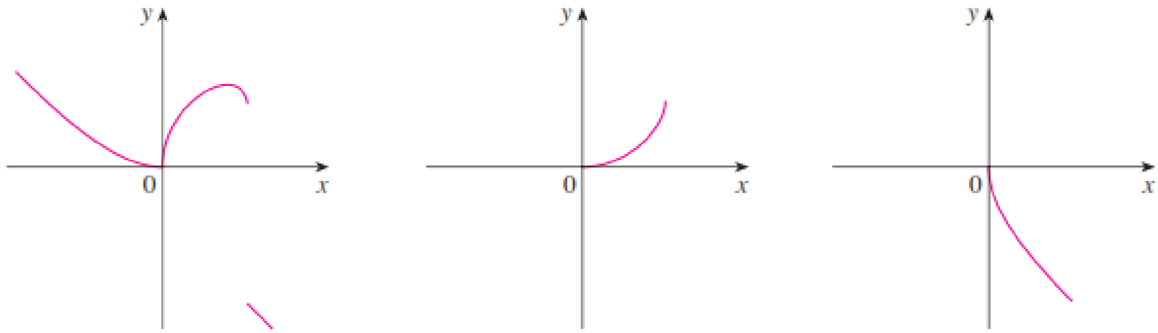
Nhưng giải Phương trình 2 để tìm y theo x thì không dễ. (Mặc dù có thể giải được bằng máy tính, nhưng kết quả sẽ là biểu thức rất phức tạp.) Tuy thế, ta biết (2) là phương trình một đường cong có tên **folium of Descartes** được vẽ trong Hình 2 bên dưới, và như vậy rõ ràng là Phương trình 2 xác định y là một số hàm số theo x. Đồ thị của các hàm số này được chỉ ra trong Hình 3. Khi ta nói f là hàm số được xác định một cách ẩn tàng bằng Phương trình 2, ý ta là phương trình

$$x^3 + [\,f(x)\,]^3 = 6xf(x)$$

là đúng với mọi giá trị của x trong tập xác định của f.

May thay, ta không cần giải phương trình để tìm y theo x mới có thể tính được đạo hàm của y. Thay vào đó, ta có thể dùng **phương pháp vi phân hàm số ẩn tàng**. Theo phương pháp này, ta chỉ cần lấy đạo hàm hai vế của phương trình đối với x rồi giải phương trình hệ quả để tính y '. Trong các ví dụ và bài tập của bài này ta luôn giả định là phương trình cho xác định y theo x một cách ẩn tàng như là một hàm số khả vi đối với x, như thế phương pháp fdham hàm số ẩn tàng mới có thể áp dụng được.





HÌNH 2
(Đường folium của Descartes)

HÌNH 3
(Đồ thị **của** 3 hàm số này được xác định bởi đường folium của Descartes)

VÍ DỤ 1

(a) Biết $x^2 + y^2 = 25$, tìm $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Tìm phương trình tiếp tuyến với đường tròn $x^2 + y^2 = 25$ tại điểm (3, 5).

GIẢI 1

(a) Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $x^2 + y^2 = 25$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Nhớ y là hàm số theo x, dùng Quy Tắc Dây Xích, ta có

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Do đó
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Giải phương trình này để tìm dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) Tại điểm (3, 4), ta có x = 3 và y = 4, do đó

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại (3, 4) là

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \quad \text{hay} \quad 3x + 4y = 25$$

GIẢI 2

(b) Giải phương trình $x^2 + y^2 = 25$, ta được $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Điểm (3, 4) nằm trên nửa đường tròn ở phía trên trục hoành, có phương trình $y = \sqrt{25 - x^2}$, do đó ta xét hàm số $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Lấy đạo hàm f, dùng Quy Tắc Dây Xích, ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2)$$
$$= \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Vậy
$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

Và như trong GIẢI 1, phương trình của tiếp tuyến cần tìm là 3c + 4y = 25.

CHÚ Ý1 Biểu thức dy/dx = - x/y trong GIẢI 1 cho ta đạo hàm tính theo cả x và y. Kết quả này đúng với cả 2 hàm số y được xác định bởi phương trình đã cho. Chẳng hạn, với y = f(x) = $\sqrt{25 - x^2}$, ta có

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Trong khi với y = g(x) = - $\sqrt{25 - x^2}$ ta có

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

VÍ DỤ 2

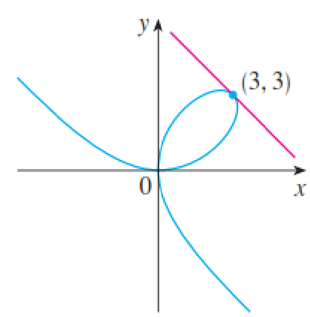
(a) Tìm y' biết $x^3 + y^3 = 6xy$.
(b) Tìm tiếp tuyến với đường folium Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ tại điểm (3, 3).
(c) Tại điểm nào thuộc phần tư thứ nhất thì tiếp tuyến nằm ngang?

GIẢI

(a) Vi phân hai vế của phương trình $x^3 + y^3 = 6xy$ đối với x, xem y như hàm số theo x, và dùng Quy Tắc Dây Xích cho số hạng y^3 và Quy Tắc Nhân cho số hạng 6xy, ta được

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$
$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ta giải để tính y':
$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$
$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$



HÌNH 4

(b) Khi x = y = 3,

$$y' = \frac{2.3 - 3^2}{3^2 - 2.3} = -1$$

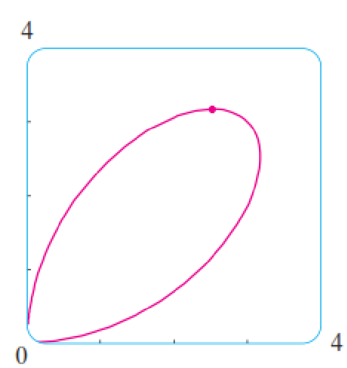
và nhìn qua Hình 4 giúp ta khẳng định giá trị này có lý đối với độ dốc của tiếp tuyến với folium tại điểm (3, 3). Vì thế
phương trình tiếp tuyến với folium tại điểm (3, 3) là

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{hay} \qquad x + y = 6$$

(c) Tiếp tuyến nằm ngang khi y' = 0. Dùng biểu thức của y ' trong phần (a), ta thấy rằng y ' = 0 khi $2y - x^2 = 0$
(với điều kiện $y^2 - 2x \neq 0$). Thế $y = ½\, x^2$ vào phương trình đường cong, ta được

$$x^3 + (½\, x^2)^3 = 6x(½\, x^2)$$

hay
$$x^6 = 16x^3$$



HÌNH 5

Vì trong phần tư thứ nhất thì $x \neq 0$, ta suy ra $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, và $y = ½\,(2^{8/3}) = 2^{5/3}$.

Do đó tiếp tuyến nằm ngang tại (0,0) và $(2^{4/3}, 2^{5/3})$, xấp xỉ bằng (2.5198, 3.1748). Nhìn vào Hình 5, ta thấy kết quả này phù hợp.

CHÚ Ý 2 Có công thức tính ra ba nghiệm của một phương trình bậc ba, giống như ở phương trình bậc hai, nhưng vô cùng phức tạp. Nếu ta dùng công thức này (có thể giải bằng máy tính) để giải phương trình bậc ba $x^3 + y^3 = 6xy$ với y là ẩn, ta được ba hàm số sau

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 + \sqrt{\frac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 - \sqrt{\frac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

và $$y = \frac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 + \sqrt{\frac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 - \sqrt{\frac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Đây là ba hàm số mà đồ thị của chúng cho bởi Hình 3.) Bạn có thể thấy là phương pháp vi phân ẩn tàng giúp ta tránh được vất vả vì không cần phải giải phương trình này, ta cũng có thể tính được đạo hàm của hàm số xác định bằng phương trình bậc ba. Hơn nữa, nếu gặp phải phương trình mà ta không thể tính được y theo x, ta vẫn có thể tính được đạo hàm nhờ phương pháp vi phân hàm số ẩn tàng, chẳng hạn như phương trình dưới đây:

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

VÍ DỤ 3 Tìm y ’ biết $\sin(x + y) = y^2\cos x$.

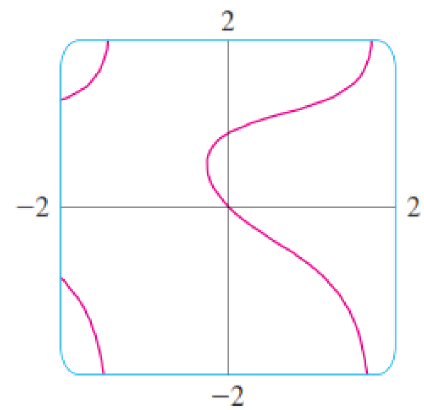
GIẢI Vi phân ẩn tàng đối với x và nhớ là y là hàm số theo x, ta được

$$\cos(x + y) .(1 + y') = y^2 (- \sin x) + (\cos x)(2yy')$$

(Chú ý là ta đã dùng Quy Tắc Dây Xích ở vế trái và Quy Tắc Nhân cùng Dây Xích ở vế phải.) Nếu ta gom những số hạng có chứa y’, ta được

$$\cos(x + y) + y^2\sin x = (2y\cos x) y' - \cos(x +y). y'$$

Suy ra $$y' = \frac{y^2 \sin x + \cos(x+y)}{2y\cos x - \cos(x+y)}$$



HÌNH 6

Hình 6 cho thấy một phần đồ thị của phương trình $\sin(x + y) = y^2\cos x$ vẽ bằng máy tính. Để kiểm tra kết quả của phép tính, nhận xét là y’ = - 1 khi x = y = 0 và dựa vào đồ thị ta thấy độ dốc xấp xỉ bằng – 1 tại điểm gốc.

Ví dụ sau chỉ ra cách thức lấy đạo hàm bậc hai của một hàm số xác định một cách ẩn tàng.

VÍ DỤ 4 Tìm y” biết $x^4 + y^4 = 16$

GIẢI Vi phân phương trình một cách ẩn tàng đối với x, ta được

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Giải để tính y’, ta có: **3** $$y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

Để tìm y”, ta vi phân biểu thức y’ này, dùng Quy Tắc Dây Xích và nhớ rằng y là hàm số theo x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3(d/dx)(x^3) - x^3(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 .3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

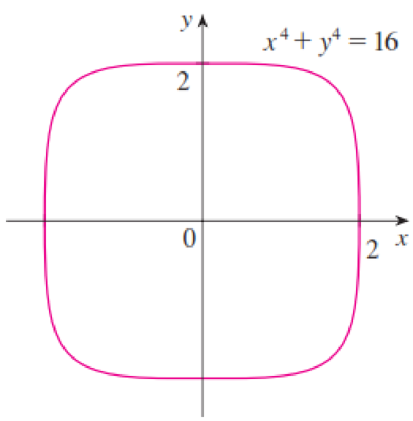
Nếu ta thế Phương trình 3 vào biểu thức này, ta được

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Nhưng giá trị của x và y phải thỏa phương trình gốc $x^4 + y^4 = 16$. Do đó ta được kết quả

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\frac{x^2}{y^7}$$



HÌNH 7 *cho thấy đồ thị của phương trình $x^4 + y^4 = 16$. Chú ý là đồ thị là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ dẹt ra ở bốn góc. Vì lý do này nó được gọi là đường tròn béo. Nó bắt đầu rất dốc ở bên trái rồi nhanh chóng trở nên bằng phẳng. Điều này có thể thấy được từ biểu thức*

$$y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

Hàm số lượng giác ngược đã được giới thiệu trong Bài 1.6. Ta đã xét tính liên tục của nó trong Bài 2.5, và tiệm cận trong Bài 2.6. Ở đây ta sử dụng phép vi phân ẩn tàng để tìm đạo hàm của các hàm số lượng giác ngược, giả sử là chúng khả vi. [Thật ra, nếu f là hàm số khả vi một-một, ta có thể chứng tỏ là hàm số ngược f^{-1} cũng khả vi, trừ khi tại những điểm có tiếp tuyến thẳng đứng. Điều này có vẻ hợp lý vì đồ thị của một hàm số khả vi không có điểm điểm gốc hoặc điểm thắt nút và do đó nếu ta lấy đối xứng của nó qua đường thẳng y = x, đồ thị của hàm số ngược của no1cu4ng không có điểm gốc và điểm thắt nút.]

Nhớ lại định nghĩa của hàm số arcsin:

$y = \sin^{-1}x$ nghĩa là $\sin y = x$ và $-\pi/2 \le y \le \pi/2$

Vi phân hai vế của sin y = x đối với x, ta được

$$\cos y\frac{dy}{dx} = 1 \qquad hay \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Vì cos y ≥ 0 do $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, suy ra

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

Do đó
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Công thức đạo hàm của arctan cũng được thiết lập tương tự .

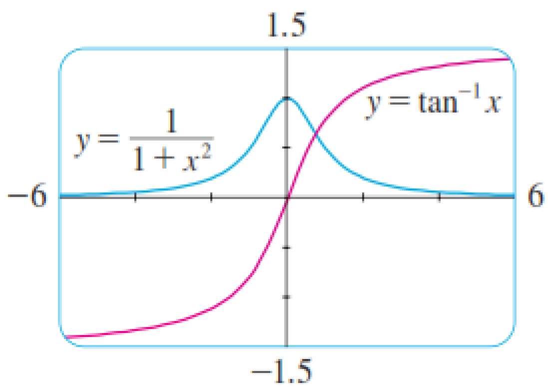
$y = \tan^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x$ và $-\pi/2 < y < \pi/2$

Vi phân hai vế đối với x, ta có

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}}$$



HÌNH 8 *cho thấy đồ thị của f(x) = tan⁻¹x và đạo hàm f '(x) = 1/(1+ x²). Nhận xét rằng f đồng biến và f '(x) luôn dương. Sự kiện tan⁻¹x → ± π/2 khi x → ± ∞ được phản ánh bởi sự kiện f '(x) → 0 khi x → ± ∞.*

Chú thích: Ta có thể dùng phương pháp này để tìm đạo hàm của bất kỳ hàm số ngược nào. Xem Bài tập 67.

VÍ DỤ 5 Vi phân (a) $y = \dfrac{1}{\sin^{-1} x}$ (b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$

GIẢI

(a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)^{-1} = -(\sin^{-1} x)^{-2}\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$$

$$= -\frac{1}{(\sin^{-1} x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

(b) $$f'(x) = x\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} + \arctan\sqrt{x}$$

Các hàm số lượng giác ngược thông dụng nhất là các hàm số ta vừa đề cập. Đạo hàm bốn hàm số còn lại được cho trong bảng dưới. Phần chứng minh các công thức này được xem như bài tập.

ĐẠO HÀM HÀM SỐ NGƯỢC

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

BÀI TẬP

1-4

(a) Tìm y' bằng vi phân ẩn tàng

(b) Giải phương trình để tính y theo dưới dạng tường minh rồi tìm y'.

(c) Kiểm tra là kết quả phần (a) và (b) là phù hợp nhau bằng cách thế biểu thức của y vào lời giải ở phần (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ **4.** $\text{Cos } x + \sqrt{y} = 5$

5-20. Tìm dy/dx bằng phương pháp vi phân ẩn tàng.

5. $x^3 + y^3 = 1$ **6.** $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$ **8.** $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ **10.** $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $x^2y^2 + x \sin y = 4$ **12.** $1 + x = \sin(xy^2)$

13. $4 \cos x \sin y = 1$ **14.** $y \sin(x^2) = x \sin(y^2)$

15. $e^{x/y} = x - y$ **16.** $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$ **18.** $\tan(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

19. $e^y \cos x = 1 + \sin(xy)$ **20.** $\sin x + \cos y = \sin x \cos y$

21. Nếu $f(x) = x^2[f(x)]^3 = 10$ và $f(1) = 2$, tìm $f'(1)$.

22. Nếu $g(x) + x\sin g(x) = x^2$, tìm $g'(0)$.

23-24. Xem y như biến số độc lập và x là biến số phụ thuộc và dùng phương pháp vi phân ẩn tàng để tìm dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **24.** $y\sec x = x\tan y$

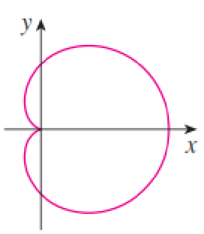
25-30. Dùng phương pháp vi phân ẩn tàng để tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm cho trước.

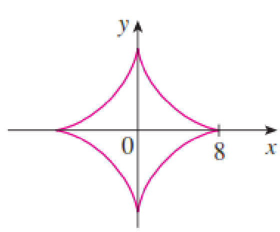
25. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (êlip)

26. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hypebol)

27. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$, $(0, ½)$ (cardioid)

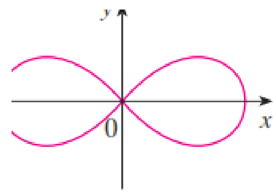
28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $(-3\sqrt{3}, 1)$ (astroid)

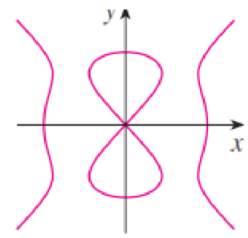




29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, $(3, 1)$ (lemniscate)

30. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$, $(0, -2)$ (đường của quỷ)





31. (a) Đường cong có phương trình $y^2 = 5x^4 - x^2$ gọi là **kampyle Eudoxus**. Tìm phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại điểm (1, 2).

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đường cong và tiếp tuyến bằng máy tính trên cùng một khung hình. (Nếu máy tính bạn không có cơ chế vẽ đường cong xác định một cách ẩn tàng, thì bạn vẽ phần bên trên và bên dưới trục hoành riêng ra.)

32. (a) Đường cong có phương trình $y^2 = x^3 + 3x^2$ gọi là **Tschirnhausen cubic**. Tìm phương trình của tiếp tuyến với đường cong tại điểm (1, - 2).

(b) Tại điểm nào đường cong có tiếp tuyến nằm ngang?

(c) Minh họa phần (a) và (b) bằng cách vẽ đường cong và tiếp tuyến trên cùng một khung hình.

33-36. Tìm y" bằng phương pháp vi phân ẩn tàng.

37. Những đường cong kỳ lạ có thể được tạo ra bằng các máy tính có trang bị phần mềm vẽ các đường ẩn tàng.

(a) Vẽ đường có phương trình

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

Có bao nhiêu điểm trên đường cong mà tiếp tuyến tại đó nằm ngang? Ước tính hoành độ các tiếp điểm này.

(b) Tìm phương trình tiếp tuyến tại điểm (0, 1) và (0, 2).

(c) Tìm chính xác hoành độ những tiếp điểm nệu ở phần (a).

(d) Hãy tạo ra nhiều đường kỳ lạ hơn bằng cách thay đổi phương trình ở phần (a).

38. (a) Đường cong có phương trình

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

có hình dạng như một toa xe lắc lư. Dùng máy tính để vẽ đường cong này và khám phaq tại sao.

(b) Có bao nhiêu điểm trên đường cong mà tiếp tuyến tại đó nằm ngang? Tìm hoành độ các tiếp điểm này.

39. Tìm những điểm trên đường lemniscate trong Bài tập 29 tại đó tiếp tuyến nằm ngang.

40. Chứng tỏ bằng phương pháp vi phân ẩn tàng rằng phương trình tiếp tuyến với elip

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Tại điểm (x_o , y_o) là

$$\frac{x_o x}{a^2}+\frac{y_o y}{b^2}=1$$

41. Tìm phương trình tiếp tuyến với hypebol

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

tại điểm (x_o , y_o).

42. Cho đường cong $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$, một tiếp tuyến bất kỳ của đường cong cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B. Chứng tỏ $x_A + y_B = c$.

43. Bằng phương pháp vi phân ẩn tàng, chứng tỏ rằng một tiếp tuyến bất kỳ tại P của đường tròn tâm O thì vuông góc với bán kính OP.

44. Quy Tắc Lũy Thừa có thể được chứng minh bằng phương pháp vi phân ẩn tàng đối với trường hợp n là số hữu tỷ, n = p/q, và $f(x) = x^n$ được cho là hàm số khả vi. Nếu $y = x^{p/q}$, thì $y^q = x^p$. Dùng phương pháp vi phân ẩn tàng để chứng tỏ rằng

$$y' = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

45-54. Tìm đạo hàm các hàm số sau. Đơn giản khi nào có thể.

45. $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$

46. $y = \sqrt{\tan^{-1}x}$

47. $y = \sin^{-1}(2x + 1)$

48. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sec^{-1}x$

49. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arccos x$

50. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

51. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$

52. $F(\theta) = \arcsin\sqrt{\sin\theta}$

53. $y = \cos^{-1}(e^{2x})$

54. $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

55-56. Tìm f '(x). Kiểm tra đáp số của bạn là hợp lý bằng cách so sánh đồ thị f và f '.

55. $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$

56. $f(x) = \arctan(x^2 - x)$

57. Tìm công thức đạo hàm của $\cos^{-1} x$ bằng phương pháp đã tiến hành với $\sin^{-1}x$.

58. (a) Một cách để định nghĩa $\sec^{-1} x$ là nói rằng

$$y = \sec^{-1} x \iff \sec y = x \text{ và } 0 \le y < \pi/2 \text{ hay } \pi \le y < 3\pi/2$$

Chứng tỏ rằng, với định nghĩa này,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(b) Một cách khác đôi khi được dùng để định nghĩa $\sec^{-1} x$ là nói rằng

$$y = \sec^{-1} x \iff \sec y = x \text{ và } 0 < y \le \pi$$

Chứng tỏ rằng, với định nghĩa này,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

59-62. Hai đường cong được gọi **trực giao** nếu tiếp tuyến của chúng tại giao điểm thì vuông góc nhau. Chứng tỏ rằng các họ đường cong cho trước dưới đây là các quỹ đạo trực giao với nhau, nghĩa là mỗi đường cong của họ này trực giao với mỗi đường cong của họ kia. Vẽ các đường cong của hai họ trên cùng một hệ trục.

59. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

60. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

61. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

62. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

63. Phương trình $x^2 - xy + y^2 = 3$ là biểu thị một elip nghiêng, nghĩa là một elip mà các trục của nó không song song với các trục toạ độ. Tìm giao điểm của elip với trục hoành và chứng tỏ các tiếp tuyến tại những điểm này thì song song.

64. (a) Pháp tuyến với elip x^2 xy + y^2 = 3 tại điểm (- 1, 1) lại cắt elip tại một điểm thứ hai. Tìm điểm đó.

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ elip và pháp tuyến.

65. Tìm tất cả những điểm trên đường cong $x^2y^2 + xy = 2$ mà tiếp tuyến tại đó có độ dốc là – 1.

66. Tìm phương trình hai tiếp tuyến với elip cùng đi qua điểm (12, 3).

67. (a) Giả sử f là một hàm số khả vi một-một và hàm số ngược của nó f^{-1} cũng khả vi. Dùng phương pháp vi phân ẩn tàng để chứng tỏ rằng

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

với điều kiện mẫu số khác 0.

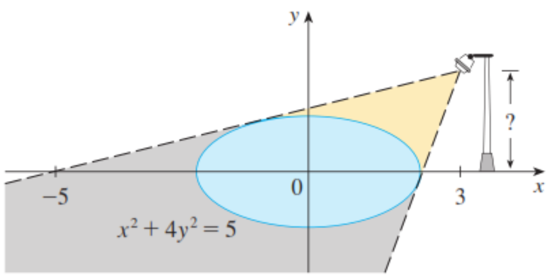
(b) Nếu f(4) = 5 và f '(4) = 2/3, tìm $(f^{-1})'(5)$.

68. (a) Chứng tỏ rằng f(x) = 2x + cos x là hàm số một-một.

(b) Tìm giá trị của $f^{-1}(1)$.

(c) Dùng công thức của Bài tập 67(a) để tìm $(f^{-1})'(1)$.

69. Hình bên cho thấy một bóng đèn mắc ở bên phải trục tung 3 đơn vị, và bóng tạo ra bởi hình elip $x^2 + 4y^2 \le 5$. Nếu điểm (-5, 0) nằm trên rìa của bóng, hãy tìm chiều cao của bóng đèn so với trục hoành.



ĐÁP SỐ

1. (a) $y' = -(y + 2 + 6x)/x$
(b) $y = (4/x) - 2 - 3x$, $y' = -(4/x^2) - 3$

3. (a) $y' = -y^2/x^2$ (b) $y = x/(x-1)$, $y' = -1/(x-1)^2$

5. $y' = -x^2/y^2$

7. $y' = \dfrac{2x + y}{2y - x}$ **9.** $y' = \dfrac{3y^2 - 5x^4 - 4x^3y}{x^4 + 3y^2 - 6xy}$

11. $y' = \dfrac{-2xy^2 - \sin y}{2x^2y + x\cos y}$ **13.** $y' = \tan x \tan y$

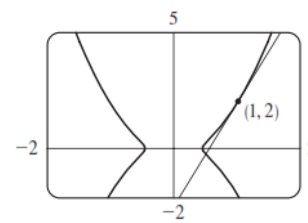
15. $y' = \dfrac{y(y - e^{x/y})}{y^2 - xe^{x/y}}$ **17.** $y' = \dfrac{4xy\sqrt{xy} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$

19. $y' = \dfrac{e^y \sin x + y\cos(xy)}{e^y \cos x - x\cos(xy)}$ **21.** $-\frac{16}{13}$

23. $x' = \dfrac{-2x^4y + x^3 - 6xy^2}{4x^3y^2 - 3x^2y + 2y^3}$ **25.** $y = -x + 2$

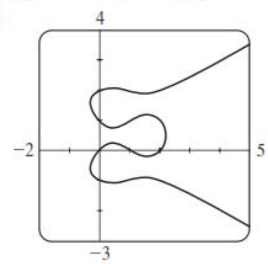
27. $y = x + \frac{1}{2}$ **29.** $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$

31. (a) $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$ (b)



33. $-81/y^3$ **35.** $-2x/y^5$

37. (a)



Eight; $x \approx 0.42, 1.58$

(b) $y = -x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 2$ (c) $1 \mp \frac{1}{3}\sqrt{3}$

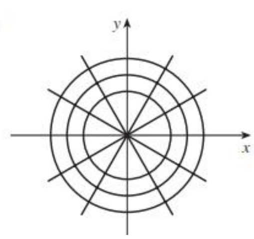
39. $\left(\pm\frac{5}{4}\sqrt{3}, \pm\frac{5}{4}\right)$ **41.** $(x_0x/a^2) - (y_0y/b^2) = 1$

45. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$ **47.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}$

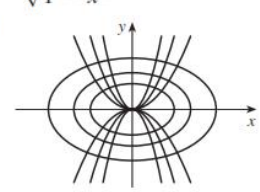
49. $G'(x) = -1 - \dfrac{x \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$ **51.** $h'(t) = 0$

53. $y' = -2e^{2x}/\sqrt{1 - e^{4x}}$ **55.** $1 - \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

59.



61.



63. $(\pm\sqrt{3}, 0)$ **65.** $(-1, -1), (1, 1)$ **67.** (b) $\frac{3}{2}$ **69.** 2

BÀI 3. 6. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LÔGARIT

Trong bài này ta sử dụng quy tắc tính đạo hàm ẩn tàng để tìm đạo hàm của hàm số y = logax và, đặc biệt, hàm số lôgarit tự nhiên y = ln x. [Có thể chứng minh hàm số logarit khả vi, điều này là chắc chắn nếu dựa vào đồ thị của chúng (xem Hình 12 trong Bài 1.6).]

1 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}}$$

CM Đặt y = $\log_a x$. Thế thì

$$a^y = x$$

Lấy đạo hàm phương trình này một cách ẩn tàng đối với x, sử dụng Công thức 3.4.5 (tức công thức $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$), ta được

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

suy ra $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x\ln a}$$

Nếu ta cho a = e trong Công thức 1, như thế ln a = ln e = 1 và ta suy ra được công thức đạo hàm của hàm số logarit tự nhiên $\log_e x$ = lnx

2 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Bằng cách so sánh Công thức 1 và 2, ta có thể thấy lý do vì sao logarit tự nhiên thường được dùng trong giải tích. Công thức đạo hàm đơn giản nhất khi lấy a = e vì ln e = 1.

VÍ DỤ 1 Vi phân hàm số y = $\ln(x^3 + 1)$

GIẢI Dùng Quy Tắc Dây Xích, và đặt u = $x^3 + 1$. Thế thì y = ln u, và

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3+1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3+1}$$

Tổng quát, nếu ta kết hợp Công thức 2 và Quy Tắc Dây Xích như trong Ví dụ 1, ta được

3 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad hay \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

VÍ DỤ 2 Tìm $\dfrac{d}{dx}\ln(\sin x)$.

GIẢI Dùng (3), ta có

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\cos x = \cot x.$$

VÍ DỤ 3 Vi phân hàm số f(x)= $\sqrt{\ln x}$.

GIẢI Lần này logarit là hàm số bện trong, do đó Quy Tắc Dây Xích cho:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

VÍ DỤ 4 Vi phân hàm số f(x) = $\log_{10}$ (2 + sin x).

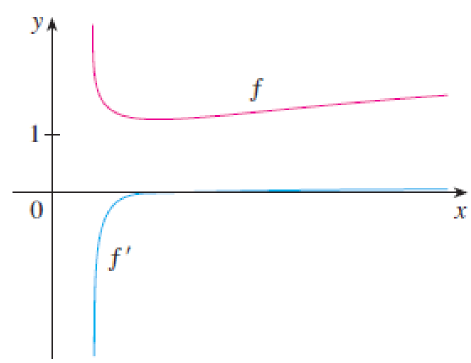
GIẢI Dùng Công thức 1 (1) với a = 10, ta có

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}(2+\sin x) = \frac{1}{(2+x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2+\sin x)$$
$$= \frac{\cos x}{(2+\sin x)\ln 10}$$

VÍ DỤ 5 Tìm $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

GIẢI 1

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$$
$$= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\,.1-(x+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2}$$
$$= \frac{x-2-\dfrac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$$



Hình 1 *cho thấy đồ thị của f và f ′ để như một cách để kiểm tra kết quả tính toán. Chú ý f ′ là số âm lớn khi f nghịch biến rất nhanh.*

GIẢI 2 Trước tiên ta đơn giản biểu thức logarit bằng quy tắc logarit, rồi mới lấy đạo hàm:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$
$$= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

(Kết quả này có thể giữ nguyên như trên, nhưng nếu ta quy đồng thì ta sẽ được kết quả như trong cách giải 1.)

VÍ DỤ 6 Tìm f ’(x) biết f(x) = ln | x |.

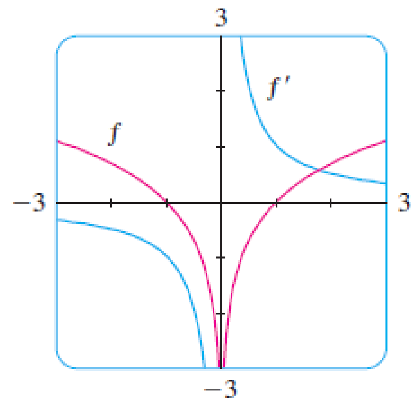
GIẢI Vì
$$f(x)=\begin{cases}\ln x & khi\quad x>0\\ \ln(-x) & khi\quad x<0\end{cases}$$

Suy ra

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & khi\quad x>0\\ -\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x} & khi\; x<0\end{cases}$$

Như vậy $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ với mọi x ≠ 0.

Kết quả này rất đáng nhớ.



Hình 2 *cho thấy đồ thị của f và f ’ . Nhận xét là khi x nhỏ, đồ thị f rất dốc, và vì thế f ’ rất lớn (âm hay dương).*

4
$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}}$$

LẤY ĐẠO HÀM THEO LÔGARIT

Việc tính đạo hàm của những hàm số phức tạp kết hợp bằng phép nhân, phép chia, hoặc phép lũy thừa đôi khi có thể đơn giản hơn khi ta lấy logarit. Phương pháp được sử dụng trong ví dụ sau được gọi là lấy đạo hàm theo logarit.

VÍ DỤ 7 Vi phân hàm số y = $\dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$|.

GIẢI Lấy logarit hai vế và dùng quy tắc tính toán logarit để đơn giản, ta được

$$\ln y=\frac{3}{4}\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-5\ln(3x+2)$$

Lấy đạo hàm ẩn tàng theo x cho ta

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}.\frac{1}{x}+\frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+1}-5.\frac{3}{3x+2}$$

Giải để tìm dy/dx:
$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15}{3x+2}\right)$$

Cuối cùng thế biểu thức của y theo x, ta được

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Nếu bạn lấy đạo hàm theo cách bình thường, dùng Quy Tắc Thương và Nhân, phép tính sẽ rất kinh khủng.

CÁC BƯỚC TÍNH ĐẠO HÀM THEO LOGARIT

1. Lấy logarit tự nhiên hai vế của phương trình y = f(x) và sử dụng các quy tắc tính toán lôgarit để đơn giản.
2. Lấy đạo hàm ẩn tàng theo x.
3. Giải phương trình có được để tìm y'.

Nếu f(x) < 0 với vài giá trị của x, thì ln f(x) không xác định, nhưng ta có thể viết | y | = | f(x) | và sử dụng phương trình 4. Ta minh họa phương pháp này bằng cách chứng minh công thức tổng quát của Quy Tắc Lũy Thừa, như đã hứa trong Bài 3.1.

QUY TẮC LŨY THỪA Nếu n là một số thực bất kỳ và f(x) = x^n, thế thì

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

CM Đặt y = x^n và dùng phép lấy đạo hàm theo logarit:

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Do đó
$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

Suy ra
$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

CHÚ Ý Bạn phân biệt cẩn thận giữa Quy Tắc Lũy Thừa [$(x^n)' = nx^{n-1}$], trong đó cơ số là biến số và số mũ là hằng số, với quy tắc đạo hàm của hàm số mũ [$(a^x)' = a^x \ln a$], trong đó cơ số là hằng số còn số mũ là biến số.

Tổng quát có 4 trường hợp đối với số mũ và cơ số.

1. $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$ (a và b là hằng số)

2. $\frac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1} f'(x)$

3. $\frac{d}{dx}\left[a^{g(x)}\right] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

4. Để tìm (d/dx)[f(x) $]^{g(x)}$, bạn có thể dùng phép lấy đạo hàm theo logarit, như trong ví dụ tiếp sau.

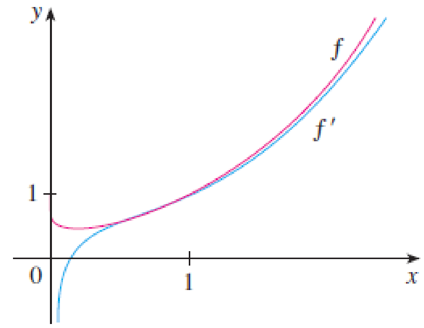
VÍ DỤ 8 Vi phân hàm số y = $x^{\sqrt{x}}$.

GIẢI 1 Dùng cách tính đạo hàm theo logarit, ta có

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}.\frac{1}{x} + (\ln x).\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$



***Hình 3** minh họa Ví dụ 8 bằng cách cho thấy đồ thị của f(x) =* $x^{\sqrt{x}}$.

GIẢI 2 Cách khác là ta viết $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(như trong Giải 1)}$$

SỐ e NHƯ MỘT GIỚI HẠN

Ta đã chứng tỏ rằng nếu f(x) = ln x, thì f '(x) = 1/x. Do đó f '(1) = 1. Ta sẽ sử dụng kết quả này để biểu diễn e như một giới hạn.

Từ định nghĩa của đạo hàm, ta có

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

Vì f '(1) = 1, ta được

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Và, theo Định lý 2.5.8 và tính liên tục của hàm số mũ, ta có

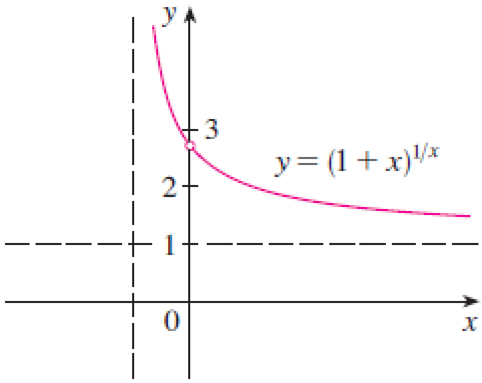
$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

5 $$\boxed{e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}}$$

x	$(1+x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

Công thức 5 được minh họa bằng đồ thị của hàm số y = $(1 + x)^{1/x}$ trong Hình 4 dưới và bảng giá trị ứng với những giá trị nhỏ của x. Bảng trên cho thấy giá trị của e đúng đến bảy chữ số thập phân

$e \approx 2.7182818$



B

HÌNH 4

Nếu ta cho n = 1/x trong Công thức 5, thì $n \to \infty$ khi $x \to 0^+$ và ta được một biểu thức khác của số e là

6 $$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

BÀI TẬP

1. Giải thích tại sao trong giải tích logarit tự nhiên y = ln x thông dụng hơn những logarit khác $y = \log_a x$.

2 - 22. Vi phân các hàm số sau.

2. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$

3. $f(x) = \sin(\ln x)$ **4.** $f(x) = \ln(\sin^2 x)$

5. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$ **6.** $f(x) = \log_5(xe^x)$

7. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$ **8.** $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

9. $f(x) = \sin x \ln(5x)$ **10.** $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

11. $F(t) = \ln \dfrac{(2t + 1)^3}{(3t - 1)^4}$ **12.** $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

13. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$ **14.** $F(y) = y \ln(1 + e^y)$

15. $f(u) = \dfrac{\ln u}{1 + \ln(2u)}$ **16.** $y = \dfrac{1}{\ln x}$

17. $y = \ln|2 - x - 5x^2|$ **18.** $H(z) = \ln\sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$ **20.** $y = [\ln(1 + e^x)]^2$

21. $y = 2x \log_{10}\sqrt{x}$ **22.** $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23 - 26. Tìm y ’ và y “.

23. $y = x^2 \ln(2x)$ **24.** $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

25. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ **26.** y = ln(sec x + tan x)

27 – 30. Vi phân f và tìm tập xác định của f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$ **28.** $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ **30.** f(x) = ln ln ln x

31. Biết $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, tìm f ‘(1).

32. Biết $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, tìm f ‘(0).

33 – 34. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm cho trước.

33. $y = \ln(xe^{x^2})$, (1, 1) **34.** $y = \ln(x^2 - 7)$, (2, 0)

35. Biết f(x) = sin x + ln x, tìm f ‘(x). Kiểm tra kết quả xem có hợp lý không bằng cách so sánh đồ thị của f và f ’.

36. Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong y = (ln x)/x tại điểm (1, 0) và (e, 1/e). Minh họa bằng cách vẽ đường cong và các tiếp tuyến của nó.

37 – 48 Dùng cách lấy đạo hàm theo loagarit để tìm đạo hàm các hàm số sau.

37. $y = (2x+1)^5(x^4-3)^6$

38. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2+1)^{10}$

39. $y = \dfrac{\sin^2 x \tan^4 x}{(x^2+1)^2}$

40. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

41. $y = x^x$

42. $y = x^{\cos x}$

43. $y = x^{\sin x}$

44. $y = \sqrt{x}^{\,x}$

45. $y = (\cos x)^x$

46. $y = (\sin x)^{\ln x}$

47. $y = (\tan x)^{1/x}$

48. $y = (\ln x)^{\cos x}$

49. Tìm y' biết y = $\ln(x^2 + y^2)$.

50. Tìm y' biết $x^y = y^x$.

51. Tìm công thức tính $f^{(n)}(x)$ biết f(x) = ln(x – 1).

52. Tìm $\dfrac{d^9}{dx^9}\left(x^8 \ln x\right)$.

53. Dùng định nghĩa đạo hàm để chứng tỏ rằng

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

54. Chứng tỏ rằng $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ với mọi x > 0.

ĐÁP SỐ

1. Công thức vi phân là đơn giản nhất.

3. $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ **5.** $f'(x) = \dfrac{3}{(3x-1)\ln 2}$

7. $f'(x) = \dfrac{1}{5x\sqrt[5]{(\ln x)^4}}$ **9.** $f'(x) = \dfrac{\sin x}{x} + \cos x \ln(5x)$

11. $F'(t) = \dfrac{6}{2t+1} - \dfrac{12}{3t-1}$ **13.** $g'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x(x^2-1)}$

15. $f'(u) = \dfrac{1+\ln 2}{u[1+\ln(2u)]^2}$ **17.** $y' = \dfrac{10x+1}{5x^2+x-2}$

19. $y' = \dfrac{-x}{1+x}$ **21.** $y' = \dfrac{1}{\ln 10} + \log_{10} x$

23. $y' = x + 2x\ln(2x);\ y'' = 3 + 2\ln(2x)$

25. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ y'' = \dfrac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$

27. $f'(x) = \dfrac{2x-1-(x-1)\ln(x-1)}{(x-1)[1-\ln(x-1)]^2}$; $(1, 1+e) \cup (1+e, \infty)$

29. $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x(x-2)}$; $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

31. 1 **33.** $y = 3x - 2$ **35.** $\cos x + 1/x$

37. $y' = (2x+1)^5(x^4-3)^6\left(\dfrac{10}{2x+1} + \dfrac{24x^3}{x^4-3}\right)$

39. $y' = \dfrac{\sin^2 x \tan^4 x}{(x^2+1)^2}\left(2\cot x + \dfrac{4\sec^2 x}{\tan x} - \dfrac{4x}{x^2+1}\right)$

41. $y' = x^x(1+\ln x)$

43. $y' = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)$

45. $y' = (\cos x)^x(-x\tan x + \ln\cos x)$

47. $y' = (\tan x)^{1/x}\left(\dfrac{\sec^2 x}{x\tan x} - \dfrac{\ln\tan x}{x^2}\right)$

49. $y' = \dfrac{2x}{x^2+y^2-2y}$ **51.** $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$

BÀI 3. 7. Tốc Độ Biến Thiên Trong Khoa Học Tự Nhiên và Xã Hội

Ta biết rằng nếu y = f(x), thì đạo hàm dy/dx có thể được coi là tốc độ biến thiên của y đối với x. Trong bài này ta xét vài ứng dụng của ý tưởng này vào vật lý, hóa học, sinh học, kinh tế học, và các ngành khoa học khác.

Hãy nhớ lại trong Bài 2.7 ta đã đề cập đến ý tưởng nền tảng của tốc đô biến thiên. Nếu x biến thiên từ x_1 đến x_2, thì gia số của x là

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

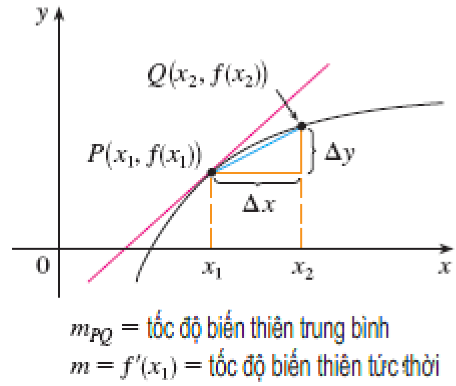
và gia số tương ứng của y là

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Và tỉ số của hai gia số

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

là **tốc độ biến thiên trung bình** của y đối với x trên đoạn $[x_1, x_2]$ và có ý nghĩa hình học như là độ dốc của cát tuyến PQ trong Hình 1. Giới hạn của nó khi $\Delta x \to 0$ là đạo hàm $f'(x_1)$, có thể coi là **tốc độ biến thiên tức thời** của y đối với x hay độ dốc của tiếp tuyến tại điểm $P(x_1, f(x_1))$. Sử dụng kí hiệu Leibniz, tiến trình có thể viết dưới dạng



HÌNH 1

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Bất cứ khi nào hàm số y = f(x) có một ý nghĩa cụ thể trong một ngành khoa học nào đó, đạo hàm của nó cũng sẽ có một ý nghĩa cụ thể tương ứng về tốc độ biến thiên. (Như chúng ta đã nói trong Bài 2.7, đơn vị của đại lượng dy/dx là đơn vị của y chia cho đơn vị của x). Bây giờ ta hãy xét một số các ý nghĩa này trong các ngành khoa học tự nhiên và xã hội.

VẬT LÝ

Nếu s = f(t) là hàm số vị trí của một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng , thì $\Delta s/\Delta t$ biểu thị vận tốc trung bình trên khoảng thời gian Δt, và v = ds/dt biểu thị **vận tốc** tức thời (tốc độ biến thiên của vị trí theo thời gian) . Tốc độ biến thiên tức thời của vận tốc đối với thời gian gọi là **gia tốc**: a(t) = v'(t) = s"(t). Điều này đã được giảng giải trong bài 2.7 và 2.8, nhưng giờ đây khi đã biết các công thức vi phân, ta có thể giải những bài toán liên quan đến chuyển động của vật thể dễ dàng hơn.

VÍ DỤ 1 Vị trí của một chất điểm được cho bởi phương trình

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

(a) Tìm vận tốc ở thời điểm t.
(b) Tìm vận tốc sau 2 giây, sau 4 giây.
(c) Khi nào chất điểm đứng yên?
(d) Khi nào chất điểm đi tới (nghĩa là theo hướng dương)?
(e) Vẽ giảm đồ biểu thị chuyển động của chất điểm.
(f) Tìm quảng đường mà động tử đi được trong năm giây đầu tiên.

(g) Tìm gia tốc tại thời điểm t và sau 4 giây.
(h) Vẽ đồ thị vị trí , vận tốc và gia tốc với $0 \le t \le 5$.
(i) Khi nào chất điểm nhanh lên? Khi nào nó chậm lại?

GIẢI

(a) Hàm số vận tốc là đạo hàm hàm số vị trí.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) Vận tốc sau 2 s nghĩa là vận tốc tức thời khi t = 2 , nghĩa là

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3\text{m/s}$$

Vận tốc sau 4 s là

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9\text{m/s}$$

(c) Chất điểm đứng yên khi v(t) = 0, nghĩa là

$$3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(t - 1)(t - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ hay } t = 3.$$

Vậy chất điểm đứng yên sau 1 s hay sau 3 s.

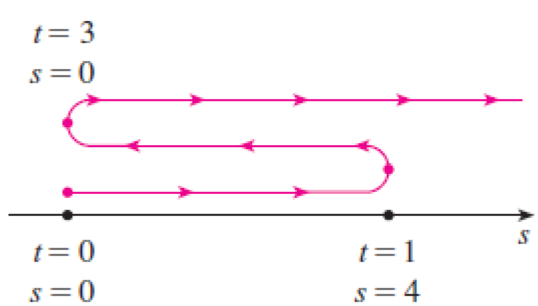
(d) Chất điểm chuyển động theo hướng dương khi v(t) > 0 , nghĩa là

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Bất đẳng thức thỏa khi cả hai nhân tử đều dương (t > 3) hay khi cả hai nhân tử đều âm (t < 1). Vậy chất điểm chuyển động theo chiều dương trong các khoảng thời gian t < 1 hay t > 3. Nó chuyển động theo chiều âm khi 1 < t < 3.

(e) Sử dụng kết quả của phần (d), ta vẽ được giản đồ của chuyển động tới lui của chất điểm trên trục s như trong Hình 2.

HÌNH 2



(f) Theo kết quả ta biết trong phần (d) và (e), ta cần phải tính những quảng đường đi được trong các khoảng thời gian [0, 1], [1, 3], và [3, 5] riêng biệt.

Quảng đường đi được trong giây đầu tiên là

$$| f(1) - f(0) | = | 4 - 0 | = 4 \text{ m}$$

Từ t = 1 đến t = 3 quảng đường đi được là

$$| f(3) - f(1) | = | 0 – 4 | = 4 \text{ m}$$

Từ t = 3 đến t = 5 quảng đường đi được là

$$| f(5) - f(3) | = | 20 – 0 | = 20 \text{ m}$$

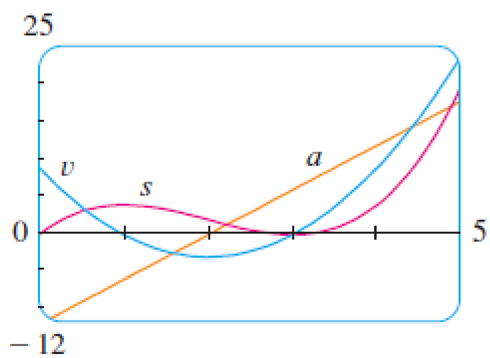
Tổng các quảng đường đi được là 4 + 4 + 20 = 28 m.

(g) Gia tốc là đạo hàm của hàm số vận tốc:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

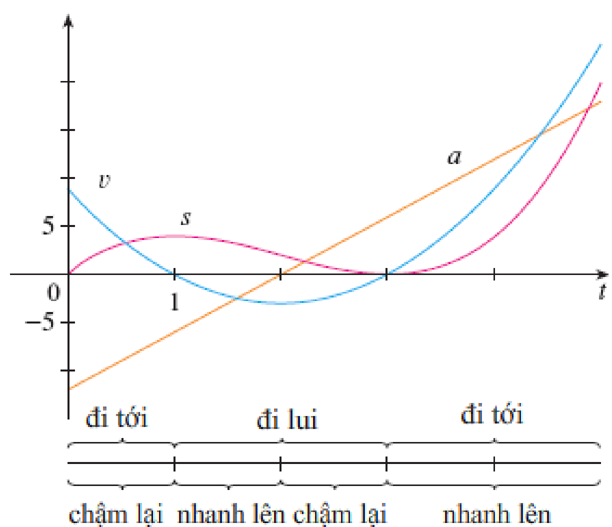
$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

(h) Hình 3 là đồ thị của s, v và a.



HÌNH 3

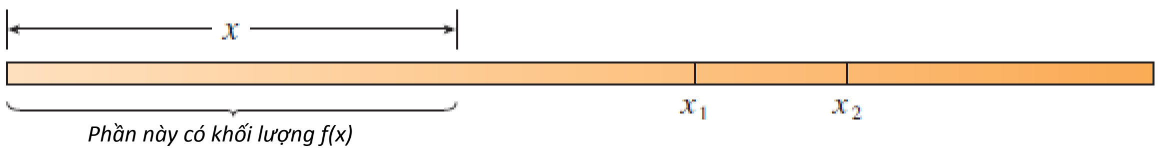
(i) Chất điểm đi nhanh lên khi vận tốc dương và đồng biến (v và a đều dương) hay khi vận tốc âm và nghịch biến (v và a đều âm). Nói cách khác, chất điểm nhanh lên khi vận tốc và gia tốc cùng dấu. Theo Hình 3, điều này xảy ra khi 1 < t < 2 và khi t > 3. Chất điểm chậm lại khi v và a trái dấu, đó là khi 0 ≤ t < 1 và khi 2 < t < 3. Hình 4 dưới tóm tắt chuyển động của chất điểm.



HÌNH 4

VÍ DỤ 2 Trong một thanh hay một dây đồng chất, tỷ trọng tuyến tính là như nhau và được định nghĩa là khối lượng trên một đơn vị độ dài ($\rho = m/l$) và tính bằng kilogram/mét. Tuy nhiên, nếu trong thanh không đồng chất và khối lượng của nó được tính từ mút trái đến một điểm x bằng m = f(x), như trong Hình 5.

HÌNH 5



Khối lượng của đoạn thanh nằm giữa $x = x_1$ và $x = x_2$ là $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, do đó tỷ trọng trung bình của đoạn thanh đó là

$$\text{Tỷ trọng trung bình} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Nếu bây giờ ta cho $\Delta x \to 0$ (nghĩa là $x_2 \to x_1$), ta tính được tỷ trọng trung bình của những đoạn thanh ngày càng nhỏ. **Tỷ trọng tuyến tính ρ** tại x_1 là giới hạn của các tỷ trọng trung bình khi $\Delta x \to 0$, nghĩa là tỷ trọng tuyến tính là tốc độ biến thiên của khối lượng đối với độ dài. Ký hiệu

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Như vậy tỷ trọng tuyến tính của thanh là đạo hàm của khối lượng đối với độ dài.

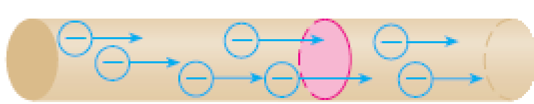
Chẳng hạn, nếu m = f(x) = $\sqrt{x}$, trong đó x tính bằng mét và m tính bằng kilogram, thế thì tỷ trọng trung bình của đoạn thanh ứng với $1 \le x \le 1.2$ là

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48 kg/m$$

trong khi tỷ trọng tại x = 1 là

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|_{x=1} = 0.50 kg/m$$

VÍ DỤ 3 Một dòng điện tồn tại khi nào có điện tích di chuyển. Hình 6 biểu thị một phần dây điện và electron di chuyển qua một tiết diện phẳng tô màu hồng . Nếu ΔQ là điện lượng đi qua tiết diện này trong khoảng thời gian Δt, thì cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian này được định nghĩa là



HÌNH 6

$$\text{cường độ trung bình} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Nếu ta lấy giới hạn của cường độ trung bình qua những khoảng thời gian càng lúc càng nhỏ, ta được khái niệm cường độ I của dòng điện ở thời điểm t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Do đó cường độ là tốc độ mà điện lượng chảy qua một tiết diện. Cường độ được đo bằng đơn vị điện lượng trên đơn vị thời gian là coulomb/giây, gọi là ampe.

Vận tốc, tỷ trọng, và cường độ dòng điện không phải là tốc độ biến thiên quan trọng duy nhất trong vật lý. Những khái niệm khác bao gồm công suất (tốc độ công thực hiện), tốc độ dòng nhiệt, gradien nhiệt độ (tốc độ biến thiên của nhiệt độ đối với vị trí), và tốc độ phân hủy của chất phóng xạ trong vật lý hạt nhân.

HÓA HỌC

VÍ DỤ 4 Một phản ứng hóa học kết cục sẽ tạo ta một hay nhiều chất (gọi là sản phẩm) từ một hay nhiều chất khởi đầu (gọi là chất phản ứng). Chẳng hạn, "phương trình"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

cho thấy hai phân tử hydrogen và một phân tử oxygen tạo ra hai phân tử nước. Hãy xét phản ứng

$$A + B \rightarrow C$$

trong đó A và B là chất phản ứng và C là sản phẩm. **Nồng độ** của chất phản ứng A là số mole (1 mole = 6.022 x 10^{23} phân tử) trong mỗi lít và ký hiệu là [A]. Nồng độ thay đổi trong quá trình phản ứng, do đó [A], [B], và [C] đều là những hàm số theo thời gian (t). Tốc độ phản ứng trung bình của sản phẩm C trong khoảng thời gian $t_1 \le t \le t_2$ là

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Nhưng các nhà hóa học tỏ ra quan tâm đến **tốc độ phản ứng tức thời,** có được bằng cách lấy giới hạn của tốc độ phản ứng trung bình khi khoảng thời gian Δt tiến đến 0:

$$\text{tốc độ phản ứng} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}$$

Vì nồng độ của sản phẩm tăng lên khi phản ứng tiếp diễn, nên đạo hàm d[C]/dt sẽ dương, và tốc độ phản ứng của C cũng dương. Tuy nhiên, nồng độ của chất phản ứng giảm trong quá trình phản ứng, vì thế, để làm tốc độ phản ứng của A và B là những số dương, ta cho thêm dấu trừ trước đạo hàm d[A]/dt và d[B]/dt. Vì [A] và [B] đều giảm theo cùng tốc độ với [C] tăng, nên ta có

$$\text{tốc độ phản ứng} = \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

Tổng quát hơn, đối với phản ứng thuộc dạng

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

ta có

$$-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[D]}{dt}$$

Tốc độ phản ứng có thể xác định từ các phương pháp dữ liệu và biểu đồ. Trong một số trường hợp, nồng độ là những hàm số tường minh theo thời gian, khi đó ta có thể tính được tốc độ phản ứng dễ dàng (xem Bài tập 22).

VÍ DỤ 5 Một trong những đại lượng thú vị trong nhiệt động học là độ nén. Nếu một chất được giữ ở nhiệt độ không đổi, thì thể tích V phụ thuộc vào áp suất P. Ta có thể xét tốc độ biến thiên của thể tích đối với áp suất - cụ thể dV/dP. Khi P tăng lên, V giảm xuống, thì dV/dP < 0. **Độ nén** được định nghĩa bằng cách thêm dấu trừ vào phép chia đạo hàm này cho thể tích V:

$$\text{độ nén đẳng nhiệt} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

Do đó β đo lường mức độ nhanh cỡ nào, trên mỗi đơn vị thể tích, thể tích của một chất giảm khi áp suất trên nó tăng lên ở nhiệt độ không đổi.

Chẳng hạn, người ta thấy rằng thể tích V (mét khối) của một mẩu không khí ở 25^oC liên hệ với áp suất P (kilopascal) theo phương trình

$$V = \frac{5.3}{P}$$

Tốc độ biến thiên của V đối với P khi P = 50 kPa là

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5.3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5.3}{2500} = -0.00212 m^3/kPa$$

Độ nén tại áp suất đó là

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0.00212}{\frac{5.3}{50}} = 0.02\ (m^3/kPa)$$

SINH HỌC

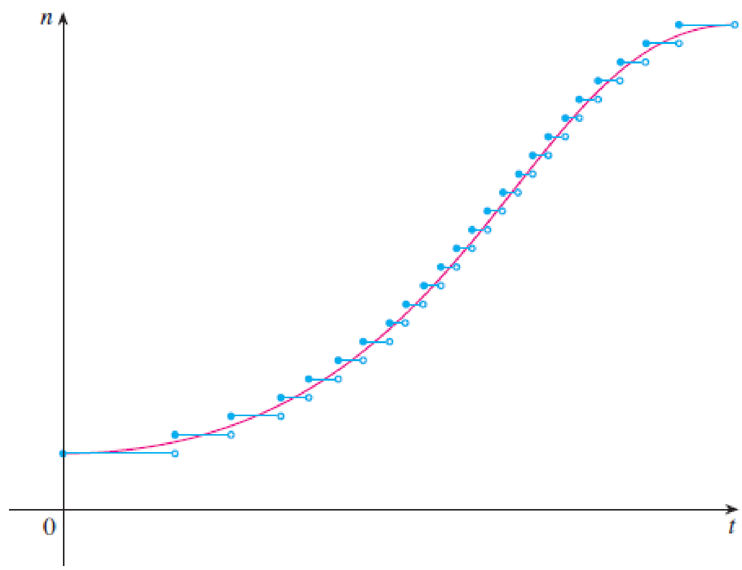
VÍ DỤ 6 Cho n = f(t) là số cá thể trong một dân số cây cỏ hoặc động vật tại thời điểm t. Thay đổi kích thước của dân số giữa thời điểm $t = t_1$ và $t = t_2$ là $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, và do đó tốc độ tăng trưởng trung bình trong khoảng thời gian $[t_1, t_2]$ là

$$\text{tốc độ tăng trưởng trung bình} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} =$$

Tốc độ tăng trưởng tức thời đạt được từ tốc độ tăng trưởng trung bình bằng cách cho Δt tiến đến 0:

$$\text{tốc độ tăng trưởng} = = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Chính xác thì nói như thế không hoàn toàn đúng vì đồ thị thực sự của hàm số dân số n = f(t) là hàm số bậc thang, gián đoạn tại bất cứ thời điểm nào có một cá thể sinh thêm hay chết đi và do đó không khả vi. Tuy nhiên, với một số lượng lớn cá thể, ta có thể thay đồ thị bằng một đường cong xấp xỉ mượt mà như Hình 7 dưới.



HÌNH 7

Cụ thể hơn, hãy xét một dân số vi khuẩn trong một môi trường dinh dưỡng đồng nhất. Giả sử bằng cách lấy mẫu dân số tại một thời điểm nào đó ta thấy rằng dân số gấp đôi qua mỗi giờ. Nếu dân số ban đầu là n_o và thời gian được tính bằng giờ, thế thì

$f(1) = 2f(0) = 2n_o$

$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_o$

$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_o$

và, tổng quát, $f(t) = 2^t n_o$.

Hàm số dân số là $n = n_o 2^t$.

Trong bài 3.4 ta biết rằng

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Do đó tốc độ tăng trưởng của dân số vi khuẩn tại thời điểm t là

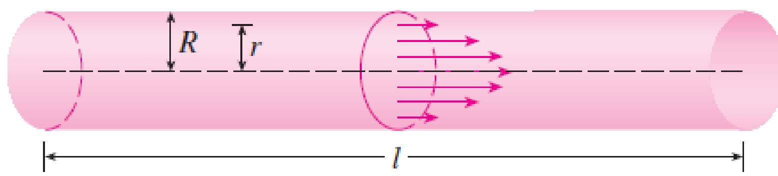
$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_o 2^t) = n_o 2^t \ln 2$$

Giả sử ta có dân số ban đầu là $n_o = 100$ vi khuẩn. Thế thì tốc độ tăng trưởng sau 4 giờ là

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100\,.\,2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$$

Điều này có nghĩa là, sau 4 giờ, dân số vi khuẩn tăng với tốc độ khoảng 1109 con mỗi giờ.

VÍ DỤ 7 Khi ta xét dòng máu tuần hoàn qua một mạch máu, như động mạch chẳng hạn, ta có thể xem mạch máu là một ống hình trụ có bán kính R và chiều dài l như Hình 8 dưới.



HÌNH 8

Vì ma sát với thành mạch máu, tốc độ v của dòng máu lớn nhất ở trục của mạch máu và giảm khi khoảng cách r đến trục tăng lên cho đến khi v = 0 tại vách động mạch. Liên hệ giữa v và r được cho bởi định luật do nhà vật lý người Pháp Jean-Louis-Marie Poiseuille phát hiện năm 1840. Định luật này cho rằng

1 $$v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

trong đó η là độ nhớt của máu và P là hiệu áp suất giữa hai đầu của ống. Nếu P và l là hằng số, thì v là hàm số theo r với tập xác định [0, R].

Tốc độ biến thiên trung bình của vận tốc khi ta đi từ $r = r_1$ ra ngoài đến $r = r_2$ được cho bởi

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

và nếu ta cho $\Delta r \to 0$, ta được **gradient vận tốc**, đó là, tốc độ biến thiên vận tốc tức thời đối với r:

$$\text{gradient vận tốc} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Dùng Phương trình (1), ta được

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{\Pr}{2\eta l}$$

Đối với một động mạch nhỏ của con người, ta có thể cho η = 0.027, R = 0.008 cm, l = 2 cm và P = 4000 dyne/cm^2, và được

$$v = \frac{4000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2)$$

$$\approx 1.85 \text{ x } 104(6.4 \text{ x } 10^{-5} - r^2)$$

Tại r = 0.002 cm máu chảy với vận tốc

$v(0.002) \approx 1.85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6})$
$= 1.11$ cm/s

và gradient vận tốc tại điểm đó là

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74(cm/s)/cm`$$

Để có thể hiểu được phát biểu này có nghĩa gì, ta hãy đổi đơn vị từ cm ta micromet (1 cm = 10,000 μm). Như vậy bán kính động mạch là 80 μm. Vận tốc ở trục trung tâm là 11,850 μm/s, giảm đến 11,110 μm/s tại khoảng cách r = 20 μm. Sự kiện dv/dr = - 74 (μm/s)/μm nghĩa là, khi r = 20 μm, vận tốc giảm với với tốc độ 74 μm/s cho mỗi micromet khi ta đi từ khỏi trục trung tâm.

KINH TẾ

VÍ DỤ 8 Giả sử C(x) là chi phí tổng cộng mà một công ty bỏ ra để sản xuất ra x đơn vị của một sản phẩm nào đó. Hàm số C gọi là **hàm số chi phí**. Nếu số sản phẩm tăng lên từ x_1 đến x_2, thì chi phí gia tăng là $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, và tốc độ biến thiên trung bình của chi phí là

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Giới hạn của tỉ số này khi $\Delta x \to 0$ là tốc độ biến thiên tức thời của chi phí đối với số sản phẩm, mà các nhà kinh tế gọi là **chi phí cận biên** (marginal cost):

$$\text{chi phí lề} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Vì x thường chỉ lấy giá trị nguyên nên khái niệm Δx tiến tới 0 không có nghĩa, nhưng ta luôn có thể thay C(x) bằng một hàm số xấp xỉ như trong Ví dụ 6.]

Cho $\Delta x = 1$và n lớn (để Δx nhỏ so với n), ta có

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Do đó chi phí cận biên để sản xuất ra n sản phẩm xấp xỉ bằng chi phí để sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm [sản phẩm thứ n + 1].

Thông thường hàm số chi phí toàn phần thường được biểu diễn bằng một đa thức

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

trong đó a biểu thị chi phí quản lý (tiền thuê, nhiên liệu, bảo trì) và những hệ số khác biểu thị chi phí nguyên liệu thô, công lao động, v . . .v . . . (chi phí nguyên liệu thô có thể tỉ lệ với x, nhưng chi phí lao động có thể phụ thuộc một phần vào các lũy thừa cao hơn của x vì các chi phí làm thêm giờ và sự mất năng suất chỉ liên quan đến sản xuất lớn.)

Chẳng hạn, giả sử công ty đã tính rằng chi phí (đôla) khi sản xuất x sản phẩm là

$$C(x) = 10000 + 5x + 0.01x^2$$

Thế thì hàm số chi phí cận biên là

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

Chi phí cận biên khi mức sản xuất là 500 sản phẩm là

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = 15 \text{ \$/sản phẩm}$$

Điều này cho thấy tốc độ chi phí tăng đối với mức sản xuất khi x = 500 và cho phép dự đoán chi phí của sản phẩm thứ 501.

Chi phí thực sự khi sản xuất sản phẩm thứ 501 là

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\quad - [10000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= 15.01 \text{ \$} \end{aligned}$$

Chú ý rằng $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

Các nhà kinh tế cũng nghiên cứu nhu cầu cận biên, thu nhập cận biên, và lợi tức cận biên, là đạo hàm của các hàm số nhu cầu, thu nhập và lợi tức. Những khái niệm này sẽ được đề cập đến trong Chương 4 sau khi ta đã triển khai các kỹ thuật tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

CÁC KHOA HỌC KHÁC

Tốc độ biến thiên xuất hiện trong mọi ngành khoa học. Nhà địa chất muốn biết tốc độ nguội của một thỏi đá nóng chảy khi tỏa hơi nóng sang các thỏi đá xung quanh. Một kỹ sư muốn biết tốc độ nước thóat ra hay chảy vào một bình chứa. Nhà địa lý đô thị quan tâm đến tốc độ biến thiên của mật độ dân số trong một thành phố khi khoảng cách đến trung tâm thành phố tăng lên. Nhà khí tượng học quan tâm đến tốc độ biến thiên của áp suất khí quyễn đối với cao độ (xem Bài tập 17 trong Bài 3.8).

Trong tâm lý học, những mối quan tâm về lý thuyết học tập nghiên cứu đường cong học tập, mô tả mức thu hoạch P(t) của học viên khi học tập một kỹ năng nào đó là như một hàm số theo thời gian huấn luyện t. Đặc biệt họ muốn biết tốc độ thu hoạch theo thời gian, tức dP/dt.

Trong xã hội học, phép tính vi tích phân được sử dụng để phân tích sự lan truyền của tin đồn (hoặc sự cách tân hoặc thời trang). Nếu p(t) là phần dân số biết được tin đồn tại thời điểm t, thì đạo hàm dp/dt biểu thị tốc độ lan truyền của tin đồn đó (xm Bài tập 82 trong Bài 3.4)..

MỘT Ý TƯỞNG, NHIỀU ỨNG DỤNG

Những ví dụ trên cho thấy những khái niệm khác nhau của nhiều ngành khoa học đã ứng dụng một khái niệm duy nhất trong toán học, đó là đạo hàm.

Điều này minh chứng sự kiện là một phần sức mạnh của toán học nằm ở tính trừu tượng của nó. Một khái niệm toán học trừu tượng duy nhất (như đạo hàm) có thể có những ứng dụng khác nhau trong mỗi ngành khoa học. Khi ta triển khai những tính chất của khái niệm toán học chỉ một lần thôi, là sau đó ta có thể quay ra và ứng dụng chúng cho mọi ngành khoa học. Điều này hiệu quả hơn là khai triển những tính chất khác nhau cho những ý niệm đặc biệt trong từng ngành khoa học riêng biệt. Nhà toán học Pháp Joseph Fourier (1768 - 1830) đã phát biểu một cách súc tích: " Toán học đối chiếu những hiện tượng đa dạng nhất và phát hiện những nét tương đồng bí ẩn liên kết chúng."

BÀI TẬP

1 – 4. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t)$, $t \geq 0$, trong đó t tính bằng giây và s bằng feet.

(a) Tìm vận tốc tại thời điểm t.

(b) Tìm vận tốc sau 3 s.

(c) Khi nào chất điểm đứng yên?

(d) Khi nào chất điểm di chuyển theo chiều dương.

(e) Tìm độ dài đoạn đường di chuyển trong 8 giây đầu tiên.

(f) Vẽ giản đồ như Hình 2 để minh họa chuyển động của chất điểm.

(g) Tìm gia tốc tại thời điểm t và sau 3 s.

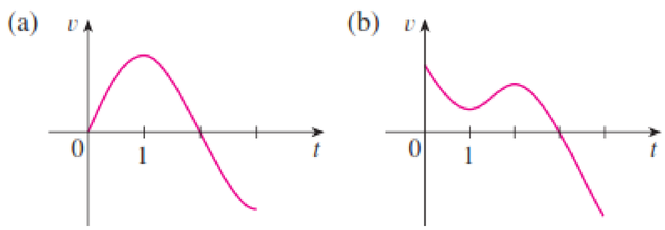
(h) Vẽ đồ thị của hàm số s, vận tốc, và gia tốc trong khoảng $0 \leq t \leq 8$.

(i) Khi nào chất điểm đi nhanh hơn? Đi chậm lại?

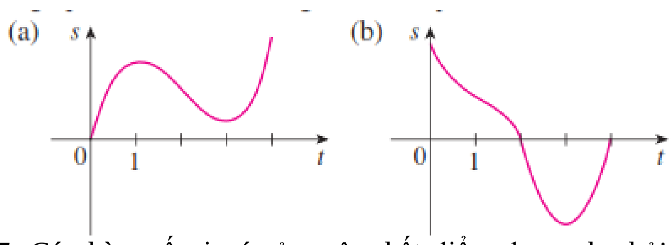
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ **2.** $f(t) = 0.01t^4 - 0.04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4)$, $t \le 10$ **4.** $F(t) = te^{-t/2}$

5. Đồ thị của các hàm số vận tốc của hai chất điểm được cho trước, trong đó t tính bằng giây. Khi nào mỗi chất điểm đi nhanh hơn? Đi chậm hơn? Giải thích.



6. Đồ thị của các hàm số vị trí của hai chất điểm được cho trước, trong đó t tính bằng giây. Khi nào mỗi chất điểm đi nhanh hơn? Đi chậm hơn? Giải thích.



7. Các hàm số vị trí của một chất điểm được cho bởi $s(t) = t^3 - 4.5\,t^2 - 7t$, $t \ge 0$.

(a) Khi nào chất điểm đạt vận tốc là 5m/s?

(b) Khi nào gia tốc bằng 0? Ý nghĩa của giá trị t này là gì?

8. Nếu quả bóng được đẩy xuống một mặt nghiêng với vận tốc đầu là 5 m/s , thế thì đoạn đường mà nó đi sau t giây là $s = 5t + 3t^2$.

(a) Tìm vận tốc sau 2 s.

(b) Mất bao lâu vận tốc mới đạt đến 35 m/s.

9. Nếu ném một viên đá lên thẳng đứng trên mặt trăng với vận tốc 10 m/s, độ cao viên đá đạt được (tính bằng mét) sau t giây là $h = 10t - 0.83t^2$.

(a) Tìm vận tốc sau 3 s.

(b) Tìm vận tốc viên đá khi nó đạt đến độ cao 25m?

10. Nếu ném một quả bóng lên thẳng đứng với vận tốc 80 ft/s, độ cao quả bóng đạt được sau t giây là $s = 80t - 16t^2$.

(a) Tìm độ cao tối đa của quả bóng.

(b) Tỉm vận tốc của quả bóng khi nó lên cao 96 ft? Xuống thấp 96 ft?

11. (a) Một công ty sản xuất con chip máy tính từ những lát silicon hình vuông. Công ty muốn giữ cạnh miếng lát rất gần 15 mm và muốn biết diện tích A(x) của miếng lát thay đổi ra sao khi độ dài cạnh x thay đổi. Tím A'(15) và giải thích ý nghĩa của nó trong tình huống này.

(b) Chứng tỏ rằng tốc độ biến thiên của diện tích hình vuông đối với độ dài cạnh của nó thì bằng nửa chu vi của nó. Hãy cố giải thích bằng hình học tại sao điều này đúng bằng cách vẽ hình vuông mà cạnh có độ dài x tăng một lượng Δx. Bằng cách nào bạn có thể tính xấp xỉ lượng biến thiên sinh ra của diện tích ΔA khi Δx nhỏ?

12. (a) Tinh thể sodium chlorate rất dễ kết tụ thành hình lập phương nếu cho phép một dung dịch nước và sodium chlorate bốc hơi từ từ. Nếu V là thể tích của một khối lập phương như thế với độ dài cạnh là x, hãy tính dV/dx khi x = 3 mm và giải thích ý nghĩa của nó.

(b) Chứng tỏ rằng tốc độ biến thiên của thể tích một khối lập phương đối với độ dài cạnh của nó thì bằng nửa diện tích bề mặt của nó. Hãy cố giải thích bằng hình học tại sao điều này đúng bằng cách tương tự như trong Bài tập 11(b).

13. (a) Tìm tốc độ biến thiên trung bình của diện tích hình tròn đối với bán kính r của nó khi r thay đổi từ

(i) 2 đến 3 (ii) 2 đến 2.5 (iii) 2 đến 2.1

(b) Tìm tốc độ biến thiên tức thì khi r = 2.

(c) Chứng tỏ rằng tốc độ biến thiên của diện tích hình tròn đối với bán kính r của nó thì bằng chu vi của nó. Hãy cố giải thích bằng hình học tại sao điều này đúng bằng cách vẽ hình tròn mà bán kính tăng một lượng Δr. Bằng cách nào bạn có thể tính xấp xỉ lượng biến thiên sinh ra của diện tích ΔA khi Δr nhỏ?

14. Một viên đá được ném xuống mặt hồ, tạo thành một sóng tròn lan rộng ra với vận tốc 60 cm/s. Tìm tốc độ tăng của diện tích hình tròn đó sau (a) 1 s, (b) 3 s, và (c) 5 s. Bạn rút ra được kết luận gì?

15. Một quả bóng cầu được bơm căng. Tìm tốc độ tăng của diện tích bóng ($S = 4\pi r^2$) đối với bán kính r khi r bằng (a) 1 ft, (b) 2 ft, và (c) 3 ft. Bạn rút ra được kết luận gì?

16. (a) Thể tích của một khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, trong đó r là bán kính tình bằng micromet ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). Tìm tốc độ biến thiên trung bình của V đối với r khi r biến thiên từ

(i) 5 đến 8 μm (ii) 5 đến 6 μm (iii) 5 đến 5.1 μm

(b) Tìm tốc độ biến thiên tức thời của V đối với r khi r = 5 μm.

(c) Chứng tỏ rằng tốc độ biến thiên của thể tích một khối cầu đối với bán kính của nó thì bằng diện tích của nó. Hãy cố giải thích bằng hình học tại sao điều này đúng bằng cách tương tự như trong Bài tập 13(c).

17. Khối lượng của một đoạn dây kim loại nằm giữa đầu mút bên trái của nó đến một điểm bên phải cách nó x mét là $3x^2$ kg. Tìm tỷ trọng tuyến tính (xem Ví dụ 2) khi x bằng (a) 1 m, (b) 2 m, và (c) 3 m. Ở đâu thì tỷ trọng cao nhất? Thấp nhấp?

18. Một bồn chứa 5000 galong nước, sẽ thoát ra hết từ đáy bồn trong 40 phút. Theo Định Luật Torricelli, thể tích V của nước còn lại trong bồn tại sau t phút là

$$V = 5000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 40$$

Tìm tốc độ nước thoát ra từ bồn sau (a) 5 phút, (b) 10 phút, (c) 20 phút, và (d) 40 phút. Khi nào nước thoát ra nhanh nhất? Chậm nhất? Tóm tắt kết quả bạn tìm được.

19. Điện lượng Q tính bằng coulomb (C) đi qua một điểm trên dây điện sau thời điểm t (tính bằng giây) được cho bởi $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Tìm cường độ khi (a) t = 0.5 s và 2 (b) t = 1 s. [Xem Ví dụ 3. Đơn vị cường độ là ampe (1 A = 1 C/s).] Khi nào cường độ thấp nhất?

20. Định luật Hấp Dẫn của Newton bảo rằng độ lớn F của lực tác động bởi một khối lượng m lên một khối lượng M là

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

Trong đó G là hằng số trọng trường và r là khoảng cách giữa hai khối lượng.

(a) Tìm dF/dr và giải thích ý nghĩa của nó. Dấu trừ chỉ ra điều gì?

(b) Giả sử biết rằng trái đất hút một vật thể với một lực giảm với tốc độ 2 N/km khi r = 20,000 km. Hỏi lực này thay đổi nhanh cỡ nào khi r = 10,000 km?

21. Định luật Boyle phát biểu rằng ở một nhiệt độ không đổi, khi một khối khí bị nén thì tích của áp suất và thể tích khối khí là không đổi: PV = C.

(a) Tìm tốc độ biến thiên của thể tích đối với áp suất.

(b) Một khối khí trong một bình chứa dưới áp suất thấp và chịu một lực nén liên tục ở nhiệt độ không đổi trong 10 phút. Hỏi thể tích giảm nhanh hơn lúc bắt đầu hay lúc cuối sau 10 phút? Giải thích tại sao.

(c) Chứng tỏ rằng độ nén đẳng nhiệt (xem Ví dụ 5) được cho bởi $\beta = 1/P$.

22. Nếu, trong Ví dụ 4, một phân tử của sản phẩm C được tạo thành từ một phân tử của chất phản ứng A và một phân tử của chất phản ứng B, và nồng độ ban đầu của A và B có giá trị chung [A]=[B] = a mol/L, thế thì

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

trong đó k là hằng số.

(a) Tìm tốc độ phản ứng tại thời điểm t.

(b) Chứng tỏ rằng nếu x = [C], thì

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2$$

(c) Điều gì xảy ra với nồng độ khi $t \to \infty$?

(d) Điều gì xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \to \infty$?

(e) Các kết quả ở phần (c) và (d) có nghĩa gì theo quan điểm thực tế.

23. Trong Ví dụ 6 ta xét dân số vi khuẩn cứ tăng gấp đôi mỗi giờ. Giả sử một dân số khác tăng gấp ba mỗi giờ và khởi đầu có 400 con. Tìm một biểu thức tính số n của vi khuẩn sau t giờ và dùng biểu thức này để ước tính tốc độ tăng trưởng của dân số vi khuẩn sau 2.5 giờ.

24. Số tế bào men trong một dung dịch nuôi cấy lúc đầu tăng rất nhanh nhưng sau đó bảo hòa. Dân số được mô hình hóa bằng hàm số

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}}$$

trong đó t tính bằng giờ. Tại thời điểm t = 0, dân số là 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm giá trị của a và b. Theo mô hình này, cuối cùng điều gì sẽ xảy ra với dân số men?

25. Bảng dưới cho ta dân số của thế giới trong thế kỷ 20.

Year	Population (in millions)	Year	Population (in millions)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

(a) Ước tính tốc độ tăng trưởng dân số trong năm 1920 và 1980 bằng cách lấy trung bình các độ dốc của hai hai cát tuyến.
(b) Dùng máy tính để tìm một hàm số bậc ba mô hình hóa các dữ liệu này.
(c) Dùng mô hình của bạn trong phần (b) để tìm một mô hình cho tốc độ tăng dân số trong thế kỷ 20.
(d) Dùng phần (c) để ước tính tốc độ tăng dân số trong năm 1920 và 1980. So sánh với kết quả bạn ước tính trong phần (a).
(e) Ước tính tốc độ tăng dân số trong năm 1985.

26. Bảng dưới cho thấy tuổi trung bình cho lần kết hôn đầu tiên của phụ nữ Nhận Bản thay đổi thế nào trong nửa cuối thế kỷ 20.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1980	25.2
1955	23.8	1985	25.5
1960	24.4	1990	25.9
1965	24.5	1995	26.3
1970	24.2	2000	27.0
1975	24.7		

(a) Dùng máy tính để mô hình hóa các dữ liệu này bằng một đa thức bậc bốn.
(b) Dùng phần (a) để tìm một mô hình cho A'(t).
(c) Ước tính tốc độ biến thiên của tuổi kết hôn của các phụ nữ trong năm 1990.
(d) Biểu diễn các điểm dữ liệu vẽ mô hình của A và A'.

27. Tham khảo định luật về dòng chảy thành tầng đã cho trong Ví dụ 7. Xét một động mạch có bán kính 0.01 cm, chiều dài 3 cm, hiệu số áp huyết 3000 dyne/cm^2, và độ nhớt η = 0.027.

(a) Tìm vận tốc dòng máu tại trục trung tâm r = 0, tại bán kính r = 0.005 cm, và tại vách động mạch r = R = 0.01 cm.
(b) Tìm gradient vận tốc tại r = 0, r = 0.005, và r = 0.01.
(c) Ở đâu thì vận tốc lớn nhất? Ở đâu thì vận tốc thay đổi nhiều nhất.

28. Tần số dao động của dây đàn violon được cho bởi công thức

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

trong đó L là độ dài dây, T độ căng dây, và ρ là tỷ trọng tuyến tính của nó.

(a) Tìm tốc độ biến thiên của tần số đối với
 (i) độ dài (khi T và ρ không đổi)
 (ii) độ căng dây (khi L và ρ không đổi), và
 (iii) tỷ trọng tuyến tính (khi L và T không đổi).

(b) Độ cao của một nốt nhạc được xác định bằng tần số. Dùng dấu của đạo hàm trong phần (a) để xác định điều gì xảy ra với độ cao của một nốt nhạc
 (i) độ dài của dây đàn giảm xuống khi ta đặt ngón tay lên dây đàn để đoạn dây giao động được ngắn bớt.
 (ii) khi độ căng dây tăng lên bằng cách vặn chặc khóa đàn.
 (iii) khi tỷ trọng tuyến tính tăng lên khi thay một dây đàn khác.

29. Chi phí, tính bằng đô-la, để sản xuất x thước một loại vải nào đó là

$$C(x) = 1200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

(a) Tìm hàm số chi phí cận biên.
(b) Tìm C'(200) và giải thích ý nghĩa của nó. Nó dự đoán điều gì?
(c) So sánh C'(200) với chi phí làm ra thước vải thứ 201.

30. Chi phí sản xuất một sản phẩm tiện ích nào đó là

$$C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$$

(a) Tìm và giải thích C'(100).
(b) So sánh C'(100) với chi phí làm ra sản phẩm thứ 101.

31. Nếu p(x) là tổng giá trị sản xuất khi có x nhân công trong một xưởng máy, thế thì năng suất trung bình của lực lượng nhân công tại xưởng là

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Tìm A'(x). Tại sao công ty muốn thuê nhiều nhân công hơn khi A'(x) > 0?

(b) Chứng tỏ rằng A'(x) > 0 khi p'(x) lớn hơn năng suất trung bình.

32. Nếu R chỉ phản ứng của một cơ thể khi gặp một kích thích có cường độ x, độ nhạy cảm S được định nghĩa là tốc độ biến thiên của phản ứng đối với x. Một ví dụ cụ thể là khi độ sáng x của một nguồn sáng tăng lên, mắt phản ứng bằng cách thu nhỏ diện tích R của con ngươi. Công thức thực nghiệm

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

đã được sử dụng để mô hình hóa sự phụ thuộc của R đối với x trong đó R được tính bằng mm^2 và x tính bằng đơn vị độ sáng thích hợp.

(a) Tìm độ nhạy cảm S.

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đồ thị của R và S xem hàm số theo x. Nhận xét về những giá trị của R và S khi độ sáng thấp. Có phải đó là điều bạn mong đợi

33. Định luật về chất khí cho một khí lý tưởng ở nhiệt độ tuyệt đối T (độ Kelvin), áp suất P (atmosphere), và thể tích V (lít) là PV = nRT, trong đó n là số phân tử khí, và R = 0.0821 là hằng số khí. Giả sử là, tại một lúc nào đó, P = 8.0 atm và đang tăng với tốc độ 0.10 atm/phút và V = 10 L, và đang giảm với tốc độ 0.15 L/phút. Tìm tốc độ biến thiên của T đối với thời gian tại thời điểm đó biết n = 10 mol.

34. Trong một trại nuôi cá, một dân số cá được đưa vào nuôi trong một ao và được thu hoạch đều đặn. Một mô hình cho biết tốc độ biến thiên của dân số cá được cho bởi phương trình

$$\frac{dP}{dt} = r_o\left(1 - \frac{P(t)}{P_C}\right)P(t) - \beta P(t)$$

trong đó r_o là tỷ lệ sinh sản của cá, P_C là dân số tối đa mà ao có thể dung dưỡng (gọi là khả năng tiếp nhận), và β là phần trăm dân số được thu hoạch.

(a) Giá trị nào của dP/dt tương ứng với một dân số bền vững?

(b) Nếu ao có thể dung dưỡng 10,000 cá, tỷ lệ sinh sản là 5%, và mức thu hoạch là 4%, tìm mức dân số bền vững.

(c) Điều gì xảy ra khi β lên đến 5%?

35. Trong nghiên cứu hệ sinh thái, mô hình kẻ săn mồi-mồi thường được được sử dụng để nghiên cứu tương tác giữa các loài. Xét dân số của loài sói tundra, ký hiệu W(t), và tuần lộc, ký hiệu C(t), sống ở bắc Canada. Tương tác đã được mô hình hóa bằng các phương trình

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

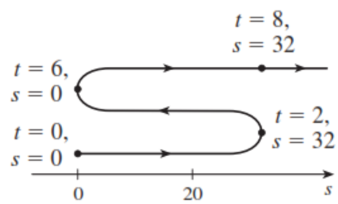
(a) Giá trị nào của dC/dt và dW/dt tương ứng với các dân số bền vững?

(b) Phát biểu "Loài tuần lộc sẽ tuyệt chũng" được biểu diễn bằng toán học như thế nào?

(c) Giả sử a = 0.05, b = 0.001, c = 0.05, và d = 0.0001. Tìm tất cả cặp dân số (C. W) dẫn đến các dân số bền vững. Theo mô hình này, có thể nào hai loài sống cân bằng hay một hoặc cả hai loài đều sẽ tuyệt chũng?

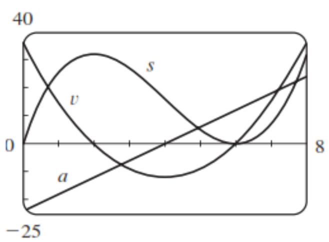
ĐÁP SỐ

1. (a) $3t^2 - 24t + 36$ (b) -9 ft/s (c) $t = 2, 6$
(d) $0 \leqslant t < 2, t > 6$
(e) 96 ft
(f)



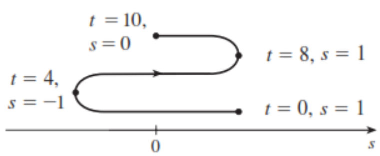
(g) $6t - 24$; -6 m/s^2

(h)

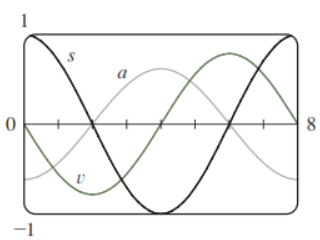


(i) nhanh hơn khi $2 < t < 4$ hay $t > 6$; chậm lại khi $0 \le t < 2$ hay $4 < t < 6$

3. (a) $-\dfrac{\pi}{4}\sin\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)$ (b) $-\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}$ ft/s (c) $t = 0, 4, 8$
(d) $4 < t < 8$ (e) 4 ft
(f)



(g) $-\frac{1}{16}\pi^2\cos(\pi t/4)$; $\frac{1}{32}\pi^2\sqrt{2}$ ft/s^2
(h)



(i) Speeding up when $0 < t < 2, 4 < t < 6$;
slowing down when $2 < t < 4, 6 < t < 8$

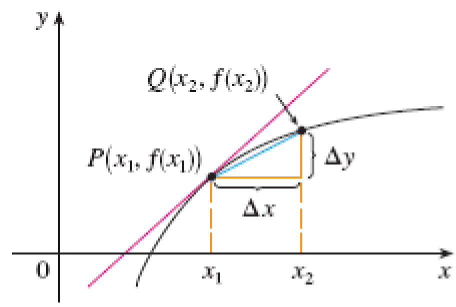
5. (a) Speeding up when $0 < t < 1$ or $2 < t < 3$;
slowing down when $1 < t < 2$
(b) Speeding up when $1 < t < 2$ or $3 < t < 4$;
slowing down when $0 < t < 1$ or $2 < t < 3$
7. (a) $t = 4$ s
(b) $t = 1.5$ s; the velocity has an absolute minimum.
9. (a) 5.02 m/s (b) $\sqrt{17}$ m/s
11. (a) 30 mm^2/mm; the rate at which the area is increasing with respect to side length as x reaches 15 mm
(b) $\Delta A \approx 2x\,\Delta x$
13. (a) (i) 5π (ii) 4.5π (iii) 4.1π
(b) 4π (c) $\Delta A \approx 2\pi r\,\Delta r$

15. (a) 8π ft^2/ft (b) 16π ft^2/ft (c) 24π ft^2/ft
The rate increases as the radius increases.
17. (a) 6 kg/m (b) 12 kg/m (c) 18 kg/m
At the right end; at the left end
19. (a) 4.75 A (b) 5 A; $t = \frac{2}{3}$ s
21. (a) $dV/dP = -C/P^2$ (b) At the beginning
23. $400(3^t)\ln 3$; ≈ 6850 bacteria/h
25. (a) 16 million/year; 78.5 million/year
(b) $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, where $a \approx 0.00129371$, $b \approx -7.061422$, $c \approx 12{,}822.979$, $d \approx -7{,}743{,}770$
(c) $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
(d) 14.48 million/year; 75.29 million/year (smaller)
(e) 81.62 million/year

27. (a) 0.926 cm/s; 0.694 cm/s; 0
(b) 0; -92.6 (cm/s)/cm; -185.2 (cm/s)/cm
(c) At the center; at the edge
29. (a) $C'(x) = 12 - 0.2x + 0.0015x^2$
(b) \$32/yard; the cost of producing the 201st yard
(c) \$32.20
31. (a) $[xp'(x) - p(x)]/x^2$; the average productivity increases as new workers are added.
33. -0.2436 K/min
35. (a) 0 and 0 (b) $C = 0$
(c) (0, 0), (500, 50); it is possible for the species to coexist.

BÀI 3. 8. Tăng Trưởng Và Phân Rã Theo Số Mũ

Trong nhiều hiện tượng tự nhiên, vật chất tăng trưởng và phân rã theo tốc độ tỷ lệ với kích thước của chúng. Chẳng hạn, nếu y = f(t) là số lượng cá thể trong một dân số động vật hoặc vi khuẩn tại thời điểm t , thế thì rất hợp lý khi hy vọng rằng tốc độ gia tăng f ’(t) của dân số tỷ lệ với dân số f(t); nghĩa là f ‘(t) = kf(t) với k là hằng số nào đó. Thật ra, trong những điều kiện lý tưởng (môi trường không giới hạn, dinh dưỡng đầy đủ, miễn nhiễm với bệnh) mô hình toán học cho bởi phương trình f ‘(t) = kf(t) dự đoán khá chính xác điều gì sẽ xảy ra. Một ví dụ khác xảy ra trong vật lý hạt nhân trong đó khối lượng của chất phóng xạ bị phân rã theo một tốc độ tỷ lệ với khối lượng. Trong hóa học, tốc độ phản ứng cấp một đơn phân tử tỷ lệ với nồng độ của chất. Trong tài chính giá trị của tài khoản tiết kiệm gởi theo lãi kép liên tục tăng với tốc độ tỷ lệ với giá trị tiền gởi.



m_{PQ} = tốc độ biến thiên trung bình
$m = f'(x_1)$ = tốc độ biến thiên tức thời

Tổng quát, nếu y(t) chỉ giá trị của đại lượng y tại thời điểm t và nếu tốc độ biến thiên của y đối với t tỷ lệ với kích thước y(t) của nó tại bất kỳ thời điểm nào, thế thì

1 $$\frac{dy}{dt} = ky$$

trong đó k là hằng số. Phương trình 9 thường được gọi là **luật tăng trưởng tự nhiên** (nếu k > 0) và **luật phân rã tự nhiên (**nếu k < 0). Phương trình 1 được gọi là **phương trình vi phân** vì chứa một ẩn hàm số y và đạo hàm dy/dt của nó.

Không khó để giải được Phương trình 1. Phương trình này hỏi ta tìm ra một hàm số mà đạo hàm **của** nó tỷ lệ với nó. Chúng ta đã gặp những hàm số như thế trong chương này. Bất kỳ hàm số mũ nào có dạng y(t) = Ce^{kt}, trong đó C là hằng số, cũng thỏa mãn

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Ta sẽ thấy trong Bài 9.4 là bất kỳ hàm số nào thỏa mãn dy/dt = ky đều phải có dạng y = Ce^{kt}. Để thấy được ý nghĩa hằng số C, ta nhận xét rằng

$$y(0) = Ce^{k.0} = C$$

Do đó C chính là giá trị đầu của hàm số này.

> **2 Định lý** Nghiệm duy nhất của phương trình vi phân dy/dt = ky là những hàm số mũ
> $$y(t) = y(0)e^{kt}$$

SỰ TĂNG TRƯỞNG DÂN SỐ

Ý nghĩa của hằng số tỷ lệ k là gì? Trong bối cảnh gia tăng dân số, trong đó P(t) là kích thước của một dân số tại thời điểm t, ta có thể viết

3 $$\frac{dP}{dt} = kP \qquad hay \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

Lượng $\frac{1}{p}\frac{dP}{dt}$ là tốc độ gia tăng chia cho kích thước dân số; được gọi là **tốc độ gia tăng tương đối.** Theo (3), thay vì nói "tốc độ gia tăng tỷ lệ với kích thước dân số" ta có thể nói "tốc độ gia tăng tương đối là hằng số." Thế thì (2) nói rằng một dân số có tốc độ gia tăng tương đối không đổi phải gia tăng theo hàm số mũ. Chú ý là tốc độ gia tăng tương đối k xuất hiện dưới dạng một hệ số của t trong hàm số mũ Ce^{kt}. Chẳng hạn, nếu

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

và t tính bằng năm , thì tốc độ gia tăng tương đối là k = 0.02 và dân số gia tăng với tốc độ tương đối là 2% mỗi năm. Nếu dân số ở thời điểm 0 là P_o, thế thì biểu thức dân số là

$$P(t) = P_o e^{0.02t}$$

VÍ DỤ 1 Dùng dữ liệu là dân số thế giới năm 1950 là 2560 triệu và năm 1960 là 3040 triệu để mô hình hóa dân số thế giới trong nửa cuối thế kỷ 20. (Giả định rằng tốc độ gia tăng dân số tỷ lệ với kích thước dân số.) Tìm tốc độ gia tăng tương đối. Dùng mô hình để ước tính dân số thế giới năm 1993 và dự đoán dân số trong năm 2020.

GIẢI Ta tính thời gian t bằng năm và đặt t = 0 ở năm 1950. Ta tính dân số P(t) theo đơn vị triệu người. Thế thì P(0) = 2560 và P(10) = 3040. Vì ta giả định dP/dt = kP, Định lý 2 cho ta

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2560e^{kt}$$

$$P(10) = 2560e^{10k} = 3040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560} \approx 0.017185$$

Tốc độ gia tăng tương đối là khoảng 1.7% mỗi năm và mô hình là

$$P(t) = 2560e^{0.017185t}$$

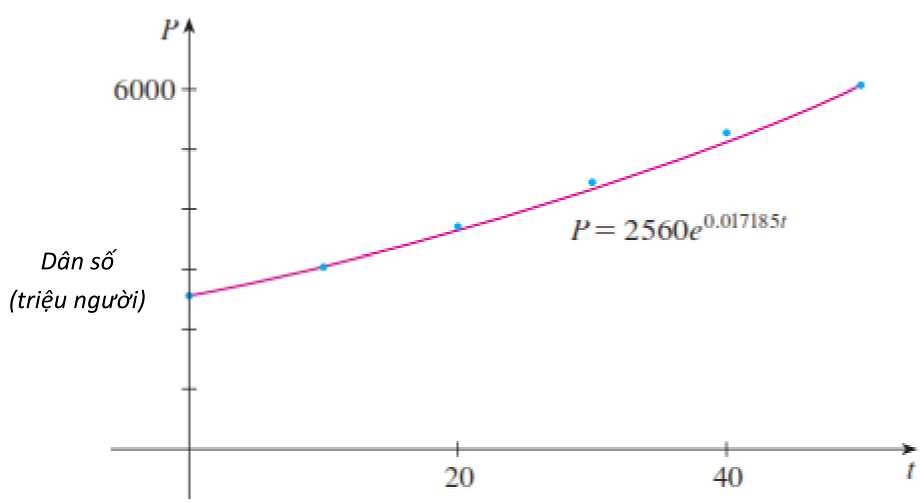
Ta ước tính dân số thế giời năm 1993 là

$$P(43) = 2560e^{0.017185(43)} \approx 5360 \text{ triệu}$$

Mô hình dự đoán dân số năm 2020 sẽ là

$$P(70) = 2560e^{0.017185(70)} \approx 8524 \text{ triệu}$$

Đồ thị trong Hình 1 cho thấy mô hình khá chính xác cho đến hết thế kỷ 20 (các chấm biểu thị dân số thực sự), do đó ước tính dân số năm 1993 hoàn toàn tin cậy được. Nhưng dự đoán cho năm 2020 thì táo bạo hơn.



HÌNH 1 *Năm tính từ 1950*

PHÂN RÃ PHÓNG XẠ

Chất phóng xạ phân rã bằng cách tự phát ra các tia xạ. Nếu m(t) là khối lượng còn lại kể từ khối lượng m_o ban đầu của chất phóng xạ sau thời điểm t, thế thì tốc độ phân rã tương đối

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

đã được kiểm chứng bằng thực nghiệm cho thấy là một hằng số. (Vì dm/dt là số âm, tốc độ phân rã là dương.) Suy ra là

$$\frac{dm}{dt} = km$$

trong đó k là hằng số âm. Nói cách khác, các chất phóng xạ phân rã với tốc độ tỷ lệ với khối lượng còn lại. Điều này có nghĩa là ta có thể sử dụng (2) để chứng tỏ rằng khối lượng phân rã theo hàm số mũ:

$$m(t) = m_o e^{kt}$$

Các nhà vật lý biểu diễn tốc độ phân rã theo **chu kỳ bán rã**, tức thời gian cần thiết cho nửa khối lượng bất kỳ cho trước bị phân rã.

VÍ DỤ 2 Chu kỳ bán rã của radium-226 là 1590 năm.

(a) Một mẫu radium-226 có khối lượng 100 mg. Tìm công thức tính khối lượng của mẫu đó còn lại sau t năm.

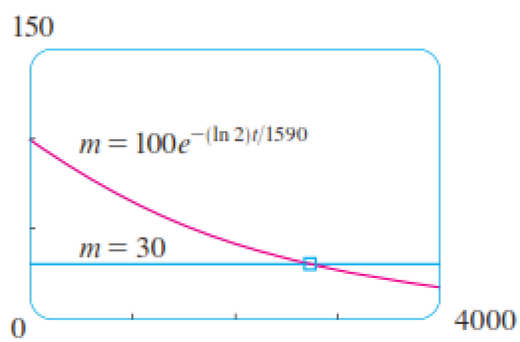
(b) Tìm khối lượng sau 1000 năm đúng đến millligram gần nhất.

(c) Khi nào khối lượng chỉ còn 30 mg.

GIẢI

(a) Gọi m(t) là khối lượng radium-226 (tính bằng milligram) còn lại sau t năm. Thế thì dm/dt = km và y(0) = 100, và (2) cho

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$



HÌNH 2

Để xác định giá trị của k, ta dùng giả thiết là y(1590) = ½ (100). Do đó

$$100e^{1500k} = 50 \qquad \text{suy ra} \qquad e^{1500k} = ½$$

Và $$1590k = \ln {}^{1}/_{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

Do đó $$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1590}$$

Ta có thể sử dụng công thức $e^{\ln 2} = 2$ để viết biểu thức khác cho m(t) là:

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

(b) Khối lượng sau 1000 năm là

$$m(1000) = 100\, e^{-(\ln 2)1000/1590} \approx 65 \text{ mg}$$

(c) Ta muốn tìm giá trị của t sao cho m(t) = 30, tức là

$$100\, e^{-(\ln 2)t/1590} = 30 \qquad \text{hay} \qquad e^{-(\ln 2)t/1590} = 0.3$$

Ta giải phương trình này theo t bằng cách lấy logarit tự nhiên hai vế và được:

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

$$t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2762 \ (\textit{năă})$$

Để kiểm tra kết quả đã làm trong Ví dụ 2, ta dùng máy tính để vẽ đồ thị m(t) như trong Hình 2 cùng với đường thẳng nằm ngang m = 30. Hai đường này cắt nhau tại t » 2800, và tương đối khớp với đáp số ta tìm được trong phần (c).

ĐỊNH LUẬT NEWTON VỀ SỰ LÀM MÁT

Định luật Làm Mát của Newton phát biểu rằng tốc độ làm mát của một vật thể tỷ lệ với hiệu số nhiệt độ giữa vật đó và môi trường xung quanh của nó, miễn là hiệu số này không quá lớn. (Luật này cũng áp dụng cho sự làm ấm.) Nếu ta đặt T(t) là nhiệt độ của vật thể tại thời điểm t và T_s là nhiệt độ của môi trường xung quanh, thế thì ta công thức hóa Định luật Newton dưới dạng một phương trình vi phân:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

trong đó k là hằng số. Phương trình này không giống hoàn toàn với Phương trình 1, vì thế ta đổi biến số y(t) = T(t) – T_s. Vì T_s là hằng số, nên y ’(t) = T’(t) và phương trình thành

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Và bây giờ sử dụng (2) ta tìm được biểu thức của y, từ đó suy ra T.

VÍ DỤ 3 Một chai soda đang ở nhiệt độ phòng (72^oF) được cho vào một tủ lạnh có nhiệt độ là 44^oF. Sau nửa giờ chai soda được làm lạnh đến 61^oF.

(a) Tìm nhiệt độ của chai soda sau nửa giờ nữa?

(b) Phải mất bao lâu soda mới hạ xuống đến 50^oF)

GIẢI

(a) Gọi T(t) là nhiệt độ soda sau t phút. Nhiệt độ môi trường xung quanh là $T_s = 44^oF$, do đó theo Định luật Làm Mát của Newton ta có

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 44)$$

Nếu đặt y = T – 44, thì y(0) = T(0) – 44 = 72 – 44 = 28, suy ra y thỏa

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 28$$

Và theo (2) ta có

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 28e^{kt}$$

Vì T(30) = 61, nên y(30) = 61 – 44 = 17 và

$$28e^{30k} = 17 \iff e^{30k} = 17/28$$

Lấy logarit hai vế, ta được

$$k = \frac{\ln(^{17}/_{28})}{30} \approx -0.01663$$

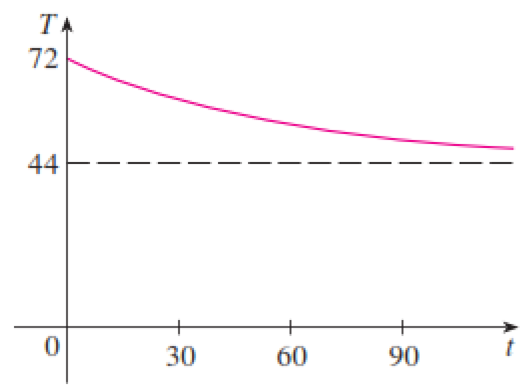
Vậy

$$y(t) = 28e^{-0.01663t}$$

Và

$$T(t) = 44 + 28e^{-0.01663t}$$

$$T(60) = 44 + 28e^{-0.01663(60)} \approx 54.3$$



HÌNH 3

Như vậy sau nửa giờ nữa soda đã xuống đến 54^oF.

(b) Ta có T(t) = 50 khi

$$44 + 28e^{-0.01663t} = 50 \iff e^{-0.01663t} = 6/28$$

Suy ra

$$t = \frac{\ln({}^{6}/_{28})}{-0.01663} \approx 92.6$$

Soda xuống đến 50^{o}F sau khoảng 1 giờ 33 phút.

Chú ý là trong Ví dụ 3, ta có

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}(44 + 28e^{-0.01663t}) = 44 + 28\,.\,0 = 44$$

đúng như ta mong đợi. Đồ thị cha hàm số nhiệt độ cho bởi Hình 3.

LÃI KÉP LIÊN TỤC

VÍ DỤ 4 Nếu ta đầu tư 1000$ với lãi suất 6%, lãi kép thanh toán hàng năm, thế thì sau 1 năm tiền đầu tư là 1000$ x (1.06) = 1060$, sau 2 năm tiền đầu tư thành [1000(1.06)]1.06 = $1000(1.06)^2$ = 1123.60$, và sau t năm nó trị giá $1000\$(1.06)^t$. Tổng quát, nếu đầu tư một số tiền A_o với lãi suất r (trong ví dụ trên r = 0.06), thì sau t năm số tiền thành $A_o(1 + r)^t$. Tuy nhiên, thường lãi được tính kép không phải mỗi năm mà có khi n lần một năm. Thế thì trong mỗi kỳ tính lãi kép, lãi suất là r/n và có nt kỳ thanh khoản trong t năm, do đó giá trị tiền đầu tư là

$$A_o\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Chẳng hạn, sau 3 năm với lãi suất 6% số tiền đầu tư ban đầu 1000$ sẽ có trị giá

$1000\$(1.06)^3 = 1191.02\$$ với lãi kép hàng năm

$1000\$(1.03)^6 = 1194.05\$$ với lãi kép mỗi 6 tháng

$1000\$(1.015)^{12} = 1195.62\$$ với lãi kép mỗi 3 tháng

$1000\$(1.005)^{36} = 1196.68\$$ với lãi kép hàng tháng

$$1000\$\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{365.3} = 1197.20\$ \quad \text{với lãi kép mỗi ngày}$$

Bạn có thể thấy là lãi nhận được tăng dần khi số thời hạn tính lãi kép (số n) tăng lên. Nếu ta cho n → ∞, ta nói ta tính lãi kép **liên tục** và giá trị tiền đầu tư khi ấy sẽ là

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_o\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty} A_o\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}$$

$$= A_o \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{/m}\right]^{rt} \qquad (m = n/r)$$

Nhưng giới hạn này thì bằng số e.(Xem Phương trình 3.6.6). Do đó tính lãi kép liên tục với lãi suất r, số tiền sau t năm là

$$A(t) = A_o e^{rt}$$

Nếu ta vi phân hàm số này, ta được

$$\frac{dA}{dt} = rA_o e^{rt} = rA(t)$$

nghĩa là, với lãi kép liên tục, tốc độ gia tăng giá trị tiền đầu tư tỷ lệ với độ lớn của nó.

Trở lại với ví dụ đầu tư 1000$ trong 3 năm với lãi suất 6%, ta thấy rằng với lãi kép liên tục giá trị tiền đầu tư sẽ là

$$A(3) = 1000\$\ e^{(0.06)3} = 1197.22\$$$

Chú ý giá trị này gần sát với giá trị khi tính lãi kép mỗi ngày là 1197.20$. Nhưng số tiền sẽ tính dễ hơn nếu ta dùng lãi kép liên tục.

BÀI TẬP

1. Một dân số các sinh vật đơn bào phát triển với tốc độ tăng trưởng 0.7944 mỗi cá thể mỗi ngày. Vào ngày thứ 0 dân số chỉ gồm 2 cá thể. Tìm dân số sau sáu ngày.

2. Ký sinh thường thấy trong ruột người là vi khuẩn Escherichia coli. Một tế bào của vi khuẩn này trong môi trường nuôi cấy sẽ tách thành hai tế bào mỗi 20 phút. Số tế bào ban đầu 60.
(a) Tìm tốc độ gia tăng tương đối.
(b) Tìm biểu thức tính số tế bào sau t giờ.
(c) Tìm số tế bào sau 8 giờ.
(d) Tìm tốc độ gia tăng sau 8 giờ.
(e) Khi nào số tế bào đạt mốc 20,000?

3.Số vi khuẩn trong môi trường nuôi cấy ban đầu là 100 con và gia tăng với tốc độ tỷ lệ với kích thước của nó. Sau một giờ số vi khuẩn tăng đến 420.
(a) Tìm biểu thức tính số vi khuẩn sau t giờ.
(b) Tìm số vi khuẩn sau 3 giờ.
(c) Tìm tốc độ gia tăng sau 3 giờ.
(d) Khi nào số vi khuẩn đạt mốc 10,000?

4. Số vi khuẩn trong môi trường nuôi cấy có tốc độ gia tăng tương đối là một hằng số. Sau 2 giờ số vi khuẩn là 600 và sau 8 giờ tăng đến 75,000.
(a) Tìm số vi khuẩn ban đầu.
(b) Tìm biểu thức tính số vi khuẩn sau t giờ.
(c) Tìm số vi khuẩn sau 5 giờ
(d) Tìm tốc độ gia tăng sau 5 giờ.
(d) Khi nào số vi khuẩn đạt mốc 200,000?

5. Bảng dưới cho ta ước tính dân số thế giới, đơn vị triệu người, từ 1750 đến 2000.

Year	Population	Year	Population
1750	790	1900	1650
1800	980	1950	2560
1850	1260	2000	6080

(a) Dùng mô hình hàm số mũ và dân số của năm 1750 và 1800 để dự đoán dân số năm 1900 và 1950. So sánh kết quả này với dân số thực sự.
(b) Dùng mô hình hàm số mũ và dân số của năm 1850 và 1900 để dự đoán dân số năm 1950. So sánh kết quả này với dân số thực sự.
(c) Dùng mô hình hàm số mũ và dân số của năm 1900 và 1950 để dự đoán dân số năm 2000. So sánh kết quả này với dân số thực sự và hãy giải thích sự khập khiễng.

6. Bảng dưới cho ta dân số của Hoa Kỳ, đơn vị triệu người, trong những năm 1900-2000.

Year	Population	Year	Population
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	275
1950	150		

(a) Dùng mô hình hàm số mũ và dân số của năm 1900 và 1910 để dự đoán dân số năm 2000. So sánh kết quả này với dân số thực sự và hãy giải thích sự khập khiễng.
(b) Dùng mô hình hàm số mũ và dân số của năm 1980 và 1990 để dự đoán dân số năm 2000. So sánh kết quả

này với dân số thực sự. Rồi dùng mô hình này để dự đoán dân số năm 2010 và 2020.
(c) Vẽ đồ thị của hai hàm số mũ trong phần (a) và (b) cùng với các điểm dữ liệu của dân số thực sự. Các mô hình này có hợp lý chưa?

7. Các thực nghi chứng tỏ rằng nếu phản ứng hóa học

$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + ½ O_2$

xảy ra ở 45^{o}C, tốc độ phản ứng của dinitrogen pentoxide thì tỷ lệ với nồng độ của nó như sau:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

(a) Tìm biểu thức tính nồng độ của $[N_2O_5]$ sau t giây nếu nồng độ ban đầu là C.
(b) Phản ứng phải mất bao lâu để nồng độ N_2O_5 giảm đến 90% giá trị ban đầu?

8. Bismuth-210 có chu kỳ bán rã là 5.0 ngày.
(a) Một mẫu ban đầu có khối lượng 800 mg. Tìm công thức tính khối lượng còn lại sau t ngày.
(b) Tìm khối lượng còn lại sau 30 ngày.
(c) Khi nào khối lượng chỉ còn 1 mg?
(d) Vẽ đồ thị hàm số khối lượng.

9. Cesium-137 có chu kỳ bán rã là 30 năm. Giả sử ta có một mẫu 100 mg.
(a) Tìm khối lượng còn lại sau t năm.
(b) Tìm khối lượng còn lại sau 100 năm.
(c) Khi nào khối lượng chỉ còn 1 mg?

10. Một mẫu tritium-3 phân rã đến 94.5% khối lượng ban đầu sau một năm.
(a) Tìm chu kỳ bán rã của tritium-3.
(b) Phải mất bao lâu mẩu phân rã đến 20% khối lượng ban đầu?

11. Các nhà khoa học có thể xác định tuổi của các đồ vật cổ bằng phương pháp cacbon phóng xạ. Việc bắn phá tầng khí quyển trên cao bằng những tia vũ trụ biến đổi nitrogen thành chất đồng vị phóng xạ của carbon, ^{14}C, với chu kỳ bán rã khoảng 5730 năm. Cây cối hấp thu carbon dioxide qua không khí và thú vật đồng hóa ^{14}C qua chuỗi thực phẩm. Khi cây cối hoặc thú chết, nó ngưng thay thế carbon của nó và lượng ^{14}C bắt đầu giảm xuống qua phân rã phóng xạ. Do đó mức độ phóng xạ cũng phải phân rã theo hàm số mũ. Một mãnh giấy da được phát hiện chỉ chứa khoảng 74% lượng phóng xạ ^{14}C mà cây cối trên trái đất hiện nay có. Hãy ước tính tuổi của miếng giấy da đó.

12. Một đường cong đi qua điểm (0, 5) và có tính chất là độ dốc của đường cong tại mỗi điểm P gấp hai lần tung độ của P. Tìm phương trình của đường cong đó.

13. Một con gà tây được lấy ra từ lò nướng khi nhiệt độ lò lên đến 185^{o}F và được đặt lên bàn ăn trong một phòng có nhiệt độ 75^{o}F.
(a) Nếu nhiệt độ của gà tây hạ còn 150^{o}F sau đó nửa giờ, hỏi nhiệt độ gà tây sau 45 phút.
(b) Khi nào gà tây nguội đến 100^{o}F.

14. Một nhiệt kế được lấy ra từ một căn phòng có nhiệt độ 20^{o}C và mang ra ngoài trời có nhiệt độ là 5^{o}C. Sau một phút nhiet kế chỉ 12^{o}C.
(a) Nhiệt kế chỉ mấy độ sau một phút nửa?
(b) Khi nào nhiệt kế chỉ 6^{o}C?

15. Khi lấy một thức uống lạnh từ tủ lạnh, nhiệt độ của nó là 5^{o}C. Sau 25 phút trong căn phòng 20^{o}C nhiệt độ nó giảm xuống còn 10^{o}C.
(a) Tìm nhiệt độ của thức uống ấy sau 50 phút.
(b) Khi nào nhiệt độ của nó là 15^{o}C?

16. Một cốc cà phê vừa pha có nhiệt độ 95^{o}C trong căn phòng 20^{o}C. Khi cà phê xuống còn 70^{o}C, nó đang nguội với tốc độ 1^{o}C mỗi phút. Việc này xảy ra khi nào?

17. Tốc độ biến thiên của áp suất không khí P đối với độ cao h thì tỷ lệ với P, miễn là nhiệt độ không đổi. Ở 15^{o}C áp suất là 101.3 kPa ngay mực nước biển và 87.14 kPa tại độ cao h = 1000m.
(a) Tìm áp suất tại độ cao 3000m.
(b) Tìm áp suất tại đỉnh nút McKinley, có độ cao 6187 m.

18. (a) Nếu mượn 1000$ với lãi suất 8%, tìm số tiền phải trả sau 3 năm nếu lãi được tính kép

(i) hàng năm (ii) hàng quý
(iii) hàng tháng (iv) hàng tuần
(v) hàng ngày (vi) hàng giờ
(vii) liên tục

(b) Giả sử mượn 1000$ và lãi suất được tính kép liên tục. Nếu A(t) là số tiền phải trả sau t năm, trong đó $0 \le t \le 3$, vẽ đồ thị các hàm số A(t) ứng với các lãi suất 6%, 8%, và 10% trên cùng một khung hình.

19. (a) Nếu đầu tư 3000$ với lãi suất 5%, tìm giá trị số tiền vào cuối năm thứ 5 nếu lãi được tính kép

(i) hàng năm (ii) hàng nửa năm

(iii) hàng tháng (iv) hàng tuần

(v) hàng ngày (vii) liên tục

(b) Nếu A(t) là số tiền đầu tư ở thời điểm t trong trường hợp lãi kép liên tục, hãy viết một phương trình vi phân và điều kiện ban đầu mà A(t) thỏa.

20. (a) Bao lâu thì tiền đầu tư sẽ tăng gấp đôi giá trị nếu lãi suất là 6% và tính kép liên tục?

(b) Lãi suất hàng năm tương đương là bao nhiêu?

ĐÁP SỐ

1. About 235

3. (a) $100(4.2)^t$ (b) ≈ 7409 (c) $\approx 10{,}632$ bacteria/h
(d) $(\ln 100)/(\ln 4.2) \approx 3.2$ h

5. (a) 1508 million, 1871 million (b) 2161 million
(c) 3972 million; wars in the first half of century, increased life expectancy in second half

7. (a) $Ce^{-0.0005t}$ (b) $-2000 \ln 0.9 \approx 211$ s

9. (a) $100 \times 2^{-t/30}$ mg (b) ≈ 9.92 mg (c) ≈ 199.3 years

11. ≈ 2500 years **13.** (a) $\approx 137°$F (b) ≈ 116 min

15. (a) $13.\overline{3}°$C (b) ≈ 67.74 min

17. (a) ≈ 64.5 kPa (b) ≈ 39.9 kPa

19. (a) (i) \$3828.84 (ii) \$3840.25 (iii) \$3850.08
(iv) \$3851.61 (v) \$3852.01 (vi) \$3852.08
(b) $dA/dt = 0.05A$, $A(0) = 3000$

BÀI 3. 9. Biến Thiên Của Đại Lượng Liên Hệ

Nếu chúng ta bơm không khí vào quả bóng, cả thể tích và bán kính quả bóng đều tăng lên và tốc độ tăng của chúng có mối liên hệ nhau. Nhưng đo lường độ tăng thể tích một cách trực tiếp thì dễ dàng hơn đo tốc độ tăng của bán kính quả bóng.

Trong dạng bài toán này, mục đích là tính tốc độ tăng của một đại lượng theo độ tăng một đại lượng khác (mà việc đo lường thuận tiện hơn). Phương pháp chung là thiết lập một hệ thức giữa hai đại lượng rồi dùng qui tắc tính đạo hàm của hàm số hợp (Quy Tắc Dạy Xích) để tính đạo hàm của hai đại lượng theo thời gian t.

VÍ DỤ 1 Bơm không khí vào một quả cầu sao cho thể tích tăng với tốc độ 100 cm^3/s. Tìm tốc độ tăng của bán kính khi đường kính quả cầu là 50cm.

GIẢI Ta bắt đầu bằng cách nhận dạng hai sự kiện:

thông tin cho trước:

tốc độ tăng của thể tích không khí là 100 cm^3/s

và ẩn số:

tốc độ tăng của bán kính khi đường kính là 50 cm

Để biểu diễn những đại lượng này một cách toán học, ta giới thiệu một số kí hiệu:

Gọi V là thể tích quả bóng và r là bán kính của nó.

Điều then chốt là nhớ rằng tốc độ biến thiên chính là đạo hàm. Trong bài này, thể tích và bán kính đều là hàm số theo thời gian t. Tốc độ tăng của thể tích đối với thời gian chính là đạo hàm dV/dt, và tốc độ tăng của bán kính là dr/dt.

Cho trước: $dV/dt = 100 cm^3/s$

Ẩn số: dr/dt khi $r = 25$ cm

Để liên kết dV/dt và dr/dt, trước tiên ta liên kết V và r bằng công thức:

$$V = 4/3\pi r^3$$

Để sử dụng được thông tin cho trước, ta đạo hàm hai vế của phương trình này theo t. Đạo hàm vế phải, ta cần dùng Quy Tắc Dây Xích:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Tiếp theo ta giải để tìm ẩn số:

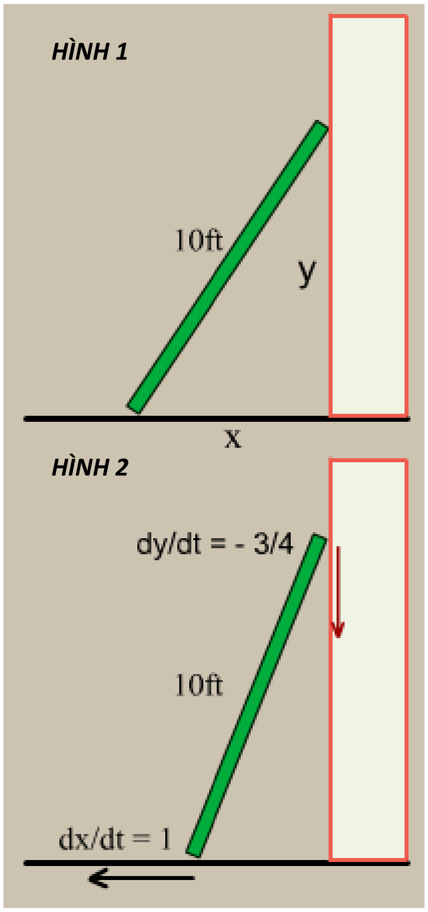
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Thay r = 25 và dV/dt = 100 vào phương trình này, ta được :

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi(25)^2}100=\frac{1}{25\pi}$$

Bán kính của quả bóng tăng với tốc độ $1/(25\pi) \approx 0.0127$ cm/s.

VÍ DỤ 2 Một cái thang dài 10 ft (bộ) dựa vào bức tường đứng. Nếu chân thang ra xa tường với vận tốc 1 ft/s, thế thì đầu thang trượt xuống tường với vận tốc là bao nhiêu khi chân thang cách tường 6 ft.



GIẢI Trước hết ta vẽ Hình 1. Gọi x (ft) là khoảng cách từ chân thang đến tường và y là khoảng cách từ đầu thang đến nền nhà. Chú ý x và y đều là hàm số theo thời gian t.

Chân thang trượt xa tường với vận tốc 1 ft/s có nghĩa là dx/dt = 1 ft/s (giả thiết). Ta phải tìm dy/dt khi x = 6 ft (xem Hình 2). Trong bài toán này liên hệ giữa x và y được cho bởi Định Lý Pitago :

$$x^2 + y^2 = 10^2 = 100$$

Lấy đạo hàm hai vế theo t, sử dụng Quy Tắc Dây Xích, ta được

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

Suy ra đại lượng cần tìm:

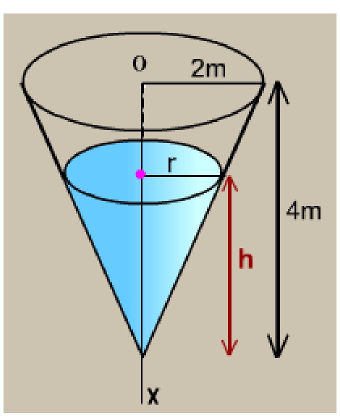
$$\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Thay x = 6 , Định Lý Pitago cho y = 8, thế những giá trị đã biết vào phương trình trên, ta được:

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{6}{8}(1)=-\frac{3}{4}\,ft/s$$

Giá trị âm có nghĩa là khoảng cách giữa đầu thang và nền nhà giảm dần với vận tốc 3/4 ft/s. Nói khác đi đầu thang trượt xuống tường với vận tốc 3/4 ft/s.

VÍ DỤ 3 Một tháp nước hình nón lật ngược có bán kính đáy là 2m và chiều cao là 4m . Nếu bơm nước vào tháp với tốc độ$2m^3$/phút , hãy tìm tốc độ mực nước đang dâng lên khi mực nước cao 3m.



GIẢI Gọi V, r, và h là thể tích khối nước, bán kính mặt nước, và chiều cao mực nước tại thời điểm t, tính bằng phút.

Ta biết dV/dt = 2 m^3/phút và ta phải tính dh/dt khi h = 3m.

Giữa V, h và r có hệ thức liên hệ là công thức thể tích khối nón, đó là

$$V = {}^1/_3\pi r^2 h$$

Nhưng ta cần tìm hệ thức giữa V và h mà thôi mới thuận tiện.
Để tính r, ta dùng tỉ lệ của hai tam giác đồng dạng như trong hình:

$$\frac{r}{2}=\frac{h}{4} \iff r = h/2$$

Và biểu thức thể tích thành $$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h=\frac{\pi}{12}h^3$$

Lấy đạo hàm hai vế theo t:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

Suy ra: $$\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Thế h = 3 m và dV/dt = 2 m^3/phút, ta được:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi(3)^2}.2=\frac{8}{9\pi}$$

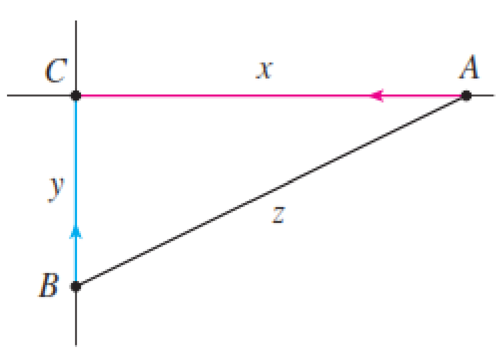
Nước dâng với vận tốc $8/9\pi \approx 0.28$m/phút.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI Qua các ví dụ trên, ta rút ra được các bước giải các bài toán thuộc dạng này như sau:

1. Đọc đề bài cẩn thận.
2. Vẽ hình nếu cần.
3. Đặt tên các đại lượng. Chúng là những hàm số theo thời gian.
4. Biểu diễn giả thiết (thông tin cho trước) và tốc độ biến thiên cần tìm theo đạo hàm.
5. Viết ra một phương trình nói lên mối liên hệ giữa những đại lượng khác nhau của bài toán. Nếu cần sử dụng kiến thức hình học để loại ra một biến bằng phép thế (như trong Ví dụ 3).
6. Sử dụng Quy Tắc Dây Xích để lấy đạo hàm hai vế của phương trình theo t.
7. Thế những thông tin cho trước vào kết quả trên và tìm ra tốc độ chưa biết cần tìm.

Các ví dụ tiếp sau sẽ minh họa thêm phương pháp vừa trình bày.

VÍ DỤ 4 Ô tô A di chuyển theo hướng tây với vận tốc 50 km/h còn ô tô B di chuyển hướng bắc vận tốc 60 km/h. Cả hai đều hướng về phía ngả tư. Tìm vận tốc mà hai xe tiến đến gần nhau khi ô tô A cách ngả tư 0,3 km còn ô tô B cách ngả tư 0,4km.



GIẢI Vẽ hình, với C là giao lộ hai con đường. Gọi x và y lần lượt là khoảng cách từ ô tô A và B đến ngả tư C và gọi z là khoảng cách giữa hai ô tô tại thời điểm t.

Theo đề bài dx/dt = - 50 (km/h) và dy/dt = - 60 (km/h) (giá trị âm vì x và y nghịch biến) . Ta phải tính dz/dt khi x = 0,3 và y = 0,4.

Phương trình liên kết x, y, và z cho bởi Theo Định Lý Pitago:

$z^2 = x^2 + y^2$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế theo t, ta có

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$hay \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) \ (2)$$

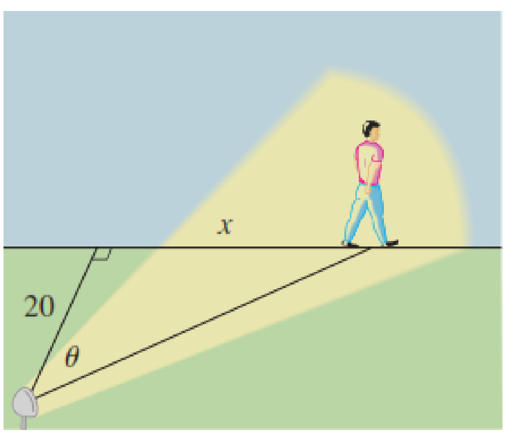
Thế x = 0. 3 km, y = 0. 4 km vào (1), được z = 0. 5 km
Khi đó (2) thành:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}\left[0.3(-50) + 0.4(-60)\right] = -78\ km/h \qquad = -78 \text{ km/h}$$

Các ô tô tiến gần nhau với tốc độ 78 km/h.

VÍ DỤ 5 Một người bước đi trên một đường thẳng với vận tốc 4 ft/s. Một đèn pha đặt ở mặt đất cách đường 20 ftvà luôn nhắm hướng chiếu vào người đó. Hỏi vận tốc góc của đèn pha khi người đó ở cách 15 ft so với điểm trên đường ở gần đèn nhất.

GIẢI Ta vẽ Hình 5. Gọi x là khoảng cách từ người đi đến điểm trên đường gần nhất với đèn chiếu. Gọi θ là góc tạo bởi hướng đèn chiếu với đường vuông góc với đường đi.



HÌNH 5

Theo đề bài thì (dx/dt) = 4 ft/s và ta phải tính (dθ/dt) khi x = 15. Hệ thức liên hệ giữa x và θ theo hình bên là:

$$x = 20\tan\theta$$

Lấy đạo hàm hai vế theo t, ta được

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Suy ra $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Khi x = 15, độ dài của luồng sáng là 25, suy ra cos θ = 4/5 ϖ◊

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

Vậy đèn pha quét với tốc độ 0.128 rad/

BÀI TẬP

1. Nếu V là thể tích của khối lập phương có cạnh là x và khối lập phương phình ra theo thời gian. Tìm dV/dt theo dx/dt

2. (a) Nếu A là diện tích của một hình tròn bán kính r và hình tròn nở rộng ra theo thời gian, tìm dA/dt theo dr/dt.

(b) Giả sử dầu đổ ra từ một thùng chứa bị dò rỉ và loang thành một hình tròn càng lúc càng to ra. Nếu bán kính của vết dầu loang tăng với tốc độ

1m/s, hỏi diện tích vết dầu loang tăng với tốc độ bao nhiêu lúc bán kính của nó là 30m?

3. Mỗi cạnh của hình vuông tăng với tốc độ 6 cm/s. Hỏi diện tích hình vuông tăng với tốc độ bao nhiêu khi diện tích của nó là 16 cm^2.

4. Chiều dài của một hình chữ nhật tăng với tốc độ 8 cm/s và chiều rộng tăng với tốc độ 3 cm/s. Khi chiều dài bằng 20 cm và chiều rộng bằng 10 cm, hỏi diện tích hình chữ nhật tăng với tốc độ bao nhiêu?

5. Một bồn hình trụ bán kính 5 m được bơm nước vào với tốc độ 3 m^3/phút. Hỏi chiều cao mực nước tăng với tốc độ bao nhiêu?

7. Biết $y = x^3 + 2x$ và $dx/dt = 5$, tìm dy/dt khi $x = 2$.

8. Nếu $x^2 + y^2 = 25$ và $dy/dt = 6$, tìm dx/dt khi $y = 4$.

9. Nếu $z^2 = x^2 + y^2$, $dx/dt = 2$ và $dy/dt = 3$, tìm dz/dt khi $x = 5$ và $y = 12$.

10. Một chất điểm chuyển động trên đường cong $y = \sqrt{1+x^3}$. Khi nó đến điểm (2, 3), tung độ của nó tăng với tốc độ 4 cm/s. Hỏi lúc đó hoành độ của nó biến thiên với tốc độ bao nhiêu?

11-14.

(a) Đại lượng nào được cho trước trong bài toán?

(b) Ẩn số là gì?

(c) Vẽ hình mô tả tình huống tại thời điểm t.

(d) Viết phương trình liên kết các đại lượng.

(e) Giải bài toán.

11. Một phi cơ bay ngang ở cao độ 1 dặm với vận tốc 500 dặm/h trực tiếp ngang qua một trạm rada. Tìm vận tốc thay đổi của khoảng cách từ phi cơ đến trạm rada khi khoảng cách này tăng dần lúc phi cơ bay cách trạm 2 dặm.

12. Một quả cầu tuyết tan chảy sao cho diện tích của nó giảm với tốc độ 1 cm^2/phút, tìm tốc độ giảm của đường kính khi đường kính bằng 10 cm.

13. Một ngọn đèn đường ở cách mặt đất 15 ft. Một người cao 6 ft đi xa cột đèn với vận tốc 5 ft/s trên một đường thẳng. Khi y cách cột 40 ft thì bóng của đầu y di chuyển với vận tốc bao nhiêu?

14. Giữa trưa, tàu A cách tàu B 150 km về hướng Tây. Tàu A đi về hướng Đông với vận tốc 35 km/h và tàu B đi hướng Bắc với vận tốc 25 km/h. Hỏi khoảng cách giữa hai tàu biến thiên với tốc độ bao nhiêu lúc 4:00 PM?

15. Hai ô tô khởi hành bắt đầu từ cùng một điểm, một đi về nam vận tốc 60 dặm/h, một đi về tây với vận tốc 25 dặm/h. Hỏi hai giờ sau khoảng cách giữa hai ôtô thay đổi với vận tốc bao nhiêu?

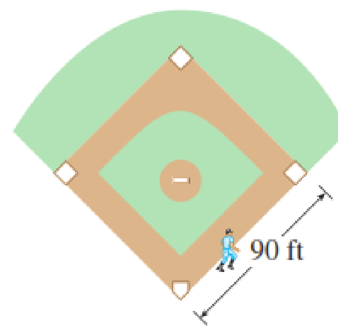
16. Một đèn chiếu đặt ở mặt đất rọi sáng một bức tường cách đó 12 m. Nếu một người đàn ông cao 2m đi từ đèn đến một tòa nhà với vận tốc 1.6 m/s, hỏi bóng của y in trên tòa nhà giảm với tốc độ bao nhiêu khi y cách tòa nhà 4 m?

17. Một ông bắt đầu đi về bắc vận tốc 4 ft/s từ điểm P. Năm phút sau, một bà bắt đầu đi về nam vận tốc 5ft/s từ một điểm cách P 500 ft về hướng đông. 15 phút sau khi bà ấy đi, hỏi khoảng cách giữa hai người thay đổi với tốc độ là bao nhiêu?

18. Một sân bóng chày hình vuông cạnh dài 90 ft. Người đập bóng đánh quả bóng rồi chạy về base đầu tiên với vận tốc 24 ft/s.

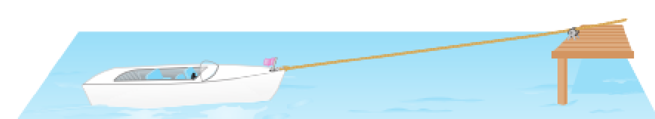
(a) Khoảng cách từ y đến base thứ hai giảm với tốc độ bao nhiêu khi y cách base đầu tiên được nửa đường?

(b) Ngay lúc đó, khoảng cách từ y đến base thứ ba tăng với tốc độ bao nhiêu?



19. Biết chiều cao một tam giác tăng với tốc độ 1 cm/phút trong khi diện tích tăng với tốc độ 2 cm^2/phút, hỏi tốc độ biến thiên của cạnh đáy khi chiều cao là 10 cm và diện tích là 100 cm^2.

20. Một ca nô được kéo vào bờ bằng một dây thừng, một đầu buộc vào mũi ca nô , đầu kia buộc vào ròng rọc ở trên bờ, cao hơn mũi ca nô 1 mét. Nếu ta kéo dây với tốc độ 1m/s, hỏi tốc độ mà ca nô tiến vào bờ khi nó cách bờ 8 m.



21. Giữa trưa, tàu A ở phía tây của tàu B và cách nó 100 km. Tàu A đang đi về hướng nam với vận tốc 35 km/h và tàu B đi về hướng bắc với vận tốc 25 km/h. Hỏi khoảng cách giữa hai tàu biến thiên với tốc đô bào nhiêu?

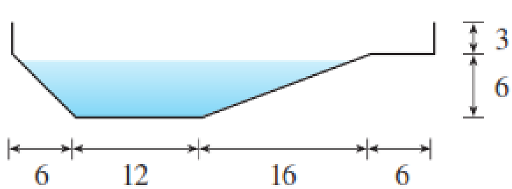
22. Mộ chất điểm di chuyển trên đường cong y = $\sqrt{x}$. Khi chất điểm qua điểm (4, 2), hoành độ của nó tăng với tốc độ 3 cm /s. Hỏi khoảng cách từ nó đến điểm gốc biến thiên với tốc độ bao nhiêu ngay lúc đó?

23. Nước rò rĩ ra khỏi bồn chứa với tốc độ 10.000 cm^3/phút, cùng một lúc nước được bơm vào bồn với lưu lượng không đổi. Bồn có dạng hình nón lật ngược, chiều cao 6 m và đường kính miệng là 4 m. Biết mực nước dâng với tốc độ 20 cm/phút khi chiều cao mực nước là 2m, hỏi lưu lượng nước được bơm vào bồn là bao nhiêu?

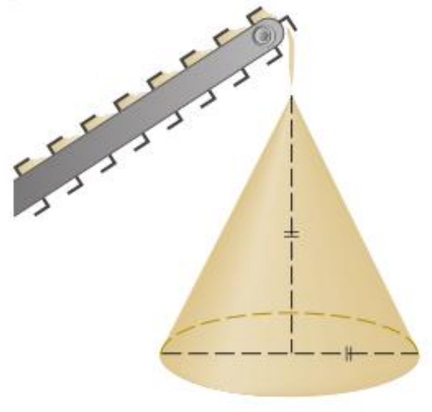
24. Một máng nước dài 10 ft và có thiết diện là hình tam giác cân ()lật ngược) cạnh đáy 3 ft, và chiều cao 1 ft. Nếu máng được bơm nước vào với lưu lượng 12 ft^3/phút, hỏi tốc độ dâng lên của mực nước khi mực nước cao 0. 5 ft.

2**5.** Một máng nước dài 10 m và có thiết diện là hình thang cân đáy dưới 30 cm, đáy trên 80 cm và chiều cao 50 cm. Nếu máng được bơm nước vào với lưu lượng 0, 2 m^3/phút, hỏi vận tốc dâng lên của mực nước khi mực nước cao 30 cm.

2**6.** Một hồ bơi 20 ft rộng, 40 ft dài, chỗ nông nhất là 3 ft và chỗ sâu nhất 9 ft. Thiết diện của hồ cho bởi hình dưới. Nếu hồ bơi được bơm nước vào với lưu lượng 0, 8 ft^3/phút, hỏi vận tốc dâng lên của mực nước khi mực nước cao 5 ft ở đầu hồ sâu nhất.



27. Xà bần được đổ xuống qua một băng chuyền với lưu lượng 30 ft^3/phút và tạo thành một khối nón có chiều cao luôn bằng đường kính đáy. Hỏi đỉnh của đống xà bần lên cao với tốc độ bao nhiêu khi chiều cao của nó là 10 ft



28. Một co diều cách mặt đất 100 ft bay ngang với vận tốc 8 ft/s. Góc giữa dây diều và đường nằm ngang giảm với tốc độ bào nhiêu khi dây đã thả đến 200 ft?

29. Hai cạnh của tam giác không đổi bằng 4 m và 5 m. Góc xen giữa hai cạnh ấy tăng với tốc độ 0,06 rad/s. Hỏi tốc độ tăng của diện tích khi góc nói trên là π/3.

30. Góc giữa thang và mặt đất biến thiên với tốc độ bao nhiêu trong Ví dụ 2 khi đáy thang cách tường 6 ft?

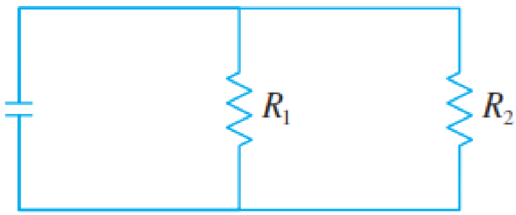
31. Định luật Boyle nói rằng khi một chất khí bị nén ở một nhiệt độ nào đó thì thể tích V và áp suất P thỏa mãn hệ thức PV = C, trong đó C là một hằng số. Giả sử tại một thời điểm nào đó thể tích là 600 cm^3, áp suất là 150 kPa, và áp suất tăng với tốc độ 20 kPa/phút, thế thì thể tích của chất khí giảm với tốc độ bao nhiêu?

32. Khi chất khí giãn nở mà không thu hay mất nhiệt, áp suất P và thể tích V liên hệ bằng công thức $PV^{1.4} = C$, trong đó C là hằng số. Giả sử tại một thời điểm nào đó thể tích là 400 cm^3 và áp suất là 80 kPa và đang giảm với tốc độ 10 kPa/phút. Hỏi thể tích tăng với tốc độ là bao nhiêu tại thời điểm này?

33. Nếu hai điện trở R_1 và R_2 mắc song song như trong hình thì tổng trở R, tính bằng ohm cho bởi công thức

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

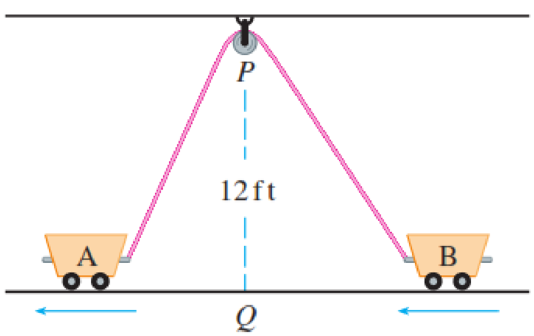
Biết R_1, R_2 lần lượt tăng với tốc độ 0, 3 ohm/s và 0,2 ohm/s , thế thì tốc độ biến thiên của R là bao nhiêu khi R_1 = 80 ohmvà R_2 = 100 ohm.



34. Trọng lượng của bộ não B của cá là một hàm số theo cân nặng W của cơ thể theo mô hình $B = 0.007W^{2/3}$, trong đó B và W tính bằng gram. Một mô hình cho trọng lượng cơ thể là hàm số theo chiều dài thân L (tính bằng cm) là $W = 0.12L^{2.53}$. Nếu qua 10 triệu năm, chiều dài trung bình của một loài cá nào đó tiến hóa từ 15 cm đến 20 cm với tốc độ không đổi, hỏi bộ não của loài cá này tăng nhanh cỡ nào khi chiều dài trung bình là 18 cm?

35. Hai cạnh của tam giác có độ dài 12 m và 15 m. Góc giữa chúng tăng với tốc độ 2^o/phút. Hỏi độ dài cạnh thứ ba tăng với tốc độ bao nhiêu khi góc của hai cạnh kia là 60^o?

36. Hai toa, A và B, nối nhau bằng một dây kéo dài 19 ft, vắt qua một ròng rọc P (xem hình). Điểm Q nằm trên mặt đất cách P 12 ft ngay bên dưới và giữa hai toa. Toa B đi về phía Q nhanh cỡ nào khi toa A cách Q 5 ft?



37. Một camera truyền hình ở cách bệ phóng tên lửa 4000 ft. Góc nâng của camera phải điều chỉnh chính xác để lúc nào cũng theo dõi được tên lửa. Tương tự, cơ chế nhắm rõ của camera cũng phải kể đến vì khoảng cách giữa camera và tện lửa luôn tăng lên. Giả định tên lửa lên thẳng đứng với vận tốc 600 ft/s khi đạt độ cao 3000 ft.

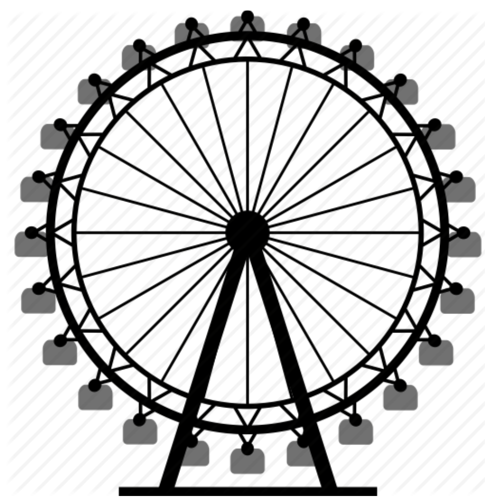
(a) Khoảng cách giữa camera và tên lửa biến thiên với tốc độ bao nhiêu ngay lúc đó?

(b) Nếu camera luôn nhắm vào tên lửa, hỏi góc nâng của camera quay nhanh cỡ nào ngay lúc đó?

38. Một hải đăng tọa lạc trên một hòn đảo cách điểm gần nhất P trên bờ biển thẳng băng và ánh sáng của nó mỗi phút quay bốn vòng. Hỏi tia sáng quét dọc bờ biển với vận tốc bao nhiêu khi nó cách P 1 km?

39. Một phi cơ bày nằm ngang ở cao độ 5 km và đi ngang trên đỉnh đầu một viễn vọng kính theo dõi đặt trên mặt đất. Khi góc nâng là $\pi/3$, góc này giảm với vận tốc $\pi/6$ rad/phút. Hỏi phi cơ đi với vận tốc bao nhiêu ngay lúc đó?

40. Bánh Ferris có bán kính 10 m quay với vận tốc là một vòng mỗi 2 phút. Một người ngồi trên bánh xe khi y cách mặt đất 16 m sẽ quay với vận tốc là bao nhiêu?



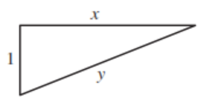
41. Một phi cơ đang bay với vận tốc 300 km/h qua một trạm rađa dưới mặt đất ở cao độ 1km và bắt đầu bay chếch lên với góc 30^o. Hỏi một phút sau, khoảng cách giữa phi cơ và trạm rađa tăng với tốc độ bao nhiêu?

42. Hai người khởi hành từ cùng một điểm xuất phát. Một người đi về hướng đông với vận tốc 3 dặm/h còn người kia đi về hướng đông bắc với vận tốc 2 dặm/h. Hỏi khoảng cách giữa họ biến thiên với tốc độ bao nhiêu sau 15 phút ra đi?

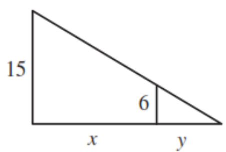
43. Một vận động viên chạy quanh vòng đua tròn bán kính 100 m với vận tốc 7 m/s. Bạn của y đứng ở tại điểm cách tâm vòng đua một khoảng 200 m. Khoảng cách giữa hai người thay đổi với vận tốc bao nhiêu khi hai người cách nhau 200 m.

44. Kim phút trên một đồng hồ dài 8 mm và kim giờ dài 4 mm. Khoảng cách giữa hai đầu kim biến thiên với tốc độ bao nhiêu khi đồng hồ chỉ một giờ.

ĐÁP SỐ

1. $dV/dt = 3x^2\, dx/dt$ **3.** $48\ \text{cm}^2/\text{s}$ **5.** $3/(25\pi)$ m/min
7. 70 **9.** $\pm\frac{46}{13}$
11. (a) The plane's altitude is 1 mi and its speed is 500 mi/h.
(b) The rate at which the distance from the plane to the station is increasing when the plane is 2 mi from the station
(c)


(d) $y^2 = x^2 + 1$
(e) $250\sqrt{3}$ mi/h

13. (a) The height of the pole (15 ft), the height of the man (6 ft), and the speed of the man (5 ft/s)
(b) The rate at which the tip of the man's shadow is moving when he is 40 ft from the pole
(c)


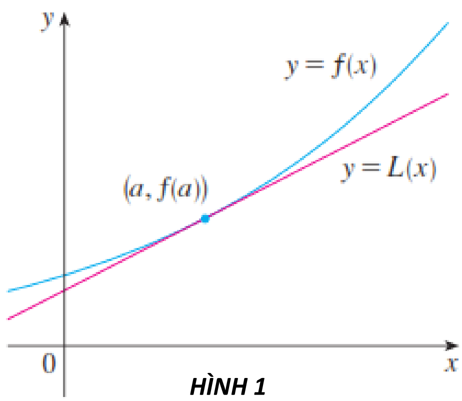
(d) $\dfrac{15}{6} = \dfrac{x+y}{y}$ (e) $\frac{25}{3}$ ft/s

15. 65 mi/h **17.** $837/\sqrt{8674} \approx 8.99$ ft/s
19. -1.6 cm/min **21.** $\frac{720}{13} \approx 55.4$ km/h
23. $(10{,}000 + 800{,}000\pi/9) \approx 2.89 \times 10^5\ \text{cm}^3/\text{min}$
25. $\frac{10}{3}$ cm/min **27.** $6/(5\pi) \approx 0.38$ ft/min **29.** $0.3\ \text{m}^2/\text{s}$
31. $80\ \text{cm}^3/\text{min}$ **33.** $\frac{107}{810} \approx 0.132\ \Omega/\text{s}$ **35.** 0.396 m/min
37. (a) 360 ft/s (b) 0.096 rad/s **39.** $\frac{10}{9}\pi$ km/min
41. $1650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h **43.** $\frac{7}{4}\sqrt{15} \approx 6.78$ m/s

Bài 3.10. Tính Xấp Xỉ Bậc Nhất Và Vi Phân

Ta đã biết rằng một đường cong nằm rất sát vào tiếp tuyến của nó tại vùng ở gần tiếp điểm. Đúng ra, nếu ta phóng to vùng chứa một điểm trên đồ thị của một hàm số khả vi, ta nhận xét rằng đồ thị càng lúc càng trông như tiếp tuyến của nó. Nhận xét này là nền tảng của phương pháp tìm ra giá trị xấp xỉ của một hàm số.

Ý tưởng là có thể tính dễ dàng giá trị f(a) của một hàm số, nhưng khó (hoặc thậm chí không thể) tính được những giá trị của f ở gần a. Vì thế ta sử dụng những giá trị dễ tính hơn của một hàm số bậc nhất L mà đồ thị của nó chính là tiếp tuyến của f tại điểm (a, f(a)) (Xem Hình 1)



HÌNH 1

Nói cách khác, ta dùng đường tiếp tuyến của f tại (a, f(a)) như một giá trị xấp xỉ của của đường cong y = f(x) khi x gần a. Phương trình của tiếp tuyến này là

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

và giá trị xấp xỉ là

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$

được gọi là **giá trị xấp xỉ bậc nhất hoặc giá trị xấp xỉ tiếp tuyến** của f tại a. Hàm số mà đồ thị là đường tiếp tuyến này, cụ thể là,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2)$$

được gọi là **hàm số tuyến tính hóa** của f tại a.

VÍ DỤ 1 Tìm hàm số tuyến tính hóa của hàm số f(x) = $\sqrt{x+3}$ tại a = 1 và sử dụng hàm số này để tính xấp xỉ những giá trị $\sqrt{3.98}$ và $\sqrt{4.05}$. Những giá trị gần đúng này lớn hơn hay nhỏ hơn giá trị đúng?

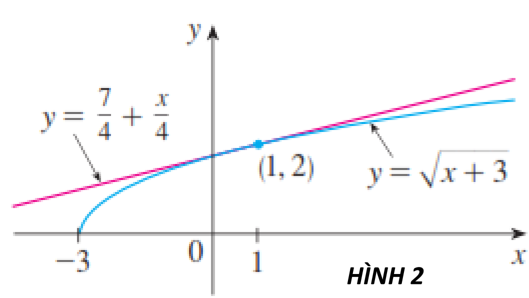
GIẢI Đạo hàm của $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ là

$$f'(x) = ½ /(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

và vì thế ta có f(1) = 2 và f '(1) = 1/4. Thế những giá trị này vào Phương trình 2 , ta được phương trình tuyến tính hóa là

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + {}^{1}/_{4}(x - 1)$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$



HÌNH 2

và giá trị xấp xỉ bậc nhất tương ứng (1) là

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(khi x gần bằng 1)}$$

Đặc biệt, ta có: $$\sqrt{3.98} \approx \frac{7}{4} + \frac{0.98}{4} = 1.995$$

và $$\sqrt{4.05} \approx \frac{7}{4} + \frac{1.05}{4} = 2.015$$

Các giá trị xấp xỉ bậc nhất được minh họa trong Hình 2 Ta thấy rằng thật ra các giá trị xấp xỉ bậc nhất là các giá trị gần đúng tốt đối với hàm số đã cho khi x gần bằng 1. Ta cũng thấy rằng các giá trị xấp xỉ của ta lớn (trội) hơn giá trị đúng vì tiếp tuyến nằm trên đồ thị .

Dĩ nhiên, một máy tính có thể cho ta một giá trị xấp xỉ của $\sqrt{3.98}$ và $\sqrt{4.05}$, nhưng công thức giá trị xấp xỉ bậc nhất cho ta cách tính xấp xỉ trên cả một khoảng.

Trong bảng dưới ta so sánh những giá trị trong phép tính xấp xỉ bậc nhất trong Ví dụ 1 với giá trị đúng. Nhận xét dựa vào bảng này cũng như từ hình trên là phép tính xấp xỉ bậc nhất chỉ cho những giá trị gần đúng tốt khi x gần bằng 1 nhưng độ chính xác sẽ càng tệ hại khi x càng xa 1.

	x	From $L(x)$	Actual value
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

Phép tính xấp xỉ mà ta thực hiện trong Ví dụ 1 tốt cỡ nào? Ví dụ sau cho ta thấy rằng dùng máy tính ta có thể xác định một khoảng qua đó phép tính xấp xỉ bậc nhất cung cấp cho ta một độ chính xác cụ thể nào đó.

VÍ DỤ 2 Với giá trị nào của x thì phép tính xấp xỉ bậc nhất

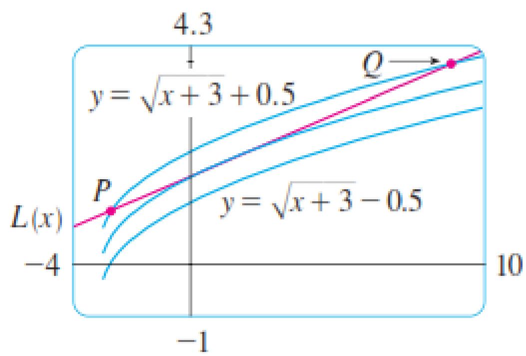
$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

chính xác đến 0.5? Chính xác đến 0.1 thì thế nào?

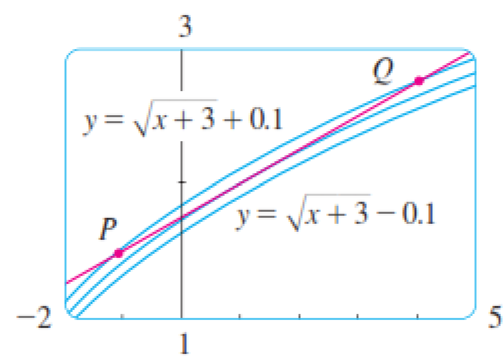
GIẢI Độ chính xác đến 0.5 có nghĩa là hàm số chỉ cho giá trị với độ khác biệt ít hơn 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

Hay
$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$



HÌNH 3



HÌNH 4

Điều này có nghĩa đường tiếp tuyến L(x) nằm giữa 2 đường cong có được bằng cách tịnh tiến đường cong y = $\sqrt{x+3}$ lên và xuống một lượng 0.5. Hình 3 cho thấy tiếp tuyến y = (7 + x)/4 cắt đường cong ở trên y = $\sqrt{x+3} + 0.5$ tại P và Q. Phóng to và dùng con trỏ, ta có thể ước tính hoành độ của P là khoảng – 2.66 và của Q là khoảng 8.66. Do đó từ Hình 4 ta thấy phép tính xấp xỉ

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

chính xác đến 0.5 khi – 2.6 < x < 8.6.(Ta đã làm tròn cho an toàn.)

Tương tự, cũng từ Hình 4, ta thấy phép tính xấp xỉ trên chính xác đến 0.1 khi – 1.1 < x < 3.9.

ÁP DỤNG VÀO VẬT LÝ

Tính xấp xỉ bậc nhất thường sử dụng trong vật lý. Trong việc phân tích các kết quả của một phương trình , nhà vật lý đôi khi cần đơn giản hóa một hàm số bằng cách thay thế nó với giá trị xấp xỉ bậc nhất của nó. Chẳng hạn, khi rút ra công thức chu kỳ của một quả lắc, các sách giáo khoa vật lý đưa ra biểu thức của gia tốc tiếp tuyến $a_T = -g\sin\theta$ và rồi thay thế $\sin\theta$ bằng θ với chú thích là $\sin\theta$ rất gần với θ nếu góc θ không quá lớn. Bạn có thể kiểm chứng là hàm số tuyến tính hóa của f(x) = sin x tại a = 0 là L(x) = x và như thế xấp xỉ bậc nhất tại 0 là

$$\sin x \approx x$$

Và như thế công thức chu kỳ của con lắc đã sử dụng sự xấp xỉ tuyến tính của hàm sin.

Một ví dụ khác xảy ra trong quang học, trong định luật khúc xạ, ta có công thức sini = nsinr đã được thay thế bằng công thức đơn giản hơn là i = nr khi góc tới i và góc khúc xạ r đều nhỏ.

VI PHÂN

Ý tưởng đằng sau phép tính xấp xỉ bậc nhất đôi khi được công thức hóa dưới thuật ngữ và ký hiệu của vi phân. Nếu y = f(x), trong đó f là hàm số khả vi, thì **vi phân** dx là một biến số độc lập, nghĩa là có thể lấy bất cứ giá trị thực nào. **Vi phân** dy được định nghĩa theo dx như sau

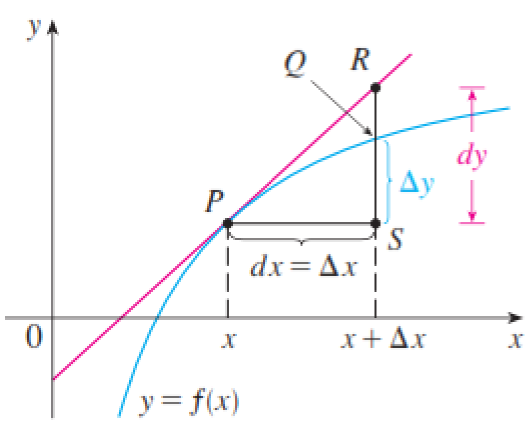
3 $$dy = f'(x)dx$$

Vì thế dy là một biến phụ thuộc; nó phụ thuộc vào giá trị của x và dx. Nếu cho dx một giá trị đặc biệt và x lấy một giá trị đặc biệt nào đó trong tập xác định của f, thế thì giá trị của dy được xác định.

Ý nghĩa hình học của vi phân được minh họa trong Hình 5 . Cho P(x, f(x)) và Q(x + Δx, f(x + Δx)) là các điểm trên đồ thị của f và đặt dx = Δx. Gia số tương ứng của y là

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Độ dốc của tiếp tuyến PR là đạo hàm f '(x) . Do đó khoảng cách đại số từ S đến R là f '(x)dx = dy. Do đó dy biểu thị đại lượng mà tiếp tuyến đi lên hoặc xuống thấp (sự biến thiên tuyến tính) , trong khi Δy biểu thị đại lượng mà đường cong y = f(x) đi lên hoặc xuống thấp khi x biến thiên một lượng dx.



HÌNH 5 *Nếu dx ≠ 0 ta có thể chia hai vế của (3) cho dx và được*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Trước kia đây chỉ là một ký hiệu nhưng từ giờ có thể xem đó là một tỷ số của hai vi phân.

VÍ DỤ 3 So sánh những giá trị Δy và dy nếu $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ và x biến thiên

(a) từ 2 đến 2. 05 (b) từ 2 đến 2. 01

GIẢI

(a) Ta có: $f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) - 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

Tổng quát, $dy = f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)dx$

Khi x = 2 và dx = Δx = 0. 05, biểu thức này thành

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]\, 0.05 = 0.7$$

(b) $f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) - 1 = 9.140701$

$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$

Khi dx = Dx = 0. 01,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]\, 0.01 = 0.14$$

Nhận xét rằng giá trị xấp xỉ Δy ≈ dy sẽ tốt hơn khi Δx càng nhỏ . Cũng chú ý rằng dy dễ tính hơn Δy. Đối với những hàm số phức tạp hơn đôi khi không thể tính Δy một cách chính xác. Trong những trường hợp như thế tính xấp xỉ bằng vi phân đặc biệt hữu dụng.

Trong ký hiệu của vi phân, tính xấp xỉ bậc nhất (1) có thể viết thành

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Chẳng hạn, đối với hàm số f(x) = $\sqrt{x+3}$ trong ví dụ 1, ta có:

$$dy = f'(x)dx = \frac{dx}{2\sqrt{x+3}}$$.

Nếu a = 1 và dx = Δx = 0.05, thì

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1+3}} = 0.0125$$

và $\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$

đúng như ta đã tìm trong Ví dụ 1.

Ví dụ cuối cùng của ta minh họa cách sử dụng vi phân trong việc ước lượng sai số xảy ra khi tính bằng giá trị gần đúng.

VÍ DỤ 4 Bán kính một khối cầu đo được là 21 cm với sai số cho phép lớn nhất là 0.05 cm. Tìm sai số lớn nhất khi sử dụng giá trị này của bán kính để tính thể tích của khối cầu.

GIẢI Nếu bán kính quả cầu là r , thì thể tích là $V = 4/3\pi r^3$. Nếu sai số trong phép đo r được chỉ bằng dr = Δr, thế thì sai số tương ứng trong phép tính giá trị của V là ΔV, được tính bằng vi phân

$$dv = 4\pi r^2 dr$$

Khi r = 21 và dr = 0.05, ta được

$$dV = 4\square(21)^2\, 0.05 \approx 277$$

Vậy sai số tối đa trong phép tính thể tích là khoảng 277 cm3.

CHÚ THÍCH Mặc dù sai số trong Ví dụ 4 có vẽ hơi lớn, nhưng bức tranh sai số sẽ khá hơn khi ta tính **sai số tương đối**, có được bằng cách chia sai số cho thể tích :

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^3 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}$$

Do đó sai số tương đối khi tính thể tích chỉ vào khoảng ba lần sai số tương đối của bán kính. Sai số tương đối của bán kính xấp xỉ bằng dr/r = 0.05/21 ≈ 0.0024, suy ra sai số tương đối của thể tích là khoảng 0.007. Những sai số này cũng có thể biểu diễn thành sai số bách phân là 0.24 % đối với bán kính và 0.7 % đối với thể tích.

BÀI TẬP

1-4. Tìm hàm số tuyến tính hóa L(x) của hàm số tại a.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2$, a = - 1 **2.** f(x) = ln x, a = 1

3. f(x) = cos x, a = π/2 **4.** $f(x) = x^{3/4}$, a = 16

5. Tìm xấp xỉ bậc nhất của hàm số f(x) = $\sqrt{1-x}$ tại a = 0 và dùng nó để tính giá trị xấp xỉ của $\sqrt{0.9}$ và $\sqrt{0.99}$. Minh họa bằng cách vẽ đồ thị hàm số f và tiếp tuyến.

6. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm số g(x) = $\sqrt[3]{1+x}$ tại a = 0 và dùng nó để tính giá trị xấp xỉ của $\sqrt[3]{0.95}$ và $\sqrt[3]{1.1}$. Minh họa bằng cách vẽ đồ thị hàm số g và tiếp tuyến.

7-10. Kiểm nghiệm phép tính xấp xỉ bậc nhất cho trước tại a = 0. Rồi xác định những giá trị của x sao cho phép tính xấp xỉ bậc nhất chính xác đến 0.1.

7. $\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{3}x$ **8.** tan x ≈ x

9. $1/(1 + 2x)^4 \approx 1 - 8x$ **10.** $e^x \approx 1 + x$

11-14. Tìm vi phân các hàm số sau.

11. (a) $y = x^2 \sin 2x$ (b) $y = \ln\sqrt{1 + t^2}$

12. (a) $y = s/(1 + 2s)$ (b) $y = e^{-u}\cos u$

13. (a) $y = \dfrac{u+1}{u-1}$ (b) $y = (1 + r^3)^{-2}$

14. (a) $y = e^{\tan \pi t}$ (b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

15-18. (a) Tìm vi phân dy và (b) tính dy với những giá trị cho trước của x và dx.

15. $y = e^{x/10}$, $x = 0$, $dx = 0.1$

16. $y = 1/(x + 1)$, $x = 1$, $dx = -0.01$

17. $y = \tan x$, $x = \pi/4$, $dx = -0.1$

18. $y = \cos x$, $x = \pi/3$, $dx = 0.05$

19-22. Tính Δy và dy với những giá trị cho trước của x và dx = Δx. Rồi phác họa giãn đồ như Hình 5 cho thấy các đoạn có độ dài dx, dy, và Δy.

19. $y = 2x - x^2$, x = 2, Δx = - 0.4

20. y = $\sqrt{x}$, x = 1, Δx = 1

21. y = 2/x, x = 4, Δx = 1

22. $y = e^x$, x = 0, Δx = 0.5

23-28. Dùng xấp xỉ tuyến tính (hay vi phân) để ước tính số cho trước.

23. $(2.001)^5$ **24.** $e^{-0.015}$

25. $(8.06)^{2/3}$ **26.** 1/1002

27. tan 44° **28.** $\sqrt{99.8}$

29-31. Giải thích, bằng phép tính xấp xỉ bậc nhất hay vi phân, tại sao những giá trị xấp xỉ đã cho là hợp lý.

29. sec 0.08 ≈ 1 **30.** $(1.01)^6 \approx 1.06$

31. ln 1.05 ≈ 0.05

32. Cho $f(x) = (x - 1)^2$ $g(x) = e^{-2x}$

và h(x) = 1 + ln(1 – 2x)

(a) Tìm hàm số tuyến tính hóa của f, g và h tại a = 0. Bạn nhận xét điều gì? Bạn giải thích thế nào về điều đó?
(b) Vẽ đồ thị f, g, và h và phép tính xấp xỉ bậc nhất của chúng. Đối với hàm số nào thì phép tính xấp xỉ bậc nhất là tốt nhất? Là kém nhất? Giải thích.

33. Cạnh một khối lập phương đo được 30 cm với sai số phép đo 0.1 cm. Dùng vi phân để ước tính sai số tối đa có thể, sai số tương đối, và sai số phần trăm khi tính (a) thể tích khối lập phương và (b) diện tích khối lập phương.

34. Bán kính của một đĩa tròn được đo là 24 cm với sai số tối đa 0.2 cm.
(a) Dùng vi phân để ước tính sai số tối đa khi tính diện tích đĩa tròn.
(b) Sai số tương đối là bao nhiêu? Sai số phần trăm là bao nhiêu?

35. Chu vi hình cầu đo được 84 cm với sai số có thể là 0.5 cm.
(a) Dùng vi phân để ước tính sai số tối đa khi tính diện tích mặt cầu. Tìm sai số tương đối.
(b) Dùng vi phân để ước tính sai số tối đa khi tính thể tích. Tìm sai số tương đối.

36. Dùng vi phân để ước tính lượng sơn cần để tô một lớp dày 0.05 cm cho một vòm hình bán cầu có đường kính 50 m.

37. (a) Dùng vi phân để tìm công thức tính xấp xỉ thể tích của một lớp vỏ hình trụ mỏng có chiều cao h, bán kính trong r và độ dày Δr.
(b) Tìm sai số gặp phải khi dùng công thức ở phần (a).

38. Một cạnh của tam giác vuông có độ dài đo được 20 cm và góc đối diện đo được 30^o, với sai số có thể là $\pm 1^o$.
(a) Dùng vi phân để ước tính sai số khi tính độ dài cạnh huyền.
(b) Sai số phần trăm là bao nhiêu?

39. Nếu dòng điện có cường độ I đi qua một điện trở R, Định luật Ohm nói rằng hiệu điện thế V = RI. Nếu V không đổi và R được đo với sai số nào đó, dùng vi phân để chứng tỏ rằng sai số tương đối khi tính I xấp xỉ bằng sai số tương đối khi đo R.

40. Khi máu chảy qua một mạch máu, thông lượng F (thể tích của máu đi qua một điểm cho trước trong mỗi đơn vị thời gian) thì tỷ lệ với lũy thừa bậc bốn của bán kính R của mạch máu:

$$F = kR^4$$

(Đây chính là Định Luật Poiseuille). Một động mạch bị nghẽn từng phần có thể được nông rộng ra bằng cách bơm phần vách trong của động mạch để phục hồi sự lưu thông bình thường của máu.

Chứng tỏ rằng biến thiên tương đối của F gấp khoảng bốn lần biến thiên tương đối của R. Nếu bán kính mạch máu tăng 5 % thì sẽ ảnh hưởng thế nào đối với sự lưu thông của máu.

41. Thiết lập những quy tắc sau đây của phép tính vi phân (trong đó c chỉ hằng số và u và v là những hàm số theo x).

(a) dc = 0 (b) d(cu) = cdu

(c) d(u + v) = du + dv (d) d(uv) = udv + vdu

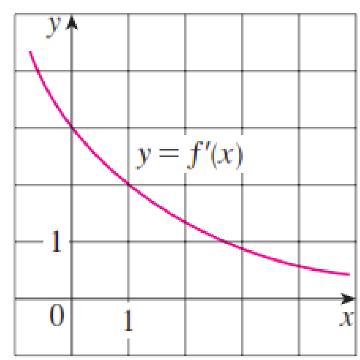
(e) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ (f) $d(x^n = nx^{n-1}dx$

42. (a) Kiểm nghiệm phép xấp xỉ bậc nhất tại 0 đối với hàm số sin x:

$$\sin x \approx x$$

(b) Dùng máy tính để xác định những giá trị của x sao cho sin x và x khác nhau không quá 2 %.

43. Giả sử thông tin duy nhất mà ta có về hàm số f là f(1) = 5 và đồ thị của đạo hàm của nó được cho trong hình bên.



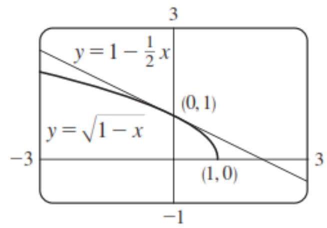
(a) Dùng phép xấp xỉ bậc nhất để ước tính f(0.9) và f(1.1).
(b) Ước tính của bạn ở phần (a) quá lớn hay quá nhỏ? Giải thích.

44. Giả sử ta không có công thức của g(x) nhưng ta biết là g(2) = - 4 và g'(x) = $\sqrt{x^2+5}$ với mọi x.
(a) Dùng phép xấp xỉ bậc nhất để ước tính g(1.95) và g(2.05).
(b) Ước tính của bạn trong phần (a) quá lớn hay quá nhỏ? Giải thích.

ĐÁP SỐ

1. $L(x) = -10x - 6$ **3.** $L(x) = -x + \pi/2$

5. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;
$\sqrt{0.9} \approx 0.95$,
$\sqrt{0.99} \approx 0.995$



7. $-1.204 < x < 0.706$ **9.** $-0.045 < x < 0.055$

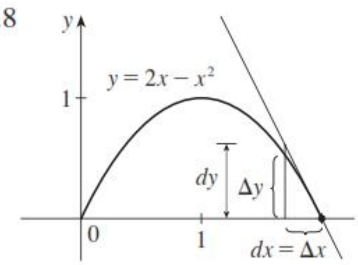
11. (a) $dy = 2x(x\cos 2x + \sin 2x)\,dx$ (b) $dy = \dfrac{t}{1+t^2}\,dt$

13. (a) $dy = \dfrac{-2}{(u-1)^2}\,du$ (b) $dy = -\dfrac{6r^2}{(1+r^3)^3}\,dr$

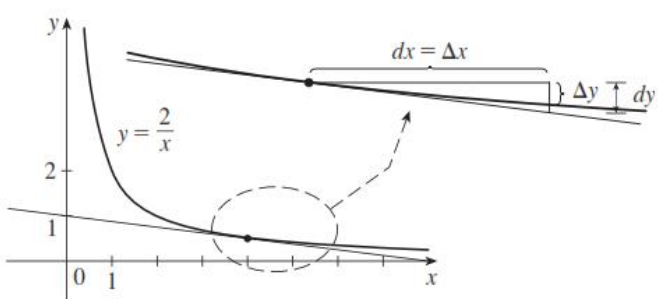
15. (a) $dy = \frac{1}{10}e^{x/10}\,dx$ (b) 0.01; 0.0101

17. (a) $dy = \sec^2 x\,dx$ (b) -0.2

19. $\Delta y = 0.64$, $dy = 0.8$



21. $\Delta y = -0.1$, $dy = -0.125$



23. 32.08 **25.** 4.02 **27.** $1 - \pi/90 \approx 0.965$

33. (a) 270 cm^3, 0.01, 1% (b) 36 cm^2, $0.00\overline{6}$, $0.\overline{6}\%$

35. (a) $84/\pi \approx 27\text{ cm}^2$; $\frac{1}{84} \approx 0.012$
(b) $1764/\pi^2 \approx 179\text{ cm}^3$; $\frac{1}{56} \approx 0.018$

37. (a) $2\pi rh\,\Delta r$ (b) $\pi(\Delta r)^2 h$

43. (a) 4.8, 5.2 (b) Too large

ÔN CHƯƠNG 3

KIỂM TRA KHÁI NIỆM

1. Phát biểu các Quy Tắc ĐạoHàm bằng lời cũng như bằng ký hiệu.

(a) Quy Tắc Lũy Thừa (b) Quy Tắc Nhân Hằng Số

(c) Quy Tắc Cộng (d) Quy Tắc TRừ

(e) Quy Tắc Nhân (f) Quy Tắc Chia

(g) Quy Tắc Dây Xích

2. Phát biểu đạo hàm các hàm số sau.

(a) y = x^n (b) y = e^x (c) y = a^x

(d) y = ln x (e) y = $\log_a x$ (f) y = sin x

(g) y = cos x (h) y = tan x (i) y = csc x

(j) y = sec x (k) y = cot x (l) y = $\sin^{-1}x$

(m) y = $\cos^{-1}x$ (n) y = $\tan^{-1}x$

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG-SAI

Xác định các phát biểu sau đúng hay sai. Nếu đúng, giải thích tại sao. Nếu sai, giải thích tại sao hoặc nêu một ví dụ để phản bác phát biểu đó.

1. Nếu f và g khả vi, thì

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$$

2. Nếu f và g khả vì thì

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Nếu f và g khả vi thì

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Nếu f khả vi thì

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

5. Nếu f khả vi thì

$$\frac{d}{dx}f(\sqrt{x}) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$$

6. Nếu y = e^2 thì y ’ = 2e.

7. $\frac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$.

8. $\frac{d}{dx}(\ln 10) = \frac{1}{10}$.

9. $\frac{d}{dx}(\tan^2 x) = \frac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\frac{d}{dx}|x^2+x| = |2x+1|$

11. Nếu g(x) = x^5 thì $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 80$

12. Một phương trình của tiếp tuyến với parabol y = x^2 tại điểm (-2, 4) là y – 4 = 2x(x + 2).

BÀI TẬP

1-50 Tính y ‘.

1. $y = (x^4 - 3x^2 + 5)^3$

2. $y = \cos(\tan x)$

3. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

4. $y = \frac{3x - 2}{\sqrt{2x+1}}$

5. $y = 2x\sqrt{x^2+1}$

6. $y = \frac{e^x}{1+x^2}$

7. $y = e^{\sin 2\theta}$

8. $y = e^{-t}(t^2 - 2t + 2)$

9. $y = \frac{t}{1-t^2}$

10. $y = e^{mx}\cos nx$

11. $y = \sqrt{x}\cos\sqrt{x}$

12. $y = (\arcsin 2x)^2$

13. $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}$

14. $y = \frac{1}{\sin(x - \sin x)}$

15. $xy^4 + x^2y = x + 3y$

16. $y = \ln(\csc 5x)$

17. $y = \frac{\sec 2\theta}{1 + \tan 2\theta}$

18. $x^2\cos y + \sin 2y = xy$

19. $y = e^{cx}(c\sin x - \cos x)$

20. $y = \ln(x^2e^x)$

21. $y = 3^{x\ln x}$

22. $y = \sec(1 + x^2)$

23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$

24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

25. $\sin(xy) = x^2 - y$

26. $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

27. $y = \log_5(1 + 2x)$

28. $y = (\cos x)^x$

29. $y = \ln \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x$

30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$

31. $y = x \tan^{-1}(4x)$

32. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

33. $y = \ln|\sec 5x + \tan 5x|$

34. $y = 10^{\tan \pi\theta}$

35. $y = \cot(3x^2 + 5)$

36. $y = \sqrt{t \ln(t^4)}$

37. $y = \sin\left(\tan\sqrt{1 + x^3}\right)$

38. $y = \arctan\left(\arcsin\sqrt{x}\right)$

39. $y = \tan^2(\sin\theta)$

40. $xe^y = y - 1$

41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}\,(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$

42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

43. $y = x \sinh(x^2)$

44. $y = \dfrac{\sin mx}{x}$

45. $y = \ln(\cosh 3x)$

46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$

47. $y = \cosh^{-1}(\sinh x)$

48. $y = x \tanh^{-1}\sqrt{x}$

49. $y = \cos\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$

50. $y = \sin^2\left(\cos\sqrt{\sin \pi x}\right)$

51. Nếu f(t) = $\sqrt{4t+1}$, tìm f ”(2).

52. Nếu g(θ) = θ sin θ, tìm g “(π/6).

53. Tìm y “ biết $x^6 + y^6 = 1$.

54. Tìm $f^{(n)}$ biết f(x) = 1/(2 – x).

55. Dùng quy nạp toán học để chứng tỏ rằng nếu f(x) = xe^x thì $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Tính $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^3}{\tan^3(2t)}$

57-59. Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm cho trước.

57. y = $4\sin^2 x$, (π/6, 1)

58. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, (0, - 1)

59. y = $\sqrt{1 + 4\sin x}$, (0, 1)

60-61. Tìm phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong tại điểm cho trước.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13$, (2, 1)

61. y = $(2 + x)e^{-x}$, (0, 2)

62. Nếu f(x) = $xe^{\sin x}$, tìm f ’(x). Vẽ đồ thị f và f ’ trên cùng khung hình và bình luận.

63. (a) Nếu f(x) = $x\sqrt{5 - x}$, tìm f ‘(x).

(b) Tìm phương trình tiếp tuyến với đường y = $x\sqrt{5 - x}$ tại các điểm (1, 2) và (4, 4).

(c) Minh họa phần (b) bằng cách vẽ đồ thị đường cong và tiếp tuyến trên cùng một khung hình.

(d) Kiểm tra trả lời của bạn ở phần (a) có hợp lý không bằng cách vẽ đồ thị của f và f ‘.

64. (a) Nếu f(x) = 4x – tan x, - π/2 < x < π/2, tìm f ‘ và f “.

(b) Kiểm tra trả lời của bạn ở phần (a) có hợp lý không bằng cách vẽ đồ thị của f, f ‘, và f “.

65. Tại điểm nào trên đường y = sin x + cosx, 0 ≤ x ≤ 2π thì tiếp tuyến tại đó nằm ngang.

66. Tìm những điểm trên elip $x^2 + 2y^2 = 1$ mà tiếp tuyến tại đó có độ dốc bằng 1.

67. Nếu f(x) = (x –a)(x – b)(x – c), chứng tỏ rằng

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

68. (a) Bằng cách lấy đạo hàm công thức nhân đôi

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

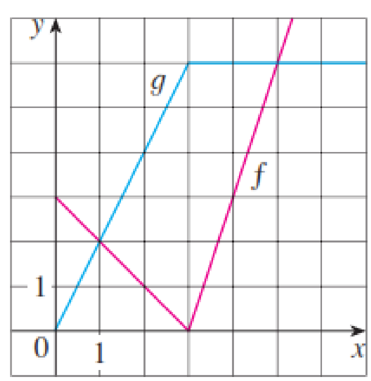
ta được công thức nhân đôi của hàm số sin.

69. Giả sử h(x) = f(x)g(x) và F(x) = f (g(x)), trong đó f(2) = 3, g(2) = 5, g ’(2) = 4, f ‘(2) = - 2, và f ‘(5) = 11. Tìm

(a) h ‘(2) và (b) F ‘(2).

70. Nếu f và g là các hàm số có đồ thị như hình dưới, đặt P(x) = f(x)g(x), Q(x) = f(x)/g(x), và C(x) = f(g(x)).

Tìm (a) P ‘(2) (b) Q ‘(2) (c) C ’(2)



71-78. Tìm f ‘ theo g ‘.

71. $f(x) = x^2 g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln |g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79-81. Tìm h ‘ theo f ‘ và g ‘.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\sin 4x))$

82. (a) Vẽ đồ thị hàm số f(x) = x – 2sin x trong khung hình chữ nhật [0, 8] x [- 2, 8].

(b) Trên đoạn nào thì tốc độ biến thiên trung bình lớn hơn: [1, 2] hay [2, 3]?

(c) Tại giá trị nào của x thì tốc độ biến thiên tức thời lớn hơn: x – 2 hay x = 5?

(d) Kiểm tra ước tính bằng mắt của bạn trong phần (c) bằng cách tính f ‘(x) và so sánh những giá trị của f ‘(2) và f ‘(5).

83. Tại điểm nào trên đường $y = [\ln(x + 4)]^2$ thì tiếp tuyến nằm ngang?

84. (a) Tìm phương trình của tiếp tuyến với đường $y = e^x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng x – 4y = 1.

(b) Tìm phương trình của tiếp tuyến với đường $y = e^x$ biết tiếp tuyến đi qua điểm gốc.

85. Tìm một parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm (1, 4) và tiếp tuyến tại những điểm x = - 1 và x = 5 có độ dốc lần lượt là 6 và – 2.

86. Hàm số $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, trong đó a, b, và K là những hằng số dương và b > a, được dùng để mô hình hóa nồng độ tại thời điểm t của chất thuốc được tiêm vào mạch máu.

(a) Chứng tỏ rằng $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.

(b) Tìm C ‘(t), tốc độ mà thuốc tiêm được giải phóng khỏi mạch máu.

(c) Khi nào tốc độ này bằng 0?

87. Một phương trình chuyển động có dạng $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ biểu thị dao động tắt dần của một vật thể. Tìm vận tốc và gia tốc của vật thể ấy.

89. Một chất điểm chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho tọa độ của nó tại thời điểm t là $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, t ≥ 0, trong đó b và c là các hằng số dương.

(a) Tìm các hàm số vận tốc và gia tốc.

(b) Chứng tỏ rằng chất điểm luôn chuyển động theo hướng dương.

89. Một chất điểm di chuyển trên một đường thẳng đứng sao cho toạ độ của nó tại thời điểm t là $y = t^3 - 12t + 3$, t ≥ 0.

(a) Tìm hàm số vận tốc và gia tốc.

(b) Khi nào chất điểm đi lên và khi nào đi xuống?

(c) Tìm quảng đường mà chất điểm đi được trong khoảng thời gian 0 ≤ t ≤ 3.

(d) Vẽ đồ thị của hàm số vị trí , vận tốc và gia tốc với 0 ≤ t ≤ 3.

(e) Khi nào chất điểm đi nhanh lên? Khi nào đi chậm xuống?

90. Thể tích của một khối nón tròn xoay là $V = \pi r^2 h/3$, trong đó r là bán kính đáy và h là chiều cao.

(a) Tìm tốc độ biến thiên của thể tích đối với chiều cao khi bán kính không đổi.

(b) Tìm tốc độ biến thiên của thể tích đối với bán kính khi chiều cao không đổi.

91. Khối lượng của một cuộn dây có chiều dài x là $x(1+\sqrt{x})$ kilogram, trong đó x tính bằng mét. Tìm tỷ trọng tuyến tính của dây khi x = 4 m.

92. Chi phí, tính bằng đôla, để sản xuất x đơn vị sản phẩm nào đó là

$$C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.00007x^3$$

(a) Tìm hàm số chi phí cận biên.

(b) Tìm C’(100) và giải thích ý nghĩa của nó.

(c) So sánh C’(100) với chi phí sản xuất sản phẩm thứ 101.

93. Một môi trường cấy vi khuẩn lúc đầu chứa 200 tế bào và sinh sôi với tốc độ tỷ lệ với kích thước của nó. Sau nửa giờ dân số tăng đến 360 tế bào.

(a) Tìm số vi khuẩn sau t giờ.

(b) Tìm số vi khuẩn sau 4 giờ.

(c) Tìm tốc độ tăng trưởng sau 4 giờ.

(d) Khi nào dân số đạt đến 10,000?

94. Cobalt-60 có chu kỳ bán rã là 5.24 giờ.

(a) Tìm khối lượng còn lại từ mẩu 100 mg sau 20 năm.

(b) Phải mất bao lâu để khối lượng phân rã chỉ còn 1 mg?

95. Gọi C(t) là nồng độ của thuốc tiêm trong mạch máu. Khi cơ thể thải chất thuốc qua thận, C(t) giảm với tốc độ tỷ lệ với lượng thuốc hiện có mặt trong máu. Như vậy C'(t) = - kC(t), trong đó k là hằng số dương, được gọi là hằng số thải trừ của thuốc.

(a) Nếu C_o là nồng độ lúc t = 0, tìm nồng độ tại thời điểm t.

(b) Nếu cơ thể thải bỏ nửa số lượng thuốc sau 30 giờ, hỏi mất bao lâu mới thải bỏ hết 90% lượng thuốc?

96. Một tách cà phê nóng ở nhiệt độ 80°C trong gian phòng luôn giữ nhiệt độ 20°C. Sau nửa giờ cà phê nguội xuống 60°C.

(a) Tìm nhiệt độ của cà phê sau nửa giờ tiếp theo.

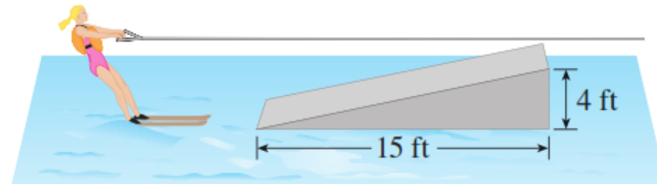
(b) Khi nào cà phê nguội đến 40°C?

97. Thể tích một khối lập phương tăng với tốc độ 10 cm^3/phút. Hỏi diện tích của nó tăng nhanh cỡ nào khi cạnh dài 30 cm?

98. Một ly giấy có dạng một hình nón chiều cao 10 cm và bán kính 3 cm (tại miệng ly). Nếu đổ nước vào ly với tốc độ 2 cm^3/s, hỏi mực nước trong ly dâng lên nhanh cỡ nào khi mực nước là 5 cm?

99. Một quả bóng bay lên với vận tốc không đổi là 5 ft/s. Một em bé đang đi xe đạp dọc theo một con đường thẳng với vận tốc 15 ft/s. Khi em chạy ngay bên dưới quả bóng, nó cách em 45 ft. Hỏi khoảng cách giữa em và quả bóng tăng nhanh bao nhiêu sau 3 giây tiếp theo?

100. Một người trượt nước lướt qua một đoạn dốc như trong hình với vận tốc 30 ft/s. Hỏi cô lên cao nhanh cỡ nào khi cô vừa ra khỏi đoạn dốc?



101. Góc nâng của mặt trời giảm với tốc độ 0.25 rad/h. Hỏi bóng đỗ của một ngôi nhà cao 400 ft tăng nhanh cỡ nào khi góc nâng của mặt trời là π/6?

102. (a) Tìm phép xấp xỉ bậc nhất của $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ gần số 3.

(b) Minh họa phần (a) bằng cách vẽ đồ thị của f và phép xấp xỉ bậc nhất.

(c) Với giá trị nào của x thì xấp xỉ bậc nhất chính xác trong vòng 0.1?

103. (a) Tìm hàm số tuyến tính hóa của $f(x)=\sqrt[3]{1+3x}$ tại a = 0. Tìm phép xấp xỉ bậc nhất tương ứng và dùng nó để tính giá trị xấp xỉ của $\sqrt[3]{1.03}$

(b) Xác định giá trị của x sao cho xấp xỉ bậc nhất cho trong phần (a) chính xác trong vòng 0.1.

104. Tính dy nếu y = $x^3 - 2x^2 + 1$, x = 2, và dx = 0.2.

105. Một cửa sổ có dạng hình vuông phủ bên trên là một hình bán nguyệt. Cạnh đáy cửa sổ được đo là 60 cm với sai số có thể của phép đo là 0.1 cm. Dùng vi phân để ước tính sai số tối đa có thể phạm phải khi tính diện tích cửa sổ.

106-108. Biểu diễn giới hạn được dạng đạo hàm và tính giới hạn ấy.

106. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{17}-1}{x-1}$

107. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}$

108. $\lim\limits_{\theta\to\pi/3}\dfrac{\cos\theta-0.5}{\theta-\pi/3}$

109. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

110. Giả sử f là hàm số khả vi sao cho f(g(x)) = x và f '(x) = 1 + $[f(x)]^2$. Chứng tỏ rằng g '(x) = 1/(1+ x^2).

111. Tìm f '(x) nếu biết

$$\frac{d}{dx}[f(2x)]=x^2$$

112. Chứng tỏ rằng một tiếp tuyến bất kỳ của đường astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ luôn chắn với hai trục toạ độ một đoạn có độ dài không đổi.

ĐÁP SỐ

Trắc nghiệm Đúng-Sai

1. Đúng	**3. Đúng**	5. Sai	**7. Sai**
9. Đúng	**11. Đúng**		

BÀI TẬP

1. $6x(x^4 - 3x^2 + 5)^2(2x^2 - 3)$ **3.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^7}}$

5. $\dfrac{2(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$ **7.** $2\cos 2\theta\, e^{\sin 2\theta}$

9. $\dfrac{t^2+1}{(1-t^2)^2}$ **11.** $\dfrac{\cos\sqrt{x} - \sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

13. $-\dfrac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4}$ **15.** $\dfrac{1-y^4-2xy}{4xy^3+x^2-3}$

17. $\dfrac{2\sec 2\theta\,(\tan 2\theta - 1)}{(1+\tan 2\theta)^2}$ **19.** $(1+c^2)e^{cx}\sin x$

21. $3^{x\ln x}(\ln 3)(1+\ln x)$ **23.** $-(x-1)^{-2}$

25. $\dfrac{2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy)+1}$ **27.** $\dfrac{2}{(1+2x)\ln 5}$

29. $\cot x - \sin x\cos x$ **31.** $\dfrac{4x}{1+16x^2} + \tan^{-1}(4x)$

33. $5\sec 5x$ **35.** $-6x\csc^2(3x^2+5)$

37. $\cos\left(\tan\sqrt{1+x^3}\right)\left(\sec^2\sqrt{1+x^3}\right)\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$

39. $2\cos\theta\tan(\sin\theta)\sec^2(\sin\theta)$

41. $\dfrac{(x-2)^4(3x^2-55x-52)}{2\sqrt{x+1}\,(x+3)^8}$ **43.** $2x^2\cosh(x^2) + \sinh(x^2)$

45. $3\tanh 3x$ **47.** $\dfrac{\cosh x}{\sqrt{\sinh^2 x - 1}}$

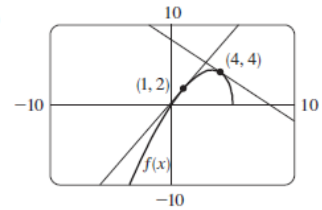
49. $\dfrac{-3\sin\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)e^{\sqrt{\tan 3x}}\sec^2(3x)}{2\sqrt{\tan 3x}}$ **51.** $-\frac{4}{27}$ **53.** $-5x^4/y^{11}$

57. $y = 2\sqrt{3}x + 1 - \pi\sqrt{3}/3$ **59.** $y = 2x + 1$

61. $y = -x + 2;\ y = x + 2$

63. (a) $\dfrac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}$ (b) $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4},\ y = -x + 8$

(c)



65. $(\pi/4, \sqrt{2}), (5\pi/4, -\sqrt{2})$ **69.** (a) 2 (b) 44

71. $2xg(x) + x^2g'(x)$ **73.** $2g(x)g'(x)$ **75.** $g'(e^x)e^x$

77. $g'(x)/g(x)$ **79.** $\dfrac{f'(x)[g(x)]^2 + g'(x)[f(x)]^2}{[f(x)+g(x)]^2}$

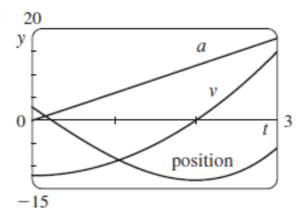
81. $f'(g(\sin 4x))g'(\sin 4x)(\cos 4x)(4)$ **83.** $(-3, 0)$

85. $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$

87. $v(t) = -Ae^{-ct}[c\cos(\omega t + \delta) + \omega\sin(\omega t + \delta)]$,
$a(t) = Ae^{-ct}[(c^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \delta) + 2c\omega\sin(\omega t + \delta)]$

89. (a) $v(t) = 3t^2 - 12;\ a(t) = 6t$ (b) $t > 2;\ 0 \leqslant t < 2$

(c) 23 (d)



(e) $t > 2;\ 0 < t < 2$

91. 4 kg/m **93.** (a) $200(3.24)^t$ (b) $\approx 22{,}040$

(c) $\approx 25{,}910$ bacteria/h (d) $(\ln 50)/(\ln 3.24) \approx 3.33$ h

95. (a) C_0e^{-kt} (b) ≈ 100 h **97.** $\frac{4}{3}$ cm²/min

99. 13 ft/s **101.** 400 ft/h

103. (a) $L(x) = 1 + x;\ \sqrt[3]{1+3x} \approx 1 + x;\ \sqrt[3]{1.03} \approx 1.01$

(b) $-0.23 < x < 0.40$

105. $12 + \frac{3}{2}\pi \approx 16.7$ cm² **107.** $\frac{1}{32}$ **109.** $\frac{1}{4}$ **111.** $\frac{1}{8}x^2$

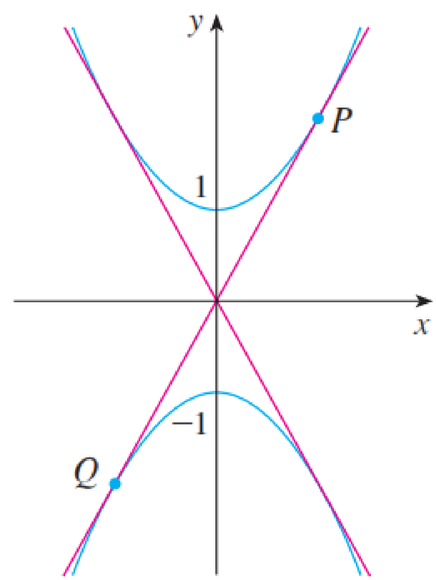
BÀI TẬP LÀM THÊM

Hãy thử giải các ví dụ sau rồi sau đó mới xem lời giải.

VÍ DỤ 1 Có bao nhiêu đường thẳng tiếp xúc với cả hai parabol

$y = -1 - x^2$ và $y = 1 + x^2$?

Tìm toạ độ các tiếp điểm



HÌNH 1

GIẢI Để có cái nhìn tận tường, ta cần phải vẽ hình. Vẽ parabol $y = 1 + x^2$ (là parabol $y = x^2$ dời 1 đơn vị về phía trên) và $y = -1 - x^2$ (là đối xứng của parabol vừa vẽ qua trục hoành). Nếu ta vẽ thử tiếp tuyến với cả hai parabol, ta thấy ngay chỉ có hai tiếp tuyến chung (xem hình bên).

Gọi P là tiếp điểm với parabol phía trên và gọi a là hoành độ của nó. Vì P thuộc parabol $y = 1 + x^2$ nên P có tung độ là $1 + a^2$. Vì lý do đối xứng nên tiếp điểm thứ hai Q của parabol bên dưới là có toạ độ là $(-a, -(1 + a^2))$.

Để sử dụng thông tin cho trước, ta đồng nhất độ dốc của đường thẳng PQ và độ dốc của tiếp tuyến tại O. Ta có:

$$m_{PQ} = \frac{1+a^2-(-1-a^2)}{a-(-a)} = \frac{1+a^2}{a}$$

Vì $f(x) = 1 + x^2$, nên độ dốc của tiếp tuyến tại P là $f'(a) = 2a$. Do đó ta được

$$\frac{1+a^2}{a} = 2a$$

Giải phương trình này, ta được $1 + a^2 = 2a^2$ hay $a^2 = 1$ và $a = \pm 1$. Do đó tiếp điểm là (1, 2) và (- 1, - 2). Vì đối xứng, hai tiếp điểm còn lại là (- 1, 2) , (1 , - 2).

VÍ DỤ 2 Với giá trị nào của c phương trình $\ln x = cx^2$ có đúng một nghiệm ?

GIẢI Một trong những nguyên tắc giải toán quan trọng nhất là vẽ hình, cho dù bài toán không dính líu tới một tình huống hình học. Bài toán hiện thời của ta có thể phát biểu dưới dạng hình học như sau: Với giá trị nào của c đường cong $y = \ln x$ cắt đường cong $y = cx^2$ tại đúng một điểm?

Hãy bắt đầu bằng cách vẽ đồ thị đường $y = \ln x$ và $y = cx^2$ với những giá trị khác nhau của c. Ta biết rằng với $c \neq 0$, $y = cx^2$ là một parabol có bề lõm quay xuống nếu $c > 0$ và quay lên nếu $c < 0$. Hình 2 cho thấy những parabol với vài giá trị dương của c. Một số parabol không cắt đường $y = \ln x$ và có một parabol cắt đến hai lần. Ta có cảm giác tồn tại một giá trị của c giữa 0.1 và 0.3 sao cho parabol tiếp xúc với $y = \ln x$ như trong Hình 3.

Để tìm ra giá trị đặc biệt của c, ta gọi a là hoành độ của giao điểm duy nhất. Nói cách khác, $\ln a = ca^2$, với a là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. Từ Hình 3, ta thấy hai đường cong tiếp xúc nhau, tức chúng có tiếp tuyến chung tại $x = a$. Điều này có nghĩa là đường cong $y = \ln x$ và $y = cx^2$ có cùng độ dốc khi $x = a$. Do đó

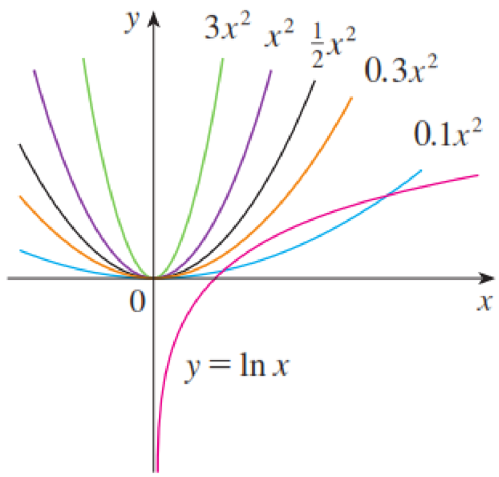
$$1/a = 2ca$$

Giải hệ phương trình $\ln a = ca^2$ và $1/a = 2ca$, ta được

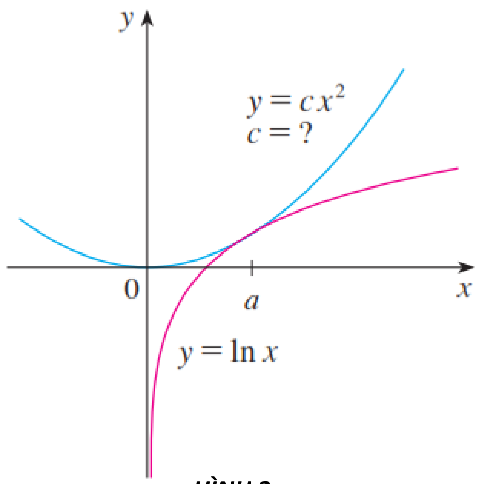
$$\ln a = ca^2 = c\cdot\frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $a = e^{1/2}$ và

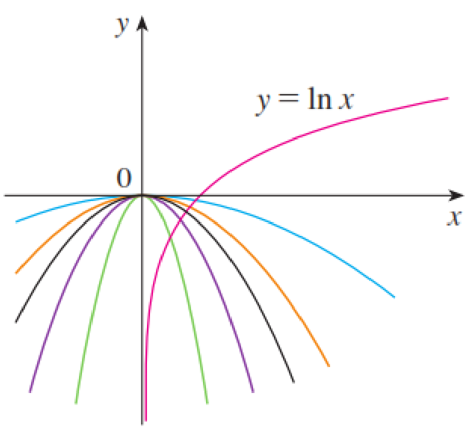
$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$



HÌNH 2



HÌNH 3



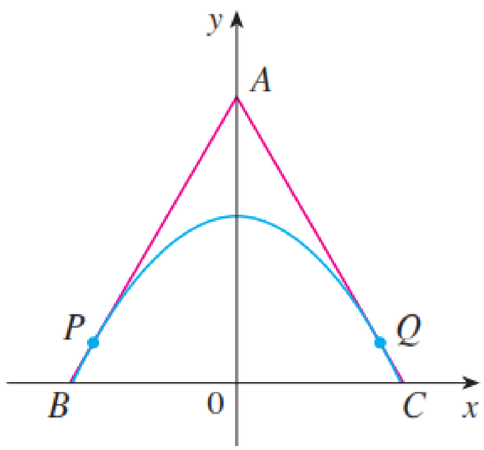
HÌNH 3

Với những giá trị âm của c ta có tình huống minh họa như trong Hình 4: Mọi parabol $y = cx^2$ với giá trị c âm cắt $y = \ln x$ tại đúng một điểm . Và đừng quên $c = 0$: Đường cong $y = 0x^2 = 0$ chính là trục x, cắt $y = \ln x$ đúng một điểm.

Tóm lại, giá trị cần tìm của c là $c = 1/(2e)$ và $c \leq 0$.

BÀI TẬP

1. Tìm điểm P và Q trên parabol $y = 1 - x^2$ sao cho tam giác ABC tạo bởi trục hoành và các tiếp tuyến tại P và Q là tam giác đều.



2. Tìm điểm tại đó đường cong $y = x^3 - 3x + 4$ và $y = 3(x^2 - x)$ tiếp xúc nhau, tức là có một tiếp tuyến chung. Minh họa bằng cách vẽ hai đồ thị và tiếp tuyến chung.

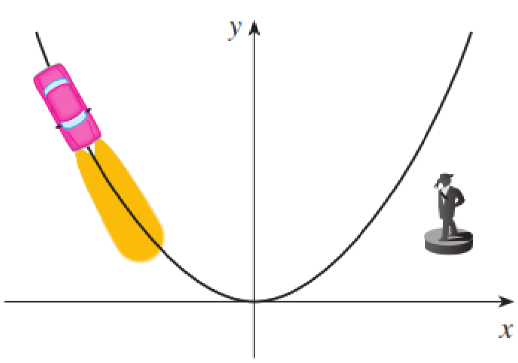
3. Chứng tỏ rằng những tiếp tuyến của parabol $y = ax^2 + bx + c$ tại hai điểm có hoành độ p và q phải cắt nhau tại một điểm có hoành độ là trung bình cộng của p và q.

4. Chứng tỏ rằng

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{1+\cot x}+\frac{\cos^2 x}{1+\tan x}\right) = -\cos 2x$$

5. Chứng tỏ rằng $\sin^{-1}(\tanh x) = \tan^{-1}(\sinh x)$.

6. Một ô tô đi vào đêm trên vòng cung xa lộ có dạng một parabol với đỉnh ở gốc (xem hình). Ô tô bắt đầu ở điểm 100 m hướng tây và 100 m bắc của điểm gốc và đi theo hướng đông. Tại điểm 100 m đông và 50 m bắc của điểm gốc có một tượng đài. Tại điểm nào trên xa lộ đèn ô tô sẽ chiếu sáng tượng đài?

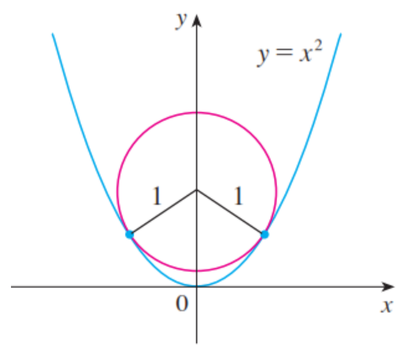


7. Chứng tỏ rằng

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$$

8. Tìm đạo hàm cấp n của của hàm số $f(x) = x^n/(1 - x)$.

9. Hình dưới cho thấy đường tròn bán kính 1 nội tiếp trong parabol $y = x^2$. Tìm tâm của đường tròn.

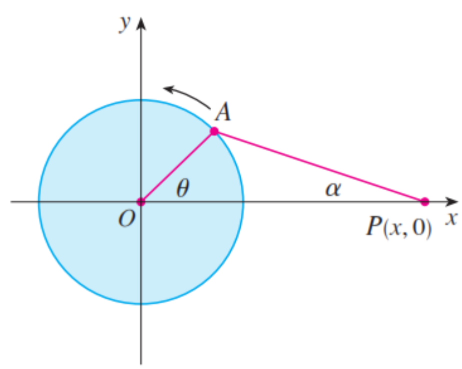


11. Hình bên cho thấy một bánh xe quay bán kính 40 cm và tay đòn AP có độ dài 1.2m. Chốt P trượt tới lui trên trục x khi bánh xe quay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ 360 vòng/phút.

(a) Tìm vận tốc góc của tay đòn, $d\alpha/dt$, theo radian/s khi $\theta = \pi/3$.

(b) Tính khoảng cách $x = |OP|$ theo θ.

(c) Tìm biểu thức của vận tốc của chốt P theo q.



12. Tiếp tuyến T_1 và T_2 vẽ từ điểm P_1, P_2 đến parabol $y = x^2$ và chúng cắt nhau tại P. Một tiếp tuyến khác T kẻ từ một điểm giữa P_1 và P_2; nó cắt T_1 tại Q_1 và T_2 tại Q_2. Chứng tỏ rằng

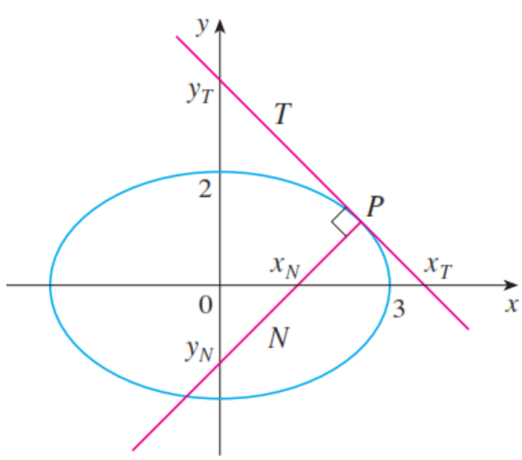
$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|}+\frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

13. Chứng tỏ rằng $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{ax}\sin bx\right)=r^n e^{ax}\left(\sin(bx+n\theta)\right)$

trong đó a và b là các số dương, $r^2 = a^2 + b^2$, và $\theta = \tan^{-1}(b/a)$.

14. Tính $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}$

15. Gọi T và N là tiếp tuyến và pháp tuyến của elip $x^2/9 + y^2/4 = 1$ tại điểm P trên elip trong góc phần tư thứ nhất. Gọi x_T và y_T là hoành độ và tung độ của điểm mà T cắt trục x và trục y theo thứ tự và gọi x_N và y_N là hoành độ và tung độ của điểm mà N cắt trục x và trục y theo thứ tự. Khi P di chuyển trên elip trong góc phần tư thứ nhất (nhưng không trên trục), x_T, y_T, x_N, y_N có thể lấy những giá trị nào? Trước tiên hãy dự đoán đáp số bằng cách nhìn hình và sau đó dùng giải tích để kiểm tra kết quả dự đoán của bạn đúng tới mức nào.



16. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3+x)^2-\sin 9}{x}$

17. (a) Dùng công thức cộng cho tan(x - y) để chứng tỏ rằng nếu hai đường thẳng L_1, L_2 cắt nhau theo một góc α, thì

$$\tan\alpha=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

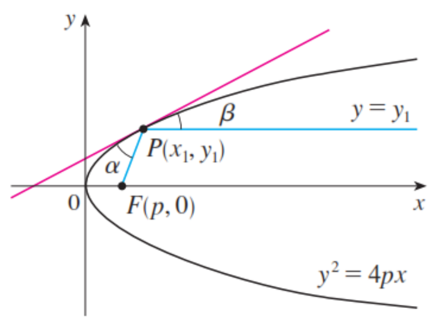
trong đó m_1, m_2 là độ dốc của L_1, L_2 theo thứ tự.

(b) **Góc giữa hai đường cong** C_1, C_2 tại giao điểm P được định nghĩa là góc giữa các tiếp tuyến của C_1, C_2 tại P (nếu các tiếp tuyến này tồn tại). Sử dụng (a) để tính góc của các cặp đường cong sau gần đúng đến 1^o.

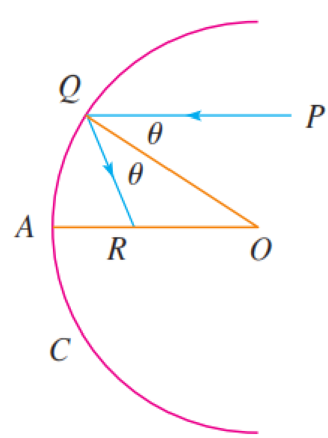
(i) $y = x^2$ và $y = (x-2)^2$

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ và $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

18. Gọi $P(x_1, y_1)$ là điểm trên parabol $y^2 = 4px$ có tiêu điểm F(p, 0). Gọi α là góc giữa parabol và đoạn FP, và gọi β là góc giữa đường nằm ngang $y = y_1$ và parabol như trong hình. Chứng tỏ rằng $\alpha = \beta$. (Do đó, theo nguyên lý của quang hình học, ánh sáng phát xuất từ nguồn sáng đặt ở F sẽ phản chiếu tại P theo phương của trục hoành. Điều này giải thích tại sao các mặt tròn xoay paraboloid, sinh bởi parabol khi quay quanh trục của nó, được dùng làm dạng của các chóa đèn xe hơi hay gương phản chiếu trong kính thiên văn.)



19. Giả sử ta thay gương parabol trong Bài 18 bằng gương cầu. Mặc dù gương cầu không có tiêu điểm, ta có thể chứng tỏ sự hiện diện của một tiêu điểm xấp xỉ. Trong hình, C là nửa đường tròn có tâm O. Một tia sáng hướng về gương theo phương của trục hoành dọc theo đường PQ sẽ được phản chiếu đến điểm R trên trục mà góc PQO = góc OQR (góc tới bằng góc phản chiếu). Điều gì xảy ra cho điểm R khi cho P càng lúc càng gần trục?



20. Nếu f và g là các hàm số có đạo hàm với f(0) = g(0) = 0 và g'(0) $\neq$ 0, chứng tỏ rằng

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$$

21. Tính $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$

22. (a) Hàm số bậc ba y = x(x - 2)(x - 6) có ba zero phân biệt : 0, 2, 6. Vẽ đồ thị f và các tiếp tuyến của nó tại điểm trung bình của mỗi cặp zero. Có nhận xét gì?

(b) Giả sử hàm số bậc ba f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) có ba zero phân biệt:a, b và c. Chứng tỏ, với sự trợ giúp của máy tính, rằng tiếp tuyến vẽ tại điểm trung bình của hai zero a và b sẽ cắt đồ thị f tại zero thứ ba.

23. Với giá trị nào của k phương trình e^{2x} = k $\sqrt{x}$ có đúng một nghiệm?

24. Với giá trị dương nào của a thì bất đẳng thức $a^x \geq 1 + x$ đúng với mọi x.

25. Nếu

$$y=\frac{x}{\sqrt{a^2-1}}-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{\sin x}{a+\sqrt{a^2-1}+\cos x}$$

chứng tỏ rằng y' = $\frac{1}{a+\cos x}$

26. Cho elip $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, với a ≠ b, tìm phương trình tập hợp những điểm từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với elip sao cho độ dốc của chúng:

(a) nghịch đảo nha

(b) nghịch đảo âm (tức $m_1 . m_2 = -1$)

27. Tìm hai điểm trên đường cong y = $x^4 - 2x^2 - x$ sao cho chúng có một tiếp tuyến chung.

28. Giả sử ba điểm trên parabol y = x^2 có tính chất là ba pháp tuyến của chúng đồng quy tại một điểm. Chứng tỏ rằng tổng các hoành độ của chúng bằng 0.

29. Một mắt lưới trong mặt phẳng là một điểm có toạ độ là số nguyên. Giả sử những đường tròn có bán kính r được vẽ sử dụng mọi mắt lưới là tâm. Tìm giá trị nhỏ nhất của r sao cho bất kỳ đường thẳng nào có độ dốc 2/5 đều cắt một số đường tròn.

30. Một khối nón có bán kính đáy r (cm), chiều cao h (cm), đỉnh quay trở xuống, được nhấn với tốc độ 1cm/s vào một bình hình trụ cao có bán kính đáy R (cm) có chứa nướcmột phần. Hỏi tốc độ mặt nước dâng lên tại thời điểm khối nón hoàn toàn chìm trong nước.

31. Một bình chứa có dạng hình nón lật ngược có chiều cao 16 cm và bán kính 5 cm. Bình chứa một chất lỏng rịn ra qua bề mặt với tốc độ tỷ lệ với diện tích mà chất lỏng tiếp xúc với mặt bình chứa. (Nhớ diện tích mặt ngoài của hình nón là πrl, trong đó r là bán kính và l là đường sinh.) Nếu ta đổ chất lỏng vào bình với tốc độ 2 cm^3/phút, thì chiều cao của chất lỏng sẽ giảm với tốc độ 0.3 cm/phút khi chiều cao là 10 cm. Nếu muốn chất lỏng vẫn giữ nguyên chiều cao là 10 cm, hỏi ta phải đổ chất lỏng vào bình với tôc độ bao nhiêu?

ĐÁP SỐ

1. $\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{4}\right)$ **9.** $\left(0, \frac{5}{4}\right)$

11. (a) $4\pi\sqrt{3}/\sqrt{11}$ rad/s (b) $40\left(\cos\theta + \sqrt{8+\cos^2\theta}\right)$ cm

(c) $-480\pi\sin\theta\left(1+\cos\theta/\sqrt{8+\cos^2\theta}\right)$ cm/s

15. $x_T \in (3,\infty)$, $y_T \in (2,\infty)$, $x_N \in \left(0,\frac{5}{3}\right)$, $y_N \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

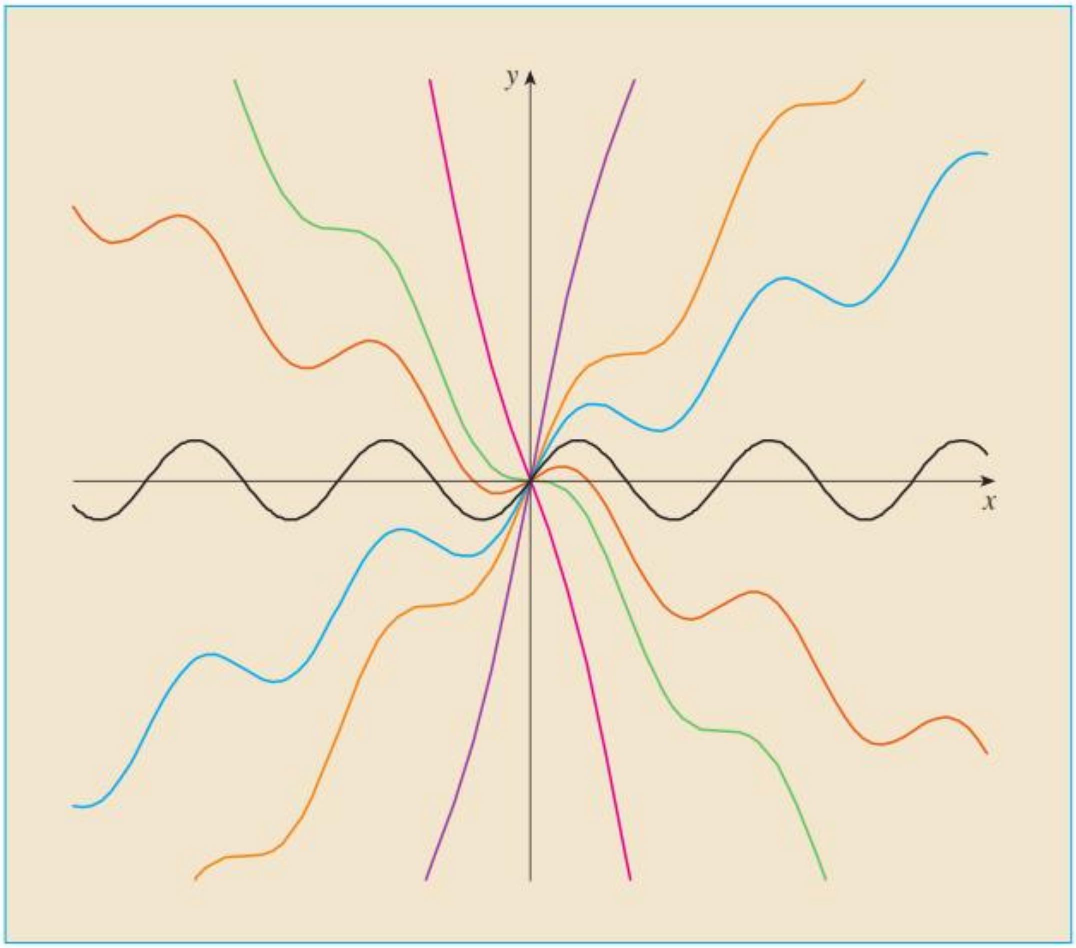
17. (b) (i) 53° (or 127°) (ii) 63° (or 117°)

19. *R* approaches the midpoint of the radius *AO*.

21. $-\sin a$ **23.** $2\sqrt{e}$ **27.** (1, −2), (−1, 0)

29. $\sqrt{29}/58$ **31.** $2+\frac{375}{128}\pi \approx 11.204\ cm^3/min$

CHƯƠNG 4 ỨNG DỤNG CỦA VI PHÂN



Trần Quang Nghĩa dịch

4.1. Giá Trị Cực Đại, Cực Tiểu……………………………… 293
4.2. Định Lý Giá Trị Trung Bình……….……………………305
4.3. Đồ Thị Hàm Số………………………………….………..312
4.4. Dạng Vô Định và Quy Tắc l'Hospital………………326
4.5. Phương Pháp Vẽ Đồ Thị……………………….………337
4.7. Bài Toán Cực Trị……………..……………………………351
4.8. Phương Pháp Newton……………………… ………368
4.9. Nguyên Hàm…………………………………………………375
ÔN CUỐI CHƯƠNG………………………………………….385
BÀI TẬP LÀM THÊM…………………………………………391

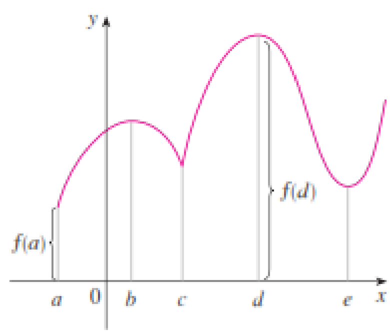
BÀI 4.1. GIÁ TRỊ CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU

Một số ứng dụng quan trọng của phép tính vi phân là bài toán tối ưu hóa, trong đó ta được yêu cầu tìm phương cách tốt nhất (tối ưu) để thực hiện một việc gì đó. Sau đây là một vài ví dụ về những bài toán như thế mà ta sẽ có dịp giải quyết trong chương nầy:

* Tìm kiểu dáng của một lon mà chi phí sản xuất thấp nhất.
* Tìm gia tốc lớn nhất của tàu con thoi . Điều này là quan trọng đối với các phi hành gia phải chịu đựng tác động của gia tốc.)
* Tìm bán kính của khí quản đang co thắt tống khứ lượng khí thải nhanh nhất trong một cơn ho.
* Với góc nào một mạch máu phải đâm nhánh sao cho trái tim sử dụng năng lượng ít nhất để bơm máu.

Những bài toán này gút lại là tìm những giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số. Trước tiên ta hãy tìm hiểu chính xác cực trị của một hàm số là gì.

1 ĐỊNH NGHĨA Một hàm số f gọi là đạt **giá trị lớn nhất** tại c nếu f(c) ≥ f(x) với mọi x thuộc tập xác định D của f. Số f(c) được gọi là **giá trị lớn nhất** của f trên D. Tương tự, f gọi là đạt **giá trị nhỏ nhất** tại c nếu f(c) ≤ f(x) với mọi x thuộc tập xác định D của f và số f(c) được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của f trên D. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất gọi chung là **giá trị cực trị**.



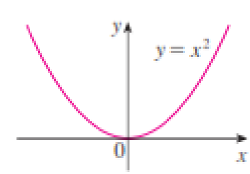
HÌNH 1

Hình 1 cho thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại d và giá trị nhỏ nhất tại a. Chú ý là điểm (d, f(d)) là điểm cao nhất trên đồ thị và điểm (a, f(a)) là điểm thấp nhất. Nếu chỉ xét những giá trị gần b [chẳng hạn ta giới hạn chú ý của mình vào khoảng (a, c), thì f(b) là giá trị lớn nhất trong tất cả giá trị f(x) và được là giá trị cực đại của f. Tương tự, f(c) được gọi là giá trị cực tiểu của f vì f(c) ≤ f(x) với mọi x gần c [trên khoảng (b, d), chẳng hạn]. Hàm số f cũng đạt giá trị cực tiểu tại e. Tổng quát, ta có định nghĩa sau.

2 ĐỊNH NGHĨA Một hàm số f gọi là đạt **cực đại** tại c nếu f(c) ≥ f(x) với mọi x gần c. [Điều này có nghĩa f(c) ≥ f(x) với mọi x thuộc một khoảng chứa c.] Tương tự, f đạt **cực tiểu** tại c nếu f(c) ≤ f(x) khi x gần c.

VÍ DỤ 1 Hàm số f(x) = cosx đạt giá trị lớn nhất (cũng là giá trị cực đại) là 1 vô số lần, vì $\cos 2n\pi = 1$ với mọi số nguyên n và $-1 \le \cos x \le 1$ với mọi x. Tương tự, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ là giá trị nhỏ nhất , với mọi số nguyên n.

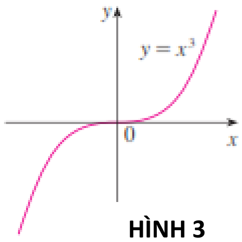
VÍ DỤ 2 Nếu $f(x) = x^2$, thì $f(x) \ge f(0)$ vì $x^2 \ge 0$ với mọi x. Do đó f(0) = 0 là giá trị nhỏ (giá trị cực tiểu) của f. Điều này tương ứng với sự kiện là điểm gốc là điểm thấp nhất trên parabol $f(x) = x^2$.(Xem Hình 2.) Tuy nhiên, nó không có điểm cao nhất do đó hàm số này



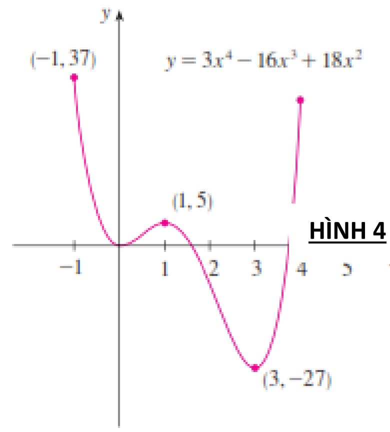
HÌNH 2

không có giá trị lớn nhất.

VÍ DỤ 3 Từ đồ thị của hàm số $f(x) = x^3$ như trong Hình 3, ta thấy rằng hàm số này không có giá trị lớn nhất cũng như giá trị nhỏ nhất. Thật ra, nó cũng không có giá trị cực đại hoặc giá trị cực tiểu.



HÌNH 3



HÌNH 4

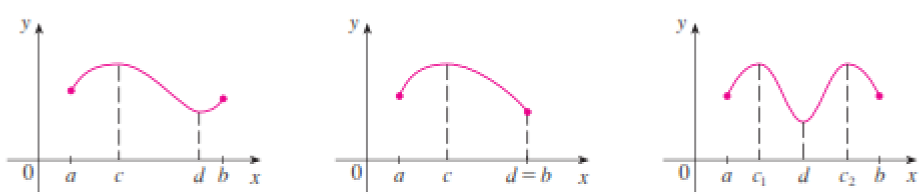
VÍ DỤ 4 Đồ thị hàm số $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2, \quad -1 \le x \le 4$

cho bởi Hình 4. Bạn có thể thấy rằng f(1) = 5 là một cực đại, trong khi giá trị lớn nhất là f(- 1) = 37. (Giá trị lớn nhất này không phải là một giá trị cực đại vì nó xảy ra tại một đầu mút.) Cũng vậy, f(0) = 0 là giá trị cực tiểu và f(3) = - 27 vừa là giá trị cực tiểu vừa là giá trị nhỏ nhất. Nhận xét là f không đạt giá trị hay giá trị cực đại tại x = 4.

Chúng ta vừa nhìn thấy rằng một số hàm số có các giá trị cực trị trong khi một số khác thì không. Định lý sau đây cho biết điều kiện khi nào một hàm số có được các giá trị cực trị.

3 ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ CỰC TRỊ Nếu hàm số f liên tục trên một đoạn [a, b], thế thì nó đạt một giá trị lớn nhất f(c) và một giá trị nhỏ nhất f(d) tại các số c, d thuộc [a, b].

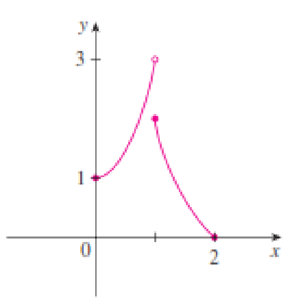
Định Lý Giá Trị Cực Trị được minh họa trong Hình 5. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại c và giá trị nhỏ nhất tại d. Chú ý là giá trị lớn nhất có thể đạt được nhiều hơn một lần (tại c_1 và c_2, chẳng hạn). Mặc dù Định Lý Giá Trị Cực Trị trông thì dễ chấp nhận nhưng thật khó chứng minh và vì thế ta lướt qua phần chứng minh.

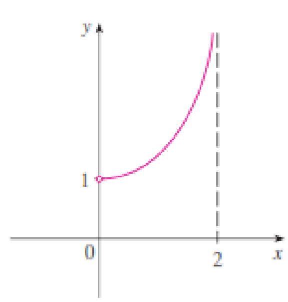


HÌNH 5

Hai hình dưới cho thấy một hàm số nếu không liên tục hoặc liên tục nhưng không phải trên một đoạn thì không nhất thiết có giá trị cực trị.

HÌNH 6 f không liên tục) có cực tiểu f(2) = 0 nhưng không có cực đại.



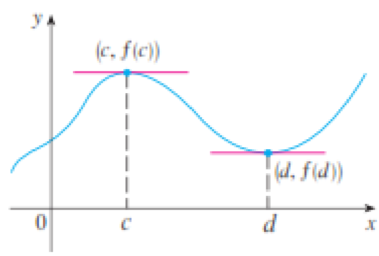


HÌNH 7 g (liên tục nhưng không trên một đoạn) không có cực tiểu lẫn cực đại

Hàm số f có đồ thị trong Hình 6 xác định trên đoạn [0, 2] và không có giá trị lớn nhất. (Chú ý tập giá trị của hàm số là [0, 3). Hàm số có những giá trị gần 3, nhưng không bằng 3.) Điều này không trái với Định Lý GIá Trị Cực Trị vì f không liên tục. [Tuy vậy, một hàm số gián đoạn có thể có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.]

Hàm số g trong Hình 7 liên tục trên khoảng (0, 2) nhưng không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. [Tập giá trị của g là (1, ∞). Hàm số này đạt những giá trị lớn tùy ý.] Điều này không mâu thuẫn với Định Lý Giá Trị Cực Trị vì khoảng (0, 2) không là một đoạn.

Định Lý Giá Trị Cực Trị cho rằng một hàm số liên tục trên một đoạn sẽ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, nhưng không chỉ cho chúng ta cách tìm những giá trị này. Ta hãy bắt đầu tìm những giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.



HÌNH 8

Hình 8 cho thấy một đồ thị có cực đại tại c và cực tiểu tại d. Tại những điểm cực trị này các tiếp tuyến với đồ thị có phương nằm ngang và do đó có độ dốc bằng 0. Ta thấy rằng đạo hàm bằng độ dốc của tiếp tuyến, do đó ta có f '(c) = 0 và f '(d) = 0. Định lý sau đây cho rằng điều này luôn đúng đối với một hàm số đạo hàm được.

4 ĐỊNH LÝ FERMAT Nếu f đạt cực đại hay cực tiểu tại c, và nếu f'(c) tồn tại, thế thì f'(c) = 0.

CM Cho f đạt cực đại tại c. Thế thì theo định nghĩa 2, f(c) ≥ f(x) với mọi x đủ gần c. Điều này ám chỉ là nếu h đủ gần 0 và h dương hay âm, thì

$$f(c) \geq f(c+h)$$

và do đó

5 $$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

Ta có thể chia hai vế của một bất đẳng thức cho một số dương. Do đó nếu h > 0 và h đủ nhỏ, ta có

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

Lấy giới hạn bên phải của cả hai vế (dùng ĐL 2.3.2), ta được

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \lim_{h\to 0+} = 0$$

Nhưng vì f '(c) tồn tại, ta có:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \lim_{h\to 0+} 0 = 0$$

như vậy ta suy ra được f '(c) ≤ 0.

Nếu h < 0, khi chia hai vế cho h thì bất đẳng thức (5) phải đổi chiều và ta có:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \qquad h < 0$$

Và khi lấy giới hạn bên trái, ta được:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

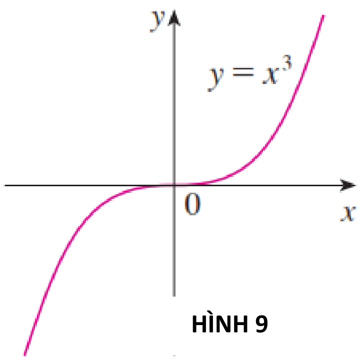
Vì ta có đồng thời f '(c) ≥ 0 và f '(c) ≤ 0 nên suy ra f '(c) = 0.

Ta đã chứng minh định lí Fermat trong trường hợp cực đại. Trường hợp cực tiểu được chứng minh tương tự.

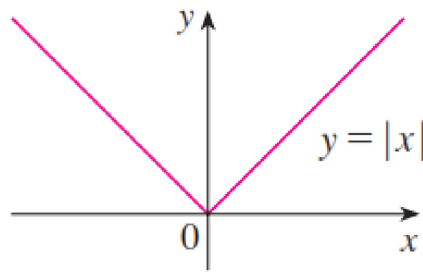
Ví dụ sau cho ta thấy ta cần thận trọng khi dựa vào định lí Fermat để tìm cực trị bằng cách cho f '(x) = 0 rồi tìm x.

VÍ DỤ 5 Nếu $f(x) = x^3$, thì $f'(x) = 3x^2$, vì thế $f(0) = 0$. Nhưng f không có cực đại cũng như cực tiểu tại 0, như bạn đã biết qua đồ thị của nó (Ví dụ 3). (Hoặc nhận xét rằng $x^3 > 0$ khi $x > 0$ nhưng $x^3 < 0$ khi $x < 0$.) Sự kiện $f'(0) = 0$ đơn giản chỉ có nghĩa là đồ thị $y = x^3$ có một tiếp tuyến nằm ngang tại (0, 0). Thay vì đạt cực trị tại điểm (0, 0), đồ thị xuyên qua tiếp tuyến của nó tại điểm đó. (Xem hình.)

VÍ DỤ 6 Hàm số $f(x) = |x|$ đạt giá trị nhỏ nhất (lẫn giá trị cực tiểu) tại 0, nhưng giá trị này không thể tìm ra bằng cách cho $f'(x) = 0$ bởi vì thật ra $f'(0)$ không tồ n tại. (Xem hình.)



HÌNH 9



HÌNH 10

CHÚ Ý Ví dụ 5 và 6 chứng tỏ rằng bạn phải thận trọng khi sử dụng định lí Fermat để tìm cực trị. Ví dụ 5 cho thấy ngay cả khi f '(c) = 0, hàm số không nhất thiết có cực đại hay cực tiểu tại c. (Nói cách khác, phần đảo của định lí Fermat thường là sai.) Hơn nữa, có thể xảy ra cực trị ngay cả khi f '(c) không tồn tại (như trong ví dụ 6).

Định lí Fermat gợi ý cho ta ít nhất ta nên bắt đầu tìm những giá trị cực trị của f tại những số c sao cho f '(c) = 0 hay f '(c) không tồn tại. Người ta đã đặt một thuật ngữ đặc biệt cho những số như thế.

> **6 ĐỊNH NGHĨA** **Số tới hạn** của một hàm số f là một số c trong tập xác định của f sao cho f'(c) = 0 hay f'(c) không tồn tại.

Dùng thuật ngữ số tới hạn, ta có thể phát biểu lại định lí Fermat như sau (so sánh với định nghĩa 6 và định lí 4):

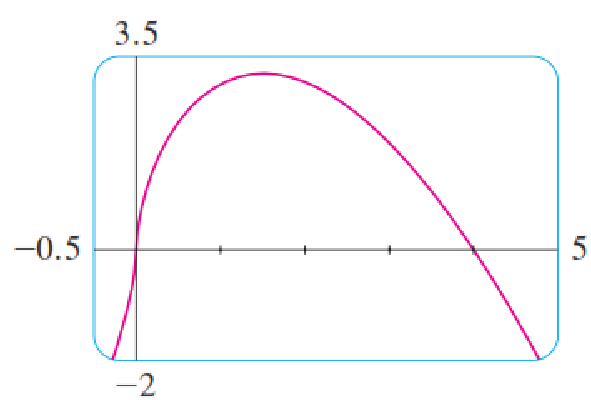
VÍ DỤ 7 Tìm những số tới hạn của $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$

GIẢI Ta có theo quy tắc đạo hàm của tích

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4-x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4-x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x+3(4-x)}{5x^{2/5}} = \frac{12-8x}{5x^{2/5}}$$

Do đó $f'(x) = 0$ khi $12 - 8x = 0$, tức $x = 3/2$, và $f'(x)$ không tồn tại khi $x = 0$. Vậy những số tới hạn là 3/2 và 0.



HÌNH 11 cho thấy đồ thị của f phù hợp với kết quả ta đã làm vì tại x = 1.5, đồ thị có tiếp tuyến nằm ngang và tại x = 0 có tiếp tuyến thẳng đứng

Dùng thuật ngữ số tới hạn, ta có thể phát biểu lại định lí Fermat như sau (so sánh với định nghĩa 6 và định lí 4):

> **7** Nếu f đạt cực đại hay cực tiểu tại c, thì c là số tới hạn của f.

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn , ta chú ý rằng hoặc là nó là cực đại, cực tiểu [trong trường hợp nó xảy ra tại những số tới hạn theo (7) hoặc nó xảy ra tại những điểm đầu mút của đoạn. Do đó phương pháp ba bước sau đây luôn hiệu quả.

> **PHƯƠNG PHÁP ĐOẠN** Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số liên tục f trên một đoạn [a, b]:
> 1. Tìm những giá trị của f tại những số tới hạn của f trên [a, b].
> 2. Tìm những giá trị của f tại những đầu mút.
> 3. Giá trị lớn nhất trong tất cả giá trị tìm được trong bước 1 và 2 chính là giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất của những giá trị ấy chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

VÍ DỤ 8 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -1/2 \leq x \leq 4$$

GIẢI Vì f liên tục trên đoạn [-1/2, 4], ta có thể dùng Phương Pháp Đoạn:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Vì f '(x) tồn tại với mọi x, những số tới hạn duy nhất của f xảy ra khi f '(x) = 0 , tức là x = 0 hay x = 2. Chú ý mỗi số tới hạn này thuộc đoạn (-1/2, 4).

Những giá trị của f tại những số tới hạn này là

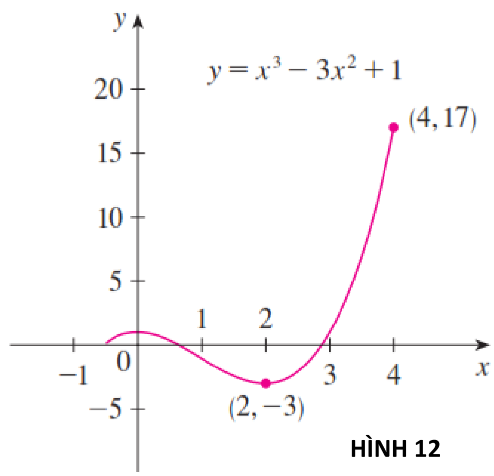
$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Những giá trị của f tại hai đầu mút là

$$f(-1/2) = 1/8 \qquad f(4) = 17$$

So sánh bốn giá trị này, ta thấy rằng giá trị lớn nhất là f(4) = 17 và giá trị nhỏ nhất là f(2) = - 3.

Chú ý trong ví dụ này giá trị lớn nhất xảy ra tại điểm mút, trong khi giá trị nhỏ nhất xảy ra tại số tới hạn. Đồ thị của f được vẽ trong Hình 12.



HÌNH 12

Ví dụ dưới đây cho thấy phần mềm vẽ đồ thị cho ta tìm được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất gần đúng một cách dễ dàng. Nhưng muốn tìm giá trị chính xác thì phải dùng giải tích.

VÍ DỤ 9

(a) Dùng máy tính để vẽ đồ thị từ đó ước tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) = x - 2sinx, $0 \leq x \leq 2\pi$.

(b) Dùng giải tich để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất chính xác.

GIẢI

(a) Hình bên cho thấy đồ thị của f trên đoạn [0, 2π]. Bằng cách di chuyển con trỏ sát điểm cực đại, ta thấy rằng tung độ không thay đổi nhiều trong phạm vi ấy. Giá trị lớn nhất xấp xỉ 6.97 xảy ra khi x ≈ 5.2. Tương tự, bằng cách di chuyển con trỏ sát điểm cực tiểu, ta thấy rằng giá trị nhỏ nhất vào khoảng - 0.68 xảy ra khi x ≈ 1.0. Ta có thể tìm được những giá trị gần đúng tốt hơn nếu ta zoom đồ thị lên, nhưng thay vào đó, ta sử dụng giải tích.

(b) Hàm số f(x) = x - 2sinx liên tục trên đoạn [0, 2pπ]. Vì f '(x) = 1 - 2cosx, ta có f '(x) = 0 khi cosx = 1/2 và điều này xảy ra khi x = π/3 hay 5π/3. Những giá trị của f tại những số tới hạn này là

$$f(\pi/3) = \pi/3 - 2\sin(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

$$f(5\pi/3) = 5\pi/3 - 2\sin(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Những giá trị tại các đầu mút là

$$f(0) = 0 \qquad \text{và} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

So sánh những giá trị này và dùng Phương Pháp Đoạn, ta được giá trị nhỏ nhất là $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ và giá trị lớn nhất là $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Các kết quả ở phần (a) sẽ kiểm tra tính đúng đắn của cách giải này.

VÍ DỤ 10 Kính Viễn Vọng Hubble được đặt vào quỹ đạo không gian bằng phi thuyền con thoi Discovery. Mô hình tốc độ của phi thuyền từ lúc cất cánh tại thời điểm t = 0 cho đến khi tên lửa đẩy văng ra tại thời điểm t = 126 s, được cho bởi công thức

$$v(t) = 0.001302\, t^3 - 0.09029\, t^2 + 23.61\, t - 3.083 \quad \text{(feet/sec)}$$

Dùng mô hình này, hãy ước tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của gia tốc của phi thuyền giữa thời điểm cất cánh và lúc tên lửa đẩy văng ra.

GIẢI Trước tiên ta tính gia tốc, là đạo hàm của tốc độ.

$$a(t) = v'(t) = 0.003906\, t^2 - 0.18058\, t + 23.61$$

Áp dụng Phương Pháp Đoạn cho hàm số liên tục a trên đoạn [0, 126].
Đạo hàm của a(t) là

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

Số tới hạn duy nhất xảy ra khi a'(t) = 0 :

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12 \qquad\qquad 23.12$$

Tính a(t) tại số tới hạn và tại đầu mút, ta được

$$a(0) = 23.61, \quad a(t_1) \approx 21.52, \quad a(126) \approx 62.87$$

Do đó gia tốc lớn nhất là khoảng 62.87 ft/s^2 và gia tốc nhỏ nhất là khoảng 21.52 ft/s^2.

BÀI TẬP

1. Giải thích sự khác nhau giữa giá trị nhỏ nhất và cực tiểu.

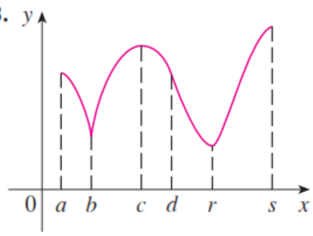
2. Giả sử f liên tục trên một đoạn [a, b].

(a) Định lý nào bảo đảm sự tồn tại của giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của f?

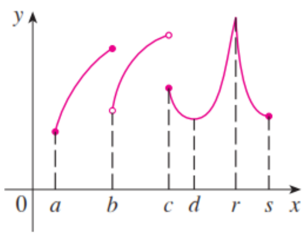
(b) Liệt kê các bước tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của f.

3-4. Tại mỗi số a, b, c, d, r, và s, cho biết là hàm số có đồ thị bên dưới đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất, cực đại hay cực tiểu, hay không phải cực đại lẫn cực tiểu.

3.

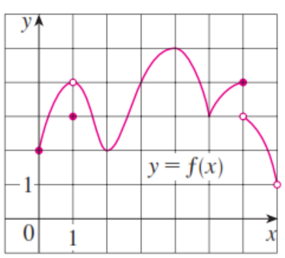


4.

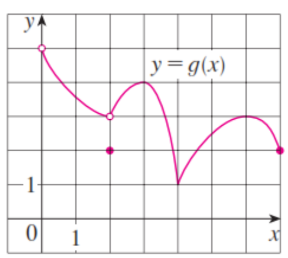


5-6. Dùng đồ thị để xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, cực đại, và cực tiểu của hàm số.

5.



6.



7-10. Phác họa đồ thị của hàm số f liên tục trên đoạn [1, 5] và thỏa mãn những tính chất cho trước.

7. có giá trị nhỏ nhất tại 2, giá trị lớn nhất tại 3, cực tiểu tại 4.

8. có giá trị nhỏ nhất tại 1, giá trị lớn nhất tại 5, cực đại tại 2, cực tiểu tại 4.

9. có giá trị lớn nhất tại 5, giá trị nhỏ nhất tại 2, cực đại tại 3, cực tiểu tại 2 và 4.

10. f không có cực đại, lẫn cực tiểu, nhưng 2 và 4 là những số tới hạn.

11. (a) Phác họa đồ thị hàm số có cực đại tại 2 và khả vi tại 2.

(b) Phác họa đồ thị hàm số có cực đại tại 2 và liên tục nhưng không khả vi tại 2.

12. (a) Phác họa đồ thị hàm số xác định trên [- 1, 2] có giá trị lớn nhất nhưng không có cực đại

(b) Phác họa đồ thị hàm số xác định trên [- 1, 2] có có cực đại nhưng không có giá trị lớn nhất.

13. (a) Phác họa đồ thị hàm số xác định trên [-1, 2] có giá trị lớn nhất nhưng không có giá trị nhỏ nhất.
(b) Phác họa đồ thị hàm số xác định trên [- 1, 2] , gián đoạn nhưng có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

14. (a) Phác họa đồ thị hàm số có hai cực đại, một cực tiểu, và không cp1 giá trị nhỏ nhất.
(b) Phác họa đồ thị hàm số có ba cực tiểu, hai cực đại, và bảy số tới hạn.

15-28. Phác họa đồ thị f bằng tay và dùng phác họa này để tìm những giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, cực đại và cực tiểu. (Sử dụng các đồ thị và các phép biến đổi đồ thị đã học trong Bài 1.2 và 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geqslant 1$

16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leqslant 5$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leqslant 2$

19. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x < 2$

20. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

21. $f(x) = x^2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 2$

22. $f(x) = 1 + (x+1)^2, \quad -2 \leqslant x < 5$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$

24. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{if } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{if } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{if } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{if } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

29-44. Tìm những số tới hạn của hàm số.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

32. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

33. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \sin^2\theta$

42. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2}\ln x$

45-46. Cho biết đạo hàm của hàm số, hỏi có bao nhiêu số tới hạn?

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|}\sin x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47-62. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của f trên đoạn cho trước.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2, \quad [-1, 4]$

51. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, \quad [-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad [-4, 4]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \sin 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad [\tfrac{1}{2}, 2]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

63. Nếu a và b là những số dương, tìm giá trị lớn nhất của $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \le x \le 1$.

64. Dùng đồ thị để ước tính những số tới hạn của hàm số $f(x) = | x^3 - 3x^2 + 1 |$ đ0úng đến một chữ số thập phân.

65-68. (a) Dùng đồ thị để ước tính giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số đúng đến haoi chữ số thập phân.

(b) Dùng giải tích để tìm những giá trị lớn nhất, nhỏ nhất chính xác.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \le x \le 1.$

66. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \le x \le 0$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \le x \le 0$

69. Giữa 0^0C và 30^oC, thể tích V (tính bằng cm^3) của 1 kg nước ở nhiệt độ T được cho xấp xỉ bằng công thức

$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$

Tìm nhiệt độ tại đó nước có tỷ trọng lớn nhất.

70. Một vật có trọng lượng W được kéo lê trên một mặt phẳng nằm ngang bằng một lực tác động dọc theo một sợi dây buộc vào nó. Nếu dây tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc θ, thì độ lớn của lực là

$$F = \frac{\mu W}{\mu\sin\theta + \cos\theta}$$

trong đó μ là hằng số dương gọi là hệ số ma sát và $0 \le \theta \le \pi/2$. Chứng tỏ rằng F nhỏ nhất khi $\tan\theta = \mu$

71. Một mô hình tính giá trung bình của một cân đường trắng ở Mỹ từ 1993 đến 2003 được cho bởi công thức

$$S(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

trong đó t tính bằng số năm tính từ tháng 8 năm 1993. Ước tính những lần đường rẽ nhất và mắc nhất trong thời gian 1993-2003.

72. Vào ngày 07/05/1992, phi thuyền con thoi Endeavour được phóng lên không gian trong sứ mạng STS-49, mục đích của chuyến đi là để thiết lập một động cơ đẩy mới trên vệ tinh liên lạc Intelsat. Bảng dưới cho ta dữ liệu về vận tốc của con thoi giữa lúc rời khỏi mặt đất và lúc trút bỏ các khoang nhiên liệu của tên lửa.

Sự kiện	Thời gian (s)	Vận tốc (ft/s)
Phóng lên	0	0
Bắt đầu xoay hướng	10	185
Kết thúc xoay hướng	15	319
89% sức đẩy	20	447
67% sức đẩy	32	742
Sức đẩy đến 104%	59	1325
Áp động lực tối đa	62	1445
Tách bỏ khoang nhiên liệu	125	4151

(a) Dùng đồ thị vẽ bằng máy để tìm đa thức bậc ba mô hình hóa tốt nhất vận tốc của tàu con thoi trong khoảng thời gian [0, 125]. Rồi vẽ đồ thị hàm số đa thức này.
(b) Tìm một mô hình cho gia tốc của tàu con thoi và dùng nó để ước tính gtrln, nhỏ nhất của gia tốc trong 125 giây đầu tiên.

73. Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, hoành cách mô được đẩy tới trước khiến gia tăng áp lực trong phổi. Tiếp theo là cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng cho trước không khí bị tống ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Hình X-quang cho thấy bán kính của khí quản co thắt đến khoảng hai phần ba bán kính lúc bình thường trong quá trình ho. Theo mô hình toán học của cơ chế ho, vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính r của khí quản qua công thức

$$V(r) = k(r_o - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}\, r_o \le r \le r_o$$

Trong đó k là hằng số và r_o là bán kính bình thường của khí quản. Giới hạn trên r là do sự kiện là vách khí quản co cứng dưới áp lực và một sức co thắt lớn hơn ½ r_o được cơ thể ngăn lại (nếu không sẽ bị ngạt thở).
(a) Xác định giá trị của r trong đoạn [½ r_o , r_o] tại đó v đạt giá trị lớn nhất. Điều này có phù hợp với chứng cứ thực nghiệm?
(b) Giá trị lớn nhất của v trên đoạn đó là bao nhiêu?
(c) Phác họa đồ thị của v trên đoạn [0 , r_o].

74. Chứng tỏ rằng 5 là số tới hạn của hàm số

$$g(x) = 2 + (x - 5)^2$$

nhưng g không có cực trị tại 5.

75. Chứng tỏ rằng hàm số

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

không có cực đại cũng như cực tiểu.

76. Nếu f có giá trị cực tiểu tại c, chứng tỏ rằng hàm số g(x) = - f(x) có giá trị cực đại tại c.

77. Chứng tỏ Định lý Fermat trong trường hợp f có cực tiểu tại c.

78. Môt hàm số bậc ba là một đa thức bậc ba, tức có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$.
(a) Chứng tỏ rằng một hàm số bậc ba có thể có hai, một, hay không có số tới hạn. Cho ví dụ và phác họa các đồ thị để minh họa ba trường hợp này.
(b) Có bao nhiêu giá trị cực trị mà một hàm số bậc ba có thể có?

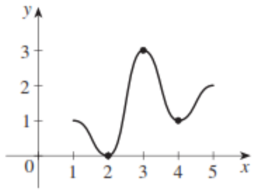
ĐÁP SỐ

1. Giá trị nhỏ nhất: giá trị nhỏ nhất trên toàn miền xác định; giá trị cực tiểu: giá trị nhỏ nhất khi x gần c.

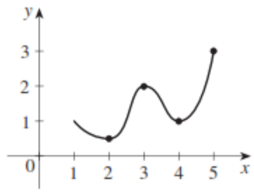
3. Giá trị lớn nhất tại s, nhỏ nhất tại r, cực đại tại c, cực tiểu tại b và r.

5. Giá trị lớn nhất f(4) = 5, cực đại f(4) = 5 và f(6) = 4, cực tiểu f(2) = 2 và f(5) = 3.

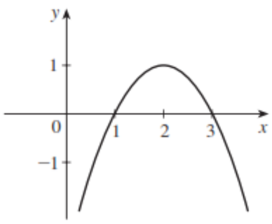
7.



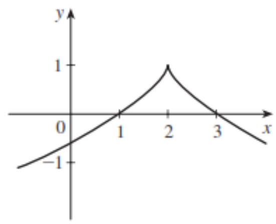
9.



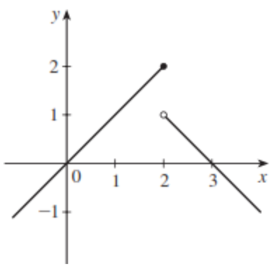
11. (a)



(b)



(c)



63. $f\left(\dfrac{a}{a+b}\right) = \dfrac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$

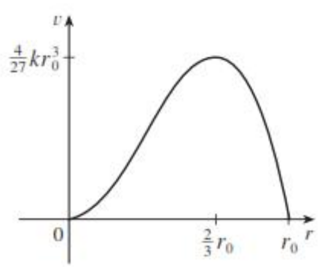
65. (a) 2.19, 1.81 (b) $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2, -\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2$

67. (a) 0.32, 0.00 (b) $\frac{3}{16}\sqrt{3}, 0$ **69.** $\approx 3.9665°\text{C}$

71. Cheapest, $t \approx 0.855$ (June 1994);
most expensive, $t \approx 4.618$ (March 1998)

73. (a) $r = \frac{2}{3}r_0$ (b) $v = \frac{4}{27}kr_0^3$

(c)



29. $-\frac{2}{5}$ **31.** $-4, 2$ **33.** $0, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ **35.** 0, 2

37. $0, \frac{4}{9}$ **39.** $0, \frac{8}{7}, 4$ **41.** $n\pi$ (n an integer) **43.** $0, \frac{2}{3}$

45. 10 **47.** $f(0) = 5, f(2) = -7$

49. $f(-1) = 8, f(2) = -19$

51. $f(3) = 66, f(\pm 1) = 2$ **53.** $f(1) = \frac{1}{2}, f(0) = 0$

55. $f(\sqrt{2}) = 2, f(-1) = -\sqrt{3}$

57. $f(\pi/6) = \frac{3}{2}\sqrt{3}, f(\pi/2) = 0$

59. $f(2) = 2/\sqrt{e}, f(-1) = -1/\sqrt[8]{e}$

61. $f(1) = \ln 3, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{4}$

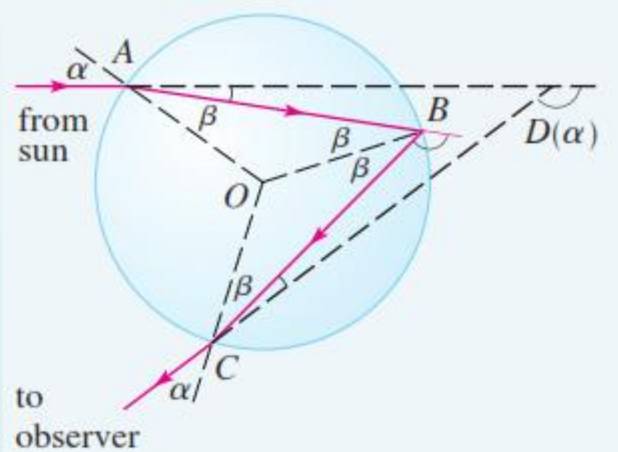
DỰ ÁN ỨNG DỤNG

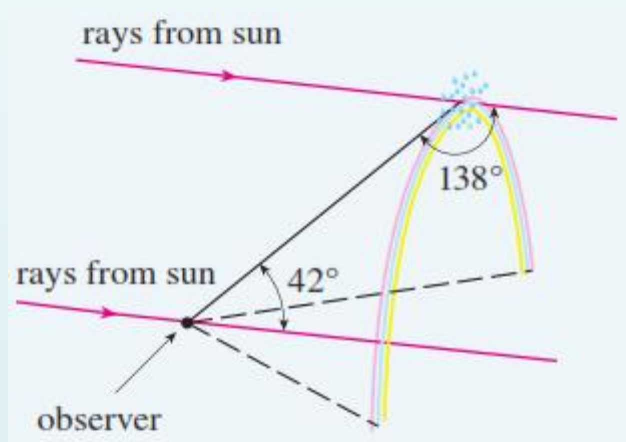
GIẢI TÍCH CỦA CẦU VÒNG

Cầu vòng được tạo ra khi những giọt mưa tán sắc ánh sáng mặt trời. Chúng đã từng mê hoặc nhân loại từ thời cổ đại và đã gây bao cảm hứng cho các nhà khoa học lao vào giải thích hiện tượng này từ thời Aristotle. Trong dự án này ta dùng ý tưởng của Descartes và Newton để giải thích hình dáng, vị trí, và màu sắc của cầu vòng.

1. *Hình dưới cho thấy một tia sáng mặt trời xuyên qua một giọt nước hình cầu tại A. Một số tia sáng phản chiếu, nhưng đường AB cho thấy đường đi của phần tia sáng xuyến qua giọt nước. Chú ý rằng tia sáng khúc xạ về phía đường pháp tuyến AO và thật ra theo Định luật Snell nói rằng sin α = k sin β, trong đó α là góc tới và β là góc khúc xạ, và k $\approx$4/3 là chiết xuất của nước. Tại B một phần ánh sáng đi ra giọt nước và khúc xạ vào không khí, nhưng đường BC cho thấy phần ánh sáng phản chiếu lại. (Góc tới bằng góc phản chiếu.) Khi tia sáng đến C, một phần được phản chiếu, nhưng lúc này ta chỉ quan tâm đến phần ánh sáng đi qua giọt nước mưa ở C. (Chú ý là nó được khúc xạ ra khỏi đường pháp tuyến.) Góc lệch D(α) là là số đo góc quay cùng chiều kim đồng hồ mà tia sáng đã tạo ra trong quá trình ba giai đoạn. Như vậy*

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \Pi + 2\alpha - 4\beta$$





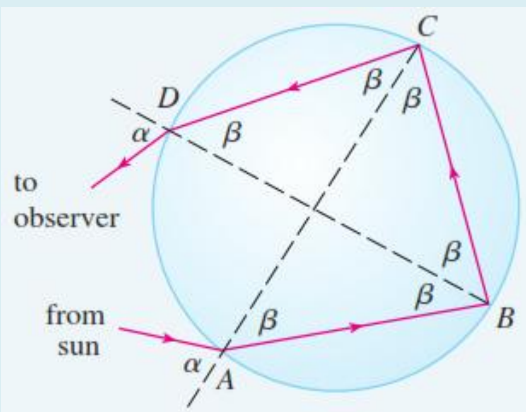
Chứng tỏ rằng giá trị nhỏ nhất của độ lệch D(α) $\approx$138^o và xảy ra khi a $\approx$59.4^o.

Ý nghĩa của độ lệch nhỏ nhất là khi $\alpha \approx$59.4^o ta có D'(α) $\approx$0, do đó $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Điều này có nghĩa nhiều tia sáng với a $\approx$59.4^0 sẽ lệch đi với xấp xỉ cùng độ lớn. Chính do sự tập trung của các tia sáng chiếu đến gần hướng của độ lệch nhỏ nhất đã sinh ra độ chói sáng của cầu vòng chính. Hình bên trên phải cho thấy góc nâng từ người quan sát đến điểm cao nhất trên cầu vòng là 180^o – 138^o = 42^o. (Góc này gọi là góc cầu vòng.)

2. *Bài toán 1 giải thích vị trí của cầu vòng chính , nhưng làm thế nào ta giải thích màu sắc của nó? Ánh sáng mặt trời gồm một dải độ dài sóng, từ đỏ qua cam, vàng, xanh lá, xanh lam, chàm, và tím. Như Newton đã khám phá trong các thí nghiệm lăng kính của ông vào năm 1666, chỉ số khúc xạ khác nhau cho mỗi màu. (Hiệu ứng này gọi là sự tán sắc)..) Đối với màu đỏ chỉ số khúc xạ là k $\approx$1.3318 trong khi với màu tím là k $\approx$1.3435. Bằng cách lặp lại các phép tính trong Bài toán 1 với những giá trị này của k, chứng tỏ rằng góc cầu vòng là khoảng 42.3^o cho cầu vòng đỏ và 40.6^o cho cầu vòng tím. Vì thế cầu vòng thực sự gồm bảy vòng tương ứng với bảy màu sắc.*

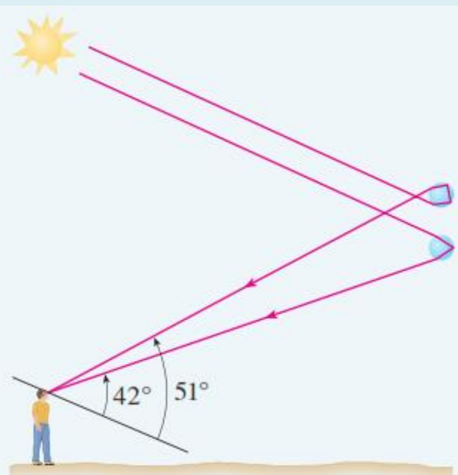
3. *Có thể bạn đã nhìn thấy một cầu vòng phụ nhạt hơn ở phía trên cầu vòng chính. Đó là kết quả tạo ra bởi một phần tia sáng đi vào giọt nước mưa và khúc xạ tại A, phản chiếu hai lần (tại B và C), và khúc xạ khi nó ra khỏi giọt mưa tại D (xem hình dưới trái). Lần này độ lệch D(α) là tổng những góc quay ngược chiều kim đồng hồ mà tia sáng thực hiện trong quá trình bốn giai đoạn này. Chứng tỏ rằng*

$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$ *và* D(α) *đạt giá trị nhỏ nhất khi* $\cos\alpha\sqrt{\dfrac{k^2-1}{8}}$



Lấy k = 4/3, chứng tỏ rằng độ lệch nhỏ nhất khoảng 129^o và do đó góc cầu vòng của cầu vòng phụ là khoảng 51^o, như trong hình dưới phải.

4. *Chứng tỏ màu sắc trong cầu vòng phụ xuất hiện theo thứ tự ngược với thứ tự trong cầu vòng chính.*



BÀI 4. 2. ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

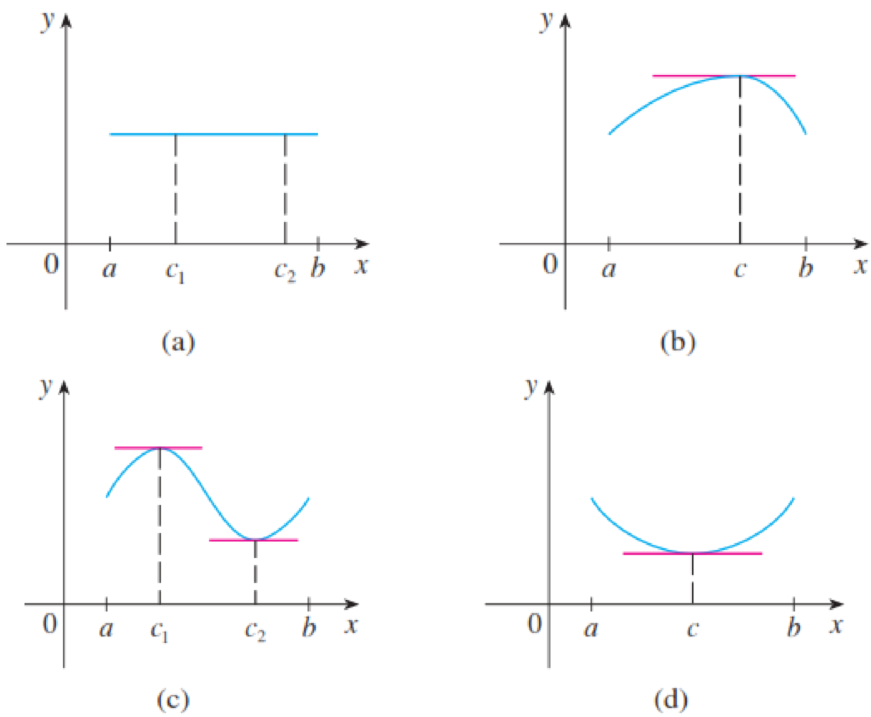
Chúng ta sẽ thấy là nhiều kết quả của chương này phụ thuộc vào một sự kiện trung tâm, đó là Định Lý Giá Trị Trung Bình. Nhưng để đến được định lý ấy trước tiên ta phải chứng minh định lý sau.

> **ĐỊNH LÝ ROLLE** Cho f là một hàm số thỏa mãn ba gia thiết sau:
> **1.** f liên tục trên đoạn [a, b].
> **2.** f khả vi trên khoảng (a, b).
> **3.** f(a) = f(b)
> Thế thì tồn tại một số c thuộc (a, b) sao cho f'(c) = 0

Định lý Rolle lần đầu xuất hiện trong tác phẩm Phương pháp giải những đẳng thức của nhà toán học Pháp tên là Michel Rolle (1652-1719). Ông là một nhà phê phán các phương pháp của thời đại ông và tấn công vào giải tích vì ông coi đó là "một tập hợp những sai lầm được ngụy tạo kheó léo". Tuy vậy về sau ông bị thuyết phục bởi sự đúng đắn tinh túy của phương pháp giải tích.

Trước khi chứng minh ta hãy nhìn vào đồ thị của một số hàm số tiêu biểu thỏa mãn ba giả thiết trên. Hình dưới trình bày bốn đồ thị như thế. Trong mỗi trường hợp ta đều thấy tồn tại ít nhất một điểm (c, f(c)) trên đồ thị tại đó tiếp tuyến nằm ngang và do đó f '(c) = 0 . Do đó định lý Rolle là đúng đắn.

HÌNH 1



CM Xét ba trường hợp:

TH I f(x) = k, (k là hằng số)

Khi đó f '(x) = 0, do đó số c có thể lấy là bất kỳ số nào thuộc (a, b).

TH II f(x) > f(a) **với một vài giá trị x thuộc (a, b)** [như trong hình 1(b) hay (c)]. Với giả thiết (1), áp dụng Định Lý Giá Trị Cực Trị (mà ta có thể áp dụng nhờ giả thiết 1), f có giá trị lớn nhất đâu đó trên [a, b]. Vì f(a) = f(b), nó phải đạt giá trị lớn nhất này tại một số c thuộc khoảng (a, b). Thế thì f có cực đại tại c và, theo giả thiết 2, vì f có đạo hàm tại c, do đó theo

Fermat f '(c) = 0 .

TH III f(x) < f(a) với một vài giá trị x thuộc (a, b) [như trong hình 1(c) hay (d)]. Theo Định Lý Giá Trị Cực Trị, f có giá trị nhỏ nhất trên [a, b]. Vì f(a) = f(b), nó phải đạt giá trị nhỏ nhất này tại một số c thuộc khoảng (a, b). Thế thì f có cực tiểu tại c và, và do đó theo Fermat f '(c) = 0.

VÍ DỤ 1 Hãy áp dụng Định Lý Rolle cho hàm số vị trí s = f(t) của một vật thể chuyển động. Nếu vật thể ở cùng vị trí tại hai thời điểm khác nhau t = a và t = b, thế thì f(a) = f(b). Định lý Rolle nói rằng tồn tại một thời điểm nào đó t = c giữa a và b sao cho f '(c) = 0; tức là vận tốc bằng 0. (Đặc biệt, bạn có thể thấy điều này đúng khi một quả bóng được ném thẳng lên không.)

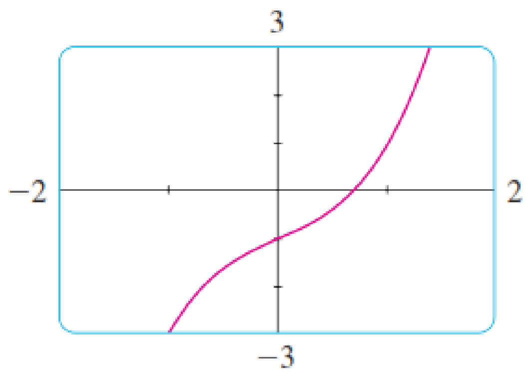
VÍ DỤ 2 Chứng tỏ rằng phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ có đúng một nghiệm thực.

GIẢI Trước tiên ta dùng Định Lý Giá Trị Trung Gian (bài 2. 5) để chứng tỏ rằng nghiệm này tồn tại. Đặt $f(x) = x^3 + x - 1$. Ta có f(0) = - 1 < 0 và f(1) = 1 > 0 . Vì f là một đa thức nên f liên tục, do đó theo Định Lý Giá Trị Trung Gian, tồn tại một số c giữa 0 và 1 sao cho f(c) = 0 . Do đó phương trình cho có nghiệm.

Để chứng tỏ phương trình không có nghiệm thực nào khác, ta dùng Định Lý Rolle và phép phản chứng. Giả sử có 2 nghiệm a và b, tức có f(a) = f(b). Vì f là đa thức nên f có đạo hàm trên (a, b). Do đó theo Định lý Rolle, tồn tại
số c giữa a và b sao cho f '(c) = 0. Nhưng

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 \quad \text{với mọi } x$$

nên f '(x) không thể bằng 0. Điều này là vô lý . Do đó phương trình không thể có 2 nghiệm thực.



HÌNH 2

Ứng dụng chính của Định Lý Rolle là để chứng minh định lý quan trọng sau, đầu tiên được một nhà toán học Pháp khác là Joseph Louis Lagrange phát biểu.

ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH Cho f một hàm số thỏa mãn những giả thiết sau
1. f liên tục trên đoạn [a, b].
2. f có đạo hàm trên khoảng (a, b).
Thế thì tồn tại một số c trên (a, b) sao cho

1 $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

hoặc

2 $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

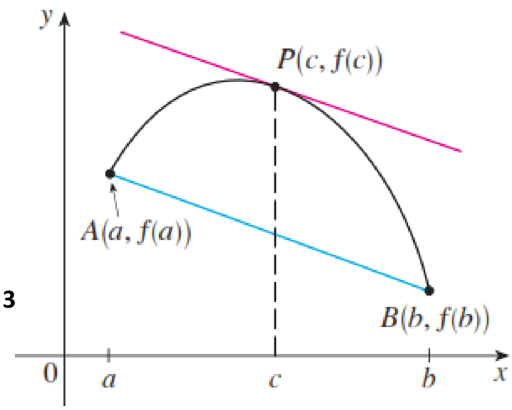
Trước khi chứng minh định lý này, ta có thể minh họa định lý bằng đồ thị như trong hình dưới. Hai điểm A(a, f(a)) và B(b, f(b)) trên đồ thị của hai hàm số có đạo hàm. Độ dốc của cát tuyến AB là

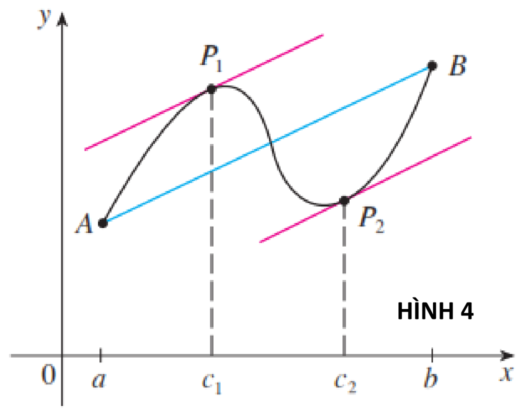
3 $$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

chính là biểu thức ở vế phải của phương trình 1. Vì f '(c) là độ dốc của tiếp tuyến tại điểm (c, f(c)), Định Lý Giá Trị Trung

Gian cho bởi 1 nói rằng tồn tại ít nhất một điểm P(c, f(c)) trên đồ thị tại đó độ dốc của tiếp tuyến bằng độ dốc của cát tuyến AB. Nói cách khác, tồn tại một điểm P tại đó tiếp tuyến song song với cát tuyến AB.

HÌNH 3





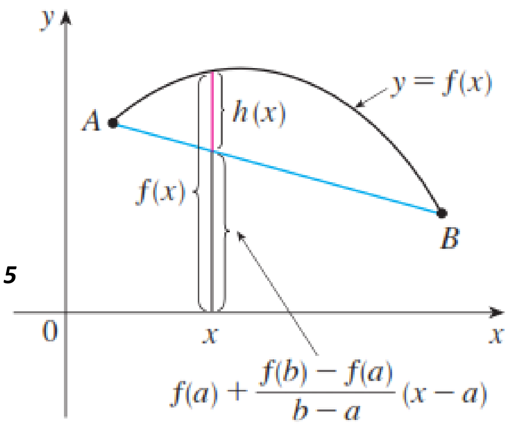
HÌNH 4

CM Ta áp dụng Định Lý Rolle cho hàm số mới h được xác định là hiệu của f và hàm số mà đồ thị của nó là đường thẳng AB. Dùng phương trình 3, ta thấy rằng phương trình của đường thẳng AB có thể viết là

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

hay
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

HÌNH 5



Do đó, như Hình 5 cho thấy,

4 $$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Trước tiên ta phải chứng thực là h thỏa mãn ba giả thiết của Định Lý Rolle.

1. Hàm số h liên tục trên [a, b] vì nó là tổng của f và hàm số bậc nhất, cả hai đều liên tục.
2. Hàm số h có đạo hàm trên (a, b) vì cả f và hàm số bậc nhất đều có đạo hàm. Thật ra, ta có thể tính h' trực tiếp từ Phương trình 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Chú ý là f(a) và [f(b) - f(a)]/(b - a) là hằng số)

3. $$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$

$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Do đó , h(a) = h(b).

Vì h thỏa mãn các giả thiết của Định lý Rolle, nên tồn tại một số c thuộc (a, b) sao cho h'(c) = 0. Do đó:

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

và như thế $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{(ĐPCM)}$$

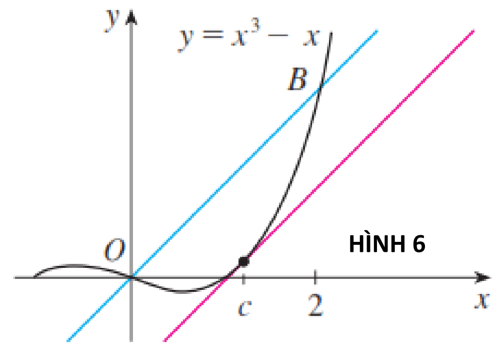
VÍ DỤ 3 Để minh họa Định Lý Giá Trị Trung Bình cho một hàm số đặc biệt, hãy xét $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Vì f là đa thức nên f liên tục và có đạo hàm với mọi x, vì thế nó liên tục trên [0, 2] và có đạo hàm trên (0, 2). Do đó, theo Định Lý Giá Trị Trung Bình, tồn tại c thuộc (0, 2) sao cho

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Mà $f(2) = 6$, $f(0) = 0$, và $f'(x) = 3x^2 - 1$, nên phương trình trở thành

$$6 = (3c^2 - 1).\,2 = 6c^2 - 2$$

Giải phương trình, ta được $c^2 = 4/3$ hay $c = \pm\ 2/\sqrt{3}$. Nhưng c phải thuộc (0, 2) nên $c = 2/\sqrt{3}$. Hình bên minh họa kết quả này: Tiếp tuyến tại giá trị c này song song với đường AB.



HÌNH 6

VÍ DỤ 4 Nếu một vật thể di chuyển trên một đường thẳng với phương trình vị trí $s = f(t)$, thế thì vận tốc trung bình giữa $t = a$ và $t = b$ là

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

và vận tốc ở $t = c$ là $f'(c)$. Do đó Định Lý Giá Trị Trung Bình cho ta biết tại thời điểm $t = c$ giữa a và b vận tốc tức thời $f'(c)$ thì bằng với vận tốc trung bình đó. Ví dụ, nếu một ô tô đi 180 km trong 2 giờ, thế thì ít nhất có một lúc nào đó đồng hồ tốc độ của ô tô sẽ chỉ số 90 km/h.

Tổng quát, Định Lý Giá Trị Trung Binh có thể được hiểu là tồn tại một số tại đó tốc độ biến thiên tức thời thì bằng với tốc độ biến thiên trung bình trên một đoạn.

Ý nghĩa chính của Định Lý Giá Trị Trung Binh là nó giúp ta có được thông tin về một hàm số từ thông tin về đạo hàm của nó. Ví dụ sau sẽ cung cấp một ví dụ về nguyên tắc này.

VÍ DỤ 5 Giả sử $f(0) = -3$ và $f'(x) \le 5$ với mọi giá trị của x. Hỏi f(2) có thể lớn bao nhiêu?

GIẢI Ta được cho hàm số f có đạo hàm (và do đó nó liên tục) mọi nơi. Đặc biệt, ta có thể áp dụng Định Lý Giá Trị Trung Binh trên đoạn [0, 2]. Vậy tồn tại số c sao cho

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

do đó $$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Mà ta biết $f'(x) \le 5$ với mọi x, do đó $f'(c) \le 5$. Nhân hai vế của bất đẳng thức này cho 2, ta được $2f'(c) \le 10$, vì thế

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \le -3 + 10 = 7$$

Giá trị lớn nhất có thể có của f(2) là 7.

Định Lý Giá Trị Trung Bình có thể được sử dụng để thiết lập một số kết quả cơ bản của giải tích. Một trong những kết quả này là định lý sau đây. Những định lý khác có thể được tìm thấy trong những bài sau.

5 ĐỊNH LÝ Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x trên khoảng (a, b), thì f là hàm số hằng trên (a, b).

CM Cho x_1, x_2 là hai số bất kỳ thuộc (a, b) vói $x_1 < x_2$. Vì f là khả vi trên (a, b) nên nó khả vi trên (x_1 , x_2) và liên tục trên [x_1, x_2]. Áp dụng Định Lý Giá Trị Trung Bình cho f trên đoạn [x_1, x_2], ta được một số c sao cho $x_1 < c < x_2$ và

6 $$f(x_2) – f(x_1) = f'(c)(x_2 – x_1)$$

Vì $f'(x) = 0$ với mọi x nên $f'(c) = 0$, và Phương trình 6 thành

$$f(x_2) – f(x_1) = 0 \quad \text{tức} \quad f(x_2) = f(x_1)$$

Do đó f có cùng giá trị tại hai số bất kỳ x_1, x_2 thuộ c (a, b), có nghĩa là f là hàm số hằng trên (a, b).

7 HỆ QUẢ Nếu $f'(x) = g'(x)$ với mọi x trên khoảng (a, b), thì f - g là hàm số hằng trên (a, b); tức $f(x) = g(x) + c$ trong đó c là hằng số.

CM Đặt F(x) = f(x) - g(x). Ta có

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

với mọi x thuộc (a, b). Do đó, theo Định Lý 5, F là hàm số hằng; tức là f - g là hằng số.

CHÚ Ý Cẩn thận trọng khi áp dụng Định Lý 5. Cho

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & khi \;\; x > 0 \\ -1 & khi \;\; x < 0 \end{cases}$$

Tập xác định của f là D = {x/ x ≠ 0} và $f'(x) = 0$ với mọi x thuộc D. Nhưng f không phải là hàm số hằng. Kết quả này không mâu thuẫn với Định Lý 5 vì D không phải là một khoảng. Chú y rằng f là hàm số hằng trên khoảng (0, ∞) và cũng trên khoảng (- ∞, 0).

VÍ DỤ 6 Chứng tỏ đẳng thức $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

GIẢI Dù có thể chứng minh đẳng thức này không cần đến giải tích, nhưng dùng giải tích thì đơn giản hơn. Đặt

$$f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x, \text{ thì}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

với mọi giá trị của x. Do đó f(x) = C, một hằng số. Để xác định giá trị của C, ta cho x = 1 [vì ta có thể tính được f(1) một cách chính xác]. Thì

$$C = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2.$$

Vậy $\tan^{-1}x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

BÀI TẬP

1 - 4. Kiểm tra hàm số thỏa mãn ba giả thiết của Định Lý Rolle trên đoạn cho trước. Rồi tìm tất cả số c thỏa mãn kết luận của Định Lý Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, [1, 3]

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, [0, 3]

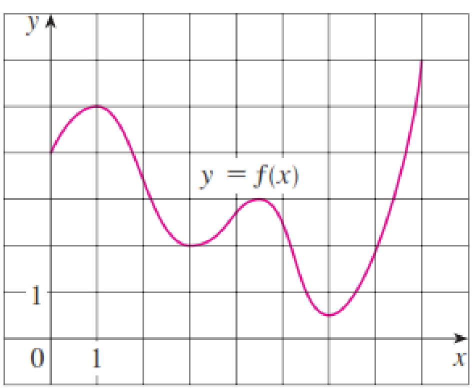
3. $f(x) = \sqrt{x} - x/3$, [0, 9]

4. $f(x) = \cos 2x$, [π/8, 7π/8]

5. Cho $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Chứng tỏ rằng f(- 1) = f(1) nhưng không có số c thuộc (-1, 1) sao cho f '(c) = 0. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định Lý Rolle.

6. Cho f(x) = tan x. Chứng tỏ rằng f(0) = f(π) nhưng không có số c thuộc (0, π) sao cho f '(c) = 0. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định Lý Rolle.

7. Dùng đồ thị f để ước tính giá trị của c thỏa mãn kết luận của Định Lý Giá Trị Trung Bình trên đoạn [0, 8].



8. Dùng đồ thị f trong Bài tập 7 để ước tính giá trị của c thỏa mãn kết luận của Định Lý Giá Trị Trung Bình trên đoạn [0, 8].

9. (a) Vẽ đồ thị hàm số f(x) = x + 4/x trong khung hình chữ nhật [0, 10] x [0, 10].

(b) Vẽ đồ thị của cát tuyến đi qua điểm (1, 5) và (8, 8.5) trên cùng khung hình với f.

(c) Tìm số c thỏa mãn kết luận của Định Lý Giá Trị Trung Bình của hàm số f trên đoạn [1, 8]. Rồi vẽ đồ thị tiếp tuyến tại điểm (c, f(c)) và nhận xét là nó song song với đường cát tuyến.

10. (a) Trong khung hình chữ nhật [- 3, 3] x [- 5, 5], vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x^3 – 2x$ và cát tuyến đi qua điểm (- 2, - 4) và (2, 4). Dùng đồ thị để ước tính hoành độ những điểm mà tiếp tuyến tại đó song song với đường cát tuyến.

(b) Tìm giá trị chính xác của số c thỏa mãn kết luận của Định Lý Giá Trị Trung Bình của hàm số f trên đoạn [- 2, 2] và so sánh với kết quả của bạn ở phần (a).

11-14. Kiểm tra hàm số thỏa mãn những giả thiết của Định Lý Giá Trị Trung Bình trên đoạn cho trước. Rồi tìm tất cả giá trị của c thỏa mãn kết luận của Định Lý Giá Trị Trung Bình.

11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, [- 1, 1]

12. $f(x) = x^3 + x - 1$, [0, 2]

13. $f(x) = e^{-2x}$, [0, 3]

14. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, [1, 4]

15. Cho $f(x) = (x – 3)^2$. Chứng tỏ rằng không tồn tại giá trị c trên (1, 4) sao cho f(4) – f(1) = f ’(c)(4- 1). Tại sao kết quả này không mẫu thuẩn với Định Lý Giá Trị Trung Bình?

16. Cho f(x) = 2 - |2x - 1| . Chứng tỏ rằng không có giá trị c sao cho f(3) - f(0) = f '(c)(3 - 0). Tại sao kết quả này không mâu thuẫn với Định Lý Giá Trị Trung Bình?

17. Chứng tỏ phương trình $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ có đúng một nghiệm thực.

18. Chứng tỏ phương trình 2x - 1 – sin x = 0 có đúng một nghiệm thực.

19. Chứng tỏ rằng phương trình $x^3 – 15x + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc [- 2, 2].

20. Chứng tỏ phương trình $x^4 + 4x + c = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm thực.

21. (a) Chứng tỏ một đa thức bậc 3 có nhiều nhất 3 nghiệm thực.

(b) Chứng tỏ một đa thức bậc n có nhiều nhất 3 nghiệm thực.

22. (a) Giả sử f có đạo hàm trên R và có hai nghiệm thực. Chứng tỏ f ' có ít nhất một nghiệm thực.

(b) Giả sử f có đạo hàm cấp hai trên R và có ba nghiệm thực. Chứng tỏ f '' có ít nhất một nghiệm thực.

(c) Bạn có thể tổng quát (a) và (b) không?

23. Nếu f(1) = 10 và $f'(x) \geq 2$ trên đoạn [1, 4], hãy cho biết f(4) có thể nhỏ đến bao nhiêu?

24. Giả sử $3 \leq f'(x) \leq 5$ với mọi x. Chứng tỏ rằng $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$.

25. Có tồn tại một hàm số f sao cho f(0) = - 1, f(2) = 4 và $f'(x) \leq 2$ với mọi x hay không?

26. Giả sử f và g là hai hàm số liên tục trên [a, b] và khả vi trên (a, b). Giả sử thêm là f(a) = g(a) và f '(x) < g '(x) với a < x < b. Chứng minh rằng f(b) < g(b). [Gợi ý: Áp dụng Định Lý Giá Trị Trung Bình cho hàm số h = f – g.]

27. Chứng tỏ $1 + x < 1 + \frac{1}{2}x$ nếu x > 0.

28. Giả sử f là hàm số lẻ và khả vi mọi nơi. Chứng tỏ rằng với mỗi số b dương, tồn tại một số c thuộc (- b, b) sao cho f '(c) = f(b)/b.

29. Dùng Định Lý Giá Trị Trung Bình để chứng minh bất đẳng thức :

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b| \quad \text{với mọi a, b.}$$

30. Nếu f '(x) = c (c là hằng số) với mọi x, dùng Hệ Quả 7 để chứng tỏ rằng f(x) = cx + d với d là hằng số nào đó.

31. Cho f(x) = 1/x và

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & khi\ x > 0 \\ 1 + \dfrac{1}{x} & khi\ x < 0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng f '(x) = g' (x) với mọi x thuộc miền xác định. Ta có thể rút ra từ Hệ Quả 7 là f = g là hằng số được không?

32. Dùng phương pháp của Ví dụ 6 để chứng minh đẳng thức

$$2\sin^{-1}x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geq 0$$

33. Lúc 2:00 PM, đồng hồ tốc độ ô tô chỉ số 30 dặm/h. Lúc 2:10 PM, đồng hồ chỉ 50 dặm/h. Chứng tỏ rằng có một lúc nào đó giữa 2: 00 và 2:10, gia tốc chính xác bằng 120 dặm/h^2.

33. Hai vận động viên bắt đầu cuộc đua cùng lúc và kết thúc hòa. Chứng tỏ rằng tại một lúc nào đó trong cuộc đua họ có cùng tốc độ.

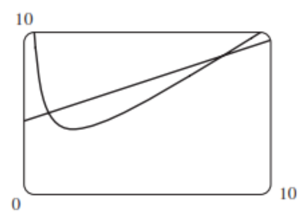
33. Một số a gọi là **điểm cố định** của một hàm số f nếu f(a) = a. Chứng tỏ rằng nếu $f'(x) \neq 1$ với mọi x, thì f có nhiều nhất một điểm cố định.

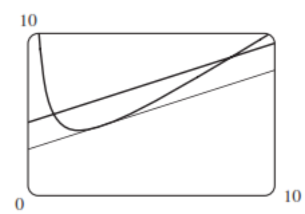
ĐÁP SỐ

1. 2 **3.** $\frac{9}{4}$ **5.** f is not differentiable on $(-1, 1)$

7. 0.8, 3.2, 4.4, 6.1

9. (a), (b) (c) $2\sqrt{2}$





11. 0 **13.** $-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{6}(1 - e^{-6})\right]$ **15.** f is not continous at 3

23. 16 **25.** No **31.** No

BÀI 4. 3. ĐẠO HÀM VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Nhiều ứng dụng của giải tích phụ thuộc vào khả năng ta rút ra những tính chất của hàm số f từ thông tin về đạo hàm của nó. Vì f '(x) biểu thị độ dốc của đường cong y = f(x) tại điểm (x, f(x)), nó cho ta biết về hướng mà đường cong đi tới tại mỗi điểm. Do đó thật hợp lý khi ta mong đợi là thông tin về f '(x) sẽ cung cấp cho ta thông tin về f(x).

f ' CHO TA BIẾT GÌ VỀ f?

Để biết đạo hàm của f có thể cho ta biết khi nào hàm số đồng biến hay nghịch biến, hãy nhìn vào hình bên. (Xem lại định nghĩa của đồng biến và nghịch biến ở bài 1.1). Giữa A và B và giữa C và D, những tiếp tuyến có độ dốc dương và như thế f '(x) > 0. Giữa B và C, tiếp tuyến có độ dốc âm và như thế f '(x) < 0. Do đó có vẻ như là f đồng biến khi f '(x) dương và nghịch biến khi f '(x) < 0. Để chứng minh điều này, ta sử dụng Định Lý Giá Trị Trung Bình.

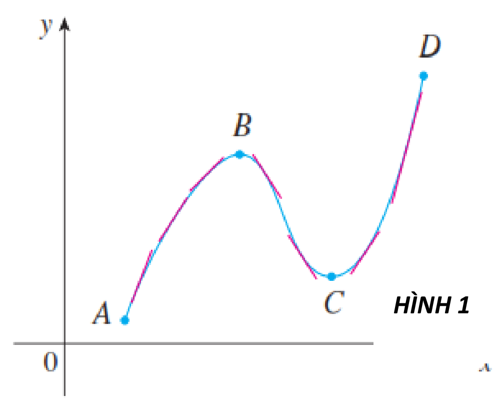
DẤU HIỆU ĐỒNG BIẾN/NGHỊCH BIẾN
(a) Nếu f '(x) > 0 trên một khoảng thì hàm số đồng biến trên khoảng ấy
(b) Nếu f '(x) > 0 trên một khoảng thì hàm số đồng biến trên khoảng ấy

CM

(a) Gọi x_1 và x_2 là hai số bất kỳ trong khoảng với $x_1 < x_2$. Theo định nghĩa của một hàm số đồng biến ta phải chứng tỏ $f(x_1) < f(x_2)$.

Vì ta có f '(x) > 0, nên f có đạo hàm trên $[x_1, x_2]$. Do đó, theo ĐLGTTB tồn tại số c giữa x_1, x_2 sao cho

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$



HÌNH 1

Vì f'(c) > 0 và $x_2 - x_1 > 0$ vì $x_1 < x_2$. Do đó vế phải của là dương, và như thế

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{hay} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Điều này chứng tỏ f đồng biến.

(b) Chứng minh tương tự.

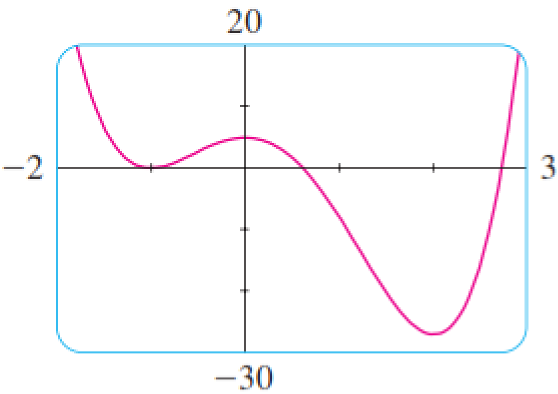
VÍ DỤ 1 Tìm khi nào hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ đồng biến và khi nào nghịch biến.

GIẢI $\quad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$

Để áp dụng dấu hiệu Đ/N (đồng biến/nghịch biến) ta phải biết khi nào f '(x) > 0 và khi nào f '(x) < 0. Điều này phụ thuộc vào dấu của ba nhân tử của f '(x), đó là 12x, x - 2 và x + 1. Ta chia trục số thành những khoảng mà các đầu mút của chúng là những số tới hạn - 1, 0, và 2 và sắp xếp công việc như trong bảng dưới. Một dấu + cho biết biểu thức dương, và một dấu - là biểu thức âm. Cột cuối cùng của bảng dấu cho ta kết luận về biến thiên của f dựa vào dấu hiệu Đ/N. Chẳng hạn. f '(x) < 0 khi 0 < x < 2, vì thế f nghịch biến trên (0, 2).(Cũng đúng khi nói rằng f nghịch biến trên đoạn [0, 2]).

Khoảng	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	−	−	−	−	nghịch biến trên $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	−	−	+	+	đồng biến trên $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	+	−	+	−	nghịch biến trên $(0, 2)$
$x > 2$	+	+	+	+	đồng biến trên $(2, \infty)$

Đồ thị của f được cho trong Hình 2, khẳng định kết quả cho trong bảng.



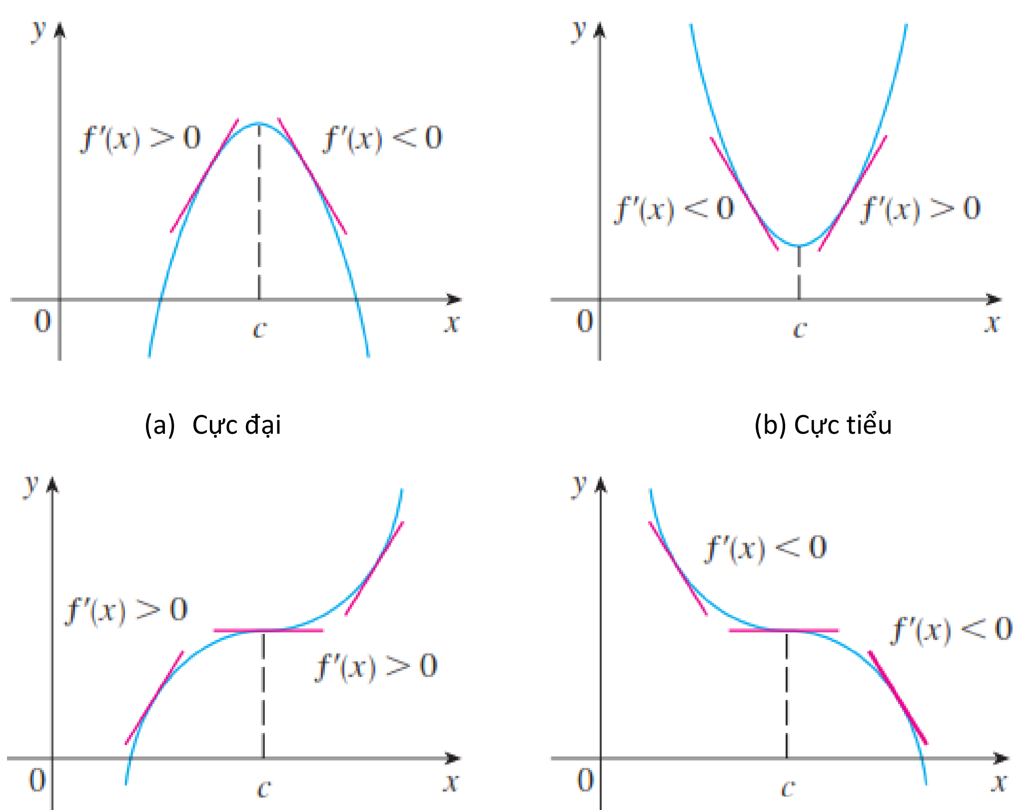
Ta nhớ từ Bài 4.1 là nếu f đạt cực đại hay cực tiểu tại c, thì c phải là điểm tới hạn của f (theo Định lý Fermat), nhưng không phải mỗi điểm tới hạn đều cho ta một cực đại hay cực tiểu. Do đó ta cần một phép kiểm tra để giúp ta biết được f có cực đại hay cực tiểu tại số tới hạn.

Bạn có thể nhìn trong Hình 2 thấy rằng f(0) = 5 là một giá trị cực đại của f vì f đồng biến trên (- 1, 0) và nghịch biến trên (0, 2). Hay, nói theo đạo hàm, f '(x) > 0 khi - 1 < x < 0 và f '(x) < 0 khi 0 < x < 2. Nói cách khác, dấu của f '(x) đổi từ dương sang âm tại 0. Quan sát này là cơ sở của dấu hiệu sau.

DẤU HIỆU ĐẠO HÀM BẬC NHẤT Giả sử c là một điểm tới hạn của một hàm số liên tục f.
(a) Nếu f' đổi dấu từ dương sang âm tại c, thì f đạt một cực đại tại c.
(b) Nếu f' đổi dấu từ âm sang dương tại c, thì f đạt một cực tiểu tại c.
(c) Nếu f không đổi dấu tại c (chẳng hạn, nếu f' dương ở cả hai bên c hoặc âm ở cả hai bên), thì f không có cực đại hay cực tiểu tại c.

Dấu hiệu đạo hàm bậc nhất là kết quả của dấu hiệu Đ/N. Trong phần (a), chẳng hạn, vì dấu của f '(x) thay đổi từ dương sang âm tại c, nên f đồng biến bên trái c và nghịch biến bên phải c. Do đó f đạt cực đại tại c.

Ta có thể nhớ Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất dễ dàng bằng cách mường tượng bằng đồ thị như trong Hình 3 dưới.



(a) Cực đại

(b) Cực tiểu

Không có cực đại hoặc cực tiểu

Không có cực đại hoặc cực tiểu

HÌNH 3

VÍ DỤ 2 Tìm giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số f trong Ví dụ 1.

GIẢI Từ bảng xét dấu trong Ví dụ 1 ta thấy f ' đổi dấu từ âm sang dương tại - 1, do đó f(- 1) = 0 là một giá trị cực tiểu theo Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất. Tương tự, f ' đổi dấu từ âm sang dương tại 2, do đó f(2) = - 27 cũng là một giá trị cực tiểu. f(0) = 5 là một giá trị cực đại vì f '(x) đổi dấu từ dương sang âm tại 0.

VÍ DỤ 3 Tìm giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số

$$g(x) = x + 2\sin x \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

GIẢI Để tìm những điểm tới hạn của g, ta lấy đạo hàm:

$$g'(x) = 1 + 2\cos x$$

Vì thế g'(x) = 0 khi cos x = - 1/2. Nghiệm của phương trình này là 2π/3 và 4π/3. Vì g có đạo hàm mọi nơi, những điểm tới hạn duy nhất là 2π/3 và 4π/3 vì thế ta xét dấu của g trong bảng sau.

Khoảng	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	*đồng biến trên* $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	*nghịch biến trên* $(2/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	*đồng biến trên* $(4\pi/3, 2\pi)$

Vì g'(x) đổi dấu từ dương sang âm tại 2π/3, nên ta có một cực đại tại 2π/3 và giá trị cực đại là

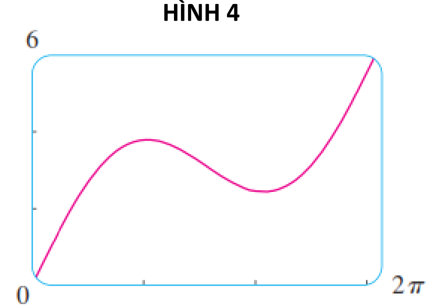
$$g(2\pi/3) = 2\pi/3 + 2\sin(2\pi/3) = 2\pi/3 + 2(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3 + \sqrt{3} \approx 3.8$$

Tương tự, g'(x) đổi dấu từ âm sang dương tại 4π/3 và do đó

$$g(4\pi/3) = 4\pi/3 + 2\sin(4\pi/3) = 4p\pi/3 + 2(-\sqrt{3}/2) = 4\pi/3 - \sqrt{3} \approx 2.46$$

là một giá trị cực tiểu. Đồ thị của g trong Hình 4 củng cố kết luận của chúng ta.

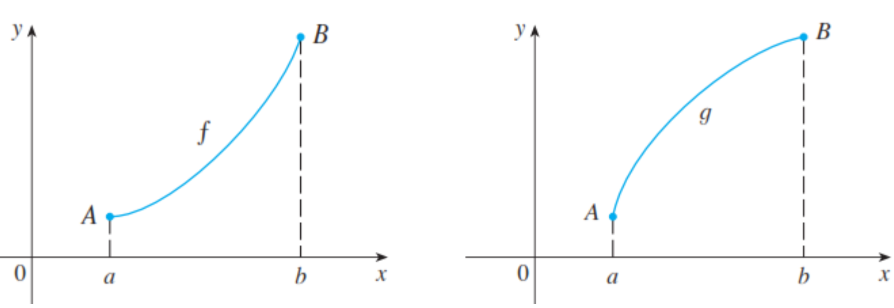
HÌNH 4

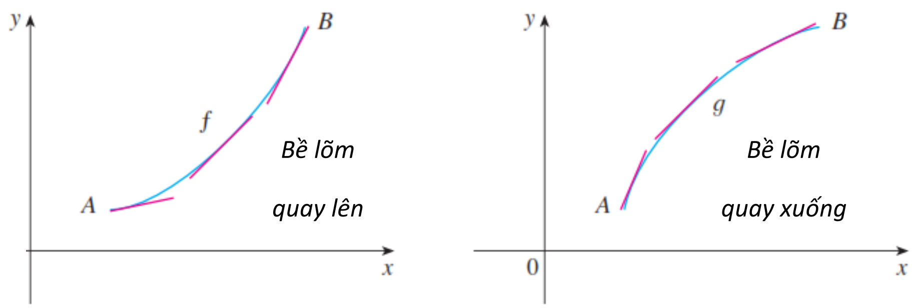


f " CHO TA BIẾT GÌ VỀ f?

Hình 5 cho ta hai đồ thị của hàm số đồng biến trên (a, b). Cà hai đồ thị nối điểm A đến điểm B nhưng chúng uốn lên theo hướng khác nhau. Làm thế nào ta phân biệt hai dạng đồ thị này? Trong Hình 6 tiếp tuyến của đồ thị này được vẽ tại vài điểm. Ở (a) đồ thị đều nằm về phía trên các tiếp tuyến và f được gọi là có bề lõm quay lên trên (a, b). Ở (b) đồ thị đều nằm về phía dưới các tiếp tuyến và g được gọi là có bề lõm quay xuống trên (a, b).

HÌNH 5





HÌNH 6

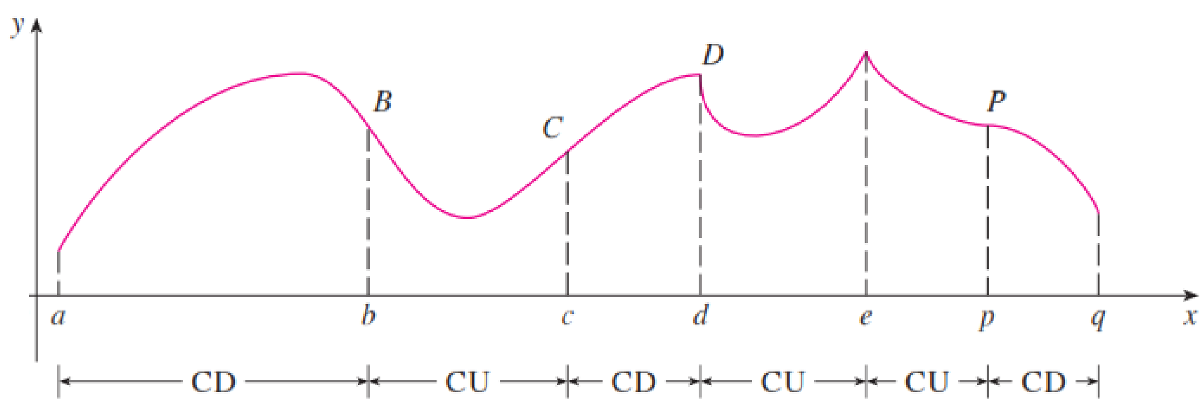
ĐỊNH NGHĨA

Nếu đồ thị f nằm về phía trên các tiếp tuyến của nó trên khoảng I, thì đồ thị được gọi là có **bề lõm quay lên** trên khoảng I.

Nếu đồ thị f nằm về phía dưới các tiếp tuyến của nó trên khoảng I, thì đồ thị được gọi là có **bề lõm quay xuống** trên khoảng I.

Hình dưới cho thấy đồ thị của một hàm số có bề lõm quay lên (viết tắt là BLQL) trên các khoảng (b, c), (d, e) và (e, p) và có bề lõm quay xuống (BLQX) trên các khoảng (a, b), (c, d), và (p, q).

HÌNH 7



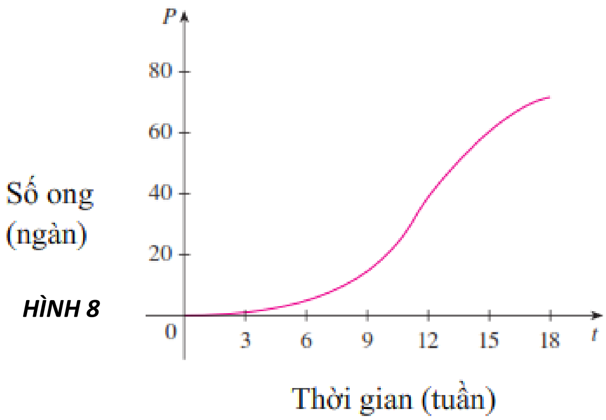
Hãy tìm hiểu xem đạo hàm bậc hai có vai trò gì trong việc xác định sự lồi lõm của đồ thị. Quan sát hình 6(a) ở trên, ta thấy, khi đi từ trái sáng phải, độ dốc của tiếp tuyến tăng dần. Điều này có nghĩa đạo hàm f ' là hàm số đồng biến và do đó đạo hàm f " của nó dương. Tương tự, trong hình 6(b) độ dốc của các tiếp tuyến giảm dần, từ trái sang phải, do đó f ' nghịch biến và vì vậy f " âm. Lập luận này có thể đảo ngược và gợi ý là định lý sau là đúng. Phần chứng minh chi tiết được cho trong phần Phụ lục F, sử dụng ĐLGTTB.

DẤU HIỆU LỒi LÕM

(a) Nếu f "(x) > 0 với mọi x thuộc I, thì đồ thị của f có bề lõm quay lên trên I.

(b) Nếu f "(x) < 0 với mọi x thuộc I, thì đồ thị của f có bề lõm quay xuống trên I.

VÍ DỤ 4 Hình dưới cho thấy đồ thị dân số của tổ ong nuôi công nghiệp. Tốc độ tăng dân số P biến thiên thế nào theo thời gian? Khi nào tốc độ tăng là lớn nhất? Trên những khoảng nào P có bề lõm quay lên trên hoặc quay xuống dưới?



HÌNH 8

GIẢI Bằng cách nhìn vào độ dốc của đồ thị khi t tăng, ta thấy tốc độ tăng dân số lúc đầu rất nhỏ, rồi sau đó lớn dần cho đến khi đạt cực đại tại khoảng t = 12 tuần, và giảm khi dân số bắt đầu ổn định. Khi dân số tiến gần giá trị lớn nhất là khoảng 75,000, tốc độ tăng, P '(t), tiến đến 0. Đồ thị bắt đầu quay bề lõm lên trên trong khoảng (0, 12) và quay bề lõm trở xuống trong (12, 18).

Trong Ví dụ 4, đường cong dân số thay đổi từ bề lõm quay lên đến bề lõm quay xuống tại gần điểm (12, 38,000). Điểm này gọi là **điểm uốn** của đường cong. Ý nghĩa của điểm này là tốc độ tăng dân số có giá trị cực đại tại đó. Tổng quát, điểm uốn là điểm tại đó đường cong thay đổi tính lõm.

ĐỊNH NGHĨA Một điểm P trên đường cong y = f(x) được gọi là một điểm uốn nếu f liên tục tại đó và đường cong thay đổi bề lõm từ hướng quay lên sang hướng quay xuống hoặc ngược lại tại điểm P.

Chẳng hạn, trong hình 7, các điểm B, C, D, và P là các điểm uốn. Chú ý là nếu đường cong có một tiếp tuyến tại điểm uốn, thì đường cong xuyên qua tiếp tuyến tại đó.

Trong quan điểm Dấu Hiệu Lồi Lõm, tồn tại điểm uốn tại bất kỳ điểm nào tại đó đạo hàm đổi dấu.

VÍ DỤ 5 Vẽ dạng đồ thị của hàm số f thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) f '(x) > 0 trên $(-\infty, 1)$, f '(x) < 0 trên $(1, \infty)$

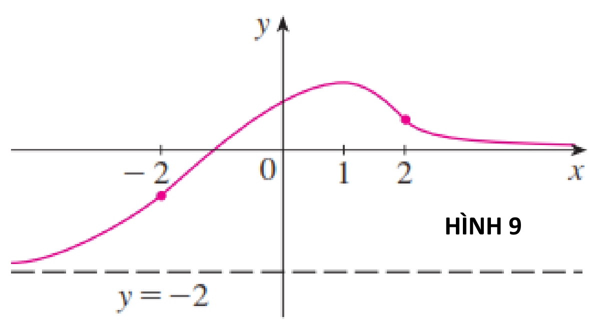
(ii) f "(x) > 0 trên $(-\infty$ - 2) và $(2, \infty)$, f "(x) < 0 trên (- 2, 2)

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

GIẢI Điều kiện (i) cho ta biết f đồng biến trên $(-\infty, 1)$ và nghịch biến trên $(1, \infty)$.

Điều kiện (ii) cho ta biết f có bề lõm quay lên trên $(-\infty, -2)$ và $(2, \infty)$, và có bề lõm quay xuống (- 2, 2).

Từ điều kiện (iii) ta biết là đồ thị của f có hai tiệm cận ngang: y = - 2 và y = 0.



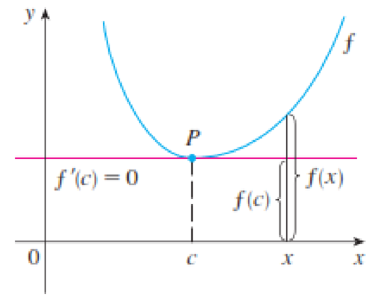
HÌNH 9

Trước tiên ta vẽ tiệm cận ngang y = - 2 (đường chấm) (xem Hình 9). Sau đó ta vẽ đồ thị f tiến sát tiệm cận này ở xa về bên trái, đồng biến đến điểm cực đại tại x = 1 và nghịch biến sát trục hoành ở xa về bên phải. Ta cũng biết chắc là đồ thị có điểm uốn khi x = - 2 và 2. Chú ý là ta phải vẽ đường cong quay bề lõm bên trên khi x < - 1 và x > 2, và có bề lõm quay xuống khi - 2 < x < 2.

Một ứng dụng khác của đạo hàm bậc hai là dấu hiệu tồn tại cực đại, cực tiểu. Đây là kết quả của dấu hiệu lồi lõm.

DẤU HIỆU ĐẠO HÀM BẬC HAI Giả sử f" liên tục gần c.
(a) Nếu f'(c) = 0 và f"(c) > 0 , thì f có cực tiểu tại c.
(b) Nếu f'(c) = 0 và f"(c) < 0 , thì f có cực đại tại c.

Chẳng hạn, phần (a) là đúng vì f "(c) > 0 gần c và do đó f có bề lõm quay lên gần c. Điều đó có nghĩa đồ thị của f nằm phía bên trên với tiếp tuyến nằm ngang tại c và do đó f có cực tiểu tại c. (Hình 10.)



H. 10

f"(c) > 0, f có bề lõm quay lên

VÍ DỤ 6 Biện luận đường cong $y = x^4 - 4x^3$ về tính lõm, điểm uốn, và cực đại, cực tiểu. Dùng thông tin này để vẽ đồ thị.

GIẢI Nếu $f(x) = x^4 - 4x^3$, thì

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

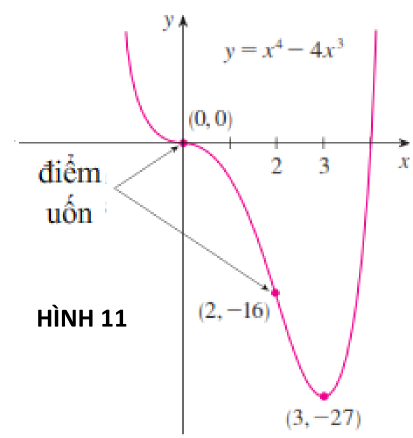
Để tìm điểm tới hạn ta đặt $f'(x) = 0$ và được $x = 0$ và $x = 2$. Để dùng Dấu Hiệu Đạo Hàm bậc Hai ta tính f " tại những điểm tới hạn này:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Vì $f'(3) = 0$ và $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ là cực tiểu. Vì $f''(0) = 0$, Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Hai không cho ta biết gì điểm tới hạn 0. Nhưng vì $f'(x) < 0$ khi $x < 0$ và khi $0 < x < 3$, Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất cho ta biết f không có cực đại hay cực tiểu tại 0.

Vì $f''(x) = 0$ khi $x = 0$ hay $x = 2$, ta chia trục số thành những khoảng với những số này là điểm mút và hoàn tất bảng dấu sau

Khoảng	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Bề lõm
(- oo, 0)	+	quay lên
(0 , 2)	-	quay xuống
(2, oo)	+	quay lên



HÌNH 11

Điểm (0, 0) là điểm uốn vì đồ thị đổi bề lõm từ quay lên sang quay xuống tại đó. Cũng thế, (2, - 16) là một điểm uốn vì đồ thị có bề lõm đổi từ quay xuống sang quay lên tại đó.

Dùng cực tiểu, khoảng lồi lõm, và những điểm uốn, ta vẽ được đồ thị trong Hình 11.

Ghi chú: Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Hai không cho ta kết quả khi f "(c) = 0. Nói cách khác những điểm như thế có thể là cực đại, cực tiểu, hay không là gì cả như trong ví dụ 6. Dấu hiệu này thất bại khi f "(c) không tồn tại. Trong những trường hợp như thế phải dùng Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất. Đúng ra, ngay cả khi cả hai dấu hiệu đều áp dụng được, thì Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất cũng thường dễ xài hơn.

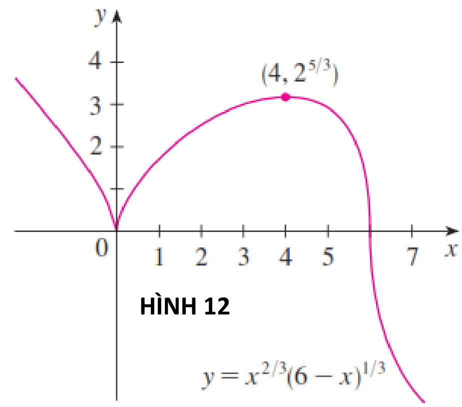
VÍ DỤ 7 Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$

GIẢI Bạn có thể dùng quy tắc lấy đạo hàm để các đạo hàm bậc nhất và bậc hai sau đây

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

Vì f '(x) = 0 khi x = 4 và f '(x) không tồn tại khi x = 0 hay x = 6, các điểm tới hạn là 0, 4, và 6.

Khoảng	4 - x	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	f '(x)	f
x < 0	+	-	+	-	nghịch biến trên (-oo, 0)
0 < x < 4	+	+	+	+	đồng biến trên (0, 4)
4 < x < 6	-	+	+	-	nghịch biến trên (4, 6)
x > 6	-	+	+	-	nghịch biến trên (6, oo)



HÌNH 12

Để tìm các cực trị ta dùng Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất. Vì f ' đổi dấu từ âm sang dương tại 0, f(0) = 0 là cực tiểu. Vì f ' đổi dấu từ dương sang âm tại 4, f(4) = $2^{5/3}$ là một cực đại. Dấu của f ' không đổi tại 6, do đó không có cực trị tại đây. (Có thể sử dụng Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Hai tại 4, nhưng không sử dụng được tại 0 hay 6 vì f " không tồn tại tại những số này.)

Nhìn biểu thức của f "(x) và chú ý rằng $x^{4/3} \geq 0$ với mọi x, ta có f "(x) < 0 khi x < 0 và 0 < x < 6 và f "(x) > 0 khi x > 6. Vì thế f có bề lõm quay xuống trên (- ∞, 0) và (0, 6) và bề lõm quay lên trên (6, ∞), và điểm uốn duy nhất là (6, 0). Đồ thị được vẽ như trong Hình 12. Chú ý là đường cong có tiếp tuyến thẳng đứng tại điểm (0, 0) và (6, 0) vì | f '(x) | → ∞ khi x → 0 và khi x → 6.

VÍ DỤ 8 Dùng đạo hàm bậc nhất và bậc hai của f(x) = $e^{1/x}$, cùng với các tiệm cận để vẽ đồ thị hàm số.

GIẢI Chú ý là tập xác định của f là {x/x ≠ 0}, vì thế ta tìm tiệm cận đứng bằng cách cho x → 0 từ trái và phải. Khi x → 0^+, ta biết rằng t = 1/x → oo, vì thế

$$\lim_{x\to 0+} e^{1/x} = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty$$

Điều này chứng tỏ x = 0 là tiệm cận đứng.

Khi x → 0^-, ta có t = 1/x → - ∞, vì thế

$$\lim_{x\to 0-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$

Khi x → ± ∞, ta có 1/x → 0 và do đó

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = \lim_{t\to 0} e^t = e^0 = 1$$

Điều này chứng tỏ y = 1 là tiệm cận ngang.

Giờ ta hãy tính đạo hàm . Theo Quy Tắc Dây Xích ta có

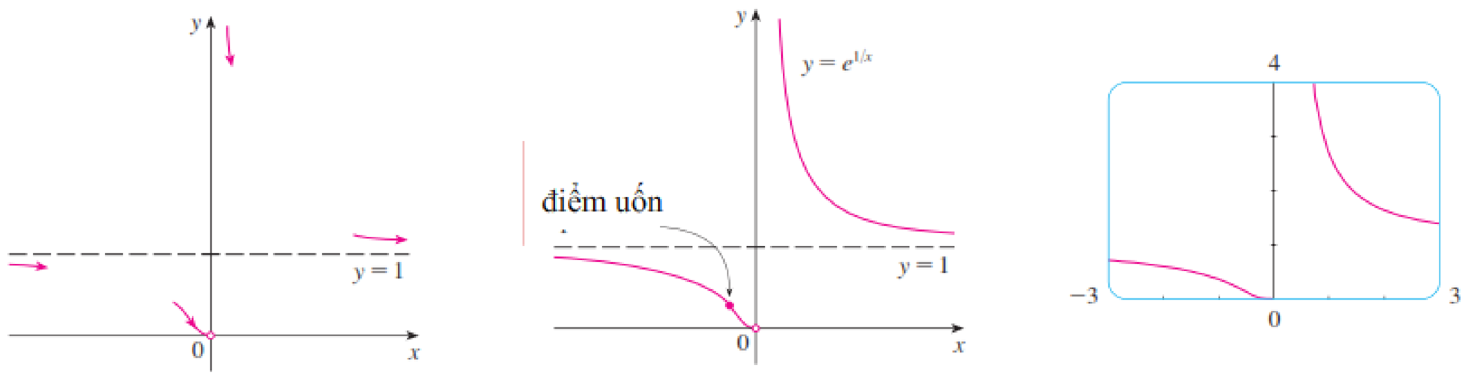
$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Vì $e^{1/x} > 0$ và $x^2 > 0$ với mọi x ≠ 0 nên ta có f '(x) < 0 với mọi x ≠ 0. Do đó f nghịch biến trên (- ∞, 0) và (0, ∞). Không có điểm tới hạn, vì thế hàm số không có cực đại, cực tiểu. Đạo hàm bậc hai là

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

Vì $e^{1/x} > 0$ và $x^4 > 0$, ta có $f''(x) > 0$ khi $x > -1/2$ ($x \neq 0$) và $f''(x) < 0$ khi $x < -1/2$. Vì thế đường cong có bề lõm quay xuống trên $(-\infty, -1/2)$ và có bề lõm quay lên trên $(-1/2, 0)$ và trên $(0, \infty)$. Điểm uốn là $(-1/2, e^{-2})$.

Để vẽ đồ thị của f trước tiên ta vẽ tiệm cận ngang y = 1 (đường chấm), cùng với những phần đồ thị gần các tiệm cận (Hình 13(a)). Những phần này phản ảnh thông tin liên quan đến giới hạn và sự nghịch biến của f trên $(-\infty, 0)$ và $(0, \infty)$. Chú ý rằng ta đã chỉ ra là $f(x) \to 0$ khi $x \to 0^-$ mặc dù f(0) không tồn tại. Trong Hình 13(b) ta hoàn tất đồ thị bằng cách kết hợp thông tin liên quan đến bề lõm và điểm uốn. Trong Hình 13(c) ta kiểm tra việc vẽ đồ thị của mình khi đối chiếu với đồ thị vẽ bằng máy.



H. 13(a) Phác họa

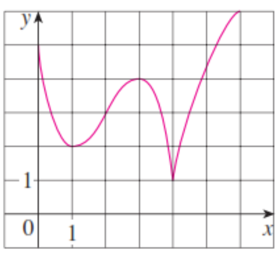
H. 13(b) Hoàn tất

H. 13(c) Đồ thị do máy tính

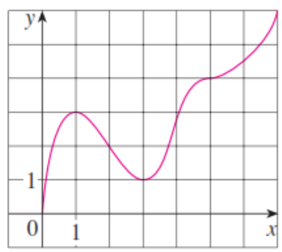
BÀI TẬP

1 - 2. Dùng đồ thị của f để tìm
(a) những khoảng trên đó f đồng biến.
(b) những khoảng trên đó f nghịch biến.
(c) những khoảng trên đó f có bề lõm quay lên.
(d) những khoảng trên đó f có bề lõm quay xuống.
(e) toạ độ những điểm uốn.

1.



2.



3. Giả sử bạn biết công thức tính hàm số của f.

(a) Làm thế nào xác định được khi nào f đồng biến hay nghịch biến?

(b) Làm thế nào xác định được khi nào đồ thị của f có bề lõm quay lên hay quay xuống?

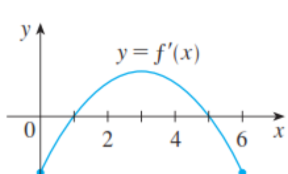
(c) Làm thế nào xác định được toạ độ điểm uốn?

4. (a) Phát biểu Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất.

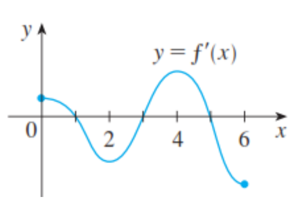
(b) Phát biểu Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Hai. Dưới điều kiện gì nó không cho ta kết luận? Khi đó bạn làm gì?

5 - 6. Bên dưới là đồ thị của đạo hàm f ' của hàm số f.
(a) Trên khoảng nào f đồng biến hay nghịch biến?
(b) Tại giá trị nào f có cực đại hay cực tiểu?

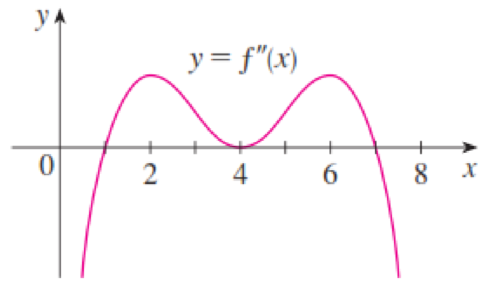
5.



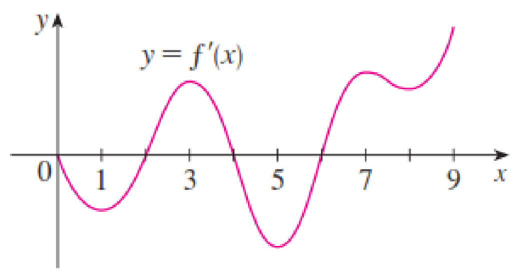
6.



7. Đồ thị của đạo hàm bậc hai f ” được cho bên dưới. Tìm hoành độ điểm uốn của f. Giải thích trả lời của bạn.



8. Bên dưới là đồ thị đạo hàm f ' của hàm số f.
(a) Trên khoảng nào f đồng biến? Giải thích.
(b) Tại những giá trị x nào f đạt cực đại hay cực tiểu? Giải thích.
(c) Trên khoảng nào f có bề lõm quay lên hay quay xuống? Giải thích.
(d) Tìm hoành độ x của những điểm uốn của f. Giải thích.



9 - 18.
(a) Tìm những khoảng đồng biến và nghịch biến.
(b) Tìm những giá trị cực đại và cực tiểu của f.
(c) Tìm những khoảng bề lõm quay lên hay xuống và điểm uốn.

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 – 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 – 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

13. $f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x – 2 \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$ **16.** $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **18.** $f(x) = \sqrt{xe^{-x}}$

19 – 21. Tìm cực đại, cực tiểu của f bằng Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất và Bậc Hai. Cách nào bạn thích hơn?

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$ **20.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

21. $f(x) = x + \sqrt{x-1}$

22. (a) Tìm những điểm tới hạn của $f(x) = x^4(x-1)^3$.

(b) Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Hai cho bạn biết điều gì về biểu hiện của f tại những điểm tới hạn này?

(c) Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc cho bạn biết điều gì?

23. Giả sử f ” liên tục trên $(-\infty, \infty)$.

(a) Nếu $f'(2) = 0$ và $f''(2) = -5$, bạn có thể nói gì về f?

(b) Nếu $f'(6) = 0$ và $f''(6) = 0$, bạn có thể nói gì về f?

24- 29. Phác họa đồ thị hàm số thỏa mãn tất cả những điều kiện cho trước.

24. $f'(x) > 0$ với mọi $x \neq 1$, tiệm cận đứng $x = 1$,

$f''(x) > 0$ khi $x < 1$ hay $x > 3$, $f''(x) < 0$ khi $1 < x < 3$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$.

$f'(x) > 0$ khi $x < 0$ hay $2 < x < 4$

$f'(x) < 0$ khi $0 < x < 2$ hay $x > 4$

$f''(x) > 0$ khi $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ khi $x < 1$ hay $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ if $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ if $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ if $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ if $-2 < x < 0$, inflection point $(0, 1)$

27. $f'(x) > 0$ if $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ if $|x| > 2$,
điểm uốn
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| =$ 0 if $x \neq 2$

28. $f'(x) > 0$ if $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ if $|x| > 2$,
$f'(2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ if $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ if $x > 3$

29. $f'(x) < 0$ and $f''(x) < 0$ for all x

30. Giả sử $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$, và $f'(x) > 0$ và $f''(x) < 0$ với mọi x.

(a) Phác họa đồ thị của f.

(b) Phương trình $f(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm? Tại sao?

31 - 32. Đồ thị của đạo hàm f ‘ của hàm số f liên tục được cho bên dưới.

(a) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến.

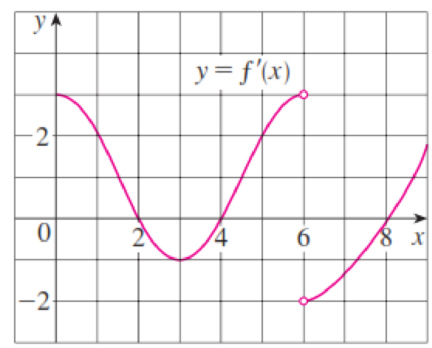
(b) Tìm giá trị của x tại đó f đạt cực đại hay cực tiểu.

(c) Tìm khoảng f có bề lõm quay lên hay quay xuống.

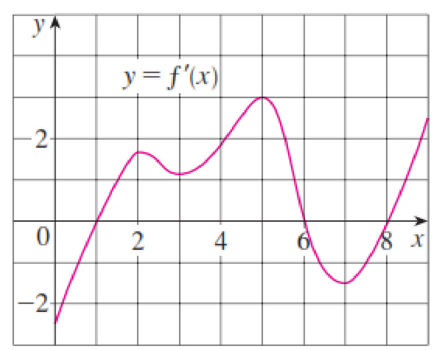
(d) Tìm hoành độ của điểm uốn.

(e) Giả sử $f(0) = 0$, phác họa đồ thị của f.

31.



32.



33 – 44.

(a) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến.

(b) Tìm giá trị cực đại và cực tiểu.

(c) Tìm khoảng f có bề lõm quay lên hay quay xuống và điểm uốn.

(d) Dùng thông tin từ (a) - (c) này để phác họa đồ thị. Kiểm tra kết quả bằng máy vẽ đồ thị, nếu có.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **34.** $f(x) = 2 + 3x - x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$ **36.** $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = (x+1)^5 - 5x - 2$ **38.** $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

39. $A(x) = x\sqrt{x+3}$ **40.** $B(x) = 3x^{2/3} - x$

41. $C(x) = x^{1/3}(x+4)$ **42.** $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

44. $f(t) = t + \cos t$, $-2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

45 – 52.

(a) Tìm tiệm cận đứng và ngang.

(b) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến.

(c) Tìm những giá trị giá trị cực đại, cực tiểu.

(d) Tìm những khoảng lồi lõm và điểm uốn.

(e) Dùng những thông tin từ phần (a)-(d) để phác họa đồ thị của f.

45. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ **46.** $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

49. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ **50.** $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

51. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$ **52.** $f(x) = e^{\arctan x}$

55-56.

(a) Dùng đồ thị của f để ước tính giá trị cực đại, cực tiểu. Rồi sau đó tìm giá trị chính xác của cực trị.

(b) Ước tính giá trị của x tại đó f đồng biến nhanh nhất. Rồi tìm giá trị chính xác này.

55. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **56.** $f(x) = x^2 e^{-x}$

57 – 58.

(a) Dùng đồ thị của f để ước tính những khoảng bề lõm quay lên hay xuống và toạ độ những điểm uốn.

(b) Dùng đồ thị của f " để ước tính giá trị chính xác hơn

57. $f(x) = \cos x + ½ \cos 2x, \quad 0 \le x \le 2\pi$.

58. $f(x) = x3(x-2)^4$

59 – 60. Ước tính những khoảng lõm quay lên hay xuống đúng với một chữ số thập phân bằng cách dùng máy tính và đồ thị f ".

59. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ **60.** $f(x) = \dfrac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^3}$

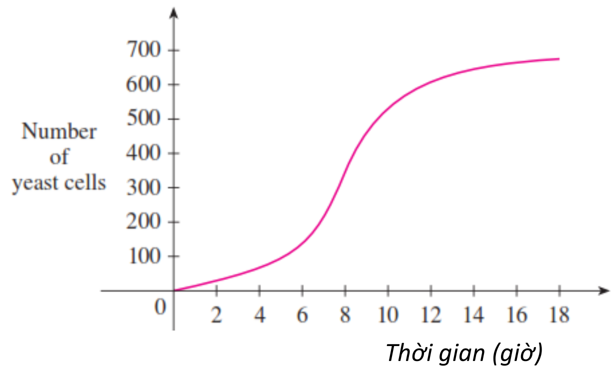
61. Một đồ thị của dân số các tế bào men bia trong môi trường cấy ở phòng thí nghiệm được cho bên dưới.

(a) Mô tả tốc độ tăng dân số biến thiện thế nào.

(b) Khi nào tốc độ cao nhất?

(c) Trên khoảng nào hàm số tốc độ có bề lõm quay lên hay quay xuống?

(d) Ước tính toạ độ của điểm uốn.



62. Cho f(t) là nhiệt độ tại thời điểm t nơi bạn sống và giả sử tại thời điểm t = 3 bạn sẽ thấy nóng rất khó chịu. Bạn cảm thấy thế nào về những dữ liệu cho trong mỗi trường hợp dưới đây?

(a) $f'(3) = 2, f''(3) = 4$ (b) $f'(3) = 2, f''(3) = -4$

(c) $f'(3) = -2, f''(3) =$ (d) $f'(3) = -2, f''(3) = -4$

63. Cho K(t) là số kiến thức bạn thu nhận được qua học tập trước một bài kiểm tra trong t giờ. Số nào sau đây bạn nghĩ là lớn hơn, K(8) – K(7) hay K(3) – K(2)? Đồ thị của K có bề lõm quay xuống hay lên? Tại sao?

64. Cà phê được rót vào một cốc như hình dưới với tốc độ không đổi (tính bằng thể tích trên mỗi đơn vị thời gian). Phác họa đồ thị thô cho biết độ cao của mức cà phê trong cốc như một hàm số theo thời gian. Giải thích dáng vẻ của đồ thị theo tính lõm của nó. Ý nghĩa của điểm uốn là gì?

65. Đường cong đáp ứng thuốc mô tả mức độ thuốc ngấm trong máu sau khi thuốc được sử dụng. Hàm số $S(t) = At^p e^{-kt}$ thường được dùng để mô hình hóa đường cong đáp ứng, lúc đầu dâng cao rồi sau đó đi xuống dần dần. Nếu, với một loại thuốc nào đó, A = 0.01, p = 4, k = 0.07, và t tính bằng phút, ước tính thời gian ứng với điểm uốn và giải thích ý nghĩa của nó. Nếu có máy tính, hãy dùng nó để vẽ đồ thị đường cong đáp ứng thuốc.

66. Họ đường cong hình chuông

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

xuất hiện trong xác suất và thống kê, được gọi là hàm số mật độ bình thường. Hằng số μ gọi là trung bình và số dương σ gọi là độ lệch chuẩn. Để đơn giản hóa, hãy loại bỏ hệ số $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ và chỉ xét trường hợp $\mu = 0$. Tức là khảo sát hàm số

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Tìm tiệm cận, giá trị lớn nhất, và những điểm uốn của f.
(b) σ có vai trò gì trong hình dáng của đường cong?
(c) Minh họa bằng cách vẽ bốn thành viên của họ này trên cùng một khung hình.

67. Tìm hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có giá trị cực đại bằng 3 tại - 2 và giá trị cực tiểu bằng 0 tại 1.

68. Tìm a và b sao cho hàm số

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

có giá trị cực đại f(2) = 1.

69. Chứng tỏ rằng đường cong $y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$ có ba điểm uốn thẳng hàng.

70. Chứng tỏ các đường cong $y = e^{-x}$ và $y = -e^{-x}$ tiếp xúc với đường cong $y = e^{-x}\sin x$ tại những điểm uốn của nó.

71. Giả sử f khả vi trên khoảng I và f '(x) > 0 với mọi x thuộc I trừ tại điểm duy nhất c. Chứng tỏ rằng f đồng biến trên I.

72 – 74. Giả sử tât cả hàm số đều hai lần khả vi và đạo hàm bậc hai không bao giờ bằng 0.

72. (a) Nếu f và g có bề lõm quay lên trên I, chứng tỏ rằng f + g có bề lõm quay lên trên I.

(b) Nếu f dương và có bề lõm quay lên trên I, chứng tỏ rằng hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ có bề lõm quay lên trên I.

73. (a) Nếu f và g là dương, đồng biến, có bề lõm quay lên trên I, chứng tỏ rằng hàm số tích fg có bề lõm quay lên trên I.

(b) Chứng tỏ rằng (a) vẫn đúng nếu f và g đều nghịch biến. Giả sử f đồng biến và g nghịch biến. Chứng tỏ, bằng cách cho ba ví dụ, rằng fg có thể có bề lõm quay lên, quay xuống, hay là một đường thẳng. Tại sao lý luận như trong phần (a) và (b) không tác dụng trong trường hợp này.

74. Giả sử f và g đều có bề lõm quay lên trên $(-\infty, \infty)$. Dưới điều kiện gì của f thì hàm số hợp h(x) = f(g(x)) có bề lõm quay lên?

75. Chứng tỏ rằng $\tan x > x$ với $0 < x < \pi/2$. [Gợi ý: Chứng tỏ $f(x) = \tan x - x$ đồng biến trên $(0, \pi/2)$.]

76. (a) Chứng tỏ $e^x \geq 1 + x$ với $x \geq 0$.

(b) Suy ra rằng $e^x \geq 1 + x + x^2/2$ với $x \geq 0$.

(c) Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh với mọi $x \geq 0$ và mọi số nguyên dương n,

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

77. Chứng tỏ hàm số bậc ba luôn có đúng một điểm uốn. Nếu đồ thị của nó cắt trục hoành tại ba điểm x_1, x_2, x_3, chứng tỏ rằng hoành độ điểm uốn là $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

78. Với giá trị nào của c đa thức
$P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ có hai điểm uốn? Một điểm uốn? Không điểm uốn? Minh họa bằng cách vẽ đồ thị P với vài giá trị của c. Đồ thị thay đổi thế nào khi c giảm?

79. Chứng tỏ rằng nếu (c, f(c)) là một điểm uốn của đồ thị của f và f " tồn tại trên một khoảng chứa c, thế thì f " = 0. [Gợi ý: Áp dụng Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất và Định lý Fermat cho hàm số g = f '.]

80. Chứng tỏ rằng nếu $f(x) = x^4$ thì f " (0) = 0, nhưng (0, 0) không phải là điểm uốn của đồ thị f.

81. Chứng tỏ rằng hàm số $g(x) = x|x|$ có điểm uốn tại (0, 0) nhưng g "(0) không tồn tại.

82. Giả sử f ”’ liên tục và f ’(c) = f ”(c) = 0, nhưng f ”’(c) > 0. f có cực đại hay cực tiểu tại c không? F có điểm uốn tại c không?

83. Ba trường hợp trong Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất đề cập đến hầu hết tình huống thường gặp, nhưng không phải là tất cả những trường hợp có thể xảy ra. Xét các hàm số f, g, và h có giá trị tại 0 đều bằng 0 và, với $x \neq 0$

$$f(x) = x^4 \sin\frac{1}{x} \qquad g(x) = x^4\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2+\sin\frac{1}{x}\right)$$

(a) Chứng tỏ rằng 0 là số tới hạn của cả ba hàm số nhưng đạo hàm của chúng đổi dấu vô số lần ở hai bên điểm 0.

(b) Chứng tỏ rằng f không đạt cực đại lẫn cực tiểu tại 0, g đạt cực tiểu, và h đạt cực đại.

ĐÁP SỐ

1. (a) (1, 3), (4, 6) (b) (0, 1), (3, 4) (c) (0, 2) (d) (2, 4), (4, 6) (e) (2, 3)

3. (a) I/D Test (b) Concavity Test (c) Find points at which the concavity changes.

5. (a) Inc. on (1, 5); dec. on (0, 1) and (5, 6) (b) Loc. max. at $x = 5$, loc. min. at $x = 1$

7. $x = 1, 7$

9. (a) Inc. on $(-\infty, 3)$, $(2, \infty)$; dec. on $(-3, 2)$ (b) Loc. max. $f(-3) = 81$; loc. min. $f(2) = -44$ (c) CU on $(-\frac{1}{2}, \infty)$; CD on $(-\infty, -\frac{1}{2})$; IP $(-\frac{1}{2}, \frac{37}{2})$

11. (a) Inc. on $(-1, 0)$, $(1, \infty)$; dec. on $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ (b) Loc. max. $f(0) = 3$; loc. min. $f(\pm 1) = 2$ (c) CU on $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$, $(\sqrt{3}/3, \infty)$; CD on $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$; IP $(\pm\sqrt{3}/3, \frac{22}{9})$

13. (a) Inc. on $(0, \pi/4)$, $(5\pi/4, 2\pi)$; dec. on $(\pi/4, 5\pi/4)$ (b) Loc. max. $f(\pi/4) = \sqrt{2}$; loc. min. $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$ (c) CU on $(3\pi/4, 7\pi/4)$; CD on $(0, 3\pi/4)$, $(7\pi/4, 2\pi)$; IP $(3\pi/4, 0)$, $(7\pi/4, 0)$

15. (a) Inc. on $(-\frac{1}{3}\ln 2, \infty)$; dec. on $(-\infty, -\frac{1}{3}\ln 2)$ (b) Loc. min. $f(-\frac{1}{3}\ln 2) = 2^{-2/3} + 2^{1/3}$ (c) CU on $(-\infty, \infty)$

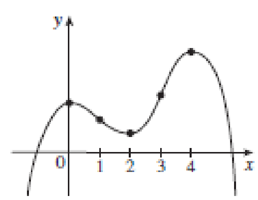
17. (a) Inc. on $(0, e^2)$; dec. on (e^2, ∞) (b) Loc. max. $f(e^2) = 2/e$ (c) CU on $(e^{8/3}, \infty)$; CD on $(0, e^{8/3})$; IP $(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3})$

19. Loc. max. $f(-1) = 7$, loc. min. $f(1) = -1$

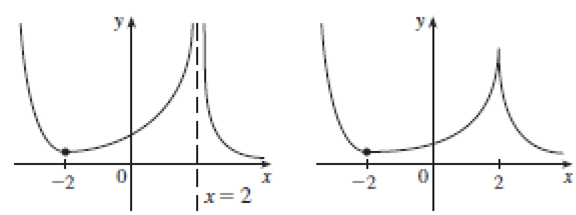
21. Loc. max. $f(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$

23. (a) f has a local maximum at 2. (b) f has a horizontal tangent at 6.

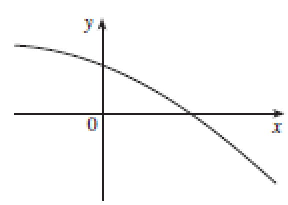
25.



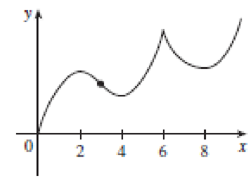
27.



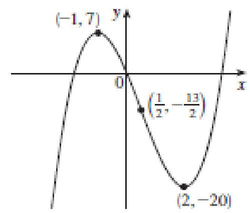
29.



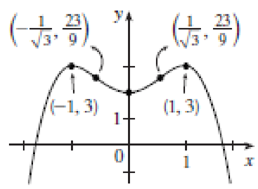
31. (a) Inc. on $(0, 2)$, $(4, 6)$, $(8, \infty)$; dec. on $(2, 4)$, $(6, 8)$
(b) Loc. max. at $x = 2, 6$; loc. min. at $x = 4, 8$
(c) CU on $(3, 6)$, $(6, \infty)$; CD on $(0, 3)$
(d) 3 (e) See graph at right.



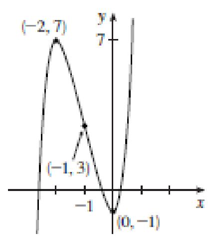
33. (a) Inc. on $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$; dec. on $(-1, 2)$
(b) Loc. max. $f(-1) = 7$; loc. min. $f(2) = -20$
(c) CU on $(\frac{1}{2}, \infty)$; CD on $(-\infty, \frac{1}{2})$; IP $(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2})$
(d) See graph at right.



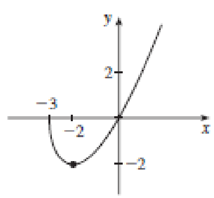
35. (a) Inc. on $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$; dec. on $(-1, 0)$, $(1, \infty)$
(b) Loc. max. $f(-1) = 3$, $f(1) = 3$; loc. min. $f(0) = 2$
(c) CU on $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; CD on $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, \infty)$; IP $(\pm 1/\sqrt{3}, \frac{23}{9})$
(d) See graph at right.



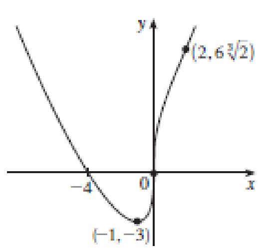
37. (a) Inc. on $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$; dec. on $(-2, 0)$
(b) Loc. max. $h(-2) = 7$; loc. min. $h(0) = -1$
(c) CU on $(-1, \infty)$; CD on $(-\infty, -1)$; IP $(-1, 3)$
(d) See graph at right.



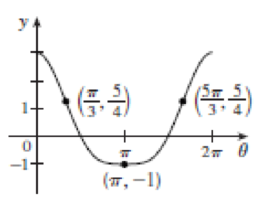
39. (a) Inc. on $(-2, \infty)$; dec. on $(-3, -2)$
(b) Loc. min. $A(-2) = -2$
(c) CU on $(-3, \infty)$
(d) See graph at right.



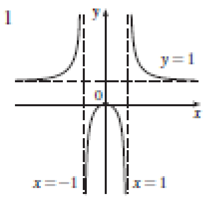
41. (a) Inc. on $(-1, \infty)$; dec. on $(-\infty, -1)$
(b) Loc. min. $C(-1) = -3$
(c) CU on $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$; CD on $(0, 2)$; IPs $(0, 0)$, $(2, 6\sqrt[3]{2})$
(d) See graph at right.



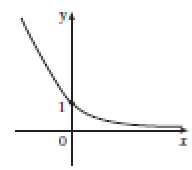
43. (a) Inc. on $(\pi, 2\pi)$; dec. on $(0, \pi)$
(b) Loc. min. $f(\pi) = -1$
(c) CU on $(\pi/3, 5\pi/3)$; CD on $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi)$; IP $(\pi/3, \frac{5}{4})$, $(5\pi/3, \frac{5}{4})$
(d) See graph at right.



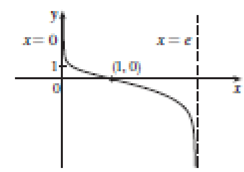
45. (a) HA $y = 1$, VA $x = -1$, $x = 1$
(b) Inc. on $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$; dec. on $(0, 1)$, $(1, \infty)$
(c) Loc. max. $f(0) = 0$
(d) CU on $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; CD on $(-1, 1)$
(e) See graph at right.



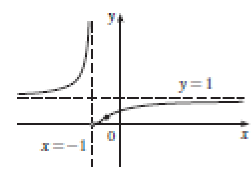
47. (a) HA $y = 0$
(b) Dec. on $(-\infty, \infty)$
(c) None
(d) CU on $(-\infty, \infty)$
(e) See graph at right.



49. (a) VA $x = 0$, $x = e$
(b) Dec. on $(0, e)$
(c) None
(d) CU on $(0, 1)$; CD on $(1, e)$; IP $(1, 0)$
(e) See graph at right.



51. (a) HA $y = 1$, VA $x = -1$
(b) Inc. on $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$
(c) None
(d) CU on $(-\infty, -1)$, $(-1, -\frac{1}{2})$; CD on $(-\frac{1}{2}, \infty)$; IP $(-\frac{1}{2}, 1/e^2)$
(e) See graph at right.



53. $(3, \infty)$
55. (a) Loc. and abs. max. $f(1) = \sqrt{2}$, no min.
(b) $\frac{1}{4}(3 - \sqrt{17})$
57. (b) CU on $(0.94, 2.57)$, $(3.71, 5.35)$; CD on $(0, 0.94)$, $(2.57, 3.71)$, $(5.35, 2\pi)$; IP $(0.94, 0.44)$, $(2.57, -0.63)$, $(3.71, -0.63)$, $(5.35, 0.44)$
59. CU on $(-\infty, -0.6)$, $(0.0, \infty)$; CD on $(-0.6, 0.0)$
61. (a) The rate of increase is initially very small, increases to a maximum at $t \approx 8$ h, then decreases toward 0.
(b) When $t = 8$ (c) CU on $(0, 8)$; CD on $(8, 18)$ (d) $(8, 350)$
63. $K(3) - K(2)$; CD
65. 28.57 min, when the rate of increase of drug level in the bloodstream is greatest; 85.71 min, when rate of decrease is greatest
67. $f(x) = \frac{1}{9}(2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)$

BÀI 4. 4. NHỮNG DẠNG VÔ ĐỊNH VÀ QUY TẮC L' HOSPITAL

Giả sử ta cố gắng phân tích "hành vi" của hàm số

$$F(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

Mặc dù F không xác định khi x = 1, ta cần biết F có "hành vi" thế nào khi x gần 1. Đặc biệt, ta muốn biết giá trị của giới hạn

1 $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

Khi tìm giới hạn này, ta không thể áp dụng Quy Tắc 5 của giới hạn (giới hạn của một thương thì bằng thương của giới hạn, xem Bài 2.3) bởi vì giới hạn của mẫu là 0. Thật ra, mặc dù giới hạn của (1) tồn tại, giá trị của nó không hiển nhiên vì cả tử và mẫu đều tiến đến 0 và 0/0 thì không xác định.

Tổng quát, nếu ta có giới hạn thuộc dạng

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

trong đó cả f(x) và g(x) đều tiến tới 0, thì giới hạn này có thể hoặc không thể tồn tại và được gọi là **dạng vô định 0/0**. Ta đã gặp một vài giới hạn thuộc dạng này trong Chương 2. Đối với hàm số hữu tỷ, ta có thể khử các thừa số chung, chẳng hạn:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Ta đã dùng phép chứng minh hình học để chứng tỏ rằng

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Nhưng những phương pháp này không có kết quả với giới hạn (1), vì thế trong bài này ta giới thiệu một phương pháp có hệ thống, gọi là Quy Tắc l'Hospital, để tính giới hạn những dạng vô định.

Một tình huống khác trong đó một giới hạn không hiển nhiên xảy ra khi ta tìm một tiệm cận ngang của F và cần tính giới hạn

2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x-1}$$

Việc tính giới hạn này không hiển nhiên vì cả tử và mẫu đều vô cùng lớn khi x -> oo. Có sự tranh đua giữa tử và mẫu. Nếu tử thắng, giới hạn sẽ là ∞; nếu mẫu thắng, đáp số sẽ là 0. Hoặc giữa chúng có một thỏa hiệp nào đó thì giới hạn sẽ là một số dương hữu hạn.

Tổng quát, nếu ta có giới hạn thuộc dạng

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

trong đó cả f(x) --→ ∞ (hay - ∞) và g(x) → ∞ (hay - ∞), thì giới hạn có thể hay không thể tồn tại và được gọi là **dạng vô định ∞/∞.** Ta đã thấy trong Bài 2.6 là dạng giới hạn này có thể tìm được đối với các hàm số nào đó, kể cả hàm số hữu tỷ, bằng cách chia tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của x ở mẫu. Chẳng hạn,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Phương pháp này không có kết quả đối với những giới hạn như (2), nhưng Quy Tắc l'Hospital lại áp dụng được cho dạng vô định này.

QUY TẮC L'HOSPITAL Giả sử f và g khả vi và g'(x) ≠ 0 trên một khoảng I chứa điểm a (trừ ra có thể tại a). Giả sử rằng

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \qquad \text{và} \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

hay $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ và $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ lim f(x) = oo

(Nói cách khác, ta có dãng vô định 0/0 hay ∞/∞.) Thế thì

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nếu giới hạn bên vế phải tồn tại (hoặc bằng ∞ hay - ∞).

Quy Tắc này được đặt theo tên nhà quý tộc Pháp Hầu Tước L'Hospital (1661-1704), nhưng được nhà toán học Thụy Sĩ , John Bernouilli (1667-1748) tìm ra.

GHI CHÚ 1 Quy Tắc l'Hospital nói rằng giới hạn của thương hai hàm số thì bằng giới hạn của thương đạo hàm của chúng, miễn sao điều kiện cho trước được thỏa mãn. Điều quan trọng là cần kiểm tra điều kiện giới hạn của f và g trước khi sử dụng Quy Tắc l'Hospital.

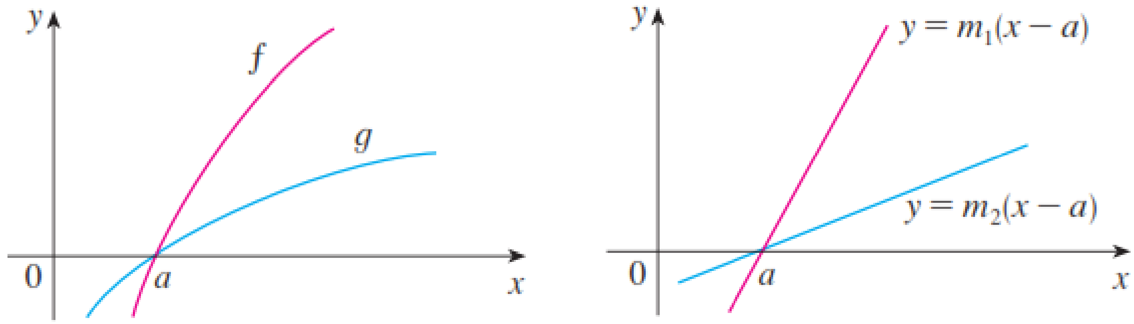
GHI CHÚ 2 Quy Tắc l'Hospital cũng có giá trị cho giới hạn một bên và cho những giới hạn ở vô tận; nghĩa là "x → a" có thể được thay thế bằng x → a $^+$, x → a $^-$, x → ∞, hoặc x → - ∞.

GHI CHÚ 3 Trường hợp đặc biệt trong đó f(a) = g(a) = 0, f ' và g ' liên tục, và g '(a) ≠ 0, có thể chứng minh l'Hospital dễ dàng.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Chứng minh Quy Tắc l'Hospital một cách tổng quát là việc khó hơn. Hãy tham khảo Phụ Lục F.



HÌNH 1 Hình 1 minh họa cho thấy Quy Tắc L'Hospital có thể đúng. Hình đầu tiên là đồ thị hai hàm số khả vi f và g đều tiến đến 0 khi x → a. Nếu ta phóng to ảnh tại điểm (a, 0), đồ thị trông như đường thẳng. Nhưng nếu hàm số thực sự là bậc nhất như trong hình 2, thế thì tỷ số của chúng sẽ là

$$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

chính là tỷ số đạo hàm của chúng. Điều này gợi ý

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

VÍ DỤ 1 Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

GIẢI Vì

$$\lim_{x\to 1}\ln x = \ln 1 = 0, \quad \lim_{x\to 1}(x-1) = 1-1 = 0$$

Chú ý khi dùng Quy Tắc này ta phải lấy đạo hàm của tử và mẫu một cách riêng lẻ. Ta không lấy đạo hàm của thương hai hàm số.

ta có thể áp dụng Quy Tắc l'Hospital:

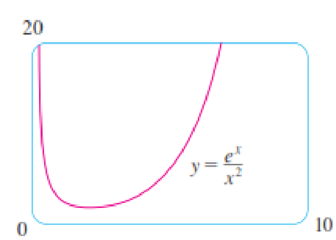
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{\frac{1}{1}}{1} = 1$$

Đồ thị hàm số của Ví dụ 2 được cho trong hình . Trước đây ta đã biết hàm số mũ tăng rất nhanh so với hàm số lũy thừa, do đó kết quả của Ví dụ 2 không bất ngờ.

VÍ DỤ 2 Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

GIẢI Ta có $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ và $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, vì thế Quy Tắc l'Hospital cho ta

HÌNH 2



$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}$$

Vì $e^x \to \infty$ và $2x \to \infty$ khi $x \to \infty$, giới hạn bên vế phải cũng thuộc dạng vô định, áp dụng Quy Tắc l'Hospital lần nữa, ta được

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$$

VÍ DỤ 3 Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

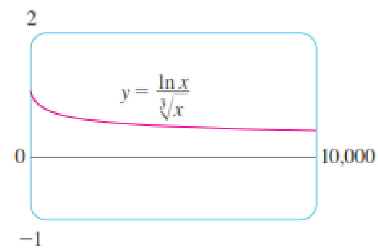
GIẢI Vì $\ln x \to \infty$ và $\sqrt[3]{x} \to \infty$ khi $x \to \infty$, áp dụng Quy Tắc l’ Hospital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Chú ý giới hạn ở vế phải bây giờ thuộc dạng 0/0. Nhưng thay vì áp dụng Quy Tắc l’Hospital lần thứ hai như đã làm trong Ví dụ 2, ta chỉ cần đơn giản biểu thức để thấy rằng viêc áp dụng Quy Tắc là không cần thiết:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}}=0$$

Đồ thị hàm số của Ví dụ 3 được cho trong hình . Trước đây ta đã biết hàm số lôgarit tăng rất chậm, do đó kết quả của Ví dụ 2 không bất ngờ.



HÌNH 3

VÍ DỤ 4 Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$

GIẢI Chú ý cả tan x – x) $\to 0$ và $x^3 \to 0$ khi $x \to 0$, áp dụng Quy Tắc l’Hospital:

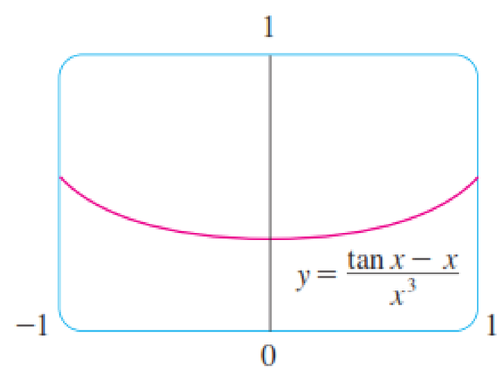
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Vì giới hạn ở vế phải cũng thuộc dạng vô định 0/0, áp dụng Quy Tắc l’Hospital lần nữa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}$$

Vì $\lim_{x\to 0}\sec^2 x=1$, ta đơn giản biểu thức bằng cách viết

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\sec^2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$



HÌNH 4

Áp dụng Quy Tắc l’Hospital lần thứ ba:

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1}=\frac{1}{3}$$

Như vậy $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = 1/3$$

Ghi chú : Cách khác, ta thay tanx = sinx /cos x thì được:

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(\cos x)x}. = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{3}.1.1 = \frac{1}{3}$$

rồi áp dụng giới hạn lượng giác đã biết.

VÍ DỤ 5 Tìm $\lim\limits_{x\to\pi-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

GIẢI Nếu ta áp dụng Quy Tắc l'Hospital không cẩn thận, ta sẽ được

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi-}\frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$

Như vậy là SAI! Mặc dù tử số sinx → 0 khi x → π^- , nhận xét rằng mẫu số (1 – cosx) không tiến tới 0, mà tới 2, do đó không thể áp dụng Quy Tắc l'Hospital.

Giới hạn cần tìm, thực ra, dễ tìm được vì hàm số là liên tục tại π và mẫu số khác 0 tại đó.

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\sin\pi}{1-\cos\pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0$$

Ví Dụ 5 chứng tỏ rằng bạn rất dễ sai nếu sử dụng Quy Tắc l'Hospital thiếu suy nghĩ. Ta có thể tìm giới hạn bằng những phương pháp khác dễ dàng hơn là sử dụng Quy Tắc l'Hospital. (Xem Ví Dụ 3 và 5 trong bài 2.3), Ví Dụ 3 trong bài 2.6, và phần biện giải ở đầu bài này.) Vì thế, khi tìm bất kỳ giới hạn nào, bạn cũng cần lưu ý các phương pháp khác trước khi sử dụng l'Hospital.

CÁC TÍCH VÔ ĐỊNH

Nếu lim $_{x\to a}$ f(x) = 0 và lim $_{x\to a}$ g(x) = ∞ (hay - ∞), thế thì ta không biết rõ giá trị của lim $_{x\to a}$ f(x)g(x), nếu có, sẽ là gì. Có sự tranh đua giữa f và g. Nếu f thắng, đáp số là 0; nếu g thắng, đáp số là ∞ (hay - ∞). Còn nếu có thỏa hiệp thì đáp số sẽ là một số hữu hạn khác không. Dạng giới hạn này gọi là **dạng vô định 0. oo**. Ta có thể xem tích fg như một thương khi viết:

$$\boxed{fg = \frac{f}{1/g} \qquad hay \qquad fg = \frac{g}{1/f}}$$

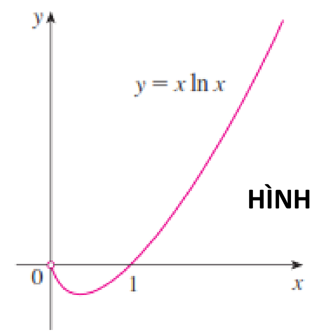
Điều này biến đổi giới hạn cho về dạng vô định 0/0 hay ∞ /∞, nhờ đó có thể áp dụng Quy Tắc l'Hospital.

VÍ DỤ 6 Tìm $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$

GIẢI Giới hạn này thuộc dạng vô định, vì khi x → 0^+ , thì nhân tử đầu tiên (x) tiến đến 0 trong khi nhân tử thứ hai (ln x) tiến đến - ∞. Nếu viết x = 1/(1/x), ta có 1/x → ∞ khi x → 0^+, do đó Quy Tắc l'Hospital cho ta

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0$$

■ Đồ thị của hàm số y = x lnx , x > 0 được cho trong hình dưới. Chú ý hàm số không xác định tại x = 0, đồ thị tiến đến điểm gốc nhưng không bao giờ đến được nó.



HÌNH 5

GHI CHÚ Khi giải Ví dụ 6 một phương án khác là viết

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Đây là dạng vô định 0/0, ta vẫn có thể áp dụng Quy Tắc l'Hospital, nhưng sẽ đưa đến một biểu thức phức tạp hơn biểu thức ban đầu. Tổng quát, khi ta viết lại một tích vô định thành một thương, ta cần tìm phương án cho ta một giới hạn đơn giản hơn.

CÁC HIÊU SỐ VÔ ĐỊNH

Nếu $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ và $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, thế thì giới hạn

$$\lim_{x\to a} [\, f(x) - g(x) \,]$$

gọi là **dạng vô định ∞ - ∞.** Lần này cũng có tranh đua giữa f và g. Đáp số có thể là ∞ (f thắng) hoặc - ∞ (g thắng) hoặc chúng thỏa hiệp để cho một đáp số hữu hạn. Để đến được đáp số, ta cố gắng biến đổi hiệu thành thương (chẳng hạn, bằng cách dùng một mẫu thức chung, hay hữu tỷ hóa mẫu số, hay đặt một thừa số chung) để có một dạng vô định 0/0 hay ∞/∞ .

VÍ DỤ 7 Tính $\lim_{x\to(\pi/2)-} (\sec x - \tan x)$

GIẢI Trước tiên chú ý sec → ∞ và tan x → ∞ khi x → $(\pi/2)^-$, vì thế đây là dạng vô định ∞ - ∞. Ở đây ta dùng mẫu số chung:

$$\lim_{x\to(\pi/2)-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to(\pi/2)-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)-} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

Chú ý rằng ở đây vì 1 - sin x → 0 và cosx → 0 khi x -→ $(\pi/2)^-$ (dạng 0/0) nên ta sử dụng được quy tắc l'Hospital.

CÁC LŨY THỪA VÔ ĐỊNH

Một vài dạng vô định xuất hiện từ giới hạn

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ và $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *loai* 0^0
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ và $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *loai* ∞^0
3. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ và $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ *loai* 1^∞

Các dạng này có thể tìm giới hạn bằng cách lấy logarit tự nhiên:

đặt y = $[f(x)]^{g(x)}$, thì ln y = g(x) ln f(x)

hoặc bằng cách biểu diễn hàm số dưới dạng số mũ:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

(Nhớ rằng cả hai phương pháp này đều đã được dùng đến khi ta lấy đạo hàm những hàm số dạng này.) Cả hai phương pháp đều đưa đến tích vô định g(x) ln f(x), thuộc dạng 0 . ∞ .

VÍ DỤ 8 Tính $\lim\limits_{x\to 0+}(1+\sin 4x)^{\cot x}$

GIẢI Trước tiên chú ý rằng khi $x \to 0^+$, ta có 1 + sin 4x → 1 và cot x → ∞, nên giới hạn đã cho thuộc dạng vô định. Đặt

$$y = (1 + \sin 4x)^{\cot x}$$

Thế thì

$$\ln y = \cot x \ \ln(1 + \sin 4x)$$

và quy tắc l'Hospital cho ta

$$\lim_{x\to 0+}\ln y = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Đó là giới hạn của ln y. Để tìm giới hạn của y, ta nhớ rằng $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0+}(1+\sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0+} y = \lim_{x\to 0+} e^{\ln y} = e^4$$

VÍ DỤ 9 Tìm $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

GIẢI Chú ý rằng giới hạn này vô định vì $0^x = 0$ với mọi x > 0 nhưng $x^0 = 1$ với mọi x ≠ 0. Ta có thể tiến hành như trong Ví Dụ 8 hoặc bằng cách viết hàm số dưới dạng hàm số mũ:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$$

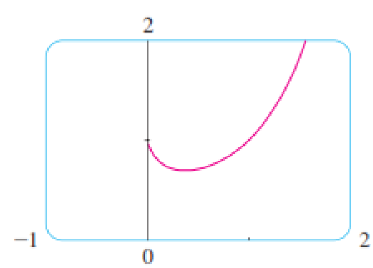
Trong Ví Dụ 6, ta đã dùng quy tắc l'Hospital để chứng tỏ rằng

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$$

Do đó

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

Đồ thị của hàm số $y = x^x$, x > 0 được cho trong hình dưới. Chú ý rằng 0^0 không xác định, những giá trị của hàm số tiến đến 1 khi x tiến tới 0^+. Điều này khẳng định kết quả của Ví dụ 9.



HÌNH 6

BÀI TẬP

1–4. Cho biết

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0 \qquad \lim_{x\to a} fh(x)=1$$
$$\lim_{x\to a} p(x)=\infty \qquad \lim_{x\to a} q(x)=\infty$$

Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào thuộc dạng vô định? Đối với những dạng không vô định, hãy tính giới hạn khi có thể.

1. (a) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{p(x)}$

(c) $\lim_{x\to a}\dfrac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\lim_{x\to a}\dfrac{p(x)}{f(x)}$

(e) $\lim_{x\to a}\dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a}[f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a}[h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x\to a}[p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a}[f(x)-p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a}[p(x)-q(x)]$

(c) $\lim_{x\to a}[p(x)+q(x)]$

4. (a) $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a}[f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a}[h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim_{x\to a}[p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a}[p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a}\sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–64. Tìm những giới hạn sau. Dùng l'Hospital nếu được. Nếu có một phương pháp sơ đẳng hơn thì hãydùng nó. Nếu áp dụng l'Hospital không được thì cho biết tại sao.

5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$

6. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

7. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^9-1}{x^5-1}$

8. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^a-1}{x^b-1}$

9. $\lim_{x\to(\pi/2)^+}\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

10. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\tan 5x}$

11. $\lim_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t^3}$

12. $\lim_{t\to 0}\dfrac{e^{3t}-1}{t}$

13. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan px}{\tan qx}$

14. $\lim_{\theta\to\pi/2}\dfrac{1-\sin\theta}{\csc\theta}$

15. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

16. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2}{1-2x^2}$

17. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$

18. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln\ln x}{x}$

19. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$

20. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sin\pi x}$

21. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

22. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

23. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tanh x}{\tan x}$

24. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\tan x}$

25. $\lim_{t\to 0}\dfrac{5^t-3^t}{t}$

26. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

27. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}$

28. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

29. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

30. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$

31. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

32. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

33. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1+\cos\pi x}$

34. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2x^2+1}}$

35. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^a-ax+a-1}{(x-1)^2}$

36. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

37. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$

38. $\lim_{x\to a^+}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$

39. $\lim_{x\to\infty} x\sin(\pi/x)$

40. $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x$

41. $\lim_{x\to 0}\cot 2x\sin 6x$

42. $\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x$

43. $\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x^2}$

44. $\lim_{x\to\pi/4}(1-\tan x)\sec x$

45. $\lim_{x\to 1^+}\ln x\tan(\pi x/2)$

46. $\lim_{x\to\infty} x\tan(1/x)$

47. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

48. $\lim_{x\to 0}(\csc x-\cot x)$

49. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

50. $\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$

51. $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)$

52. $\lim_{x\to\infty}(xe^{1/x}-x)$

53. $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$

54. $\lim_{x\to 0^+}(\tan 2x)^x$

55. $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$

56. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

57. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)^x$

58. $\lim_{x\to\infty} x^{(\ln 2)/(1+\ln x)}$

59. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

60. $\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$

61. $\lim_{x\to 0^+} (4x+1)^{\cot x}$

62. $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$

63. $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

64. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

65-66. Dùng đồ thị để ước tính giá trị của giới hạn sau. Sau đó dùng Quy Tắc l'Hospital để tìm giới hạn chính xác.

65. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

66. $\lim_{x\to 0}\frac{5^x-4^x}{3^x-2^x}$

67-68. Minh họa Quy Tắc l'Hospital bằng cách vẽ đồ thị của f(x)/g(x) và f '(x)/g '(x) gần điểm x = 0 để thấy được những tỷ số này có cùng giới hạn khi x → 0. Rồi tính giá trị chính xác của giới hạn.

67. $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x^3 + 4x$

68. $f(x) = 2x\sin x$, $g(x) = \sec x - 1$

69. Chứng tỏ rằng:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty$$

với mọi giá trị nguyên dương của n. Điều này chứng tỏ rằng hàm số mũ tiến đến vô cực nhanh hơn bất kỳ lũ thừa nào của x.

70. Chứng tỏ rằng:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p} = \mathbf{0}$$

với mọi giá trị dương của p. Điều này chứng tỏ rằng hàm số logarit tiên đến vô cực chậm hơn bất kỳ lũy thừa nào của x.

71. Điều gì xảy ra nếu bạn dùng Quy Tắc l'Hospital để tính

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Tính giới hạn bằng một phương pháp khác.

72. Nếu một vật có khối lượng m được bỏ rơi không vận tốc đầu, một mô hình cho vận tốc v của nó tại thời điểm t giây, có kể đến sức cản không khí, là

$$v = \frac{mg}{c}(1-e^{-ct/m})$$

trong đó g là gia tốc trọng trường và c là hằng số dương. (Trong Chương 9 ta có thể suy ra phương trình này từ giả định cho rằng sức cản không khí tỷ lệ với vận tốc của vật; c là hằng số tỷ lệ.)

(a) Tính $\lim_{t\to\infty}$ v. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

(b) Với t cố định, dùng Quy Tắc l'Hospital để tính $\lim_{c\to 0^+}$ v. Bạn có thể kết luận gì về vận tốc của một vật rơi trong chân không?

73. Nếu một số tiền ban đầu A_o được đầu tư với lãi suất kép r với n lần một năm, giá trị của tiền đầu tư sau t năm là

$$A = A_o\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Nếu ta cho n → ∞ ta gọi là lãi kép liên tục. Dùng Quy Tắc l'Hospital để chứng tỏ rằng nếu lãi kép liên tục, thì số tiền sau t năm là

$$A = A_o e^{rt}$$

74. Nếu một quả cầu kim loại có khối lượng m được phóng vào nước và lực cản tỷ lệ với bình phương vận tốc, thế thì đoạn đường mà quả cầu trong thời gian t là

$$s(t) = \frac{m}{c}\ln\cosh\sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

trong đó c là hằng số dương. Tìm $\lim_{c\to 0+}$ s(t).

75. Nếu một trường tĩnh điện E tác dụng lên một chất lõng hay chất khí sẽ tạo ra một mômen lưỡng cực P tính trên mỗi đơn vị thể tích là

$$P(E) = \frac{e^E+e^{-E}}{e^E-e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{E\to 0+} P(E) = 0$.

76. Một dây cáp kim loại bán kính r được bao bằng chất cách điện sao cho khoảng cách từ trục dây cáp đến mặt ngoài của chất cách điện là R. Tốc độ v của xung điện trong dây cáp là

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

trong đó c là hằng số dương. Tìm những giới hạn sau và giải thích trả lời của bạn.

(a) $\lim\limits_{R\to r+} v$ (b) $\lim\limits_{r\to 0+} v$

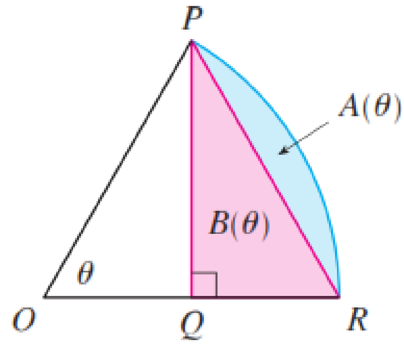
77. Quy Tắc l'Hospital xuất hiện lần đầu tiên trong tác phẩm Giải Tích Những Số Vô Cùng Bé của Hầu Tước l'Hospital năm 1696. Đây là giáo trình giải tích đầu tiên từng được in ra và ví dụ mà Hầu tước đưa ra trong sách đó để minh họa quy tắc này là tìm giới hạn của hàm số

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

khi x tiến đến a, trong đó a > 0. (Vào thời đó người ta thường viết aa thay vì a^2.) Hãy giải bài toán này.

78. Hình dưới cho thấy một hình quạt tròn có góc ở tâm là θ. Gọi A(θ) là diện tích hình viên phân giữa dây PR và cung PR. Gọi B(θ) là diện tích tam giác PQR. Tìm

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}.$$



79. Nếu f ' liên tục, f(2) = 0, và f '(2) = 7, tính

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2+3x) + f(2+5x)}{x}$$

80. Với giá trị nào của a và b phương trình dưới đây là đúng?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

81. Nếu f ' liên tục, dùng Quy Tắc l'Hos[pital để chứng tỏ rằng

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

82. Nếu f '' liên tục, chứng tỏ rằng

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

83. Cho

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & khi \;\; x \neq 0 \\ 0 & khi \;\; x = 0 \end{cases}$$

(a) Dùng định nghĩa đạo hàm để tính f '(0).

(b) Chứng tỏ rằng f có đạo hàm ở mọi bậc. [Gợi ý: Trước tiên chứng minh bằng quy nạp rằng tồn tại một đa thức $p_n(x)$ và một số nguyên không âm k_n, sao cho

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x) f(x)}{x^{k_n}} \quad \text{với } x \neq 0.]$$

84. Cho

$$f(x)=\begin{cases}|x|^x & khi\ \ x\neq 0\\ 1 & khi\ \ x=0\end{cases}$$

(a) Chứng tỏ rằng f liên tục tại 0.

(b) Quan sát đồ thị của f để xem f có khả vi tại 0 hay không bằng cách phóng to vài lần về phía điểm (0, 1) trên đồ thị.

(c) Chứng tỏ rằng f không khả vi tại 0. Bạn lý giải thế nào điều này thế nào so với dáng vẻ của đồ thị trong phần (b)?

ĐÁP SỐ

1. (a) Indeterminate (b) 0 (c) 0
(d) ∞, $-\infty$, or does not exist (e) Indeterminate
3. (a) $-\infty$ (b) Indeterminate (c) ∞
5. 2 **7.** $\frac{9}{5}$ **9.** $-\infty$ **11.** ∞ **13.** p/q
15. 0 **17.** $-\infty$ **19.** ∞ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** 1
25. $\ln\frac{5}{3}$ **27.** 1 **29.** $\frac{1}{2}$ **31.** 0 **33.** $-1/\pi^2$
35. $\frac{1}{2}a(a-1)$ **37.** $\frac{1}{24}$ **39.** π **41.** 3 **43.** 0
45. $-2/\pi$ **47.** $\frac{1}{2}$ **49.** $\frac{1}{2}$ **51.** ∞ **53.** 1

55. e^{-2} **57.** e^3 **59.** 1 **61.** e^4
63. $1/\sqrt{e}$ **65.** e^2 **67.** $\frac{1}{4}$ **71.** 1 **77.** $\frac{16}{9}a$ **79.** 56
83. (a) 0

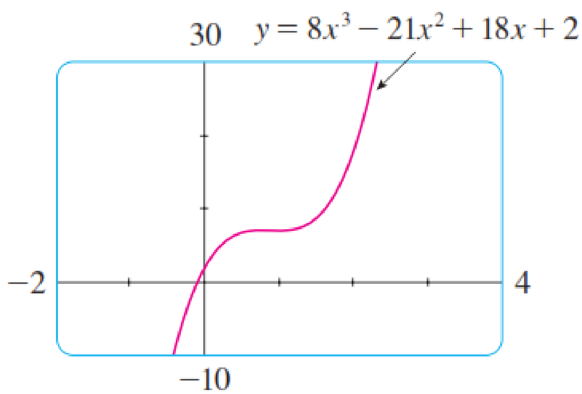
BÀI 4. 5 PHƯƠNG PHÁP VẼ ĐỒ THỊ

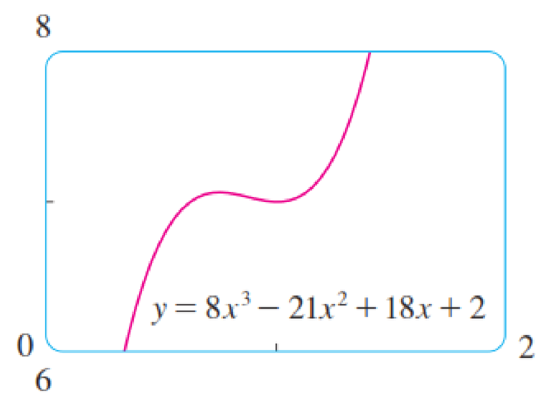
Đến lúc này, ta đã nói đến những khía cạnh đặc biệt của việc vẽ đồ thị: tập xác định, tập giá trị , và tính đối xứng trong Chương 1; giới hạn, sự liên tục, và tiệm cận trong Chương 2, đạo hàm và tiếp tuyến trong Chương 2 và 3; và giá trị cực trị, khoảng đồng biến, nghịch biến , tính lồi lõm, điểm uốn, và Quy Tắc l'Hospital trong chương này. giờ là lúc ta tập hợp tất cả thông tin này để vẽ đồ thị hàm số nhằm trìnhi bày những đặc điểm của đồ thị.

Bạn có thể hỏi: Tại sao không dùng máy tính để vẽ đồ thị cho nhanh? Tại sao cần phải dùng giải tích? Đúng là công nghệ hiện đại có khả năng tạo ra những đồ thị rất chính xác. Nhưng ngay cả những công cụ vẽ đồ thị tốt nhất cũng cần được sử dụng một cách thông minh. Sử dụng giải tích giúp ta khám phá những khía cạnh thú vị nhất của đồ thị và trong nhiều trường hợp sẽ tính những điểm cực đại, cực tiểu và điểm uốn một cách chính xác chứ không phải xấp xỉ.

Chẳng hạn, Hình 1 cho thấy đồ thị của hàm số $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$ được vẽ bằng máy. Thoạt nhìn, đồ thị hình như hợp lý vì nó trông giống đồ thị hàm số bậc ba như $y = x^3$, và nó hình như không có điểm cực đại, cực tiểu. Nhưng nếu bạn tính đạo hàm, bạn sẽ thấy nó có một cực đại khi x = 0.75 và một cực tiểu khi x = 1. Thật ra, nếu bạn phóng to phần này, bạn sẽ thấy tính chất cực trị được phơi bày như trong Hình 2. Không có giải tích, ta dễ dàng để vuột đặc điểm này.

HÌNH 1





HÌNH 2

Trong bài sau ta sẽ vẽ đồ thị những hàm số bằng cách dùng sự tương tác giữa giải tích và công cụ vẽ. Trong bài này ta vẽ đồ thị bằng cách trước tiên xét những thông tin sau đây. Ta sẽ giả định là không có máy tính bên cạnh, nhưng nếu có, bạn có thể dùng nó để kiểm tra việc tính toán của mình.

PHƯƠNG PHÁP VẼ ĐỒ THỊ

Bảng hướng dẫn sau giúp bạn vẽ đồ thị hàm số y = f(x) bằng tay. Không nhất thiết xét tất cả các mục cho mọi hàm số. (Chẳng hạn, một đồ thị có thể không có một tiệm cận hoặc tính đối xứng.) Bảng chỉ cung cấp cho bạn tất cả thông tin bạn cần sao cho đồ thị phơi bày những khía cạnh quan trọng nhất của hàm số đã cho.

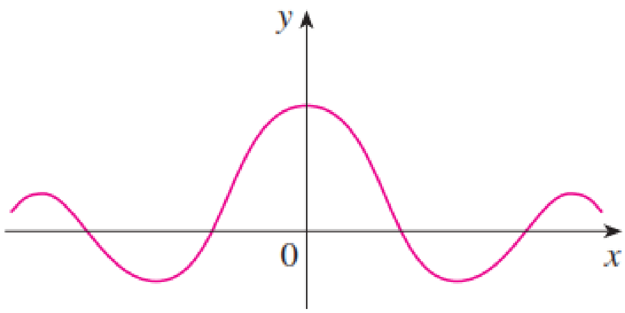
A. Tập xác định Bước đầu tiên rất hữu ích là tìm tập xác định D của hàm số f, đó là tập hợp những giá trị x sao cho f(x) được xác định.

B. Giao điểm với các trục Giao điểm với trục y là f(0) và điều này cho ta biết nơi đồ thị cắt trục y. Để tìm giao điểm với trục x, ta cho y = 0 và giải phương trình f(x) = 0, ẩn là x. (Bạn có thể bỏ qua bước này nếu phương trình khó giải.)

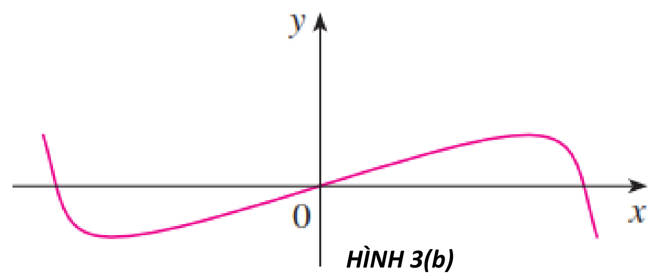
C. Tính đối xứng

(i) Nếu f(- x) = f(x) với mọi x thuộc D, tức là phương trình của đường cong không đổi khi thay x bằng - x , thì f là một **hàm số chẵn** và đồ thị của nó đối xứng qua trục y. Điều này có nghĩa là công việc của ta chỉ còn phân nửa. Nếu ta vẽ được đường cong với x ≥ 0, thì ta chỉ cần lật đối xứng của phần này qua trục y ta sẽ được toàn bộ đồ thị hàm số [xem hình 3(a)]. Những hàm số $y = x^2$, $y = x^4$, y = |x|, và y = cosx là ví dụ những hàm số chẵn.

(i) Nếu f(- x) = - f(x) với mọi x thuộc D, thì f là một **hàm số lẻ** và đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ. Nếu ta vẽ được phần đường cong với x ≥ 0, thì ta chỉ quay phần này một góc 180^o quanh điểm gốc ta sẽ được toàn bộ đồ thị hàm số [xem hình 3(b)]. Những hàm số y = x, $y = x^3$, $y = x^5$, và y = sinx là ví dụ những hàm số lẻ.

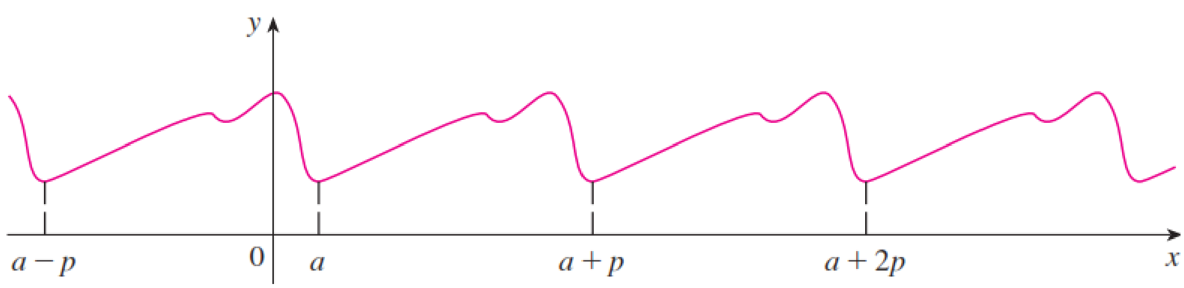


HÌNH 3(a)



HÌNH 3(b)

(iii) Nếu f(x + p) = f(x) với mọi x thuộc D, trong đó p là hằng số dương, thì f gọi là **hàm số tuần hoàn** và giá trị p nhỏ nhất có tính chất này được gọi là **chu kỳ**. Chẳng hạn, hàm số y = sin x có chu kỳ 2π và y = tan x có chu kỳ π. Nếu ta biết đồ thị trên một đoạn có chiều dài bằng p, thì ta có thể tịnh tiến phần đồ thị này để có toàn bộ đồ thị (xem Hình 4).



HÌNH 4

D. Tiệm cận

(i) **Tiệm cận ngang.** Nhớ từ bài 2.6 là nếu $\lim_{x\to\infty}$ f(x) = L hay $\lim_{x\to-\infty}$ f(x) = L, thì đường thẳng y = L là tiệm cận ngang của đường cong y = f(x). Nếu ta lại có $\lim_{x\to\infty}$ f(x) = ∞ (hay - ∞), thế thì ta không có tiệm cận ở nhánh phải, nhưng điều này cũng là một thông tin hữu ích giúp ta vẽ đúng đồ thị.

(i) **Tiệm cận đứng.** Nhớ từ bài 2.6 là x = a là tiệm cận đứng nếu ít nhất một trong các phát biểu sau là đúng:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = -\infty \tag{1}$$

(Đối với hàm số hữu tỷ bạn có thể định vị được tiệm cận đứng bằng cách cho mẫu thức bằng 0 sau khi đã ước giản các nhân tử chung của tử và mẫu. Nhưng với những hàm số khác phương pháp này không áp dụng được.) Hơn nữa, trong việc vẽ đồ thị, cần biết rõ phát biểu nào trong (1) là đúng. Nếu f(a) không xác định nhưng a là điểm đầu mút của tập xác định, thì bạn nên tính $\lim_{x\to a+} f(x)$ hay $\lim_{x\to a-} f(x)$, dù giới hạn này có vô hạn hay không.

(iii) **Tiệm cận xiên**. Vấn đề này sẽ được đề cập ở cuối bài.

E. **Khoảng Đồng Biến hay Nghịch Biến** Dùng Dấu Hiệu Đồng biến/Nghịch biến . Tính f '(x) và tìm những khoảng trên đó f '(x) dương (f đồng biến) và những khoảng trên đó f '(x) âm (nghịch biến).

F. Giá Trị Cực Đại, Cực Tiểu Tìm những số tới hạn của f [những số c sao cho f '(c) = 0 hay f '(c) không tồn tại]. Rồi dùng Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất. Nếu f ' đổi dấu từ dương sang âm tại số tới hạn c, thì f(c) là một cực đại. Nếu f ' đổi dấu từ âm sang dương tại số tới hạn c, thì f(c) là một cực tiểu. Mặc dù Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất. được ưa thích hơn, nhưng bạn có thể dùng Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Hai nếu f '(c) = 0 và f "(c) ≠ 0. Nếu f "(c) > 0 thì f(c) là một cực tiểu, trong khi f "(c) < 0 thì f(c) là một cực đại.

G. LỒI LÕM và ĐIỂM UÔN Tính f "(x) và dùng Dấu Hiệu Lồi Lõm. Đường cong có bề lõm quay lên khi f "(x) > 0 và bề lõm quay xuống khi f "(x) < 0. Điểm uốn xảy ra tại nơi tính lồi lõm thay đổi.

H. VẼ ĐỒ THỊ Dùng những thông tin từ A-G để vẽ đồ thị. Vẽ tiệm cận bằng nét đứt đoạn. Xác định các giao điểm với hai trục, điểm cực đại, cực tiểu, và điểm uốn. Sau đó vẽ đường cong qua các điểm này, đi lên và đi xuống tùy theo E, với tính lồi lõm tùy theo G, và tiến sát tiệm cận. Nếu muốn thêm độ chính xác tại bất cứ điểm nào, bạn có thể dùng máy tính, tính giá trị đạo hàm tại đó. Nhờ đó bạn biết được tiếp tuyến tại điểm đó và tiếp tuyến cho ta hướng tiến lên của đường cong.

VÍ DỤ 1 Vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

GIẢI

A. Tập xác định là

$$\{x|\ x^2 - 1 \neq 0\} = \{x|\ x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

B. Giao điểm với các trục đều bằng 0.

C. Vì f (- x) = f(x), hàm số f là chẵn. Đồ thị đối xứng qua trục y.

D.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-1/x^2} = 2$$

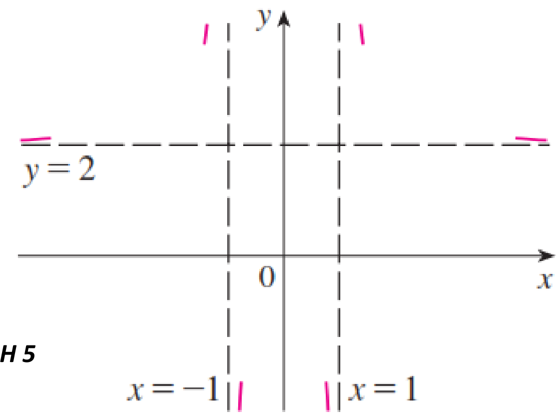
Do đó đường thẳng y = 2 là tiệm cận ngang.

Vì mẫu thức = 0 khi x = ± 1, ta tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 1+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1+} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty$$

Do đó những đường thẳng x = 1 và x = - 1 là các tiệm cận đứng. Thông tin này về giới hạn và tiệm cận cho phép ta phác thảo được một phần đồ thị gần các tiệm cận (xem Hình 5 các đoạn màu đỏ).



HÌNH 5

E. $f'(x) = \dfrac{4x(x^2-1)-2x^2.\,2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$ =

Vì f '(x) > 0 khi x < 0 (x $\neq$ - 1) và f '(x) < 0 khi x > 0 (x $\neq$ 1), nên f đồng biến trên (- ∞, - 1) và (- 1, 0) và nghịch biến trên (0, 1) và (1, ∞).

F. Số tới hạn duy nhất là x = 0. Vì f ' đổi dấu từ dương sang âm tại 0, f(0) = 0 là cực đại theo Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất.

G. $f''(x) = \dfrac{-4(x^2-1)^2+4x\,.\,2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^2}$ =

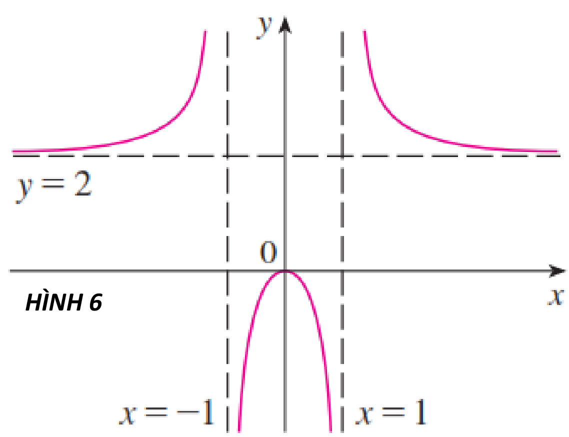
Vì $12x^2 + 4 > 0$ với mọi x, ta có

$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$

và $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$.

Đường cong có bề lõm quay lên trên các khoảng (- ∞, - 1) và (1, ∞) và có bề lõm quay xuống trên (- 1, 1). Nó không có điểm uốn vì 1 và - 1 không thuộc tập xác định của f.

H. Dùng những thông tin từ E-G, ta hoàn tất đồ thị như trong Hình 6.



HÌNH 6

VÍ DỤ 2 Vẽ đồ thị hàm số f(x) = $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

GIẢI

A. Tập xác định = {x| x + 1 > 0} = {x| x > - 1} = (- 1, ∞)
B. Giao điểm với hai trục đều bằng 0.
C. Tính đối xứng : Không có
D. Vì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

nên không có tiệm cận ngang. Vì $\sqrt{x+1} \to 0$ khi x → - 1 + và f(x) luôn dương, ta có

$$\lim_{x\to -1+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

do đó đường thẳng x = - 1 là tiệm cận đứng.

E. f '(x) = $\dfrac{2x\sqrt{x+1} - x^2 \,.1/(2\sqrt{x+1})}{x+1} = \dfrac{x(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}}$ =

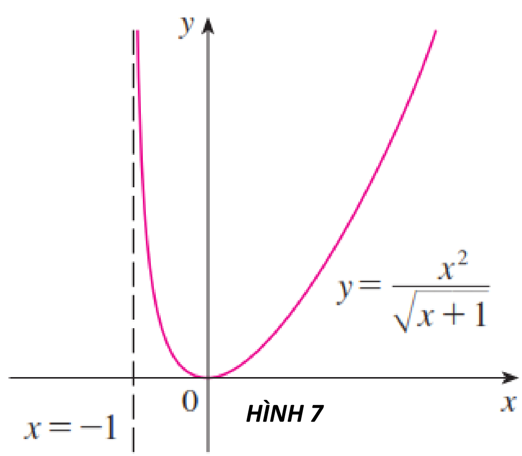
Ta thấy là f '(x) = 0 khi x = 0 (chú ý - 4/3 không thuộc tập xác định của f), do đó số tới hạn duy nhất là 0. Vì f '(x) < 0 khi - 1 < x < 0 và f '(x) > 0 khi x > 0, nên f nghịch biến trên (- 1, 1) và đồng biến trên (0, ∞).

F. Vì f '(0) = 0 và f ' đổi dấu từ âm sang dương tại 0, nên f(0) = 0 là một cực tiểu theo Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất.

G. f "(x) = $\dfrac{2(x+1)^{3/2}(6x+4) - (3x^2+4x)3(x+1)^{1/2}}{4(x+1)^3} = \dfrac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{5/2}}$

Chú ý là mẫu thức luôn dương. Tử số là tam thức $3x^2 + 8x + 8$ luôn dương vì biệt số Δ = - 32 < 0 và hệ số a = 3 > 0. Do đó f "(x) > 0 với mọi x trong tập xác định, do đó f có bề lõm quay lên trên (- 1, ∞) và không có điểm uốn.

H. Đồ thị được vẽ trong Hình 7.



HÌNH 7

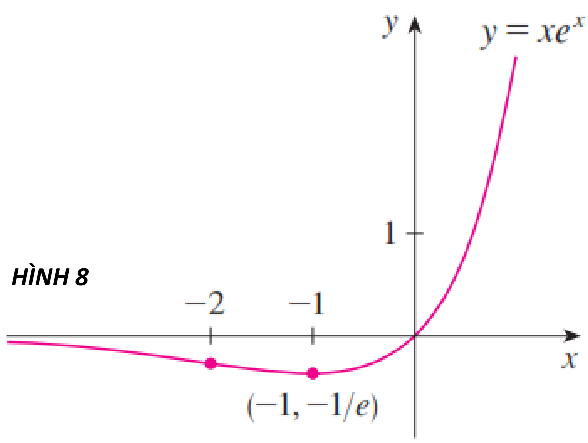
VÍ DỤ 3 Vẽ đồ thị $f(x) = x e^x$

GIẢI

A. Tập xác định là R.
B. Giao điểm với hai trục đều bằng 0.
C. Tính đối xứng : Không có.
D. Vì cả x và e^x đều vô cùng lớn khi $x \to \infty$, ta có $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. tuy nhiên, khi $x \to -\infty$ thì $e^x \to 0$ vì thế ta có dạng tích vô định, đòi hỏi ta phải dùng Quy Tắc l'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\left(-e^{-x}\right) = 0$$

Do đó trục x là tiệm cận ngang.
E. $f'(x) = xe^x + e^x = (x + 1)e^x$
Vì e^x luôn dương, $f'(x) > 0$ khi $x + 1 > 0$, và $f'(x) < 0$ khi $x + 1 < 0$. Do đó f đồng biến trên $(-1, \infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty, -1)$.
F. Vì $f'(-1) = 0$ và f ' đổi dấu từ âm sang dương tại $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ là một cực tiểu.
G. $f''(x) = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x$
Vì $f''(x) > 0$ khi $x > -2$ và $f''(x) < 0$ khi $x < -2$, nên f có bề lõm quay lên trên $(-2, \infty)$ và quay xuống trên $(-\infty, -2)$. Điểm uốn là $(-2, -2e^{-2})$
H. Đồ thị được vẽ trong Hình 8.



HÌNH 8

VÍ DỤ 4 Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$

A. Tập xác định là R.
B. Giao điểm với trục y: $f(0) = 1/2$. Giao điểm với trục x xảy ra khi $\cos x = 0$, đó là, $x = (2n + 1)\pi/2$, trong đó n là số nguyên.
C. f không chẵn cũng không lẻ, nhưng $f(x + 2\pi) = f(x)$ với mọi x nên f có tính tuần hoàn với chu kỳ 2π. Do đó, ta chỉ cần vẽ đồ thị trên đoạn $[0, 2\pi]$ rồi tịnh tiến để có toàn bộ đồ thị.
D. Tiệm cận: Không có.
E. $f'(x) = \dfrac{(2+\sin x)(-\sin x)-\cos x(\cos x)}{(2+\sin x)^2} = -\dfrac{2\sin x+1}{(2+\sin x)^2}$
Do đó $f'(x) > 0$ khi $2\sin x + 1 < 0 \iff \sin x < -1/2 \iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$
Suy ra f đồng biến trên $(7\pi/6, 11\pi/6)$ và nghịch biến trên $(0, 7\pi/6)$ và $(11\pi/6, 2\pi)$.

F. Từ phần E và Dấu Hiệu Đạo hàm Bậc Nhất, ta thấy rằng giá trị cực tiểu là f(7π/6) = - 1/ $\sqrt{3}$ và giá trị cực đại là f(11π/6) = 1/ $\sqrt{3}$.

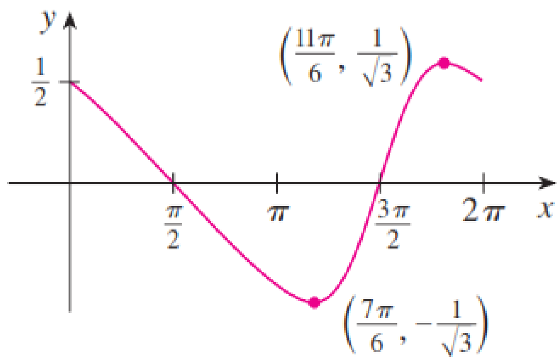
G. Nếu ta dùng Quy Tắc Thương để tính đạo hàm lần nữa và đơn giản, ta được:

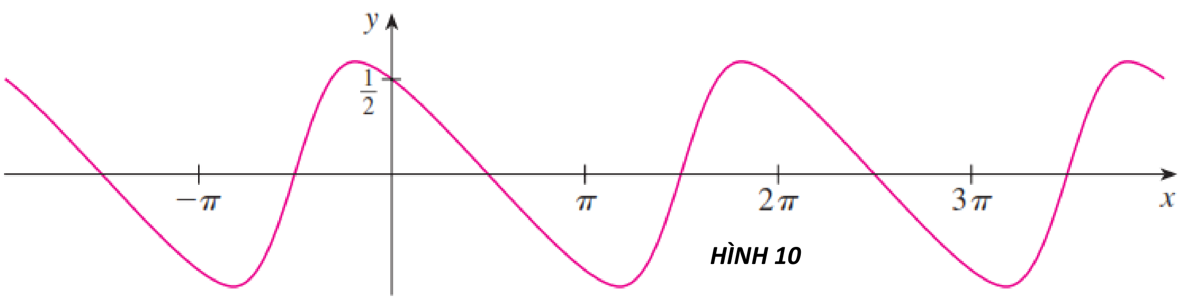
$$f''(x) = -\frac{2\cos x(1-\sin x)}{(2+\sin x)^3}$$

Vì $(2 + \sin x)^3 > 0$ và $1 - \sin x \geq 0$ với mọi x, ta biết rằng f "(x) > 0 khi cosx < 0, đó là, π/2 < x < 3π/2. Vì thế f có bề lõm quay lên trên (π/2, 3π/2) và quay xuống trên (0, π/2) và (3π/2, 2π). Điểm uốn là (π/2,0) và (3π/2, 0).

H. Đồ thị của hàm số trên đoạn [0, 2π] được vẽ trong Hình 9. Sau đó, dùng tính tuần hoàn, ta tịnh tiến để được đồ thị hoàn tất như trong Hình 10.

HÌNH 9





HÌNH 10

VÍ DỤ 6 Vẽ đồ thị hàm số y = ln(4 – x^2)

GIẢI

A. Tập xác định là

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. Giao điểm với trục y là f(0) = ln 4. Để tìm giao điểm với trục x ta cho

$$y = \ln(4 - x^2) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Do đó giao điểm với trục x là ± $\sqrt{3}$.

C. Vì f (- x) = f(x), nên f là hàm số chẵn và đồ thị đối xứng qua trục y.

D. Ta tìm tiệm cận đứng tại đầu mút của tập xác định. Vì $4 - x^2 \to 0^+$ khi $x \to 2^-$ và khi $x \to -2^+$, ta có

$$\lim_{x\to 2-} \ln(4-x^2) = -\infty \qquad \lim_{x\to -2+} \ln(4-x^2) = -\infty$$

Do đó các đường x = 2 và x = - 2 là các tiệm cận đứng.

E. $$f'(x) = \frac{-2x}{4-x^2}$$

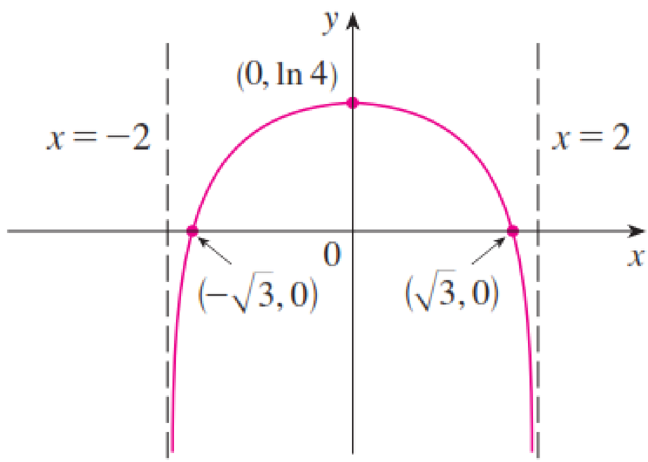
Vì f '(x) > 0 khi - 2 < x < 0 và f '(x) < 0 khi 0 < x < 2, nên f đồng biến trên (- 2, 0) và nghịch biến trên (0, 2).

F. Số tới hạn duy nhất là x = 0 . Vì f ' đổi dấu từ dương sang âm tại 0, f(0) = ln 4 là một cực đại theo Dấu Hiệu Đạo Hàm Bậc Nhất.

G. $$f''(x) = \frac{(4-x^2)(-2)+2x(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{-8-2x^2}{(4-x^2)^2}$$

Vì f "(x) < 0 với mọi x, đường cong có bề lõm quay xuống trên (- 2, 2) và không có điểm uốn.

H. Dùng thông tin này, ta vẽ đồ thị hàm số trong Hình 11.

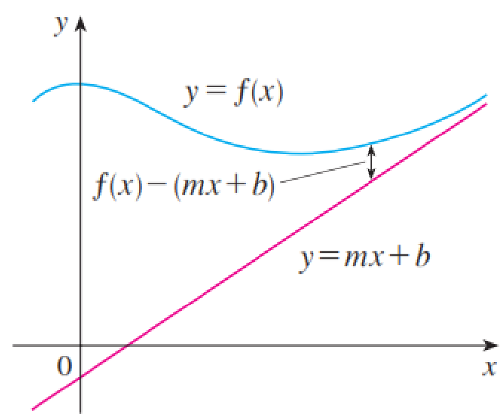


TIỆM CẬN XIÊN

Một số đường cong có đường tiệm cận xiên, nghĩa là không nằm ngang cũng không thẳng đứng. Nếu

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$$

thì đường thẳng y = mx + b được gọi là **tiệm cận xiên** vì khoảng cách thẳng đứng giữa đường cong y = f(x) và đường thẳng y = mx + b tiến đến 0, như trong Hình 12. (Một tình huống tương tự xảy ra khi ta có x → - ∞.) Đối với những hàm số hữu tỷ, tiệm cận xiên xảy ra khi bậc của tử lớn hơn 1 so với bậc của mẫu. Trong trường hợp như thế, phương trình của tiệm cận xiên có được bằng phép chia đa thức như trong ví dụ sau.



VÍ DỤ 6 Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

GIẢI

A. Tập xác định là R = (- ∞, ∞)

B. Giao điểm với hai trục đều bằng 0.

C. Vì f(- x) = - f(x) nên f là hàm số lẻ và đồ thị đối xứng qua điểm gốc.

D. Vì $x^2 + 1$ luôn khác 0, ta không có tiệm cận đứng. Vì $f(x) \to \infty$ khi $x \to \infty$ và $f(x) \to -\infty$ khi $x \to -\infty$, không có tiệm cận ngang. Thực hiện phép chia

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\text{f(x)} - \text{x} = -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0 \text{ khi } x \to \pm\infty$$

Do đó đường thẳng y = x là tiệm cận xiên.

E. $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \,.\, 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \qquad =$$

Vì f '(x) > 0 với mọi x (trừ 0), nên f đồng biến trên $(-\infty, \infty)$.

F. Dù f '(0) = 0 , f ' không đổi dấu tại 0, do đó không có cực đại hay cực tiểu.

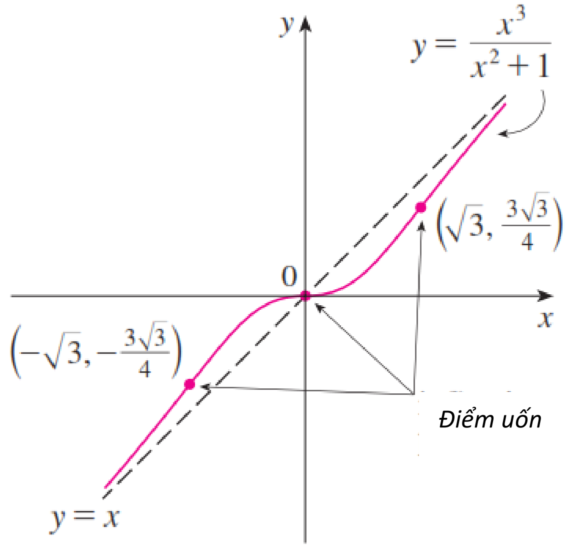
G. $$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{`(x^2+1)^3}$$

Vì f "(x) = 0 khi x = 0 hay $x = \pm\sqrt{3}$, ta lập nên bảng dấu sau:

Khoảng	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	f''(x)	f
$x < -\sqrt{3}$	-	-	+	+	BLQL
$-\sqrt{3} < x < 0$	-	+	+	-	BLQX
$0 < x < \sqrt{3}$	+	+	+	+	BLQL
$x > \sqrt{3}$	+	-	+	-	BLQX

Điểm uốn là $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, (0, 0), và $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

H. Đồ thị của f được cho trong Hình 13.



BÀI TẬP

1-52. Vẽ đồ thị những đồ thị của các hàm số sau:

1. $y = x^3 + x$
2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$
3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$
4. $y = 8x^2 - x^4$
5. $y = x^4 + 4x^3$
6. $y = x(x + 2)^3$
7. $y = 2x^5 - 5x^2 + 1$
8. $y = (4 - x^2)^5$
9. $y = \dfrac{x}{x - 1}$
10. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$
11. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$
12. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$
13. $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$
14. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$
15. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$
16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$
17. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$
18. $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$
19. $y = x\sqrt{5 - x}$
20. $y = 2\sqrt{x} - x$
21. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$
22. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$
23. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
24. $y = x\sqrt{2 - x^2}$
25. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$
26. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$
27. $y = x - 3x^{1/3}$
28. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$
29. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$
30. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$
31. $y = 3\sin x - \sin^3 x$
32. $y = x + \cos x$
33. $y = x\tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
34. $y = 2x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
35. $y = \frac{1}{2}x - \sin x, \quad 0 < x < 3\pi$
36. $y = \sec x + \tan x, \quad 0 < x < \pi/2$
37. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$
38. $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$
39. $y = e^{\sin x}$
40. $y = e^{-x}\sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
41. $y = 1/(1 + e^{-x})$
42. $y = e^{2x} - e^x$
43. $y = x - \ln x$
44. $y = e^x/x$
45. $y = (1 + e^x)^{-2}$
46. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$
47. $y = \ln(\sin x)$
48. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
49. $y = xe^{-x^2}$
50. $y = (x^2 - 3)e^{-x}$
51. $y = e^{3x} + e^{-2x}$
52. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

53. Trong thuyết tương đối, khối lượng của chất điểm là

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

trong đó m_o là khối lượng lúc đứng yên của chất điểm, m là khối lượng khi chất điểm di chuyển với vận tốc v đối với người quan sát, và c là vận tốc ánh sáng. Vẽ đồ thị của m như hàm số theo v.

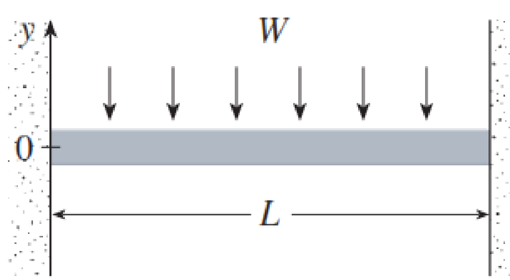
54. Trong thuyết tương đối, năng lượng của một chất điểm là

$$E = \sqrt{m_o^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

trong đó là m_o là khối lượng lúc đứng yên của chất điểm, λ là độ dài sóng của nó, và h là hằng số Planck. Vẽ đồ thị E như hàm số theo λ. Đồ thị cho ta biết gì về năng lượng?

55. Hình dưới cho thấy một thanh gỗ có chiều dài L ăn trong tường bê tông. Nếu một tải trọng W áp đều dọc theo bề dài của thanh gỗ, thanh gỗ sẽ lệch theo đường cong có phương trình

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$



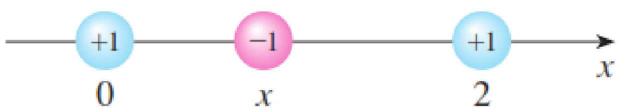
trong đó E và I là hằng số dương. (E là suất đàn hồi

Young và I là momen quán tính của tiết diện thẳng của thanh gỗ.(Vẽ đồ thị của đường cong y.

56. Định luật Coulomb phát biểu rằng lực hút giữa hai điện tích tỷ lệ thuận với tích các điện lượng và tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng. Hình dưới cho thấy các điện tích I ở hai vtyri 0 và 2 trên một đường thẳng và một chất điểm có điện lượng – 1 ở vị trí x giữa chúng. Suy ra từ Định luật Coulomb là lực tác dụng lên chất điểm chính giữa là

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

trong đó k là hằng số dương. Vẽ đồ thị của hàm số lực tác dụng. Đồ thị cho ta biết điều gì về lực tác dụng?



57-60. Tìm phương trình tiệm cận xiên. Không vẽ đồ thị hàm số.

57. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

58. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

59. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$

60. $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

61-66. Dùng các bước đã trình bày trong bài này để vẽ đồ thị hàm số. Trong bước D hãy tìm phương trình tiệm cận xiên.

67. Chứng tỏ rằng đường cong $y = x - \tan^{-1}x$ có hai tiệm cận xiên $y = x + \pi/2$ và $y = x - \pi/2$. Dùng sự kiện này để vẽ đường cong thêm chính xác.

68. Chứng tỏ rằng đường cong $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ có hai tiệm cận xiên y = x + 2 và y = - x – 2. Dùng sự kiện này để vẽ đường cong thêm chính xác..

69. Chứng tỏ rằng những đường thẳng y = (b/a)x và y = - (b/a)x là các tiệm cận xiên của hypebol $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

70. Cho $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Chứng tỏ rằng

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

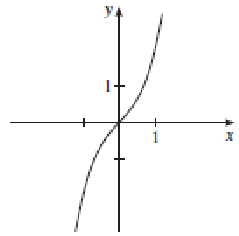
Điều này chứng tỏ rằng đồ thị của f tiến gần đến đồ thị của $y = x^2$, và ta nói rằng đường cong y = f(x) tiệm cận đến parabol $y = x^2$. Dùng sự kiện này để vẽ đường cong thêm chính xác..

71. Tìm tiệm cận của $f(x) = (x^4 + 1)/x$ theo phương thức đã trình bày trong Bài tập 70. Dùng sự kiện này để vẽ đường cong thêm chính xác..

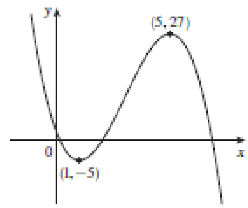
72. Dùng kiểu tiệm cận của $f(x) = \cos x + 1/x^2$ để vẽ đồ thị mà không cần theo các bước vẽ đã trình bày trong bài này.

ĐÁP SỐ

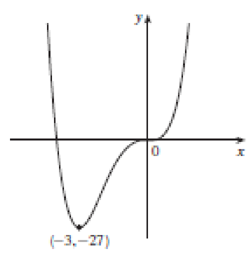
1. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0
C. About (0, 0) D. None
E. Inc. on $(-\infty, \infty)$ F. None
G. CU on $(0, \infty)$; CD on $(-\infty, 0)$;
IP (0, 0)
H. See graph at right.



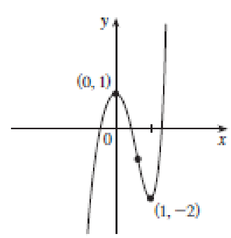
3. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 2; x-int. 2, $\frac{1}{2}(7 \pm 3\sqrt{5})$
C. None D. None
E. Inc. on (1, 5);
dec. on $(-\infty, 1)$, $(5, \infty)$
F. Loc. min. $f(1) = -5$;
loc. max. $f(5) = 27$
G. CU on $(-\infty, 3)$;
CD on $(3, \infty)$; IP (3, 11)
H. See graph at right.



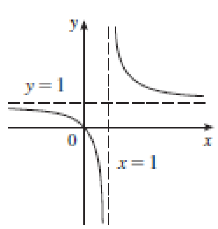
5. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. -4, 0
C. None D. None
E. Inc. on $(-3, \infty)$;
dec. on $(-\infty, -3)$
F. Loc. min. $f(-3) = -27$
G. CU on $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$;
CD on $(-2, 0)$; IP (0, 0), $(-2, -16)$
H. See graph at right.



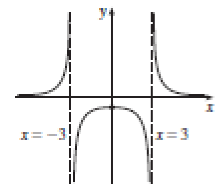
7. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 1
C. None D. None
E. Inc. on $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$;
dec. on (0, 1)
F. Loc. max. $f(0) = 1$;
loc. min. $f(1) = -2$
G. CU on $(1/\sqrt[3]{4}, \infty)$;
CD on $(-\infty, 1/\sqrt[3]{4})$;
IP $\left(1/\sqrt[3]{4}, 1 - 9/(2\sqrt[3]{16})\right)$
H. See graph at right.



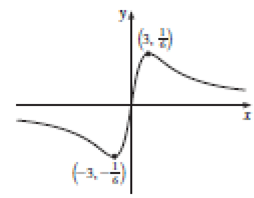
9. A. $\{x \mid x \neq 1\}$ B. y-int. 0; x-int. 0
C. None D. VA $x = 1$, HA $y = 1$
E. Dec. on $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$
F. None
G. CU on $(1, \infty)$; CD on $(-\infty, 1)$
H. See graph at right.



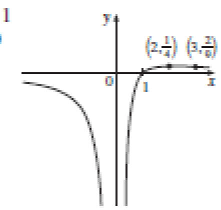
11. A. $\{x \mid x \neq \pm 3\}$ B. y-int. $-\frac{1}{9}$
C. About y-axis D. VA $x = \pm 3$, HA $y = 0$
E. Inc. on $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$;
dec. on $(0, 3)$, $(3, \infty)$
F. Loc. max. $f(0) = -\frac{1}{9}$
G. CU on $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$;
CD on $(-3, 3)$
H. See graph at right.



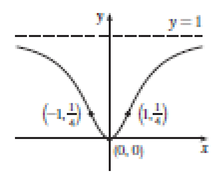
13. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0
C. About (0, 0) D. HA $y = 0$
E. Inc. on $(-3, 3)$;
dec. on $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$
F. Loc. min. $f(-3) = -\frac{1}{6}$;
loc. max. $f(3) = \frac{1}{6}$;
G. CU on $(-3\sqrt{3}, 0)$, $(3\sqrt{3}, \infty)$;
CD on $(-\infty, -3\sqrt{3})$, $(0, 3\sqrt{3})$;
IP (0, 0), $(\pm 3\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/12)$
H. See graph at right.



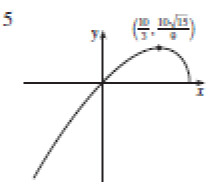
15. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ B. x-int. 1
C. None D. HA $y = 0$; VA $x = 0$
E. Inc. on (0, 2);
dec. on $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$
F. Loc. max. $f(2) = \frac{1}{4}$
G. CU on $(3, \infty)$;
CD on $(-\infty, 0)$, (0, 3); IP $(3, \frac{2}{9})$
H. See graph at right



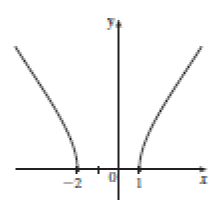
17. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0, x-int. 0
C. About y-axis D. HA $y = 1$
E. Inc. on $(0, \infty)$; dec. on $(-\infty, 0)$
F. Loc. min. $f(0) = 0$
G. CU on $(-1, 1)$;
CD on $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; IP $(\pm 1, \frac{1}{4})$
H. See graph at right



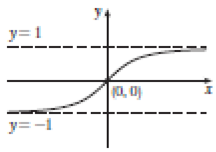
19. A. $(-\infty, 5]$ B. y-int. 0; x-int. 0, 5
C. None D. None
E. Inc. on $(-\infty, \frac{10}{3})$; dec. on $(\frac{10}{3}, 5)$
F. Loc. max. $f(\frac{10}{3}) = \frac{10}{9}\sqrt{15}$
G. CD on $(-\infty, 5)$
H. See graph at right.



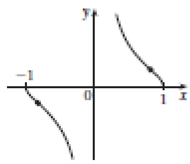
21. A. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
B. x-int. -2, 1
C. None D. None
E. Inc. on $(1, \infty)$; dec. on $(-\infty, -2)$
F. None
G. CD on $(-\infty, -2)$, $(1, \infty)$
H. See graph at right.



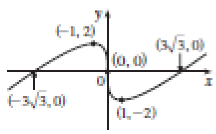
23. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0
C. About the origin
D. HA $y = \pm 1$
E. Inc. on $(-\infty, \infty)$ F. None
G. CU on $(-\infty, 0)$;
CD on $(0, \infty)$; IP $(0, 0)$
H. See graph at right.



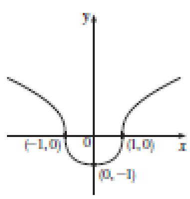
25. A. $\{x \mid |x| \leq 1, x \neq 0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$
B. x-int. ± 1 C. About $(0, 0)$
D. VA $x = 0$
E. Dec. on $(-1, 0)$, $(0, 1)$
F. None
G. CU on $\left(-1, -\sqrt{2/3}\right)$, $\left(0, \sqrt{2/3}\right)$;
CD on $\left(-\sqrt{2/3}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2/3}, 1\right)$;
IP $\left(\pm\sqrt{2/3}, \pm 1/\sqrt{2}\right)$
H. See graph at right.



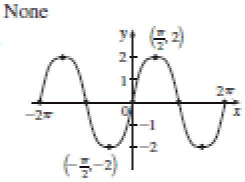
27. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. $0, \pm 3\sqrt{3}$ C. About the origin
D. None E. Inc. on $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; dec. on $(-1, 1)$
F. Loc. max. $f(-1) = 2$;
loc. min. $f(1) = -2$
G. CU on $(0, \infty)$; CD on $(-\infty, 0)$;
IP $(0, 0)$
H. See graph at right.



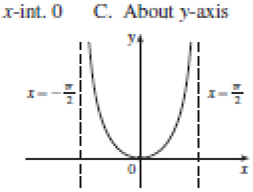
29. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. -1; x-int. ± 1
C. About y-axis D. None
E. Inc. on $(0, \infty)$; dec. on $(-\infty, 0)$
F. Loc. min. $f(0) = -1$
G. CU on $(-1, 1)$;
CD on $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$;
IP $(\pm 1, 0)$
H. See graph at right.



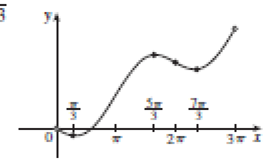
31. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. $n\pi$ (n an integer)
C. About the origin, period 2π D. None
E. Inc. on $(2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2)$;
dec. on $(2n\pi + \pi/2, 2n\pi + 3\pi/2)$
F. Loc. max. $f(2n\pi + \pi/2) = 2$;
loc. min. $f(2n\pi + 3\pi/2) = -2$
G. CU on $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$;
CD on $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$; IP $(n\pi, 0)$
H. See graph at right.



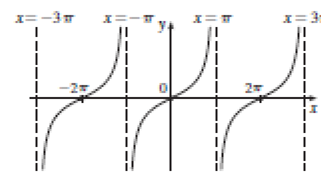
33. A. $(-\pi/2, \pi/2)$ B. y-int. 0; x-int. 0 C. About y-axis
D. VA $x = \pm\pi/2$
E. Inc. on $(0, \pi/2)$;
dec. on $(-\pi/2, 0)$
F. Loc. min. $f(0) = 0$
G. CU on $(-\pi/2, \pi/2)$
H. See graph at right.



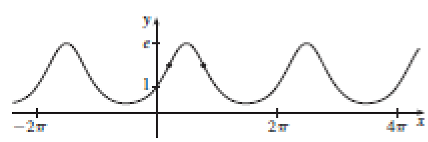
35. A. $(0, 3\pi)$ C. None D. None
E. Inc. on $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(7\pi/3, 3\pi)$;
dec. on $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 7\pi/3)$
F. Loc. min. $f(\pi/3) = (\pi/6) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $f(7\pi/3) = (7\pi/6) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$;
loc. max. $f(5\pi/3) = (5\pi/6) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
G. CU on $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$;
CD on $(\pi, 2\pi)$;
IP $(\pi, \pi/2)$, $(2\pi, \pi)$
H. See graph at right.



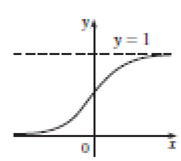
37. A. All reals except $(2n + 1)\pi$ (n an integer)
B. y-int. 0; x-int. $2n\pi$
C. About the origin, period 2π
D. VA $x = (2n + 1)\pi$
E. Inc. on $((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi)$ F. None
G. CU on $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$; CD on $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$;
IP $(2n\pi, 0)$
H.



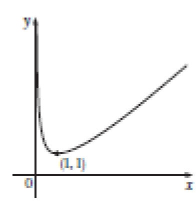
39. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 1 C. Period 2π D. None
Answers for E–G are for the interval $[0, 2\pi]$.
E. Inc. on $(0, \pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$; dec. on $(\pi/2, 3\pi/2)$
F. Loc. max. $f(\pi/2) = e$; loc. min. $f(3\pi/2) = e^{-1}$
G. CU on $(0, \alpha)$, $(\beta, 2\pi)$ where $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)\right)$,
$\beta = \pi - \alpha$; CD on (α, β); IP when $x = \alpha, \beta$
H.



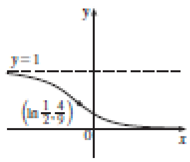
41. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. $\frac{1}{2}$ C. None
D. HA $y = 0$, $y = 1$
E. Inc. on $\mathbb{R}$ F. None
G. CU on $(-\infty, 0)$; CD on $(0, \infty)$;
IP $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ H. See graph at right.



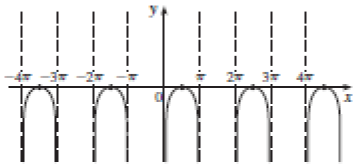
43. A. $(0, \infty)$ B. None
C. None D. VA $x = 0$
E. Inc. on $(1, \infty)$; dec. on $(0, 1)$
F. Loc. min. $f(1) = 1$
G. CU on $(0, \infty)$
H. See graph at right.



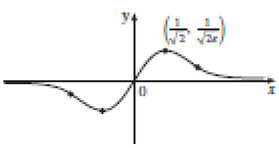
45. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. $\frac{1}{4}$ C. None
D. HA $y = 0$, $y = 1$
E. Dec. on $\mathbb{R}$ F. None
G. CU on $(\ln \frac{1}{2}, \infty)$; CD on $(-\infty, \ln \frac{1}{2})$;
IP $(\ln \frac{1}{2}, \frac{4}{9})$
H. See graph at right.



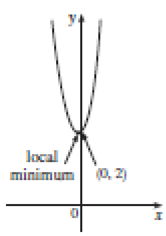
47. A. All x in $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ (n an integer)
B. x-int. $\pi/2 + 2n\pi$ C. Period 2π D. VA $x = n\pi$
E. Inc. on $(2n\pi, \pi/2 + 2n\pi)$; dec. on $(\pi/2 + 2n\pi, (2n+1)\pi)$
F. Loc. max. $f(\pi/2 + 2n\pi) = 0$ G. CD on $(2n\pi, (2n+1)\pi)$
H.



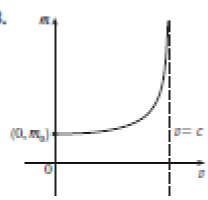
49. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0 C. About (0, 0) D. HA $y = 0$
E. Inc. on $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; dec. on $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, \infty)$
F. Loc. min. $f(-1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2e}$; loc. max. $f(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2e}$
G. CU on $(-\sqrt{3/2}, 0)$, $(\sqrt{3/2}, \infty)$; CD on $(-\infty, -\sqrt{3/2})$, $(0, \sqrt{3/2})$;
IP $(\pm\sqrt{3/2}, \pm\sqrt{3/2}\,e^{-3/2})$, (0, 0)
H.



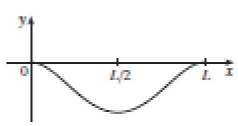
51. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 2
C. None D. None
E. Inc. on $(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}, \infty)$; dec. on $(-\infty, \frac{1}{5}\ln\frac{2}{3})$
F. Loc. min. $f(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^{3/5} + (\frac{2}{3})^{-2/5}$
G. CU on $(-\infty, \infty)$
H. See graph at right.



53.

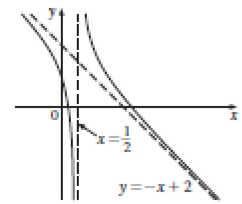


55.

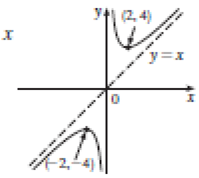


57. $y = x - 1$ **59.** $y = 2x - 2$

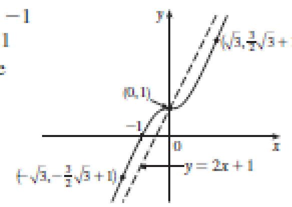
61. A. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$
B. y-int. 1; x-int. $\frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{17})$
C. None
D. VA $x = \frac{1}{2}$, SA $y = -x + 2$
E. Dec. on $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \infty)$
F. None
G. CU on $(\frac{1}{2}, \infty)$; CD on $(-\infty, \frac{1}{2})$
H. See graph at right



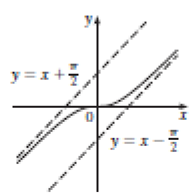
63. A. $\{x \mid x \neq 0\}$ B. None
C. About (0, 0) D. VA $x = 0$; SA $y = x$
E. Inc. on $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$;
dec. on $(-2, 0)$, $(0, 2)$
F. Loc. max. $f(-2) = -4$;
loc. min. $f(2) = 4$
G. CU on $(0, \infty)$; CD on $(-\infty, 0)$
H. See graph at right.



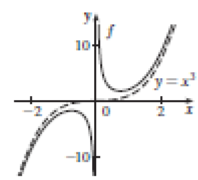
65. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 1; x-int. -1
C. None D. SA $y = 2x + 1$
E. Inc. on $(-\infty, \infty)$ F. None
G. CU on $(-\infty, -\sqrt{3})$,
$(0, \sqrt{3})$;
CD on $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$;
IP $(\pm\sqrt{3}, 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3})$, (0, 1)
H. See graph at right.



67.



71. VA $x = 0$, asymptotic to $y = x^3$



BÀI 4. 7 BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Các phương pháp ta đã học trong chương này là nhằm tìm những giá trị cực trị có úng dụng thực tiễn trong nhiều lãnh vực của cuộc sống. Một doanh nhân muốn làm giảm giá thành và tăng lợi nhuận. Một khách du lịch muốn giảm thiểu thời gian di chuyển. Nguyên lý Fermat trong quang học phát biểu rằng ánh sáng đi theo lộ trình mất ít thời gian nhất. Trong bài này và bài sau ta giải quyết những bài toán như tìm diện tích , thể tích, và lợi nhuận lớn nhất và tìm khoảng cách, thời gian, và giá thành nhỏ nhất.

Trong quá trình giải quyết những bài toán thực tế này, thử thách lớn nhất thường là biến đổi bài toán thực tế về thành bài toán cực trị giải tích bằng cách lập ra hàm số mà ta phải tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của nó. Hãy nhớ lại các bước trong phương pháp giải toán của Polya mà ta đã có dịp trình bày trong bài đọc thêm và vận dụng chúng vào tình huống này:

CÁC BƯỚC GIẢI BÀI TOÁN CỰC TRỊ

1. Tìm hiểu bài toán Bước đầu tiên là đọc đề bài cẩn thận cho đến khi hiểu tường tận. Tự hỏi: Cái chưa biết là gì? Đại lượng nào đã được cho trước? Điều kiện nào đã được cho trước?

2. Vẽ hình Trong hầu hết bài toán vẽ hình là việc làm hữu ích. Nhớ nhận diện những đại lượng cho trước hay phải tính trên hình vẽ.

3. Giới thiệu ký hiệu Gán một ký hiệu cho đại lượng cần tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất (giả sử ta gọi là Q). Cũng chọn những ký hiệu (a, b, c, . . . , x, y) cho những đại lượng chưa biết khác và ghi tên vào giãn đồ. Ta nên dùng những ký hiêu gợi ý bằng những chữ cái đầu tiên - ví dụ, đặt k là khoảng cách, đặt c là cạnh, d là diện tích, t là thời gian . . .

4. Biểu diễn Q theo các ký hiệu khác đã đặt trong Bước 3.

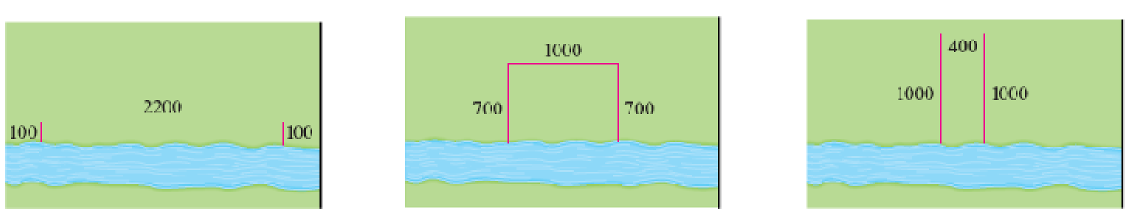
5. Nếu Q đã được biểu diễn như một hàm số với nhiều hơn một biến trong Bước 4, dùng những thông tin cho trước để tìm ra đẳng thức liên hệ giữa các biến này (theo dạng phương trình) . Nhờ đó ta tính được biến này theo biến kia, và cuối cùng Q được biểu diễn thành một hàm số theo một biến duy nhất được chọn ra, dưới dạng Q = f(x). Tìm tập xác định của hàm số này.

6. Dùng phương pháp của bài 4.1 và 4.3 để tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của f. Đặc biệt, nếu tập xác định của f là một đoạn, thì có thể sử dụng Phương Pháp Đoạn trong bài 4.1.

VÍ DỤ 1 Một nhà nông có 2400 ft hàng rào và muốn rào quanh một miếng đất hình chữ nhật có một cạnh giáp bờ sông. Ông không cần rào cạnh này. Tìm kích thước của miếng đất có diện tích lớn nhất.

- **Tìm hiểu bài toán**
- **Tính tương tự: Xét vài trường hợp cá biệt**
- **Vẽ hình**

GIẢI Để "cảm thụ " được ý nghĩa của bài toán, ta hãy thực nghiệm một số tình huống. Hình 1 (không đúng tỷ lệ) cho thấy ba cách có thể xảy ra khi dùng 2400 ft rào.

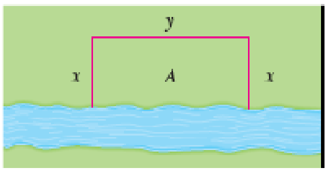


Diện tích = 100 . 2200 = 220,000 ft^2 Diện tích = 700 . 1000 = 700,000 ft^2 Diện tích = 1000 . 400 = 400,000 ft^2

Hình 1

Ta thấy rằng khi miếng đất hẹp thì diện tích tương đối nhỏ. Hình như có vẽ với một hình dạng nào đó ta sẽ được một diện tích lớn nhất.

■ **Giới thiệu ký hiệu**



Hình 2

Hình 2 minh họa trường hợp tổng quát. Ta muốn tìm giá trị lớn nhất của diện tích A. Gọi x, y là kích thước của miếng đất hình chữ nhật (tính bằng ft). Ta biểu diễn A theo x và y:

$$A = xy$$

Ta muốn biểu diễn A thành một hàm số theo đúng một biến số, vì thế ta sẽ tìm cách tính y theo x. Để làm được điều này ta sử dụng thông tin cho trước là chiều dài của hàng rào là 2400 ft, tức là ta có

$$2x + y = 2400$$

Từ đây suy ra y = 2400 - 2x, và do đó

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Chú ý là $x \geq 0$ và $x \leq 1200$ (nếu không thì A < 0). Vậy hàm số ta cần tìm giá trị lớn nhất là

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \leq x \leq 1200$$

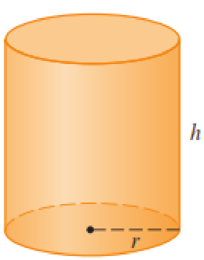
Ta có đạo hàm A'(x) = 2400 - 4x, vì thế số tới hạn cho bởi phương trình

$$2400 - 4x = 0$$

cho ta x = 600. Giá trị lớn nhất của A phải xảy ra hoặc tại số tới hạn này hoặc tại hai đầu mút. Vì A(0) = 0, A(600) = 720,000, và A(1200) = 0, Phương Pháp Đoạn cho ta giá trị lớn nhất là A(600) = 720,000.

[Cách khác, ta có thể dùng A''(x) = - 4 < 0 với mọi x, nên đồ thị có bề lõm quay xuống và hàm số đạt cực đại cũng là giá trị lớn nhất tại x = 600.]

Vậy miếng đất hình chữ nhật cần tìm có kích thước 600 x 1200, cạnh 1200 song song với bờ sông.



HÌNH 3

VÍ DỤ 2 Người ta muốn làm một lon nhôm hình trụ có thể chứa 1 lít dầu. Tìm kích thước của lon sao cho chi phí nhôm sử dụng là nhỏ nhất.

GIẢI Vẽ hình (Hình 3), trong đó r là bán kính và h là chiều cao (tính bằng cm). Làm chi phí nhôm nhỏ nhất là làm diện tích toàn phần (diện tích xung quanh và hai đáy) của lon nhôm nhỏ nhất. Từ Hình 4, ta thấy rằng, diện tích xung quanh của lon là diện tích hình chữ nhật có kích thước 2πr và h. Do đó diện tích toàn phần của lon là:

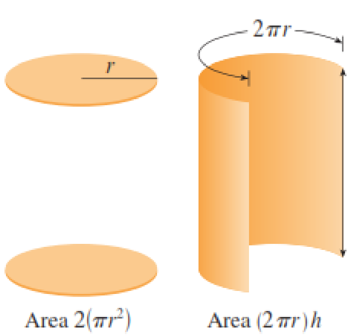
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Để khử h ta sử dụng giả thiết là thể tích lon bằng 1 lít, tức 1000 cm^3. Do đó

$$\pi r^2 h = 1000$$

cho ta $h = 1000/(\pi r^2)$. Thế giá trị này vào biểu thức A, ta được

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$



HÌNH 4

Vậy hàm số ta muốn tìm giá trị nhỏ nhất là

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad (r > 0)$$

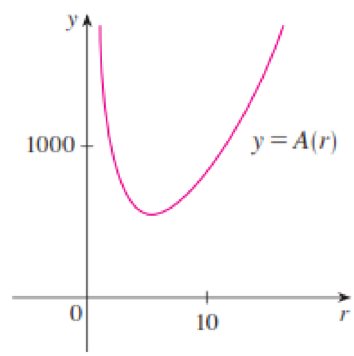
Để tìm số tới hạn, ta lấy đạo hàm

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Ta có A'(r) = 0 khi $\pi r^3 = 500$ hay $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$.

Vì tập xác định của A là $(0, \infty)$ nên ta không có điểm mút như trong Ví dụ 1. Nên thay vào đó ta tính giới hạn của A khi khi r tiến đến 0^+ và ∞. Hai giới hạn này đều là ∞, do đó giá trị nhỏ nhất của A xảy ra ở điểm tới hạn.

[Cách khác: ta có thể thấy $A'(r) < 0$ khi $r < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ và $A'(r) > 0$ khi $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ nên A(t) nghịch biến với mọi x ở bên trái điểm tới hạn và đồng biến với mọi x ở bên phải điểm tới hạn, do đó A(r) đạt cực tiểu cũng là giá trị nhỏ nhất tại $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Xem Hình 5.]



HÌNH 5

Giá trị của h tương ứng khi $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ là

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Do đó, để chi phí làm lon nhỏ nhất, thì bán kính phải bằng $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm và chiều cao lon phải gấp hai bán kính, tức bằng đường kính lon.

GHI CHÚ 1 Nhớ cách lý luận trong Ví dụ 2 có thể vận dụng trong các bài tập sau này để tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất.

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT DÙNG DẤU HIỆU ĐẠO HÀM Giả sử c là điểm tới hạn của hàm số liên tục f xác định trên một khoảng.
(a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x < c$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x > c$, thì f(c) là giá trị lớn nhất của f.
(b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x < c$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x > c$, thì f(c) là giá trị nhỏ nhất của f.

GHI CHÚ 2 Một phương pháp khác để giải bài toán cực trị là dùng đạo hàm ẩn tàng. Nhìn lại Ví dụ 2 để minh họa phương pháp này. Ta đi từ hai phương trình đã tìm được

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 100$$

nhưng thay vì khử h, ta lấy đạo hàm ẩn tàng hai phương trình theo r:

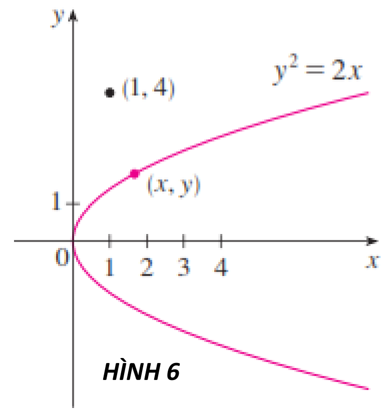
$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2h' = 0$$

Cực tiểu xảy ra tại số tới hạn, do đó ta cho A' = 0, đơn giản, và ta được

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

và trừ hai phương trình, ta được $2r - h = 0$, hay $h = 2r$.

VÍ DỤ 3 Tìm trên parabol $y^2 = 2x$ điểm gần với điểm (1, 4) nhất.



HÌNH 6

GIẢI Khoảng cách giữa điểm (1, 4) và điểm (x, y) là

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

(Hình 6). Nhưng vì (x, y) nằm trên parabol, nên $x = y^2/2$, do đó ta được

$$d = \sqrt{(y^2/2-1)^2 + (y-4)^2}$$

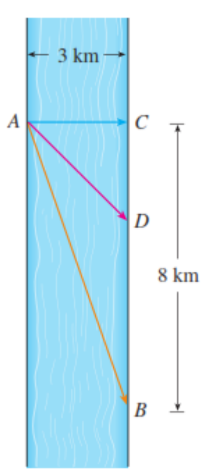
(Cách khác, ta có thể thế $y = \sqrt{2}$ để tính d theo x). Thay vì tìm giá trị nhỏ nhất của d, ta tìm giá trị nhỏ nhất của d^2: (vì d nhỏ nhất cùng lúc với d^2 nhỏ nhất, và tìm d^2 nhỏ nhất thì dễ hơn)

$$d^2 = f(y) = (y^2/2 - 1)^2 + (y - 4)^2$$

Lấy đạo hàm, ta được

$$f'(y) = 2(y^2/2 - 1)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

Do đó $f'(y) = 0$ khi $y = 2$. Nhận xét là $f'(y) < 0$ khi $y < 2$ và $f'(y) > 0$ khi $y > 2$, do đó giá trị nhỏ nhất xảy ra khi $y = 2$. Giá trị tương ứng của x là $x = y^2/2 = 2$. Vậy điểm trên $y^2 = 2x$ gần điểm (1, 4) nhất là (2, 3).



HÌNH 7

VÍ DỤ 4 Một người cho thuyền đi từ điểm A trên bờ sông thẳng, rộng 3 km, và muốn đến điểm B, 8 km xuôi dòng trên bờ đối diện càng nhanh càng tốt (xem Hình 7). Y có thể chèo thuyền trực tiếp băng ngang con sông đến điểm C rồi từ đó chạy đến B, hoặc y chèo trực tiếp đến điểm B, hoặc y có thể chèo đến điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy đến B. Nếu y có thể chèo với vận tốc 6km/h và chạy với vận tốc 8km/h, hỏi y chèo đến điểm D ở đâu sẽ đến được B nhanh như có thể. (Giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền.)

GIẢI Ta đặt x là khoảng cách từ C đến D, thì khoảng đường chạy bộ là $|DB| = 8 - x$ và Định lý Pythagore cho ta khoảng cách chèo thuyền là

$$|AD| = x^2 + 9$$

Ta dùng công thức

$$\text{thời gian đi} = \frac{\textit{quảng đường đi}}{\textit{vận tốc}}$$

Suy ra thời gian chèo thuyền là $\sqrt{x^2+9}/6$ và thời gian chạy bộ là $(8 - x)/8$, do đó thời gian tổng cộng là T, hàm số theo x:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8} \qquad +$$

Tập xác định của hàm số T là [0, 8]. Chú ý là nếu x = 0, y chèo thuyền đến C và nếu x = 8, y chèo trực tiếp đến B. Đạo hàm của T là

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$$

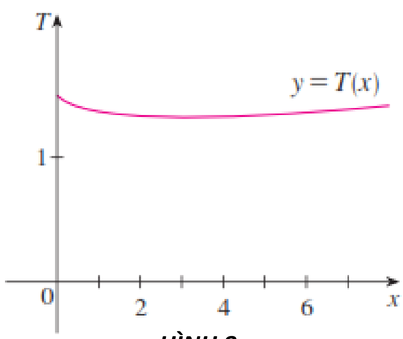
Do đó, dùng giả thiết là $x \geq 0$, ta có

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2+9}$$

$$\iff 16x^2 = 9(x^2+9) \iff 7x^2 = 81$$

$$\iff x = 9/\sqrt{7}$$

Số tới hạn duy nhất là $x = 9/\sqrt{7}$. Để xem giá trị nhỏ nhất xảy ra ở đây hay tại đầu mút của [0, 8], ta tính giá trị của T tại ba điểm:



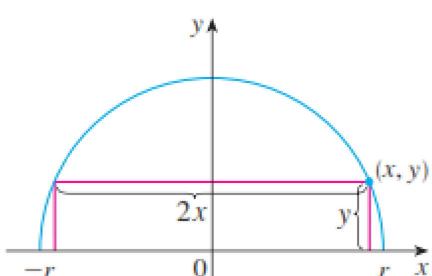
HÌNH 8

$$T(0) = 1.5 \qquad T(9/\sqrt{7}) = 1 + \sqrt{7}/8 \approx 1.33 \qquad T(8) = \sqrt{73}/6 \approx 1.42$$

Vì giá trị nhỏ nhất trong số các tri này của T xảy ra khi $x = 9/\sqrt{7}$, nên giá trị nhỏ nhất của T cũng xảy ra tại đó. Hình 8 minh họa đồ thị cho thấy kết quả vừa tính toán là chính xác.

Do đó người này phải tiếp đất tại điểm $9/\sqrt{7}$ km (≈ 3.4 km) từ điểm khởi hành.

VÍ DỤ 5 Tìm diện tích hình chữ nhật lớn nhất nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính r.



HÌNH 9

GIẢI Xét nửa đường tròn là phần trên của đường tròn $x^2 + y^2 = r^2$, tâm là điểm gốc toạ độ. Thuật ngữ nội tiếp có nghĩa hình chữ nhật có hai đỉnh thuộc nửa đường tròn và hai đỉnh kia trên trục x như trong Hình 9.

Gọi (x, y) là đỉnh thuộc phân tư thứ nhất. Thế thì hình chữ nhật có kích thước là 2x và y, và diện tích của nó là

$$A = 2xy$$

Để khử y ta dùng giả thiết là (x, y) thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = r^2$ và do đó $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Do đó

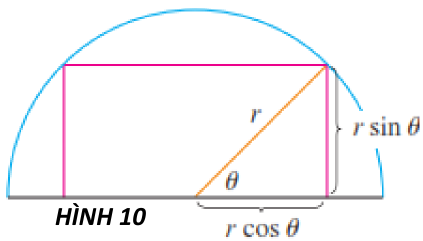
$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Tập xác định của hàm số này là $0 \leq x \leq r$. Đạo hàm là

$$A' = 2\sqrt{r^2-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{2(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

A' = 0 khi $2x^2 = r^2$, hay $x = r/\sqrt{2}$ (vì $x \geq 0$). Giá trị này của x cho ta giá trị lớn nhất vì A(0) = A(r) = 0. Do đó diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp là

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$



HÌNH 10

GIẢI 2 Một cách giải đơn giản hơn là nếu ta nghĩ đến cách dùng biến là góc như trong Hình 10.

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\sin\theta) = r^2(2\sin\theta\cos\theta) = r^2\sin 2\theta$$

Ta biết rằng $\sin 2\theta$ có giá trị lớn nhất là 1 và xảy ra khi $2\theta = \pi/2$ hay $\theta = \square/4$. Do đó $A(\theta)$ đạt giá trị lớn nhất là r^2 khi $\theta = \pi/4$.

Chú ý là cách giải lượng giác này không cần đến công cụ giải tích là đạo hàm.

ỨNG DỤNG VÀO DOANH THƯƠNG VÀ KINH TẾ

Trong bài 3.7 ta đã giới thiệu ý tưởng về chi phí cận biên. Nhớ là nếu C(x), hàm số chi phí, là chi phí sản xuất x đơn vị của một sản phẩm nào đó, thì **chi phí cận biên (hay chi phí lề)** là tốc độ biến thiên của C đối với x. Nói cách khác, hàm số chi phí cận biên là đạo hàm , C '(x), của hàm số chi phí.

Bây giờ ta hãy xét vấn đề tiếp thị. Gọi p(x) là giá mỗi đơn vị mà công ty có thể định giá nếu nó bán x đơn vị. Thế thì p được gọi là **hàm số cầu** (demand fuction) (hay **hàm số giá cả**) và ta hi vọng đó là hàm số nghịch biến theo x. Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là p(x), thì tổng doanh thu là

$$R(x) = xp(x)$$

và R được gọi là **hàm số doanh thu**. Đạo hàm R' của hàm số doanh thu R được gọi là **hàm số doanh thu cận biên** và là tốc độ biến thiên của doanh thu đối với số đơn vị bán ra.

Nếu bán ra được x đơn vị, thì lợi tức tổng cộng là

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

và P được gọi là **hàm số lợi tức**. **Hàm số lợi tức cận biên** là P'. đạo hàm của hàm số lợi tức. Trong Bài tập[53-58 bạn được yêu cầu dùng hàm số chi phí cận biên, doanh thu cận biên và lợi tức cận biên để giảm tối thiểu chi phí và tăng tối đa doanh thu cùng lợi tức.

VÍ DỤ 6 Một cửa hàng đã bán ra 200 máy ghi đĩa DVD mỗi tuần với giá 350$ một máy. Một nghiên cứu thị trường chỉ ra rằng với mỗi 10$ tiền thưởng khuyến mãi cho người mua, số đơn vị bán ra tăng 20 mỗi tuần. Tìm hàm số cầu và doanh thu. Cửa hàng phải khuyến mãi bao nhiêu tiền thì doanh thu mới cao nhất?

GIẢI Nếu x là số máy ghi đĩa DVD bán mỗi tuần, thì x - 200 là doanh số tăng mỗi tuần. Với mỗi 20 đơn vị bán ra tăng thêm, giá giảm đi 10$. Vì thế với mỗi đơn vị bán tăng thêm, giá giảm đi $\frac{1}{20} \cdot 10$ và hàm số cầu là

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

Hàm số doanh thu là $R(x) = xp(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$

Vì R'(x) = 450 - x, ta thấy rằng R'(x) = 0 khi x = 450. Giá trị x này cho ta giá trị lớn nhất của doanh thu Quy Tắc Đạo Hàm Bậc Nhất. Giá tương ứng là

$$p(450) = 450 - 450/2 = 225$$

và số tiền khuyến mãi là 350 - 225 = 125. Do đó, để doanh thu đạt cao nhất, cửa hàng nên đưa ra số tiền khuyến mãi là 125$.

BÀI TẬP

1. Xét bài toán sau: Tìm hai số có tổng 23 sao cho tích của chúng lớn nhất.

(a) Lập bảng giá trị như bảng bên dưới, sao cho tổng hai số ở hai cột đầu tiên luôn bằng 23. Dựa vào chứng cứ trong bảng, hãy ước tính đáp số của bài toán.

Số thứ nhất	Số thứ hai	Tích
1	22	22
2	21	42
3	20	60
.	.	.
.	.	.
.	.	.

(b) Dùng giải tích để giải bài toán và so sánh với đáp số của bạn trong phần (a).

2. Tìm hai số có hiệu là 100 và tích của chúng nhỏ nhất.

3. Tìm hai số dương có tích là 100 và tổng của chúng nhỏ nhất.

4. Tìm một số dương sao cho tổng của nó và nghịch đảo của nó là nhỏ nhất.

5. Tìm kích thước của hình chữ nhật có chu vi 100m và diện tích lớn nhất.

6. Tìm kích thước của hình chữ nhật có diện tích 1000m^2 và chu vi nhỏ nhất.

7. Thu hoạch Y của một nông sản phụ thuộc vào mức đạm N trong đất (tính theo đơn vị thích hợp) trong đó

$$Y = \frac{kN}{1+N^2}$$

trong đó k là hằng số dương. Mức đạm bao nhiêu sẽ cho sản lượng tốt nhất?

8. Tốc độ (tính bằng mg cacbon/m^3/h của quá trình quang hợp xảy ra đối với một loài thực vật phù du nào đó được mô hình hóa bằng hàm số

$$P = \frac{100I}{I^2+I+4}$$

trong đó I là cường độ ánh sáng (đo bằng ngàn nến). Với cường độ sáng bao nhiêu thì P lớn nhất?

9. Cho bài toán sau: Một trại chủ có 750 mét rào dùng để rào một miếng đất hình chữ nhật rồi chia nó thành 4 lô bằng các hàng rào song song với một cạnh của hình chữ nhật . Ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của tổng diện tích bốn lô này.

a. Vẽ các giản đồ mô tả tình thế, với các hình chữ nhật có hình dáng rộng hẹp khác nhau và ước tính diện tích lớn nhất cần tìm.

b. Vẽ giản đồ trong trường hợp tổng quát, đưa vào các kí hiệu và điền vào hình vẽ.

c. Viết biểu thức diện tích theo các kí hiệu.

d. Tìm hệ thức liên hệ giữa các kí hiệu dựa vào giả thiết của bài toán.

e. Thế vào biểu thức ở câu c để tính diện tích theo một biến duy nhất.

f. Hoàn tất bài giải và so sánh kết quả với dự đoán ở câu a.

10. Cho bài toán sau: Một hộp giấy không nắp được làm từ một miếng bìa hình vuông, cạnh 3 dm bằng cách cắt 4 hình vuông nhỏ bằng nhau ở bốn góc, rồi gấp các cạnh lại. Tìm thể tích lớn nhất của hộp.

a. Vẽ giản đồ trong trường hợp tổng quát, đưa vào các kí hiệu và điền vào hình vẽ.

b. Viết biểu thức thể tích theo một biến duy nhất.

c. Hoàn tất bài giải và so sánh kết quả với dự đoán qua thực nghiệm của câu a.

11. Một trại chủ muốn rào một miếng đất hình chữ nhật có diện tích 1,5 triệu ft^2 rồi chia miếng đất thành hai phần bằng hàng rào song song với một cạnh của hình chữ nhật . Y phải rào như thế nào sao cho phí tổn hàng rào là nhỏ nhất.

12. Một hộp đáy vuông không nắp có thể tích 32.000 cm^3. Tìm kích thước hộp sao cho phí tổn vật liệu làm hộp là nhỏ nhất.

13. Nếu 1.200 cm^2 là diện tích của vật liệu dùng để làm một cái hộp đáy vuông không nắp, tìm thể tích lớn nhất có được của hộp.

14. Một kho chứa hình hộp chữ nhật không nắp có dung tích 10 m^3. Chiều dài của đáy gấp đôi chiều rộng. Vật liệu làm nền kho chứa giá 10 đôla mỗi mét vuông, vật liệu làm vách kho giá 6 đôla mỗi mét vuông. Tìm chi phí thấp nhất để xây dựng kho chứa.

15. Làm lại bài tập 14 với kho chứa có nắp đậy làm bằng vật liệu cùng giá như vật liệu làm vách kho.

16. a. Chứng tỏ rằng trong các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình có chu vi nhỏ nhất là hình vuông .

b. Chứng tỏ rằng trong các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình có diện tích lớn nhất là hình vuông .

17. Tìm trên đường thẳng $y = 4x + 7$ điểm ở gần điểm gốc tọa độ nhất.

18. Tìm trên đường thẳng $6x + y = 9$ điểm ở gần điểm (- 3; 1) nhất.

19. Tìm trên êlip $4x^2 + y^2 = 4$ điểm cách xa điểm (1; 0) nhất.

20. Tìm, đúng đến hai chữ số thập phân, toạ độ của điểm trên đồ thị $y = \tan x$ và ở gần điểm (1, 1) nhất.

21. Tìm kích thước của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong đường tròn bán kính r.

22. Tìm kích thước của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong êlip $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

23. Tìm kích thước của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp trong tam giác đều cạnh L biết một cạnh hình chữ nhật nằm trên cạnh của tam giác đều.

24. Tìm kích thước hình chữ nhật có diện tích lớn nhất biết một cạnh của nó ở trên trục hoành và hai đỉnh kia ở phía trên trục hoành và thuộc paraqbol $y = 8 - x^2$.

25. Tìm kích thước của tam giác cân có diện tích lớn nhất nội tiếp trong đường tròn bán kính r.

26. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong tam giác vuông có cạnh góc vuông là 3 và 4 biết hai cạnh của hình chữ nhật nằm trên hai cạnh góc vuông.

27. Một hình trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính r . Tìm thể tích lớn nhất có được của khối trụ.

28. Một hình trụ nội tiếp trong hình nón có bán kính đáy r, chiều cao h. Tìm thể tích lớn nhất có được của khối tru.

29. Một hình trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính r. Tìm diện tích toàn phần lớn nhất có thể có của hình trụ.

30. Một khung cửa vùng Norman có dạng một hình chữ nhật ghép với một nửa đường tròn ở phía trên (đường kính của đường tròn bằng với cạnh ngang của hình chữ nhật). Biết chu vi của cửa sổ là 30 bộ, tìm kích thước của khung cửa sao cho ánh sáng lọt qua khung cửa là lớn nhất.

31. Một tranh quảng cáo có lề trên và dưới là 6 cm và lề trái và phải là 4 cm. Biết diện tích phần nội dung in phải đúng 384 cm^2, tìm kích thước của tranh sao cho diện tích của tranh là nhỏ nhất.

32. Một tranh quảng cáo có diện tích 180 dm^2, chừa lề dưới và hai bên là 1 dm, lề trên là 2 dm. Tìm kích thước của tranh sao cho phần nội dung in có diện tích lớn nhất.

33. Một sợi dây dài 10m được cắt ra làm hai phần, phần này khép thành hình vuông, phần kia khép thành một tam giác đều. Hỏi phải cắt sợi dây thế nào để tổng diện tích hai hình là:

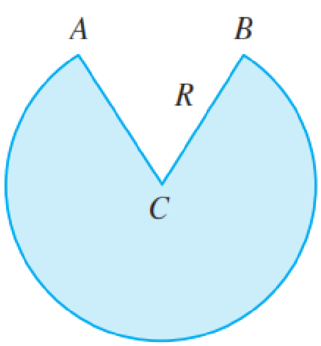
a. lớn nhất b. nhỏ nhất

34. Tương tự bài 33 nếu một sợi khép thành hình vuông, sợi kia thành đường tròn.

35. Một lon hình trụ không nắp được chế tạo để chứa V cm^3 chất lỏng. Tìm kích thước của lon sao cho lượng kim loại chế tạo lon là nhỏ nhất .

36. Một hàng rào cao 8 bộ, chạy song song với bức tường một ngôi nhà và cách tường 4 bộ. Tìm chiều dài ngắn nhất của thang một đầu dựa lên mặt đất, bắc qua hàng rào, đầu kia dựa vào tường.

37. Một cốc nước hình nón làm từ một tấm bìa hình tròn bán kính R, cắt bỏ một hình quạt, rồi dán hai mép CA , CB lại với nhau. Tìm dung tích lớn nhất của cốc.



38. Một cốc nước bằng giấy hình nón được làm để chứa 27 cm^3 nước. Tìm chiều cao và bán kính đáy cốc sao cho lượng giấy cần dùng là nhỏ nhất.

39. Một hình nón chiều cao h nội tiếp trong một hình nón lớn hơn, có chiều cao H sao cho đỉnh của nó là tâm đáy hình nón lớn. Chứng tỏ khối nón nhỏ có thể tích lớn nhất khi h = H/3.

40. Một vật có cân nặng W được kéo lê trên một mặt phẳng nằm ngang bằng một lực kéo theo một dây thừng buộc vào nó. Nếu dây tạo với mặt phẳng một góc θ, thế thì độ lớn của lực là

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

trong đó μ là hằng số được gọi là hệ số ma sát. Với giá trị nào của μ thì F nhỏ nhất.

41. Nếu một điện trở R ohm nối qua một nguồn điện E volt với một điện trở trong r ohm, thế thì công suất (tính bằng watt) của điện trở ngoài là

$$P = \frac{E^2R}{(R+r)^2}$$

Nếu E và r cố định nhưng R thay đổi, tìm giá trị lớn nhất của công suất?

42. Một con cá bơi với vận tốc v so với dòng nước, năng lượng tiêu hao mỗi đơn vị thời gian tỷ lệ với v^3. Người ta tin rằng đàn cá di cư luôn tìm cách để giảm thiểu năng lượng nhiều nhất khi bơi qua một khoảng cách cố định. Nếu cá bơi ngược dòng có vận tốc u (u < v), thế thì thời gian đòi hỏi để bơi qua một đoạn đường L là L/(v – u) và năng lượng tiêu hao toàn phần là

$$E(v) = av^3.\frac{L}{v-u}$$

trong đó a là hằng số tỷ lệ.

(a) Xác định giá trị v sao cho E nhỏ nhất.

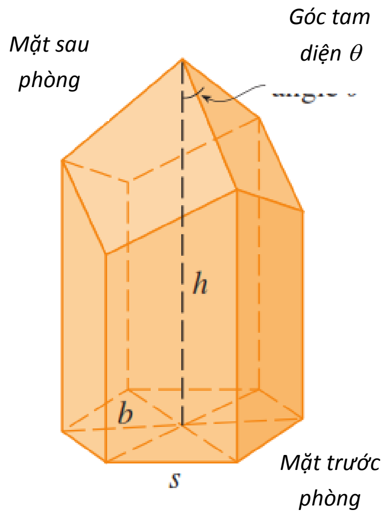
(b) Vẽ đồ thị của E.

Ghi chú: Kết quả này đã được kiểm chứng thực nghiệm; đàn cá di cư bơi ngược dòng với vận tốc 50% lớn hơn vận tốc dòng nước.

43. Trong một tổ ong, mỗi phòng là một lăng trụ lục giác đều, một đầu mở còn đầu kia chụp lại bằng một góc tam diện như hình dưới. Người ta tin rằng lũ ong xây các phòng này sao cho giảm thiểu diện tích vách đối với một thể tích ấn định trước, tức là tiết kiệm lượng sáp xây dựng nhất. Nghiên cứu các phòng này cho thấy thật kinh ngạc là số đo của góc θ luôn ổ định ở một giá trị nhất định. Dựa vào cấu trúc của phòng, có thể chứng tỏ được rằng diện tích S của nó cho bởi

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \cot\theta + (3s^2\sqrt{3}/2)\csc\theta$$

trong đó s, độ dài của cạnh lục giác, và h, chiều cao, là hằng số.



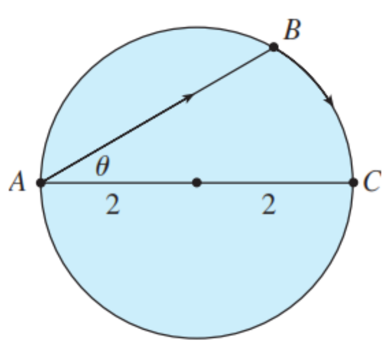
(a) Tính dS/dθ.
(b) Góc nào lũ ong thích nhất?
(c) Xác định diện tích nhỏ nhất của phòng (tính theo s và h).

Ghi chú: Phép đo thực tế góc θ trong các tổ ong đã được thực hiện, cho thấy kết quả sai kém không quá 2^o so với kết quả tính toán của chúng ta.

44. Một thuyền rời bến lúc 2 P.M và chạy theo hướng nam với vận tốc 20 km/h. Một chiếc thuyền khác đi theu hướng đông với vận tốc 15 km/h và cập bến nói trên lúc 3 P.M . Hỏi khi nào hai thuyền ở gần nhau nhất.

45. Giải lại bài toán ở Ví dụ 4 , cho biết dòng sông rộng 5 km (thay vì 3 km) và khoảng cách giữa A và B là 5 km (thay vì 8km).

46. Một du khách từ điểm A trên bờ hồ hình tròn, bán kính 2 dặm, muốn đi đến điểm C trên bờ hồ, đối tâm với A một cách nhanh nhất. Y có thể chèo thuyền đến điểm B rồi đi bộ đến C. Biết vận tốc chèo là 2 dặm/h và đi là 4 dặm /h, hỏi y phải chọn điểm C như thế nào để đạt mục đích trên.



47. Một nhà máy lọc dầu tọa lạc trên bờ bắc một con sông thẳng băng rộng 2 km. Môt đường ống được xây dựng dẫn dầu từ nhà máy đến các hầm chứa nằm ở bờ nam con sống và cách nhà máy 6 km về phía đông. Chi phí lắp đặt đường ống là 400,000$/km trên đất liền đến điểm P trên bờ bắc và 800,000$/km dưới lòng sông đến các hầm chứa. Để chi phí lắp đặt nhỏ nhất, ta phải chọn điểm P ở đâu?

48. Giả sử nhà máy lọc dầu trong Bài tập 47 cách bờ bắc con sông 1 km. Phải chọn P ở đâu?

49. Độ sáng của một vật thể thì tỉ lệ thuận với cường độ của nguồn sáng và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ nguồn sáng đến vật thể. Cho hai nguồn sáng đặt cách nhau 10 m, nguồn này sáng gấp 3 nguồn kia, hỏi phải đặt vật thể ở vị trí nào trên đoạn thẳng nối hai nguồn sáng sao cho vật thể nhận được ít ánh sáng nhất.

50. Viết phương trình đường thẳng qua điểm (3 ; 5) , cắt tia Ox tại A, tia Oy tạ B sao cho diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất.

51. Một đường thẳng qua điểm (a ; b) với a, b dương, cắt tia Ox tại A, tia Oy tại B sao cho độ dài AB là ngắn nhấ

52. Tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ biết tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

53. (a) Nếu C(x) là chi phí sản xuất ra x đơn vị sản phẩm thế thì **chi phí trung bình** mỗi đơn vị là c(x) = C(x)/x. Chứng tỏ rằng nếu chi phí trung bình nhỏ nhất, thì chi phí cận biên bằng chi phí trung bình.

(b) Nếu $C(x) = 16{,}000 + 200x + 4x^{3/2}$, tính bằng đôla, tìm (i) chi phí , chi phí trung bình, và chi phí cận biên ở mức sản xuất 1000 đơn vị; (ii) mức sản xuất làm chi phí trung bình nhỏ nhất; và (iii) chi phí trung bình nhỏ nhất.

54. (a) Chứng tỏ rằng nếu lợi tức P(x) lớn nhất, thế thì doanh thu cận biên bằng với chi phí cận biên.

(b) Nếu $C(x) = 16{,}000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3$ là hàm số chi phí và $p(x) = 1700 - 7x$ là hàm số cầu, tìm mức sản xuất sao cho lợi tức lớn nhất.

55. Một đội bóng chày chơi trong một sân vận động chứa 55,000 khán giả. Với giá vé là 10$, số người tham dự trung bình là 27,000. Khi giá vé hạ xuống 8$, số người tham dự trung bình lên đến 33,000.

(a) Tìm hàm số cầu, giả sử nó là hàm số bậc nhất.
(b) Giá vé phải là bao nhiêu để doanh thu cao nhất.

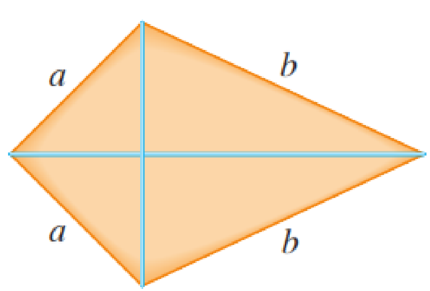
56. Trong những tháng hè Terry làm và bán vòng đeo cổ cho du khách ở bãi biển. Hè qua anh bán vòng với giá 10$ mỗi chiếc và trung bình bán được 20 vòng mỗi ngày. Khi anh tăng giá lên 1$, anh nhận thấy là chỉ bán được trung bình 2 vòng mỗi ngày.
(a) Tìm hàm số cầu, giả sử nó là hàm số bậc nhất.
(b) Nếu Terry phải tốn 6$ cho vật liệu làm vòng, hỏi giá bán phải bao nhiêu thì lợi tức mới cao nhất.

57. Một công ty bán ra 1000 máy truyền hình mỗi tuần với giá 450$ mỗi chiếc. Nghiên cứu thị trường chỉ ra là khi bớt 10$ mỗi chiếc, số TV bán ra sẽ tăng lên 100 mỗi tuần.
(a) Tìm hàm số cầu.
(b) Công ty phải bớt bao nhiêu để được doanh thu cao nhất?
(c) Nếu hàm số chi phí hàng tuần là C(x) = 68,000 + 150x, công ty phải bớt bao nhiêu thì lợi tức sẽ cao nhất?

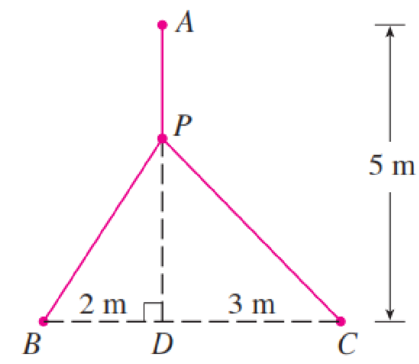
58. Một nhà quản lý một cao ốc gồm 100 căn hộ cho thuê từ kinh nghiệm biết rằng mọi căn hộ sẽ được thuê hết nếu giá thuê là 800$ mỗi tháng. Một nghiên cứu thị trường cho biết là, về trung bình, với mỗi 10$ tiền thuê tăng thêm thì có thêm 1 căn hộ không có ai thuê. Hỏi nhà quản lý phải cho thuê giá bao nhiêu để doanh thu cao nhất?

59. Chứng tỏ rằng trong các tam giác cân có cùng chu vi, tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác đều .

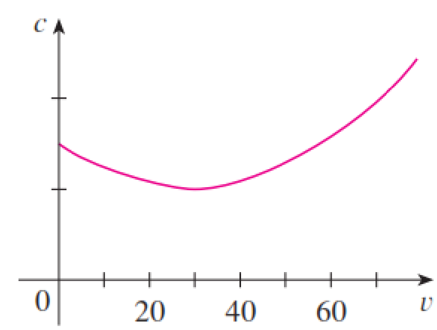
60. Một con diều có khung làm bằng 6 thanh tre như hình dưới. Bốn thanh ngoài có kích thước cố định là a và b, hỏi thanh đường chéo của khung phải có độ dài là bao nhiêu để mặt diều có diện tích lớn nhất.



61. Ta phải xác định điểm P trên đường AD sao cho tổng độ dài L của các đoạn cáp nối từ P đến các điểm A, B, C là nhỏ nhất. Ta có thể đặt AP = x và tính L theo x.



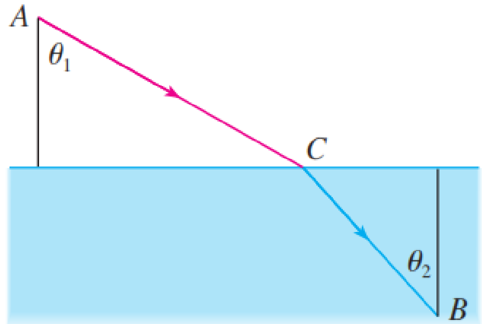
62. Đồ thị dưới cho thấy lượng tiêu thụ xăng c của một ô tô (tính bằng ga lông mỗi giờ) như một hàm số theo vận tốc v của xe. Ở vận tốc rất chậm động cơ hoạt động không hiệu quả, do đó c giảm khi vận tốc tăng lên. Nhưng ở vận tốc cao lượng tiêu thụ lại tăng lên. Bạn có thể thấy rằng c(v) nhỏ nhất khi v ≈ 30 dặm/h đối với ô tô này. Tuy nhiên, vì hiệu quả của nhiên liệu, cái ta muốn làm nhỏ nhất không phải là lượng xăng tiêu thụ mỗi giờ mà là số lượng tiêu thụ xăng mỗi dặm. Hãy gọi lượng tiêu thụ này là G. Dùng đồ thị, ước tính vận tốc tại đó G đạt giá trị nhỏ nhất.



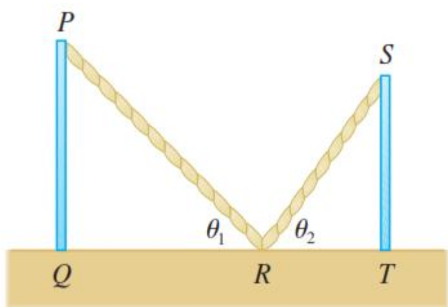
63. Gọi v_1 là vận tốc ánh sáng truyền trong không khí và v_2 là vận tốc ánh sáng truyền trong nước. Theo nguyên lí Fermat, một tia sáng đi từ điểm A trong không khí đến điểm B trong nước theo lộ trình ACB sao cho thời gian đi là nhỏ nhất. Chứng tỏ rằng

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

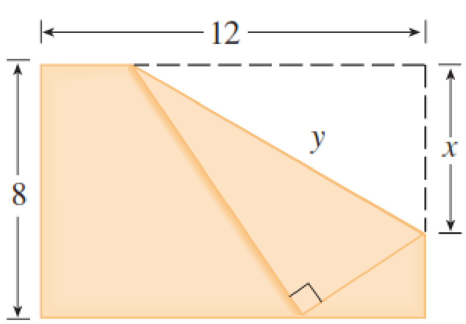
trong đó θ_1 là góc tới và θ_2 là góc khúc xạ. Phương trình này gọi là định luật Snell.



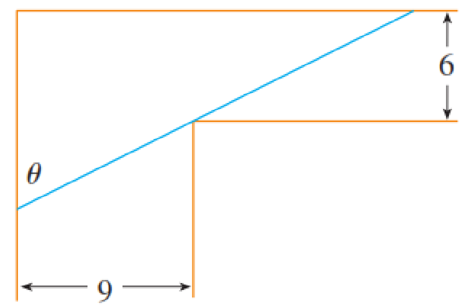
64. Hai cột đứng PQ và ST được giữ yên bởi dây thừng PRS, một đầu dây buộc vào đỉnh P, nối với một điểm cố định R trêm mặt đất, đầu kia buộc vào đỉnh S như trong hình. Chứng tỏ rằng chiều dài đoạn dây thừng là ngắn nhất khi $\theta_1 = \theta_2$.



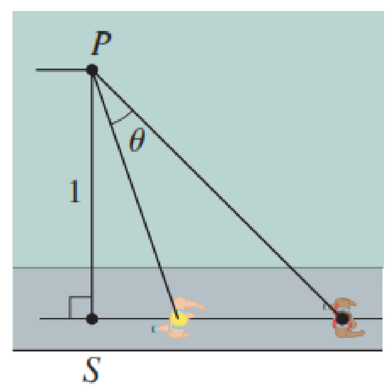
65. Ta gấp tờ giấy hình chữ nhật kích thước 8 x12 sao cho góc trên phải của tờ giấy nằm trên cạnh dưới của nó. Phải gấp thế nào để độ dài MN của mép gấp là ngắn nhất. Nói khác đi hãy tìm x để y nhỏ nhất.



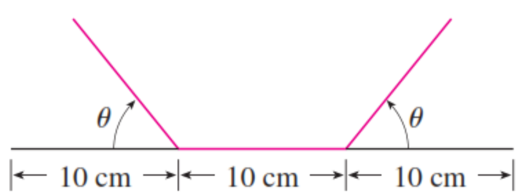
66. Một ống thép được mang qua một hành lang rộng 9 bộ . Đến cuối hành làng gặp một khúc quanh vuông góc mở đến một hành lang rộng 6 bộ. Tìm chiều dài tối đa của ống thép có thể mang nằm ngang đi qua khúc quanh mà không bị vướng.



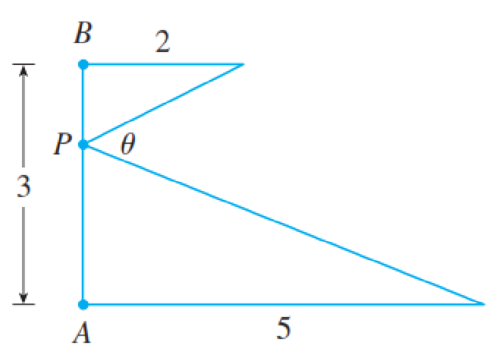
67. Một quan sát viên đứng ở điểm P cách đường chạy một đơn vị độ dài. Hai vận động viên khởi hành từ điểm S, người này chạy nhanh gấp 3 lần người kia . Tìm giá trị lớn nhất của góc nhìn θ của người quan sát. [Hd:TìmGTLN của tan θ]



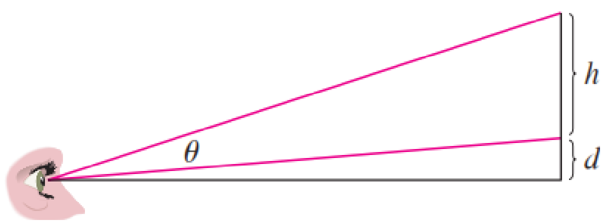
68. Một máng xối được làm từ một miếng tôn có chiều rộng 30 cm, bằng cách gấp 1/3 bề rộng ở hai bên theo chiều dài miếng tôn tạo một góc θ. Tìm θ sao cho máng chứa một lượng nước lớn nhất .



69. Tìm vị trí của điểm P trên đoạn AB sao cho góc θ là lớn nhất.



70. Một bức tranh có chiều cao h treo trên tường, cạnh dưới cách tầm mắt của người ngắm tranh một khoảng d (xem hình) . Hỏi người ngắm phải đứng cách tường bao xa để có tầm nhìn tốt nhất , tức góc nhìn θ lớn nhất.



71. Tìm diện tích lớn nhất của một hình chữ nhật ngoại tiếp một hình chữ nhật khác cho trước, có chiều rộng W, chiều dài L.[Gợi ý: Biểu diễn diện tích là hàm số theo một góc θ.]

72. Hệ thống tuần hoàn gồm mạch máu (động mạch, tĩnh mạch, mao quản . . .) chuyên chở máu từ tim đến các cơ quan rồi trở về tim. Hệ thống này hoạt động sao cho giảm thiểu năng lượng tiêu tốn nhất khi bơm máu. Đặc biệt, năng lượng này giảm khi sức cản trở của máu được hạ thấp. Một trong những định luật của Poiseuille cho biết sức cản trở R của máu cho bởi

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

trong đó L là độ dài của mạch máu, r là bán kính, và C là hằng số dương xác định bởi độ nhớt của máu. (Poiseuille khám phá định luật này bằng thực nghiệm, nhưng nó cũng là kết quả của Phương trình 8.4.2) Hình dưới cho thấy một mạch máu có bán kính r_1 đâm một nhánh nhỏ hơn có bán kính r_2 và tạo với mạch máu chính một góc θ.

(a) Dùng Định luật Poiseuille để chứng tỏ rằng tổng các sức cản trở dòng máu chạy dọc theo đường ABC là

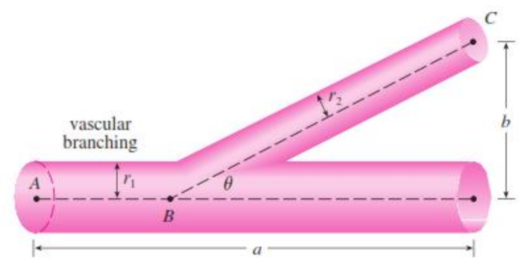
$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

trong đó a và b là những khoảng cách cho trong hình.

(b) Chứng tỏ rằng sức cản trở này nhỏ nhất khi

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Tìm góc rẻ tối ưu (làm tròn đến độ) khi bán kính của mạch máu nhỏ bằng hai phần ba bán kính của mạch máu lớn.



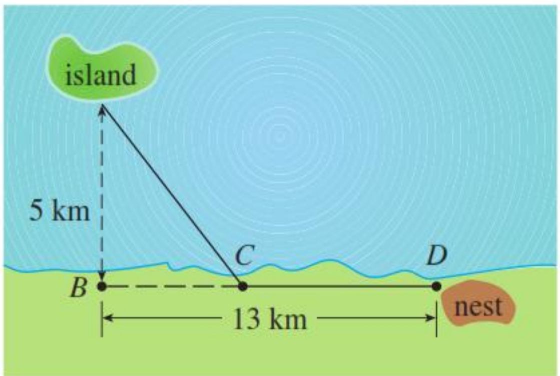
73. Các nhà điểu học (nghiên cứu về chim) đã khẳng định rằng một số loài chim có khynh hướng tránh bay qua những vùng nước mênh mông khi quay vào ban ngày. Họ tin rằng bay qua vùng nước cần nhiều năng lượng hơn khi bay qua vùng đất vì ban ngày không khí thường bay lên từ mặt đất trong khi lại hạ thấp xuống mặt nước. Một con chim thuộc loài này được thả cho bay từ một hòn đảo cách điểm B gần nhất trên bờ biển thẳng băng 5 km, bay đến điểm C trên bờ biển, và rồi bay dọc theo bờ biển đến điểm làm tổ D. Giả sử theo bản năng chim sẽ chọn lộ trình bay ít tốn năng lượng nhất. Điểm B và D cách nhau 13 km.

(a) Về tổng quát, nếu phải cần 1.4 lần năng lượng để bay qua mặt nước so với bay qua mặt đất, hỏi chim phải bay đến điểm C ở đâu để ít tiêu tốn năng lượng nhất khi trở về tổ D.

(b) Cho W và L là năng lượng (tính bằng joule) cần để bay qua 1 km mặt nước và mặt đất theo thứ tự. Một giá trị lớn của W/L có nghĩa gì đối với chuyến bay của chim? Một giá trị nhỏ nghĩa là gì? Xác định tỷ số W/L tương ứng với sự tiêu tốn năng lượng nhỏ nhất.

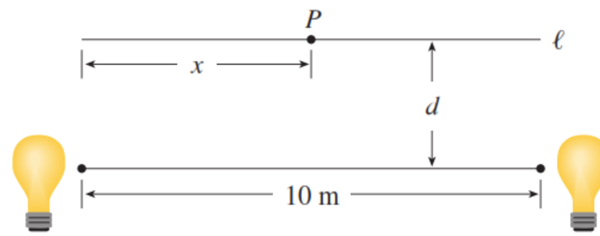
(c) Giá trị W/L phải thế nào để chim bay trực tiếp đến điểm tổ D? Giá trị W/L phải thế nào để chim bay đến B rồi bay dọc theo bờ biển đến D?

(d) Nếu các nhà điểu học quan sát thấy rằng một loài chim nào đó bay đến bờ biển tại một điểm cách B 4 km,hỏi như vậy loài chim đó khi bay qua mặt nước cần số năng lương gấp bao nhiêu lần khi bay qua mặt đất?



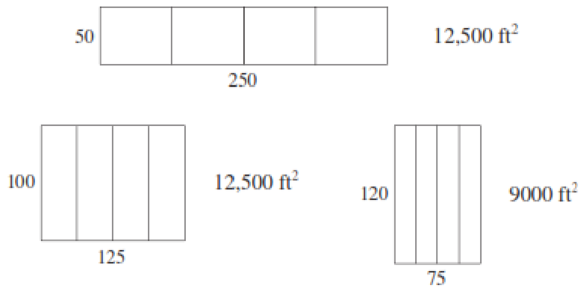
74. Hai nguồn sáng có cùng cường độ đặt cách nhau 10m. Một vật thể được đặt ở vị trí P trên đoạn thẳng ℓ song song với đoạn thẳng nối hai nguồn sáng và cách đoạn này một khoảng là d. Chúng ta phải tìm vị trí P sao cho vật thể tại đây nhận ít lượng sáng nhất. Nhớ rằng lượng ánh sáng nhận được từ một nguồn tỉ lệ thuận với cường độ chiếu sáng và tỉ lệ nghịch với khoảng cách đến nguồn.

a. Tìm biểu thị I(x), lượng ánh sáng nhận được tại điểm P.
b. Cho d = 5m, dùng đồ thị của I(x) và I'(x) để chứng tỏ rằng I(x) nhỏ nhất khi x = 5 m, nghĩa là khi P là trung điểm của đoạn ℓ.
c. Cho d = 10m, chứng tỏ I(x) nhỏ nhất không phải tại trung điểm (một kết quả đáng ngạc nhiên).
d. Đâu đó giữa d = 5 m và d = 10 m có một giá trị chuyển tiếp của d tại đó điểm có độ sáng nhỏ nhất đột ngột thay đổi. Ước tính giá trị này của d bằng phương pháp đồ thị. Sau đó tìm giá trị chính xác này của d.



ĐÁP SỐ

1. (a) 11, 12 (b) 11.5, 11.5 **3.** 10, 10
5. 25 m by 25 m **7.** $N = 1$
9. (a)

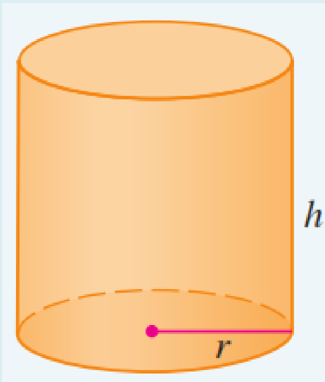


(b)

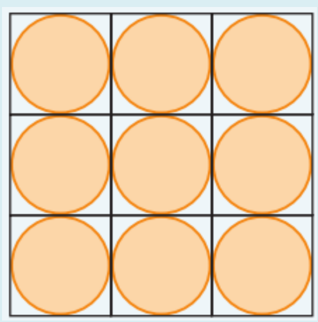
(c) $A = xy$ (d) $5x + 2y = 750$ (e) $A(x) = 375x - \frac{5}{2}x^2$
(f) 14,062.5 ft^2
11. 1000 ft by 1500 ft **13.** 4000 cm^3 **15.** \$191.28
17. $\left(-\frac{28}{17}, \frac{7}{17}\right)$ **19.** $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ **21.** Square, side $\sqrt{2}\,r$
23. $L/2$, $\sqrt{3}\,L/4$ **25.** Base $\sqrt{3}\,r$, height $3r/2$
27. $4\pi r^3/(3\sqrt{3})$ **29.** $\pi r^2(1 + \sqrt{5})$ **31.** 24 cm, 36 cm
33. (a) Use all of the wire for the square
(b) $40\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$ m for the square
35. Height = radius = $\sqrt[3]{V/\pi}$ cm **37.** $V = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$
41. $E^2/(4r)$
43. (a) $\frac{3}{2}S^2 \csc\theta\,(\csc\theta - \sqrt{3}\cot\theta)$ (b) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$
(c) $6s[h + s/(2\sqrt{2})]$
45. Row directly to B **47.** ≈ 4.85 km east of the refinery
49. $10\sqrt[3]{3}/(1 + \sqrt[3]{3})$ ft from the stronger source
51. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$
53. (b) (i) \$342,491; \$342/unit; \$390/unit (ii) 400
(iii) \$320/unit
55. (a) $p(x) = 19 - \frac{1}{3000}x$ (b) \$9.50
57. (a) $p(x) = 550 - \frac{1}{10}x$ (b) \$175 (c) \$100
61. 9.35 m **65.** $x = 6$ in. **67.** $\pi/6$
69. At a distance $5 - 2\sqrt{5}$ from A **71.** $\frac{1}{2}(L + W)^2$
73. (a) About 5.1 km from B (b) C is close to B; C is close to D; $W/L = \sqrt{25 + x^2}/x$, where $x = |BC|$ (c) ≈ 1.07; no such value (d) $\sqrt{41}/4 \approx 1.6$

HÌNH DÁNG CỦA LON

DỰ ÁN ỨNG DỤNG

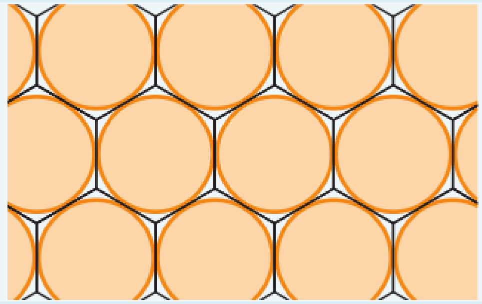


Trong dự án này ta sẽ nghiên cứu hình dáng kinh tế nhất cho một lon. Trước tiên ta cần giải thích điều này có nghĩa là với thể tích V cho trước của lon ta cần tìm chiều cao h và bán kính r sao cho chi phí kim loại để chế tạo ra lon là thấp nhất (xem hình). Nếu ta bỏ qua số kim loại bỏ đi trong quá trình chế tạo, thế thì bài toán chính là tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích toàn phần của hình trụ. Ta đã giải bài toán này trong Ví dụ 2 trong Bài 4.7 và được kết quả là h = 2r; nghĩa là chiều cao của lon phải bằng đường kính đáy. Nhưng nếu bạn đi đến nhà bếp hay siêu thị và mang theo thước đo, bạn sẽ phát hiện là chiều cao của các lon bia hay hộp sữa bột chẳng hạn thường lớn hơn đường kính và tỷ số h/r thay đổi từ 2 đến khoảng 3.8. Hãy xem ta có thể giải thích điều này hay không. Vật liệu dùng chế tạo lon được cắt ra từ những tấm nhôm. Bề mặt xung quanh của lon được tạo ra bằng cách cuốn những hình chữ nhật, những hình chữ nhật này được cắt ra từ các tấm nhôm với ít nhiều phần vụn dư thừa. Nhưng nếu đáy và nắp được cắt ra từ những hình vuông có cạnh 2r (như trong hình), việc này sẽ tạo ra những phần vụn còn lớn hơn nữa, dù có thể tái chế nhưng không có giá trị gì với nhà sản xuất. Trong trường hợp nay, chứng tỏ rằng lượng nhôm nhỏ nhất khi



$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2.55$$

2. Một cách cắt các đĩa tròn làm nắp và đáy hiệu quả hơn là chia các tấm nhôm thành những lục giác đều và cắt từ các lục giác ra những đĩa tròn làm nắp và đáy (xem hình). Chứng tỏ rằng nếu phương án này được chấp nhận thì



$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$$

3. Giá trị của h/r mà ta tìm được trong Phần 1 và 2 khá sát với kết quả th tìm thấy thực tế trên các gian hàng, nhưng chúng vẫn chưa giải thích hết mọi chuyện. Nếu chúng ta quan sát kỹ nắp và đáy hộp, ta sẽ thấy rằng chúng được tạo thành những đĩa tròn có bán kính lớn hơn r và được bẻ quặp xuống thành mép lon. Để được như thế, ta phải tăng h/r. Hơn nữa. ngoài chi phí nhôm, ta còn phải kể đến chi phí gia công làm ra lon. Ngoài ra công nối ép các cạnh vào mép lon cũng đáng kể. Nếu ta chia tấm nhôm thành các hình lục giác để cắt ra các nắp và đáy như Bài toán 2, thì chi phí tổng cộng tỷ lệ với

$$4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

trong đó k là nghịch đảo của độ dài cần phải dập nối ứng với một diện tích đơn vị của nhôm. Chứng tỏ biểu thức này nhỏ nhất khi

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Vẽ đồ thị hàm số $\sqrt[3]{V/k}$ xem như hàm số theo x = h/r và dùng đồ thị này để lập luận rằng khi lon có kích thước lớn hay chi phí dập nối rẽ, ta nên cho h/r xấp xỉ bằng 2.21 (như trong Bài toán 2). Nhưng khi lon có kích thước nhỏ hay chi phí dập nối mắc, thì h/r nên cho lớn hơn một cách đáng kể.

5. Phân tích của chúng tôi cho thấy rằng các lon có kích thước lớn nên có dáng gần vuông nhưng lon nhỏ nên cao và thon. Hãy quan sát các dáng lon trong siêu thị. Các kết luận của chúng ta có đúng như thực tế không? Có ngoại lệ nào không? Bạn có thể nêu ra những lý do tại sao những lon nhỏ không phải lúc nào cũng cao và thon?

BÀI 4. 8 PHƯƠNG PHÁP NEWTON

Giả sử một hảng bán ô tô bán cho bạn một ô tô giá 18,000 $ bằng cách trả góp mỗi tháng 375 $ trong năm năm. Bạn muốn biết hảng đó đã tính lải suất hàng tháng cho bạn là bao nhiêu. Để tìm ra câu trả lời, bạn phải giải phương trình

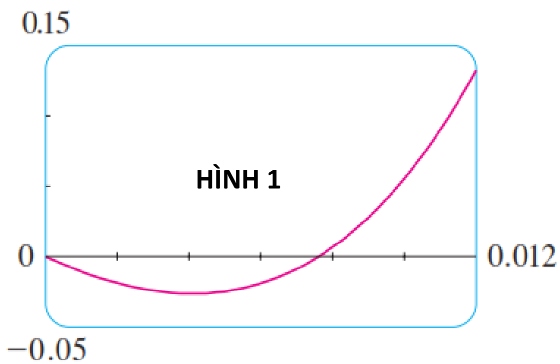
$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0 \qquad (1)$$

(Chi tiết được giải thích trong Bài tập 41.) Làm sao bạn giải được một phương trình như thế.

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, có công thức tìm nghiệm. Đối với phương trình bậc ba và bốn cũng có công thức tính nghiệm, nhưng rất phức tạp. Còn nếu là phương trình bậc 5 trở lên, thì không tồn tại một công thức như thế. Cũng vậy, bạn sẽ không tìm thấy công thức nào giúp bạn tìm được nghiệm chính xác của phương trình siêu việt như cos x = x.

Ta có thể tìm được nghiệm xấp xỉ của phương trình bằng cách vẽ đồ thị của hàm số bên vế trái của phương trình. Dùng máy tính, và sau khi điều chỉnh tập xác định, ta vẽ được đồ thị như hình bên.

Ta thấy rằng ngoài nghiệm x = 0 không đáng quan tâm, còn có một nghiệm khác nằm đâu đó giữa 0.007 và 0.008. Phóng to ta có thể tính xấp xỉ nghiệm là 0.0076. Nếu bạn muốn chính xác hơn, thì có thể phóng to hơn nữa, nhưng công việc đó hơi oải. Một phương cách khác nhanh hơn là tìm nghiệm xấp xỉ bằng máy tính bỏ túi. Với phương pháp này, bạn có thể tìm nghiệm đúng với 9 chữ số thập phân, là 0.007628603.



HÌNH 1

Máy tính giải bằng phương pháp nào? Có nhiều phương pháp, nhưng hầu hết đều sử dụng **phương pháp Newton**, cũng gọi là **phương pháp Newton-Raphson**. Ta sẽ giải thích cách thức phương pháp này hoạt động, vừa để trình bày những gì xảy ra bên trong máy tính, vừa để minh họa ứng dụng của phép tính xấp xỉ bậc nhất.

Hình học làm cơ sở cho phương pháp Newton được trình bày trong Hình 2, trong đó số r chỉ nghiệm đúng của phương trình. Ta bắt đầu bằng cách tìm một nghiệm xấp xỉ đầu tiên x_1, có được bằng cách ức đoán hoặc từ một đồ thị vẽ phác của f, hoặc từ một đồ thị vẽ bằng máy tính. Xét tiếp tuyến L của đồ thị y = f(x) tại điểm $(x_1, f(x_1))$ và giao điểm x_2 của L với trục hoành. Ý tưởng cơ sở của phương pháp Newton là vì tiếp tuyến đi sát đồ thị nên giao điểm x_2 sát với nghiệm r hơn x_1. Vì tiếp tuyến là một đường thẳng, ta dễ dàng tìm được phương trình của nó và suy ra giao điểm x_2.

Tiếp tuyến L có hệ số góc $f'(x_1)$ và có phương trình là:

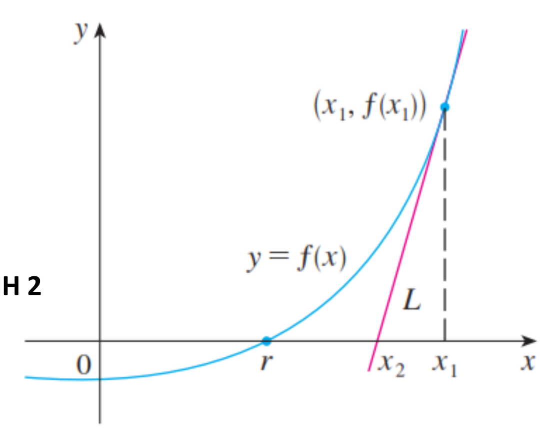
$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

Để tìm giao điểm x_2, cho y = 0, ta được $x = x_2$:

$$0 = f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

Nếu $f'(x_1) \neq 0$, giải phương trình này ta được:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$



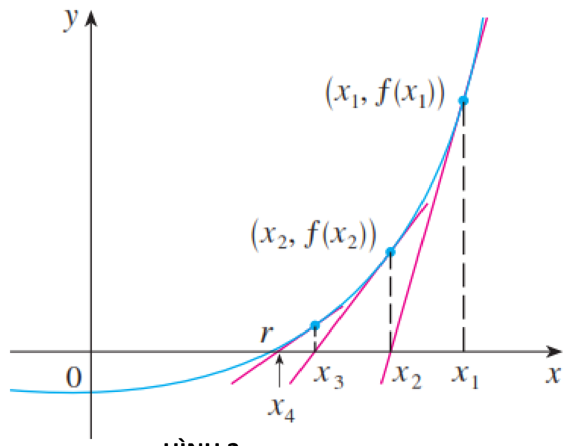
HÌNH 2

Ta dùng x_2 như là một giá trị xấp xỉ thứ hai của r.

Lặp lại tiến trình này bằng cách thay x_1 bằng x_2, và dùng tiếp tuyến tại $(x_2, f(x_2))$, ta được giá trị xấp xỉ thứ ba

$$\boxed{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}}$$

Nếu tiếp tục như thế, ta được một dảy số những giá trị xấp xỉ x_1, x_2, x_3, x_4, . . . như trong Hình 3. Tổng quát, nếu xấp xỉ thứ n là x_n và $f'(x_n) \neq 0$ thì xấp xỉ tiếp theo được cho bởi công thức



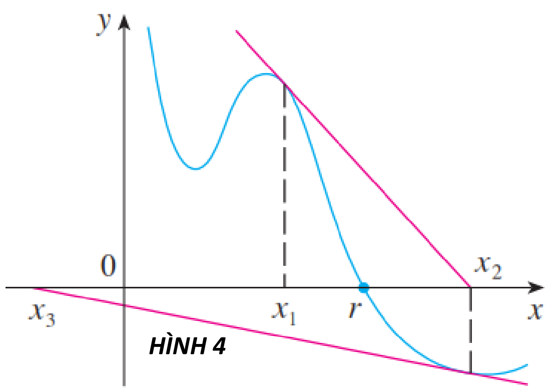
HÌNH 3

2 $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Nếu những số x_n càng lúc càng tiến gần đến r khi n càng lớn, thì ta nói dảy số x_n hội tụ về r và ta viết

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

Mặc dù dảy những giá trị x_n trong hình trên hội tụ về nghiệm đúng của phương trình, nhưng trong một số trường hợp dảy số này có khi không hội tụ. Chẳng hạn, xét tình huống cho trong Hình 4. Bạn có thể thấy là x_2 là một giá trị xấp xỉ tồi hơn x_1. Lý do là vì trong trường hợp này $f'(x_1)$ gần bằng 0. Và như thế có thể xảy ra trường hợp một giá trị "xấp xỉ" rơi khỏi tập xác định của hàm số f (như x_3 trong Hình 4). Trong trường hợp này, phương pháp Newton thất bại và một giá trị xấp xỉ x_1 tốt hơn phải được chọn lại. Xem bài tập 31-34 cho thấy Phương Pháp Newton có tác dụng rất chậm hoặc không có tác dụng gì hết.



HÌNH 4

VÍ DỤ 1 Bắt đầu với $x_1 = 2$, tìm giá trị xấp xỉ thứ ba x_3 của nghiệm phương trình $x^3 - 2x - 5 = 0$.

GIẢI Áp dụng phương pháp Newton với

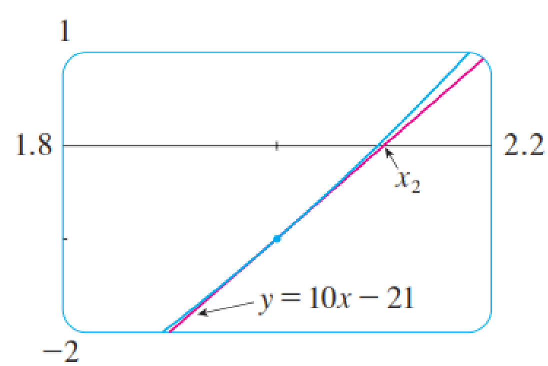
$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \quad \text{và} \quad f'(x) = 3x^2 - 2$$

Chính Newton đã dùng phương trình này để minh họa phương pháp của mình và ông chọn $x_1 = 2$ sau khi tính $f(1) = -6$, $f(2) = -1$, và $f(3) = 16$, nên nghiệm phải thuộc khoảng (2, 3). Công thức 2 cho ta:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

Với n = 1 ta được

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$



HÌNH 5 minh họa bước 1 trong PP Newton. Vì f '(2) = 10 nên phương trình tiếp tuyến là tại (2, - 1) là y = 10x – 21, cắt trục hoành tại x_2 = 2.1.

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

Với n = 2 ta được

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2{}^3 - 2x_2 - 5}{3x_2{}^2 - 2}$$

$$= 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

Giá trị xấp xỉ thứ ba $x_3 \approx 2.0946$ này hóa ra là đúng đến bốn chữ số thập phân.

Giả sử ta muốn đi đến một giá trị gần đúng như mong muốn, chẳng hạn, đúng đến tám chữ số thập phân, dùng phương pháp Newton. Thế làm sao ta biết phải dừng lại khi nào? Quy tắc chung thường được dùng là ta có thể dừng lại khi hai giá trị xấp xỉ kề nhau x_n và x_{n+1} đều có tám chữ số thập phân trùng nhau.

Chú ý rằng tiến trình tính từ n đến n + 1 đều giống nhau cho mọi giá trị của n (gọi là tiến trình vòng lặp), và như thế phương pháp Newton rất thuận tiện cho lập trình máy tính.

VÍ DỤ 2 Dùng phương pháp Newton để tìm $\sqrt[6]{2}$ đúng đến tám chữ số thập phân.

GIẢI Trước tiên ta nhận xét rằng tìm $\sqrt[6]{2}$ tương đương với tìm nghiệm dương của phương trình

$$x^6 - 2 = 0$$

do đó ta lấy $f(x) = x^6 - 2$. Thì $f'(x) = 6x^5$ và công thức 2 cho ta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n{}^6 - 2}{6x_n{}^5}$$

Nếu chọn $x_1 = 1$ là giá trị xấp xỉ đầu tiên, ta được lần lượt

$$x_2 \approx 1.16666667$$
$$x_3 \approx 1.12644368$$
$$x_4 \approx 1.12249707$$
$$x_5 \approx 1.12246205$$
$$x_6 \approx 1.12246205$$

Vì x_5 và x_6 có tám chữ số thập phân trùng nhau, ta kết luận

$$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$$

đúng đến 8 chữ số thập phân.

VÍ DỤ 3 Tìm, đúng đến sáu chữ số thập phân, nghiệm của phương trình cos x = x.

GIẢI Viết lại phương trình theo dạng chuẩn

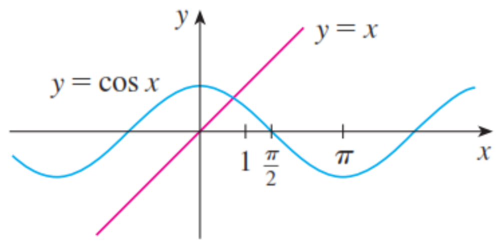
$$\cos x - x = 0$$

Đặt f(x) = cos x - x, thế thì f '(x) = - sinx - 1, và công thức 2 thành

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + 1}$$

Để tìm một giá trị thích hợp cho x_1, ta vẽ phác đồ thị hàm số y = cosx và y = x và nhận xét rằng chúng cắt nhau tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1 đôi chút. Do đó ta lấy x_1 =1 là một giá trị xấp xỉ ban đầu. Sau đó, nhớ điều chỉnh máy tính về đơn vị radian, ta được

$$x_2 \approx 0.75036387$$
$$x_3 \approx 0.73911289$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$
$$x_5 \approx 0.73908513$$



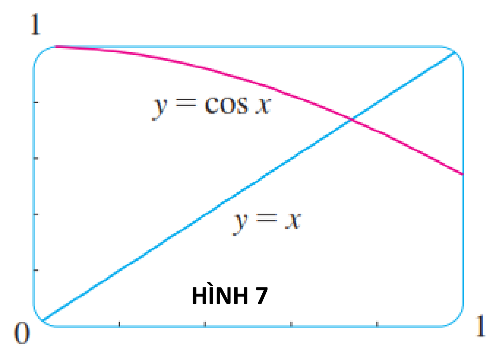
HÌNH 6

Vì x_4, x_5 trùng đến sáu chữ số thập phân (thực ra là tám), ta kết luận nghiệm của phương trình, đúng đến sáu chữ số thập phân, là 0. 739085.

Thay vì dùng đồ thị phác họa phía trên để tìm giá trị xấp xỉ ban đầu là 1, ta có thể dùng đồ thị chính xác hơn vẽ bằng máy tính bỏ túi (Hình 7) và dùng x_1 = 0. 75 làm giá trị ban đầu. Phương pháp Newton cho ta

$$x_2 \approx 0.7391114 \quad x_3 \approx 0.73908513 \quad x_4 \approx 0.73908513$$

và ta được cùng kết quả, nhưng ít hơn một bước tính.



HÌNH 7

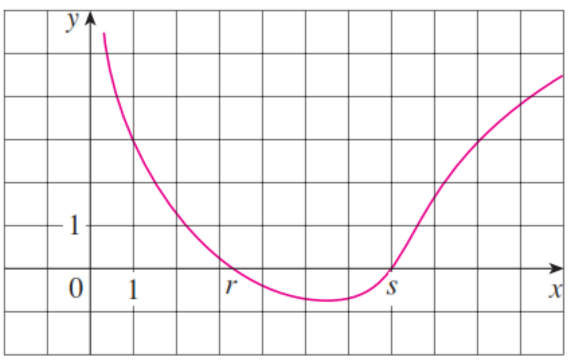
Đến đây bạn có thể hỏi tại sao ta mất công với phương pháp Newton làm chi cho mệt khi với máy tính bỏ túi, ta có thể vẽ đồ thị và phóng to nhiều lần để nhanh chóng tìm ra nghiệm. Nếu chỉ cần nghiệm đúng 1 hay 2 chữ số thập phân, thì đúng là không cần dùng phương pháp Newton, máy tính là đủ. Nhưng nếu ta bắt phải tìm nghiệm đúng đến sáu hay tám chữ số thập phân, thì việc phóng to lặp đi lặp lại rất oải. Thường thì nhanh và hiệu quả hơn là kết hợp việc dùng máy tính vẽ đồ thị để tìm giá trị xấp xỉ ban đầu cho tốt rồi sau đó dùng phương pháp Newton để kết thúc.

BÀI TẬP

1. Hình dưới cho thấy đồ thị một hàm số f. Giả sử phương pháp Newton được dùng để tính xấp xỉ nghiệm r của phương trình f(x) = 0 với giá trị đầu $x_1 = 1$.

(a) Vẽ các tiếp tuyến được dùng để tìm x_2 và x_3, và ước tính các giá trị x_2 và x_3.

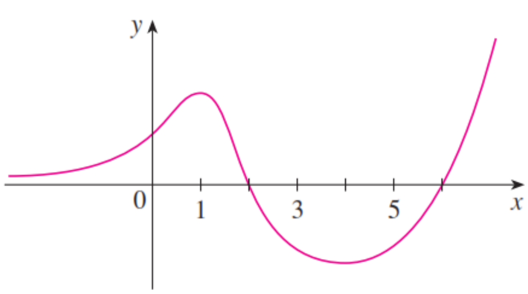
(b) $x_1 = 5$ có phải là giá trị xấp xỉ đầu tiên tốt hơn không? Giải thích.



2. Vẫn theo hướng dẫn như trong Bài tập 1(a) nhưng dùng $x_1 = 9$ là xấp xỉ đầu tiên để tìm nghiệm s.

3. Giả sử y = 5x - 4 là tiếp tuyến của đồ thị y = f(x) khi x = 3. Nếu phương pháp Newton được dùng để định vị nghiệm của phương trình f(x) = 0 và giá trị xấp xỉ đầu tiên là $x_1 = 3$, tìm giá trị xấp xỉ thứ hai x_2.

4. Với mỗi xấp xỉ đầu tiên cho trước, hãy xác định bằng đồ thị điều gì xảy ra nếu phương pháp Newton được áp dụng cho hàm số có đồ thị bên dưới.



(a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 3$

(d) $x_1 = 4$ (e) $x_1 = 5$

5-8 Dùng phương pháp Newton để tìm giá trị xấp xỉ thứ ba x_3 cho trước giá tri xấp xỉ đầu x_1. (Đáp số cho đúng đến bốn chữ số thập phân)

5. $x^3 + 2x - 4 = 0$, $x_1 = 1$

6. $x^3/3 + x^2/2 + 3 = 0$, $x_1 = -3$

7. $x^5 - x - 1 = 0$, $x_1 = 1$

8. $x^5 + 2 = 0$, $x_1 = -1$

9. Dùng phương pháp Newton với giá trị xấp xỉ đầu là $x_1 = -1$ để tìm x_2, giá trị xấp xỉ thứ hai của nghiệm phương trình $x^3 + x + 3 = 0$. Giải thích phương pháp hoạt động thế nào nếu trước tiên vẽ đồ thị hàm số và tiếp tuyến tại điểm (- 1, 1).

10. Dùng phương pháp Newton với giá trị xấp xỉ đầu là $x_1 = 1$ để tìm x_2, giá trị xấp xỉ thứ hai của nghiệm phương trình $x^4 - x - 1 = 0$. Giải thích phương pháp hoạt động thế nào nếu trước tiên vẽ đồ thị hàm số và tiếp tuyến tại điểm (1, - 1).

11-12. Dúng phương pháp Newton để tính xấp xỉ số đã cho đúng đến tám chữ số thập phân.

11. $\sqrt[5]{20}$ **12**. $\sqrt[100]{100}$

13-16. Dùng phương pháp Newton để tìm nghiệm của phương trình đúng với 6 chữ số thập phân.

13. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6 = 0$ trên đoạn [1, 2]

14. $2.2x^5 - 4.4x^3 + 1.3x^2 - 0.9x - 4.0 = 0$ trên đoạn [- 2, - 1].

15. Nghiệm dương của phương trình $\sin x = x^2$.

16. Nghiệm dương của phương trình $2\cos x = x^4$

17-22. Dùng phương pháp Newton để tìm tất cả nghiệm của phương trình đúng với 6 chữ số thập phân.

17. $x^4 = 1 + x$ **18**. $e^x = 3 - 2x$

19. $(x - 2)^2 = \ln x$ **20.** $\frac{1}{x} = 1 + x^3$

21. $\cos x = \sqrt{x}$ **22**. $\tan x = \sqrt{1 - x^2}$

23-28. Dùng phương pháp Newton để tìm tât cả nghiệm của phương trình đúng đến tám chữ số thập phân. Bắt đầu bằng cách vẽ đồ thị để tìm xấp xỉ đầu tiên.

23. $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 10 = 0$

24. $x^2(4-x^2) = \dfrac{4}{x^2+1}$

25. $x^2\sqrt{2-x-x^2} = 1$ **26.** $3\sin(x^2) = 2x$

27. $4e^{-x^2}\sin x = x^2 - x + 1$ **28.** $e^{\arctan x} = \sqrt{x^3+1}$

29. (a) Áp dụng phương pháp Newton cho phương trình $x^2 - a = 0$ để suy ra thuật toán rút căn bậc hai sau đây (mà người cổ Babylon đã dùng để tính $\sqrt{a}$):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(b) Dùng phần (a) để tính $\sqrt{1000}$ đúng đến sáu chữ số thập phân.

30. (a) Áp dụng phương pháp Newton cho phương trình $1/x - a = 0$ để suy ra thuật toán tính nghịch đảo sau đây:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^{\ 2}$$

(b) Dùng phần (a) để tính $1/1.6984$ đúng đến sáu chữ số thập phân.

31. Giải thích tại sao phương pháp Newton thất bại khi tìm nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + 6 = 0$ nếu chọn giá trị xấp xỉ ban đầu là $x_1 = 1$.

32. (a) Dùng phương pháp Newton với $x_1 = 1$ để tìm nghiệm của phương trình $x^3 - x = 1$ đúng đến sáu chữ số thập phân.

(b) Giải phương trình trong phần (a) dùng $x_1 = 0.6$ như xấp xỉ ban đầu.

(c) Giải phương trình trong phần (a) dùng $x_1 = 0.57$. (Bạn chắc chắn cần một máy tính trong phần này.)

31. Giải thích tại sao phương pháp Newton thất bại khi tìm nghiệm của phương trình $\sqrt[3]{x} = 0$ với mọi xấp xỉ ban đầu $x_1 \neq 0$. Minh họa giải thích của bạn bằng một hình vẽ.

34. Nếu

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & khi \ \ x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & khi \ \ x < 0 \end{cases}$$

Thì nghiệm của phương trình f(x) = 0 là x = 0. Giải thích tại sap phương pháp Newton thất bại khi tìm nghiệm dù xấp xỉ ban đầu $x_1 \neq 0$ bằng bao nhiêu đi nữa. Minh họa giải thích của bạn bằng một hình vẽ.

35 (a) Dùng pphapNewton để tìm số tới hạn của hàm số $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^2 - 2x$ đúng đến sáu chữ số thập phân.

(b) Tìm giá trị nhỏ nhất của f đúng đến bốn chữ số thập phân.

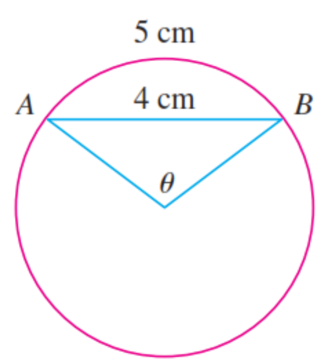
.**36**. Dùng phương pháp Newton để tìm giá trị lớn nhất của hàm số f(x) = xcos x, 0 ≤ x ≤ p, đúng đến sáu chữ số thập phân.

37. Dùng phương pháp Newton để tìm toạ độ điểm uốn của đường cong $y = e^{\cos x}$, 0 ≤ x ≤ π, đúng đến sáu chữ số thập phân.

38. Trong vô số đường thẳng tiếp tuyến với đường cong y = - sinx và đi qua gốc toạ độ, có một tiếp tuyến có độ dốc lớn nhất. Tìm độ dốc này đúng đến sáu chữ số thập phân, dùng phương pháp Newton.

39, Dùng phương pháp Newton để tìm toạ độ, đúng đến sáu chữ số thập phân, của điểm trên parabol $y = (x - 1)^2$ và ở gần điểm gốc nhất.

40. Trong hình, độ dài dây AB là 4 cm và độ dài cung AB là 5 cm. Tìm góc ở tâm θ bằng radian, đúng đến bốn chữ số thập phân. Rồi viết đáp số làm tròn theo đơn vị độ.



41. Một hảng ô tô bán một ô tô mới với giá 18,000 $, còn nếu trả góp thì phải trả 375 $ mỗi tháng trong năm năm. Hỏi hảng đã tính lãi suất hàng tháng là bao nhiêu đối với khách mua trả góp?

Để giải bài toán này bạn cần phải dùng công thức tính tiền vốn lẫn lãi A khi trả n thời hạn số tiền R với lãi suất i mỗi thời hạn:

$$A = \frac{R}{i}[1-(1+i)^{-n}]$$

Thay i bằng x, chứng tỏ rằng

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0 \backslash$$

Dùng phương pháp Newton để giải phương trình này.

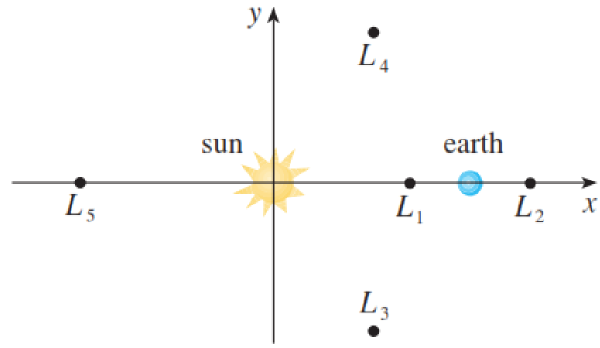
42. Hình dưới cho thấy mặt trời ở điểm gốc và trái đất ở điểm (1, 0). (Đơn vị ở đây là khoảng cách giữa tâm trái đất và mặt trời, gọi là đơn vị thiên văn AU: 1 AU ≈ 1.496 x 10^8 km.) Có 5 vị trí L_1, L_2, L_3, L_4,và L_5 trong mặt phẳng quỹ đạo của trái đất quay quanh mặt trời tại đó một vệ tinh lúc nào cũng đứng yên đối với trái đất vì các lực tác động trên vệ tinh (gồm sức hút của trái đất và mặt trời) cân bằng lẫn nhau. Những vị trí này được gọi là các điểm bình động. (Một vệ tinh nghiên cứu chạy bằng năng lượng mặt trời đã được đặt vào một trong những điểm bình động này.) Nếu m_1 là khối lượng của mặt trời, m_2 khối lượng trái đất, và $r = m_2/(m_1 + m_2)$, người ta tính được hoành độ x của L_1 là nghiệm duy nhất của phương trình bậc năm

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2 + 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

và hoành độ x của L_2 là nghiệm của phương trình

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Dùng giá trị $r \approx 3.04042 \times 10^{-6}$, tìm vị trí các điểm bình động (a) L_1 và (b) L_2.



ĐÁP SỐ

1. (a) $x_2 \approx 2.3, x_3 \approx 3$ (b) No **3.** $\frac{4}{5}$ **5.** 1.1797
7. 1.1785 **9.** −1.25 **11.** 1.82056420 **13.** 1.217562
15. 0.876726 **17.** −0.724492, 1.220744
19. 1.412391, 3.057104 **21.** 0.641714
23. −1.93822883, −1.21997997, 1.13929375, 2.98984102
25. −1.97806681, −0.82646233
27. 0.21916368, 1.08422462 **29.** (b) 31.622777
35. (a) −1.293227, −0.441731, 0.507854 (b) −2.0212
37. (0.904557, 1.855277) **39.** (0.410245, 0.347810)
41. 0.76286%

BÀI 4. 9 NGUYÊN HÀM

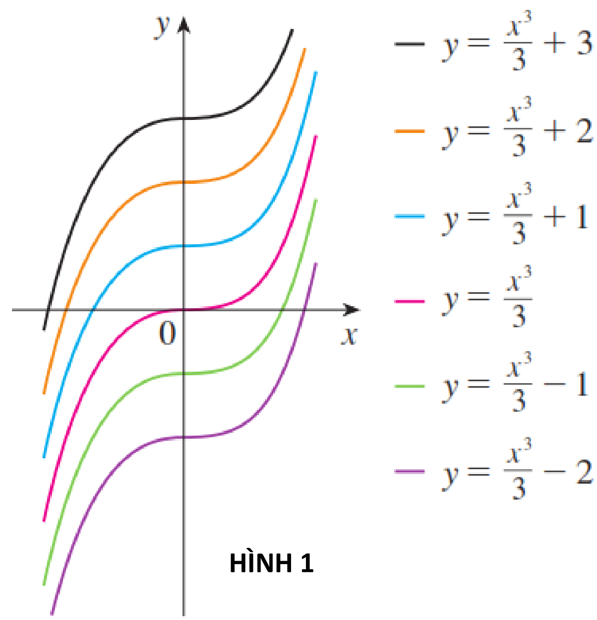
Một nhà vật lý khi biết vận tốc của một chất điểm có thể muốn biết vị trí của một chất điểm tại một thời điểm cho trước. Các kỹ sư khi đo được tốc độ biến thiên của lượng nước chảy ra từ một bình chứa có thể muốn biết số lượng nước chảy ra khỏi bình trong khoảng thời gian nào đó. Một nhà sinh học nếu biết được tốc độ tăng trưởng của dân số vi khuẩn có thể muốn biết mức dân số vi khuẩn ở một thời điểm trong tương lai. Trong trường hợp này, bài toán là tìm một hàm số F biết đạo hàm của nó là hàm số f cho trước. Nếu hàm số F như thế tồn tại, nó được gọi là nguyên hàm của f.

> **ĐỊNH NGHĨA** Một hàm số F được gọi là **nguyên hàm** của f trên một khoảng I nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc I.

Chẳng hạn, với $f(x) = x^2$, ta không khó tìm ra nguyên hàm của f nếu ta nhớ Quy Tắc Lũy Thừa. Thật vậy, nếu $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, thì $F'(x) = x^2 = f(x)$. Nhưng hàm số $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ cũng thỏa mãn $G'(x) = x^2$. Do đó cả F và G đều là nguyên hàm của f . Thật ra bất kỳ hàm số nào thuộc dạng $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, trong đó C là hằng số, đều là nguyên hàm của f. Đến đây, ta phải hỏi: Có còn nguyên hàm nào khác không?

Để trả lời câu hỏi này, nhớ lại rằng trong Bài 4.2 ta đã dùng Định Lý Giá Trị Trung Bình ta đã chứng minh rằng nếu hai hàm số có cùng đạo hàm trên một khoảng thì chúng sai kém một hằng số (Hệ Quả 4.2.7). Do đó nếu F và G là hai nguyên hàm bất kỳ của f, thế thì

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$



HÌNH 1

Do đó $G(x) – F(x) = C$, với C là hằng số. Ta có thể viết: $G(x) = F(x) + C$, suy ra kết quả sau.

> **ĐỊNH LÝ 1** Nếu F là một nguyên hàm của f trên một khoảng, thế thì nguyên hàm tổng quát của f trên I là
>
> $$F(x) + C$$
>
> trong đó C là hằng số bất kỳ.

Trở lại hàm số $f(x) = x^2$, ta thấy rằng nguyên hàm tổng quát của f là $\frac{1}{3}x^3 + C$. Bằng cách gán cho C những giá trị cụ thể, ta được một họ hàm số mà đồ thị của chúng là tịnh tiến lên xuống của nhau (xem Hình 1). Điều này cũng hợp lý vì mọi đường cong đều phải có cùng độ dốc tại bất kỳ giá trị x cho trước.

VÍ DỤ 1 Tìm nguyên hàm tổng quát của các hàm số sau:

(a) $F(x) = \sin x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n$, $n \neq -1$

GIẢI

(a) Nếu F(x) = - cos x thì F ’(x) = sin x, do đó một nguyên hàm của sin x là – cos x. Theo Định ly 1 , nguyên hàm tổng quát là G(x) = - cos x + C.

(b) Nhớ lại trong Bài 3.6 công thức $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$.

Do đó trên khoảng (0, ∞) nguyên hàm tổng quát của 1/x là ln x + C. Ta cũng biết rằng

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

với mọi x ≠ 0. Định lý 1 nói rằng nguyên hàm tổng quát của f(x) = 1/x là ln | x | + C trên bất kỳ khoảng nào không chứa 0. Đặc biệt, điều này đúng trên mỗi khoảng (0, ∞) và (- ∞, 0). Vậy nguyên hàm tổng quát của f là

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & khi\ x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & khi\ x < 0 \end{cases}$$

(c) Ta dùng Quy Tắc Lũy Thừa để tìm một nguyên hàm của x^n. Ta có, nếu n ≠ - 1 thì

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Như vậy nguyên hàm tổng quát của x^n là $$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Nếu n ≥ 0 khi đó f(x) = x^n xác định trên bất kỳ khoảng nào. Nếu n < 0 và ≠ - 1, kết quả trên chỉ đúng trên một khoảng bất kỳ không chứa 0.

Như trong Ví dụ 1, mỗi công thức đạo hàm, khi đọc từ phải sang trái sẽ cho ta một công thức ngham tương ứng. Trong Bảng 2 ta liệt kê một vài nguyên hàm đặc biệt. Mỗi công thức trong bảng đều đúng vì đạo hàm của hàm số trong cột phải xuất hiện trong cột trái. Đặc biệt, công thức đầu tiên nói rằng nguyên hàm của tích một hàm số với một hằng số thì tích hằng số đó với nguyên hàm của hàm số đó. Công thức thứ hai nói rằng nguyên hàm của tổng là tổng các nguyên hàm. (Ta dùng ký hiệu F ‘ = f, G ‘ = g.)

2 BẢNG NGUYÊN HÀM

Hàm số	Nguyên hàm đặc biệt	Hàm số	Nguyên hàm đặc biệt
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sin x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$
e^x	e^x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
$\cos x$	$\sin x$		

VÍ DỤ 2 Tìm tất cả hàm số g sao cho

$$g'(x) = 4\sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

GIẢI Viết lại hàm số đã cho như sau

$$g'(x) = \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4\sin x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Như vậy ta muốn tìm nguyên hàm của $g'(x) = 4\sin x + 2x^4 - x^{-1/2}$. Dùng công thức trong Bảng 2 với Định lý 1, ta được

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$
$$= -4\cos x + \frac{2}{5}x^6 - 2\sqrt{x} + C$$

Trong các ứng dụng của giải tích, ta thường gặp những tình huống như trong Ví dụ 2, trong đó ta phải tìm một hàm số, cho biết đạo hàm của nó. Một phương trình có liên quan đến đạo hàm một hàm số được gọi là **phương trình vi phân.** Vấn đề này sẽ được đề cập chi tiết trong Chương 9, ngay lúc này ta chỉ có thể giải được những phương trình vi phân cơ bản. Nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân thường chứa một hằng số bất kỳ (như hằng số C trong Ví dụ 2). Tuy nhiên, nếu có thêm điều kiện cho trước, thì ta có thể xác định được giá trị của C và như thế nghiệm là duy nhất.

VÍ DỤ 3 Tìm f biết $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ và $f(0) = -2$.

GIẢI Nguyên hàm tổng quát của

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1+x^2}$$

là

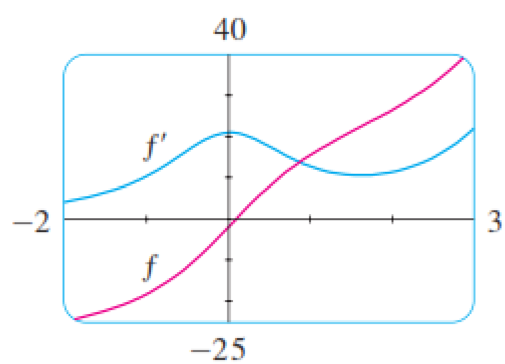
$$f(x) = e^x + 20\tan^{-1} x + C$$

Để xác định C ta dùng điều kiện $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20\tan^{-1} 0 + C = -2$$

Như vậy $C = -2 - 1 = -3$, và nghiệm duy nhất là

$$F(x) = e^x + 20\tan^{-1}x - 3$$



HÌNH 2 cho thấy đồ thị của f ' và nguyên hàm f của nó. Chú ý là f '(x) > 0, nên f(x) luôn đồng biến . Cũng chú ý là khi f ' có cực đại hay cực tiểu thì f có điểm uốn tại đó.

VÍ DỤ 4 Tìm f biết $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$, và $f(1) = 1$.

GIẢI Nguyên hàm tổng quát của $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ là

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Dùng quy tắc nguyên hàm lần nữa, ta được

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Để xác định C và D ta dùng điều kiện f(0) = 4 và f(1) = 1. Vì f(0) = 0 + D = 4, ta suy ra D = 4. Vì

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

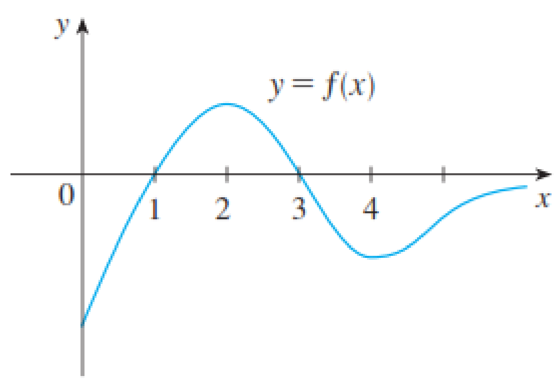
ta có C = - 3. Do đó hàm số cần tìm là

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

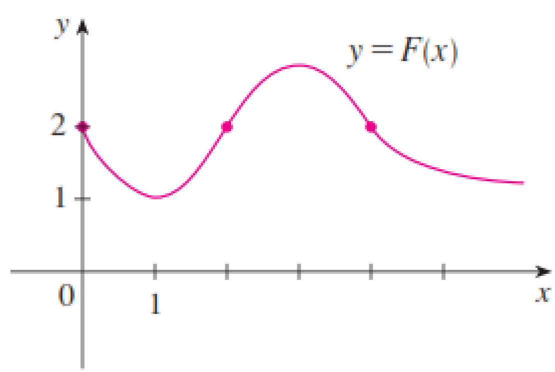
Nếu cho trước đồ thị của hàm số f, thật hợp lý nếu ta nghĩ là có thể vẽ được đồ thị của một nguyên hàm F. Giả sử, chẳng hạn, ta được biết là F(0) = 1. Thế thì ta có một điểm để bắt đầu, đó là điểm (0, 1), và hướng mà đầu viết chì của ta di chuyển được cho ở mỗi bước từ đạo hàm F ‘(x) = f(x). Trong ví dụ sau, ta sử dụng các nguyên tắc của chương này để cho thấy cách thức vẽ đồ thị của F cho dù ta không có một công thức cho f. Đây là tình huống, chẳng hạn, khi f(x) được xác định bằng dữ liệu thực nghiệm.

VÍ DỤ 5 Đồ thị của hàm số f được cho trong Hình 3. Hãy phác họa một đồ thị thô của nguyên hàm F, cho biết F(0) = 2.

GIẢI Ta được chỉ dẫn bằng thông tin là độ dốc của y = F(x) chính là f(x). Ta bắt đầu từ điểm (0, 2) và vẽ F theo dạng một hàm số nghịch biến vì f(x) âm khi 0 < x < 1. Chú ý rằng f(1) = f(3) = 0, nên F có tiếp tuyến nằm ngang khi x = 1 và x = 3. Khi 1 < x < 3, f(x) dương và do đó F đồng biến. Ta thấy là F đạt cực tiểu khi x = 1 và cực đại khi x = 3. Với x > 3, f(x) âm, nên F nghịch biến trên (3, ∞). Vì f(x) → 0 khi x → ∞, đồ thị của F trở nên dẹt hơn khi x → ∞. Cũng chú ý rằng F ”(x) = f ’(x) thay đổi từ dương sang âm tại x = 2 và từ âm sang dương tại x = 4, nên F có điểm uốn khi x = 2 và x = 4. Gom tất cả thông tin này cho ta vẽ được đồ thị của nguyên hàm F như trong Hình 4.



HÌNH 3



HÌNH 4

<u>CHUYỂN ĐỘNG THẲNG</u>

Nguyên hàm đặc biệt hữu dụng khi phân tích chuyển động của một vật thể di chuyển trên một đường thẳng. Nhớ rằng nếu vật thể có hàm số vị trí s = f(t), thì hàm số vận tốc chính là v(t) = s ‘(t). Điều này có nghĩa là hàm số vị trí là nguyên hàm của vận tốc. Tương tự, hàm số gia tốc là a(t) = v ’(t), nên vận tốc là nguyên hàm của gia tốc. Nếu biết được gia tốc và những giá trị ban đầu s(0) và v(0) thì hàm số vị trí có thể xác định được bằng cách lấy nguyên hàm hai lần.

VÍ DỤ 6 Một chất điểm di chuyển trên một đường thẳng và có gia tốc cho bởi a(t) = 6t + 4. Vận tốc đầu của nó là v(0) = - 6cm/s và vị

trí đầu là s(0) = 9 cm. Tìm hàm số vị trí s(t).

GIẢI Vì v '(t) = a(t) = 6t + 4, nên quy tắc lấy nguyên hàm cho

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Chú ý là v(0) = C, như vậy C = - 6 và

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Vì v(t) = s '(t), nên s là nguyên hàm của v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Suy ra s(0) = D, như vậy D = 9 và hàm số cần tìm là

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$

Một vật thể gần bề mặt trái đất sẽ chịu một sức hút trọng trường tạo ra một gia tốc đi xuống ký hiệu g. Với những chuyển động gần sát bề mặt trái đất, ta có thể xem g là hằng số, có giá trị khoảng $9.8 m/s^2$ (hay $32 ft/s^2$).

VÍ DỤ 7 Một quả bóng được ném lên không với vận tốc 48 ft/s từ bờ một triền đá cách mặt đất 432 ft. Tìm độ cao cách mặt đất của quả bóng sau t giây. Khi nào nó lên cao nhất? Khi nào nó chạm mặt đất?

GIẢI Chuyển động thẳng đứng nên ta chọn chiều dương là chiều đi lên. Tại thời điểm t độ cao cách mặt đất là s(t) và vận tốc v(t) nghịch biến nên gia tốc phải âm và ta có

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -32$$

Lấy nguyên hàm, ta được

$$v(t) = -32t + C$$

Để xác định C ta dùng thông tin đã cho là v(0) = 48, ta được 48 = 0 + C, và do đó

$$v(t) = -32t + 48$$

Độ cao lớn nhất đạt được khi v(t) = 0, tức sau 1.5 giây. Vì s '(t) = v(t), lấy nguyên hàm lần nữa, ta được

$$s(t) = -16t^2 + 48t + D$$

Dùng giả thiết s(0) = 432, ta có 432 = 0 + D và suy ra

$$s(t) = -16t^2 + 48t + 432$$

Biểu thức s(t) chỉ giá trị cho đến khi quả bóng chạm mặt đất. Điều này xảy ra khi s(t) = 0, tức là

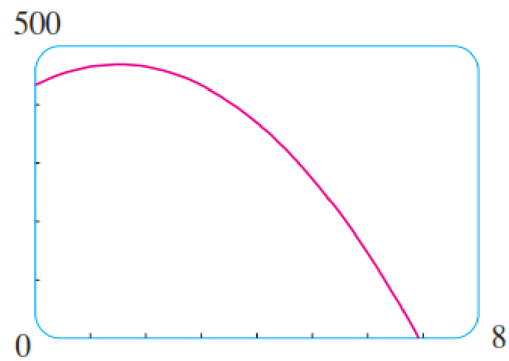
$$-16t^2 + 48t + 432 = 0$$

Hay $$t^2 - 3t - 27 = 0$$

Giải phương trình bậc hai này, ta được

$$t = \frac{3 + 3\sqrt{13}}{2} \quad \text{(ta loại bỏ nghiệm âm vì t > 0).}$$

Vậy bóng chạm mặt đất sau $3(1 + \sqrt{13})/2 \approx 6.9$ s.



HÌNH 5 *cho thấy hàm số vị trí của quả bóng. Đồ thị khớp với kết quả ta đã đạt được: Quả bóng lên đến độ cao sau 1.5 s và chạm mặt đất sau 6.9 s.*

BÀI TẬP

1-20. Tìm nguyên hàm tổng quát của những hàm số sau.

1. $f(x) = x - 3$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$

4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$

5. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$

6. $f(x) = x(2 - x)^2$

7. $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

8. $f(x) = 2x + 3x^{1.7}$

9. $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}$

10. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$

11. $f(x) = \dfrac{10}{x^9}$

12. $g(x) = \dfrac{5 - 4x^3 + 2x^6}{x^6}$

13. $f(u) = \dfrac{u^4 + 3\sqrt{u}}{u^2}$

14. $f(x) = 3e^x + 7\sec^2 x$

15. $g(\theta) = \cos\theta - 5\sin\theta$

16. $f(t) = \sin t + 2\sinh t$

17. $f(x) = 5e^x - 3\cosh x$

18. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6\cos x$

19. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$

20. $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

(Kiểm tra kết quả của bạn bằng cách lấy đạo hàm.)

21-22. Tìm nguyên hàm F của f thỏa mãn điều kiện cho trước. Kiểm tra trả lời của bạn bằng cách so sánh đồ thị của f và F.

21. $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, $F(0) = 4$

22. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}$, $F(1) = 0$

23-46. Tìm f.

23. $f''(x) = 6x + 12x^3$

24. $f''(x) = 2 + x^3 + x^6$

25. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$

26. $f''(x) = 6x + \sin x$

27. $f'''(t) = e^t$

28. $f'''(t) = t - \sqrt{t}$

29. $f'(x) = 1 - 6x$, $f(0) = 8$

30. $f'(x) = 8x^3 + 12x + 3$, $f(1) = 6$

31. $f'(x) = \sqrt{x}(6 + 5x)$, $f(1) = 10$

32. $f'(x) = 2x - 3/x^4$, $x > 0$, $f(1) = 3$

33. $f'(t) = 2\cos t + \sec^2 t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, $f(\pi/3) = 4$

34. $f'(x) = (x^2 - 1)/x$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = 0$

35. $f'(x) = x^{-1/3}$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$

36. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$

37. $f''(x) = 24x^2 + 2x + 10$, $f(1) = 5$, $f'(1) = -3$

38. $f''(x) = 4 - 6x - 40x^3$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

39. $f''(\theta) = \sin\theta + \cos\theta$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 4$

40. $f''(t) = 3/\sqrt{t}$, $f(4) = 20$, $f'(4) = 7$

41. $f''(x) = 2 - 12x$, $f(0) = 9$, $f(2) = 15$

42. $f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 4$, $f(0) = 8$, $f(1) = 5$

43. $f''(x) = 2 + \cos x$, $f(0) = -1$, $f(\pi/2) = 0$

44. $f''(t) = 2e^t + 3\sin t$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$

45. $f''(x) = x^{-2}$, $x > 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$

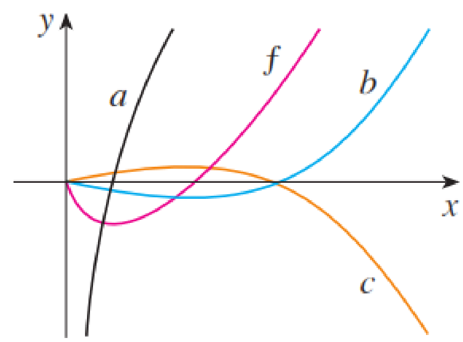
46. $f'''(x) = \cos x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$

47. Cho biết đồ thị của f qua điểm (1, 6) và độ dốc của tiếp tuyến của nó tại điểm (x, f(x)) là 2x + 1, tìm f(2).

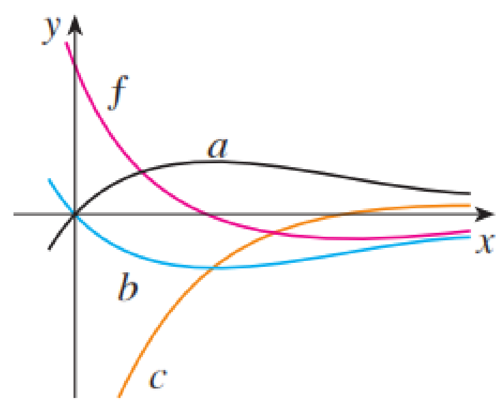
48. Tìm hàm số f sao cho $f'(x) = x^3$ và đường thẳng $x + y = 0$ là tiếp tuyến của đồ thị f.

49-50. Đồ thị của hàm số f được cho bên dưới. Đồ thị nào là của nguyên hàm của f và tại sao?

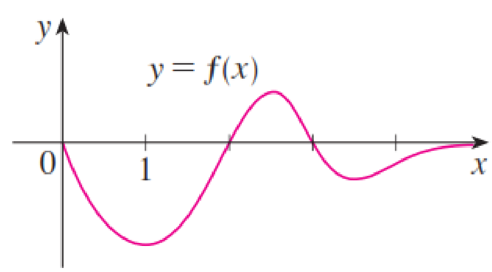
49.



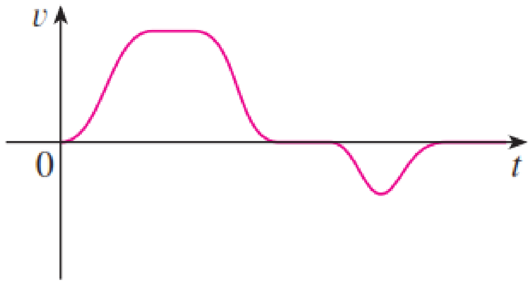
50.



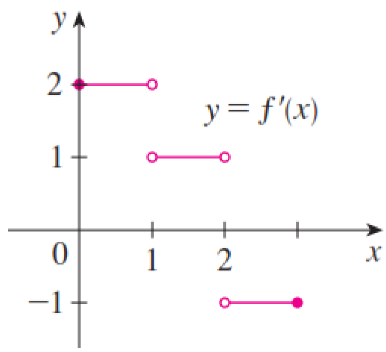
51. Đồ thị của hàm số f được cho bên dưới. Phác họa đồ thị thô của nguyên hàm F, biết rằng F(0) = 1.



52. Đồ thị của hàm số vận tốc của một chất điểm được cho bên dưới. Phác họa đồ thị của hàm số vị trí.



53. Đồ thị của f ' được cho bên cạnh. Phác họa đồ thị của f nếu f liên tục và f(0) = - 1.



54. (a) Dùng máy vẽ đồ thị hàm số $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.

(b) Bắt đầu bằng đồ thị của phần (a), vẽ phác đồ thị của nguyên hàm F thỏa F(0) = 1.

(c) Dùng quy tắc trình bày trong bài này để tìm biểu thức của F(x).

(d) Dùng máy vẽ đồ thị F. So sánh với đồ thị bạn đã vẽ.

55-56. Vẽ đồ thị của f và dùng nó để vẽ phác đồ thị của nguyên hàm biết nguyên hàm qua điểm gốc.

55. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}, \quad -2\pi \le x \le 2\pi$

56. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 1, \quad -1.5 \le x \le 1.5$

57-62. Một chất điểm chuyển động với dữ liệu cho trước. Tìm hàm số vị trí của chất điểm.

57. $v(t) = \sin t - \cos t, \quad s(0) = 0$

58. $v(t) = 1.5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

59. $a(t) = t - 2, \quad s(0) = 1, \quad v(0) = 3$

60. $a(t) = \cos t + \sin t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 5$

61. $a(t) = 10 \sin t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

62. $a(t) = t^2 - 4t + 6, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

63. Từ đài quan sát của Tháp CN cách mặt đất 450 m, ta bỏ rơi một hòn đá.
(a) Tìm độ cao của hòn đá so với mặt đất tại thời điểm t.
(b) Mất bao lâu hòn đá mới chạm mặt đất?
(c) Nó chạm đất với vận tốc bao nhiêu?
(d) Nếu hòn đá được ném xuống với vận tốc 5 m/s, phải mất bao lâu nó mới chạm đất?

64. Chứng tỏ rằng một chuyển động thẳng có gia tốc không đổi a, vận tốc đầu v_o, và hoành độ đầu s_o, thì vị trí tại thời điểm t sẽ là

$$s = ½\, at^2 + v_o t + s_o$$

65. Một vật thể được phóng lên không với vận tốc đầu v_o m/s từ một điểm cách mặt đất s_o mét. Chứng tỏ rằng

$$[v(t)]^2 = v_o^2 - 19.6[s(t) - s_o]$$

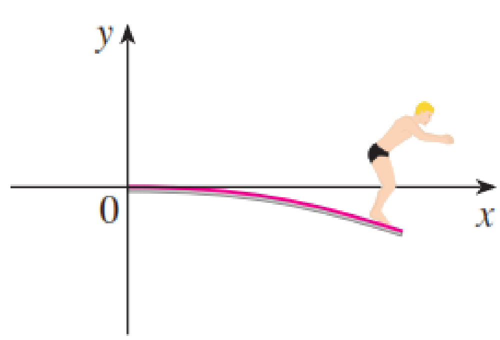
66. Hai quả bóng được ném thẳng lên từ một triền đá như trong Ví dụ 7. Bóng thứ nhất ném với vận tốc 48 ft/s và bóng thứ hai ném sau đó một giây với vận tốc 120 ft/s. Hỏi có khi nào hai quả bóng qua mặt nhau không?

67. Một hòn đá được bỏ rơi xuống một triền đá và chạm đất với vận tốc 120 ft/s. Hỏi độ cao của triền đá.

68. Nếu một vận động viên nhảy cầu có khối lượng m đứng ở đầu một thanh nhún có chiều dài L và tỷ trọng thẳng ρ, thế thì cầu nhún có dáng của đường cong y = f(x), trong đó

$$EIy'' = mg(L - x) + ½\, \rho g(L - x)^2$$

E và I là những hằng số dương phụ thuộc vào chất liệu của cầu nhún và g (< 0) là gia tốc trọng trường.
(a) Tìm biểu thức của dáng đường cong.
(b) Dùng biểu thức f(L) để ước tính khoảng cách bên dưới đường nằm ngang tại đầu cầu nhún.



69. Một công ty ước tính rằng chi phí cận biên (tính bằng đôla mỗi sản phẩm) khi sản xuất x sản phẩm là 1.92 – 0.002x. Nếu chi phí sản xuất một sản phẩm là

562, tìm chi phí sản xuất 100 sản phẩm.

70. Tỷ trọng thẳng của thanh có chiều dài 1 m được cho bởi $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$, tính bằng gram/cm, trong đó x được đo bằng cm tính từ đầu thanh. Tìm khối lương của thanh.

71. Vì những giọt nước mưa lớn dần khi chúng rơi xuống, diện tích bề mặt của chúng cũng tăng theo và do đó sức cản không khí khi chúng rơi cũng tăng. Một giọt mưa có vận tốc đầu đi xuống là 10 m/s và gia tốc đi xuống là

$$a = \begin{cases} 9 - 0.9t & khi\ \ 0 \le t \le 10 \\ 0 & khi\ \ t > 10 \end{cases}$$

Nếu ban đầu giọt mưa cách mặt đất 500 m, hỏi nó sẽ rơi trong bao lâu?

72. Một ô tô đang chạy với vận tốc 50 dặm/h bổng thắng gấp, tạo ra một độ giảm tốc không đổi là 22 ft/s^2 . Hỏi ô tô chạy thêm bao xa mới ngừng hẳn?

73. Tìm gia tốc không đổi cần có để tăng vận tốc một ô tô từ 30 dặm/h đến 50 dặm/h trong 5 giây?

74. Một ô tô thắng với một độ giảm tốc là 16 ft/s^2, tạo ra một vết xước trên đường dài 200 ft trước khi dừng hẳn. Hỏi lúc đạp thắng xe đang chạy với vận tốc bao nhiêu?

75. Một ô tô đang chạy với vận tốc 100 km/h khi tài xế trông thấy một tai nạn giao thông xảy ra đằng trước cách đó 80 m, và liền đạp thắng. Hỏi độ giảm tốc không đổi cần có để xe dừng đúng lúc trước khi bị dồn đống?

76. Một tên lửa thí nghiệm được phóng thẳng đứng lên không từ giàn phóng. Gia tốc trong ba giây đầu là a(t) = 60t, lúc đó nhiên liệu đã cạn và tên lửa rơi tự do. Mười bốn giây sau, dù của tên lửa bung ra, và vận tốc (rơi xuống) chậm dần một cách tuyến tính đến – 18 ft/s trong 5 s. Tên lửa sau đó “lơ lửng” xuống mặt đất với vận tốc đó.

(a) Xác định hàm số vị trí s và hàm số vận tốc v (tại mọi thời điểm t). Vẽ đồ thị của s và v.

(b) Khi nào thì tên lửa lên cao nhất và độ cao nhất ấy lả bao nhiêu?

(c) Khi nào thì tên lửa tiếp đất?

77. Một tàu hỏa cao tốc gia tốc và giảm tốc với mức độ 4 ft/s^2 . Vận tốc chạy tàu tối đa là 90 dặm/h.

(a) Quảng đường lớn nhất mà tàu có thể đi được nếu nó tăng tốc từ lúc đậu cho đến khi đạt tới vận tốc chạy tàu và sau đó vẫn giữ vận tốc ấy trong 15 phút?

(b) Giả sử tàu khởi hành và phải dừng lại hoàn toàn trong vòng 15 phút. Hỏi quảng đường tối đa nó đi được dưới điều kiện ấy?

(c) Tìm thời gian tối thiểu mà tàu phải mất để đi từ ga này đến ga kế tiếp cách nhau 45 dặm.

(d) Chuyến đi từ ga này đến ga sau mất 37.5 phút. Hỏi hai ga cách nhau bao xa?

ĐÁP SỐ

1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ **3.** $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^4 + C$

5. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ **7.** $F(x) = 4x^{5/4} - 4x^{7/4} + C$

9. $F(x) = 4x^{3/2} - \frac{6}{7}x^{7/6} + C$

11. $F(x) = \begin{cases} -5/(4x^8) + C_1 & \text{if } x < 0 \\ -5/(4x^8) + C_2 & \text{if } x > 0 \end{cases}$

13. $F(u) = \frac{1}{3}u^3 - 6u^{-1/2} + C$

15. $G(\theta) = \sin\theta + 5\cos\theta + C$

17. $F(x) = 5e^x - 3\sinh x + C$

19. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - 1/x^2 + C$

21. $F(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 4$ **23.** $x^3 + x^4 + Cx + D$

25. $\frac{3}{20}x^{8/3} + Cx + D$ **27.** $e^t + \frac{1}{2}Ct^2 + Dt + E$

29. $x - 3x^2 + 8$ **31.** $4x^{3/2} + 2x^{5/2} + 4$

33. $2\sin t + \tan t + 4 - 2\sqrt{3}$

35. $\frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{1}{2}$ if $x > 0$; $\frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{5}{2}$ if $x < 0$

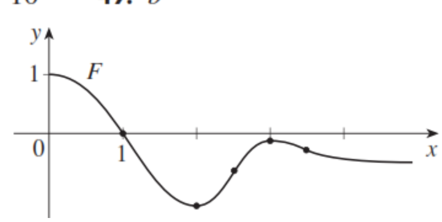
37. $2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 22x + \frac{59}{3}$

39. $-\sin\theta - \cos\theta + 5\theta + 4$ **41.** $x^2 - 2x^3 + 9x + 9$

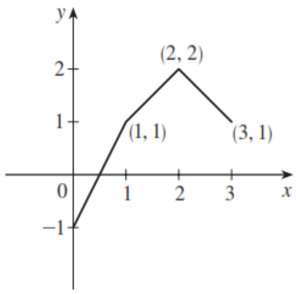
43. $x^2 - \cos x - \frac{1}{2}\pi x$ **45.** $-\ln x + (\ln 2)x - \ln 2$

47. 10 **49.** b

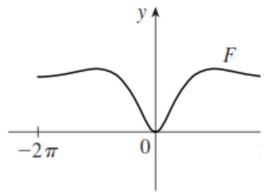
51.



53.



55.



57. $s(t) = 1 - \cos t - \sin t$ **59.** $s(t) = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + 3t$

61. $s(t) = -10 \sin t - 3 \cos t + (6/\pi)t + 3$

63. (a) $s(t) = 450 - 4.9t^2$ (b) $\sqrt{450/4.9} \approx 9.58$ s
(c) $-9.8\sqrt{450/4.9} \approx -93.9$ m/s (d) About 9.09 s

67. 225 ft **69.** \$742.08 **71.** $\frac{130}{11} \approx 11.8$ s

73. $\frac{88}{15} \approx 5.87$ ft/s^2 **75.** 62,500 km/h^2 ≈ 4.82 m/s^2

77. (a) 22.9125 mi (b) 21.675 mi (c) 30 min 33 s
(d) 55.425 mi

ÔN CUỐI CHƯƠNG 4

KIỂM TRA KHÁI NIỆM

1. Giải thích sự khác nhau giữa giá trị lớn nhất và cực đại. Minh họa bằng một đồ thị.

2. (a) Định Lý Giá Trị Cực Trị nói gì?
(b) Giải thích phương pháp tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên một đoạn.

3. (a) Phát biểu Định Lý Fermat.
(b) Định nghĩa số tới hạn của f

4. (a) Phát biểu Định Lý Rolle
(b) Phát biểu Định Lý Giá Trị Trung Bình và đưa ra một
giải thích bằng hình học.

5. (a) Phát biểu Dấu Hiệu Nghịch Biến/ Đồng Biến
(b) Nói f có bề lõm quay lên trên khoảng I có nghĩa là gì?
(c) Phát biểu Dấu Hiệu Lõm Lên Lõm Xuống.
(d) Điểm uốn là gì? Làm sao tìm được chúng?

6. (a) Phát biểu Dấu hiệu Đạo hàm Bậc nhất
(b) Phát biểu Dấu hiệu Đạo hàm Bậc hai
(c) Đâu là thuận tiện và bất tiện tương đối của các dấu hiệu này?

7. (a) Quy Tắc l'Hospital nói gì?
(b) Làm sao sử dụng l'Hospital khi bạn có một tích.

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG-SAI

Xác định phát biểu sau đúng hay sai. Nếu đúng, giải thích tại sao. Nếu sai, giải thích tại sao hay cho một phản ví dụ.

1. Nếu f '(c) = 0 thì f có một cực đại hay một cực tiểu tại c.

2. Nếu f có giá trị lớn nhất tại c, thì f '(c) = 0

3. Nếu f liên tục trên (a, b) thì f đạt giá trị lớn nhất f(c) và đạt giá trị nhỏ nhất f(d) tại một số c và d nào đó trên (a, b).

4. Nếu f có đạo hàm và f(- 1) = f(1), thì tồn tại c sao cho| c | < 1 và f '(c) = 0.

5. Nếu f '(x) < 0 với 1 < x < 6, thì f nghịch biến trên m (1, 6).

6. Nếu f "(2) = 0, thì (2, f(2)) là một điểm uốn của đồ thị y = f(x).

7. Nếu f '(x) = g'(x) với 0 < x < 1, thì f(x) = g(x) với 0 < x < 1.

8. Tồn tại một hàm số f sao cho f(1) = **-** 2, f(3) = 0, và f '(x) > 1 với mọi x.

9. Tồn tại một hàm số f sao cho f(x) > 0, f '(x) < 0, và f "(x) > 0 với mọi x.

10. Tồn tại một hàm số f sao cho f(x) < 0, f '(x) < 0, và f "(x) > 0 với mọi x.

11. Nếu f và g đồng biến trên một khoảng I, thì f + g đồng biến trên I.

12. Nếu f và g đồng biến trên một khoảng I, thì f – g đồng biến trên I.

13. Nếu f và g đồng biến trên một khoảng I, thì f g đồng biến trên I.

14. Nếu f và g đồng biến và có giá trị dương trên một khoảng I, thì f g đồng biến trên I.

15. Nếu f đồng biến và f(x) > 0 trên I, thì g(x) = 1/f(x) nghịch biến trên I.

16. Nếu f chẵn, thì f ' chẵn.

BÀI TẬP

1-6. Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất các hàm số sau trên đoạn cho trước.

1. f(x) = $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, [2, 4]

2. f(x) = $x\sqrt{1-x}$, [- 1, 1]

3. f(x) = $\dfrac{3x-4}{x^2+1}$, [- 2, 2]

4. f(x) = $(x^2 + 2x)^3$, [- 2, 1]

5. f(x) = x + sin 2x, [0, π]

6. f(x) = $(\ln x)/x^2$, [1, 3]

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan \pi x}{\ln(1+x)}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1-4x}{x^2}$ **10.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{4x}-1-4x}{x^2}$

11. $\lim\limits_{x\to \infty} x^3e^{-x}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$

13. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ **14.** $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}(\tan x)^{\cos x}$

7-14. Tính các giới hạn sau:

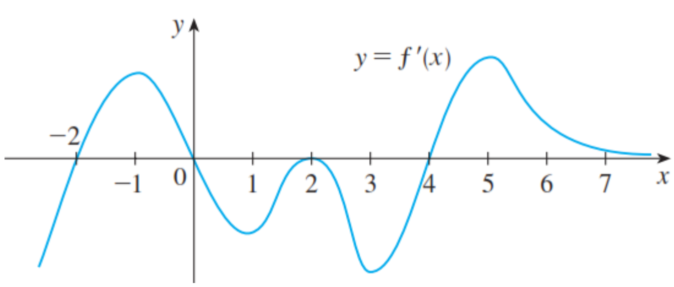
15-17. Vẽ đồ thị của hàm số thỏa mãn các điều kiện cho trước:

15. f(0), f '(- 2) = f '(1) = f '(9) = 0,
lim x-> oo f(x) = 0, lim x->6 f(x)= - oo,
f '(x) < 0 trên (- oo, - 2), (1, 6), và (9, oo)
f '(x) > 0 trên (- 2, 1) và (6, 9)
f "(x) >0 trên (- oo,0) và (12, oo)
f "(x) < 0 trên (0, 6) và (6, 12)

16. f(0) = 0, f liên tục và chẵn,
f ‘(x) = 2x nếu 0 < x < 1, f ‘(x) = - 1 nếu 1 < x < 3,
f ‘(x) = 1 nếu x > 3

17. f lẻ, f '(x) < 0 khi 0 < x < 2,
f '(x) > 0 khi x > 2, f "(x) > 0 khi 0 < x < 3,
f "(x) < 0 khi x > 3, $\lim_{x\to\infty}$ f(x) = - 2

18. Hình dưới là đồ thị của đạo hàm f ' của hàm số f.
(a) Trên khoảng nào f đồng biến, nghịch biến?
(b) Với những giá trị nào của x f đạt cực đại hay cực tiểu
c) Phác họa đồ thị của f ".
(d) Phác họa đồ thị của f.



19-34. Dùng hướng dẫn trong Bài 4.5 để vẽ đồ thị các hàm số sau.

19. $y = 2 - 2x - x^3$ **20.** $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

21. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$ **22.** $y = \dfrac{1}{1-x^2}$

23. $y = \dfrac{1}{x(x-3)^2}$ **24.** $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$

25. $y = x^2/(x + 8)$ **26.** $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

27. $y = x\sqrt{2+x}$ **28.** $y = \sqrt[3]{x^2+1}$

29. $y = \sin^2 x - 2\cos x$

30. $y = 4x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$

31. $y = \sin^{-1}(1/x)$ **32.** $y = e^{2x-x^2}$

33. $y = x\,e^{-2x}$ **34.** $y = x + \ln(x^2 + 1)$

35-38. Dùng máy để vẽ đồ thị của f nhằm phơi bày tất cả đặc điểm quan trọng của nó. Dùng đồ thị của f ‘ và f “ để ước tính các khoảng đồng biến, nghịch biến, các giá trị cực đại, cực tiểu, các khoảng lõm lên hay xuống, và các điểm uốn. Trong Bài tập 35 dùng giải tích để tìm những giá trị này một cách chính xác.

35. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$ **36.** $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2+x+3}$

37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

38. $f(x) = x^2 + 6.5\sin x,\qquad -5 \le x \le 5$

39. Dùng máy vẽ đồ thị của f(x) = e^{-1/x^2} trong một khung hình chữ nhật cho thấy tất cả những đặc điểm chính yếu của hàm số này. Ước tính điểm uốn. Rồi dùng giải tích để tìm lại kết quả một cách chính xác.

40. (a) Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.

(b) Giải thích hình dáng của đồ thị bằng cách tính những giới hạn của f(x) khi x tiến tới ∞, - ∞, 0^+, và 0^-.

(c) Dùng đồ thị của f để ước tính toạ độ của những điểm uốn.

(d) Dùng máy CAS để tính và ved4 đồ thị của f ”.

(e) Dùng đồ thị trong phần (d) để ước tính những điểm uốn chính xác hơn.

41-42. Dùng đồ thị (vẽ bằng máy) của f, f ', và f " để ước tính hoành độ các cực đại, cực tiểu và điểm uốn của f.

41. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, $-\pi \le x \le \pi$

42. $f(x) = e^{-0.1x} \ln(x^2 - 1)$

43. (Dùng máy tính) Khảo sát họ hàm số f(x) = ln(sin x + C). Họ này có chung đặc điểm nào? Chúng khác nhau ra sao? Với giá trị nào của C thì f liên tục trên $(-\infty, \infty)$? Với giá trị nào của C thì f không có đồ thị gì cả? Điều gì xảy ra khi $C \to \infty$?

44. (Dùng máy tính) Khảo sát họ hàm số f(x) = cxe^{-cx^2}. Điều gì xảy ra với những điểm cực đại và cực tiểu và điểm uốn khi c thay đổi? Minh họa kết quả bạn làm bằng cách vẽ đồ thị một vài thành viên của họ.

45. Chứng tỏ rằng phương trình 3x + 2cos x + 5 = 0 có đúng một nghiệm thực.

46. Giả sử f liên tục trên [0, 4], f(0) = 1, và $2 \le f'(x) \le 5$ với mọi x thuộc (0, 4). Chứng tỏ $9 \le f(4) \le 21$.

47. Bằng cách áp dụng Định Lý Giá Trị Trung Bình cho hàm số $f(x) = x^{1/5}$ trên đoạn [32, 33], chứng tỏ rằng

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2.0125$$

48. Tìm a và b sao cho (1, 6) là điểm uốn của đường cong $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

49. Cho $g(x) = f(x^2)$, trong đó f khả vi hai lần với mọi x, $f'(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$, và f có bề lõm quay xuống trên $(-\infty, 0)$ và quay lên trên $(0, \infty)$.
(a) Tại điểm nào g có giá trị cực trị?
(b) Biện luận về bề lõm của g.

50. Tìm hai số nguyên dương sao cho tổng của số đầu và bốn lần số thứ hai là 1000 và tích các số là lớn nhất.

51. Chứng tỏ rằng khoảng cách ngắn nhất từ điểm (x_1, y_1) đến đường thẳng Ax + By + C = 0 là

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Tìm trên hyperbol xy = 8 điểm ở gần điểm (3, 0) nhất.

53. Tìm diện tích nhỏ nhất của một tam giác cân ngoại tiếp đường tròn bán kính r.

54. Tìm thể tích nhỏ nhất của khối nón nội tiếp trong hình cầu bán kính r.

55. Cho tam giác ABC, D là chân đường cao vẽ từ C, độ dài AD và BD đều bằng 4 cm, và độ dài CD bằng 5 cm. Phải chọn trên CD điểm P ở đâu để tổng các độ dài | PA | + | PB | + | PC | nhỏ nhất.

56. Giải Bài tập 55 khi | CD | = 2 cm.

57. Tốc độ của sóng có độ dài L trong nước sâu là

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

trong đó K và C là những hằng số dương cho trước. Tìm độ dài sóng ứng với tốc độ nhỏ nhất.

58. Một thùng chứa bằng kim loại thể tích V có dáng một hình trụ úp phía trên là một bán cầu. Tìm kích thước sao cho việc chế tạo ít tốn kim loại nhất.

59. Một đội khúc côn cầu chơi trong một vận động trường có sức chứa 15,000 ghế. Với giá vé 12\$, số lượng khán giả trung bình ở mỗi trận là 11,000. Một nghiên cứu thị trường chỉ ra rằng với mỗi đô la giá vé được hạ thấp, số khán giả trung bình sẽ tăng lên 1000. Hỏi những người chủ của đội phải đặt giá vé bao nhiêu để doanh thu được tối đa?

60. Một nhà sản xuất xác định là chi phí tạo ra x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 1800 + 25x - 0.2x^2 + 0.001x^3$ và hàm số cầu là p(x) = 48.2 – 0.03x.
(a) Vẽ đồ thị hàm số chi phí và doanh thu và dùng đồ thị này để ước tính mức sản xuất cho lợi nhuận tối đa.
(b) Dùng giải tích để tìm mức sản xuất cho lợi nhuận tối đa.
(c) Ước tính mức sản xuất làm chi phí trung bình thấp nhất.

61 Dùng phương pháp Newton để tìm nghiệm của phương trình

$$x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 =,0$$

trên đoạn [1, 2] đúng đến sáu chữ số thập phân.

62. Dùng phương pháp Newton để tìm tất cả nghiệm của phương trình $\sin x = x^2 - 3x + 1$ đúng đến sáu chữ số thập phân.

63. Dùng phương pháp Newton để tìm giá trị lớn nhất của hàm số f(t) = cos t + t - t^2 đúng đến tám chữ số thập phân.

64. Dùng hướng dẫn trong Bài 4.5 để vẽ đồ thị y = xsin x, 0 ≤ x ≤ 2π. Dùng phương pháp Newton khi cần thiết.

65-72. Tìm f biết:

65. $f'(x) = \cos x - (1 - x^2)^{-1/2}$

66. $f'(x) = 2e^x + \sec x \tan x$

67. $f'(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

68. $f'(x) = \sinh x + 2\cosh x, \quad f(0) = 2$

69. $f'(t) = 2t - 3\sin t, \quad f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}, \quad f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0$

73-74. Một chất điểm chuyển động với dữ liệu cho sẵn. Tìm vị trí của chất điểm.

73. $v(t) = 2t - \dfrac{1}{1+t^2}$, s(0) = 1

74. a(t) = sin t + 3cos t, s(0) = 0, v(0) = 2

75. (a) Nếu f(x) = 0.1 e^x + sin x, - 4 ≤ x ≤ 4, dùng đồ thị của f (vẽ bằng máy) để phác họa đồ thị thô của nguyên hàm F(x) của f thỏa mãn F(0) = 0.

(b) Tìm biểu thức của F(x).

(c) Vẽ đồ thị F dùng biểu thức tìm được ở phần (b)> So sánh với phác họa của bạn ở phần (a).

76. Khảo sát họ đường cong có phương trình

$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

Đặc biệt bạn nên xác định giá trị chuyển tiếp của c tại đó những sô tới hạn thay đổi và giá trị chuyển tiếp của c tại đó số điểm uốn thay đổi. Minh họa bằng những hình dáng khác nhau có thể có của đồ thị vẽ bằng máy.

77. Một thùng cứu trợ được thả từ một trực thăng cách mặt đất 500 m. Nhưng dù không bung ra. Thiết kế của thùng chịu được tốc độ va chạm là 100 m/s. Hỏi thùng có vỡ không?

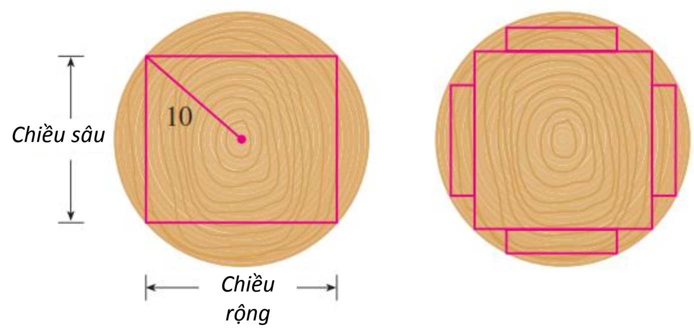
78. Trong cuộc đua ô tô trên đường đua thẳng, xe A qua mặt xe B hai lần. Chứng tỏ rằng có một thời điểm nào đó trong cuộc đua hai xe có gia tốc bằng nhau.

79. Một cây đà hình chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ bán kính 10 inch.

(a) Chứng tỏ rằng tiết diện đạt diện tích lớn nhất khi nó là hình vuông.

(b) Bốn tấm gỗ hình hộp chữ nhật sẽ được cắt ra từ phần gỗ còn lại sau khi cắt lấy cây đà đáy vuông (xem hình dưới bên phải). Xác định kích thước của tấm gỗ sao cho tiết diện là lớn nhất.

(c) Giả sử sức chịu đựng của cây đà đáy chữ nhật thì tỷ lệ với tích của chiều rông với bình phương chiều sâu. Tìm kích thước cây đà có sức chịu đựng lớn nhất khi cắt từ một khối gỗ hình trụ.



80. Nếu một một vật được phóng đi với một vận tốc đầu v theo hướng nghiêng một góc θ với mặt phẳng nằm ngang, thế thì quỹ đạo của nó, bỏ qua sức cản không khí, là đường parabol

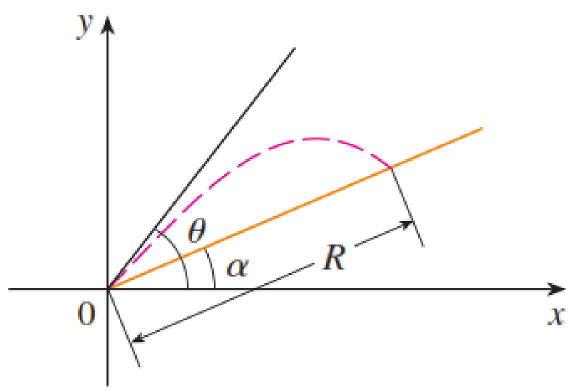
$$y = (\tan\theta)x - \frac{\theta}{2v^2\cos^2\theta}x^2 \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

(a) Giả sử một viên đạn pháo được bắn ra từ một căn cứ trên mặt đất nghiêng một góc α, α > 0, với mặt nằm ngang, như trong hình. Chứng tỏ rằng tầm bắn của quả đạn pháo, đo trên mặt nghiêng, được cho bởi

$$R(\theta) = \frac{2v^2\cos\theta\sin(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

(b) Xác định θ sao cho R lớn nhất.

(c) Giả sử mặt phẳng nghiêng một góc α bên dưới mặt nằm ngang. Xác định R trong trường hợp này, và xác định góc sao cho viên đạn pháo có tầm bắn R lớn nhất.



81. Chứng tỏ rằng, với x > 0,

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$$

82. Phác họa đồ thị của một hàm số f sao cho f ’(x) < 0 với mọi x, f ”(x) > 0 với | x | > 1, f ”(x) < 0 với | x | < 1, và $\lim_{x\to\pm\infty}$ [f(x) + x] = 0.

ĐÁP SỐ

True-False Quiz

1. False **3.** False **5.** True **7.** False **9.** True
11. True **13.** False **15.** True **17.** True **19.** True

Exercises

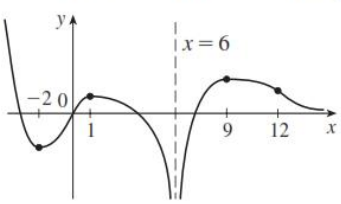
1. Abs. max. $f(4) = 5$, abs. and loc. min. $f(3) = 1$; loc. min. $f(3) = 1$

3. Abs. max. $f(2) = \frac{2}{5}$, abs. and loc. min. $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{2}$

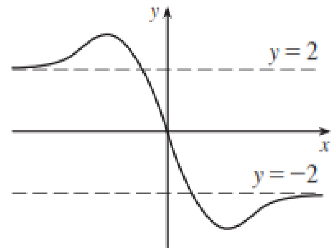
5. Abs. max. $f(\pi) = \pi$; abs. min. $f(0) = 0$; loc. max. $f(\pi/3) = (\pi/3) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$; loc. min. $f(2\pi/3) = (2\pi/3) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

7. π **9.** 8 **11.** 0 **13.** $\frac{1}{2}$

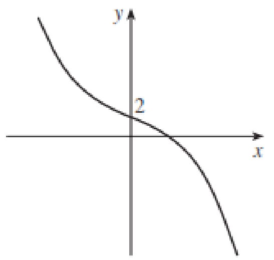
15.



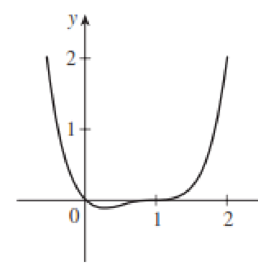
17.



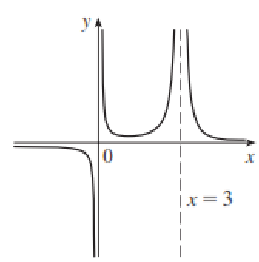
19. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 2
C. None D. None
E. Dec. on $(-\infty, \infty)$ F. None
G. CU on $(-\infty, 0)$;
CD on $(0, \infty)$; IP $(0, 2)$
H. See graph at right.



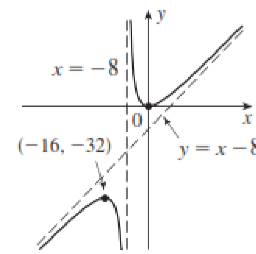
21. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0; x-int. 0, 1
C. None D. None
E. Inc. on $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$, dec. on $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$
F. Loc. min. $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$
G. CU on $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $(1, \infty)$;
CD on $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; IP $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$, $(1, 0)$
H. See graph at right.



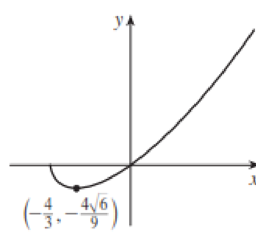
23. A. $\{x \mid x \neq 0, 3\}$
B. None C. None
D. HA $y = 0$; VA $x = 0$, $x = 3$
E. Inc. on $(1, 3)$; dec. on $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(3, \infty)$
F. Loc. min. $f(1) = \frac{1}{4}$
G. CU on $(0, 3)$, $(3, \infty)$; CD on $(-\infty, 0)$
H. See graph at right.



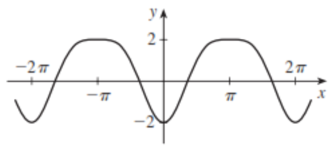
25. A. $\{x \mid x \neq -8\}$
B. y-int. 0, x-int. 0 C. None
D. VA $x = -8$; SA $y = x - 8$
E. Inc. on $(-\infty, -16)$, $(0, \infty)$;
dec. on $(-16, -8)$, $(-8, 0)$
F. Loc. max. $f(-16) = -32$;
loc. min. $f(0) = 0$
G. CU on $(-8, \infty)$; CD on $(-\infty, -8)$
H. See graph at right.



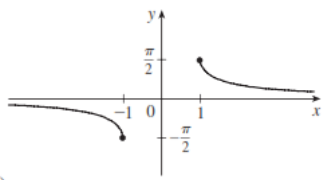
27. A. $[-2, \infty)$
B. y-int. 0; x-int. −2, 0
C. None D. None
E. Inc. on $\left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$, dec. on $\left(-2, -\frac{4}{3}\right)$
F. Loc. min. $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{6}$
G. CU on $(-2, \infty)$
H. See graph at right.



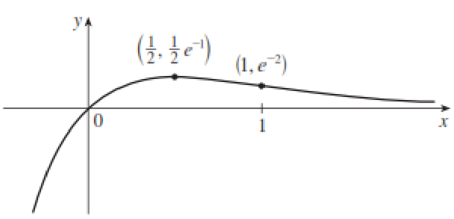
29. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. -2
C. About y-axis, period 2π D. None
E. Inc. on $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, n an integer; dec. on $((2n-1)\pi, 2n\pi)$
F. Loc. max. $f((2n+1)\pi) = 2$; loc. min. $f(2n\pi) = -2$
G. CU on $(2n\pi - (\pi/3), 2n\pi + (\pi/3))$;
CD on $(2n\pi + (\pi/3), 2n\pi + (5\pi/3))$; IP $\left(2n\pi \pm (\pi/3), -\frac{1}{4}\right)$
H.



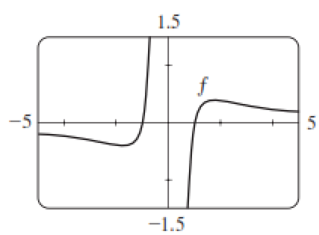
31. A. $\{x \mid |x| \geqslant 1\}$
B. None C. About (0, 0)
D. HA $y = 0$
E. Dec. on $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$
F. None
G. CU on $(1, \infty)$; CD on $(-\infty, -1)$
H. See graph at right.



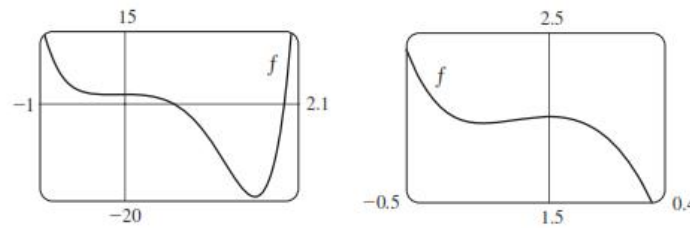
33. A. $\mathbb{R}$ B. y-int. 0, x-int. 0 C. None D. HA $y = 0$
E. Inc. on $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, dec. on $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ F. Loc. max. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1/(2e)$
G. CU on $(1, \infty)$; CD on $(-\infty, 1)$; IP $(1, e^{-2})$
H.



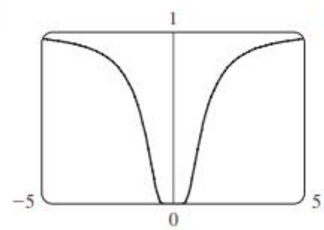
35. Inc. on $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$;
dec. on $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$;
loc. max. $f(\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$,
loc. min. $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$;
CU on $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, \infty)$;
CD on $(-\infty, -\sqrt{6})$, $(0, \sqrt{6})$;
IP $\left(\sqrt{6}, \frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$



37. Inc. on $(-0.23, 0)$, $(1.62, \infty)$; dec. on $(-\infty, -0.23)$, $(0, 1.62)$;
loc. max. $f(0) = 2$; loc. min. $f(-0.23) \approx 1.96$, $f(1.62) \approx -19.2$;
CU on $(-\infty, -0.12)$, $(1.24, \infty)$;
CD on $(-0.12, 1.24)$; IP $(-0.12, 1.98)$, $(1.24, -12.1)$



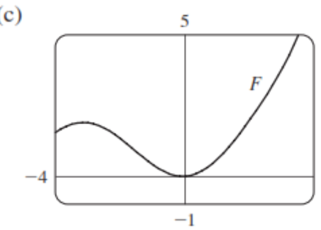
39.



$(\pm 0.82, 0.22)$; $\left(\pm\sqrt{2/3}, e^{-3/2}\right)$

41. $-2.$
43. For
maxima
For -1
tinuous
become
49. (a)
55. $4/\sqrt{}$
61. 1.29
65. $f(x)$
67. $f(x)$

69. $f(t) = t^2 + 3\cos t + 2$
71. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 4x^4 + 2x + 1$
73. $s(t) = t^2 - \tan^{-1}t + 1$
75. (b) $0.1e^x - \cos x + 0.9$ (c)



77. No
79. (b) About 8.5 in. by 2 in. (c) $20/\sqrt{3}$ in., $20\sqrt{2/3}$ in.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Một trong những nguyên tắc quan trọng của phương pháp giải toán là áp dụng nguyên tắc tương tự. Nếu gặp rắc rối với một bài toán, ta có thể thử giải một bài toán tương tự nhưng đơn giản hơn bài toán ban đầu. Ví dụ sau minh họa nguyên tắc này.

VÍ DỤ 1 Nếu x, y, và z là những số dương, chứng tỏ rằng

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \ge 8$$

GIẢI Nếu giải trực tiếp bài này có thể là khó. (Một số học viên tấn công bằng cách khai triển tử số, khiến tình hình càng rối rắm.) Ta thử giải một bài toán tương tự, nhưng đơn giản hơn. Khi bài toán liên quan đến một vài biến số, bạn hãy nghĩ đến bài toán tương tự với số biến ít hơn. Với bài toán này ta thử giải bài toán tương tự với một biến mà thôi, tức là chứng minh bất đẳng thức

1 $$\frac{x^2+1}{x} \ge 2 \quad \text{với } x > 0$$

Thật vậy, nếu ta có thể chứng minh (1), thế thì bất đẳng thức đã cho có thể chứng minh như sau

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) \ge 2\,.\,2\,.\,2 = 8$$

Chìa khóa để chứng minh (1) là xem nó như bài toán tìm giá trị nhỏ nhất. Nếu ta đặt

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

thì f ‘(x) = 1 – 1/x^2 , và do đó f ‘(x) = 0 khi x = 1. Hơn nữa f ‘(x) < 0 khi 0 < x < 1 và f ‘(x) > 0 khi x > 1 , nên f nhận giá trị nhỏ nhất là f(1) = 2. Điều này có nghĩa

$$\frac{x^2+1}{x} \ge 2 \quad \text{với mọi } x > 0$$

và như đã phân tích ở trên, bất đẳng thức cần chứng minh được suy ra từ phép nhân các bất đẳng thức dương cùng chiều.

Bất đẳng thức (1) có thể chứng minh bằng đại số. Thật vậy, vì x > 0, ta có

$$\frac{x^2+1}{x} \ge 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \ge 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$$

Bởi vì bất đẳng thức cuối cùng là đúng, nên bất đẳng thức đầu tiên cũng đúng.

Nhìn lại bài này, ta rút ra hai điều sau:

o Đôi khi ta có thể giải được một bài toán liên quan đến nhiều biến bằng cách giải trước một bài toán tương tự đơn giản hơn chỉ chứa một biến.

o Khi giải một bất đẳng thức, đôi khi có ích khi nhìn bài toán dưới dạng tìm cực trị hàm số.

Hãy thử giải các ví dụ ở trang sau trước khi xem lời giải.

BÀI TẬP

1. Nếu một hình chữ nhật có đáy trên trục hoành và hai đỉnh còn lại trên đồ thị $y = e^{-x^2}$, chứng tỏ rằng hình chữ nhật có diện tích lớn nhất khi hai đỉnh đó là điểm uốn của đồ thị.

2. Chứng tỏ rằng $|\sin x - \cos x| \leq 2$ với mọi x.

3. Chứng tỏ rằng, với mọi giá trị dương của x và y,

$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geq e^2$$

4. Chứng tỏ rằng $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leq 16$ với mọi x, y sao cho $|x| \leq 2$ và $|y| \leq 2$.

5. Nếu a, b, c, và d là hằng số sao cho

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \sin bx + \sin cx + \sin dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

tìm giá trị tổng a + b + c + d.

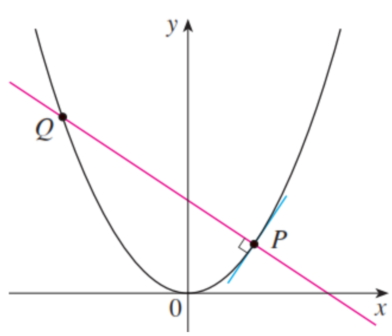
6. Tìm trên parabol $y = 1 - x^2$ điểm mà tiếp tuyến tại đó tạo với góc phần tư thứ nhất một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

7. Tìm điểm thấp nhất và cao nhất trên đường cong

$$x^2 + xy + y^2 = 12$$

8. Vẽ tập hợp những điểm (x, y) sao cho $|x + y| \leq e^x$.

9. Nếu $P(a, a^2)$ là điểm bất kỳ trên parabol $y = x^2$, trừ điểm gốc, pháp tuyến tại M lại cắt parabol tại Q. Chứng tỏ rằng đoạn PQ có độ dài nhỏ nhất khi $a = 1/\sqrt{2}$. (xem hình)



10. Với những giá trị nào của c đường cong $y = cx^3 + e^x$ có điểm uốn?

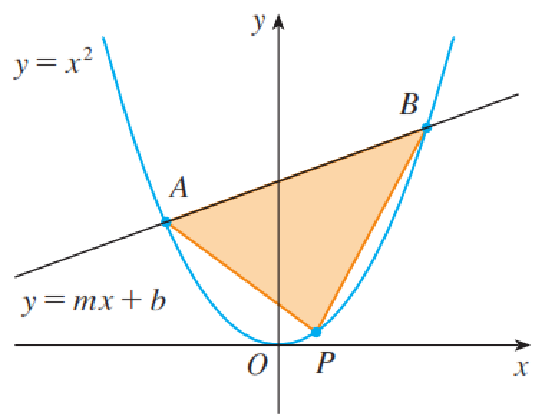
11. Xác định những giá trị của a sao cho hàm số f không có điểm tới hạn.

$$f(x) = (a^2 + a - 6)\cos 2x + (a - 2)x + \cos 1$$

12. Vẽ miền gồm tất cả những điểm (x, y) sao cho

$$2xy \leq |x - y| \leq x^2 + y^2$$

13. Đường thẳng y = mx + b cắt parabol $y = x^2$ tại A và B (xem hình). Tìm điểm P trên cung AOB của parabol



sao cho diện tích tam giác PAB lớn nhất.

14. ABCD là miếng giấy hình vuông có cạnh 1 m. Một cung phần tư tâm A đi từ B đến D. Gọi E và F là hai điểm trên cạnh AB và AD sao cho khi gấp tờ giấy dọc theo EF thì đỉnh A sẽ nằm trên cung phần tư. Xác định diện tích lớn nhất và nhỏ nhất mà tam giác AEFcó thể có.

15. Với giá trị dương nào của a thì đường cong $y = a^x$ cắt đường thẳng y = x?

16. Với giá trị nào của a thì đẳng thức sau là đúng?

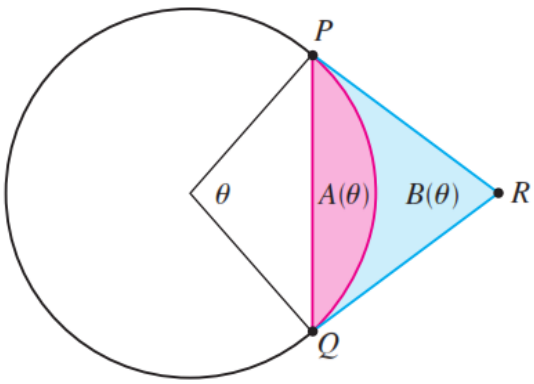
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x = e$$

17. Cho $f(x) = a_1\sin x + a_2\sin 2x + \ldots + a_n\sin nx$, trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực và n là số nguyên dương. Nếu cho biết $|f(x)| \le |\sin x|$ với mọi x, chứng tỏ rằng

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \le 1$$

18. Một cung PQ của một đường tròn trương góc ở tâm θ như trong hình. Gọi A(θ) là diện tích của phần giữa cung PQ và dây PQ. Gọi B(θ) là diện tích của phần giữa các tiếp tuyến PR, QR, và cung. Tìm

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

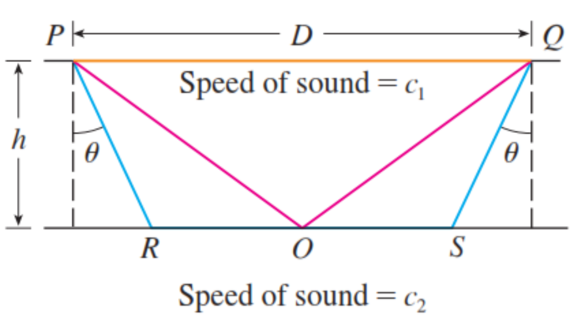


19. Tốc độ âm thanh c_1 trong tầng trên và c_2 trong tầng dưới của khối đá và bề dày h của tầng trên có thể xác định được bằng phương pháp sau đây nếu tốc độ c_2 lớn hơn c_1. Người ta cho nổ một khối thuốc nổ tại điểm P và các tín hiệu truyền đi được ghi lại tại điểm Q cách P một khoảng D. Tín hiệu đầu tiên đến Q đi theo mặt trên mất T_1 giây. Tín hiệu sau đi từ P đến R, rồi từ R đến S ở bề mặt tầng dưới, rồi đến Q, mất T_2 giây. Tín hiệu thứ ba phản xạ từ tầng dưới tại trung điểm O của RS và mất T_3 giây để đến Q.

(a) Biểu diễn T_1, T_2, và T_3 theo D, h, c_1, c_2, và θ.

(b) Chứng tỏ T_2 nhỏ nhất khi $\sin\theta = c_1/c_2$.

(c) Giả sử D = 1 km, T_1 = 0. 26 s, T_2 = 0.32 s và T_3 = 0.34 s. Tìm c_1, c_2, và h.



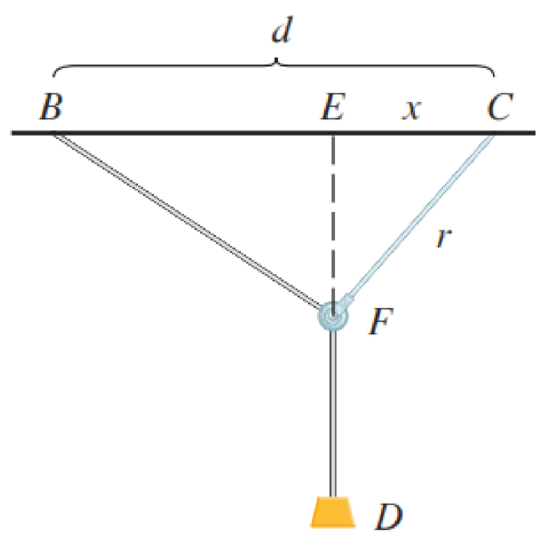
Ghi chú: các nhà địa chất dùng kỹ thuật này khi nghiên cứu cấu tạo của vỏ trái đất để tìm dầu hay khảo sát các vết đứt đoạn địa chất.

20. Với giá trị nào của c tồn tại đường thẳng cắt đường cong $y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$ tại bốn điểm phân biệt?

21. Đây là bài toán do l'Hospital nêu ra trong tác phẩm Analyse des Infiniment Petits (Giải tích những số vô cùng nhỏ) liên quan đến một ròng rọc móc vào trần nhà tại điểm C bằng một sợi dây có độ dài r. Một sợi dây có độ dài l buộc tại điểm B khác trên trần nhà, cách C một khoảng d (d > r), và đi qua ròng rọc tại F và nối với một khối lượng W. Buông khối lượng W và nó đạt vị trí cân bằng D. L'Hospital cho rằng điều này xảy ra khi khoảng cách | ED | lớn nhất. Chứng tỏ rằng khi hệ thống cân bằng, giá trị của x là

$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

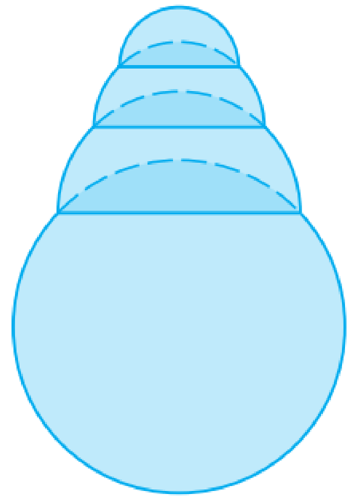
Chú ý là biểu thức này độc lập với cả W lẫn l.



22. Cho hình cầu bán kính r, tìm chiều cao của hình chóp có thể tích nhỏ nhất có đáy là hình vuông và và đáy và bốn mặt bên đều tiếp xúc với hình cầu. Kết quả thế nào nếu đáy là đa giác đều có n cạnh?

23. Giả sử một quả cầu tuyết tan chảy sao cho thể tích của nó giảm với tốc độ tỷ lệ với diện tích mặt ngoài. Nếu phải mất ba giờ quả cầu mới mất đi nửa thể tích ban đầu, thế thì phải bao lâu nữa quả cầu mới tan chảy hết.

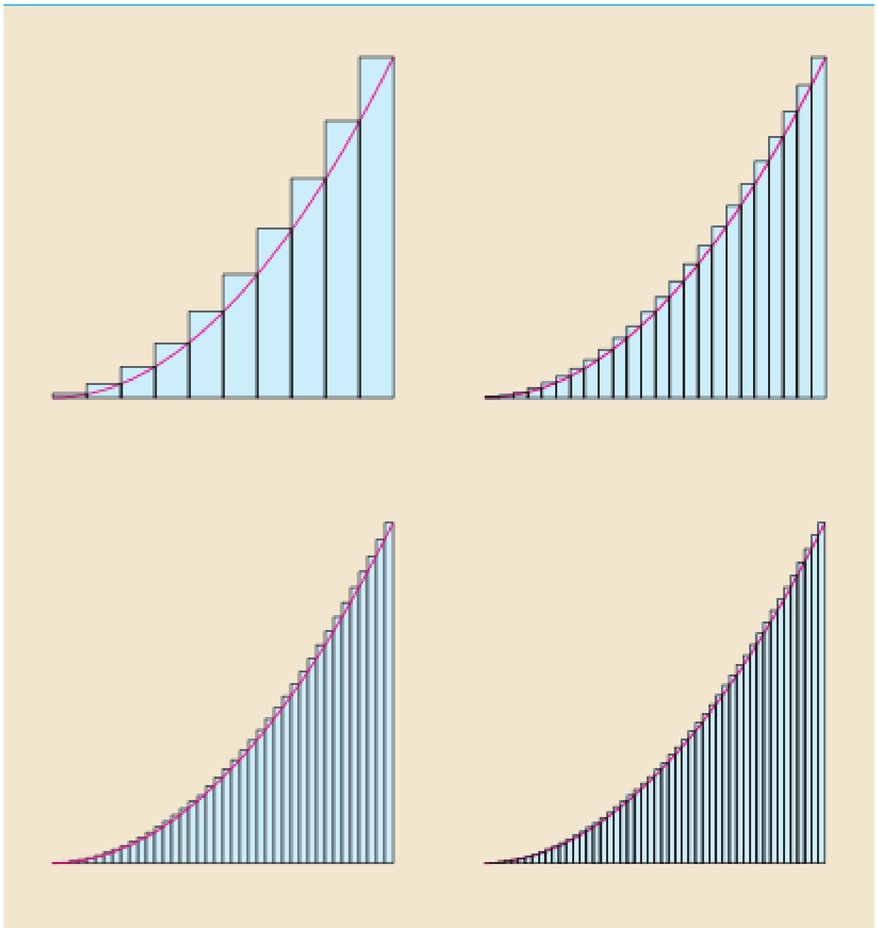
24. Một bán cầu bong bóng nước được đặt trên một quả cầu bong bóng nước có bán kính 1. Một bán cầu bong bóng nước nhỏ hơn lại được đặt tiếp lên bán cầu đầu tiên. Tiến trình này được lặp lại cho đến khi có n tầng, kể cả quả cầu ở dưới cùng. (Hình cho thấy trường hợp n = 4). Dùng nguyên lý quy nạp để chứng tỏ rằng chiều cao tối đa của bất kỳ tháp bong bóng nào có n tầng là $1 + \sqrt{n}$.



ĐÁP SỐ

5. 24 **7.** $(-2, 4), (2, -4)$ **11.** $-3.5 < a < -2.5$
13. $(m/2, m^2/4)$ **15.** $a \leqslant e^{1/e}$
19. (a) $T_1 = D/c_1$, $T_2 = (2h \sec\theta)/c_1 + (D - 2h \tan\theta)/c_2$, $T_3 = \sqrt{4h^2 + D^2}/c_1$
(c) $c_1 \approx 3.85$ km/s, $c_2 \approx 7.66$ km/s, $h \approx 0.42$ km
23. $3/(\sqrt[3]{2} - 1) \approx 11\frac{1}{2}$ h

CHƯƠNG 5 TÍCH PHÂN



5.1. Diện Tích & Quãng Đường……………………………396
5.2. Tích Phân Xác Định……………………………………407
5.3. Định Lý Nền Tảng Của Giải Tích……………………421
5.4. Tích Phân Bất Định & Biến Thiên Thực Sự……433
5.5. Phương Pháp Đổi Biến………………………………443
ÔN CUỐI CHƯƠNG………………………………………452
BÀI TẬP LÀM THÊM………………………………………456

Trần Quang Nghĩa dịch

BÀI 5.1. DIỆN TÍCH VÀ QUÃNG ĐƯỜNG

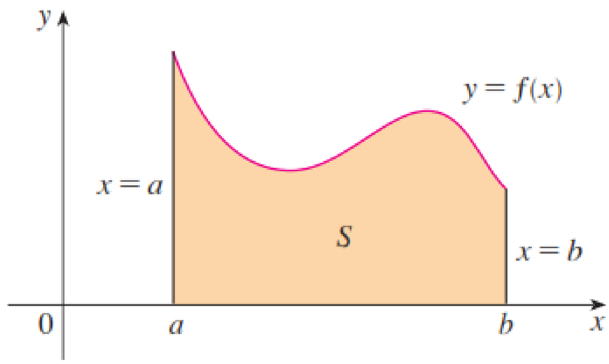
Trong bài này ta sẽ phát hiện ra rằng trong khi nổ lực tìm diện tích nằm bên dưới một đường cong hay quang đường mà một ô tô đi được, cuối cùng ta cũng đều chạm trán với cùng một dạng giới hạn.

BÀI TOÁN DIÊN TÍCH

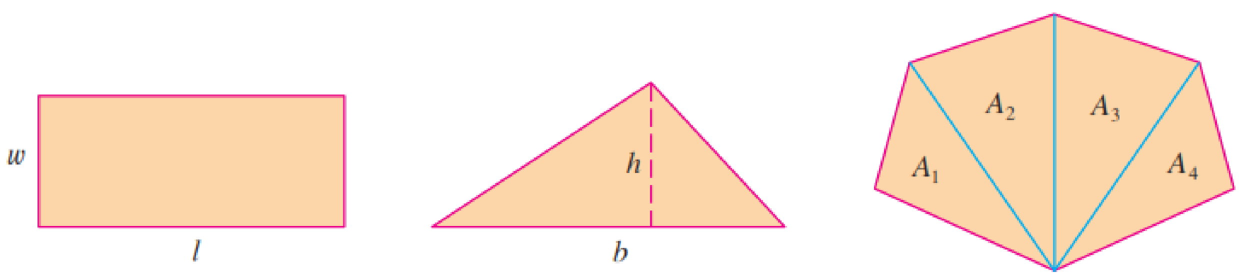
Ta bắt đầu băng cách thử giải bài toán diện tích. Tìm diện tích của miền S nằm bên dưới đường cong y = f(x) từ a đến b. Điều này có nghĩa là S, như minh họa trong Hình 1, được bao bọc bởi đồ thị một hàm số liên tục f [với f(x) ≥ 0], đường thẳng thẳng đứng x = a và x = b, và trục x.

HÌNH 1

S = {(x, y) | a ≤ x ≤ b, 0 ≤ y ≤ f(x)}



Trong nổ lực giải bài toán này ta tự hỏi: Thuật ngữ diện tích có nghĩa là gì? Câu hỏi này sẽ dễ dàng đối với những miền giới hạn bằng những đoạn thẳng. Chẳng hạn, diện tích hình chữ nhật được định nghĩa là tích chiều dài và chiều rộng, diện tích tam giác là nửa tích cạnh đáy và chiều cao. Diện tích của đa giác được tính bằng cách cộng tất cả diện tích các tam giác tạo nên nó (Hình 2).



$A = lw$ **HÌNH 2** $A = \frac{1}{2}bh$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

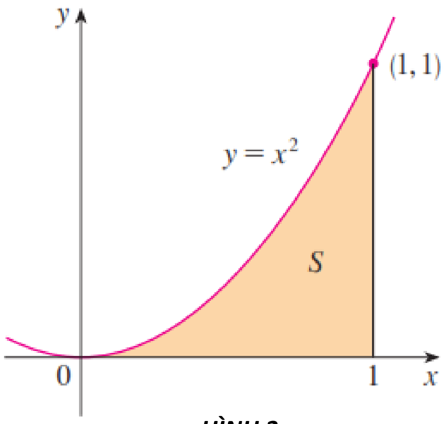
Tuy nhiên, thật không dễ khi tính diện tích của một miền giới hạn bởi các đoạn cong. Tất cả chúng ta đều có một khái niệm trực giác về diện tích của một miền. Nhưng bài toán diện tích yêu cầu ta biến từ khái niệm trực giác thành những định nghĩa chính xác về diện tích.

Nhớ lại trong việc định nghĩa một tiếp tuyến trước tiên ta xấp xỉ độ dốc của tiếp tuyến bằng độ dốc của những cát tuyến rồi sau đó ta lấy giới hạn những xấp xỉ này. Ta sẽ tiếp tục theo đuổi cùng một ý tưởng như vậy đối với diện tích. Đầu tiên ta xấp xỉ miền S bằng những hình chữ nhật và sau đó ta lấy giới hạn của tổng diện tích caz1ch hình chữ nhật này khi ta tăng số hình chữ nhật lên vô hạn. Ví dụ sau sẽ minh họa tiến trình đó.

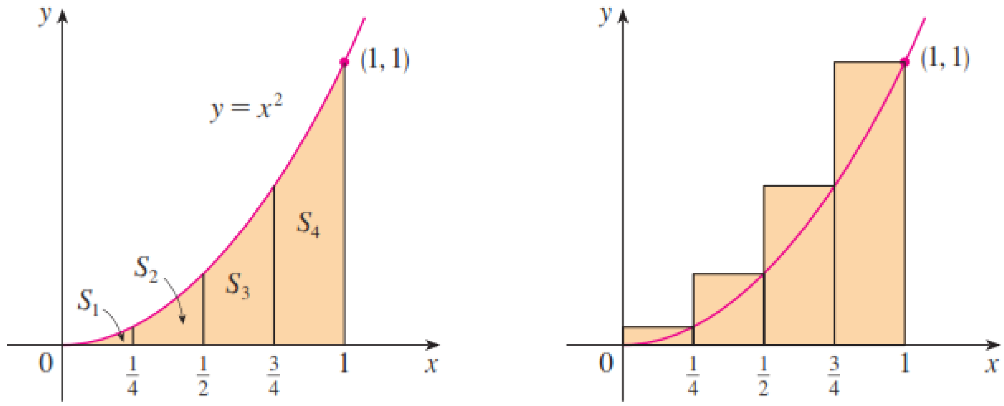
VÍ DỤ 1 Dùng những hình chữ nhật để ước tính diện tích bên dưới parabol $y = x^2$ từ 0 đến 1 (miền S mô tả trong Hình 3)

GIẢI Trước tiên ta chú ý là diện tích của S phải đâu đó trong khoảng giữa 0 và 1 vì S nằm bên trong hình vuông cạnh đơn vị, nhưng ta có thể làm tốt hơn thế.

Giả sử ta phân chia S thành bốn miếng S_1, S_2, S_3, và S_4 bằng những đường thẳng x = ¼, x = ½, và x = ¼ như trong Hình 4(a).



HÌNH 3



(a) **HÌNH 4** (b)

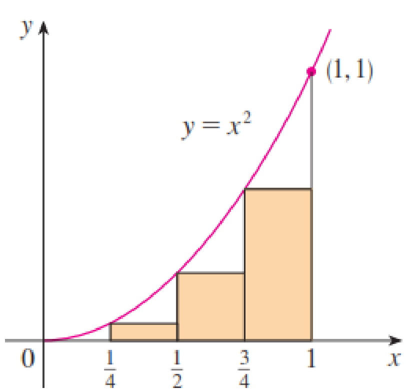
Ta có thể tính diện tích xấp xỉ của mỗi miếng bằng diện tích của hình chữ nhật có cùng chiều rộng với miếng cắt và có chiều cao bằng cạnh bờ phải của miếng cắt [xem Hình 4(b)]. Nói cách khác, chiều cao của những hình chữ nhật này là giá trị của $f(x) = x^2$ tại những điểm mút của phân đoạn [0, ¼], [¼, ½], [½ , ¾], và [¾, 1].

Mỗi hình chữ nhật có chiều rộng ¼ và chiều cao lần lượt là $(1/4)^2$, $(1/2)^2$, $(3/4)^2$ và 1^2. Nếu ta đặt R_4 là tổng các diện tích các hình chữ nhật này, ta được

$$R_4 = ¼.\ (1/4)^2 + ¼.(1/2)^2 + ¼.\ (3/4)^2 + ¼\ (1)^2 = 15/32 = 0.46875$$

Từ Hình 4(b) ta thấy là diện tích A của S nhỏ hơn R_4, do đó

$$A < 0.46875$$



HÌNH 5

Thay vì dùng những hình chữ nhật như trong Hình 4(b) ta có thể dùng những hình chữ nhật nhỏ hơn như trong Hình 5 mà chiều cao của nó bằng giá trị của f tại đầu mút bên trái. (hình chữ nhật tận cùng bên trái đatại đầu mút bên trái. (hình chữ nhật tận cùng bên trái đã suy biến thành đoạn thẳng vì chiều cao của nó bằng 0.) Tổng diện tích của những hình chữ nhật này là

$$L_4 = ¼.\ (0)^2 + ¼.(1/4)^2 + ¼.\ (1/2)^2 + ¼\ (3/4)^2 = 7/32 = 0.21875$$

Ta thấy rằng diện tích của S thì lớn hơn L_4, do đó ta có giá trị gần đúng hơn và kém cho A:

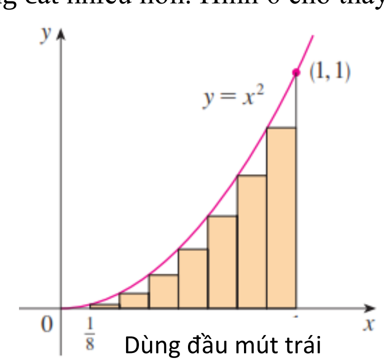
$$0.21875 < A < 0.46875$$

Ta có thể lặp lại tiến trình này với số miếng cắt nhiều hơn. Hình 6 cho thấy điều gì xảy ra khi ta phân chia miền S thành tám miếng cắt bằng nhau.

Bằng cách tính tổng diện tích các hình chữ nhật nhỏ hơn (L_8) và tổng diện tích các hình chữ nhật lớn hơn (R_8), ta được giá trị gần đúng hơn kém tốt hơn của A:

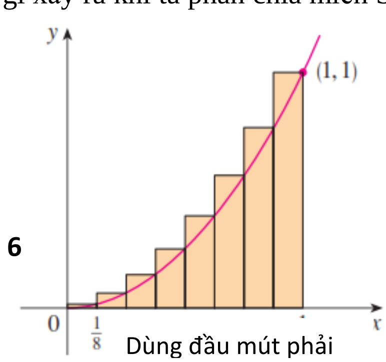
$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

Và bây giờ ta có thể nói diện tích thực sự của S nằm đâu đó giữa 0.2734375 và 0.3984375.



(a) Using left endpoints

HÌNH 6



(b) Using right endpoints

Ta có thể tìm được những ước tính gần

đúng tốt hơn bằng cách tăng số miếng cắt. Bảng bên phải cho thấy kết quả những phép tính tương tự (bằng máy tính) dùng n hình chữ nhật mà chiều cao ứng với đầu mút trái (L_n) hay đầu mút bên phải (R_n). Đặc biệt, ta thấy với 50 miếng cắt diện tích nằm giữa 0.3234 và 0.3434. Với 1000 miếng cắt ta càng thu hẹp khoảng cách: A nằm giữa 0.3328335 và 0.3338335. Ước tính khá tốt là lấy
trung bình hai số này và được A » 0.3333335.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Từ những giá trị trong bảng ở Ví dụ 1, có vẻ như là nếu R_n tiến đến số 1/3 khi n tăng vô hạn. Ta khẳng định điều
này trong ví dụ sau.

VÍ DỤ 2 Với miền S trong Ví dụ 1, chứng tỏ rằng tổng diện tích các hình chữ nhật trên tiến đến 1/3, nghĩa là,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

GIẢI R_n là tổng diện tích của n hình chữ nhật trong Hình 7. Mỗi hình chữ nhật có chiều rộng 1/n và chiều cao là những giá trị của hàm số $f(x) = x^2$ tại những đầu mút 1/n, 2/n, 3/n, . . . , n/n; nghĩa là, chiều cao lần lượt là $(1/n)^2$, $(2/n)^2$, $(3/n)^2$. . . . , $(n/n)^2$. Như vậy

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}.\frac{1}{n^2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}\ (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) \end{aligned}$$

Đến đây ta cần một công thức tính tổng bình phương n số nguyên đầu tiên:

1 $$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Chắc hẳn bạn đã quen biết công thức này rồi. Nếu chưa, bạn có thể dễ dàng chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Áp dụng Công thức 1 này vào biểu thức của R_n, ta được

$$R_n = \frac{1}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Do đó ta có

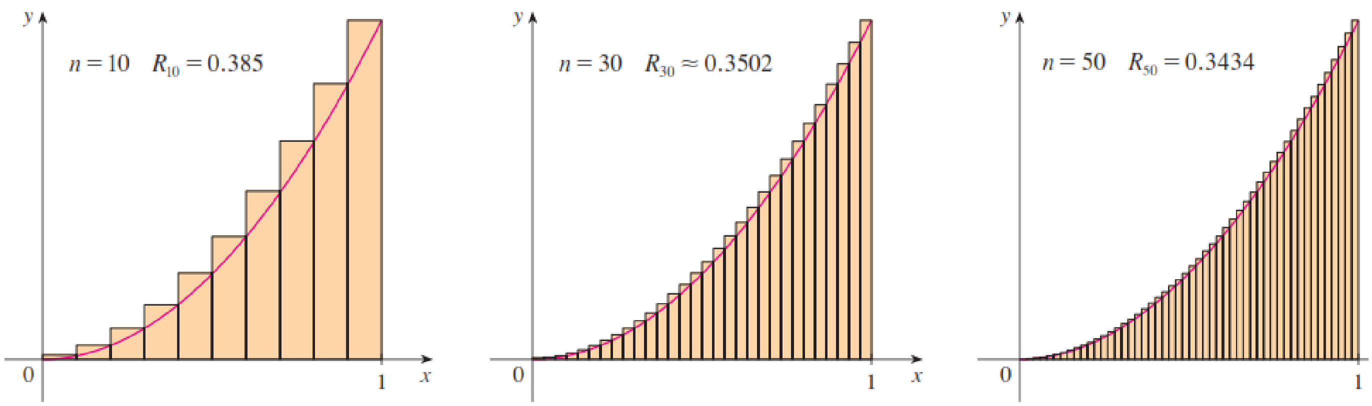
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}.1.2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Có thể chứng minh tương tự giới hạn của tổng diện tích dưới cũng tiến tới 1/3, nghĩa là.

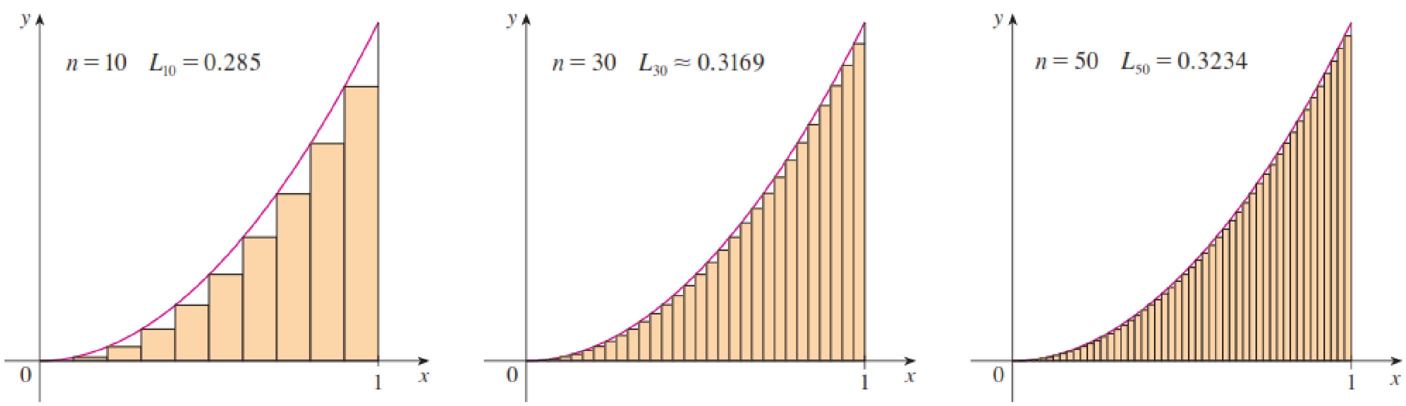
$$\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Từ Hình 8 và 9 ta thấy khi n càng tăng lên, thì cả L_n và R_n đều trở thành những giá trị xấp xỉ càng tốt hơn của diện tích miền S. Do đó, ta định nghĩa diện tích A là giới hạn của tổng diện tích các hình chữ nhật xấp xỉ, nghĩa là,

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

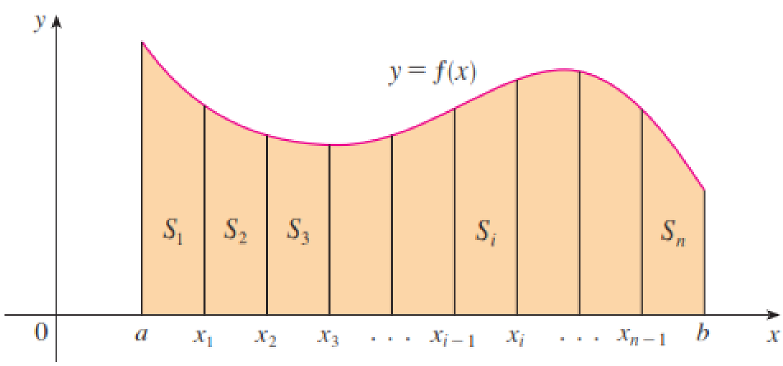


HÌNH 8



HÌNH 9

Hãy vận dụng ý tưởng của Ví dụ 1 và 2 cho miền S tổng quát hơn như trong Hình 1. Ta bắt đầu phân chia S thành những miếng S_1, S_2, . . . , S_n có chiều rộng bằng nhau như trong Hình 10.



HÌNH 10

Chiều rộng của đoạn [a, b] là b - a, do đó chiều rộng của mỗi miếng cắt là

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Những miếng này chia đoạn [a, b] thành n phân đoạn

$$[x_o, x_1], \ [x_1, x_2], \ [x_2, x_3], \ . \ . \ . \ , [x_{n-1}, x_n]$$

trong đó $x_o = a$ và $x_n = b$. Những đầu mút phải của phân đoạn là

$x_1 = a + \Delta x$,

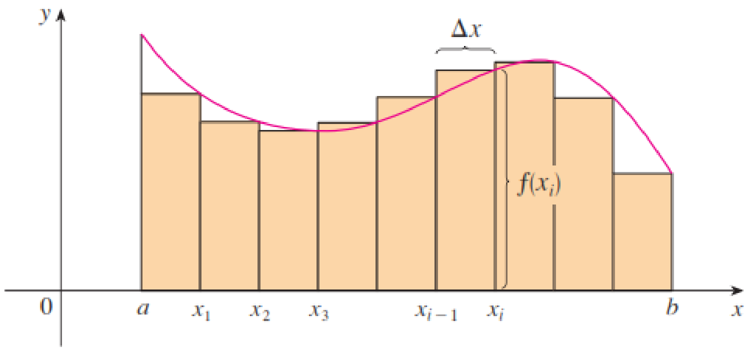
$x_2 = a + 2\Delta x$,

$x_3 = a + 3\Delta x$,

. . .

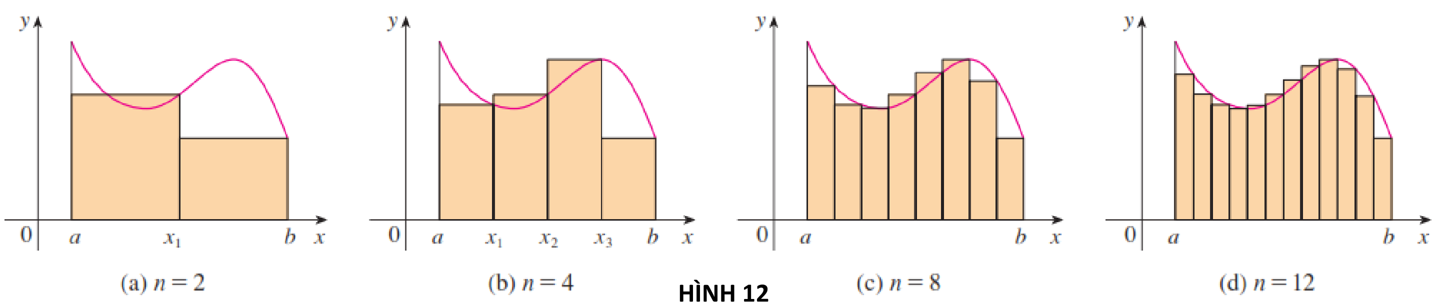
Hãy xấp xỉ miếng cắt thứ i là S_i bằng hình chữ nhật có chiều rộng Δx và chiều cao $f(x_i)$, là giá trị của f tại đầu mút phải (xem Hình 11). Thế thì diện tích của hình chữ nhật thứ i là $f(x_i)\Delta x$. Trực giác mách bảo ta rằng tổng diện tích các hình chữ nhật là giá trị xấp xỉ của diện tích của S, nghĩa là

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$$



HÌNH 11

Hình 12 cho thấy các giá trị xấp xỉ này với n = 2, 4, 8 và 12. Chú ý là xấp xỉ này càng lúc càng tốt hơn khi số n các miếng cắt càng lớn, nghĩa là, khi $n \to \infty$. Do đó ta định nghĩa diện tích A của miền S theo cách sau.



HÌNH 12

2 ĐỊNH NGHĨA **Diện tích** của miền S nằm bên dưới đồ thị của hàm số liên tục f là giới hạn của tổng diện tích hình chữ nhật xấp xỉ:

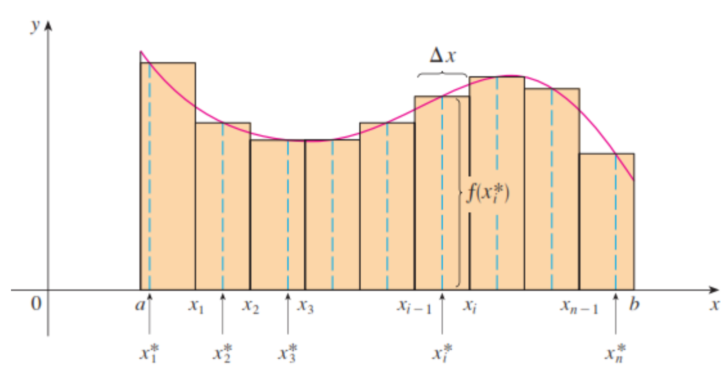
$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x]$$

Có thể chứng tỏ rằng giới hạn trong định nghĩa 2 luôn tồn tại, vì chúng ta giả sử f liên tục. Cũng có thể chứng tỏ rằng ta được cùng một giới hạn khi sử dùng các đầumút trái:

3 $$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x]$$

Thật ra, thay vì dùng các đầu mút trái hay phải, ta có thể lấy chiều cao các hình chữ nhật thứ i là giá trị của f tại bất kỳ số x_i^* trong phân đoạn $[x_{i-1}, x_i]$. Ta gọi những số $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ là những **điểm mẫu**. Hình 13 cho thấy những hình chữ nhật xấp xỉ khi những điểm mẫu không phải là những đầu mút. Do đó một biểu thức tổng quát hơn cho định nghĩa của diện tích S là

4 $$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\Delta x]$$



HÌNH 13

Ta thường dùng ký hiệu sigma (Σ) để viết tổng các số hạng một cách chặc chẽ hơn, chẳng hạn

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ . \ . \ . \ + f(x_n)\Delta x$$

Như vậy biểu thức của diện tích A trong Phương trình 2, 3, 4 có thể được viết lại như sau:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Ta cũng có thể viết lại Công thức 1 theo cách sau:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2x+1)}{6}$$

VÍ DỤ 3 Cho A là diện tích của miền nằm dưới đồ thị $f(x) = e^{-x}$ giữa x = 0 và x = 2.

(a) Dùng đầu mút phải, tìm biểu thức của A như một giới hạn. Không tính giới hạn.

(b) Ước tính diện tích bằng cách dùng các điểm mẫu là trung điểm các phân đoạn, bắt đầu bằng 4, rồi sau đó 10 phân đoạn.

GIẢI

(a) Vì a = 0 và b = 2, chiều rộng của phân đoạn là

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Do đó $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$, và $x_n = 2n/n$. Tổng diện tích các hình chữ nhật xấp xỉ là

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\ \Delta x + . \ . \ . \ + f(x_n)\ \Delta x \\ &= e^{-x1}\Delta x + e^{-x2}\Delta x + . . . + e^{-xn}\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + . . . + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

Theo định nghĩa 2, diện tích là

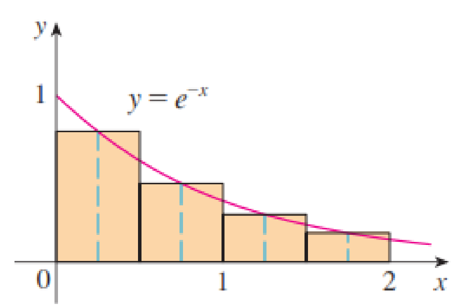
$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + \ldots + e^{-2n/n}\right)$$

Dùng ký hiệu sigma ta có thể viết

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

Nếu tính giới hạn này trực tiếp thì quá khó, nhưng với một máy tính bỏ túi thì không khó (xem Bài tập 24). Trong Bài 5.3 ta sẽ tìm A dễ dàng hơn bằng một phương pháp khác.

(b) Với n = 4 chiều rộng của hình chữ nhật là Δx = 0.5, và các phân đoạn là [0, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5], và [1.5, 2]. Các trung điểm của những phân đoạn này là $x_1^* = 0.25$, $x_2^* = 0.75$, $x_3^* = 1.25$, và $x_4^* = 1.75$, và tổng những diện tích bốn hình chữ nhật xấp xỉ (xem Hình 14)



HÌNH 14

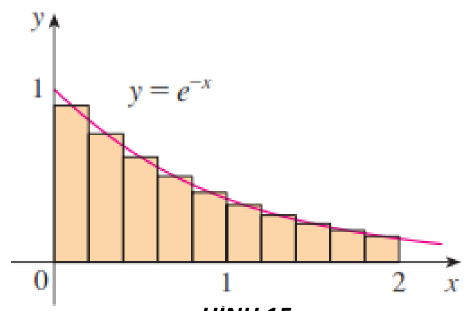
$$M_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\Delta x$$
$$= f(0.25)\Delta x + f(0.75)\Delta x + f(1.25)\Delta x + f(1.75)\Delta x$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}\right) \approx 0.8557$$

Vậy một giá trị gần đúng của diện tích là A ≈ 0.8557

Với n = 10 chiều rộng của hình chữ nhật là Δx = 0.2, và các phân đoạn là [0, 0.2], [0.2, 0.4], . . . , [1.8, 2]. Các trung điểm của những phân đoạn này là $x_1^* = 0.1$, $x_2^* = 0.3$, $x_3^* = 0.5$, . . . , $x_{10}^* = 1.9$, và

$$A \approx M_{10} = f(0.1)\Delta x + f(0.3)\Delta x + f(0.5)\Delta x + \ldots + f(1.9)\Delta x$$
$$= 0.2\left(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + e^{-1.9}\right) \approx 0.8632$$

Từ Hình 15 ta thấy giá trị gần đúng này tốt hơn giá trị ứng với n = 4.



HÌNH 15

BÀI TOÁN QUÃNG ĐƯỜNG

Giờ ta hãy xét bài toán quãng đường: Tìm quãng đường một động tử đi được trong một khoảng thời gian nào đó biết vận tốc của động tử ấy ở mọi lúc. (Đúng nghĩa thì đây là bài toán ngược của bài toán vận tốc mà ta đã đề cập trong Bài 2.1.) Nếu vận tốc luôn không đổi, thì bài toán quãng đường dễ giải quyết do công thức

Quãng đường = vận tốc x thời gian đi

Nhưng nếu vận tốc thay đổi, thì đây không phải là một bài toán dễ dàng. Ta sẽ khảo sát bài toán qua ví dụ dưới đây.

VÍ DỤ 4 Giả sử đồng hồ công tơ mét (chỉ độ dài quảng đường đi) trên ô tô của chúng ta bị hư và ta muốn ước tính độ dài của quảng đường đi được trong khoảng thời gian 30 giây. Ta đọc số liệu trên đồng hồ vận tốc mỗi năm giây và ghi lại trong bảng sau:

Thời gian (s)	0	5	10	15	20	25	30
Vận tốc (dặm/h)	17	21	24	29	32	31	28

Để đơn vị thời gian và vận tốc tương thích, ta đổi đơn vị vận tốc ra bộ trên giây (ft/s) : 1 dặm/h = 5280/3600 ft/s):

Thời gian (s)	0	5	10	15	20	25	30
Vận tốc (ft/s)	25	31	35	43	47	46	41

Trong năm giây đầu tiên vận tốc vận tốc không thay đổi nhiều, vì thế ta có thể ước tính quảng đường đi được trong thời gian đó với giả sử vận tốc không đổi suốt khoảng thời gian đó và bằng với vận tốc ban đầu (25 ft/s), và ta được quảng đường đi trong năm giây đầu tiên là:

25 ft/s x 5 s = 125 ft

Tương tự, trong khoảng năm giây sau vận tốc cũng gần như không đổi, và ta chọn vận tốc trong khoảng thời gian đó là vận tốc khi t = 5 s. Và như thế ta ước tính được quảng đường đi thứ hai là

31 ft/s x 5 s = 155 ft

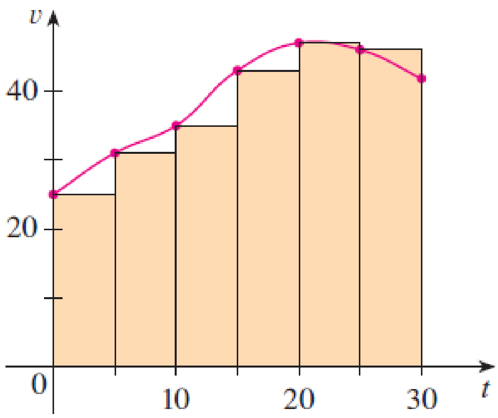
Với ba quảng còn lại ta cũng tính tương tự, cuối cùng ta được quảng đường đi trong 30 giây là:

(25 x 5) + (31 x 5) + (35 x 5) + (43 x 5) + (47 x 5) + (46 x 5) = 1135 ft

Cũng thế, thay vì chọn vận tốc tại đầu khoảng thời gian làm vận tốc không đổi cho khoảng ấy, ta chọn vận tốc tại cuối khoảng thời gian đó. Thế thì ước tính quảng đường đi được bây giờ là:

(31 x 5) + (35 x 5) + (43 x 5) + (47 x 5) + (46 x 5) + (41 x 5) = 1215 ft

Nếu muốn kết quả có độ chính xác cao hơn ta có thể đọc và ghi lại vận tốc mỗi hai giây, hay thậm chí mỗi giây thay vì năm giây.



HÌNH 16

Có lẽ phép tính trong Ví dụ 4 làm bạn nhớ lại tổng mà ta đã sử dụng trong bài toán ước tính diện tích. Sự tương tự sẽ hiển lộ ngay nếu ta vẽ một đồ thị của hàm số vận tốc của ô tô trong Hình 16 và vẽ những hình chữ nhật có chiều cao là những vận tốc đầu của mỗi khoảng thời gian. Diện tích hình chữ nhật đầu tiên là 25 x 5 = 125, có thể coi như là độ dài quãng đường đi trong năm giây đầu tiên. Thật ra, diện tích của mỗi hình chữ nhật có thể xem như quãng đường vì chiều cao biểu thị vận tốc và chiều rộng biểu thị khoảng thời gian đi. Tổng diện tích các hình chữ nhật trong Hình 16 là L_6 = 1135, chính là giá trị gần đúng của quãng đường đi được mà ta đã tính.

Tổng quát, giả sử một vật thể chuyển động với vận tốc v = f(t), với a ≤ t ≤ b và f(t) ≥ 0 (như vậy vật thể sẽ luôn chuyển động theo chiều dương). Ta ghi lại những vận tốc tại những thời điểm t_o (= a), t_1, t_2, ... , t_n (= b) sao cho vận tốc xấp xỉ không đổi trên mỗi phân đoạn. Nếu những khoảng thời gian đều bằng nhau, thế thì thời gian giữa hai lần ghi vận tốc liên tiếp là Δt = (b – a)/n. Trong khoảng thời gian đầu tiên vận tốc xấp xỉ bằng $f(t_o)$ và do đó quãng đường đi được xấp xỉ bằng $f(t_o)$ Δt. Tương tự, quãng đường đi được trong khoảng thời gian thứ hai xấp xỉ bằng $f(t_1)$ Δt và tổng quãng đường đi được trong khoảng thời gian [a, b] xấp xỉ bằng

$$f(t_o)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \ldots\ldots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

Nếu ta dùng vận tốc tại những điểm mút bên trái thay vì phải, giá trị xấp xỉ của tổng quãng đường bây giờ là

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \ldots\ldots + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Ta càng đo vận tốc nhiều lần hơn, quãng đường đi ước tính càng chính xác hơn, do đó thật là hợp lý khi nói rằng độ dài chính xác của quãng đường d đi được là giới hạn của biểu thức:

5 $$d = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

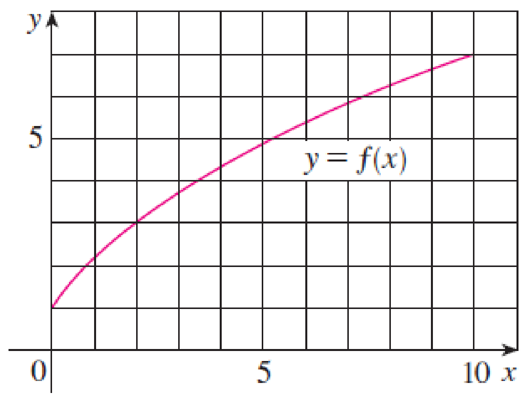
Ta sẽ thấy trong Bài 5.4 là điều này thật ra là đúng.

Vì Phương trình 5 có cùng dạng như biểu thức diện tích trong Phương trình 2 và 3, suy ra là quãng đường đi được thì bằng diện tích bên dưới đồ thị của hàm số vận tốc. Trong Chương 6 và 8 ta sẽ thấy là nhiều đại lượng lý thú khác trong khoa học tự nhiên và xã hội – chẳng hạn công tạo bởi một lực biến thiên hay công đập của tim – cũng có thể coi như diện tích bên dưới một đường cong. Vì thế khi ta tính diện tích trong chương này, hạy nhớ là thật ra nó biểu thị cho rất nhiều đại lượng thực tế.

BÀI TẬP

1.(a) Bằng cách đọc những giá trị trong đồ thị cho trước f, dùng năm hình chữ nhật để tìm giá trị gần đúng thiếu và giá trị gần đúng dư của diện tích bên dưới đồ thị của f từ x = 0 đến x = 10. Trong mỗi trường hợp vẽ các hình chữ nhật mà bạn sử dụng.

(b) Tìm những giá trị gần đúng mới dùng mười hình chữ nhật trong mỗi trường hợp.



2. (a) Dùng sáu hình chữ nhật để ước tính diện tích bên dưới đồ thị cho trước của hàm số f từ x = 0 đến x = 12 bằng mỗi trong các cách sau

(i) L_6 (điểm mẫu là đầu mút trái)

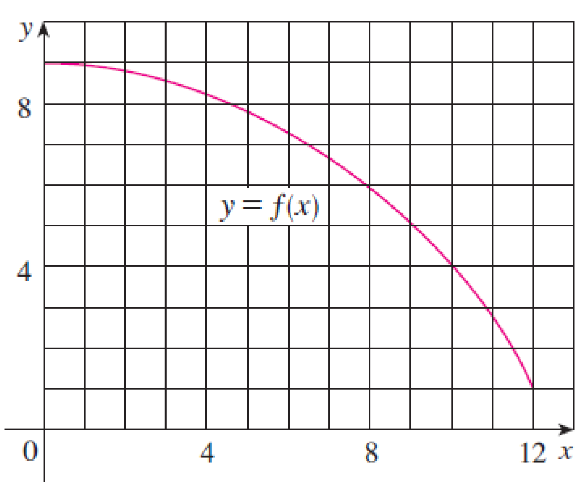
(ii) R_6 (điểm mẫu là đầu mút phải)

(iii) M_6 (điểm mẫu là trung điểm)

(b) L_6 là giá trị gần đúng thiếu hay dư của diện tích thực sự?

(c) R_6 là giá trị gần đúng thiếu hay dư của diện tích thực sự?

(d) Số nào trong ba số trên là giá trị gần đúng tốt nhất? Giải thích.



3. (a) Ước tính diện tích bên dưới đồ thị f(x) = cos x từ x = 0 đến x= π/2 dùng bốn hình chữ nhật và các đầu mút phải. Vẽ đồ thị và các hình chữ nhật ấy. Giá trị gần đúng bạn tìm dư hay thiếu?

(b) Lặp lại phần (a) với các đầu mút trái.

4. (a) Ước tính diện tích bện dưới đồ thị f(x) = $\sqrt{x}$ từ x = 0 đến x = 4 dùng bốn hình chữ nhật và các đầu mút phải. Vẽ đồ thị và các hình chữ nhật ấy. Giá trị gần đúng bạn tìm dư hay thiếu?

(b) Lặp lại phần (a) với các đầu mút trái.

5. (a) Ước tính diện tích bện dưới đồ thị f(x) = 1 + x^2 từ x = - 1 đến x = 2 dùng ba hình chữ nhật và các đầu mút phải. Rồi tìm một ước tính tốt hơn với sáu hình chữ nhật Vẽ đồ thị và các hình chữ nhật ấy.

(b) Lặp lại phần (a) với các đầu mút trái.

(c) Lặp lại phần (a) với các trung điểm.

(d) Từ các hình vẽ trong phần (a) – (c), cho biết ước tính nào tốt nhất?

6. (a) Vẽ đồ thị (bằng máy tính) hàm số f(x) = e^{-x^2} , $-2 \le x \le 2$.

(b) Ước tính diện tích bện dưới đồ thị f dùng bốn hình chữ nhật và các điểm mẫu là

(i) các đầu mút phải.

(ii) các trung điểm. Trong mỗi trường hợp vẽ đồ thị và các hình chữ nhật ấy.

(c) Tìm một ước tính tốt hơn trong phần (b) bằng cách dùng 8 hình chữ nhật.

7-8. Dùng máy tính có lập trình để tính tổng diện tích các hình chữ nhật xấp xỉ bằng những phân đoạn và dùng các đầu mút phải với n = 10, 30, 50, và 100. Rồi đoạn giá trị chính xác của diện tích.

7. Miền dưới đồ thị y = x^4 từ 0 đến 1

8. Miền dưới y = cos x từ 0 đến π/2

9-10. Một số máy tính (như Casio) có chương trình vẽ hình chữ nhật và tính tổng diện tích của chúng, ít nhất với x_i^* là đầu mút trái hay phải. Hãy dùng máy này để giải các bài 9 và 10.

9. (a) Nếu f(x) = 1/(x^2 + 1), $0 \le x \le 1$, tìm tổng trái và phải với n = 10, 30, và 50.

(b) Minh họa bằng cách vẽ các hình chữ nhật trong phần (a).

(c) Chứng tỏ rằng diện tích chính xác nằm giữa 0.780 và 0.791.

10. (a) Nếu f(x) = ln x, 1 ≤ x ≤ 4, tìm tổng trái và phải với n = 10, 30, và 50.

(b) Minh họa bằng cách vẽ các hình chữ nhật trong phần (a).

(c) Chứng tỏ rằng diện tích chính xác nằm giữa 2.50 và 2.59.

11. Vận tốc của một vận động viên chạy bộ tăng đều trong ba giây đầu tiên. Vận tốc của cô được ghi nhận từng nữa giây được cho trong bàng dưới. Tìm ước tính thiếu và dư của độ dài quãng đường chạy trong ba giây.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v (ft/s)	0	6.2	10.8	14.9	18.1	19.4	20.2

12. Vận tốc kế của một mô tô cho thấy những số liệu ghi trong bảng dưới.
(a) Ước tính quãng đường mô tô đi được trong khoảng thời gian này dùng vận tốc tại những đầu mút trái.
(b) Tìm ước tính ứng với đầu mút phải.
(c) Những kết quả bạn tìm trong phân (a) và (b) là giá trị gần đúng dư hay thiếu? Giải thích.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (ft/s)	30	28	25	22	24	27

13. Dầu chảy từ một thùng chứa với tốc độ r(t) lít mỗi giờ. Tốc độ giảm theo thời gian và những giá trị của nó trong khoảng thời gian hai giờ liên tiếp được cho trong bảng dưới. Tìm ước tính thiếu hay dư (dưới và trên) của tổng số lượng dầu thất thoát.

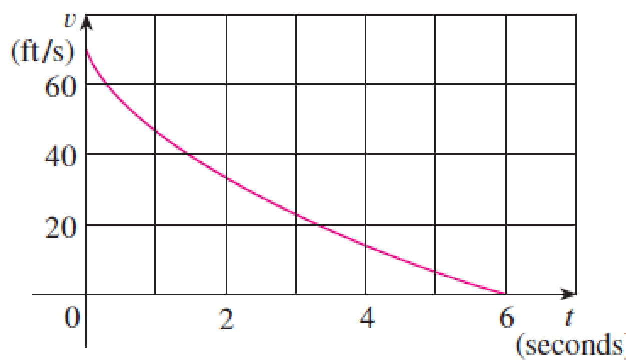
t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

14. Khi ta ước tính những quãng đường từ những dữ liệu vận tốc, nhiều khi ta cần sử dụng những thời điểm t_o, t_1, t_2, t_3, . . . không cách đều nhau. Ta vẫn có thể ước tính được những quãng đường dùng những khoảng thời gian $\Delta t_i = t_i - \mathbf{t_{i-1}}$. Chẳng hạn, vào ngày 7/05/1992, phi thuyền con thoi Endeavour được phóng lên trong sứ mạng STS-49, mục đích của chuyến đi là để lắp một bộ phận cho vệ tinh liên lạc Intelsat. Bảng sau, do NASA cung cấp, ghi lại dữ liệu vận tốc của phi thuyền bắt đầu từ lúc phi thuyền tách khỏi mặt đất cho đến khi động cơ đẩy được tách ra.

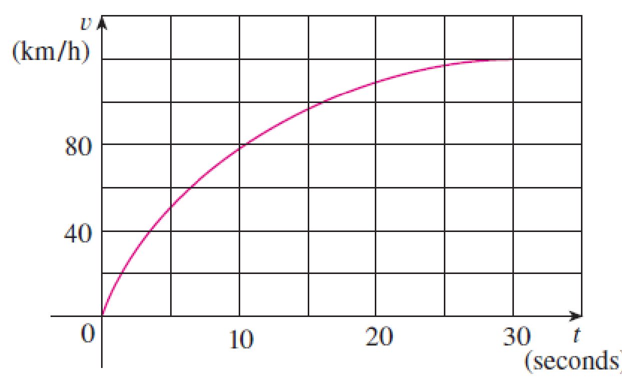
Sự kiện	Thời gian (s)	Vận tốc (ft/s)
Phóng	0	0
Bắt đầu thao tác quay	10	185
Kết thúc thao tác quay	15	319
Tiết lưu đến 89%	20	447
Tiết lưu đến 67%	32	742
Tiết lưu đến 104%	59	1325
Áp động lực tối đa	62	1445
Tách động cơ đẩy	125	4151

Dùng dữ liệu này để ước tính độ cao mà Endeavour lên được 62 giây sau khi rời mặt đất.

15. Đồ thị vận tốc của một ô tô đang thắng được cho trong hình dưới. Dùng nó để ước tính quãng đường đi của ô tô khi đạp thắng.



16. Đồ thị vận tốc của một ô tô tăng tốc từ lúc đứng yên đến khi đạt vận tốc 120 km/h trong thời gian 30 giây được cho trong hình dưới. Ước tính quãng đường đi trong thời gian này.



17-19. Dùng định nghĩa 2 để tìm biểu thức diện tích dưới đồ thị của f như một giới hạn. Không tính giới hạn này.

17. $f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad 1 \le x \le 16$

18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad 3 \le x \le 10$

19. $f(x) = x\cos x, \qquad 0 \le x \le \pi/2$

20-21. Xác định một miền mà diện tích của nó bằng giới hạn được cho trước. Không tính giới hạn.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2}{n}\left(5 + \dfrac{2i}{n}\right)^{10}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\pi}{4n}\tan\dfrac{i\pi}{4n}$

22. (a) Dùng Định nghĩa 2 để tìm một biểu thức tính diện tích bên dưới đường cong $y = x^3$ từ 0 đến 1 như một giới hạn.

(b) Công thức sau đây dùng để tính tổng các lập phương số nguyên đầu tiên. Dùng nó để tính giới hạn trong phần (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ . \ . \ . \ . \ . + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

23. (a) Tìm biểu thức diện tích bên dưới đường cong $y = x^5$ từ 0 đến 2 như một giới hạn.

(b) Dùng máy tính để tìm tổng trong biểu thức của bạn ở phần (a).

(c) Tính giới hạn ở phần (a).

24. Tính chính xác diện tích của miền bên dưới đồ thị $y = e^{-x}$ từ 0 đến 2 bằng cách dùng máy tính để tính tổng và sau đó giới hạn trong Ví dụ 3(a). So sánh kết quả của bạn với ước tính tìm được trong Ví dụ 3(b).

25. Tìm giá trị chính xác dưới đường cong y = cos x từ x = 0 đến x = b, trong đó $0 \le b \le \pi/2$. (Dùng máy tính để tính tổng và tính giới hạn.) Đặc biệt, tìm diện tích nếu $b = \pi/2$.

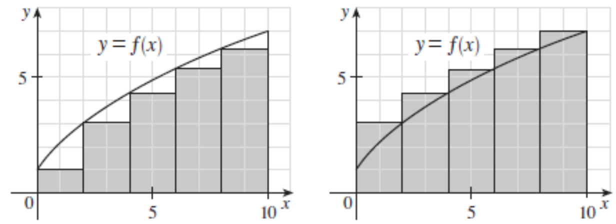
26. (a) Gọi A_n là diện tích của một đa giác có n cạnh bằng nhau nội tiếp trong đường tròn bán kính r. Bằng cách chia đa giác thành n tam giác bằng nhau có góc ở tâm $2\pi/n$, chứng tỏ rằng

$$A_n = \frac{1}{2}nr^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

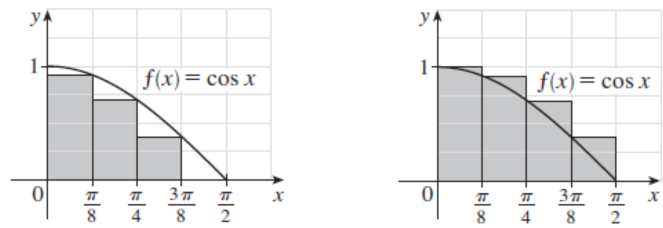
(b) Chứng tỏ rằng $\lim_{n\to\infty} A_n = \square r^2$. [Gợi ý: Dùng Phương trình 3.3.2.]

ĐÁP SỐ

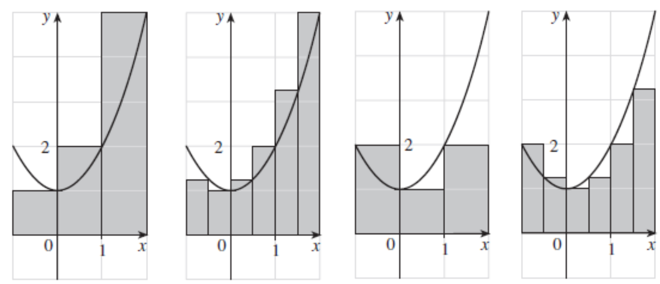
1. (a) 40, 52 (b) 43.2, 49.2



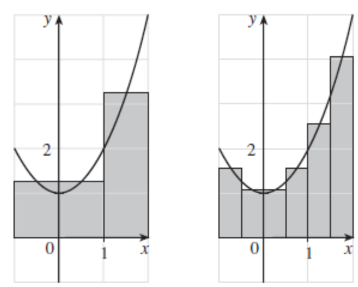
3. (a) 0.7908, underestimate (b) 1.1835, overestimate



5. (a) 8, 6.875 (b) 5, 5.375



(c) 5.75, 5.9375



(d) M_6

7. 0.2533, 0.2170, 0.2101, 0.2050; 0.2

9. (a) Left: 0.8100, 0.7937, 0.7904;
right: 0.7600, 0.7770, 0.7804

11. 34.7 ft, 44.8 ft **13.** 63.2 L, 70 L **15.** 155 ft

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[4]{1 + 15i/n}\cdot(15/n)$ **19.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i\pi}{2n}\cos\dfrac{i\pi}{2n}\right)\dfrac{\pi}{2n}$

21. The region under the graph of $y = \tan x$ from 0 to $\pi/4$

23. (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{64}{n^6}\sum\limits_{i=1}^{n} i^5$ (b) $\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ (c) $\frac{32}{3}$

25. $\sin b$, 1

BÀI 5.2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Ta đã biết trong Bài 5.1 là một giới hạn thuộc dạng

1 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}[\,f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \;.\;.\;.\; + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

sẽ xuất hiện khi ta tính diện tích. Ta cũng thấy là giới hạn này xuất hiện khi tìm độ dài quãng đường một động tử đi được trong một khoảng thời gian. Hóa ra loại giới hạn này cũng xảy ra trong nhiều tình huống khác nhau ngay cả khi f không nhất thiết phải là một hàm số dương. Trong Chương 6 và 8 ta sẽ thấy giới hạn dạng (1) này cũng xuất hiện khi ta tính độ dài một đường cong, thể tích khối. trọng tâm của một khối, lực tạo ra so thủy áp, và công, cũng như những đại lượng khác. Do đó ta thấy cần cho loại giới hạn này một thuật ngữ và ký hiệu riêng.

2 ĐỊNH NGHĨA Nếu f là hàm số xác định với a ≤ x ≤ b, ta chia đoạn [a, b] thành n phân đoạn có độ dài bằng nhau Δx = (b − a)/n. Ta gọi x_o (= a), x_1, x_2, . . . , x_n (= b) là những đầu mút của những phân đoạn này, và ta gọi x_1^*, x_2^*, . . . , x_n^* là b ất kỳ **điểm mẫu** nào trong các phân đoạn này,tức là x_i^* thuộc phân đoạn [x_{i-1} , x_i]. Thế thì tích phân xác định của f từa đến b là

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

miễn là giới hạn này tồn tại. Nếu nó tồn tại, ta nói rằng f tích phân được trên [a, b].

GHI CHÚ 1 Ký hiệu $\int$ được Leibnitz giới thiệu và gọi là **dấu tích phân.** Nó là chữ S kéo dài ra và được chọn vì tích phân là giới hạn của một sum (tổng). Trong ký hiệu $\int_a^b f(x)dx$, f(x) được gọi là **hàm số dưới dấu tích phân** và a gọi là **cận trên** và b gọi là **cận dưới** của tích phân. Hiện giờ, ký hiệu dx tự nó không có nghĩa gì; đơn giản chỉ biểu thị x chính là biến phụ thuộc. Tiến trình tính tích phân được gọi là **lấy tích phân.**

GHI CHÚ 2 Tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ là một số, nó không phụ thuộc x. Đúng ra ta có thể dùng bất kỳ ký tự nào thay thế x mà vẫn không thay đổi giá trị của tích phân.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$$

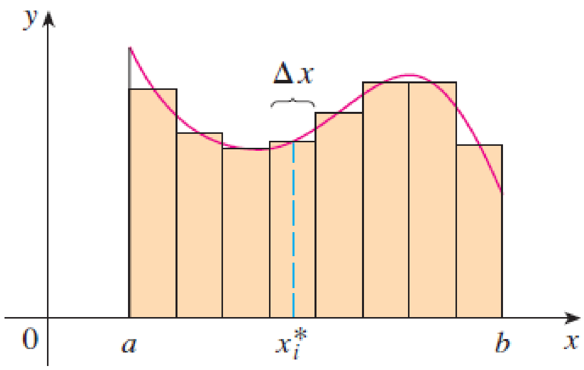
GHI CHÚ 3 Tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ xuất hiện trong Định nghĩa 2 gọi là **tổng Riemann** theo tên nhà toán học người Đức Bernhard Riemann (1826-1866). Định nghĩa 2 nói ta biết rằng tích phân xác định của hàm số tích phân được có thể được tính xấp xỉ với độ chính xác nào tùy chọn bằng tổng Riemann.

RIEMANN

Bernhard Riemann nhận học vị Tiến Sĩ dưới sự hướng dẫn của nhà toán học Gauss huyền thoại tại Đại học Gottingen và được giữ lại dạy tại đó. Gauss, vốn không có thói quen khen tặng những nhà toán học khác, nói về Riemann như "một nhà toán học đầy sáng tạo, năng động, có tư duy toán học độc đáo và vô cùng phong phú. Định nghĩa (2) của tích phân mà ta biết ở trên là của Riemann.

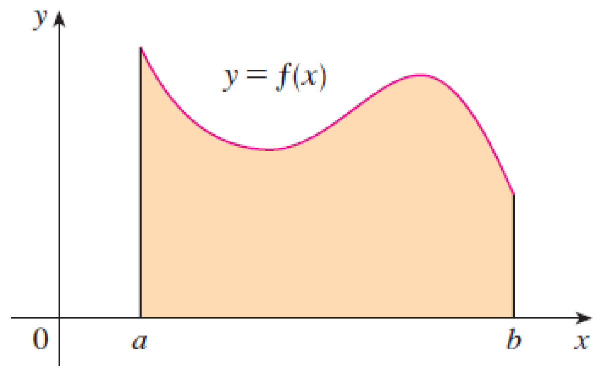
Ông cũng có những đóng góp quan trọng cho lý thuyết hàm số với biến số phức, toán học trong vật lý, lý thuyết số, và nền tảng hình học. Khái niệm mở rộng của Riemann về không gian và hình học đã đặt nền móng, đến tận 50 năm sau, cho lý thuyết tương đối tổng quát của Einstein. Thể chất của Riemann không được tốt ngay từ nhỏ, và ông qua đời vì bệnh lao khi chỉ mới 39 tuổi.

Ta biết rằng nếu f dương, thế thì tổng Riemann có thể xem là tổng diện tích các hình chữ nhật xấp xỉ (xem Hình 1). Bằng cách so sánh Định nghĩa 2 vớiI định nghĩa diện tích trong Bài 5.1, ta thấy rằng định nghĩa tích phân $\int_a^b f(x)dx$ có thể coi như diện tích bên dưới đường cong y = f(x) từ a đến b. (Xem Hình 2.)



HÌNH 1

Nếu f(x) ≥ 0 thì tổng Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ *là tổng diện tích các hình chữ nhật.*



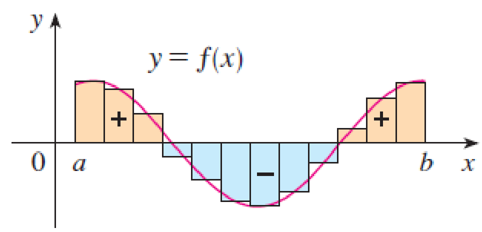
HÌNH 2

Nếu f(x) ≥ 0 thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *là tổng diện tích bên dưới đường cong y = f(x) từ a đến*

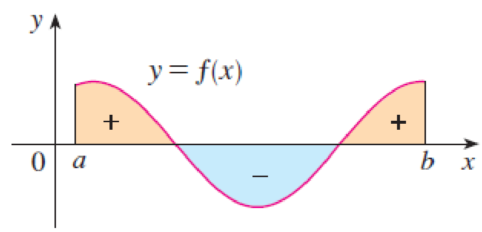
Nếu f vừa có giá trị dương vừa có giá trị âm, như trong Hình 3, thế thì tích phân Riemann là tổng các diện tích các hình chữ nhật nằm phía trên trục hoành và số đối của diện tích các hình chữ nhật nằm bên dưới trục hoành (diện tích các hình chữ nhật cam trừ đi diện tích các hình chữ nhật xanh). Khi ta lấy giới hạn của những tổng Riemann này, ta được tình huống minh họa trong Hình 4. Một tích phân xác định có thể được xem như một **diện tích thực**, nghĩa là, hiệu số các diện tích:

$\int_a^b f(x)dx$ = $A_1 - A_2$

trong đó A_1 là diện tích miền phía trên trục hoành và bên dưới đồ thị của f, và A_2 là diện tích miền phía dưới trục hoành và bên trên đồ thị f.



HÌNH 3: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ *xấp xỉ bằng diện tích thực.*



HÌNH 4: $\int_a^b f(x)dx$ *bằng diện tích thực.*

GHI CHÚ 4 Mặc dù chúng ta đã định nghĩa $\int_a^b f(x)dx$ bằng cách phân chia đoạn [a, b] thành những phân đoạn bằng nhau, còn có những tình huống trong đó sẽ thuận tiện nếu chia thành những phân đoạn không bằng nhau. Chẳng hạn, trong Bài tập 14 trong Bài 5.1 NASA đã đưa ra dữ liệu vận tốc tại những tời điểm không cách đều nhau, nhưng ta vẫn có thể ước tính quãng đường tên lửa đi được. Còn có những phương pháp tích phân cũng sử dụng những phân đoạn không bằng nhau.

Nếu những chiều rộng của phân đoạn là Δx_1 , Δx_2, . . . , Δx_n , ta phải bảo đảm rằng tất cả chiều rộng đều tiến tới 0 trong quá trình lấy giới hạn. Điều này xảy ra khi chiều rộng lớn nhất, maxΔx_i , tiến tới 0. Trong trường hợp này định nghĩa của tích phân xác định trở thành

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta xi \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x}$$

GHI CHÚ 5 Ta đã định nghĩa tích phân xác định cho các hàm số tích phân được, nhưng không phải hàm số nào cũng tích phân được (xem Bài tập 67-68). Định lý sau đây cho ta thấy những hàm số xuất hiện thường nhất đều tích phân được. Phần chứng minh định lý có thể được tìm thấy trong những giáo trình giải tích cao cấp.

3 ĐỊNH LÝ Nếu f liên tục trên [a, b], hay nếu f chỉ có một số điểm hữu hạn gián đoạn, thế thì f tích phân được trên [a, b]; nghĩa là tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại.

Nếu f tích phân được trên [a, b], thế thì giới hạn trong Định nghĩa 2 tồn tại và cho ta một giá trị độc lập với cách chọn các điểm mẫu x_i^*. Để đơn giản phép tính tích phân, ta thường chọn điểm mẫu là những đầu mút phải. Tức $x_i^* = x_i$ và định nghĩa của tích phân đơn giản hóa như sau.

4 ĐỊNH LÝ Nếu f tích phân được trên [a, b], thế thì

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ và $x_i = a + i\,\Delta x$

VÍ DỤ 1 Biểu diễn

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n (x_i^3 + x_i\sin x_i)\,\Delta x$$

dưới dạng một tích phân trên đoạn [0, π]

GIẢI So sánh giới hạn được cho với giới hạn trong Định lý 4, ta thấy rằng chúng sẽ khớp nhau nếu ta chọn f(x) = $x^3 + x\sin x$. Ta được cho biết a = 0 và b = π. Do đó theo Định lý 4, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n (x_i^3 + x_i\sin x_i)\,\Delta x = \int_0^{\pi}(x^3 + x\sin x)dx$$

Sau này, khi ta ứng dụng tích phân xác định cho những bài toán vật lý, việc nhận ra giới hạn của tổng là giá trị một tích phân, như ta đã làm trong Ví dụ 1. Khi Leibnitz chọn ký hiệu cho tích phân, ông chọn những chất liệu nhắc ta đến tiến trình của giới hạn, khi ta viết

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Ta thay lim Σ bằng S, x_i^* bằng x, và Δx bằng dx.

<u>TÍNH TÍCH PHÂN</u>

Khi ta dùng giới hạn để tính tích phân xác định, ta cần biết những công thức tính một tổng. Ba công thức sau là tổng các lũy thừa của những số nguyên dương. Công thức 5 có thể quen thuộc với bạn. Công thức 6 và 7 đã trình bày trong Bài 5.1 và được chứng minh trong Phụ lục E.

5 $$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Các công thức còn lại là những quy tắc đơn giản liên quan với ký hiệu Σ:

8 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

10 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

11 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

VÍ DỤ 2

(a) Tính tổng Riemann cho $f(x) = x^3 - 6x$ lấy các điểm mẫu là những đầu mút phảu và a = 0, b = 3, và n = 6.

(b) Tính $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$

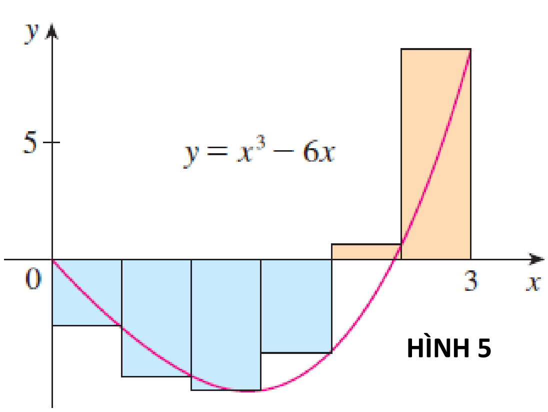
GIẢI

(a) Với n = 6 chiều rộng của phân đoạn là

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

Và các đầu mút phải là $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$, và $x_6 = 3.0$. Do đó tổng Riemann là

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x \\ &= f(0.5)\Delta x + f(1.0)\Delta x + f(1.5)\Delta x + f(2.0)\Delta x + f(2.5)\Delta x + f(3.0)\Delta x \\ &= \frac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) \\ &= -3.9375 \end{aligned}$$



HÌNH 5

Chú ý là f không phải là hàm số dương vì thế tổng Riemann không biểu thị tổng các diện tích hình chữ nhật. Nhưng nó biểu thị tổng diện tích các hình chữ nhật cam (bên trên trục hoành) trừ đi tổng diện tích những hình chữ nhật xanh (bên dưới trục hoành) trong Hình 5.

(b) Với n phân đoạn ta có

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Do đó $x_o = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ và tổng quát , $x_i = 3i / n$. Vì ta dùng các đầu mút phải, ta có thể dùng Định lý 4

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right]$$

Công thức 9 với c = 3/n

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{27}{n^3}i^3 - \frac{18}{n}i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

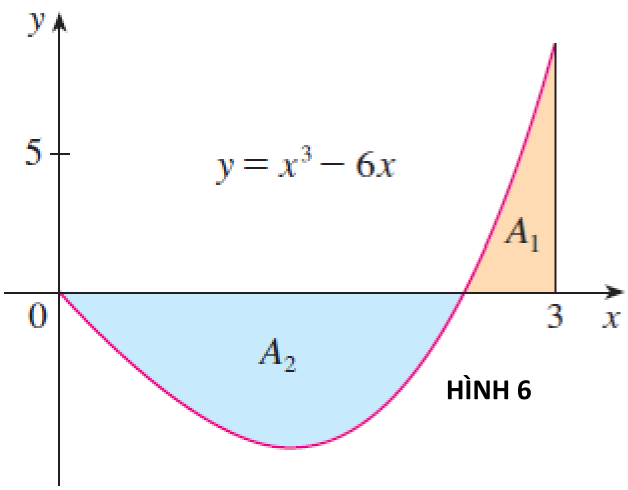
Công thức 11 và 9

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

Công thức 7 và 5

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

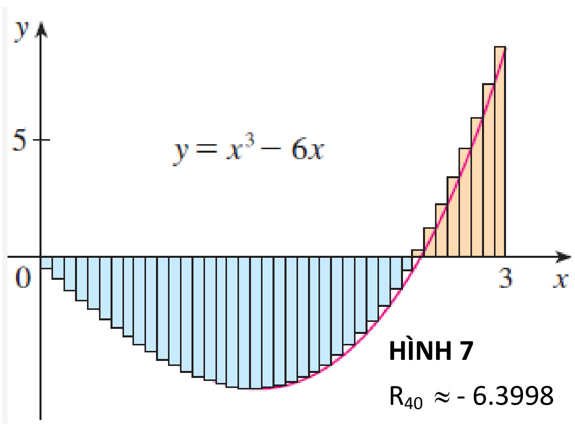
$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75$$



HÌNH 6

Tích phân này không thể coi là diện tích vì f có giá trị dương lẫn âm. Nhưng nó có thể coi là hiệu của diện tích $A_1 - A_2$, trong đó A_1 và A_2 là phần diện tích cho bởi Hình 6.

Hình 7 minh họa phép tính cho tổng Riemann R_n với 40 đầu mút phải. Còn bảng bên là những giá trị của tổng Riemann cho thấy nó tiến đến giá trị chính xác của tích phân là – 6.75 khi $n \to \infty$.



HÌNH 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	−6.3998
100	−6.6130
500	−6.7229
1000	−6.7365
5000	−6.7473

Một phương pháp đơn giản hơn để tính tích phân trong Ví dụ 2 sẽ được trình bày trong Bài 5.3.

VÍ DỤ 3

(a) Biểu diễn tích phân $\int_1^3 e^x dx$ như một giới hạn của tổng.

(b) Dùng máy tính để tính biểu thức ấy.

GIẢI

(a) Ở đây ta có f(x) = e^x, a = 1, b = 3, và

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

Vì thế $x_o = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$, và

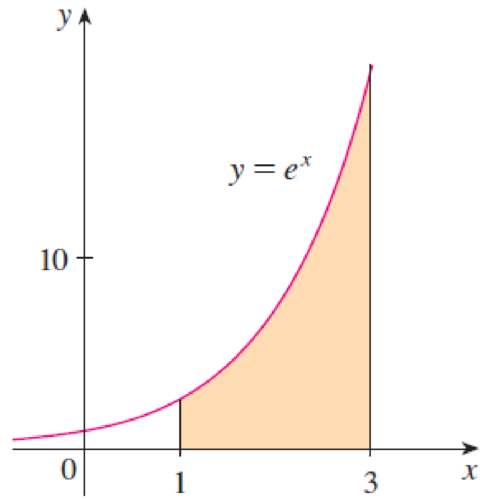
$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

Theo Định lý 4, ta được

$$\int_a^b e^{x} dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}$$



HÌNH 8

(b) Nếu nhờ một máy tính để tính tổng và đơn giản ta được

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Và nhờ máy tính tính giới hạn của tổng, ta được

$$\int_1^3 e^x dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

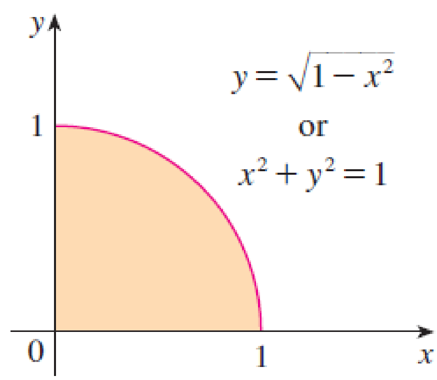
Trong bài sau ta sẽ học được một phương pháp dễ dàng hơn nhiều để tính các tích phân.

VÍ DỤ 4 Tính tích phân sau bằng cách xem nó như diện tích.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (b) $\int_0^3 (x-1)dx$

GIẢI

(a) Vì f(x) = $\sqrt{1-x^2} \geq 0$, ta có thể xem tích phân này là diện tích bên dưới đường cong y = $\sqrt{1-x^2}$ từ 0 đến 1. Nhưng vì $y^2 = 1 - x^2$, ta được $x^2 + y^2 = 1$, cho thấy đồ thị của f là một cung phần tư của đường tròn bán kính 1 như trong Hình 9. Do đó



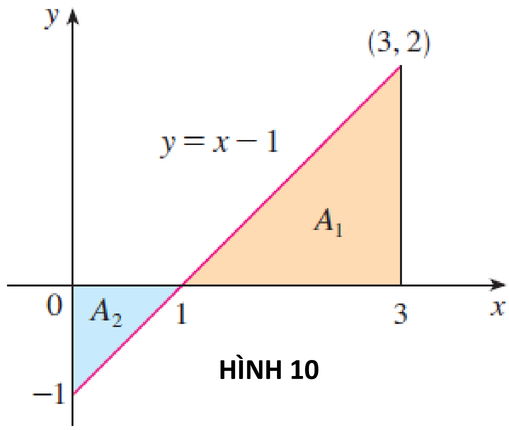
HÌNH 9

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(Trong Bài 7.3 ta sẽ chứng minh rằng diện tích của hình tròn bán kính r là πr^2.)

(b) Đồ thị của y = x – 1 là đường thẳng có độ dốc 1 (Hình 10). Ta tính tích phân này xem như hiệu diện tích của hai tam giác:

$$\int_0^3 (x-1)dx = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}(2.2) - \frac{1}{2}(1.1) = 1.5$$



HÌNH 10

QUY TẮC TRUNG ĐIỂM

Ta thường chọn những điểm mẫu x_i^* là đầu mút bên phải của các phân đoạn vì nó tiện lợi khi tính giới hạn. Nhưng nếu mục đích là tìm giá trị xấp xỉ của một tích phân thì thường tốt hơn nên chọn điểm mẫu là trung điểm của phân đoạn, ký hiệu là $\overline{x_1}$. Bất kỳ tổng Riemann nào cũng là giá trị xấp xỉ của tích phân, nhưng nếu ta dùng trung điểm thì ta được giá trị xấp xỉ dưới đây.

QUY TẮC TRUNG ĐIỂM

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\,\Delta x = \Delta x\left[f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_i}) + \ldots + f(\overline{x_n})\right]$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

và $\overline{x_i} = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ = trung điểm của $[x_{i-1}, x_i]$

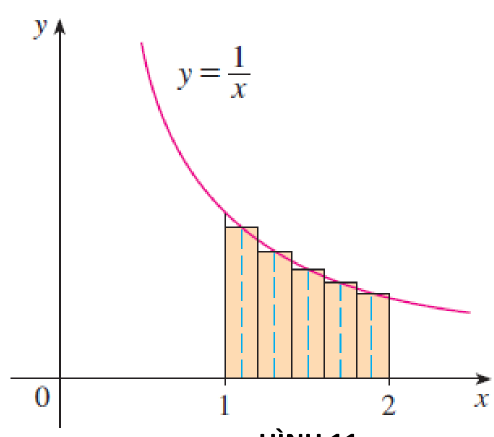
VÍ DỤ 5 Dùng Quy Tắc Trung Điểm với n = 5 để tính giá trị xấp xỉ của $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

GIẢI Điểm cuối của năm phân đoạn liên tiếp là 1, 1,2. 1.4, 1.6, 1.8, và 2.0. Do đó những trung điểm là 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, và 1.9. Chiều rộng của phân đoạn là $\Delta x = (2 - 1)/5 = 1/5$, do đó Quy Tắc Trung Điểm cho ta

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \Delta x[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$



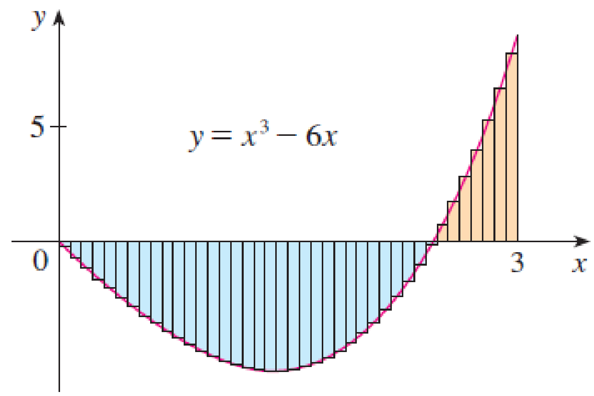
HÌNH 11

Vì f(x) = 1/x > 0 với mọi x thuộc [1, 2], tích phân biểu thị một diện tích, và giá trị xấp xỉ được cho bởi Quy ắc Trung Điểm là tổng diện tích các hình chữ nhật trong Hình 11.

Hiện giờ ta vẫn chưa biết giá trị xấp xỉ mà ta tính ở Ví dụ 5 có độ chính xác đến đâu, phải đến Bài 7.7 ta mới học được phương pháp tính được sai số khi dùng Quy Tắc Trung Điểm để tính

Nếu ta áp dụng Quy Tắc Trung Điểm cho tích phân trong Ví dụ 2, ta được minh họa cho bởi Hình 12. Giá trị xấp xỉ $M_{40} \approx - 6.7563$ sát với giá trị chính xác – 6.75 hơn giá trị xấp xỉ tính bằng đầu mút phải, $R_{40} \approx - 6.3998$, đã minh họa trong Hình 7.

HÌNH 12
$M_4 \approx - 6.7563$



<u>TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH</u>

Khi ta định nghĩa tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$, ta giả định ngầm là a < b. Nhưng định nghĩa bằng giới hạn của tổng Riemann vẫn có nghĩa dù a > b. Chú ý rằng nếu ta tráo đổi a và b, thì Δx thay đổi từ (b – a)/n thành (a – b)/n. Do đó

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

Nếu a = b, thì $\Delta x = 0$ và như thế

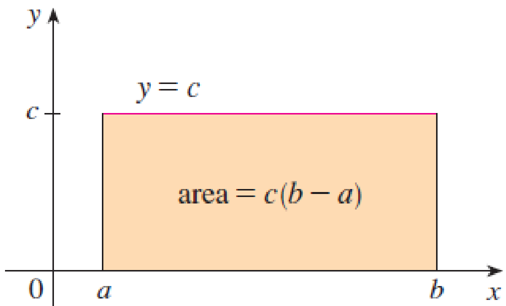
$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

Tiếp theo ta sẽ triển khai một vài tính chất cơ bản của tích phân, nhờ đó ta có thể tính tích phân theo cách đơn giản. Ta vẫn giả sử f và g là các hàm số liên tục.

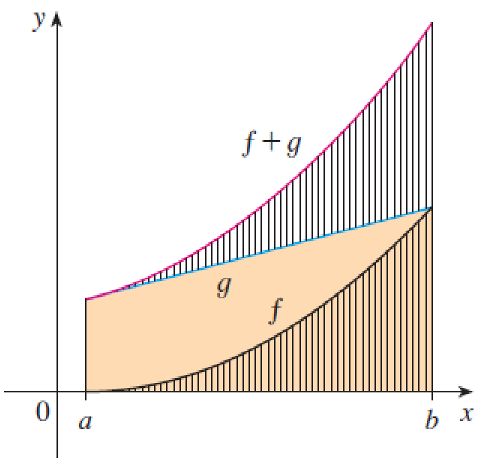
TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, trong đó c là hằng số bất kỳ
2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, trong đó c là hằng số bất kỳ
4. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Tính chất I nói rằng tích phân của một hàm số hằng f(x) = c là tích hằng số ấy với độ dài của đoạn. Nếu c > 0 và a < b, điều này hiểu được vì c(b – a) lúc ấy là diện tích hình chữ nhật trong Hình 13.



HÌNH 13



HÌNH 14

Tính chất 2 nói rằng tích phân của tổng là tổng các tích phân. Đối với các hàm số dương, điều đó có nghĩa là diện tích bên dưới f + g bằng diện tích bên dưới f cộng với diện tích bên dưới g. Hình 14 cho ta thấy tại sao điều này là đúng. Theo quan điểm của phép cộng đồ thị, những đoạn thẳng đứng tương ứng có độ dài bằng nhau.

Tổng quát, Tính chất 2 là kết quả của Định lý 4 và quy tắc giới hạn của tổng bằng tổng các giới hạn:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

Tính chất 3 có thể chứng minh theo cách tương tự và nói rằng tích phân của một hằng số nhân với một hàm số hằng số ấy nhân với tích phân của hàm số. Nói cách khác, một hằng số (và chỉ có hằng số) là có thể đem ra trước d6a1u tích phân. Tính chất 4 được chứng minh bằng cách viết f – g = f + (- g) rồi dùng Tính chất 2 và 3 với c = - 1.

VÍ DỤ 6 Dùng tính chất của tích phân để tính $\int_0^1 (4+3x^2)dx$

GIẢI Dùng Tính chất 2 và 3, ta được

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx = \int_0^1 4dx + 3\int_0^1 x^2dx$$

Từ Tính chất 1 ta có

$$\int_0^1 4dx = 4(1-0) = 4$$

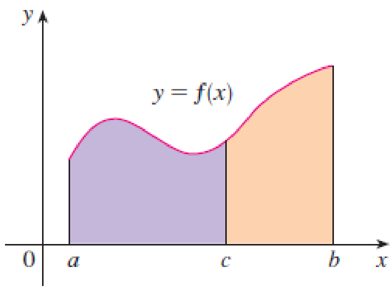
Và theo Ví dụ 2 trong Bài 5.1, ta đã có $\int_0^1 x^2dx = 1/3$, suy ra

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4+3x^2)dx &= \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx \\ &= 4 + 3.\frac{1}{3} = 5\end{aligned}$$

Tính chất sau cho ta biết cách kết hợp các tích phân của cùng một hàm số có các cận liên tiếp nhau:

5 $$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Tính chất này chứng minh không dễ dàng, nhưng đối với trường hợp khi f(x) ≥ 0 và a < c < b thì ta có thể thấy rõ Tính chất 5 bằng đoán nhận hình học như Hình 15 minh họa. Diện tích bên dưới đường cong y = f(x) từ a đến c cộng với diện tích từ c đến b thì bằng diện tích từ a đến b.



HÌNH 15

VÍ DỤ 7 Nếu ta biết $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ và $\int_0^8 f(x)dx = 12$, tìm $\int_8^{10} f(x)dx$.

GIẢI Theo Tính chất 5, ta có

$$\int_0^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx$$

Suy ra $$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5.$$

Tính chất 1 – 5 vẫn đúng cho dù a < b, a = b, hay a > b. Những tính chất sau liên quan đến việc so sánh các hàm số và tích phân của chúng chỉ đúng khi a ≤ b.

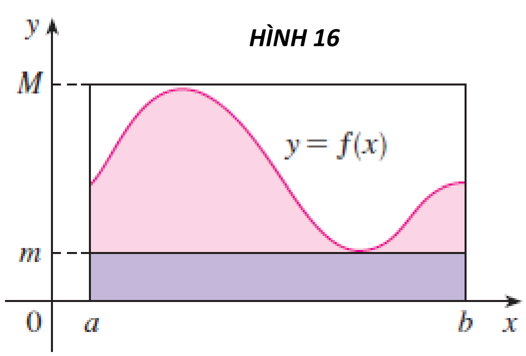
TÍNH CHẤT SO SÁNH CỦA TÍCH PHÂN

6. Nếu f(x) ≥ 0 với a ≤ x ≤ b, thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Nếu f(x) ≥ g(x) với a ≤ x ≤ b, thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

8. Nếu m ≤ f(x) ≤ M với a ≤ x ≤ b, thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$



HÌNH 16

Nếu f(x) ≥ 0, thì $\int_a^b f(x)dx$ biểu thị diện tích bên dưới đồ thị của f, do đó đoán nhận hình học của Tính chất 6 chỉ là diện tích là số dương. Nhưng tính chất này cũng có thể được chứng minh từ định nghĩa của tích phân (Bài tập 64). Tính chất 7 nói rằng một hàm số lớn hơn có tích phân lớn hơn. Đây là hệ quả của Tính chất 6 và 4 bởi vì f – g ≥ 0.

Tính chất 8 được minh họa trong Hình 16 trong trường hợp f(x) ≥ 0. Nếu f liên tục ta có thể lấy m và M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của f trên đoạn [a, b]. Trong trường hợp này Tính chất 8 nói rằng diện tích bên dưới đồ thị của f thì lớn hơn diện tích hình chữ nhật có chiều cao m và nhỏ hơn diện tích hình chữ nhật có chiều cao M.

CHỨNG MINH TÍNH CHẤT 8 Vì m ≤ f(x) ≤ M, nên theo Tính chất 7

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

Dùng Tính chất 1 để tính tích phân ở vế trái và phải, ta được

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Tính chất 8 cũng hữu dụng khi ta chỉ muốn một ước tính thô sơ cho một tích phân mà không màng đến việc dùng Quy Tắc Trung Điểm.

VÍ DỤ 8 Dùng Tính chất 8 để tính $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

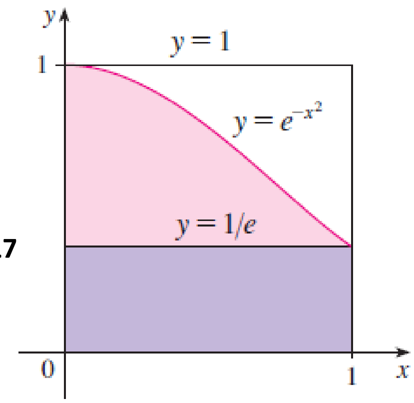
GIẢI Vì f(x) = e^{-x^2} là hàm số nghịch biến trên [0, 1], giá trị lớn nhất là M = f(0) = 1 và giá trị nhỏ nhất là m = f(1) = e^{-1}. Do đó, theo Tính chất 8,

$$e^{-1}(1-0) \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1(1-0)$$

Hay
$$e^{-1} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$$

Vì $e^{-1} \approx 0.3679$, ta có thể viết

$$0.3679 \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$$



HÌNH 17

Kết quả của Ví dụ 8 được minh họa trong Hình 17. Tích phân lớn hơn diện tích hình chữ nhật thấp và nhỏ hơn diện tích hình vuông.

BÀI TẬP

1. Tính tổng Riemann cho f(x) = 3 – x/2 , $2 \le x \le 14$, với sáu phân đoạn, lấy điểm mẫu là đầu mút trái. Giải thích, với sự trợ giúp của biểu đồ, tổng Riamann biểu thị điều gì?

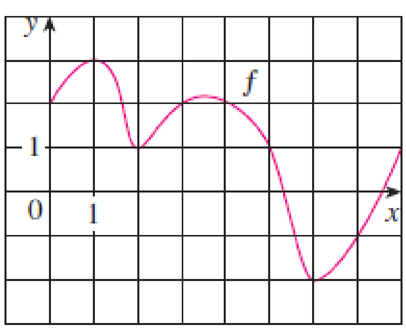
2. Nếu f(x) = $x^2 - 2x$, $0 \le x \le 3$, tính tổng Riemann với n = 6, lấy điểm mẫu là điểm đầu mút phải. Tổng Riemann biểu thị điều gì? Minh họa bằng biểu đồ.

3. Nếu f(x) = $e^x - 2$, $0 \le x \le 2$, tìm tổng Riemann với n = 4 đúng đến sáu chữ số thập phân, lấy điểm mẫu là trung điểm. Tổng Riemann biểu thị điều gì? Minh họa bằng biểu đồ.

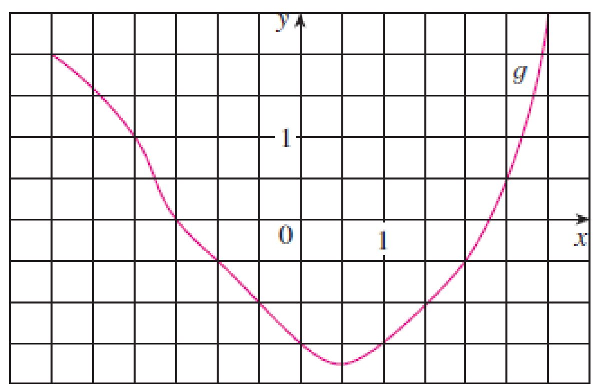
4. (a) Tìm tổng Riemann cho f(x) = sin x, $0 \le x \le 3\pi/2$ với sáu số hạng, lấy điểm mẫu là đầu mút phải. (Cho kết quả đúng đến sáu chữ số thập phân.) Giải thích điều mà tổng Riemann biểu thị với trợ giúp của một biểu đồ.

(b) Lặp lại phần (a) với điểm mẫu là các trung điểm.

5. Đồ thị của hàm số f được cho bên dưới. Ước tính $\int_0^8 f(x)dx$ dùng bốn phân đoạn với (a) đầu mút phải, (b) đầu mút trái, (c) các trung điểm.



6. Đồ thị của f cho bên dưới. Ước tính $\int_{-3}^3 g(x)dx$ với sáu phân đoạn dùng (a) đầu mút phải, (b) đầu mút trái, (c) các trung điểm.



7. Bảng giá trị của hàm số f đồng biến được cho bên dưới. Dùng bảng để tính giá trị xấp xỉ hơn và kém của $\int_0^{25} f(x)dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	−42	−37	−25	−6	15	36

8. Bảng dưới cho giá trị của một hàm số lấy từ thực nghiệm. Dùng nó để ước tính $\int_3^9 f(x)dx$ dùng ba phân đoạn bằng nhau với (a) đầu mút phải, (b) d0a62u mút trái, và (c) trung điểm. Nếu cho biết hàm số là đồng biến, bạn có thể kết luận ước tính của mình nhỏ hơn hay lớn hơn giá trị đúng của tích phân hay không?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	−3.4	−2.1	−0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

9-12. Dùng Quy tắc Trung điểm với giá trị cho trước của n để tính xấp xỉ tích phân. Làm tròn kết quả đến bốn chữ số thập phân.

9. $\int_2^{10}\sqrt{x^3+1}dx, \quad n=4$ **10.** $\int_0^{\pi/2}\cos^4 x dx, \quad n=4$

11. $\int_0^1 \sin(x^2)dx, \quad n=5$ **12.** $\int_1^5 x^2e^{-x}dx, \quad n=4$

15. Dùng máy tính để lập bảng số những giá trị của tổng Riemann bên phải R_n cho tích phân $\int_0^{\pi}\sin x dx$ với n = 5, 10, 50, và 100. Những số này có vẻ tiến gần đến số nào?

16. Dùng máy tính để lập bảng số những giá trị của tổng Riemann bên trái L_n và phải R_n cho tích phân $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ với n = 5, 10, 50, và 100. Giá trị của tích phân nằm giữa hai giá trị nào? Bạn có thể phát biểu tương tự cho tích phân $\int_{-1}^2 e^{-x^2}dx$? Giải thích.

17-20. Biểu diễn giới hạn sau như một tích phân trên đoạn cho trước.

17. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i\ln(1+x_i^2)\,\Delta x, \quad [2,6]$

18. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos x_i}{x_i}\Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\,\Delta x, \quad [1,8]$

20. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} [4-3(x_i^*)^2+6(x_i^*)^5]\,\Delta x, \quad [0,2]$

21-25. Dùng dạng định nghĩa của tích phân cho trong Định lý 4 để tính tích phân.

21. $\int_{-1}^5 (1+3x)\,dx$ **22.** $\int_1^4 (x^2+2x-5)\,dx$

23. $\int_0^2 (2-x^2)\,dx$ **24.** $\int_0^5 (1+2x^3)\,dx$

25. $\int_1^2 x^3\,dx$

26. (a) Tìm một xấp xỉ của tích phân $\int_0^4 (x^2-3x)dx$ dùng tổng Riemann với đầu mút phải và n = 8.

(b) Vẽ biểu đồ như Hình 3 để minh họa giá trị xấp xỉ của phần (a).

(c) Dùng Định lý 4 để tính $\int_0^4 (x^2-3x)dx$.

(d) Đoán nhận tích phân trong phần (c) như một hiệu hai diện tích và minh họa bằng một biểu đồ như Hình 4.

27. Chứng tỏ rằng $\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

28. Chứng tỏ rằng $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

29-30. Biểu diễn tích phân như một giới hạn của tổng Riemann. Không tính tích phân.

29. $\int_2^6 \frac{x}{1+x^5}dx$ **30.** $\int_1^{10}(x-4\ln x)dx$

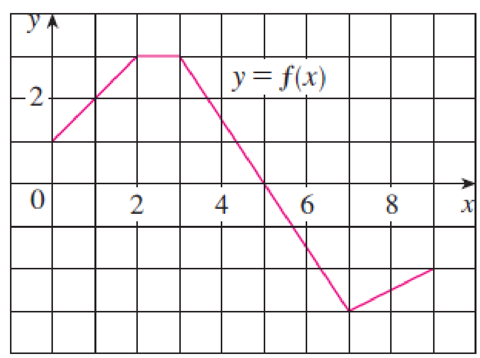
31-32. Biểu diễn tích phân như giới hạn của một tổng. Rồi tính tích phân đó, dùng máy tính có lập trình đại số để tìm tổng và giới hạn.

31. $\int_0^{\pi}\sin 5x dx$ **32.** $\int_2^{10} x^6 dx$

33. Cho biết đồ thị của f. Tính các tích phân sau xem nó như diện tích.

(a) $\int_0^2 f(x)dx$ (b) $\int_0^5 f(x)dx$

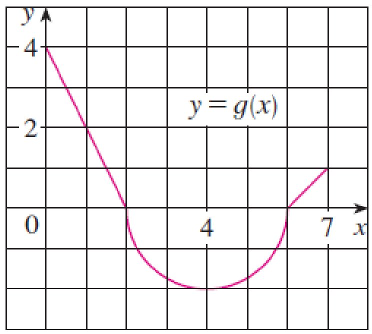
(c) $\int_5^7 f(x)dx$ (d) $\int_0^9 f(x)dx$



34. Đồ thị của g gồm hai đoạn thẳng và một nửa đường tròn. Dùng nó để tính các tích phân sau.

(a) $\int_0^2 g(x)dx$ (b) $\int_2^6 g(x)dx$

(c) $\int_0^7 g(x)dx$



35-40. Tính tích phân bằng cách xem nó như diện tích.

35. $\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx$

36. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$

$\boxed{37.}$ $\int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

38. $\int_{-1}^{3} (3 - 2x)\, dx$

39. $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$

40. $\int_0^{10} |x - 5|\, dx$

41. Tính $\int_{\pi}^{\pi} \sin^2 x \cos^4 x dx$

42. Cho biết $\int_0^1 3x\sqrt{x^2+4}dx = 5\sqrt{5} - 8$, tìm $\int_1^0 3u\sqrt{u^2+4}du$.

43. Trong Ví dụ 2 của Bài 5.1 ta đã chứng tỏ rằng $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$. Dùng kết quả này và tính chất của tích phân để tính $\int_0^1 (5 - 6x^2)dx$.

44. Dùng tính chất của tích phân và kết quả của Ví dụ 3 để tính $\int_1^3 (2e^x - 1)dx$.

45. Dùng kết quả của Ví dụ 3 để tính $\int_1^3 e^{x+2}dx$.

46. Dùng kết quả của Bài tập 27 và $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$ (theo Bài tập 25 trong Bài 5.1), cùng với tính chất của tích phân để tính $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)dx$.

47. Rút gọn biểu thức dưới dạng một tích phân duy nhất $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx - \int_{-2}^{-1} f(x)dx$$

48. Biết $\int_1^5 f(x)dx = 12$ và $\int_4^5 f(x)dx = 3.6$, tìm $\int_1^4 f(x)dx$.

49. Nếu $\int_0^9 f(x)dx = 37$ và $\int_0^9 g(x)dx = 16$, tìm $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]dx$.

50. Tìm $\int_0^5 f(x)dx$ nếu

$$f(x) = \begin{cases} 3 & khi\ x < 3 \\ x & khi\ x \geq 3 \end{cases}$$

51. Giả sử f có giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M. Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ nằm giữa hai giá trị nào? Tính chất tích phân nào cho phép bạn kết luận như vậy?

52-54. Dùng tính chất tích phân để chứng minh các bất đẳng thức sau mà không cần tình chúng.

52. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x}dx$

53. $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx \leq 2\sqrt{2}$

55. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

56. $\int_0^2 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$

57. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\, dx$

58. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\, dx$

59. $\int_0^2 xe^{-x}\, dx$

60. $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\sin x)\, dx$

54. $\frac{\sqrt{2}\pi}{24} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$

55-60. Dùng Tính chất 8 để ước tính giá trị của tích phân.

61-62. Dùng tính chất tích phân, cùng với Bài tập 27 và 28, để chứng minh các bất đẳng thức sau.

61. $\int_1^3 \sqrt{x^4+1}dx \geq \frac{26}{3}$

62. $\int_0^{\pi/2} x\sin x dx \leq \frac{\pi^2}{8}$

63. Chứng minh Tính chất 3 của tích phân.

64. Chứng minh Tính chất 6 của tích phân.

65. Nếu f liên tục trên [a, b], chứng tỏ rằng

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

[Gợi ý: - | f(x)| ≤ f(x) ≤ | f(x)|]

66. Dùng kết quả của Bài tập 65 để chứng tỏ rằng

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x)\sin 2x dx \right| \le \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

67. Cho f(x) = 0 nếu x hữu tỷ và f(x) = 1 nếu x vô tỷ. Chứng tỏ f không tích phân được trên [0, 1].

68. Cho f(0) = 0 và f(x) = 1/x nếu $0 < x \le 1$. Chứng tỏ f không tích phân được trên [0, 1]. [Gợi ý; Chứng tỏ rằng số hạng đầu tiên trong tổng Riemann, $f(x_1^*)\Delta x$, có thể được làm lớn tùy ý]

69-70. Biểu diễn giới hạn như một tích phân xác định.

69. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$ [*Hint:* Consider $f(x) = x^4$.]

70. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i/n)^2}$

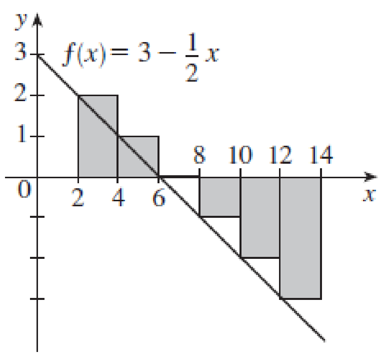
71. Tìm $\int_1^2 x^{-2} dx$. [Gợi ý: Chọn x_i^* là trung bình nhân của x_{i-1} và x_i (nghĩa là, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$] và dùng đẳng thức

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

ĐÁP SỐ

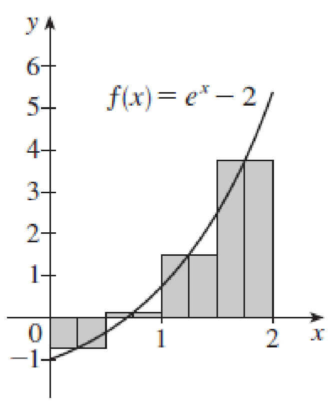
1. – 6

Tổng Riemann biểu thị tổng các diện tích của hai hình chữ nhật phía trên trục hoành trừ đi tổng diện tích của ba hình chữ nhật bên dưới trục hoành; đó chính là diện tích đúng của các hình chữ nhật đối với trục hoành.



3. 2.322986

Tổng Riemann biểu thị diện tích của ba hình chữ nhật phía trên trục hoành trừ đi diện tích hình chữ nhật phía dưới trục hoành.



5. (a) 4 (b) 6 (c) 10 **7.** −475, −85 **9.** 124.1644

11. 0.3084 **13.** 0.30843908, 0.30981629, 0.31015563

15.

n	R_n
5	1.933766
10	1.983524
50	1.999342
100	1.999836

Các giá trị của R_n có vẻ tiến gần đến 2

17. $\int_2^6 x\ln(1 + x^2)\, dx$ **19.** $\int_1^8 \sqrt{2x + x^2}\, dx$ **21.** 42

23. $\frac{4}{3}$ **25.** 3.75 **29.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2 + 4i/n}{1 + (2 + 4i/n)^5} \cdot \frac{4}{n}$

31. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\sin \frac{5\pi i}{n}\right) \frac{\pi}{n} = \frac{2}{5}$

33. (a) 4 (b) 10 (c) −3 (d) 2 **35.** $-\frac{3}{4}$

37. $3 + \frac{9}{4}\pi$ **39.** 2.5 **41.** 0 **43.** 3 **45.** $e^5 - e^3$

47. $\int_{-1}^{5} f(x)\, dx$ **49.** 122

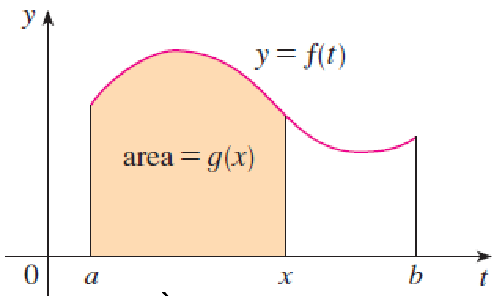
51. $2m \le \int_0^2 f(x)\, dx < 2M$ by Comparison Property 8

55. $3 \le \int_1^4 \sqrt{x}\, dx \le 6$ **57.** $\frac{\pi}{12} \le \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\, dx \le \frac{\pi}{12}\sqrt{3}$

59. $0 \le \int_0^2 xe^{-x}\, dx \le 2/e$ **69.** $\int_0^1 x^4\, dx$ **71.** $\frac{1}{2}$

BÀI 5.3. ĐỊNH LÝ NỀN TẢNG CỦA GIẢI TÍCH

Định Lý Nền Tảng của Giải Tích đúng như tên gọi là định lý bắt cầu nối hai ngành giải tích: phép tính vi phân và phép tính tích phân. Phép tính vi phân khởi nguồn từ bài toán tiếp tuyến, trong khi phép tính tích phân từ một bài toán dường như không liên hệ, bài toán diện tích. Người thầy hướng dẫn của Newton tại Đại học Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), đã khám phá ra rằng hai bài toán này thực sự có mối liên hệ sát sườn. Chính xác là ông biết được vi phân và tích phân là hai tiến trình thuận nghịch. Định Lý Nền Tảng của Giải Tích cho thấy mối liên hệ thuận nghịch chính xác giữa vi phân và tích phân. Chính Newton và Leibniz đã tận dụng mối liên hệ này và phát triển giải tích thành một phương pháp toán học có tính hệ thống. Đặc biệt, họ thấy được Định Lý Nền Tảng của Giải Tích đã giúp họ tính được diện tích và tích phân rất dễ dàng thay vì phải tính quá vất vả như lấy giới hạn của một tổng như ta đã làm trong Bài 5.1 và 5.2.



HÌNH 1

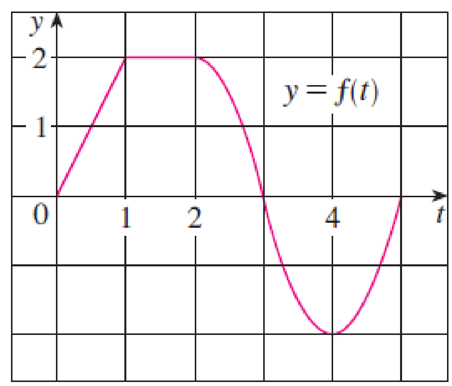
Phần đầu của Định Lý Nền Tảng xét đến các hàm số được xác định bằng phương trình có dạng

1 $$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

trong đó f là hàm số liên tục trên [a, b] và x biến thiên giữa a và b. Chú ý là g chỉ phụ thuộc vào x, là cận trên biến thiên của tích phân. Nếu x là con số cố định thì tích phân $\int_a^x f(t)dt$ là một số xác định. Thế thì nếu ta cho x biến thiên, số $\int_a^x f(t)dt$ cũng biến thiên và xác định một hàm số theo x chỉ bằng g(x).

Nếu f là hàm số dương, thì g(x) có thể được đoán nhận như là diện tích bên dưới đồ thị f từ a đến x, trong đó x thay đổi từ a đến b (xem Hình 1).

VÍ DỤ 1 Nếu f là hàm số có đồ thị cho trước trong Hình 2 và g(x) = $\int_0^x f(t)dt$, tìm giá trị của g(0), g(1), g(2), g(3), g(4), và g(5). Sau đó phác họa đồ thị của g.



HÌNH 2

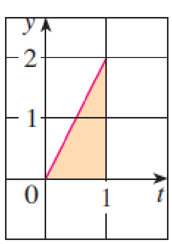
GIẢI Trước tiên chú ý là g(0) = $\int_0^0 f(t)dt = 0$. Từ Hình 3, ta thấy rằng g(1) là diện tích của một tam giác :

$$g(1) = \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}(1.2) = 1$$

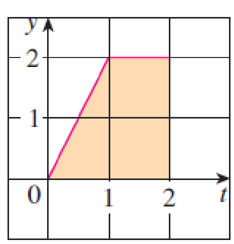
Để tìm g(2) ta thêm vào g(1) diện tích hình chữ nhật:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt = 1 + (1.2) = 3$$

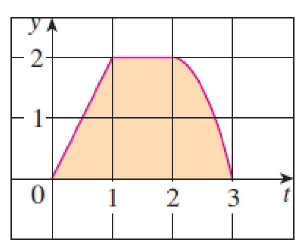
Ta ước tính diện tích bên dưới f từ 2 đến 3 là khoảng 1.3, do đó: g(3) = $g(2) + \int_2^3 f(t)dt$ ≈ 3 + 1.3 = 4.3



$g(1) = 1$

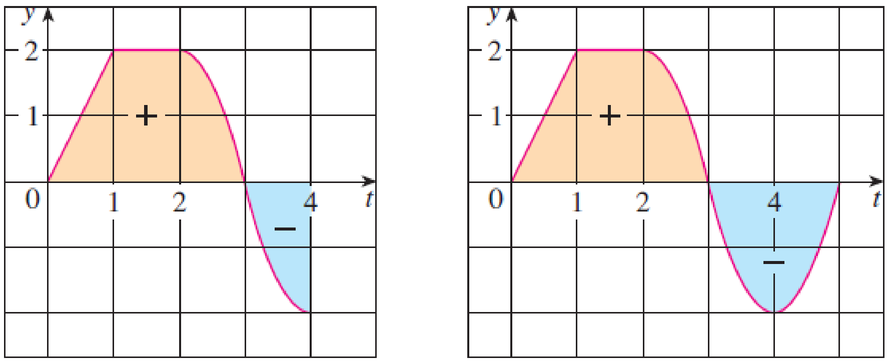


$g(2) = 3$



$g(3) \approx 4.3$

HÌNH 3

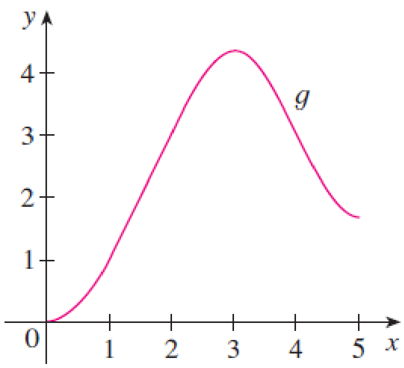


$g(4) \approx 3$ $g(5) \approx 1.7$

Với t > 3, f(t) âm và do đó ta bắt đầu phải trừ diện tích:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$



HÌNH 4

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

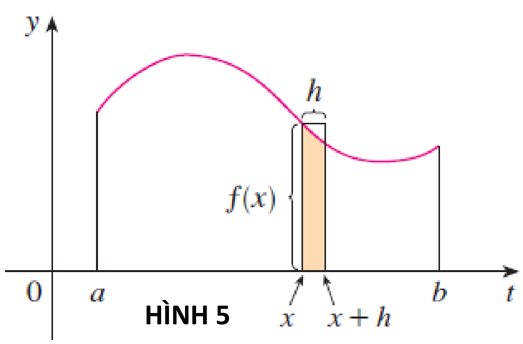
Ta dùng những giá trị này để phác họa đồ thị g như trong Hình 4. Chú ý rằng, vì f(t) dương khi t < 3, nên ta cộng dồn diện tích, do đó g đồng biến cho đến khi x = 3, tại đây nó đạt giá trị lớn nhất. Với x > 3, g nghịch biến vì f(t) âm.

Nếu ta lấy f(t) = t và a = 0, thế thì , dùng Bài tập 27 trong Bài 5.2, ta được

$$g(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$$

Chú ý rằng g '(x) = x, nghĩa là, g ' = f. Nói cách khác, nếu g được xác định là tích phân của f bởi Phương trình 1, thế thì g hóa ra là một nguyên hàm của f, ít nhất là trong trường hợp này. Và nếu ta vẽ đạo hàm của hàm số g như trong Hình 4 bằng cách ước tính các độ dốc của tiếp tuyến, ta được đồ thị giống như của f vẽ trong Hình 2. Đều này khiến ta ngờ rằng g ' = f cũng đúng trong Ví dụ 1.

Để thấy tại sao sự kiện này có thể là đúng trong trường hợp tổng quát, ta xét hàm số liên tục f bất kỳ với f(x) ≥ 0.



HÌNH 5

Thế thì g(x) = $\int_a^x f(t)dt$ biểu thị diện tích bên dưới đồ thị của f từ a đến x như trong Hình 1.

Để tính g '(x) từ định nghĩa của đạo hàm trước tiên nhận xét là với h > 0, g(x + h) – g(x) là hiệu số diện tích, do đó đó là diện tích bên dưới đồ thị f từ x đến x + h (diện tích màu cam trong Hình 5). Với h nhỏ bạn có thể thấy từ hình là diện tích này xấp xỉ bằng diện tích hình chữ nhật có chiều cao f(x) và chiều rộng h:

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x)$$

hay

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

Theo trực giác, kết quả này cho ta dự đoán

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Đây thực ra là đẳng thức đúng, dù cho f không luôn dương đi nữa, và chính là Định Lý Nền Tảng của Giải Tích.

ĐỊNH LÝ NỀN TẢNG CỦA GIẢI TÍCH, PHẦN I Nếu f liên tục trên [a, b], thế thì hàm số g định bởi

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad a\le x\le b$$

là hàm số liên tục trên [a, b] và khả vi trên (a, b), và g'x) = f(x).

CM Nếu x và x + h thuộc (a, b), thế thì

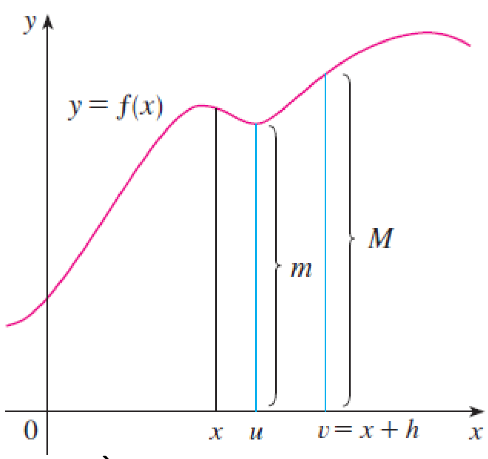
$$g(x+h)-g(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt$$

$$=\left(\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right)-\int_a^x f(t)\,dt$$

$$=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Và do đó, với h ≠ 0,

2 $$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$



HÌNH 6

Bây giờ giả sử h > 0. Vì f liên tục trên [x, x + h], theo Định Lý Giá Trị Cực Trị, tồn tại u và v thuộc [x, x + h] sao cho f(u) = m và f(v) = M, trong đó m và M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của f trên [x, x + h]. (Xem Hình 6.)

Theo Tính chất 8 của tích phân, ta có

$$mh\le\int_x^{x+h} f(t)dt$$

nghĩa là, $$f(u)h\le\int_x^{x+h} f(t)dt\le f(v)h$$

Vì h > 0, ta có thể chia bất đẳng thức này cho h:

$$f(u)\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\le f(v)$$

Thay vế giữa của bất đẳng thức trên bằng Phương trình 2:

3 $$f(u)\le\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\le f(v)$$

Bất đẳng thức 3 có thể được chứng minh tương tự trong trường hợp h < 0. (Xem Bài tập 67.)

Giờ ta cho h → 0. Thế thì u → x và v → x, vì u và v nằm giữa x và x + h. Do đó

$$\lim_{h\to 0} f(u)=\lim_{u\to x} f(u)=f(x)$$

$$\lim_{h\to 0} f(v)=\lim_{v\to x} f(v)=f(x)$$

vì f liên tục tại x. Ta kết luận, từ (3) và Định Lý Kẹp Giữa, là

4 $$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x)`$$

Nếu x = a hay b, thế thì Phương trình 4 có thể được xem như là giới hạn một bên. Và Định lý 2.8.4 (điều chỉnh cho giới hạn một bên) chứng tỏ rằng g liên tục trên [a, b].

Dùng ký hiệu Leibniz cho đạo hàm, ta có thể viết Định Lý Nền Tảng của Giải Tích Phần 1 dưới dạng

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)}$$

khi f liên tục. Nói cho dễ hiểu, Phương trình 5 nói rằng nếu trước tiên ta lấy tích phân rồi sau đó lấy đạo hàm, thì kết quả là t ở về hàm số f ban đầu.

VÍ DỤ 2 Tìm đạo hàm của hàm số g(x) = $\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$

GIẢI Vì f(t) $=\sqrt{1+t^2}$ liên tục, Phần 1 của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích cho ta

$$G'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

VÍ DỤ 3 Mặc dù một cách xác định hàm số dưới dạng g(x) = $\int_a^x f(t)dt$ trông có vẻ kỳ kỳ, nhưng các giáo trình vật lý, hóa học, và thống kê đầy dẫy những hàm số tuộc dạng ấy. Chẳng hạn, **hàm số Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)dt$$

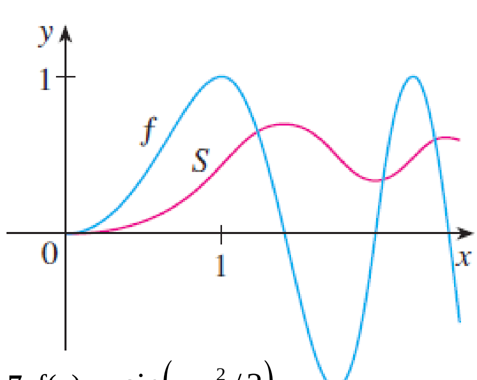
được đặt theo tên nhà vật lý người Pháp Augustin Fresnel (1788-1827), nổi tiếng với những công trình về quang học. Hàm số này lần đầu tiên xuất hiện trong lý thuyết của Fresnel về sự nhiễu xạ của sóng ánh sáng, nhưng gần đây đã được ứng dụng vào việc thiết kế xa lộ.

Phần I của Định Lý Nền Tảng chỉ cho ta cách lấy đạo hàm của hàm số Fresnel:

$$S'(x) = \sin\left(\pi x^2/2\right)$$

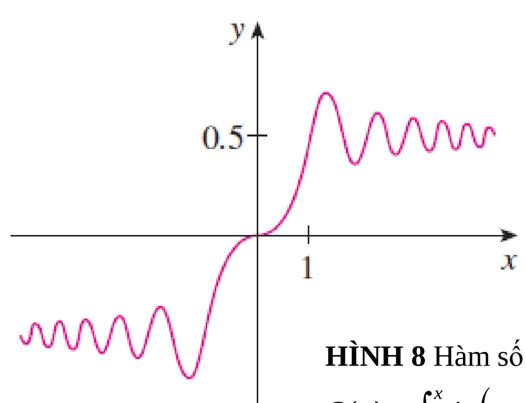
Điều này có nghĩa là ta có thể áp dụng mọi phương pháp của phép vi phân để phân tích S (xem Bài tập 61).

Hình 7 cho thấy những đồ thị của f(x) = $\sin\left(\pi x^2/2\right)$ và hàm số Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)dt$. Để vẽ đồ thị này, ta dùng máy tính để tính giá trị của tích phân với nhiều giá trị của x. Có vẻ như là S(x) là diện tích bên dưới đồ thị của f từ 0 đến x [cho đến khi x ≈ 1.4 thì S(x) trở thành hiệu diện tích]. Hình 8 cho thấy phần mở rộng hơn của đồ thị S.



HÌNH 7 f(x) = $\sin\left(\pi x^2/2\right)$

$S(x) = \int_0^x \sin\left(\pi x^2/2\right)dt$



HÌNH 8 Hàm số Fresnel

$S(x) = \int_0^x \sin\left(\pi x^2/2\right)dt$

Nếu bây giờ ta bắt đầu với đồ thị của S trong Hình 7 và nghĩ về hình dạng của đạo hàm của nó, ta thấy S ‘(x) = f(x) là hợp lý. [Chẳng hạn, S đồng biến khi f(x) > 0 và nghịch biến khi f(x) < 0.] Vì thế điều này cho ta khẳng định tính đúng đán của Phần 1 Định Lý Nền Tảng của Giải Tích về mặt hình ảnh.

VÍ DỤ 4 Tìm $\frac{d}{dx}\int_1^{x^4}\sec t dt.$

GIẢI Ở đây ta phải cẩn thận khi kết hợp Quy Tắc Dây Xích và Định Lý Nền Tảng Phần 1. Đặt u = x^4. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_1^{x^4}\sec t dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u}\sec t dt\\ &= \frac{d}{du}\left(\int_1^{u}\sec t dt\right)\frac{du}{dx} && \textit{(Quy tắc Dây Xích)}\\ &= \sec u\frac{du}{dx} && \textit{(Định Lý Nền Tảng 1)}\\ &= \sec(x^4)\,.\,4x^3\end{aligned}$$

Trong Bài 5.2 ta tính tích phân từ định nghĩa của giới hạn tổng Riemann và thấy rằng việc làm này thường nặng nề và vất vả. Phần hai của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích, một hệ quả hiển nhiên của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích Phần 1, sẽ cho ta một phương pháp đơn giản hơn, mạnh mẽ hơn để tính tích phân.

ĐỊNH LÝ NỀN TẢNG CỦA GIẢI TÍCH, PHẦN 2 Nếu f liên tục trên [a, b], thế thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kỳ của f, nghĩa là một hàm số sao cho F′ = f.

CM Đặt g(x) = $\int_a^x f(t)dt$. Từ phần 1 của Định Lý Nền Tảng ta biết rằng g ‘(x) = f(x); tức g là một nguyên hàm của f. Nếu F là một nguyên hàm bất kỳ của f trên [a, b], thì theo Hệ quả 4.2.7 F và g sai kém một hằng số:

6 F(x) = g(x) + C

với a < x < b. Nhưng cả F và g đều liên tục trên [a, b] và do đó, bằng cách lấy giới hạn hai vế Phương trình 6 (khi $x \to a^+$ và $x \to b^-$), ta thấy nó cũng đúng khi x = a và x = b.

Nếu ta cho x = a vào công thức của g(x) ta được: $g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

Do đó, dùng Phương trình 6 với x = b và x = a, ta có

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= [g(b)+C] - [g(a)+C]\\ &= g(b) - g(a) = g(b)\\ &= \int_a^b f(t)dt\end{aligned}$$

Phần 2 của Định Lý Nền Tảng chỉ ra rằng nếu ta biết một nguyên hàm F của f, thì ta có thể tính $\int_a^b f(x)dx$ đơn giản chỉ bằng cách tính hiệu số hai giá trị của F tại hai đầu mút của đoạn [a, b]. Thật đáng kinh ngạc khi $\int_a^b f(x)dx$, vốn được định nghĩa bằng một tiến trình liên quan đến mọi giá trị của f(x) với x thuộc [a, b], lại có thể tính được chỉ bằng htri của F(x) tại hai điểm, a và b.

Thoạt nhìn, định lý có thể gây ngạc nhiên, nhưng nếu ta nhìn nó dưới quan điểm vật lý, ta sẽ thấy nó hợp lý. Nếu v(t) là vận tốc của một vật thể và s(t) là vị trí của nó tại thời điểm t, thế thì s'(t) = v(t), như vậy s là một nguyên hàm của v. Trong Bài 5.1 ta đã xét một vật thể luôn di chuyển theo chiều dương và dự đoán là diện tích bên dưới đồ thị vận tốc thì bằng quảng đường di chuyển . Bằng ký hiệu:

$$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)$$

Đó chính xác là những gì Định Lý Nền Tảng Phần 2 đã nói trong bài này.

VÍ DỤ 5 Tính tích phân $\int_1^3 e^x dx$.

GIẢI Hàm số f(x) = e^x liên tục ở mọi nơi và ta biết một nguyên hàm của nó là F(x) = e^x, vì thế Phần 2 của Định Lý Nền Tảng cho ta

$$\int_1^3 e^x dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Chú ý rằng Định Lý Nền Tảng của Phần 2 sử dụn g một nguyên hàm bất kỳ F của f, vì thế ta dùng nguyên hàm nào đơn giản nhất, ở đây là F(x) = e^x, thay vì $e^x + 7$ hay $e^x + C$.

Ta thường dùng ký hiệu: $F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

Và phương trình của Phân 2 có thể viết

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{trong đó} \quad F' = f$$

Một ký hiệu thường dùng khác là $F(x)\Big|_a^b$ *hay* $\big[F(x)\big]_a^b$.

VÍ DỤ 6 Tìm diện tích bên dưới parabol y = x^2 từ 0 đến 1.

GIẢI Một nguyên hàm của f(x) = x^2 là F(x) = $\frac{1}{3}x^3$. Diện tích cần tìm A cho bởi Phần 2 của Định Lý Nền Tảng:

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

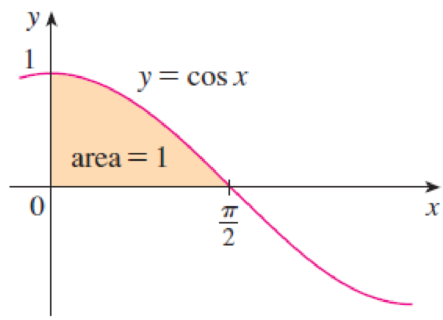
Nếu ta so sánh phép tính trong Ví dụ 6 với phép tính trong Ví dụ 2 trong Bài 5.1, ta thấy ngay Định Lý Nền Tảng của Giải Tích cho ta một phương pháp thận lợi hơn nhiều.

VÍ DỤ 7 Tính $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

GIẢI Tích phân cần tìm là cách viết tắt của $\int_3^6 \frac{1}{x}dx$.

Một nguyên hàm của f(x) = 1/x là F(x) = ln | x | và vì 3 ≤ x ≤ 6, ta có thể viết F(x) = ln x. Và do đó

$$\int_3^6 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3 = \ln\frac{6}{3} = \ln 2$$



VÍ DỤ 8 Tìm diện tích bên dưới đường cong y = cos x từ 0 đến b, trong đó 0 ≤ b ≤ π/2.

GIẢI Vì một nguyên hàm của f(x) = cos x là F(x) = sin x, ta có

$$A = \int_0^b \cos x dx = \sin x\Big]_0^b = \sin b - \sin 0 = \sin b$$

Đặc biệt, lấy b = π/2, ta đã chứng tỏ rằng diện tích bên dưới đường congcosine từ 0 đến π/2 là sin(π/2) = 1.(Xem Hình 9).

Khi nhà toán học Pháp Gilles de Roberval lần đầu tiên tìm được diện tích bên dưới đường cong cosin, thì đây là bài toán đòi hỏi một kỹ năng điêu luyện. Nếu không dùng Định Lý Nền Tảng, thì để giải được, ta phải tính được giới hạn phức tạp của một tổng dựa vào những đẳng thức lượng giác rối rắm. Càng khó hơn cho Roberval vì vào thời điểm 1635 các công cụ tìm giới hạn chưa được biết đến. Nhưng vào thập niên 1660 và 1670 khi Định Lý Nền Tảng của Giải Tích được Barrow phát hiện và sau đó Newton cùng Leibniz hoàn thiện, những bài toán loại này trở thành dễ dàng ai cũng giải được như bạn vừa thấy trong Ví dụ 8.

VÍ DỤ 9 Phép tính sau có điều gì sai?

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

GIẢI Trước tiên, chú ý là phép tính này nhìn qua là ta biết là sai vì đáp số là một số âm trong khi f(x) = $1/x^2 \ge 0$ thì theo Tính chất 6 của tích phân, đáng lẽ ta phải có $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.Định Lý Nền Tảng của Giải Tích áp dụng cho các hàm số liên tục. Ở đây hàm số f(x) = $1/x^2$ không liên tục trên [-1, 3]. Đúng ra, f gián đoạn vô hạn tại x = 0, do đó

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}dx \quad \text{không tồn tại}$$

VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN XEM NHƯ TIẾN TRÌNH THUẬN NGHỊCH

Ta kết thúc bài này bằng cách nhắc lại hai phần của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích.

ĐỊNH LÝ NỀN TẢNG CỦA GIẢI TÍCH Cho f liên tục trên [a, b].

I Nếu $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, thì g′(x) = f(x).

là hàm số liên tục trên [a, b] và khả vi trên (a, b), và g′x) = f(x).

2. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm bất kỳ của f, nghĩa là F′ = f.

Chú ý là Phần 1 có thể viết lại là: $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Có nghĩa là nếu ta tích phân f rồi lại lấy đạo hàm kết quả có được, thì cuối cùng ta được trở lại hàm số f. Vì F'(x) = f(x), Phần 2 có thể viết lại là

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

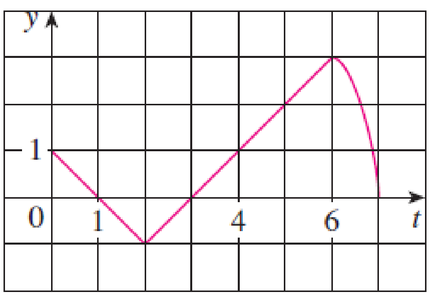
Có nghĩa là, với một hàm số F cho trước, nếu trước tiên ta lấy đạo hàm của nó, rồi sau đó lấy tích phân kết quả có được, thì cuối cùng ta trở về hàm số ban đầu F, dưới dạng F(b) – F(a). Gộp chung lại, hai phần của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích nói rằng vi phân và tích phân là hai tiến trình thuận nghịch. Chiêu thức này hóa giải chiêu thức kia.

Định Lý Nền Tảng của Giải Tích không nghi ngờ gì nữa là định lý quan trọng nhất của giải tích và, thật ra, nó được xếp vào một trong những thành tựu vĩ đại nhất của trí tuệ nhân loại. Trước khi nó được khám phá, từ thời của Eudoxus và Archimedes đến thời của Galileo và Fermat, những bài toán tìm diện tích, thể tích, và độ dài của đoạn cong là những bài toán thách đố đến nổi chỉ có những thiên tài mới giải được. Nhưng giờ đây, được trang bị với phương pháp có tính hệ thống của Định Lý Nền Tảng mà Newton và Leibniz đã ban tặng, trong những bài tới ta sẽ thấy rằng những bài toán thách thức này đều nằm trong tầm tay của mọi người chúng ta.

BÀI TẬP

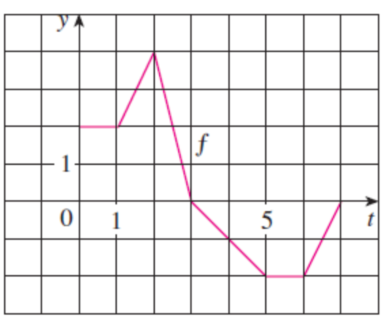
1. Giải thích chính xác phát biểu "vi phân và tích phân là những tiến trình thuận nghịch" có nghĩa là gì?

2. Cho g(x) = $\int_0^x f(t)dt$, trong đó f là hàm số có đồ thị cho bởi hình dưới.



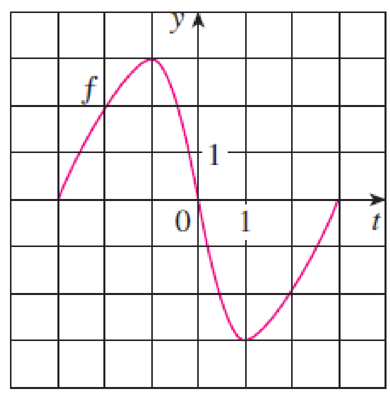
(a) Tình g(x) với x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, và 6.
(b) Tính g(7).
(c) g đạt giá trị cực đại tại đâu? Cực tiểu tại đâu?
(d) Phác họa sơ đồ thị của g.

3. Cho g(x) = $\int_0^x f(t)dt$, trong đó f là hàm số có đồ thị cho bởi hình dưới.



(a) Tình g(x) với x = 0, 1, 2, 3, và 6.
(b) Trên khoảng nào g đồng biến?.
(c) g đạt giá trị cực đại tại đâu?
(d) Phác họa sơ đồ thị của g.

4. Cho g(x) = $\int_0^x f(t)dt$, trong đó f là hàm số có đồ thị cho bởi hình dưới.



(a) Tình g(- 3) và g(3).
(b) Tính g()-2), g(-1), và g(0).
(c) Trên khoảng nào g đồng biến?.
(d) g đạt giá trị cực đại tại đâu?
(e) Phác họa sơ đồ thị của g.
(f) Dùng đồ thị của g trong phần (e) để vẽ đồ thị của g'(x). So sánh với đồ thị của f.

5-6. Phác họa diện tích biểu thị bởi g(x). Rồi tìm g'(x) bằng 2 cách: (a) dùng Phần 1 cu Định Lý Nền Tảng và (b) tính tích phân dùng Phần 2 rồi lấy vi phân.

5. $g(x)=\int_1^x t^2dt$ **6.** $g(x)=\int_0^x(1+\sqrt{t})dt$

7-18. Dùng Phần 1 của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích để tìm đạo hàm các hàm số sau.

7. $g(x)=\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt$ **8.** $g(x)=\int_3^x e^{t^2-t}\,dt$

9. $g(y)=\int_2^y t^2\sin t\,dt$ **10.** $g(r)=\int_0^r \sqrt{x^2+4}\,dx$

11. $F(x)=\int_x^\pi \sqrt{1+\sec t}\,dt$

$\left[\textit{Hint}: \int_x^\pi \sqrt{1+\sec t}\,dt=-\int_\pi^x \sqrt{1+\sec t}\,dt\right]$

12. $G(x)=\int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

13. $h(x)=\int_2^{1/x}\arctan t\,dt$ **14.** $h(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+r^3}\,dr$

15. $y=\int_0^{\tan x}\sqrt{t+\sqrt{t}}\,dt$ **16.** $y=\int_1^{\cos x}(1+v^2)^{10}\,d$

17. $y=\int_{1-3x}^1 \frac{u^3}{1+u^2}\,du$ **18.** $y=\int_{e^x}^0 \sin^3 t\,dt$

19-42. Tính các tích phân sau.

19. $\int_{-1}^2 (x^3-2x)\,dx$ **20.** $\int_{-2}^5 6\,dx$

21. $\int_1^4 (5-2t+3t^2)\,dt$ **22.** $\int_0^1 \left(1+\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{5}u^9\right)du$

23. $\int_0^1 x^{4/5}\,dx$ **24.** $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

25. $\int_1^2 \frac{3}{t^4}\,dt$ **26.** $\int_\pi^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$

27. $\int_0^2 x(2+x^5)\,dx$ **28.** $\int_0^1 (3+x\sqrt{x})\,dx$

29. $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ **30.** $\int_0^2 (y-1)(2y+1)\,dy$

31. $\int_0^{\pi/4}\sec^2 t\,dt$ **32.** $\int_0^{\pi/4}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

33. $\int_1^2 (1+2y)^2\,dy$ **34.** $\int_0^1 \cosh t\,dt$

35. $\int_1^9 \frac{1}{2x}\,dx$ **36.** $\int_0^1 10^x\,dx$

37. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{6}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ **38.** $\int_0^1 \frac{4}{t^2+1}\,dt$

39. $\int_{-1}^1 e^{u+1}\,du$ **40.** $\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3}\,du$

41. $\int_0^\pi f(x)\,dx$ where $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{if } 0\leqslant x<\pi/2\\ \cos x & \text{if } \pi/2\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$

42. $\int_{-2}^2 f(x)\,dx$ where $f(x)=\begin{cases}2 & \text{if } -2\leqslant x\leqslant 0\\ 4-x^2 & \text{if } 0<x\leqslant 2\end{cases}$

43-46. Phương trình sau có gì sai?

43. $\int_{-2}^1 x^{-4}\,dx=\left.\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^1=-\frac{3}{8}$

44. $\int_{-1}^2 \frac{4}{x^3}\,dx=\left.-\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^2=\frac{3}{2}$

45. $\int_{\pi/3}^\pi \sec\theta\tan\theta\,d\theta=\sec\theta\Big]_{\pi/3}^\pi=-3$

46. $\int_0^\pi \sec^2 x\,dx=\tan x\Big]_0^\pi=0$

47-50. Dùng đồ thị (vẽ bằng máy) để ước tính sơ diện tích của miền nằm bên dưới đường cong cho trước. Sau đó tìm diện tích chính xác của nó.

47. $y=\sqrt[3]{x},\quad 0\le x\le 27$ **48.** $y=x^4,\ 1\le x\le 6$

49. $y=\sin x,\quad 0\le x\le\pi$ **50.** $y=\sec^2 x,\quad 0\le x\le\pi/3$

51-52. Tính tích phân và giải thích nó như là hiệu của các diện tích. Minh họa bằng hìnhvẽ.

51. $\int_{-1}^2 x^3dx$ **52.** $\int_{\pi/4}^{5\pi/2}\sin x\,dx$

53-56. Tìm đạo hàm các hàm số sau.

53. $g(x)=\int_{2x}^{3x}\frac{u^2-1}{u^2+1}\,du$

$\left[\textit{Hint}: \int_{2x}^{3x} f(u)\,du=\int_{2x}^0 f(u)\,du+\int_0^{3x} f(u)\,du\right]$

54. $g(x)=\int_{\tan x}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{2+t^4}}\,dt$

55. $y=\int_{\sqrt{x}}^{x^3}\sqrt{t}\sin t\,dt$

56. $y=\int_{\cos x}^{5x}\cos(u^2)\,du$

57. Nếu F(x) = $\int_1^x f(t)dt$, trong đó f(t) = $\int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} du$, tìm F ”(2).

58. Tìm khoảng trên đó đường cong $y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt$ có bề lõm quay lên.

59. Nếu f(1) = 12, f ’ liên tục, và $\int_1^4 f'(x)dx = 17$, tìm giá trị của f(4).

60. Hàm số sai số

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

được dùng trong xác suất, thống kê, và kỹ thuật.

(a) Chứng tỏ rằng $\int_a^b e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}[erf(b) - erf(a)]$.

(b) Chứng tỏ rằng hàm số $y = e^{x^2} erf(x)$ tho3ama4n phương trình vi phân y ’ = 2xy + 2/$\sqrt{\pi}$.

61. Hàm số Fresnel S được định nghĩa trong Ví dụ 3 và vẽ đồ thị trong Hình 7 và 8.

(a) Tại những giá trị nào của x thì hàm số này đạt giá trị cực đại?

(b) Trên khoảng nào hàm số có bề lõm quay lên?

(c) Dùng đồ thị để giải phương trình sau đúng đến hai chữ số thập phân:

$$\int_0^x \sin(\pi t^2/2)dt = 0.2$$

62. Hàm số tích phân sine

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

quan trọng trong kỹ thuật điện. [Hàm số dưới dấu tích phân f(t) = (sin t) / t bấtđịnh khi t = 0, nhưng ta biết giới hạn của nó bằng 1 khi t → 0. Vì thế ta định nghĩa f(0) = 1 và điều này làm f liên tục ở mọi nơi.]

(a) Vẽ đồ thị của Si (dùng máy).

(b) Tại những giá trị nào của x thì hàm số này đạt giá trị cực đại?

(c) Tìm toạ độ của điểm uốn đầu tiên ở bên phải điểm gốc.

(d) Hàm số này có tiệm cận ngang không?

(e) Giải phương trình sau đúng đến một chữ số thập phân:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = 1$$

63-64. Cho $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, trong đó f là hàm số có đồ thị cho trước.

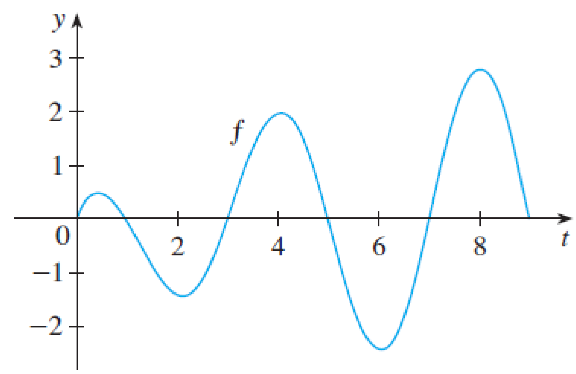
(a) Tại những giá trị nào của x thì hàm số này đạt giá trị cực đại và cực tiểu?

(b) Hàm số đạt giá trị lớn nhất ở đâu?

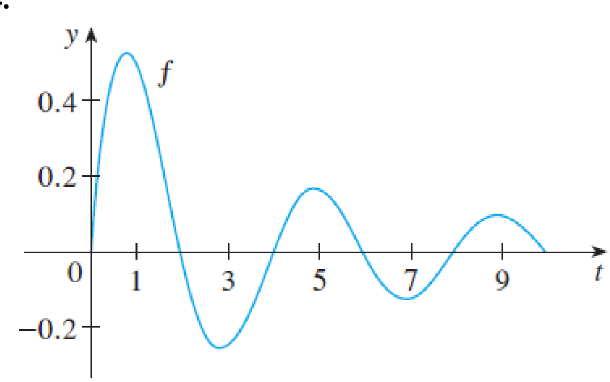
(c) Trên khoảng nào hàm số có bề lõm quay xuống?

(d) Phác họa đồ thị của g.

63.



64.



65-66. Tính giới hạn bằng cách xem nó như là tổng Riemann đối với hàm số xác định trên [0, 1].

65. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

66. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

67. Chứng minh (3) trường hợp h < 0.

68. Nếu f liên tục và g và h đều là các hàm số khả vi, tìm công thức cho

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

69. (a) Chứng tỏ rằng $1 \le \sqrt{1+x^3} \le 1+x^3$ với $x \ge 0$.

(b) Chứng tỏ rằng $1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^3} \le 1.25$

70. (a) Chứng tỏ rằng $\cos(x^2) \ge \cos x$ với $0 \le x \le 1$.

(b) Suy ra rằng $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)dx \ge 1/2$.

71. Chứng tỏ rằng

$$0 \le \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx \le 0.1$$

bằng cách so sánh hàm số dưới dấu tích phân với một hàm số đơn giản hơn.

72. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 0 & khi \;\; x<0 \\ x & khi \;\; 0 \le x \le 1 \\ 2-x & khi \;\; 1 < x \le 2 \\ 0 & khi \;\; x > 2 \end{cases}$$

và $$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

(a) Tìm biểu thức của g(x) tương tự như biểu thức của f(x).

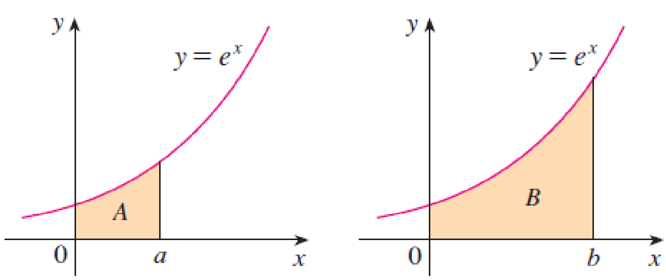
(b) Vẽ đồ thị của f và g.

(c) Ở đâu thì f khả vi? Ở đâu thì g khả vi?

73. Tìm một hàm số f và một số a sao cho

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x} \quad \text{với mọi } x > 0$$

74. Diện tích B gấp ba lần diện tích A.Biểu diễn b theo a.



75. Một công sản xuất sở hữu một thiết bị chủ yếu giảm giá theo tỷ lệ (liên tục) f = f(t) , trong đó t là thời gian tính bằng tháng kể từ lần đại tu sau cùng. Vì công ty phải chịu một chi phí cố định A mỗi lần thiết bị đại tu, công ty muốn xác định thời gian tối ưu T (tháng) giữa các lần đại tu.

(a) Giải thích tại sao $\int_0^t f(s)ds$ biểu thị sự mất mát giá trị của thiết bị qua thời gian t kể từ lần đại tu sau cùng.

(b) Cho C = C(t) là hàm số định bởi

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)ds\right]$$

C biểu thị điều gì và tại sao công ty muốn tối thiểu hóa C?

(c) Chứng tỏ rằng C đạt giá trị nhỏ nhất tại số t = T thỏa C(T) = f(T).

76. Một công ty kỹ thuật cao mua một hệ thống máy tính có giá trị ban đầu là V. Hệ thống giảm giá với tỷ lệ f = f(t) và sẽ tích lũy chi phí bảo trì với tỷ lệ g = g(t), trong đó t là thời gian tính bằng tháng. Công ty muốn xác định thời điểm tối ưu để thay mới hệ thống.

(a) Cho

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s)+g(s)]ds$$

Chứng tỏ rằng các giá trị tới hạn của C xảy ra tại những số t sao cho C(t) = f(t) + g(t).

(b) Giả sử

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & khi \;\; 0 < t \le 30 \\ 0 & khi \;\; t > 30 \end{cases}$$

và $$g(t) = \frac{Vt^2}{12{,}900} \qquad t > 0$$

Xác định khoảng thời gian T sao cho sự giảm giá toàn phần D(t) = $\int_0^t f(s)ds$ bằng với giá trị ban đầu V.

(c) Xác định giá trị nhỏ nhất của C trên (0, T].

(d) Vẽ đồ thị của C và f + g trên cùng hệ toạ độ, và xác nhận lại kết quả đã làm ở phần (a) trong trường hợp này.

ĐÁP SỐ

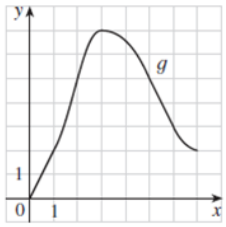
1. Chiêu thức này "hóa giải" chiêu thức kia.

3. (a) 0, 2, 5, 7, 3

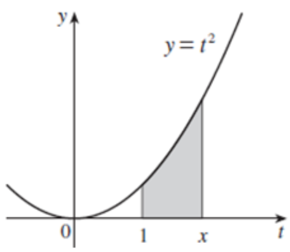
(b) (0, 3)

(c) $x = 3$

(d)



5.



(a), (b) x^2

7. $g'(x) = 1/(x^3 + 1)$

9. $g'(y) = y^2 \sin y$ **11.** $F'(x) = -\sqrt{1 + \sec x}$

13. $h'(x) = -\dfrac{\arctan(1/x)}{x^2}$ **15.** $y' = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x}}\,\sec^2 x$

17. $y' = \dfrac{3(1 - 3x)^3}{1 + (1 - 3x)^2}$ **19.** $\frac{3}{4}$ **21.** 63

23. $\frac{5}{9}$ **25.** $\frac{7}{8}$ **27.** $\frac{156}{7}$ **29.** $\frac{40}{3}$ **31.** 1 **33.** $\frac{49}{3}$

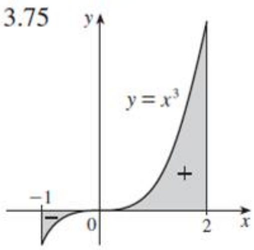
35. $\ln 3$ **37.** π **39.** $e^2 - 1$ **41.** 0

43. Hàm số $f(x) = x^{-4}$ không liên tục trên khoảng [- 2 , 1] do đó không thể áp dụng Định Lý Nền Tảng Phần 2 được.

45. Hàm số $f(\theta) = \sec \theta \tan \theta$ không liên tục trên đoạn $[\pi/3, \pi]$, nên không thể áp dụng Định Lý Nền Tảng 2 được.

47. $\frac{243}{4}$ **49.** 2

51. 3.75



53. $g'(x) = \dfrac{-2(4x^2 - 1)}{4x^2 + 1} + \dfrac{3(9x^2 - 1)}{9x^2 + 1}$

55. $y' = 3x^{7/2}\sin(x^3) - \dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt[4]{x}}$ **57.** $\sqrt{257}$ **59.** 29

61. (a) $-2\sqrt{n}, \sqrt{4n - 2}$, n an integer > 0

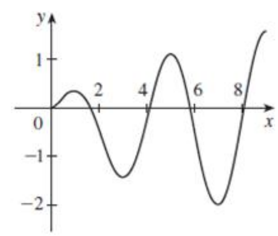
(b) $(0, 1), \left(-\sqrt{4n - 1}, -\sqrt{4n - 3}\right)$, and $\left(\sqrt{4n - 1}, \sqrt{4n + 1}\right)$, n an integer > 0 (c) 0.74

63. (a) Loc. max. at 1 and 5; loc. min. at 3 and 7

(b) $x = 9$

(c) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, (4, 6), (8, 9)

(d) See graph at right.



65. $\frac{1}{4}$ **73.** $f(x) = x^{3/2}, a = 9$

75. (b) Average expenditure over $[0, t]$; minimize average expenditure

BÀI 5.4. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH VÀ ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN THỰC SỰ

Ta đã biết trong Bài 5.3 là phần hai của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích cho ta một công cụ đầu sức mạnh để tính các tích phân xác định của một hàm số, miễn là ta tìm được nguyên hàm của hàm số đó. Trong bài này ta giới thiệu một ký hiệu cho nguyên hàm, liệt kê các công thức tính nguyên hàm, và dùng chúng để tính các tích phân xác định. Ta cũng công thức hóa lại Định Lý Nền Tảng 2 theo cách giúp ta ứng dụng nó dễ dàng hơn vào các bài toán trong khoa học và kỹ thuật.

TÍCH PHÂN BẤTĐỊNH

Cả hai phần của Định Lý Nền Tảng thiết lập mối liên hệ giữa nguyên hàm và tích phân xác định. Phần 1 nói rằng nếu f liên tục, thì $\int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của f. Phần 2 nói rằng $\int_a^b f(x)dx$ có thể được tìm bằng F(b) – F(a), trong đó F là một nguyên hàm của f.

Ta cần một ký hiệu thuận tiện cho nguyên hàm, nhờ đó ta dễ dàng vận dụng hơn. Vì mối liên hệ cho bởi Định Lý Nền Tảng giữa nguyên hàm và tích phân xác định, ký hiệu $\int f(x)dx$ thường được dùng để chỉ một nguyên hàm của f và được gọi là **tích phân bấtđịnh**.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \quad \text{có nghĩa là} \quad F'(x) = f(x)}$$

Chẳng hạn, ta có thể viết

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{vì} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

Vì thế ta có thể coi một tích phân bấtđịnh là biểu thị họ tất cả nguyên hàm (mỗi giá trị C ứng với một nguyên hàm của hàm số).

Bạn nên phân biệt cẩn thận giữa tích phân xác định và bấtđịnh. Một tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ là một con số, trong khi một tích phân bấtđịnh $\int f(x)dx$ là một hàm số (hay một họ hàm số). Mối liên hệ giữa chúng cho bởi Phần 2 của Định Lý Nền Tảng. Nếu f liên tục trên [a, b], thì

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big]_a^b$$

Định Lý Nền Tảng của Giải Tích chỉ phát huy tác dụng khi ta được cung cấp nguyên hàm của hàm số. Do đó ta sẽ đúc kết bên dưới Bảng Công thức Nguyên hàm từ Bài 4.9, bổ sung thêm một số nguyên hàm mới, viết dưới ký hiệu tích phân bấtđịnh. Bất kỳ công thức nguyên hàm nào đều có thể kiểm chứng bằng cách lấy đạo hàm của hàm số ở cột bên phải để được kết quả là hàm số dưới dấu tích phân. Chẳng hạn

$$\int \sec^2 xdx = \tan x + C \qquad \text{vì} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

1 BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + C$$

Nhớ lại từ Định lý 4.9.1 là nguyên hàm tổng quát nhất trên một khoảng cho trước có thể có được bằng cách cộng thêm một hằng số vào một nguyên hàm bất kỳ. **Ta công nhận quy ước là khi một nguyên hàm tổng quát được cho biết, nguyên hàm ấy chỉ có giá trị trên một khoảng.** Do đó ta viết

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$$

Phải hiểu là nó chỉ giá trị trên khoảng (0, ∞) hoặc (- ∞, 0). Nói đúng ra ta phải viết nguyên hàm tổng quát của hàm số f(x) = $1/x^2$, x ≠ 0 , là

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & khi \;\; x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & khi \;\; x > 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ 1 Tìm tích phân bấtđịnh tổng quát

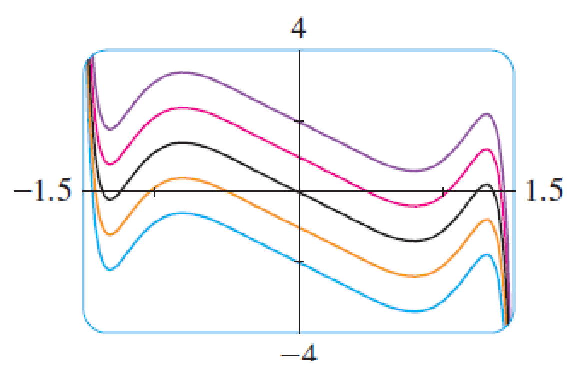
$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)dx$$

GIẢI Dùng quy ước và Bảng 1, ta có

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)dx = 10\int x^4 dx - 2\int \sec^2 x dx$$

$$= 10\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C = 2x^5 - 2\tan x + C$$

Ta có thể kiểm tra kết quả này bằng cách lấy đạo hàm của nó.



HÌNH 1 Đồ thị của tích phân bấtđịnh trong Ví dụ 1 được vẽ với vài giá trị của C. Giá trị C là tung độ của giao điểm với trục tung.

VÍ DỤ 2 Tính $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

GIẢI Tích phân bấtđịnh này không có sẵn trong Bảng 1, vì thế ta phải dùng các đẳng thức lượng giác để viết lại hàm số trước khi lấy tích phân:

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \int \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta$$
$$= \int \csc\theta\cot\theta\, d\theta = -\csc\theta + C$$

VÍ DỤ 3 Tính $\int (x^3 - 6x)dx$

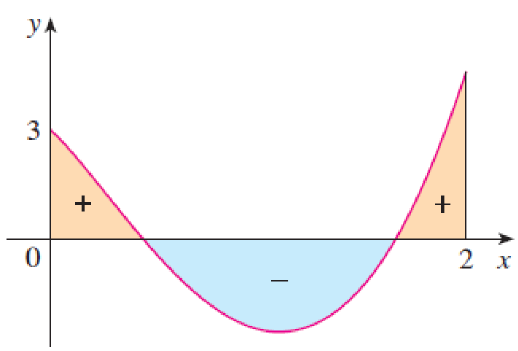
GIẢI Dùng ĐLNT 2 (Định Lý Nền Tảng Phần 2) và Bảng 1, ta có

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\Bigg]_0^3$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$
$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75$$

So sánh phép tính này với Ví dụ 2(b) trong Bài 5.2.

VÍ DỤ 4 Tìm $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \dfrac{3}{x^2+1}\right) dx$

GIẢI ĐLNT cho ta



HÌNH 2 Đồ thị của hàm số dưới dấu tích phân trong Ví dụ 4. Ta đã biết từ Bài 5.2, giá trị tích phân có thể xem là tổng các diện tích có dấu + trừ cho diện tích mang dấu - .

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx = 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Bigg]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0$$
$$= -4 + 3\tan^{-1}2$$

Đây là giá trị chính xác của tích phân. Nếu muốn tính xấp xỉ với độ chính xác nào đó, ta dùng máy tính để tính xấp xỉ $\tan^{-1}2$. Làm thế, ta được

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0.67855$$

VÍ DỤ 5 Tính $\int_{1\backslash}^9 \dfrac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}dt$

GIẢI Trước tiên ta cần viết hàm số dưới dấu tích phân dưới dạng đơn giản hơn bằng cách thực hiện phép chia:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$

$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Bigg]_1^9$$
$$= \left(2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}\cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$
$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

ỨNG DỤNG

Phần 2 của Định Lý Nền Tảng nói rằng nếu f liên tục trên [a, b], thế thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kỳ của f. Điều này có nghĩa là F' = f, do đó công thức trên có thể viết lại thành

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ta biết rằng F'(x) biểu thị tốc độ biến thiên của y = F(x) đối với x và F(b) – F(a) là số gia (biến thiên) của y khi x biến thiên từ a đến b. [Chú ý là y có thể đồng biến, rồi nghịch biến, rồi lại đồng biến lần nữa. Mặc dù y có thể biến thiên theo cả hai chiều, hiệu F(b) – F(a) biểu thị độ biến thiên thực sự (net change) của y.] Do đó ta có thể phát biểu lại ĐLNT2 thành lời như sau

ĐỊNH LÝ BIẾN THIỆN THỰC SỰ *Tích phân của tốc độ biến thiên thì bằng với độ biến thiên thực sự:*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nguyên tắc này có thể ứng dụng cho mọi tốc độ biến thiên trong khoa học tự nhiên và xã hội mà chúng ta đã đề cập trong Bài 3.7. Đây là một ít các tình huống của ý tưởng này:

- Nếu V(t) là thể tích của nước trong bình chứa tại thời điểm t, thế thì đạo hàm của nó V'(t) là tốc độ nước chảy trong bình chứa tại thời điểm t. Do đó

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)dt = V(t_2) - V(t_1)$$

là biến thiên của lượng nước trong bình chứa giữa thời điểm t_1 và thời điểm t_2.

- Nếu [C](t) là nồng độ của sản phẩm của phản ứng hóa học tại thời điểm t, thế thì tốc độ phản ứng là đạo hàm d[C]/dt. Do đó

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[C]}{dt}dt = [C](t_2) - [C](t_1)$$

là biến thiên của nồng độ của C từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2.

- Nếu khối lượng của một thanh đo từ đầu mút trái đến điểm x là m(x), thế thì tỷ trọng tuyến tính là ρ(x) = m ' (x). Do đó

$$\int_a^b \rho(x)dx = m(b) - m(a)$$

là khối lượng của đoạn thanh nằm giữa x = a và x = b.

- Nếu tốc độ biến thiên của dân số là dn/dt, thế thì : $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}dt = n(t_2) - n(t_1)$

là biến thiên thực sự của dân số trong khoảng thời gian từ t_1 tới t_2. (Dân số tăng khi có sinh và giảm khi có tử. Biến thiên thực sự kể cả sinh lẫn tử.)

- Nếu C(x) là chi phí sản xuất x đơn vị sản phẩm, thế thì chi phí cận biên là đạo hàm C'(x). Do đó

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)dx = C(x_2) - C(x_1)$$

là độ tăng chi phí khi sản xuất tăng từ x_1 đến x_2 đơn vị.

- Nếu một vật thể chuyển động trên một đường thẳng với hàm số vị trí s(t), thì vận tốc là v(t) = s'(t), do đó

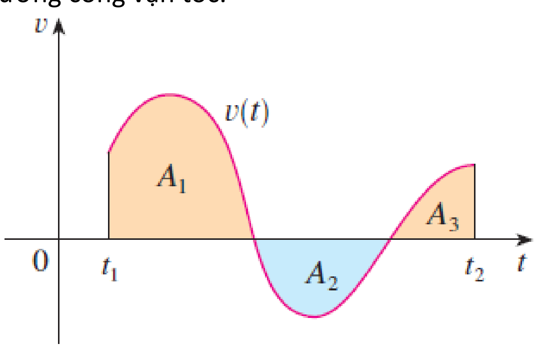
$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

là độ biến thiên thực sự của vị trí , tức độ dời chỗ, của vật thể trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2. Trong Bài 5.1 ta dự đoán là điều này đúng khi vật thể di chuyển theo chiều dương, nhưng bây giờ ta đã chứng tỏ rằng điều này luôn luôn đúng.

- Nếu ta muốn tình quãng đường mà vật thể đi được trong khoảng thời gian nó, ta phải xét các khoảng thời gian khi v(t) ≥ 0 (vật thể di chuyển sang phải) và khoảng thời gian khi v(t) ≤ 0 (vật thể di chuyển sang trái). Trong cả hai trường hợp quãng đường được tính bằng cách lấy tích phân của |v(t)|, tức vận tốc. Do đó

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = \text{ toàn thể quãng đường đi được}$$

Hình 3 cho thấy bằng cách nào độ dời chỗ và quãng đường đi được có thể được lý giải theo diện tích bên dưới đường cong vận tốc.



đoạn dời chỗ $= \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = A_1 - A_2 + A_3$

quãng đường : $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = A_1 + A_2 + A_3$

HÌNH 3

- Gia tốc của vật thể là a(t) = v '(t), do đó

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$

là độ biến thiên của vận tốc từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2.

VÍ DỤ 6 Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t là $v(t) = t^2 - t - 6$ (tính bằng mét trên giây).

(a) Tìm độ dời chỗ của chất điểm ttrong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$.

(b) Tìm quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này.

GIẢI

(a) Theo Phương trình 2, độ dời chỗ là

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)dt$$
$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Điều này có nghĩa là chất điểm dời đi 4.5 m về phía trái.

(b) Chú ý là $v(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$, nên $v(t) \le 0$ trên đoạn [1, 3] và $v(t) \ge 0$ trên [3, 4]. Do đó, từ Phương trình 3, quãng đường đi được là

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt$$

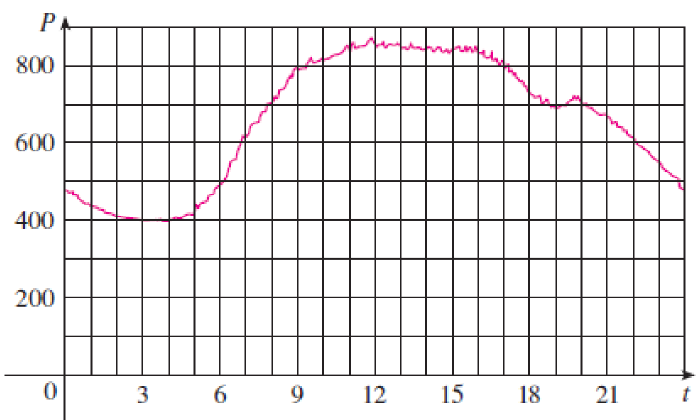
$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}$$

* Để) tích phân giá trị tuyệt đối của v(t), ta dùng Tính chất 5 của tích phân để tách tích phân phải tính thành hai phần ứng với $v(t) \le 0$ và $v(t) \ge 0$.

VÍ DỤ 7 Hình 4 cho thấy công suất điện tiêu thụ trong thành phố San Francisco trong một ngày tháng chín (P tính bằng megawatt; t tính bằng giờ bắt đầu từ nửa đêm) . Ước tính điện năng sử dụng trong ngày đó.



GIẢI Công suất là tốc độ biến thiên của năng lượng: $P(t) = E'(t)$. Do đó, theo Định Lý Biến Thiên Thực Sự,

$$\int_0^{24} P(t)dt = \int_0^{24} E'(t)dt = E(24) - E(0)$$

là toàn bộ năng lượng sử dụng trong ngày đó. Ta tính xấp xỉ giá trị xấp xỉ của tích phân dùng Quy Tắc Trung Điểm với 12 phân đoạn và $\Delta t = 2$:

$$\int_0^{24} P(t)\,dt \approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t$$

$$\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850$$
$$+ 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2)$$

$$= 15{,}840$$

Năng lượng tiêu thụ xấp xỉ 15,840 megawatt-giờ.

Làm sao ta biết dùng đơn vị nào trong Ví dụ 7? Tích phân $\int_0^{24} P(t)dt$ được định nghĩa là giới hạn của tổng các số hạng có dạng $P(t_i^*)\,\Delta t$. Vì lượng $P(t_i^*)$ tính bằng megawatt và Dt tính bằng giờ, do đó tích của chúng tính bằng megawatt-giờ. Và do đó giới hạn của chúng cũng tính bằng megawatt- giờ. Tổng quát, đơn vị số đo của $\int_a^b f(x)dx$ là tích đơn vị tính f(x) với đơn vị tính x.

BÀI TẬP

1-4. Kiểm tra các công thức sau là đúng bằng cách lấy

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx} + C$

đạo hàm.

5-18. Tìm tích phân bấtđịnh tổng quát

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})\,dx$

6. $\displaystyle\int (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2})\,dx$

7. $\displaystyle\int (x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x - 2)\,dx$

8. $\displaystyle\int (y^3 + 1.8y^2 - 2.4y)\,dy$

9. $\displaystyle\int (1-t)(2+t^2)\,dt$

10. $\displaystyle\int v(v^2+2)^2\,dv$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$

13. $\displaystyle\int (\sin x + \sinh x)\,dx$

14. $\displaystyle\int (\csc^2 t - 2e^t)\,dt$

15. $\displaystyle\int (\theta - \csc\theta\cot\theta)\,d\theta$

16. $\displaystyle\int \sec t(\sec t + \tan t)\,dt$

17. $\displaystyle\int (1+\tan^2\alpha)\,d\alpha$

18. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$

19-20. Tìm tích phân bấtđịnh tổng quát. Minh họa bằng cách vẽ đồ thị vài thành viên của họ nguyên hàm trên cùng một khung hình.

19. $\displaystyle\int (\cos x + \frac{1}{2}x)dx$

20. $\displaystyle\int (e^x - 2x^2)dx$

21-44. Tính tích phân

21. $\displaystyle\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x - e^x)\,dx$

24. $\displaystyle\int_{-2}^0 (u^5 - u^3 + u^2)\,du$

25. $\displaystyle\int_{-2}^2 (3u+1)^2\,du$

26. $\displaystyle\int_0^4 (2v+5)(3v-1)\,dv$

27. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{t}\,(1+t)\,dt$

28. $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{2t}\,dt$

29. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(4y^3 + \frac{2}{y^3}\right)dy$

30. $\displaystyle\int_1^2 \frac{y + 5y^7}{y^3}\,dy$

31. $\displaystyle\int_0^1 x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^5 (2e^x + 4\cos x)dx$

33. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{5}{x}}\,dx$

34. $\displaystyle\int_1^9 \frac{3x-2}{\sqrt{x}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^\pi (4\sin\theta - 3\cos\theta)\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin\theta + \sin\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$

39. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\sinh x + \cosh x}\,dx$

41. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{t^4-1}\,dt$

42. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{x^2}\,dx$

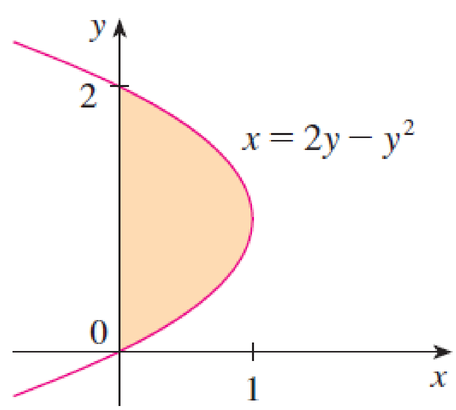
43. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |\sin x|\,dx$

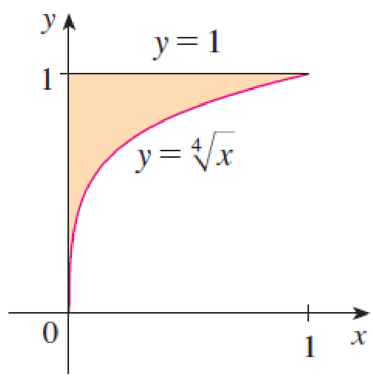
45. Dùng đồ thị vẽ bằng máy để ước tính hoành độ giao điểm của đường cong y = x + x^2 - x^4 với trục hoành. Rồi dùng thông tin này để ước tính diện tích của miền nằm bên dưới đường cong và phía trên trục hoành.

46. Lặp lại Bài tập 45 với đường cong y = 2x + $3x^4$ – $2x^6$.

47. Diện tích của miền nằm bên phải trục tung và bên trái của parabol x = 2y – y^2 (miền được tô) được cho bởi tích phân $\displaystyle\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$. (Quay đầu bạn theo chiều kim đồng hồ và coi miền đó như nằm dưới đường cong x = 2y – y^2 từ y = 0 đến y = 2.) Tìm diện tích của miến ấy.



48. Đường biên của miền được tô là trục tung, đường thẳng y = 1, và đường cong y = $\sqrt[4]{x}$. Tìm diện tích của miền này bằng cách viết x là hàm số theo y và tích phân đối với y (như trong Bài tập 47).



49. Nếu w'(t) là tốc độ tăng trưởng của một đứa trẻ tính bằng pound mỗi năm, thì $\int_5^{10} w'(t)dt$ biểu thị điều gì?

50. Cường độ dòng điện được định nghĩa là đạo hàm của điện lượng: I(t) = Q'(t).(Xem Ví dụ 3 trong Bài 3.7.) $\int_a^b I(t)dt$ biểu thị điều gì?

51. Nếu dầu rò rỉ từ một thùng chứa với tốc độ r(t) galong mỗi phút, $\int_0^{120} r(t)dt$ biểu thị điều gì?

52. Một dân số ong mật bắt đầu với 100 con và gia tăng với tốc độ n '(t) ong mỗi tuần. Số 100 + $\int_0^{15} n'(t)\,dt$ biểu thị điều gì?

53. Trong Bài 4.7 ta đã định nghĩa hàm số doanh thu cận biên R'(x) là đạo hàm của hàm số doanh thu R(x), trong đó x là số đơn vị bán được. $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$ biểu thị điều gì?

54. Nếu f(x) là độ dốc của một con đường tại khoảng cách x dặm từ điểm bắt đầu của con đường ấy, thế thì $\int_3^5 f(x)dx$ biểu thị điều gì?

55. Nếu x tính bằng mét và f(x) tính bằng newton, thế thì đơn vị của $\int_0^{100} f(x)dx$ là gì?

56. Nếu x tính bằng foot và a(x) tính bằng pound, thế thì đơn vị của $\int_2^8 a(x)dx$ là gì?

57-58. Hàm số vận tốc (tính bằng m/s) của một chất điểm chuyển động trên đường thẳng. Tìm (a) độ dời chỗ và (b) quãng đường đi được của chất điểm trong khoảng thời gian cho trước.

57. v(t) = 3t – 5, $0 \le t \le 3$

58. v(t) = t^2 – 2t – 8, $1 \le t \le 6$

59-60. Hàm số gia tốc (tính bằng m^2/s) và vận tốc đầu của một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng được cho trước. Tìm (a) vận tốc tại thời điểm t và (b) quãng đường đi được trong khoảng thời gian cho trước.

59. a(t) = t + 4, v(0) = 5, $0 \le t \le 10$

60. a(t) = 2t + 3, v(0) = - 4, $0 \le t \le 3$

61. Tỷ trọng thẳng (tuyến tính) của một thanh có độ dài 4 m được cho biết là r(x) = 9 + 2$\sqrt{x}$ tính bằng kilogram trên mét, trong đó x tính bằng mét là khoảng cách đến một đầu mút. Tìm khối lượng toàn phần của thanh.

62. Nước chảy từ đáy của thùng chứa với tốc độ là r(t) = 200 – 4t lít mỗi phút, trong đó $0 \le t \le 50$. Tìm lượng nước chảy ra từ thùng chứa trong 10 phút đầu tiên.

63. Vận tốc của một ô tô cho bởi đồng hồ tốc độ của nó và được ghi lại mỗi 10 giây thành bảng sau. Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính quãng đường ô tô đi được.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

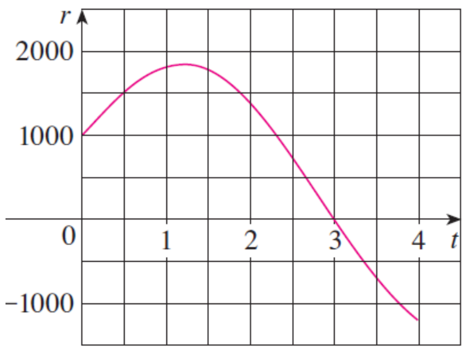
64. Giả sử một núi lửa đang hoạt động và tốc độ r(t) các phún xuất thạch bắn vào không khí được ghi lại trong bảng dưới. Thời gian t tính bằng giây và đơn vị r(t) là tấn mỗi giây.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Tìm ước tính trên và dưới của số lượng toàn phần của phún xuất thạch trong 6 giây đầu tiên.
(b) Dùng Quy Tắc Trung điểm để ước tính Q(6).

65. Chi phí cận biên khi sản xuất x ya của một loại vải nào đó là là $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ (tính bằng đô-la mỗi ya). Tìm độ tăng chi phí nếu mức sản xuất tăng từ 2000 ya đến 4000 ya.

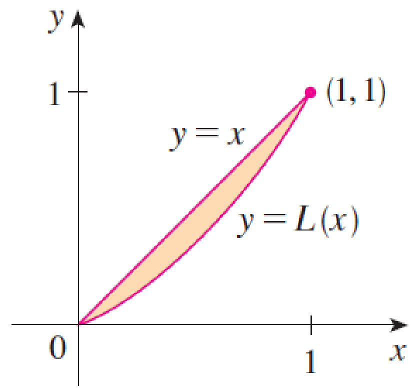
66. Nước chảy vào và ra một bể chứa. Đồ thị bên cho thấy tốc độ biến thiên r(t) của thể tích nước trong bể chứa, tính bằng lít mỗi ngày. Nếu lượng nước trong bể chứa ở thời điểm t = 0 là 25,000 L, dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính lượng nước bốn ngày sau đó.



67. Các nhà kinh tế dùng phân phối tích lũy gọi là đường cong Lorenz để mô tả sự phân phối lợi tức giữa các hộ gia đình trong một nước nào đó. Điển hình, một đường cong Lorentz xác định trên [0, 1] với đầu mút (0, 0) và (1, 1), và liên tục, đồng biến, và có bề lõm quay lên. Điểm trên đường cong được xác định bằng cách xếp hạng mọi hộ gia đình theo lợi tức và rồi tính bách phân hộ gia đình có lợi tức nhỏ hơn hay bằng số bách phân cho trước của tổng lợi tức của nước. Ví dụ, điểm (a/100, b/100) trên đường cong Lorentz nếu a% hộ gia đình dưới cùng nhận ít hơn hay bằng b% lợi tức tổng lợi tức. Bình đẳng tuyệt đối của phân phối lợi tức sẽ xảy ra nếu a% hộ gia đình dưới cùng nhận a% lợi tức, trong trường hợp này đường cong Lorenz sẽ là đường thẳng y = x. Diện tích giữa đường cong Lorenz và đường thẳng y = x đo sự khác biệt về phân phối lợi tức với sự bình đẳng tuyệt đối. Hệ số bất bình đẳng là tỷ số diện tích giữa đường cong Lorenz với đường thẳng y = x và diện tích dưới đường thẳng y = x.

(a) Chứng tỏ rằng hệ số bất bình đẳng gấp hai lần diện tích giữa đường cong Lorenz và đường thẳng y = x, nghĩa là

$$\text{hệ số bất bình đẳng} = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx$$



(b) Phân phối lợi tức của một quốc gia nào đó được biểu diễn bằng đường cong Lorenz có phương trình

$$L(x) = \frac{5}{12}x^2 + \frac{7}{12}x$$

Hỏi 50% hộ gia đình dưới cùng nhận được bao nhiêu phần trăm tổng lợi tức? Tìm hệ số bất bình đẳng.

68. Vào ngày 7/5/1992, tàu con thoi Endeavour được phóng lên không gian với sứ mạng STS-49, có mục đích là thiết lập một động cơ mới trên vệ tinh liên lạc Intelsat. Bảng dưới cho thấy dữ liệu về vận tốc của tàu giữa khoảng thời gian từ lúc được phóng lên đến khi các hỏa tiễn đẩy được vứt khỏi tàu.

Sự kiện	Thời gian (s)	Vận tốc (ft/s)
Phóng	0	0
Bắt đầu thao tác quay	10	185
Kết thúc thao tác quay	15	319
Tiết lưu đến 89%	20	447
Tiết lưu đến 67%	32	742
Tiết lưu đến 104%	59	1325
Áp động lực tối đa	62	1445
Tách động cơ đẩy	125	4151

(a) Dùng máy tính để mô hình hóa dữ liệu này bằng một đa thức bậc ba.
(b) Dùng mô hình trong phần (a) để ước tính độ cao mà tàu *Endeavour* đạt đến 125 giây sau khi phóng lên.

ĐÁP SỐ

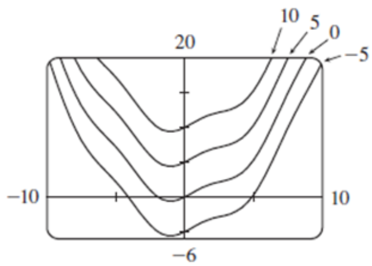
5. $\frac{1}{3}x^3 - (1/x) + C$ **7.** $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - 2x + C$

9. $2t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + C$ **11.** $\frac{1}{3}x^3 - 4\sqrt{x} + C$

13. $-\cos x + \cosh x + C$ **15.** $\frac{1}{2}\theta^2 + \csc\theta + C$

17. $\tan\alpha + C$

19. $\sin x + \frac{1}{4}x^2 + C$



21. 18 **23.** $-2 + 1/e$ **25.** 52

27. $\frac{256}{15}$ **29.** $-\frac{63}{4}$ **31.** $\frac{55}{63}$ **33.** $2\sqrt{5}$ **35.** 8

37. $1 + \pi/4$ **39.** $\frac{256}{5}$ **41.** $\pi/6$ **43.** -3.5

45. 0, 1.32; 0.84 **47.** $\frac{4}{3}$

49. The increase in the child's weight (in pounds) between the ages of 5 and 10

51. Number of gallons of oil leaked in the first 2 hours

53. Increase in revenue when production is increased from 1000 to 5000 units

55. Newton-meters (or joules) **57.** (a) $-\frac{3}{2}$ m (b) $\frac{41}{6}$ m

59. (a) $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 5$ m/s (b) $416\frac{2}{3}$ m

61. $46\frac{2}{3}$ kg **63.** 1.4 mi **65.** \$58,000

67. (b) At most 40%; $\frac{5}{36}$

BÀI 5.5. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Vì có Định Lý Nền Tảng của Giải Tích, nên việc tìm được nguyên hàm của hàm số là một việc hết sức quan trọng. Nhưng các công thức tìm nguyên hàm hiện có không cho ta cách tính các tích phân phức tạp, chẳng hạn như

1 $$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$$

Để tìm tích phân này ta dùng thuật giải toán giới thiệu một yếu tố bổ sung. Ở đây "yếu tố bổ sung" là một biến số mới; ta thay từ biến số x đến một biến số mới u. Giả sử trong (1), ta đặt u là biểu thức dưới dấu căn, u = $\sqrt{1+x^2}$. Thế thì vi phân của u là du = 2xdx. Chú ý là nếu dx trong ký hiệu của tích phân được lý giải như là vi phân, thế thì vi phân 2xdx sẽ xảy ra trong (1) và như thế, về phương diện hình thức, không cần xác minh phép tính của chúng ta, ta có thể viết

2
$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2xdx = \int \sqrt{u}du$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2} + C$$

Giờ thì ta có thể kiểm tra kết quả xem đúng hay không bằng cách dùng Quy Tắc Dây Xích để lấy đạo hàm hàm số tìm được cuối cùng của (2).

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right] = \frac{2}{3}.\frac{3}{2}.(x^2+1)^{1/2}\,.\,2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

Tổng quát, phương pháp này có hiệu quả bất cứ khi nào ta có một nguyên hàm có thể viết dưới dạng $\int f(g(x))g'(x)dx$. Nhận xét rằng nếu F' = f, thì

3 $$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

vì theo Quy Tắc Dây Xích,

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = F'(g(x))g'(x)$$

Nếu ta đổi biến u = g(x), thì từ phương trình (3), ta có

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)du$$

hoặc, viết F' = f, ta được

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Do đó ta đã chứng minh được quy tắc sau,

> **4 PHƯƠNG PHÁP THẾ** **Nếu u = g(x) là hàm số khả vi có tập giá trị là khoảng I và f liên tục trên I, thế thì**
>
> $$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Nhận xét rằng Phương Pháp Đổi biến cho tích phân được chứng minh nhờ Quy Tắc Dây Xích trong phép lấy đạo hàm. Cũng chú ý là nếu u = g(x), thì du = g'(x)dx, do đó một cách để nhớ Quy Tắc Đổi biến là hãy xem dx và du trong (4) như là các vi phân.

Do đó Phương Pháp Đổi biến nói rằng: **Ta được phép vận dụng ký hiệu dx và du dưới dấu tích phân như thể chúng là các vi phân.**

VÍ DỤ 1 Tìm $\int x^4\cos(x^4+2)dx$

GIẢI Ta đổi biến u = x^4 + 2 vì vi phân của nó du = $4x^3$dx, có mặt trong hàm số dưới dấu tích phân (không kể hằng số 4). Do đó, dùng x^3dx = du/4 và Quy Tắc Đổi biến, ta có

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4+2)\,dx &= \int \cos u\cdot\tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du\\ &= \tfrac{1}{4}\sin u + C\\ &= \tfrac{1}{4}\sin(x^4+2) + C\end{aligned}$$

Chú ý là ở khâu cuối cùng, ta phải trở về với biến số ban đầu là x.

Ý đồ đằng sau Phương Pháp Đổi biến là thay thế một tích phân tương đối phức tạp thành một tích phân đơn giản hơn. Việc này được thực hiện bằng cách đổi biến số ban đầu x bằng một biến số mới u, là hàm số theo x. Như trong Ví dụ 1, ta thay tích phân $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$ bằng tích phân đơn giản hơn $\dfrac{1}{4}\int \cos u du$.

Thử thách chính trong Phương Pháp Đổi biến là tìm một biến mới thích hợp. Bạn nên chọn u là hàm số nào đó có mặt trong hàm số dưới dấu tích phân và vi phân của nó cũng có mặt ở đó (nhân chia một hằng số). Đây là trường hợp của Ví dụ 1. Nếu việc này không làm được, hãy cố chọn u là một phần phức tạp của hàm số dưới dấu tích phân (có thể hàm số bên trong của một hàm số hợp). Việc tìm biến thay thế đúng ít nhiều cũng là một nghệ thuật. Việc đoán sai không phải là hiếm; nếu lần đầu tiên bạn đoán sai, hãy cố đoán lần nữa.

VÍ DỤ 2 Tính $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

GIẢI 1 Đặt u = 2x + 1. Thế thì du = 2dx, hay dx = du/2. Do đó Phương Pháp Đổi biến cho ta

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C\\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

GIẢI 1 Một cách đổi biến khác là đặt u = $\sqrt{2x+1}$. Thế thì

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad suy\ ra \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u du$$

(Hoặc nhận xét là $u^2 = 2x + 1$, nên $2udu = 2dx$.) Do đó

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int u\,.\,udu = \int u^2du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

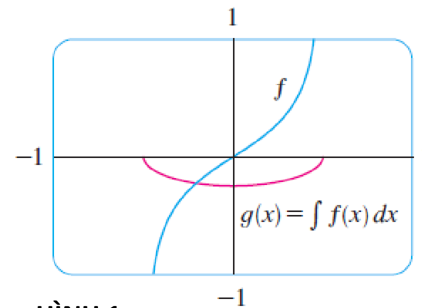
VÍ DỤ 3 Tìm $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

GIẢI Đặt $u = 1 - 4x^2$. Thế thì $du = -8xdx$, hay $xdx = -\frac{1}{8}du$ và

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-1/2}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(2\sqrt{u}\right) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

Ta có thể kiểm tra tính đúng dắn của đáp số ở Ví dụ 3 bằng cách lấy đạo hàm, nhưng thay vào đó ta có thể kiểm tra bằng đồ thị. Trong Hình 1 ta dùng một máy tính để vẽ đồ thị hàm số dưới dấu tích phân $f(x) = x / \sqrt{1-4x^2}$ và tích phân bấtđịnh $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (ta xét trường hợp C = 0). Chú ý là g(x) nghịch biến khi f(x) âm, đồng biến khi f(x) dương , và có giá trị cực tiểu khi f(x) = 0. Như vậy cũng đủ hợp lý để ta tin là g chính là một nguyên hàm của f.



HÌNH 1

FIGURE 1

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

VÍ DỤ 4 Tính $\int e^{5x}dx$

GIẢI Nếu đặt $u = 5x$, thì $du = 5dx$, hay $dx = \frac{1}{5}du$. Do đó

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

VÍ DỤ 5 Tính $\int \sqrt{1+x^2}\,x^5dx$

GIẢI Phép đổi biến thích hợp sẽ dễ thấy hơn nếu ta phân tích $x^5 = x^4 . x$. Đặt $u = 1 + x^2$. Thế thì $du = 2xdx$, hay $xdx = du/2$. Cũng vậy $x^2 = u - 1$, hay $x^4 = (u - 1)^2$. Và

$$\int \sqrt{1+x^2}\,x^5\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,x^4 \cdot x\,dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u-1)^2\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2\cdot\tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

VÍ DỤ 6 Tính $\int \tan x\, dx$

GIẢI Trước tiên ta biểu diễn tan theo sin và cos:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Biểu thức này gợi ý ta nên đổi biến u = cosx, vì khi đó du = - sinxdx hay sinxdx = - du:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u}$$
$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Vì $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, kết quả cuối cùng là

5 $$\boxed{\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C}$$

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Khi tính một tích phân xác định bằng Phương Pháp Đổi biến, ta có thể tiến hành theo 2 phương pháp. Một là tìm tích phân bấtđịnh trước rồi dùng Định Lý Nền Tảng của Giải Tích. Chẳng hạn, lấy kết quả của Ví dụ 2, ta có

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx = \int \sqrt{2x+1}\, dx \Big]_0^4 = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4$$
$$= \frac{1}{3}(9)^{3/2} - \frac{1}{3}(1)^{3/2} = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$$

Một phương pháp khác, được ưa chuộng hơn, là thay đổi cận của tích phân theo biến số mới.

6 PHƯƠNG PHÁP THẾ CHO TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH Nếu g' liên tục trên [a, b] và f liên tục trên tập giá trị của u = g(x), thế thì

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

CM Cho F là một nguyên hàm của f. Thế thì, theo (3), F(g(x)) là nguyên hàm của f(g(x))g'(x), do đó theo Phần của Định Lý Nền Tảng, ta có

$$\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Nhưng, áp dụng ĐLNT2 một lần nữa, ta cũng có

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)) \quad \text{(ĐPCM)}$$

VÍ DỤ 7 Tính $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx$ dùng (6).

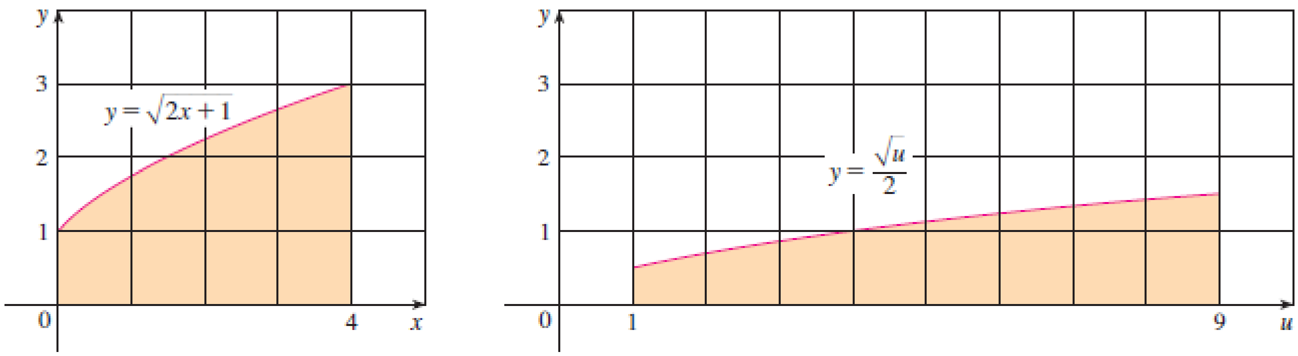
GIẢI Dùng phép đổi biến từ Cách giải 1 của Ví dụ 2, ta có u = 2x + 1 => dx = du/2. Để tìm cận mới của tích phân ta chú ý là

- Khi x = 0, u = 2(0) + 1 = 1
- Khi x = 4, u = 2(4) +1 = 9

Do đó
$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}\ du = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \frac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{26}{3}$$

Nhận xét rằng khi dùng (6), ta không trở lại biến x sau khi tích phân, mà ta chỉ cần tính những cận tích phân mới theo u.

Lý giải hình học của Ví dụ 7 được mô tả trong Hình 2. Phép đổi biến u = 2x + 1 kéo giãn đoạn [0, 4] lên 2 lần và dời nó sang phải 1 đơn vị. Phương Pháp Đổi biến cho thấy hai diện tích bằng nhau.



HÌNH 2

VÍ DỤ 8 Tính $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$

GIẢI Đặt u = 3 – 5x. Thế thì du = - 5dx hay dx = - du/5.

- Khi x = 1, u = - 2
- Khi x = 2, u = - 7

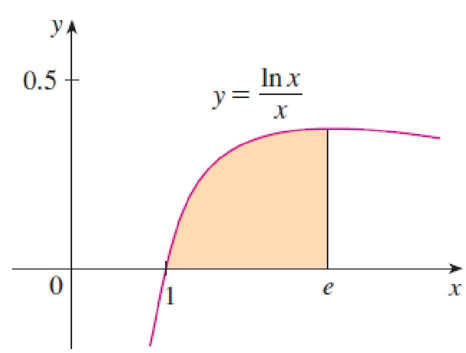
Do đó
$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{du}{u}$$
$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Big]_{-2}^{-7}$$
$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

VÍ DỤ 9 Tính $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

GIẢI Ta đặt u = ln x vì vi phân của nó là du = dx/x có mặt trong hàm số được tích phân .

- Khi x = 1, u = 0
- Khi x = 2, u = 1.

Do đó $$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$



HÌNH 3 Vì f(x) = (lnx)/x dương trên [1, e] nên tích phân biểu thị diện tích từ 1 đến e.

ĐỐI XỨNG

Định lý sau dùng Phương Pháp Đổi biến cho Tích Phân Xác Định (6) nhằm đơn giản hóa phép tính tích phân cho những hàm số sở hữu tính chất đối xứng.

7 TÍCH PHÂN CỦA NHỮNG HÀM SỐ ĐỐI XỨNG Giả sử f liên tục trên [-a, a].

- Nếu f chẵn [tức f(- x) = f(x)], thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
- Nếu f lẻ [tức f(- x) = - f(x)], thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

CM Ta tách tích phân thành hai phần

8 $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{-a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Trong tích phân đầu tiên ở vế trái ngoài cùng ta dùng phép đổi biến u = - x. Thế thì du = - dx và khi x = - a, thì u = a. Do đó

$$-\int_{0}^{-a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)du$$

và do đó Phương trình 8 thành

9 $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

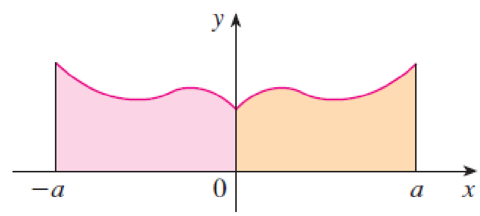
(a) Nếu f chẵn, thì f(- u) = f(u) và Phương trình 9 thành

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

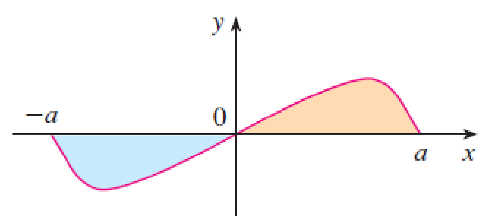
(b) Nếu f lẻ, thì f(- u) = - f(u) và Phương trình 9 thành

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Định lý 7 được minh họa trong Hình 4. Trong trường hợp f dương và chẵn, phần (a) nói rằng diện tích bên dưới y = f(x) từ - a đến a gấp hai lần diện tích từ 0 đến a do tính đối xứng. Nhớ rằng một tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ có thể được biểu thị như diện tích ở phía trên trục hoành và bên dưới y = f(x) trừ đi diện tích bên dưới trục hoành và phía trên đường cong. Do đó phần (b) nói rằng tích phân bằng 0 vì hai diện tích này bằng nhau.



(a) f chẵn, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$



(b) f lẻ, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

VÍ DỤ 10 Vì f(x) = x^6 + 1 thỏa mãn f(- x) = f(x) nên f chẵn và do đó

$$\int_{-2}^{2} (x^6+1)dx = 2\int_{0}^{2} (x^6+1)dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{7}x^7 + x\right]_{2}^{0} = 2\left(\frac{128}{7}+2\right) = \frac{284}{7}$$

VÍ DỤ 11 Vì f(x) = (tanx)/(1 + x^2 + x^4) thỏa mãn f(- x) = - f(x) nên f lẻ và do đó : $\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1+x^2+x^4}dx = 0$

BÀI TẬP

1-6. Tính tích phân bằng phép đổi biến

1. $\int e^{-x}\,dx, \quad u = -x$

2. $\int x^3(2 + x^4)^5\,dx, \quad u = 2 + x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \frac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta\,\sin\theta\,d\theta, \quad u = \cos\theta$

6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx, \quad u = 1/x$

7. $\int x\sin(x^2)\,dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int e^x\sin(e^x)\,dx$

15. $\int \sin\pi t\,dt$

16. $\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$

17. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

18. $\int \sec 2\theta\,\tan 2\theta\,d\theta$

19. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

20. $\int \frac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$

21. $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\int \sqrt{x}\,\sin(1 + x^{3/2})\,dx$

23. $\int \cos\theta\,\sin^6\theta\,d\theta$

24. $\int (1 + \tan\theta)^5\sec^2\theta\,d\theta$

25. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$

26. $\int e^{\cos t}\sin t\,dt$

27. $\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1 + z^3}}\,dz$

28. $\int \frac{\tan^{-1}x}{1 + x^2}\,dx$

29. $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

30. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

32. $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$

33. $\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$

34. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

36. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

37. $\int \cot x\,dx$

38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1 + \tan t}}$

39. $\int \sec^3 x\,\tan x\,dx$

40. $\int \sin t\,\sec^2(\cos t)\,dt$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\,\sin^{-1}x}$

42. $\int \frac{x}{1 + x^4}\,dx$

43. $\int \frac{1 + x}{1 + x^2}\,dx$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x}}\,dx$

45. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x + 2}}\,dx$

46. $\int x^3\sqrt{x^2 + 1}\,dx$

47-50. Tính tích phân xác định. Minh họa và kiểm tra trả lời của bạn có hợp lý không bằng cách vẽ đồ thị hàm số và nguyên hàm của nó (lấy C = 0).

47. $\int x(x^2 - 1)^3\,dx$

48. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\int \sin^3 x\,\cos x\,dx$

50. $\int \tan^2\theta\,\sec^2\theta\,d\theta$

51-70. Tính tích phân xác định

51. $\int_0^2 (x - 1)^{25}\,dx$

52. $\int_0^7 \sqrt{4 + 3x}\,dx$

53. $\int_0^1 x^2(1 + 2x^3)^5\,dx$

54. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

55. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\,dt$

56. $\int_{1/6}^{1/2} \csc\pi t\,\cot\pi t\,dt$

57. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \tan^3\theta\,d\theta$

58. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

59. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\sin x}{1 + x^6}\,dx$

61. $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,\sin(\sin x)\,dx$

63. $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\,dx \quad (a > 0)$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

65. $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

66. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

67. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

68. $\int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

70. $\int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T-\alpha)\,dt$

71-72. Dùng đồ thị để ước tính thô diện tích của miền nằm bên dưới đường cong cho trước. Rồi tính diện tích đúng.

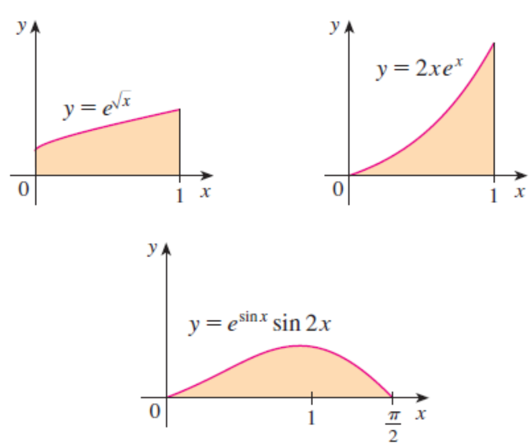
71. y = $\sqrt{2x+1}$, $0 \le x \le 1$

72. y = 2 sin x – sin 2x, $0 \le x \le \pi$

73. Tính $\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}\,dx$ bằng cách xem nó như tổng hai tích phân và lý giải một trong hai tích phân này như diện tích.

74. Tính $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$ dùng phương pháp đổi biến và lý giải tích phân có được như diện tích.

75. Diện tích nào sau đây bằng nhau? Tại sao?



76.Một mô hình tốc độ chuyển hóa cơ bản, tính bằng kcal/h, của một nam thanh niên là R(t) = 85 – 0.18cos(πt/12), trong đó t là thời gian tính bằng giờ đo từ 5:00 AM. Tìm mức chuyển hóa cơ bản toàn phần của anh ta trong thời gian 24 giờ, tức tìm giá trị của

$\int_0^{24} R(t)dt$.

77. Một bể chứa dầu bị nứt tại thời điểm t = 0 và dầu rò rỉ ra khỏi bể chứa với tốc độ r(t) = 100e$^{-0.01t}$ lít mỗi phút. Hỏi số dầu thất thoát trong một giờ đầu tiên.

78. Dân số vi khuẩn bắt đầu với 400 con và tăng trưởng với tốc độ r(t) = (450.268) e.$^{1.12567t}$ con mỗi giờ. Hỏi sau ba giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn?

79. Thở là một chu trình và một chu trình thở đầu đủ đi từ lúc bắt đầu hít vào đến khi kết thúc thở ra mất khoảng 5 giây. Tốc độ tối đa lưu lượng không khí chảy vào phổi là khoảng 0.5 L/s. Điều này giải thích, một phần, tại sao hàm số f(t) = ` thường được sử dụng để mô hình hóa tốc độ không khí chảy vào phổi. Dùng mô hình
này để tìm thể tích không khí hít vào phổi ở thời điểm t.

80. Công Ty Điện Toán Alabama đã thiết lập một đường dây sản xuất để sản xuất một máy tính mới. Tốc độ sản xuất những máy tính này sau t tuần là

$$\frac{dx}{dt}=5000\left(1-\frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ máy tính/tuần}$$

(Chú ý là mức sản xuất tiến gần đến 5000 mỗi tuần khi thời gian trôi đi, nhưng mức sản xuất ban đầu thấp hơn vì công nhân chưa quen với kỹ thuật mới.) Tìm số máy tính sản xuất được từ đầu tuần thứ ba đến cuối tuần thứ tư.

81. Nếu f liên tục và $\int_0^4 f(x)dx$ = 10, tìm $\int_0^2 f(2x)dx$.

82. Nếu f liên tục và $\int_0^9 f(x)dx$ = 4, tìm $\int_0^3 xf(x^2)dx$.

83. Nếu f liên tục trên R, chứng tỏ rằng

$$\int_a^b f(-x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$$

84. Nếu f liên tục trên R, chứng tỏ rằng

$$\int_a^b f(x+c)dx=\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$$

Trong trường hợp f(x) ≥ 0, vẽ biểu đồ để lý giải đẳng thức này bằng hình học thông qua một đẳng thức về diện tích.

85. Nếu a và b là những số dương, chứng tỏ rằng

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx=\int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

86. Nếu f liên tục trên [0, π], dùng phép đổi biến u = π – x để chứng tỏ rằng

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

87. Dùng Bài tập 86 để tính tích phân

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

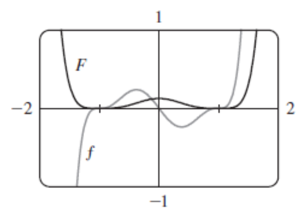
88. (a) Nếu f liên tục, chứng tỏ rằng

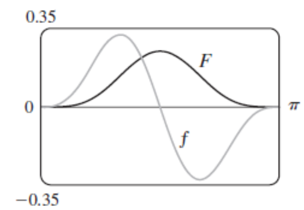
$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$$

(b) Dùng phần (a) để tính $\int_o^{\pi/2} \cos^2 x dx$ và $\int_o^{\pi/2} \sin^2 x dx$.

ĐÁP SỐ

1. $-e^{-x} + C$ **3.** $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C$ **5.** $-\frac{1}{4}\cos^4\theta + C$
7. $-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$ **9.** $\frac{1}{63}(3x-2)^{21} + C$
11. $\frac{1}{3}(2x+x^2)^{3/2} + C$ **13.** $-\frac{1}{3}\ln|5-3x| + C$
15. $-(1/\pi)\cos \pi t + C$ **17.** $\frac{2}{3}\sqrt{3ax+bx^3} + C$
19. $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **21.** $2\sin\sqrt{t} + C$ **23.** $\frac{1}{7}\sin^7\theta + C$
25. $\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$ **27.** $\frac{1}{2}(1+z^3)^{2/3} + C$ **29.** $e^{\tan x} + C$
31. $-1/(\sin x) + C$ **33.** $-\frac{2}{3}(\cot x)^{3/2} + C$
35. $-\ln(1+\cos^2 x) + C$ **37.** $\ln|\sin x| + C$
39. $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$ **41.** $\ln|\sin^{-1}x| + C$
43. $\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
45. $\frac{4}{7}(x+2)^{7/4} - \frac{8}{3}(x+2)^{3/4} + C$
47. $\frac{1}{8}(x^2-1)^4 + C$ **49.** $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$





51. 0 **53.** $\frac{182}{9}$ **55.** 4
57. 0 **59.** $e - \sqrt{e}$ **61.** 3 **63.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)a^3$
65. $\frac{16}{15}$ **67.** 2 **69.** $\ln(e+1)$ **71.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$
73. 6π **75.** All three areas are equal. **77.** ≈ 4512 L
79. $\frac{5}{4\pi}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{5}\right)$ L **81.** 5 **87.** $\pi^2/4$

ÔN CHƯƠNG 5

KIỂM TRA KHÁI NIỆM

1. (a) Viết biểu thức của tổng Riemann của hàm số f. Giải thích ý nghĩa của ký hiệu bạn dùng.

(b) Nếu f(x) ≥ 0, lý giải hình học của tổng Riemann là gì? Minh họa bằng biểu đồ.

(c) Nếu f(x) có giá trị dương lẫn âm, lý giải hình học của tổng Riemann là gì? Minh họa bằng biểu đồ.

2. (a) Viết định nghĩa của nguyên hàm xác định của hàm số từ a đến b.

(b) Lý giải hình học của $\int_a^b f(x)dx$ là gì nếu f(x) ≥ 0?

(c) Lý giải hình học của $\int_a^b f(x)dx$ là gì nếu f(x) có giá trị dương lẫn âm? Minh họa bằng biểu đồ.

3. Phát biểu hai phần của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích.

4. (a) Phát biểu Định Lý Biến Thiên Thực Sự.

(b) Nếu r(t) là tốc độ nước chảy vào bình chứa, thì $\int_{t_1}^{t_2} r(t)dt$ biểu thị điều gì?

5. Giả sử một chất điểm chuyển động tới lui trên một đường thẳng với vận tốc v(t), tính bằng feet/giây, và gia tốc là a(t).

(a) Tìm ý nghĩa của $\int_{60}^{120} v(t)dt$.

(b) Tìm ý nghĩa của $\int_{60}^{120} |v(t)|\, dt$.

(c) Tìm ý nghĩa của $\int_{60}^{120} a(t)dt$.

6. (a) Giải thích ý nghĩa của tích phân bấtđịnh $\int f(x)dx.$

(b) Đâu là mối liên hệ giữa tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ và tích phân bấtđịnh ?

7. Giải thích chính xác phát biểu "vi phân và tích phân là hai tiến trình thuận nghịch" có nghĩa là gì?

8. Phát biểu Phương Pháp Đổi biến. Trong thực hành, bạn sử dụng nó ra sao?

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG-SAI

Xác định phát biểu sau đúng hay sai. Nếu đúng, giải thích tại sao. Nếu sai, giải thích tại sao hay cho một phản ví dụ.

1. Nếu f và g liên tục trên [a, b], thì

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. Nếu f liên tục trên [a, b], thì

$$\int_a^b [f(x)g(x)]dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

3. Nếu f liên tục trên (a, b), thì

$$\int_a^b 5f(x)dx = 5\int_a^b f(x)dx$$

4. Nếu f liên tục trên [a, b] thì

$$\int_a^b xf(x)dx = x\int_a^b f(x)dx$$

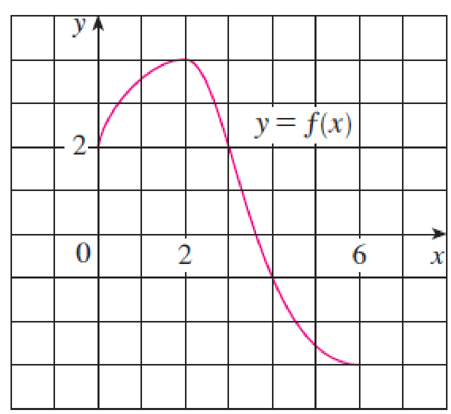
5. Nếu f liên tục trên [a, b] và f(x) ≥ 0 , thì

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}dx = \sqrt{\int_a^b f(x)dx}$$

6. Nếu f ' liên tục trên [1, 3], thì $\int_1^3 f'(v)dv = f(3) - f(1).$

BÀI TẬP

1. Dùng đồ thị cho trước của f để tìm tổng Riemann với sáu phân đoạn. Lấy các điểm mẫu là (a) đầu mút trái và (b) các trung điểm. Trong mỗi trường hợp vẽ biểu đồ và giải thích tổng Riemann biểu thị điều gì.



2. (a) Tình tổng Riemann cho

$$f(x) = x^2 - x \quad , \quad 0 \le x \le 2$$

với bốn phân đoạn, lấy các điểm mẫu là đầu mút phải. Giải thích, với biểu đồ, tổng Riemann biểu thị điều gì.

(b) Dùng định nghĩa của tích phân xác định (với đầu mút phải) để tính giá trị của tích phân

$$\int_0^2 (x^2 - x)dx$$

(c) Vẽ biểu đồ giải thích ý nghĩa hình học của tích phân ở phần (b).

3. Tính

$$\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})dx$$

bằng cách lý giải nó theo diện tích.

4. Biểu diễn

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sin x_i \Delta x$$

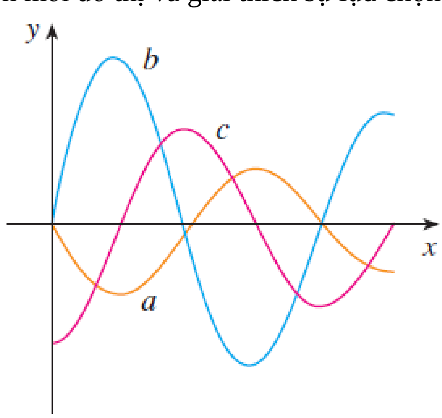
như một tích phân xác định trên đoạn [0, π] và sau đó tính tích phân này.

5. Nếu $\int_0^6 f(x)dx = 10$ và $\int_0^4 f(x)dx = 7$, tìm $\int_4^6 f(x)dx$.

6. (a) Nếu $\int_1^5 (x + 2x^5)dx$ như một giới hạn của tổng Riemann, lấy các điểm mẫu là các đầu mút phải. Dùng máy tính để tính tổng và tìm giới hạn.

(b) Dùng Định Lý Nền Tảng của Giải Tích để kiểm tra trả lời của bạn ở phần (a).

7. Hình vẽ sau cho thấy đồ thị của f, f ', và $\int_0^x f(t)dt$. Nhận diện mỗi đồ thị và giải thích sự lựa chọn của bạn.



8. Tính:

(a) $\int_0^1 \frac{d}{dx}(e^{\arctan x})\,dx$ (b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}\,dx$

(c) $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\,dt$

9-38 Tính tích phân, nếu nó tồn tại.

9. $\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)dx$ **10.** $\int_0^T (x^4 - 8x + 7)dx$

11. $\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$ **12.** $\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$ **14.** $\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$ **16.** $\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$ **18.** $\int_0^1 \sin(3\pi t)\,dt$

19. $\int_0^1 v^2\cos(v^3)\,dv$ **20.** $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4\tan t}{2 + \cos t}\,dt$ **22.** $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$ **24.** $\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$ **26.** $\int \frac{\csc^2 x}{1 + \cot x}\,dx$

27. $\int \sin \pi t\,\cos \pi t\,dt$ **28.** $\int \sin x\,\cos(\cos x)\,dx$

29. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **30.** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \tan x\,\ln(\cos x)\,dx$ **32.** $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$ **34.** $\int \sinh(1 + 4x)\,dx$

35. $\int \frac{\sec\theta\,\tan\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$ **36.** $\int_0^{\pi/4} (1 + \tan t)^3\sec^2 t\,dt$

37. $\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$ **38.** $\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39-40. Tính tích phân xác định. Minh họa và kiểm tra trả lời của bạn xem có hợp lý không bằng cách vẽ đồ thị hàm số và nguyên hàm của nó (lấy C = 0).

39. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}dx$ **40.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}dx$

41. Dùng đồ thị (vẽ bằng máy) để đưa ra một ước tính thô của diện tích miền nằm dưới đường cong y = $x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$. Rồi tìm diện tích đúng.

42. Vẽ đồ thị (bằng máy) của hàm số f(x) = $\cos^2 x \sin^3 x$ và dùng đồ thị để dự đoán giá trị của tích phân $\int_0^{2\pi} f(x)dx$. Sau đó tính tích phân để khẳng định dự đoán của bạn.

43-48. Tìm đạo hàm các hàm số .

43. $F(x)=\int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}dt$ **44.** $F(x)=\int_x^1 \sqrt{t+\sin t}\, dt$

45. $g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\, dt$ **46.** $g(x) = \int_1^{\sin x} \frac{1-t^2}{1+t^4}\, dt$

47. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$ **48.** $y = \int_{2x}^{3x+1} \sin(t^4)\, dt$

49-50. Dùng Tính chất 8 của tích phân để ước tính giá trị của tích phân.

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2+3}\, dx$ **50.** $\int_3^5 \frac{1}{x+1}\, dx$

51-54 Dùng tính chất của tích phân để xác nhận các bất đẳng thức.

51. $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \leqslant \frac{1}{3}$ **52.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\int_0^1 e^x \cos x\, dx \leqslant e - 1$ **54.** $\int_0^1 x \sin^{-1} x\, dx \leqslant \pi/4$

55. Dùng Quy Tắc Trung Điểm với n = 6 để tính xấp xỉ $\int_0^3 \sin(x^3)dx$

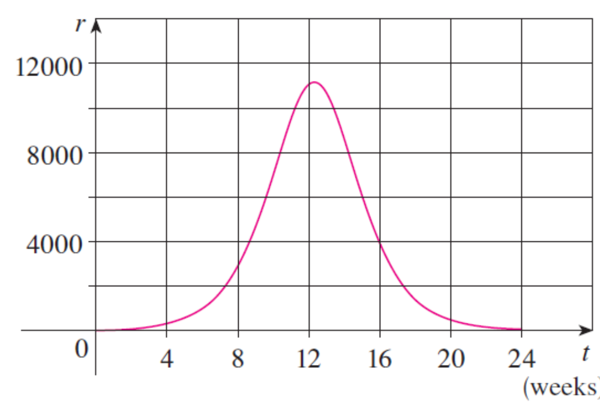
56. Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng với hàm số vận tốc v(t) = $t^2 - t$, trong đó v tính bằng mét trên giây. Tìm (a) độ dời chỗ và (b) quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian [0, 5].

57. Cho r(t) là tốc độ dầu tiêu thụ trên thế giới trong đó t tính bằng năm bắt đầu từ t = 0 vào 1/1/2000, và r(t) tính bằng thùng/năm. Số $\int_0^8 r(t)dt$ biểu thị điều gì?

58. Một súng ra đa được sử dụng để đo vận tốc của vận động viên nước rút và kết quả được ghi lại trong bảng. Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính quãng đường y chạy được trong 5 giây đầu tiên.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

59. Một đàn ong mật tăng với tốc độ r(t) con mỗi tuần, trong đó đồ thị của r được cho bên dưới. Dùng Quy Tắc Truing Điểm với sáu phân đoạn để ước tính số lượng ong tăng trong 24 tuần đầu tiên.



60. Cho

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & khi -3 \le x \le 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & khi\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Tính $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ bằng cách xem tích phân như hiệu số diện tích.

61. Nếu f liên tục và $\int_0^2 f(x)dx = 6$, tính $\int_0^{\pi/2} f(2\sin\theta)\cos\theta\, d\theta$.

62. Hàm số Fresnel S(x) = $\int_0^x \sin\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)dt$ được giới thiệu trong Bài 5.3. Fresnel cũng dùng hàm số

$$C(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)dt$$

trong lý thuyết của ông về sự nhiễu xạ sóng ánh sáng.
(a) Trên khoảng nào C đồng biến?

(b) Trên khoảng nào C có bề lõm quay lên?

(c) Dùng đồ thị để giải phương trình sau đúng đến hai chữ số thập phân:

$$\int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}\pi\, t^2\right) dt = 0.7$$

(d) Vẽ đồ thị của C và S trên cùng một khung hình. Chúng liên hệ thế nào?

64. Giả sử nhiệt độ ban đầu trong một thanh mảnh và dài đặt trên trục hoành là C/(2a) nếu | x | ≤ a và 0 nếu | x | > a. Có thể chứng tỏ là nếu độ khuếch tán nhiệt của thanh là k, thì nhiệt độ của thanh tại điểm x tại thời điểm t là

$$T(x,t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)} du$$

Để tìm sự phân bố nhiệt độ sinh ra từ một điểm nóng ban đầu tập trung ở điểm gốc, ta cần phải tính

$$\lim_{a \to 0} T(x,t)$$

Dùng Quy Tắc l'Hospital để tìm giới hạn này.

65. Nếu f là hàm số liên tục sao cho

$$\int_0^x f(t)dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)dt$$

với mọi x, tìm công thức tường minh cho f(x).

66. Giả sử h là một hàm số sao cho h(1) = - 2, h'(1) = 2, h ''(1) = 3, h(2) = 6, h'(2) = 5,h ''(2) = 13, và h'' liên tục mọi nơi. Tính $\int_1^2 h''(u)du$.

67. Nếu f ' liên tục trên [a, b], chứng tỏ rằng

$$2\int_a^b f(x) f'(x)dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Tìm $\lim\limits_{H \to 0} \frac{1}{h}\int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3}\,dt$.

69. Nếu f liên tục trên [0, 1], chứng tỏ rằng

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1-x)\, dx$$

70. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^9\right]$$

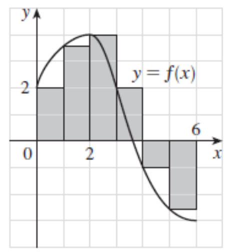
71. Giả sử f liên tục, f(0) = 0, f(1) = 1, f '(x) > 0, và $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Tìm giá trị của tích phân $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$.

ĐÁP SỐ

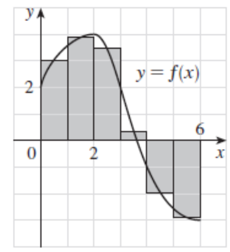
Trắc nghiệm đúng-sai

1. True **3.** True **5.** False **7.** True **9.** True
11. False **13.** False **15.** False

1. (a) 8



(b) 5.7



3. $\frac{1}{2} + \pi/4$ **5.** 3 **7.** f is c, f' is b, $\int_0^x f(t)\,dt$ is a
9. 37 **11.** $\frac{9}{10}$ **13.** -76 **15.** $\frac{21}{4}$ **17.** Does not exist

19. $\frac{1}{3}\sin 1$ **21.** 0 **23.** $-(1/x) - 2\ln|x| + x + C$
25. $\sqrt{x^2+4x} + C$ **27.** $[1/(2\pi)]\sin^2\pi t + C$
29. $2e^{\sqrt{x}} + C$ **31.** $-\frac{1}{2}[\ln(\cos x)]^2 + C$
33. $\frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$ **35.** $\ln|1+\sec\theta| + C$ **37.** $\frac{23}{3}$
39. $2\sqrt{1+\sin x} + C$ **41.** $\frac{64}{5}$ **43.** $F'(x) = x^2/(1+x^3)$
45. $g'(x) = 4x^3\cos(x^8)$ **47.** $y' = \left(2e^x - e^{\sqrt{x}}\right)/(2x)$
49. $4 \leqslant \int_1^3 \sqrt{x^2+3}\,dx \leqslant 4\sqrt{3}$ **55.** 0.280981
57. Number of barrels of oil consumed from Jan. 1, 2000, through Jan. 1, 2008
59. 72,400 **61.** 3 **63.** $c \approx 1.62$
65. $f(x) = e^{2x}(1+2x)/(1-e^{-x})$ **71.** $\frac{2}{3}$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Hãy thử giải các ví dụ sau trước khi xem lời giải.

VÍ DỤ 1 Tính $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x-3}\int_3^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt\right)$

GIẢI Trước tiên hãy nhìn các thành tố của hàm số . Điều gì xảy ra với thành tố thứ nhất , x/ (x – 3) khi x → 3? Tử thức tiến đến 3 và mẫu thức tiến đến 0, do đó

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \text{ khi } x \to 3^+ \text{ và } \frac{x}{x-3} \to -\infty \text{ khi } x \to 3^-$$

Nhân tử thứ hai $\int_3^x (\sin t)/t\,dt$ tiến đến $\int_3^3 (\sin t)/t\,dt = 0$. Do đó ta có dạng vô định khi xét toàn thể., (Một nhân tử trở nên vô cùng lớn trong khi nhân tử kia tiến đến vô cùng nhỏ.) Ta giải quyết sao đây.

Một trong những nguyên tắc giải toán là nhận ra điều gì đó quen thuộc. Có phần nào của hàm số nhắc chúng ta đến một điều gì đó mà ta đã từng gặp? Vâng, tích phân

$$\int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

có x là một cận trên của tích phân và dạng tích phân này xuất hiện trong Phần 1 của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Điều này nhắc ta nhớ đến phép vi phân.

Khi nghỉ đến phép vi phân, mẫu số (x – 3) nhắc ta nhớ đến một điều gì khác cũng thân thiết. Một trong những dạng định nghĩa của đạo hàm trong Chương 2 là

$$F'(a) = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}.$$

và với a = 3 điều này thành

$$F'(3) = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$

Vậy hàm số F trong tình huống của ta ở đây là gì? Chú ý là nếu ta định nghĩa

$$F(x) = \int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

thì F(3) = 0. Còn lại nhân tử x trong tử số thì sao? Thật ra đó chỉ là phần đánh lạc hướng. Hãy sắp xếp các nhân tử và viết lại bài toán như sau:

BÀI TẬP

1. Nếu x sin πx = $\int_0^{x^2} f(t)dt$, trong đó f là hàm số liên tục, tìm f(4).

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích của miền bên dưới đường cong y = x + 1/x từ x = a đến x = a + 1.5, với a > 0.

3. Nếu f là hàm số khả vi sao cho f(x) không bao giờ bằng 0 và $\int_0^x f(t)dt = [f(x)]^2$ với mọi x, tìm f.

4. (a) Vẽ một vài thành viên của họ hàm số f(x) = $(2cx - x^2)/c^3$ với c > 0 và xét miền giới hạn bởi đường cong này và trục hoành. Hãy ức đoán xem diện tích của miền liên hệ nhau thế nào.

(b) Chứng tỏ ức đoán của bạn ở phần (a).

(c) Hãy nhìn lại các đồ thị ở phần (a) và dùng nó để vẽ đường cong vạch bởi những đỉnh (điểm cao nhất) của họ hàm số. Bạn có thể ức đoán đây là đường cong thuộc loại nào không?

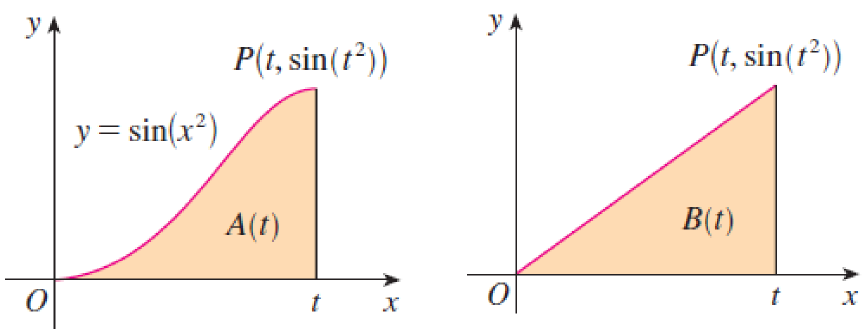
(d) Tìm phương trình của đường cong bạn vẽ ở phần (c).

5. Nếu f(x) = $\int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$, trong đó g(x) = $\int_0^{\cos x}[1+\sin(t^2)]dt$, tìm f '(π/2).

6. Nếu f(x) = $\int_0^x x^2\sin(t^2)dt$, tìm f '(x).

7. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1-\tan 2t)^{1/t}\,dt$.

8. Hình dưới cho thấy hai miền trong góc phần tư thứ nhất: A(t) là diện tích bên dưới đường cong y = $\sin(x^2)$ từ 0 đến t, và B(t) là diện tích tam giác có đỉnh O, P, và (t,0). Tìm $\lim\limits_{t\to 0+} A(t)/B(t)$.



9. Tìm đoạn [a, b] sao cho giá trị của tích phân $\int_a^b (2+x-x^2)dx$ là cực đại.

10. Dùng tích phân để tính tổng $\sum_{i=1}^{10000}\sqrt{i}$.

11. (a) Tính $\int_0^n [[x]]dx$, trong đó n là số nguyên dương.

(b) Tính $\int_0^n [[x]]dx$, trong đó a và b là các số thực với 0 ≤ a < b.

12. Tìm $\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\left(\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\,du\right)dt$.

13. Giả sử các hệ số của đa thức bậc ba P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 thỏa mãn phương trình

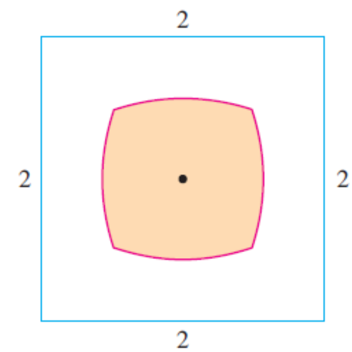
$$a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}=0$$

Chứng tỏ rằng phương trình P(x) = 0 có một nghiệm giữa 0 và 1. Bạn có thể tổng quát hóa kết quả này cho đa thức bậc n không?

14. Một dĩa tròn bán kính r được dùng trong một thiết bị làm bay hơi và cho quay trong một mặt phẳng thẳng đứng. Nếu nó được nhúng một phần trong một chất lõng sao cho diện tích phần làm ướt lộ ra của dĩa được tối đa, chứng tỏ rằng tâm của dĩa khi ấy phải ở vị trí phía trên mặt chất lõng một khoảng là $r/\sqrt{1+\pi^2}$.

15. Chứng tỏ rằng nếu f liên tục, thì $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$

16. Hình bên cho thấy một miền gồm tât cả điểm bên trong hình vuông ở gần tâm hơn gần cạnh hình vuông. Tìm diện tích của miền này.



17.Tính $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$.

18. Với số c bất kỳ, gọi $f_c(x)$ là số nhỏ hơn trong hai số $(x – c)^2$ và $(x – c – 2)^2$. Thế thì ta định nghĩa g(c) = $\int_0^1 f_c(x)dx$. Tìm giá trị cực đại và cực tiểu của g(c) nếu $-2 \le c \le 2$.

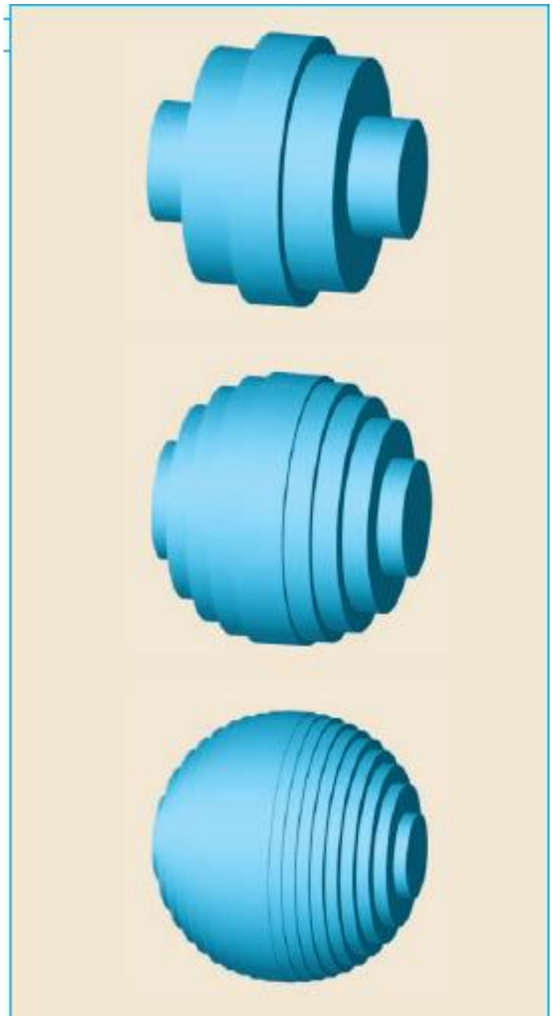
ĐÁP SỐ

1. $\pi/2$ **3.** $f(x) = \frac{1}{2}x$ **5.** -1 **7.** e^{-2} **9.** $[-1, 2]$

11. (a) $\frac{1}{2}(n-1)n$ (b) $\frac{1}{2}[\![b]\!](2b - [\![b]\!] - 1) - \frac{1}{2}[\![a]\!](2a - [\![a]\!] - 1)$

17. $2(\sqrt{2} - 1)$

CHƯƠNG 6 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN



6.1. Diện Tích Giữa Các Đường...............................460
6.2. Thể Tích...468
6.3. Thể Tích Sinh Bởi Vỏ Trụ....................................481
6.4. Công..488
6.5. Giá Trị Trung Bình Của Một Hàm Số......................493
ÔN CUỐI CHƯƠNG...498
BÀI TẬP LÀM THÊM..500

Trần Quang Nghĩa dịch

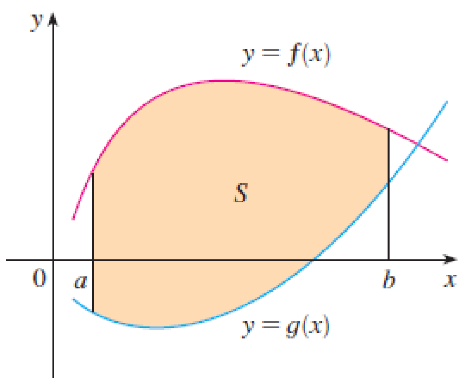
Thể tích của khối cầu là giới hạn
của tổng thể tích các khối trụ xấp xỉ.

Trong chương này ta tìm hiểu một số ứng dụng của tích phân xác định bằng cách sử dụng nó để tính diện tích giữa các đường cong, thể tích các khối và công tạo bởi một lực biến thiên. Luận điểm chung là phương pháp sau đây, tương tự như phương pháp ta đã dùng để tìm diện tích bên dưới các đồ thị: Ta phân chia một đại lượng Q thành một số lớn các phần nhỏ. Sau đó ta tính xấp xỉ mỗi phần nhỏ bằng một đại lượng có dạng $f(x_i^*)\,\Delta x$ và tính xấp xỉ Q bằng một tổng Riemann. Sau đó ta lấy giới hạn và biểu diễn Q dưới dạng một tích phân. Cuối cùng ta tính tích phân bằng cách sử dụng Định Lý Nền Tảng của Giải Tích hay Quy Tắc Trung Điểm.

BÀI 6.1. DIỆN TÍCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG CONG

Trong Chương 5 ta đã định nghĩa và tính diện tích các miền bên dưới đồ thị của hàm số. Ở đây ta dùng tích phân để tìm diện tích của miền nằm giữa hai đồ thị của hàm số.

Xét miền S nằm giữa hai đường cong y = f(x) và y = g(x) và giữa hai đường thẳng đứng x = a và x = b, trong đó f và t là các hàm số liên tục và f(x) ≥ g(x) với mọi x thuộc [a, b]. (Xem Hình 1.)



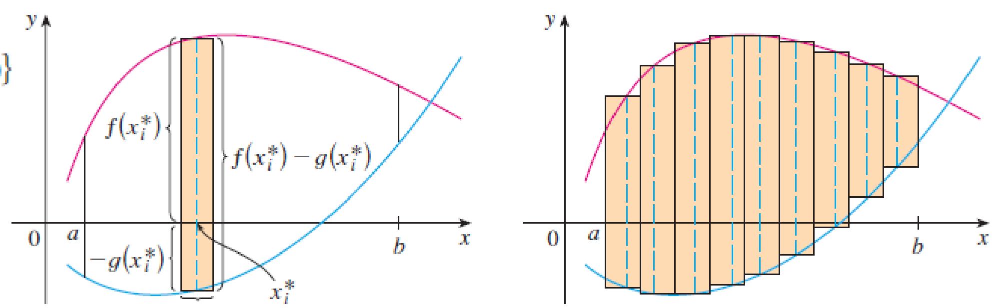
Giống như ta đã tìm diện tích bên dưới đường cong trong Bài 5.1, ta chia S thành n mảnh có chiều rông bằng nhau và rồi ta tính xấp xỉ mảnh thứ I bằng hình chữ nhật có cạnh đáy Δx và chiều cao $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Xem Hình 2. Nếu thích, ta có thể lấy tât cả điểm mẫu là đầu mút phải, khi đó $x_i^* = x_i$.). Tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

theo trực giác ta thấy chính là giá trị xấp xỉ của diện tích S.

HÌNH 1

$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$



HÌNH 2 (a) Hình chữ nhật tiêu biểu (b) Hình chữ nhật xấp xỉ

Giá trị xấp xỉ này càng lúc càng tốt hơn khi n → ∞. Do đó ta định nghĩa diện tích A của miền S là giá trị giới hạn của tổng diện tích các hình chữ nhật xấp xỉ này.

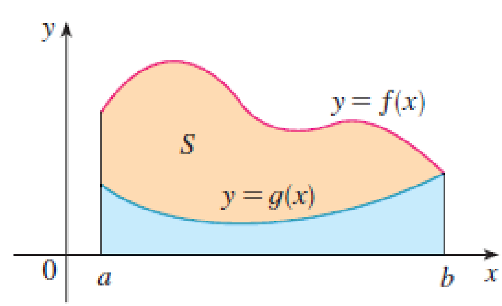
1 $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x}$$

Ta nhận ra giới hạn của (1) chính là tích phân xác định của f – g. Do đó ta có công thức sau để tính diện tích.

> **2** DIện tích A của miền giới hạn bởi đường cong y = f(x), y = g(x), và các đường x = a, x = b, trong đó f và t liên tục và f(x) ≥ g(x) với mọi x thuộc [a, b], là
>
> $$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Chú ý là trong trường hợp đặc biệt khi g(x) = 0, S là miền ở bên dưới đồ thị f và định nghĩa tổng quát của ta về diện tích (1) rút lại thành định nghĩa trước đây (Định nghĩa 2 trong Bài 5.1)

Trong trường hợp cả hai f và t đều dương, ta có thể thấy từ Hình 3 tại sao (2) là đúng:



HÌNH 3

A = [diện tích bên dưới y = f(x)] – [diện tích bên dưới y = g(x)]

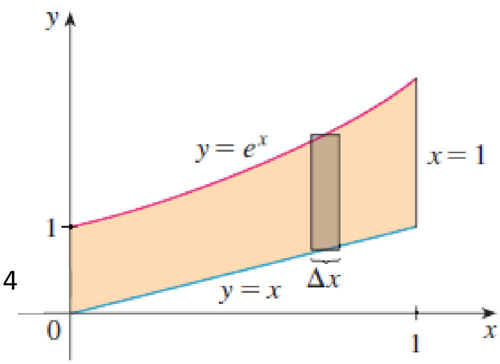
$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

VÍ DỤ 1 Tìm diện tích miền giới hạn phía trên bởi y = e^x, phía dưới bởi y = x, và giới hạn hai bên bởi x = 0 và x = 1.

GIẢI Miền được cho bởi Hình 4. Đường biên phía trên là y = e^x và đường biên dưới là y = x. Do đó ta dùng công thức tính diện tích (2) với f(x) = e^x, g(x) = x, a= 0, và b = 1:

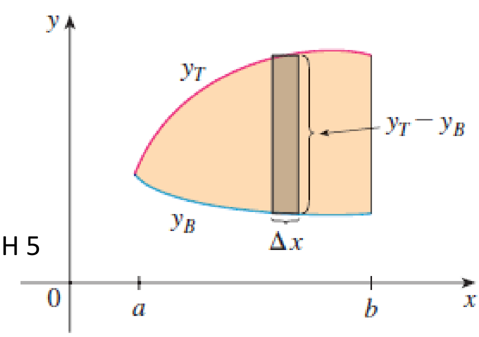
$$A = \int_0^1 (e^x - x)dx = e^x - \frac{1}{2}x^2 \Big]_0^1$$

$$= e - \frac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$



HÌNH 4

Trong Hình 4 ta vẽ hình chữ nhật xấp xỉ tiêu biểu với chiều rộng Δx để nhắc ta nhớ đến thủ tục theo đó diện tích được định nghĩa trong (1). Tổng quát, khi ta thiết lập một tích phân để tính diện tích, ta nên vẽ ra miền để nhận diện đường cong nằm trên y_T , đường nằm dưới y_B , và một hình chữ nhật xấp xỉ tiêu biểu như trong Hình 5. Thế thì diện tích của hình chữ nhật tiêu biểu là $(y_T - y_B)\Delta x$ và phương trình



HÌNH 5

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)dx$$

lược tóm thủ tục cộng diện tích tất cả hình chữ nhật tiêu biểu.

Chú ý là trong Hình 5 đường biên trái rút lại là một điểm, trong khi trong Hình 3 đường biên phải rút lại là một điểm. Trong ví dụ sau cả hai đường biên trái phải đều rút thành một điểm, vì thế bước đầu ta phải tìm a và b.

VÍ DỤ 2 Tìm diện tích của miền giới hạn bởi các parabol y = x^2 và y = 2x – x^2.

GIẢI Trước tiên ta tìm giao điểm của hai parabol bằng cách hệ phương trình của chúng. Ta được $x^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay 1. Các giao điểm là (0, 0) và (1, 1).

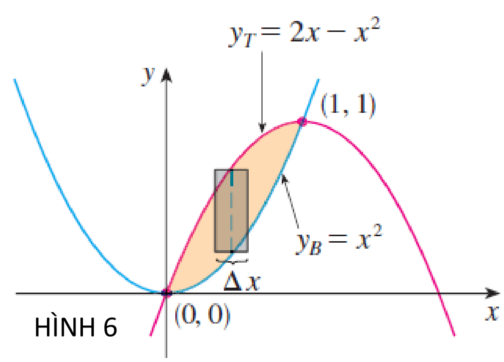
Từ Hình 6 ta thấy rằng các đường biên trên và dưới là

$$y_T = 2x - x^2 \qquad \text{và} \qquad y_B = x^2$$

Diện tích của hình chữ nhật tiêu biểu là

$$(y_T - y_B)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\Delta x$$

Vậy miền giới hạn nằm giữa x = 0 và x = 1. . Do đó diện tích cần tìm là



HÌNH 6

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = 2\int_0^1 (x - x^2)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Đôi khi tìm giao điểm là điều khó khăn, có khi không thể tìm một cách chính xác. Như trong ví dụ sau, ta có thể dùng máy tính để tính giá trị gần đúng cho giao điểm rồi tiến hành như trên.

VÍ DỤ 3 Tìm giá trị gần đúng của diện tích miền giới hạn bởi các đường cong $y = x/\sqrt{x^2+1}$ và $y = x^4 - x$.

GIẢI Nếu ta cố tìm giao điểm chính xác, ta sẽ phải giải phương trình

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^4 - x$$

Phương trình này nôm rất khó chơi nếu muốn tìm nghiệm chính xác (thật ra, đó là điều không thể). Thay vào đó ta dùng máy tính có công cụ vẽ đồ thị để vẽ đồ thị hai hàm số như trong Hình 7. Ta thấy có một giao điểm là điểm gốc. Ta phóng to giao điểm còn lại và tìm được $x \approx 1.18$. (Nếu muốn có độ chính xác lớn hơn, ta có thể dùng phương pháp Newton. . .) Do đó diện tích xấp xỉ giữa hai đường cong là

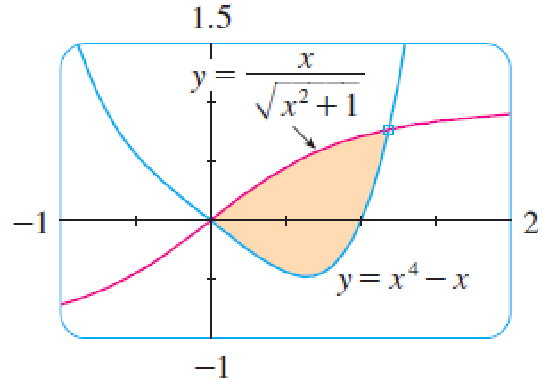
$$A \approx \int_0^{1.18}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x)\right]dx$$

Để tích phân số hạng đầu tiên ta dùng phép đổi biến $u = x^2 + 1$. Suy ra $du = 2xdx$ và

- Khi $x = 0$, $u = 1$
- Khi $x = 1.18$, $u \approx 2.39$.

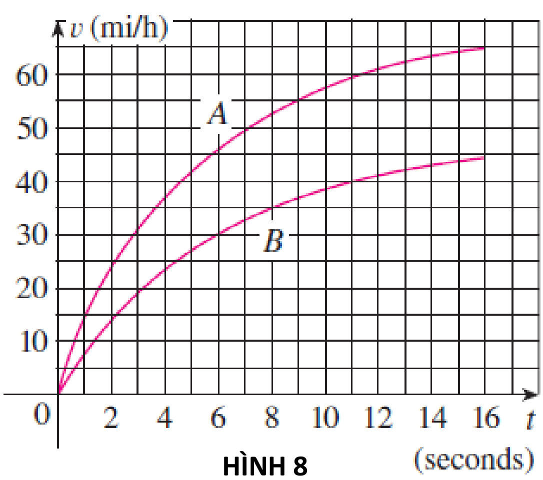
Và

$$\begin{aligned} A &\approx \tfrac{1}{2}\int_1^{2.39}\frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1.18}(x^4 - x)\,dx \\ &= \sqrt{u}\,\Big]_1^{2.39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1.18} \\ &= \sqrt{2.39} - 1 - \frac{(1.18)^5}{5} + \frac{(1.18)^2}{2} \\ &\approx 0.785 \end{aligned}$$



HÌNH 7

VÍ DỤ 4 Hình 8 cho thấy đường cong vận tốc của hai xe, A và B, khởi hành bên cạnh nhau và đi trên cùng một con đường. Diện tích giữa các đường cong biểu thị điều gì? Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính nó.



HÌNH 8

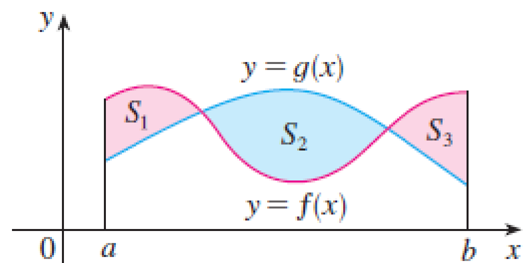
GIẢI Từ Bài 5.4 ta biết rằng diện tích bên dưới đường cong vận tốc A biểu thị quãng đường đi được của xe A trong 16 giây đầu tiên. Tương tự, diện tích bên dưới đường cong vận tốc B biểu thị quãng đường đi được của xe B trong khoảng thời gian đó. Do đó diện tích giữa hai đường cong, tức hiệu số hai diện tích, là khoảng cách giữa hai xe sau 16 giây đầu tiên. Ta đọc vận tốc từ đồ thị và biến đổi ra đơn vị là feet/giây (1 mi/h = $\frac{5280}{3600}$ ft/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

Ta dùng Quy Tắc Trung Điểm với n = 4 phân đoạn, với Δt = 4. Các trung điểm của đoạn là $t_1 = 2$, $t_2 = 6$, $t_3 = 10$, và $t_4 = 14$. Ta ước tính khoảng cách giữa các xe sau 16 giây như sau:

$$\int_0^{16}(v_A - v_B)dt \approx \Delta t[13+23+28+29]$$
$$= 4(93) = 372\ ft$$

Nếu ta được yêu cầu tìm diện tích giữa hai đường cong y = f(x) và y = g(x) trong đó f(x) ≥ g(x) trong khoảng này và g(x) ≥ f(x) trong khoảng kia, thế thì ta phải chia miền cần tìm thành vài miền nhỏ S_1, S_2, . . có diện tích A_1, A_2, . . .như trong Hình 9. Khi đó diện tích của miền S là tổng diện tích các miền nhỏ hơn S_1, S_2, . . . , tức là, $A = A_1 + A_2 + \ldots$. Vì



HÌNH 9

$$|f(x)-g(x)| = \begin{cases} f(x)-g(x) & khi \quad f(x) \geq g(x) \\ g(x)-f(x) & khi \quad g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

ta có biểu thức sau đây của A.

3 Diện tích giữa các đường cong y = f(x) và y = g(x) và giữa x = a và x = b là

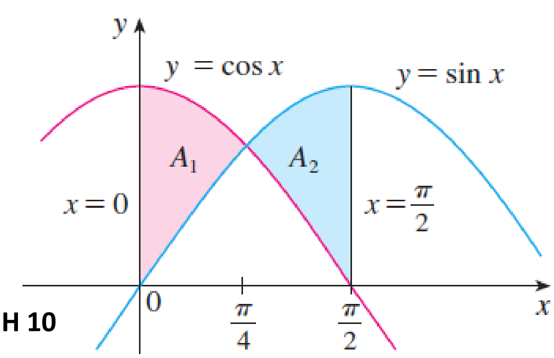
$$A = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Khi tính tích phân trong (3), ta phải chia tích phân thành những tích phân tương ứng với A_1, A_2, . . .

VÍ DỤ 5 Tìm diện tích của miền giới hạn bởi các đường y = sin x, y = cos x, x = 0, và x = π/2.

GIẢI Những giao điểm có hoành độ cho bởi sin x = cos x ⇔ x = π/4(vì 0 ≤ x ≤ π/2). Miền được minh họa trong Hình 10. Nhận xét rằng cos x ≥ sin x khi 0 ≤ x ≤ π/4 và sin x ≥ cos x khi π/4 ≤ x ≤ π/2. Do đó diện tích cần tìm là

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x|\,dx = A_1 + A_2 \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$



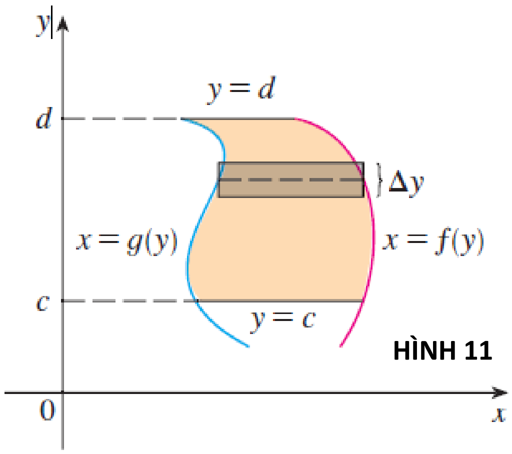
HÌNH 10

Trong vi dụ đặc biệt này ta có thể tiết kiệm được chút công sức nếu chú ý là miền cần tính đối xứng qua x = π/4, do đó

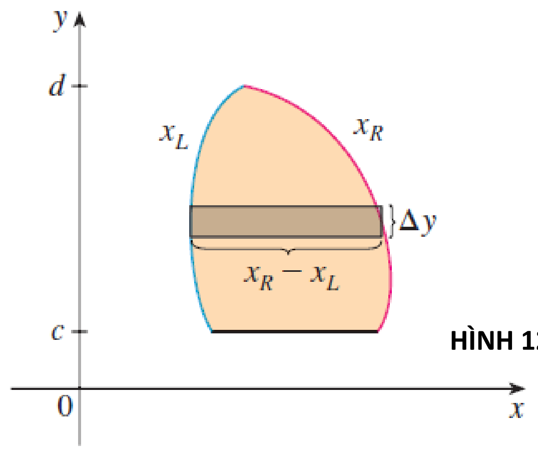
$$A = 2A_1 = \int_0^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx$$

Một số miền có thể tính thuận tiện hơn bằng cách xem x như phương trình theo y. Nếu một miền giới hạn bởi các đường có phương trình x = f(y), x = g(y), y = c, và y = d, trong đó f và g là các hàm số liên tục và f(y) ≥ g(y) với c ≤ y ≤ d (xem Hình 11), thế thì diện tích của nó là

$$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]dy$$



HÌNH 11



HÌNH 12

Nếu ta viết x_R để chỉ đường biên phải và x_L chỉ đường biên trái, thế thì, như Hình 12 đã minh họa, ta có

$$A=\int_c^d (x_R-x_L)dy$$

Đây là hình chữ nhật xấp xỉ tiêu biểu có kích thước $x_R - x_L$ và Δy.

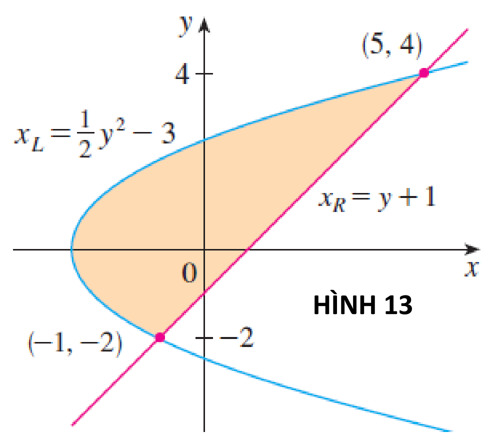
VÍ DỤ 6 Tìm diện tích giới hạn bởi các đường y = x – 1 và parabol $y^2 = 2x + 6$.

GIẢI Bằng cách giải hai phương trình ta tìm được giao điểm là (- 1, - 2) và (5, 4). Giải phương trình của parabol theo x và chú ý là từ Hình 13 đường biên trái và phải là

$$x_L = \tfrac{1}{2} y^2 - 3 \qquad x_T = y + 1$$

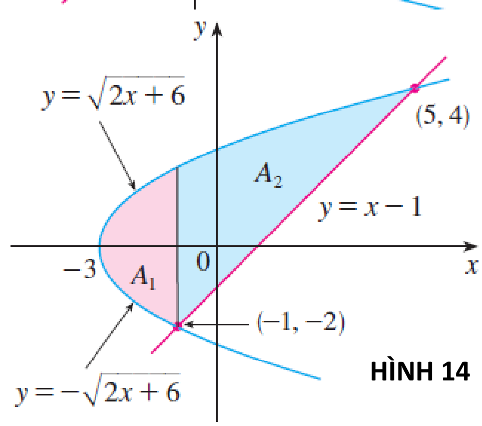
Ta phải tích phân giữa những giá trị thích hợp của y, y = - 2 và y = 4. Do đó

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\,dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Bigg]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$



HÌNH 13

Ta có thể tìm được diện tích trong Ví dụ 6 bằng cách tích phân theo x thay vì y nhưng phép tính phức tạp hơn. Khi đó ta phải tách diện tích ra làm hai phần và tính diện tích phần A_1 và A_2 như trong Hình 14. Phương pháp ta ùng ở trên thuận tiện hơn nhiều.

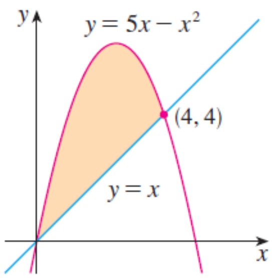


HÌNH 14

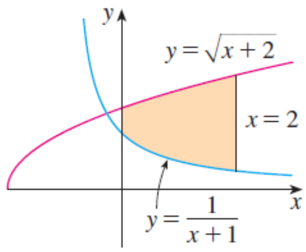
BÀI TẬP

1-4. Tìm diện tích của miền được tô.

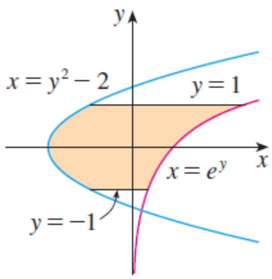
1.



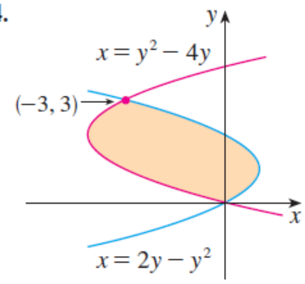
2.



3.



4.



5-28. Vẽ miền giới hạn bởi các đường cho trước. Hãy tích phân theo x hay y tùy chọn. Vẽ hình chữ nhật tiêu biểu và ghi rõ chiều cao, chiều rộng. Sau đó tìm diện tích của miền.

5. $y = x + 1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$

6. $y = \sin x, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

7. $y = x, \quad y = x^2$

8. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

9. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

10. $y = 1 + \sqrt{x}, \quad y = (3 + x)/3$

11. $y = x^2, \quad y^2 = x$

12. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

14. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $y = \tan x, \quad y = 2\sin x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

16. $y = x^3 - x, \quad y = 3x$

17. $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x = 9$

18. $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -3, \quad x = 3$

19. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

20. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

21. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

22. $y = \sin(\pi x/2), \quad y = x$

23. $y = \cos x, \quad y = \sin 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

24. $y = \cos x, \quad y = 1 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

25. $y = x^2, \quad y = 2/(x^2 + 1)$

26. $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$

27. $y = 1/x, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$

28. $y = 3x^2, \quad y = 8x^2, \quad 4x + y = 4, \quad x \geqslant 0$

29-30. Dùng giải tích để tính diện tích của tam giác có ba đỉnh cho trước.

29. (0, 0), (2, 1), (- 1, 6)

30. (0, 5), (2, - 2), (5, 1)

31-32. Tính tích phân và lý giải nó như diện tích của một miền. Vẽ miền ấy.

31. $\int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos 2x|\, dx$

32. $\int_0^4 |\sqrt{x+2} - x|\, dx$

33-34. Dùng Quy Tắc Trung Điểm với n = 4 để tính xấp xỉ diện tích của miền giới hạn bởi các đường cho trước.

33. $y = \sin^2(\pi x/4), \qquad y = \cos^2(\pi x/4), \qquad 0 \le x \le 1$

34. $y = \sqrt[3]{16 - x^3}, \quad y = x, \quad x = 0$

35-38. Dùng đồ thị để tìm hoành độ xấp xỉ của giao điểm các đường cho trước. Sau đó tìm (xấp xỉ) diện tích của miền giới hạn bởi các đường.

35. $y = x\sin(x^2), \quad y = x^4$

36. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

37. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

38. $y = x\cos x, \quad y = x^{10}$

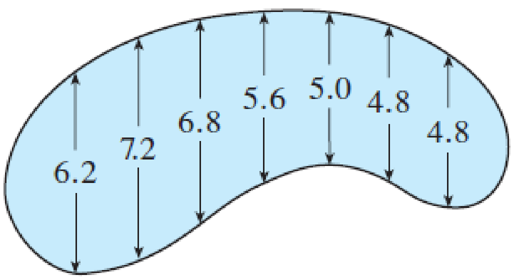
39. Dùng máy tính để tìm diện tích chính xác giới hạn bởi đường $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ và $y = x$.

40. Vẽ miền trong mặt phẳng xy xác định bởi các bất phương trình $x - 2y^2 \ge 0$, $1 - x - |y| \ge 0$ và tìm diện tích của nó.

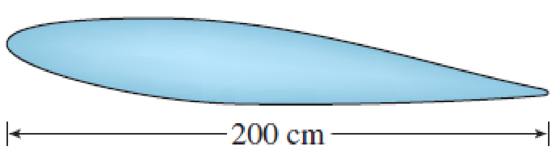
41. Xe đua do Chris va Kelly cầm lái khởi hành bên cạnh nhau. Bảng dưới cho thấy vận tốc hai xe (tính bằng dặm/giờ) trong mười giây đầu tiên của cuộc đua. Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính xem Kelly vượt qua mặt Chris bao xa trong mười giây đầu tiên.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	69	80
1	20	22	7	75	86
2	32	37	8	81	93
3	46	52	9	86	98
4	54	61	10	90	102
5	62	71			

42. Chiều rộng (tính bằng mét) của hồ bơi hình quả thận được đo ở những khoảng cách 2 mét như trong hình. Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính diện tích hồ bơi.



43. Thiết diện thẳng của cánh máy bay được cho trong hình. Số đo chiều cao của cánh, tính bằng cm, ở những khoảng cách 20 cm là 5.8, 20.3, 26.7, 29.0, 27.6, 27.3, 23.8, 20.5, 15.1. 8.7, và 2.8. Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính diện tích của thiết diện của cánh.



44. Nếu sinh suất (tốc độ sinh sản) là $b(t) = 2200e^{0.024t}$ người mỗi năm và từ suất là $d(t) = 1460e^{0.018t}$ người mỗi năm. Tìm diện tích giữa các đường cong này với $0 \le t \le 10$. Diện tích này biểu thị điều gì?

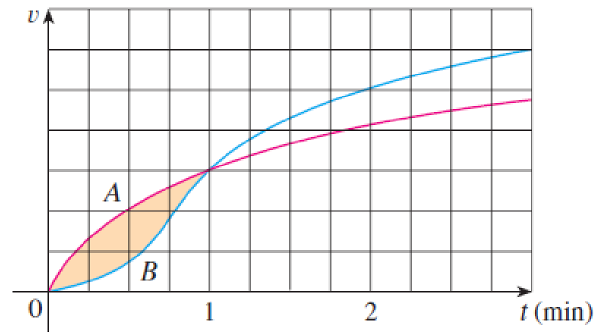
45. Hai xe, A và B, khởi hành cạnh nhau từ vị trí đứng yên. Hình trên cho thấy đồ thị của hàm số vận tốc của chúng.

(a) Xe nào vượt trước sau một phút? Giải thích.

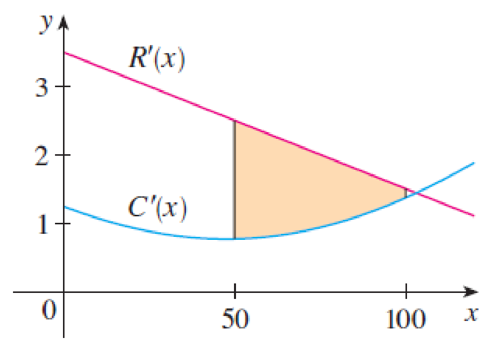
(b) Ý nghĩa của diện tích của miền được tô là gì?

(c) Xe nào vượt trước sau hai phút? Giải thích.

(d) Ước tính thời gian hai xe một lần nữa lại chạy cạnh nhau.



46. Hình dưới cho thấy đồ thị của hàm số doanh thu cận biên R' và hàm số chi phí cận biên C' của một công ty sản xuất. [Nhớ là ở Bài 4.7 ta đã biết R(x) và C(x) biểu thị doanh thu và chi phí khi x đơn vị được sản xuất. R và C được tính bằng nghìn đôla.] Ý nghĩa của diện tích của miền được tô là gì? Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính giá trị của đại lượng này.



47. Đường cong có phương trình $y^2 = x^2(x + 3)$ được gọi là đường **Tschirnhausen bậc ba.** Nếu bạn vẽ đường cong này (bằng máy tính) bạn sẽ thấy có phần đường cong tạo thành một vòng kín. Tính diện tích của vòng này.

48. Tìm diện tích của miền giới hạn bởi parabol $y = x^2$, tiếp tuyến của parabol tại điểm (1, 1), và trục hoành.

49. Tìm số b sao cho đường y = b chia miền giới hạn bởi đường $y = x^2$ và y = 4 thành hai phần có diện tích bằng nhau.

50. (a) Tìm số a sao cho đường x = a chia đôi diện tích bên dưới đường cong $y = 1/x^2$, $1 \le x \le 4$.

(b) Tìm số b sao cho đường y = b chia đôi diện tích ở phần (a).

51. Tìm giá trị của c sao cho diện tích của miền giới hạn bởi parabol $y = x^2 - c^2$ và $y = c^2 - x^2$ là 576.

52. Giả sử $0 < c < \pi/2$. Với giá trị nào của c diện tích của miền giới hạn bởi các đường y = cos x, y = cos(x – c), và x = 0 bằng diện tích của miền giới hạn bởi các đường y = cos(x – c) , x = π, và y = 0?

53. Với giá trị nào của m đường y = mx và đường $y = x/(x^2 + 1)$ tạo thành một miền? Tìm diện tích của miền ấy.

ĐÁP SỐ

1. $\frac{32}{3}$ **3.** $e - (1/e) + \frac{10}{3}$ **5.** 19.5 **7.** $\frac{1}{6}$ **9.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$
11. $\frac{1}{3}$ **13.** 72 **15.** $2 - 2\ln 2$ **17.** $\frac{59}{12}$ **19.** $\frac{32}{3}$
21. $\frac{8}{3}$ **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** $\pi - \frac{2}{3}$ **27.** $\ln 2$ **29.** 6.5
31. $\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$ **33.** 0.6407 **35.** 0, 0.90; 0.04 **37.** 8.38
39. $12\sqrt{6} - 9$ **41.** $117\frac{1}{3}$ ft **43.** 4232 cm^2
45. (a) Car A (b) The distance by which A is ahead of B after 1 minute (c) Car A (d) $t \approx 2.2$ min
47. $\frac{24}{5}\sqrt{3}$ **49.** $4^{2/3}$ **51.** ± 6
53. $0 < m < 1$; $m - \ln m - 1$

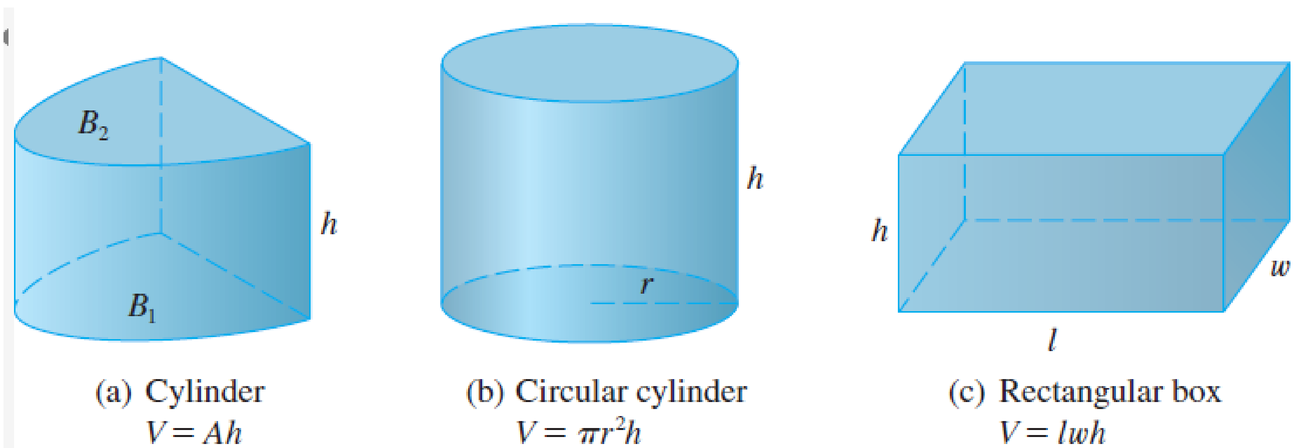
BÀI 6.2. THỂ TÍCH

Khi đi tính thể tích của một khối ta đối mặt với một dạng toán tương tự như khi đi tìm diện tích. Ta vốn có một khái niệm trực giác về ý nghĩa của thể tích, nhưng ta cần một thể hiện ý tưởng này một cách đúng đánính xác bằng giải tích, nhờ đó đưa ra được một định nghĩa chính xác của thể tích.

Ta bắt đầu với một dạng khối đơn giản gọi là **khối trụ** (hay, chính xác hơn, khối trụ đứng). Như minh họa trong Hình 1(a), khối trụ giới hạn bởi một miền phẳng B_1 gọi là **đáy**, và miền phẳng B_2 bằng nó nằm trong mặt phẳng song song. Khối trụ này tạo bởi tât cả điểm trên những đoạn vuông góc với đáy và nối B_1 với B_2. Nếu diện tích của đáy là A và chiều cao của khối trụ (khoảng cách từ B_1 đến B_2) là h, thế thì thể tích của khối trụ được định nghĩa là

$$V = Ah$$

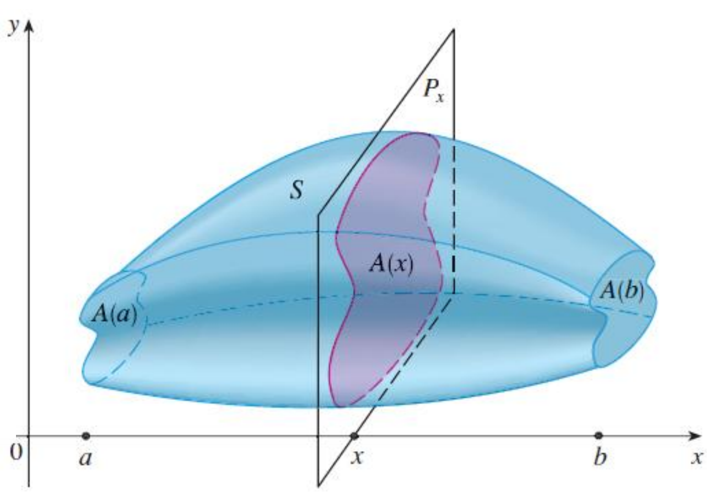
Đặc biệt, nếu đáy là một hình tròn bán kính r, thế thì khối trụ là khối trụ tròn xoay với thể tích $V = \pi r^2 h$ (xem Hình 1(b)), và nếu đáy là hình chữ nhật có chiều dài l và chiều rộng w, thế thì khối trụ là **hình hộp chữ nhật**, có thể tích V = lwh [xem Hình 1(c)].



HÌNH 1

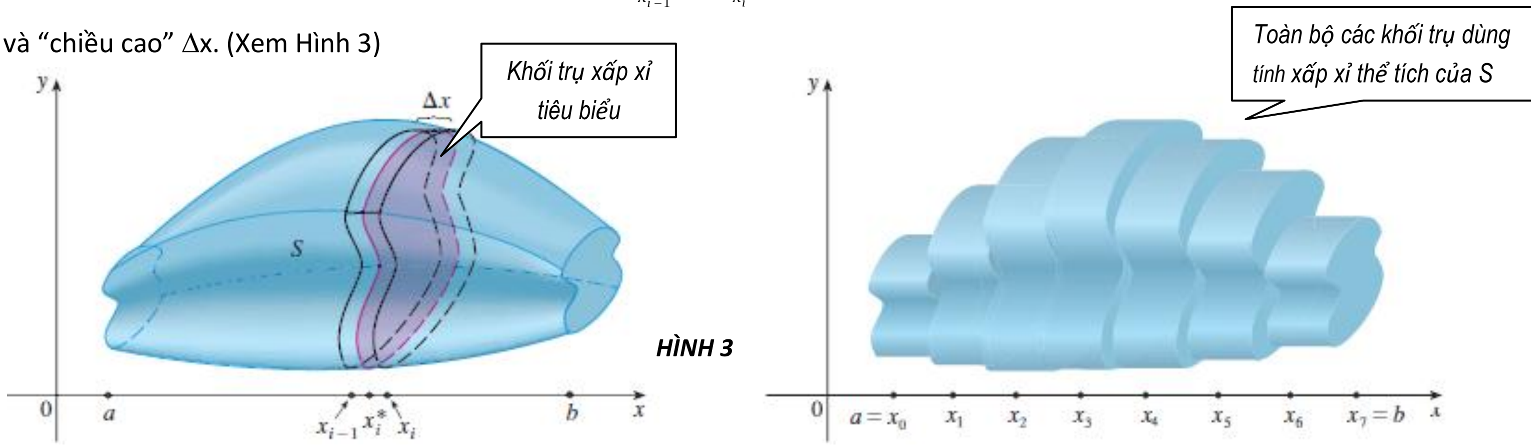
Đối với một khối S không phải là khối trụ trước tiên ta "cắt lắt" nó thành những miếng và tính xấp xỉ mỗi miếng bằng các khối trụ. Ta ước tính thể tích của S bằng cách cộng thể tích các khối trụ. Cuối cùng ta được thể tích chính xác của khối S bằng cách lấy giới hạn khi số khối trụ tăng lên vô hạn.

Ta bắt đầu bằng cách lấy phần giao của S với một mặt phẳng và được một miền phẳng gọi là **thiết diện thẳng** của S. Gọi A(x) là diện tích của thiết diện trong mặt phẳng P_x vuông góc với trục x và đi qua điểm x, với $a \le x \le b$. (Xem Hình 2. Tưởng tượng như ta đang cắt S bằng lưỡi dao qua x và tính diện tích của lát cắt này.) Diện tích thiết diện thẳng A(x) sẽ biến thiên khi x tăng từ a đến b.



HÌNH 2

Hãy chia S thành n "lát" có chiều dày bằng nhau Δx bằng cách sử dụng những mặt phẳng P_{x1}, P_{x2}, . . . để cắt S ra từng lát mỏng. (Giống như ta cắt lát ổ bánh mì.) Nếu ta chọn những điểm mẫu x_i^* thuộc $[x_{i-1}, x_i]$, ta có thể coi thể tích miếng lát thứ i S_i (đây là phần của S nằm giữa mặt phẳng $P_{x_{i-1}}$ và P_{x_i}) bằng xấp xỉ bằng thể tích khối trụ có diện tích đáy $A(x_i^*)$ và "chiều cao" Δx. (Xem Hình 3)



HÌNH 3

Thể tích của khối trụ này là $A(x_i^*)\,\Delta x$, do đó theo trực giác của ta, giá trị xấp xỉ của thể tích của lát cắt thứ i S_i là

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Cộng các thể tích của những trụ này, ta được giá trị xấp xỉ (theo trực giác) của toàn bộ thể tích của S là

$$V \approx \sum_{i=1}^{N} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Giá trị xấp xỉ này càng trở nên tốt hơn (càng gần bằng thể tích thực của S) khi n càng gần đến ∞. (Khi đó lát cắt càng lúc càng mỏng.) Do đó, ta định nghĩa thể tích như là giới hạn của những tổng này khi $n \to \infty$. Đây là tổng Riemann quen thuộc có giới hạn chính là tích phân xác định, vì thế ta có định nghĩa sau đây.

ĐỊNH NGHĨA CỦA THỂ TÍCH Cho S là một khối nằm giữa x = a và x = b. Nếu diện tích của thiết diện thẳng của S trong mặt phẳng P_x , qua x và vuông góc với trục x là A(x), trong đó A là hàm số liên tục, thế thì thể tích của S là

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{`n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

Có thể chứng tỏ là định nghĩa này độc lập với vị trí của S đối với trục x. Nói cách khác, dù ta cắt lát S với những mặt phẳng song song thế nào, ta luôn được cùng kết quả cho V

Khi ta dùng công thức thể tích V = $\int_a^b A(x)dx$, cần nhớ A(x) là diện tích của thiết diện thẳng di động có được bằng cách cắt qua x và vuông góc với trục x.

Chú ý rằng, đối với một khối trụ, diện tích thiết diện thẳng là không đổi A(x) = A với mọi x. Vì thế từ định nghĩa của thể tích, ta được V = $\int_a^b A dx = A(b-a)$; kết quả này phù hợp với công thức V = Ah.

VÍ DỤ 1 Chứng tỏ rằng thể tích của khối cầu bán kính r là V = $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

GIẢI Nếu ta đặt khối cầu sao cho tâm nó trùng với điểm gốc (xem Hình 4), thế thì mặt phẳng P_x cắt khối cầu theo một hình tròn có bán kính (cho bởi Định lý Pytago) là $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Do đó diện tích của thiết diện thẳng là

$$A(x)=\pi\, y^2=\pi(r^2-x^2)$$

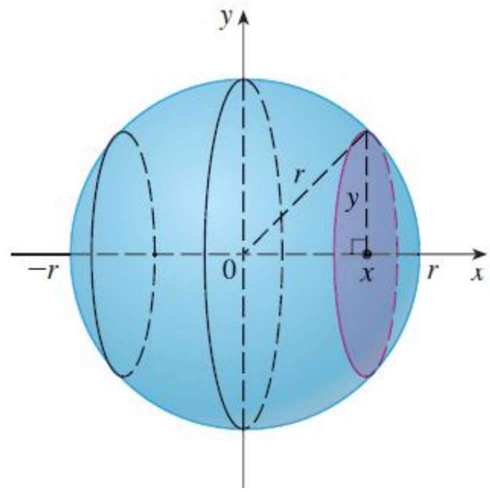
Dùng định nghĩa của thể tích với a = - r, b = r, ta có

$$V=\int_{-r}^{r} A(x)\,dx=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)\,dx$$

$$=2\pi\int_0^r (r^2-x^2)\,dx \quad \text{(Hàm số được tích phân là hàm số chẵn)}$$

$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)$$

$$=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

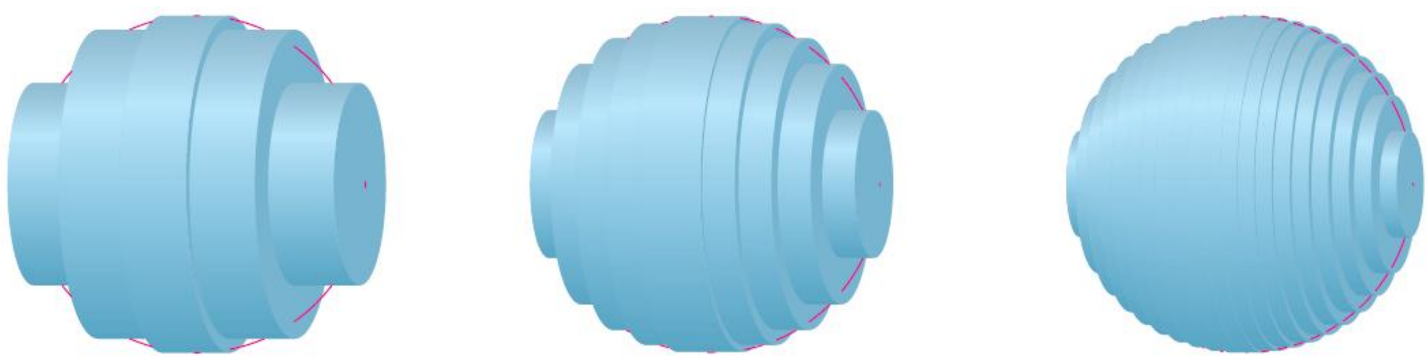


HÌNH 4

Hình 5 minh họa định nghĩa của thể tích khi khối đang xét là một khối cầu có bán kính là 1. Từ kết quả của Ví dụ 1, ta biết rằng thể tích của một khối cầu này là $\frac{4}{3}\pi\approx 4.18879$. Ở đây những khối trụ xấp xỉ những lát cắt là những khối trụ tròn xoay, và ba phần của Hình 5 đều mô tả biểu diễn hình học của tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\pi(1-x_i^{*\,2})\Delta x$$

Khi n = 5, 10, và 20 và những điểm mẫu x_i^* là trung điểm các phân đoạn. Chú ý là khi ta tăng số khối trụ xấp xỉ, tổng tương ứng càng tiến gần đến thể tích thực sự.



(a) Using 5 disks, $V\approx 4.2726$ (b) Using 10 disks, $V\approx 4.2097$ (c) Using 20 disks, $V\approx 4.1940$

HÌNH 5

VÍ DỤ 2 Tìm thể tích của khối có được bằng cách quay quanh trục x miền bên dưới đường cong y = $\sqrt{x}$ từ 0 đến 1. Minh họa định nghĩa của thể tích bằng cách vẽ một khối trụ xấp xỉ tiêu biểu.

GIẢI Miền được minh họa trong Hình 6(a). Nếu ta quay quanh trục x, ta được một khối tròn xoay như trong Hình 6(b). Khi ta cắt qua điểm x, ta được thiết diện thẳng là một hình tròn có bán kính là $\sqrt{x}$. Diện tích của thiết diện là

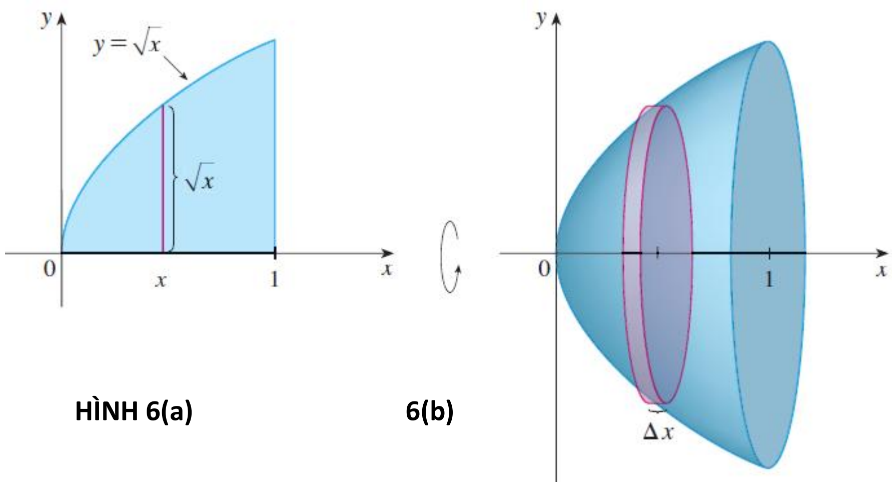
$$A(x)=\pi\left(\sqrt{x}\right)^2=\pi\, x$$

Và thể tích của khối trụ xấp xỉ là

$$A(x)\,\Delta x = \pi\, x\,\Delta x$$

Khối cần tìm nằm giữa 0 và 1, do đó có thể tích là

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi\, x\,dx = \pi\,\frac{x^2}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



HÌNH 6(a) **6(b)**

VÍ DỤ 3 Tìm thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi $y = x^3$, $y = 8$, và $x = 0$ quanh trục y.

GIẢI Miền được minh họa trong Hình 7(a) và khối sinh ra trong Hình 7(b). Vì quay quanh trục y nên ta cắt khối ấy vuông góc với trục y và sau đó tích phân theo y. Thiết diện thẳng vuông góc tại y là một đĩa tròn có bán kính x, với $x = \sqrt[3]{y}$. Do đó diện tích của thiết diện thẳng qua y là

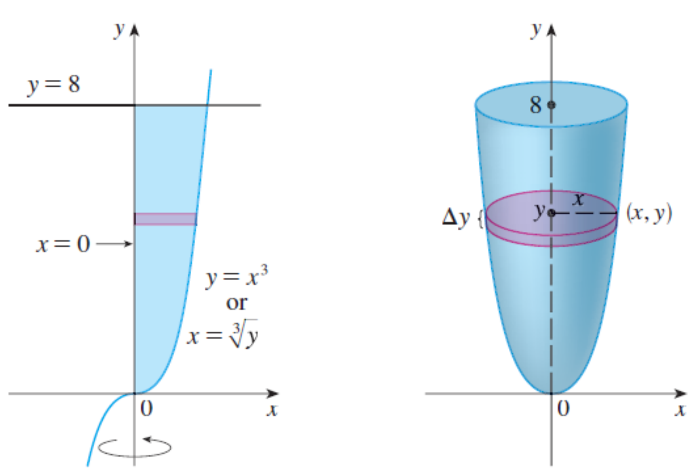
$$A(y) = \pi\, x^2 = \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi\, y^{2/3}$$

và thể tích của khối trụ xấp xỉ được minh họa trong Hình 7(b) là

$$A(y)\,\Delta y = \pi\, y^{2/3}\,\Delta y$$

Vì khối nằm giữa y = 0 và y = 8, nên thể tích cần tìm là

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$



HÌNH 7 (a) (b)

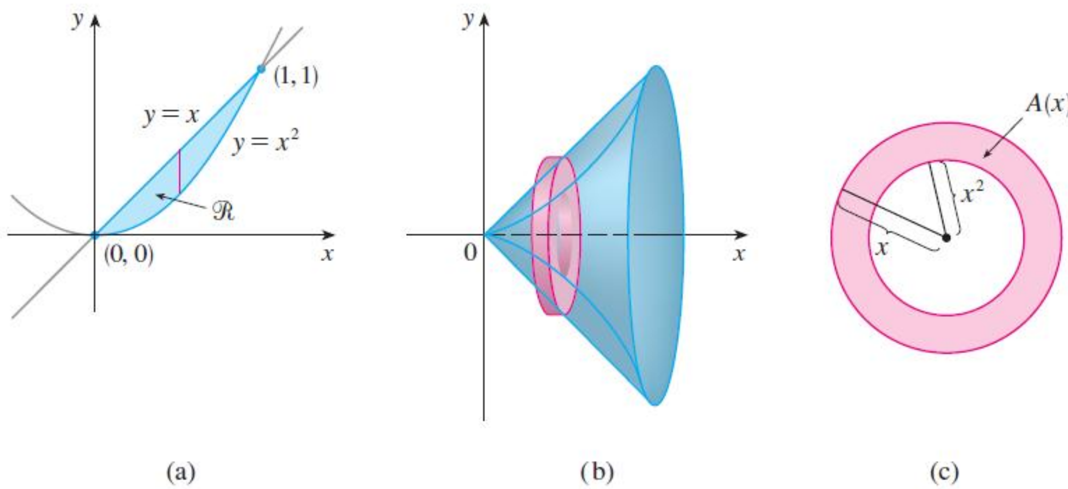
VÍ DỤ 4 Miền R giới hạn bởi các đường y = x và y = x^2 được quay quanh trục x. Tìm thể tích của khối sinh ra.

GIẢI Các đường y = x và y = x^3 cắt nhau tại các điểm (0, 0) và (1, 1). Miền giữa hai đường, khối tròn xoay sinh ra, và một thiết diện thẳng vuông góc với trục được minh họa trong Hình 8. Thiết diện trong mặt phẳng P_x có dạng một hình vành khăn với bán kính trong x^2 và bán kính ngoài x, do đó diện tích thiết diện là hiệu số diện tích của hai hình tròn ngoài và trong:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi (x^2)^2 = \pi (x^2 - x^4)$$

Do đó ta có

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

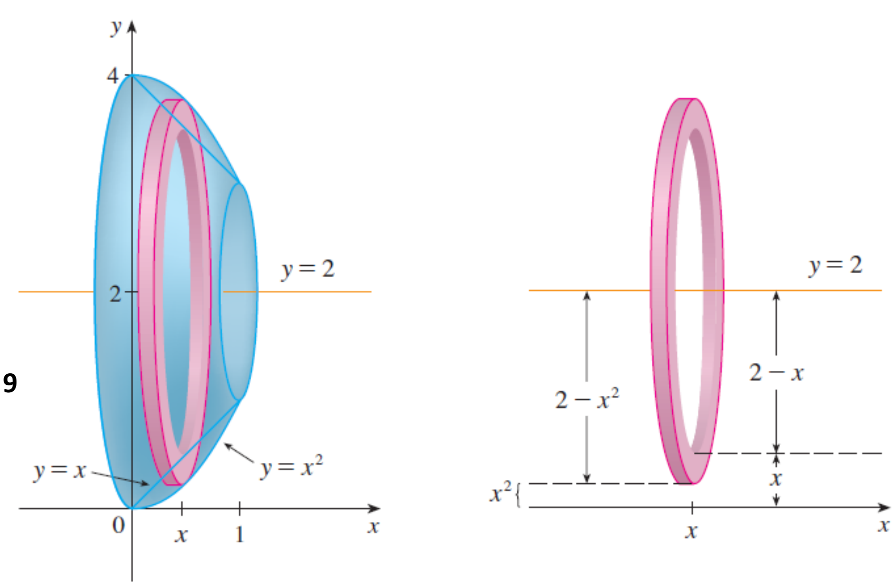


HÌNH 8

VÍ DỤ 5 Tìm thể tích của khối sinh ra khi quay miền trong Ví dụ 4 quanh đường thẳng y = 2.

GIẢI Khối tròn xoay và thiết diện thẳng được minh họa trong Hình 9. Thiết diện vẫn là một hình vành khăn, nhưng lần này bán kính hình tròn trong là 2 – x và bán kính ngoài là 2 – x^2.

HÌNH 9



Diện tích thiết diện thẳng là

$$A(x) = \pi\,(2 - x^2)^2 - \pi\,(2 - x)^2$$

và thể tích của S là

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Các khối trong Ví dụ 1 – 5 được gọi là **những khối tròn xoay** vì chúng được sinh ra khi quay một miền quanh một đường thẳng. Tổng quát, ta tính thể tích cuamot khối tròn xoay bằng cách dùng công thức cơ bản

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad hay \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

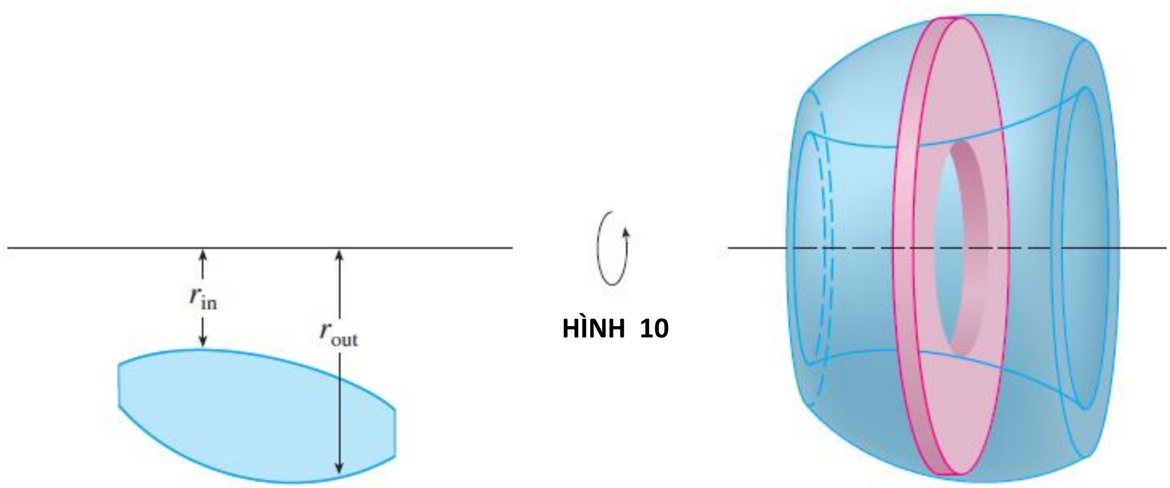
và chúng ta tìm diện tích của thiết diện thẳng A(x) hay A(y) theo một trong các cách sau:

- Nếu thiết diện là một hình tròn (đĩa tròn, như trong Ví dụ 1 – 3), ta tìm bán kính của nó (theo x hay y) và dùng

  $A = \pi$ (bán kính)^2

- Nếu thiết diện là hình vành khăn (như trong Ví dụ 4 và 5), ta tìm bán kính trong r_{in} và bán kính ngoài r_{out} dựa vào hình (như trong Hình 8, 9, và 10) và tính diện tích của hình vành khăn bằng cách trừ hai diện tích ngoài và trong:

  $A = \pi$ (bán kính ngoài)^2 – π(bán kính trong)^2



HÌNH 10

Ví dụ sau cho ta một minh họa cao hơn về phương pháp này.

VÍ DỤ 6 Tìm thể tích của khối sinh ra khi quay miền trong Ví dụ 4 quanh đường x = - 1.

GIẢI Hình 11 cho thấy thiết diện ngang. Đó là một hình vành khăn với bán kính trong bán kính 1 + y và bán kính ngoài $1 + \sqrt{y}$, do đó thiết diện có diện tích là

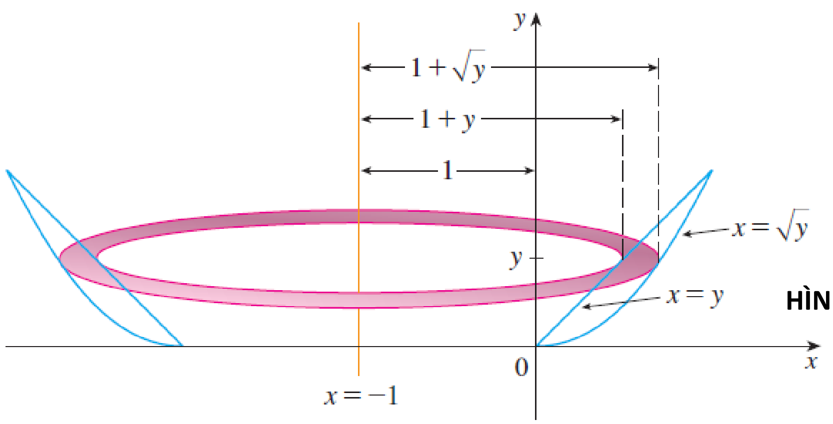
$$A(y) = \pi\,(\text{bán kính ngoài})^2 - \pi(\text{bán kính trong})^2$$

$$= \pi\,(1 + \sqrt{y}\,)^2 - \pi\,(1 + y)^2$$

Thế tích là

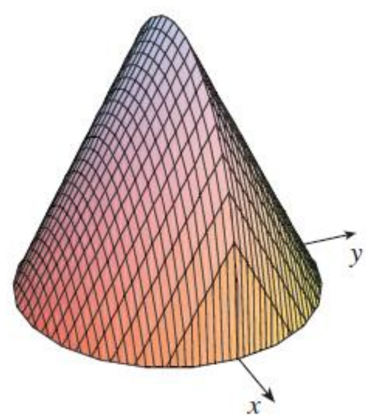
$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[(1 + \sqrt{y})^2 - (1 + y)^2\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy = \pi \left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



HÌNH 11

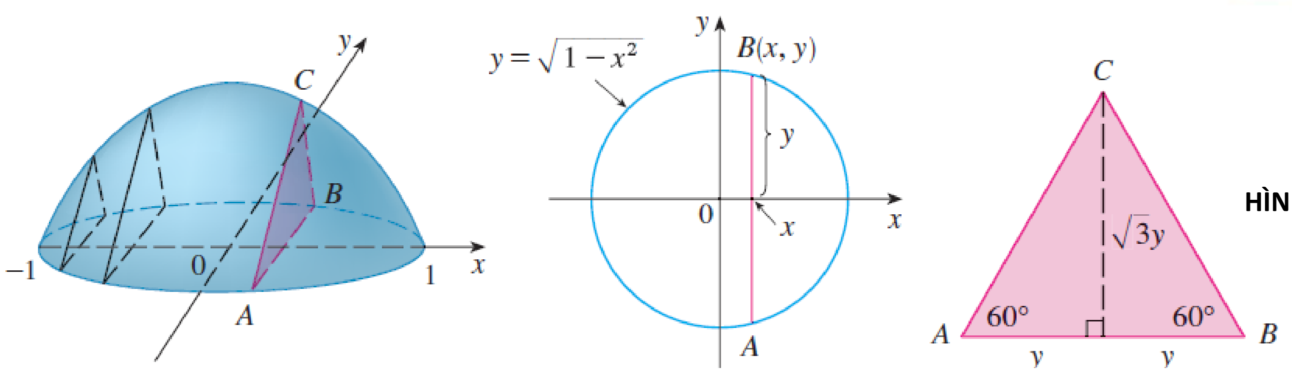
HÌNH 12



Giờ đây ta tính tich các khối không phải là khối tròn xoay.

VÍ DỤ 7 Hình 12 cho thấy một khối có đáy là hình tròn bán kính 1. Thiết diện thẳng song song nhau và cùng vuông góc với đáy là những tam giác đều. Tìm thể tích của khối đó.

GIẢI Hảy xét đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Khối, đáy của nó, và một thiết diện thẳng tiêu biểu cách gốc một khoảng là x như minh họa trong Hình 13.



HÌNH 13

(a) Khối (b) Đáy (c) Thiết diện thẳng

Vì B nằm trên đường tròn , ta có y = $\sqrt{1-x^2}$ và do đó cạnh đáy của tam giác ABC là | AB | = 2 $\sqrt{1-x^2}$. Vì tam giác là đều, từ Hình 13(c), ta suy ra chiều cao là $y\sqrt{3} = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$. Thiết diện thẳng có diện tích là

$$A(x) = \frac{1}{2}.\,2\sqrt{1-x^2}\ .\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}(1-x^2)$$

và thể tích của khối là

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

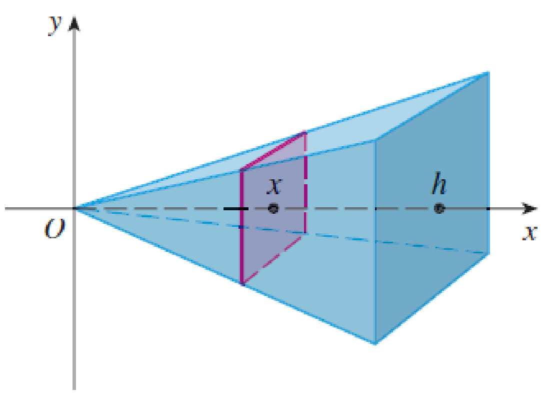
VÍ DỤ 8 Tìm thể tích của khối chóp có đáy là hình vuông có cạnh là L và chiều cao là h.

GIẢI Ta đặt gốc O tại đỉnh khối chóp và trục x dọc theo trục tâm của nó như trong Hình 14. Mặt phẳng P_x bất kỳ qua x và vuông góc với trục x cắt khối chóp theo một hình vuông có cạnh gọi là s. Ta có thể tính s theo x từ hai tam giác đồng dạng như trong Hình 15 để được

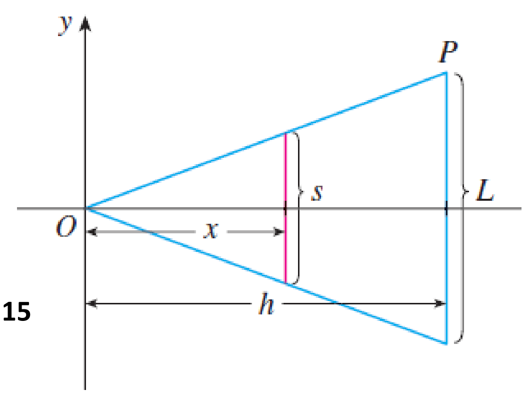
$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

Suy ra s = Lx / h. [Một cách khác là nhận xét rằng đường OP có độ dốc L /(2h) và do đó phương trình của nó là y = Lx /(2h).] Vậy thiết diện thẳng có diện tích là

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$



HÌNH 14



HÌNH 15

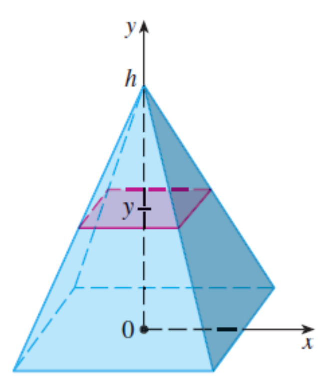
Khối chóp nằm giữa x = 0 và x = h, do đó thể tích cần tìm là

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$

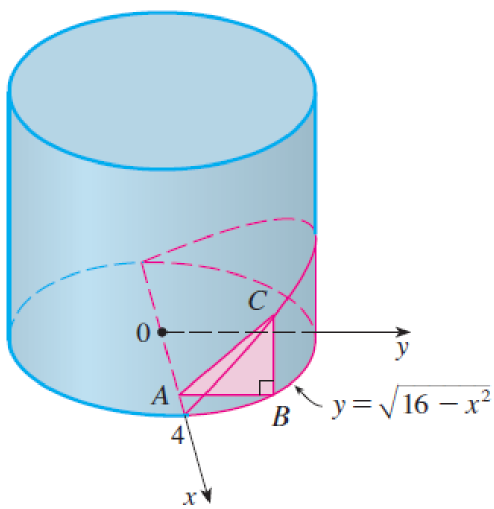
CHÚ Ý Ta không cần đặt đỉnh khối chóp ngay tại gốc trong Ví dụ 8. Ta chỉ làm thế để phương trình được đơn giản. Nếu ta đặt tâm của đáy ngay tại gốc và đỉnh đâu đó trên tia Oy, như trong Hình 16, bạn có thể kiểm tra là ta sẽ được tích phân

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h-y)^2\,dy = \frac{L^2h}{3}$$

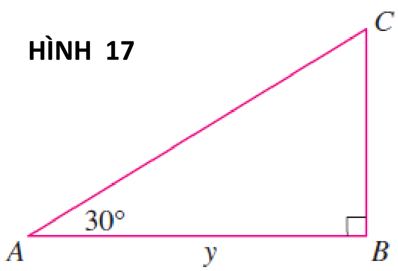
HÌNH 16



VÍ DỤ 9 Một cái nêm được cắt ra từ một khối trụ tròn xoay bán kính 4 bằng một mặt phẳng qua đường kính của một đáy và hợp với mặt phẳng đáy một góc 30^o (Xem Hình 17). Tìm thể tích của khối nêm.



HÌNH 17



GIẢI Nếu ta đặt trục x dọc theo đường kính giao của mặt cắt và đáy, thế thì đáy của khối nêm là nửa hình tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \le x \le 4$. Thiết diện thẳng vuông góc với trục x và cách tâm một khoảng x là tam giác ABC như trong Hình 17, có cạnh đáy là $y = \sqrt{16 - x^2}$ và chiều cao là $|BC| = y\tan 30^o = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Do đó diện tích thiết diện thẳng là

$$A(x) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}.\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

Và thể tích khối nêm cần tìm là

$$V = \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0}^{4} (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}$$

Cách giải khác sẽ được hỏi trong Bài tập 64.

BÀI TẬP

1-6. Tìm thể tích của khối sinh bởi những miền giới hạn bởi các đường cho trước quanh một đường thẳng cho trước. Vẽ miền, khối, và một khối xấp xỉ tiêu biểu.

1. $y = 2 - x/2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; quanh trục x.

2. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; quanh trục x.

3. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; quanh trục x.

4. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; quanh trục x.

5. $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 9$; quanh trục x.

6. $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$; quanh trục y.

7. $y = x^3$, $y = x$, $x \ge 0$; quanh trục x.

8. $y = x^2/4$, $y = 5 - x^2$; quanh trục x.

9. $y^2 = x$, $x = 2y$; quanh trục y.

10. $y = x^2/4$, $x = 2$, $y = 0$; quanh trục y.

11. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; quanh $y = 1$.

12. $y = e^{-x}$, $y = 1$, $x = 2$; quanh $y = 2$.

13. $y = 1 + \sec x$. $y = 3$; quanh $y = 1$;

14. $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; quanh $y = -1$.

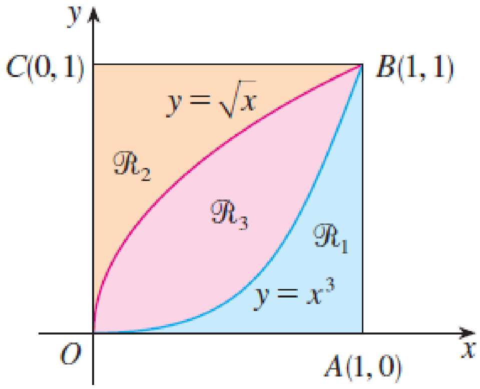
15. $x = y^2$, $x = 1$; quanh $x = 1$.

16. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; quanh $x = 2$.

17. $y = x^2$, $x = y^2$; quanh $x = -1$.

18. $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; quanh $x = 1$.

19-30 Dựa vào hình và tìm thể tích sinh bởi quay miền cho trước quanh đường thẳng cho trước.



19. R_1 quanh OA **20.** R_1 quanh OC

21. R_1 quanh AB **22.** R_1 quanh BC

23. R_2 quanh OA **24.** R_2 quanh OC

25. R_2 quanh AB **26.** R_2 quanh BC

27. R_3 quanh OA **28.** R_3 quanh OC

29. R_3 quanh AB **30.** R_3 quanh BC

31-36. Lập ra , nhưng không tính, tích phân tính thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi các đường

31. $y = \tan^3 x,\ y = 1,\ x = 0;$ about $y = 1$

32. $y = (x-2)^4,\ 8x - y = 16;$ about $x = 10$

33. $y = 0,\ y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ about $y = 1$

34. $y = 0,\ y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ about $y = -2$

35. $x^2 - y^2 = 1,\ x = 3;$ about $x = -2$

36. $y = \cos x,\ y = 2 - \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$ about $y = 4$

cho trước quanh (about) đường cho trước.

37-38. Dùng đồ thị để tìm giá trị xấp xỉ của hoành độ giao điểm của đường cong cho trước với trục x. Rồi dùng máy tính để tình xấp xỉ thể tích của khối sinh ra khi quay quanh trục x miền giới hạn bởi các đường này.

37. $y = 2 + x^2\cos x,\quad y = x^4 + x + 1$

38. $y = 3\sin(x^2),\quad y = e^{x/2} + e^{-2x}$

39-40. Dùng hệ đại số của máy tính để tìm chính xác thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi các đường cho trước quanh đường thẳng cho trước.

39. $y = \sin^2 x,\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le \pi;$ quanh $y = -1$

40. $y = x,\ y = xe^{1-x/2};$ quanh $y = 3$

41-44. Mỗi tích phân dưới đây biểu thị thể tích của một khối. Mô tả khối đó.

41. $\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx$ **42.** $\pi\int_2^5 y\,dy$

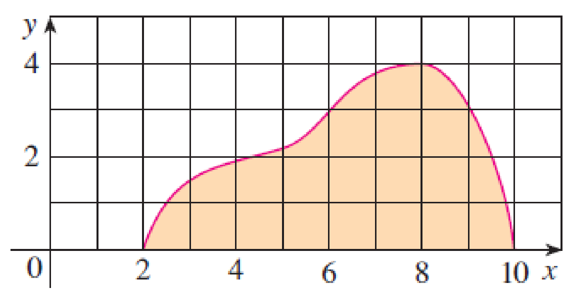
43. $\pi\int_0^1 (y^4 - y^8)\,dy$ **44.** $\pi\int_0^{\pi/2}[(1+\cos x)^2 - 1^2]\,dx$

45. Một máy quét CAT cho ta nhìn được các thiết diện thẳng cách đều nhau của một bộ phận của cơ thể (tức chụp cắt lớp), nhờ đó cung cấp cho ta những thông tin mà không cần giải phẩu. Giả sử một máy quét CAT chụp cắt lớp bộ phân gan người cho thấy những thiết diện thẳng cách nhau 1.5 cm. Gan dài 15 cm và diện tích thiết diện thẳng , tính bằng cm^2, là 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39, và 0. Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính thể tích gan.

46. Một khúc gỗ dài 10 m được cắt thành từng đoạn cách nhau 1 mét và thiết diện thẳng của lát cắt có diện tích A (cách đầu mút khúc gỗ một khoảng x mét) được ghi lại trong bảng dưới. Dùng Quy Tắc Trung Điểm với n = 5 để ước tính thể tích của khúc gỗ.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0.68	6	0.53
1	0.65	7	0.55
2	0.64	8	0.52
3	0.61	9	0.50
4	0.58	10	0.48
5	0.59		

47. (a) Nếu miền minh họa trong hình được quay quanh trục x để tao một khối, dùng Quy Tắc Trung Điểm với n = 4 để ước tính thể tích của khối.



(b) Ước tính thể tích nếu miền quiay quanh trục y. Vẫn dùng Quy Tắc Trung Điểm với n = 4.

48. (a) Mô hình cho **h**ình dáng của trứng chim có được bằng cách quay quanh trục x miền ở bên dưới đồ thị hàm số

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

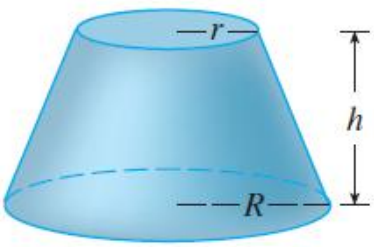
Dùng máy tính để tìm thể tích của quả trứng.

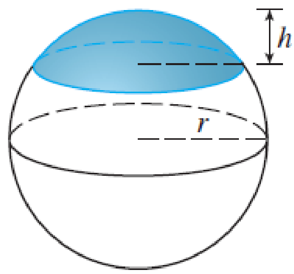
(b) Với loài ngỗng cổ đỏ, $a = -0.06$, $b = 0.04$, $c = 0.1$, và $d = 0.54$. Vẽ đồ thị của f và tìm thể tích quả trứng của loài này.

49-61. Tìm thể tích của khối S được mô tả.

49. Khối nón tròn xoay có chiều caoh và bán kính đáy r.

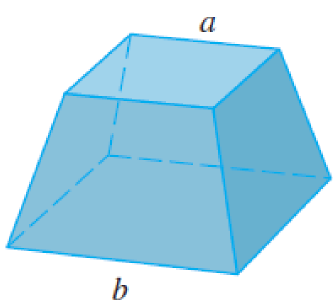
50. Khối nón cụt tròn xoay có chiều cao h, đáy lớn bán kính R, đáy nhỏ bán kính r (Hình dưới trái)





51. Một khối chỏm cầu bán kính r và chiều cao h(Hình trên phải)

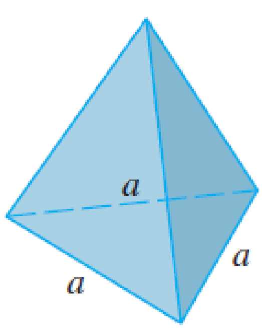
52. Khối chóp cụt đáy vuông cạnh b, đáy trên cạnh a, và chiều cao h.



Điều gì xảy ra nếu a = b? Điều gì xảy ra khi a = 0?

53. Một khối chóp có chiều cao h và đáy là hình chữ nhật với kích thước b và 2b.

54. Một khối chóp có chiều cao h và đáy là tam giác đều với cạnh bằng a (một tứ diện)



55. Một tứ diện có ba mặt vuông góc nhau từng đôi một và ba cạnh vuông góc từng đôi một có độ dài 3 cm, 4 cm, và 5 cm.

56. Đáy của S là một hình tròn có bán kính r. Thiết diện vuông góc với đáy và song song nhau là những hình vuông.

57. Đáy của S là hình elip giới hạn bởi đường elip có phương trình $9x^2 + 4y^2 = 36$. Thiết diện thẳng vuông góc với truc x là những tam giác cân có cạnh huyền nằm trên đáy.

58. Đáy của S là hình tam giác với các đỉnh (0, 0), (1,0), và (0, 1). Thiết diện thẳng vuông góc với trục y là những tam giác đều.

59. Đáy của S như trong Bài tập 58, nhưng thiết diện thẳng vuông góc với trục x là những hình vuông.

60. Đáy của S là miền giới hạn bởi parabol $y = 1 - x^2$ và trục x. Thiết diện thẳng vuông góc với trục y là những hình vuông.

61. Đáy của S như trong Bài tập 60, nhưng thiết diện thẳng vuông góc với trục x là những tam giác cân có chiều cao bằng cạnh đáy.

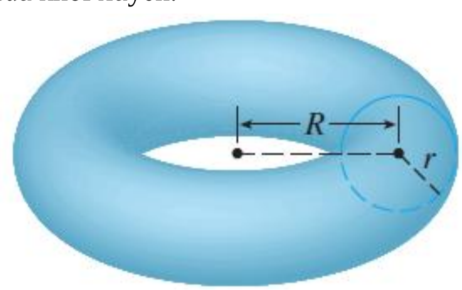
62. Đáy của S là hình tròn bán kính r. Thiết diện thẳng vuông góc với đáy và song song nhau là những tam giác cân có chiều cao h và cạnh đáy nằm trên đáy của S.

(a) Lập tích phân để tính thể tích của S.

(b) Bằng cách xem tích phân như một diện tích, tìm thể tích của S.

63. (a) Lập ra tích phân để tính thể tích khối xuyến (một khối có dạng như bánh vòng hay ruột xe máy được bơm căng) có bán kính r và R.

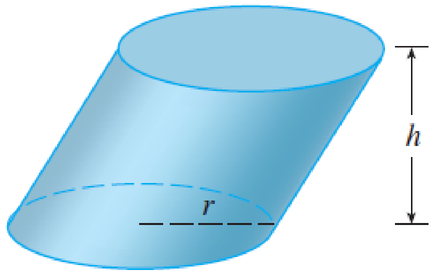
(b) Bằng cách xem tích phân như một diện tích, tìm thể tích của khối xuyến.



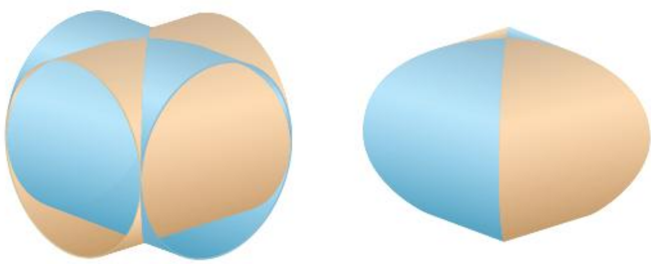
64. Giải Ví dụ 9 bằng cách lấy thiết diện thẳng song song với giao tuyến của hai mặt phẳng.

65. (a) Nguyên tắc Cavalieri nói rằng nếu một họ các mặt phẳng song song cho ta các thiết diện thẳng bằng nhau đối với hai khối S_1 và S_2, thế thì thể tích của S_1 và S_2 bằng nhau. Chứng minh nguyên tắc này.

(b) Dùng Nguyên tắc Cavalieri để tìm thể tích của khối trụ xiên như hình dưới.



66. Tìm thể tích phần chung của hai khối trụ tròn xoay, mỗi khối đều có bán kính r, biết các trục của chúng giao nhau và vuông góc nhau.



67. Tìm thể tích phần chung của hai khối cầu, mỗi khối đều có bán kính r, biết tâm của khối này nằm trên mặt ngoài của khối kia.

68. Một cái chén có dạng một bán cầu có đường kính 30 cm.Một quả bóng có đường kính 10 cm được đặt vào trong chén và ta đổ nước vào chén đến chiều cao h cm. Tìm thể tích của nước trong chén.

69. Một lỗ có bán kính r được khoan xuyên qua một khối trụ có bán kính R > r theo hướng vuông góc với trục khối trụ. Thiết lập, nhưng không tính, tích phân để tính thể tích của phần bị lấy ra.

70. Một lỗ bán kính r được khoan qua tâm một khối cầu bán kính R > r. Tìm thể tích phần còn lại của khối cầu.

71. Một vài nhà giải tích tiên phong, như Kepler và Newton, năng nổ đi tìm thể tích của thùng rượu vang. (Thật ra Kepler đã xuất bản một quyển sách nhan đề Stereometria doliorum vào năm 1715 chỉ tập trung trình bày những phương pháp tìm thể tích của thùng rượu.) Họ thường cho hình dáng của cạnh thùng xấp xỉ là những parabol.

(a) Một thùng rượu có chiều cao h và bán kính lớn nhất R được tạo ra bằng cách quay quanh trục x parabol $y = R - cx^2$, $-h/2 \le x \le h/2$, trong đó c là một hằng số. Chứng tỏ rằng bán kính của đáy và nắp thùng là $r = R - d$, trong đó $d = ch^2/4$.

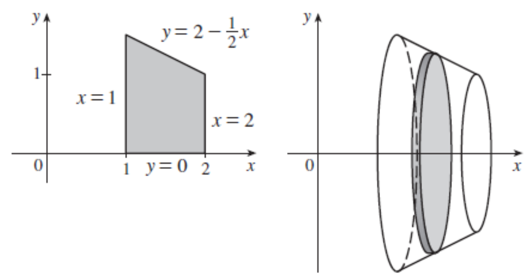
(b) Chứng tỏ rằng thể tích của thùng là

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right)$$

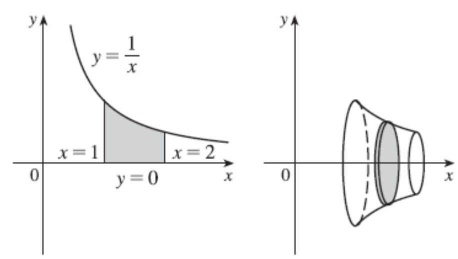
72. Giả sử miền R có diện tích A và nằm phía trên trục x. Khi R quay quanh trục x, nó quét một khối có thể tích V_1. Khi quay R quanh đường y = - k (k > 0), nó quét một khối có thể tích V_2. Biểu diễn V_2 theo V_1, k, và A.

ĐÁP SỐ

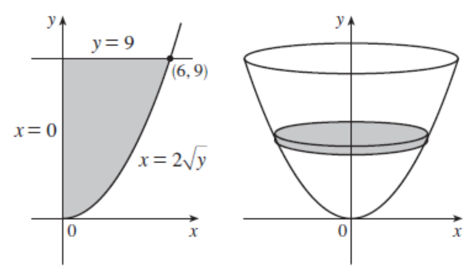
1. $19\pi/12$



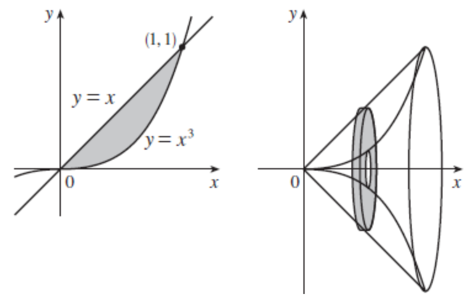
3. $\pi/2$



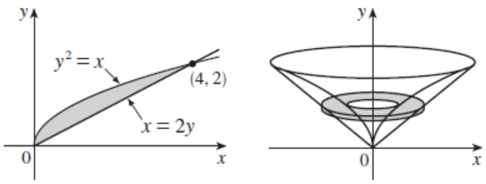
5. 162π



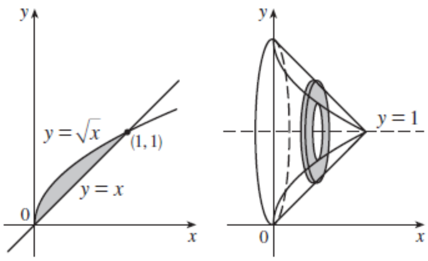
7. $4\pi/21$



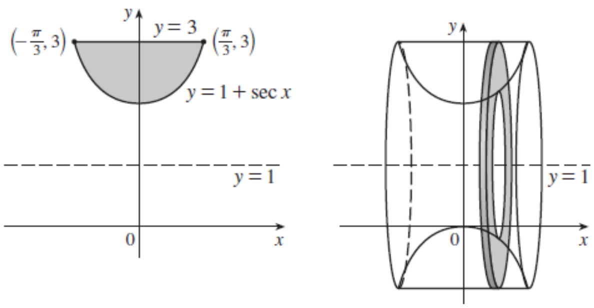
9. $64\pi/15$



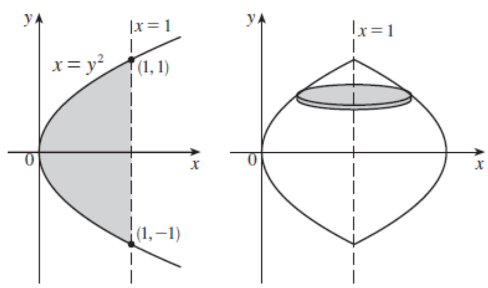
11. $\pi/6$



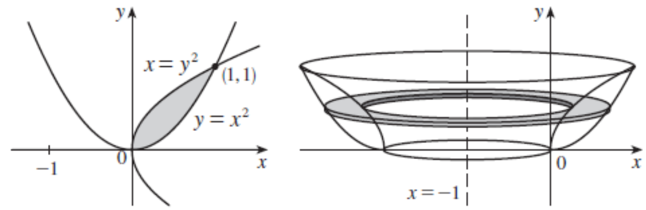
13. $2\pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$



15. $16\pi/15$



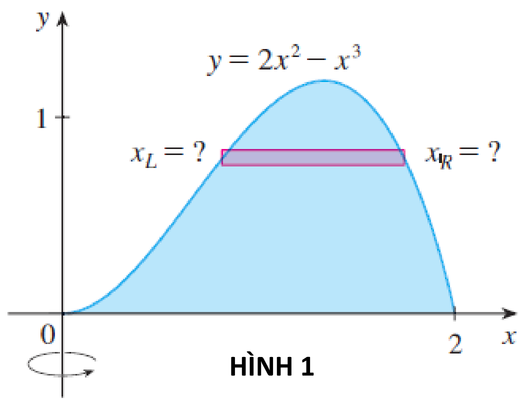
17. $29\pi/30$



19. $\pi/7$ **21.** $\pi/10$ **23.** $\pi/2$ **25.** $7\pi/15$
27. $5\pi/14$ **29.** $13\pi/30$ **31.** $\pi \int_0^{\pi/4} (1 - \tan^3 x)^2 \, dx$
33. $\pi \int_0^{\pi} [1^2 - (1 - \sin x)^2] \, dx$

35. $\pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left[5^2 - \left(\sqrt{1 + y^2} + 2\right)^2\right] dy$
37. $-1.288, 0.884; 23.780$ **39.** $\frac{11}{8}\pi^2$
41. Solid obtained by rotating the region $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ about the x-axis
43. Solid obtained by rotating the region above the x-axis bounded by $x = y^2$ and $x = y^4$ about the y-axis
45. 1110 cm^3 **47.** (a) 196 (b) 838 **49.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
51. $\pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right)$ **53.** $\frac{2}{3}b^2 h$ **55.** 10 cm^3 **57.** 24
59. $\frac{1}{3}$ **61.** $\frac{8}{15}$
63. (a) $8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \, dy$ (b) $2\pi^2 r^2 R$
65. (b) $\pi r^2 h$ **67.** $\frac{5}{12}\pi r^3$ **69.** $8 \int_0^r \sqrt{R^2 - y^2}\sqrt{r^2 - y^2} \, dy$

BÀI 6.3. THỂ TÍCH SINH BỞI VỎ TRỤ



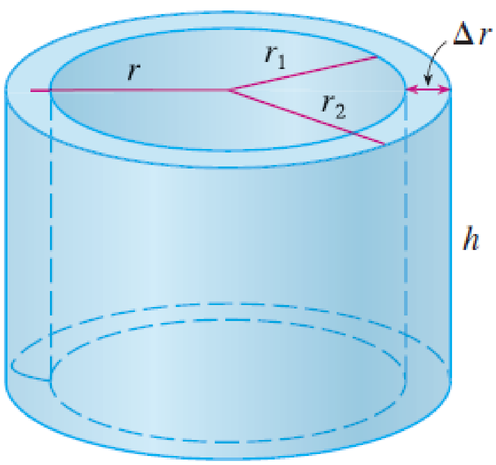
HÌNH 1

Một số bài toán thể tích rất khó giải bằng những phương pháp của những bài học trước. Chẳng hạn, hãy xét bài toán tìm thể tích của khối sinh ra khi quay quanh trục y miền giới hạn bởi $y = 2x^2 - x^3$ và $y = 0$. (Xem Hình 1). Nếu ta cắt lát với trục y, ta được hình vành khăn. Nhưng để tính bán kính trong và bán kính ngoài của hình này, ta phải giải phương trình bậc ba $2x^2 - x^3 = y$ để tìm x theo y, là điều không dễ dàng.

May thay, có một phương pháp, gọi là **phương pháp vỏ trụ,** thuận tiện hơn trong trường hợp như thế. Hình 2 cho thấy một vỏ trụ với bán kính trong r_1, bán kính ngoài r_2 và chiều cao h. Thể tích của nó là hiệu thể tích V_2 của khối trụ ngoài với thể tích khối trụ trong:

$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_2^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

$$= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1)$$



HÌNH 2

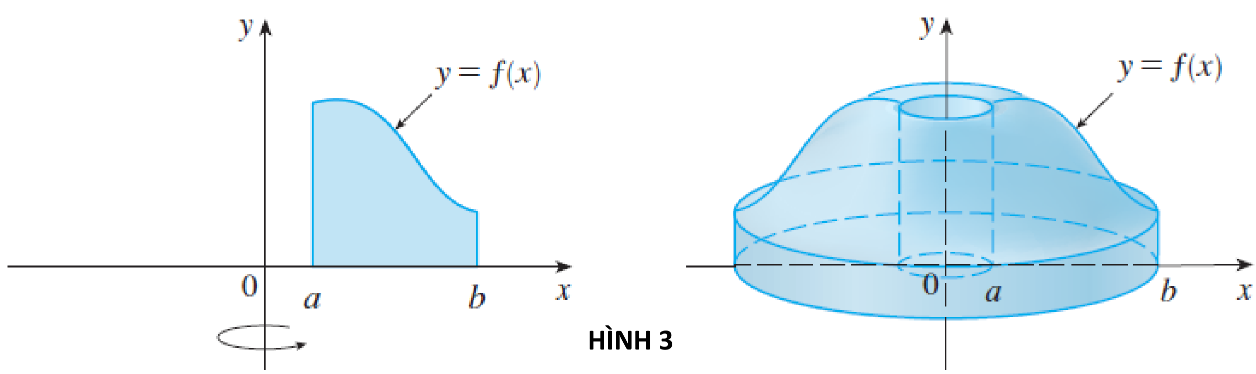
Nếu ta đặt $\Delta r = r_2 - r_1$ (độ dày của lớp vỏ) và $r = ½ (r_2 + r_1)$, bán kính trung bình của vỏ), thế thì công thức tính thể tích của vỏ trụ trở thành

1 $$\boxed{V = 2\pi rh\Delta r}$$

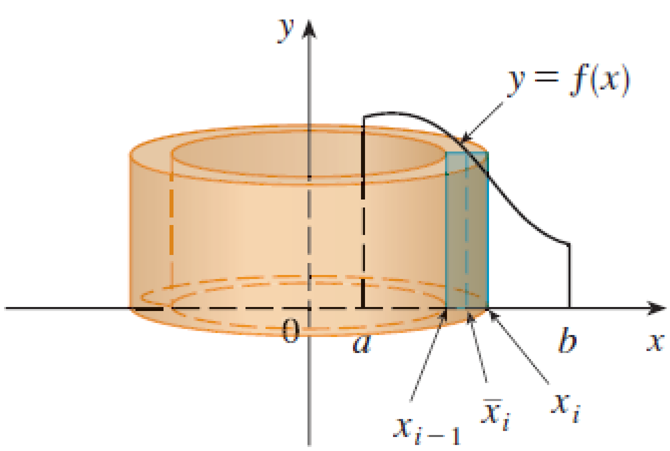
Và được nhớ như sau

V = [chu vi][chiều cao][độ dày]

Bây giờ cho S là khối sinh ra khi quay quanh trục y miền giới hạn bởi $y = f(x)$ [với $f(x) \geq 0$], $y = 0$, $x = a$, $x = b$, với $b > a \geq 0$.(Xem Hình 3.)



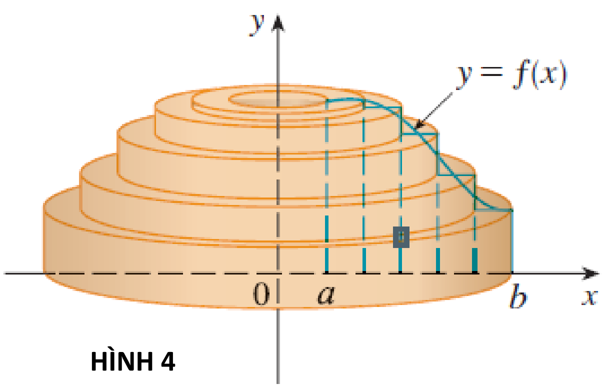
HÌNH 3



Ta chia đoạn [a, b] thành n phân đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ có chiều rộng bằng nhau Δx và gọi $\overline{x}_i$ là trung điểm của phân đoạn thứ i. Nếu hình chữ nhật có đáy $[x_{i-1}, x_i]$ và có chiều cao $f(\overline{x}_i)$ được quay quanh trục y, thế thì khối sinh ra là một vỏ trụ có bán kính trung bình là $\overline{x}_i$, chiều cao $f(\overline{x}_i)$, và độ dày là Δx (xem Hình 4), do đó Công thức 1 cho ta thể tích của nó là

$$V_i = (2\pi \overline{x}_i)[f(\overline{x}_i)]\Delta x$$

Do đó giá trị xấp xỉ của thể tích V của S là tổng thể tích các vỏ này:



HÌNH 4

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \overline{x_i}\ f(\overline{x_i})\Delta x$$

Giá trị xấp xỉ này càng tiến gần giá trị đúng khi n $\to \infty$. Do đó, theo định nghĩa của tích phân, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \overline{x_i}\ f(\overline{x_i})\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

Từ đó quy tắc sau có vẽ hợp lý:

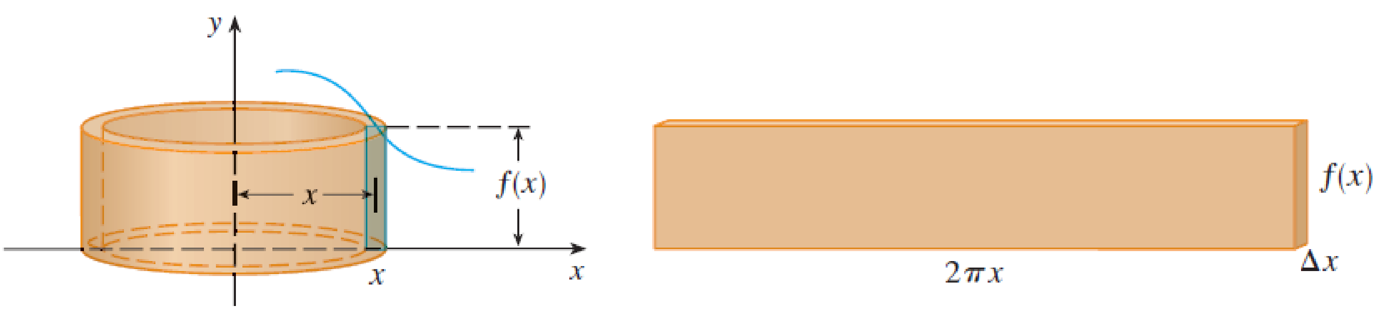
2 Thể tích của khối trong Hình 3, có được bằng cách quay quanh trục y miền bên dưới đường cong y = f(x) từ a đến b, là

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \qquad \text{trong đó} \quad 0 \le a < b$$

Lý luận sử dụng vỏ trụ khiến Công thức 2 hình như hợp lý, nhưng sau này ta sẽ chứng minh nó (xem Bài tập 67 trong Bài 7.1)

Cách tốt nhất để nhớ Công thức 2 là liên hệ nó với lớp vỏ tiêu biểu, được cắt ra và trải rộng trên mặt phẳng như trong Hình 5, với bán kính x, chu vi 2 π x, chiều cao f(x), và bề dày Δx hay dx.

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi\ x)}_{\text{chu vi}}\ \underbrace{[\ f(x)\ ]}_{\text{chiều cao}}\ \underbrace{dx}_{\text{độ dày}}$$



HÌNH 5

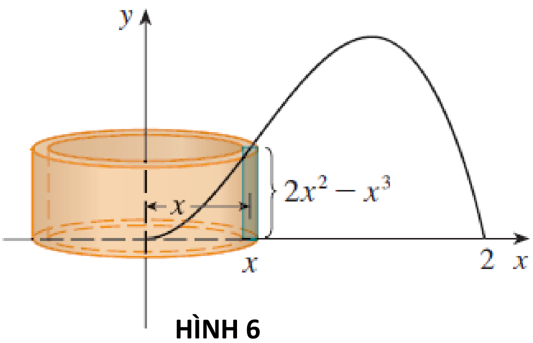
Loại lý luận này cũng tỏ ra hữu hiệu trong những tình huống khác, như khi ta quay khối quanh những đường thẳng khác trục y.

VÍ DỤ 1 Tìm thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi $y = 2x^2 - x^3$ và $y = 0$ quanh trục y.

GIẢI Từ Hình 6 ta thấy một lớp vỏ tiêu biểu có bán kính x, chu vi 2πx, và chiều cao $f(x) = 2x^2 - x^3$. Do đó, theo phương pháp vỏ trụ, thể tích là

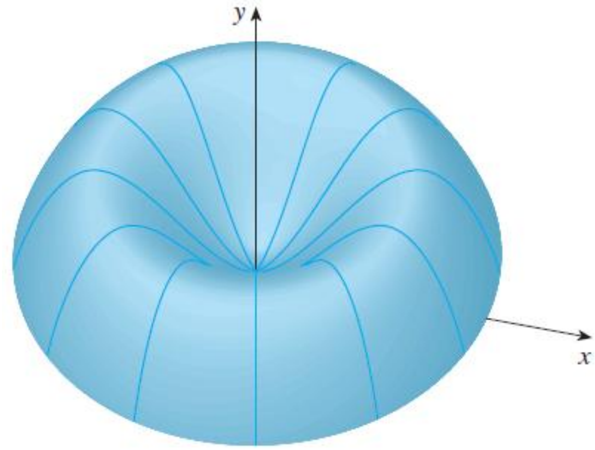
$$V = \int_0^2 (2\,\pi\ x)(2x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \frac{32}{5}\right) = \frac{16}{5}\pi$$



HÌNH 6

Ta có thể kiểm nghiệm là phương pháp vỏ trụ cho ta cùng kết quả với phương pháp cắt lớp. Hình 7 cho ta khối ở Ví dụ 1 vẽ bằng máy tính.

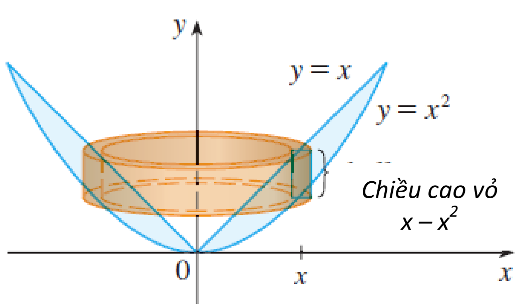


HÌNH 7

GHI CHÚ So sánh lời giải của Ví dụ 1 với ghi chú ở đầu bài này, ta thấy rằng phương pháp vỏ trụ dễ dàng hơn nhiều so với phương pháp cắt lớp. Ta không phải tìm toạ độ của điểm cực đại và ta không cần giải phương trình đường cong để tính x theo y. Tuy nhiên, trong những ví dụ khác, phương pháp cũ trong bài trước có thể dễ dàng hơn.

VÍ DỤ 2 Tìm thể tích của khối sinh ra khi quay quanh trục y miền giới hạn bởi y = x và y = x^2.

GIẢI Miền và vỏ tiêu biểu được minh họa trong Hình 8. Ta thấy là vỏ có bán kính x, chu vi 2π x, và chiều cao x – x^2. Do đó thể tích là



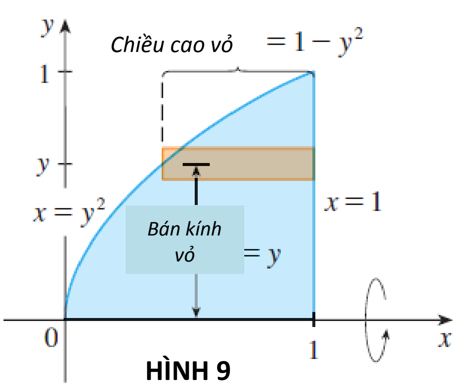
HÌNH 8

$$V = \int_0^1 (2\pi\, x)(x - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

Như ví dụ sau sẽ chứng tỏ, phương pháp vỏ trụ cũng hiệu quả nếu ta quay quanh trục x. Ta chỉ phải vẽ giản đồ để nhận diện bán kính và chiều cao của vỏ.

VÍ DỤ 3 Dùng phương pháp vỏ trụ để tìm thể tích của khối sinh ra khi quay quanh trục x miền bên dưới đường y = $\sqrt{x}$ từ 0 đến 1.



HÌNH 9

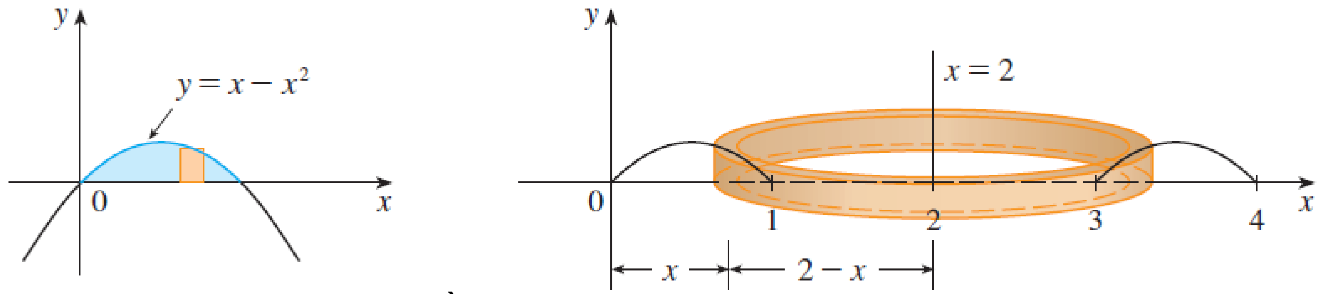
GIẢI Bài toán này đã được giải sử dụng phương pháp đĩa tròn trong Ví dụ 2 của Bài 6.2. Để dùng phương pháp vỏ trụ ta viết lại phương trình đường cong y = $\sqrt{x}$ thành x = y^2 trong Hình 9. Khi quay quanh trục x, ta thấy một vỏ tiêu biểu có bán kính y, chu vi 2π y, và chiều cao 1 – y^2. Do đó thể tích là

$$V = \int_0^1 (2\pi\, y)(1 - y^2)\, dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\, dy = 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Trong bài toán này phương pháp đĩa tròn đơn giản hơn.

VÍ DỤ 4 Tìm thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi $y = x - x^2$ và $y = 0$ quanh đường thẳng $x = 2$.

GIẢI Hình 10 cho thấy miền và một vỏ trụ tiêu biểu tạo bởi phép quay quanh đường thẳng $x = 2$. Vỏ có bán kính $2 - x$, chu vi $2\pi(2 - x)$, và chiều cao $x - x^2$.



HÌNH 10

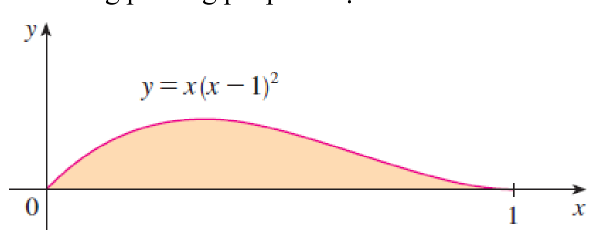
Thể tích cần tìm là

$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

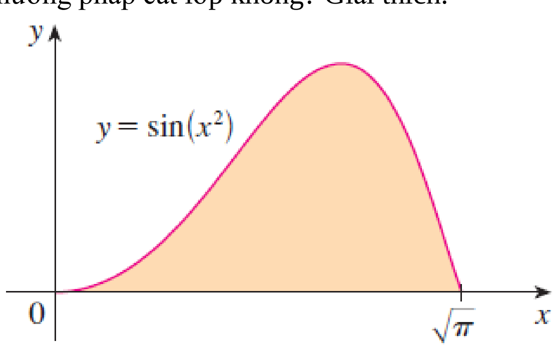
$$= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

BÀI TẬP

1. Gọi S là khối sinh ra khi quay miền trong hình dưới quanh trục y. Giải thích tại sao dùng phương pháp cắt lớp để tính thể tích V của S trong tình huống này không tiện. Vẽ một vỏ trụ tiêu biểu. Tìm chu vi và chiều cao của nó. Dùng phương pháp vỏ trụ để tính V.



2. Gọi S là khối sinh ra khi quay miền trong hình dưới quanh trục y. Vẽ một vỏ trụ tiêu biểu. Tìm chu vi và chiều cao của nó. Dùng phương pháp vỏ trụ để tính thể tích của S. Bạn có cho là phương pháp này tốt hơn phương pháp cắt lớp không? Giải thích.



3-7. Dùng phương pháp vỏ trụ để tìm thể tích sinh ra khi quay miền giới hạn bởi các đường cho trước quanh trục y. Vẽ miền và một vỏ tiêu biểu.

3. $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$

4. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$

5. $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

6. $y = 3 + 2x - x^2$, $x + y = 3$

7. $y = 4(x - 2)^2$, $y = x^2 - 4x + 7$

8. Cho V là thể tích của khối sinh ra khi quay quanh trục y miền giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ và $y = x^2$. Tìm V bằng phương pháp cắt lớp lẫn vỏ trụ. Trong cả hai trường hợp vẽ một biểu đồ giải thích phương pháp của bạn.

9-14. Dùng phương pháp vỏ trụ để tìm thể tích của khối sinh ra khi quay quanh trục x miền giới hạn bởi đường cho trước. Vẽ miền và vỏ trụ tiêu biểu.

9. $x = 1 + y^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

10. $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 1$

11. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$

12. $x = 4y^2 - y^3$, $x = 0$

13. $x = 1 + (y - 2)^2$, $x = 2$

14. $x + y = 3$, $x = 4 - (y - 1)^2$

15-20. Dùng phương pháp vỏ trụ để tìm thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi đường cho trước quanh một đường thẳng cho trước. Vẽ miền và vỏ trụ tiêu biểu.

15. $y = x^4$, $y = 0$, $x = 1$; quanh $x = 2$

16. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$; quanh $x = -1$

17. $y = 4x - x^2$, $y = 3$; quanh $x = 1$

18. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$; quanh $x = 1$

19. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$; quanh $y = 1$

20. $y = x^2$, $x = y^2$; quanh $y = -1$

21-26. Thiết lập, nhưng không tính, tích phân thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi đường cho trước quanh trục cho trước.

21. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$; quanh trục y

22. $y = x$, $y = 4x - x^2$; quanh $x = 7$

23. $y = x^4$, $y = \sin(\pi x/2)$; quanh $x = -1$

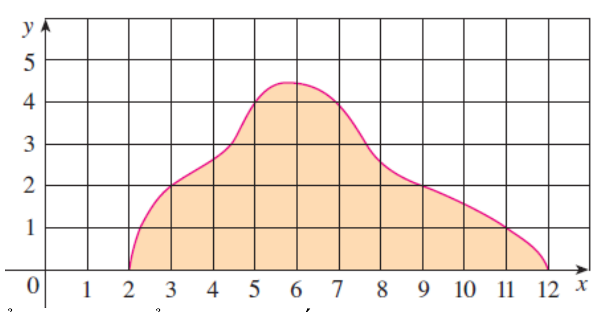
24. $y = 1/(1 + x^2)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$; quanh $x = 2$

25. $x = \sqrt{\sin y}$, $0 \le y \le \pi$, $x = 0$; quanh $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7$, $x = 4$; quanh $y = 5$

27. Dùng Quy Tắc trung Điểm với n = 5 để ước tính thể tích có được khi quay quanh trục y miền bên dưới đường $y = \sqrt{1+x^3}$, $0 \le x \le 1$.

28. Nếu miền cho trong hình được quay quanh trục y để tạo thành một khối, dùng Quy Tắc Trung Điểm với n = 5



để ước tính thể tích của khối.

29-32. Mỗi tích phân biểu thị thể tích của một khối. Mô tả khối đó.

29. $\int_0^3 2\pi x^5 \, dx$

30. $2\pi \int_0^2 \frac{y}{1+y^2} \, dy$

31. $\int_0^1 2\pi (3-y)(1-y^2) \, dy$

32. $\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \sin x) \, dx$

33-34. Dùng để tính hoành độ của giao điểm của các đường cho trước. Rồi dùng thông tin này và máy tính của bạn để ước tính thể tích của khối sinh ra khi quay quanh trục y miền giới hạn bởi các đường này.

33. $y = e^x$, $y = \sqrt{x} + 1$

34. $y = x^3 - x + 1$, $y = -x^4 + 4x - 1$

35-36. Dùng hệ thống đại số trong máy tính để tìm chính xác thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi các đường cho trước quanh đường thẳng cho trước.

35. $y = \sin^2 x$, $y = \sin^4 x$, $0 \le x \le \pi$; quanh $x = \pi/2$

36. $y = x^3 \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$; quanh $x = -1$

37-42. Miền giới hạn bởi các đường cho trước được quay quanh các đường cho trước. Tìm thể tích của khối sinh ra bằng phương pháp tùy chọn.

37. $y = -x^2 + 6x - 8$, $y = 0$; quanh trục y

38. $y = -x^2 + 6x - 8$, $y = 0$; quanh trục x

39. $y = 5$, $y = x + (4/x)$; quanh $x = -1$

40. $x = 1 - y^4$, $x = 0$; quanh $x = 2$

41. $x^2 + (y-1)^2 = 1$; quanh trục y

42. $x = (y-3)^2$, $x = 4$; quanh $y = 1$

43-45. Dùng vỏ trụ để tìm thể tích của khối.

43. Khối cầu bán kính r

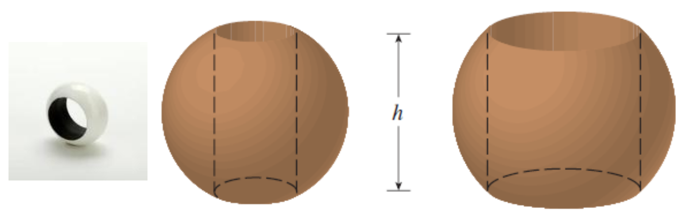
44. Khối xuyến của Bài tập 63 trong Bài 6.2.

45. Khối nón tròn xoay chiều cao h và bán kính đáy r.

46. Giả sử bạn làm một những vòng đánh dấu khăn ăn (napkin rings) bằng cách khoan những lỗ có đường kính khác nhau xuyên qua hai khối cầu gỗ (cũng có những đường kính khác nhau). Bạn khám phá ra rằng cả hai vòng này đều có chiều cao bằng nhau là h, như minh họa trong hình.

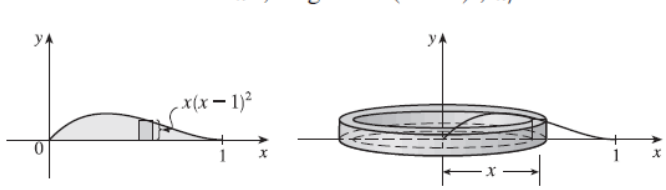
(a) Hãy đoán xem vòng nào có nhiều gỗ hơn (tức thể tích lớn hơn)

(b) Kiểm tra trả lời của bạn: Dùng vỏ trụ để tính thể tích của vòng đánh dấu khăn ăn tạo ra khi khoan một lỗ có bán kính r xuyên qua một khối cầu có bán kính R và biểu diễn đáp số của bạn theo h.

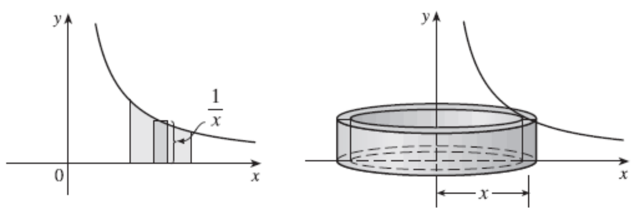


ĐÁP SỐ

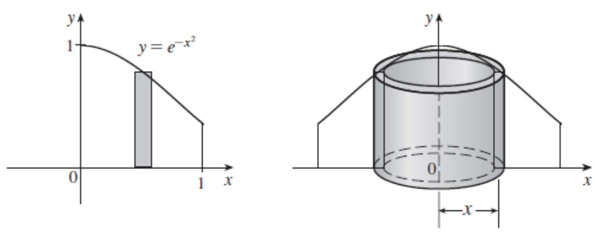
1. Circumference $= 2\pi x$, height $= x(x-1)^2$; $\pi/15$



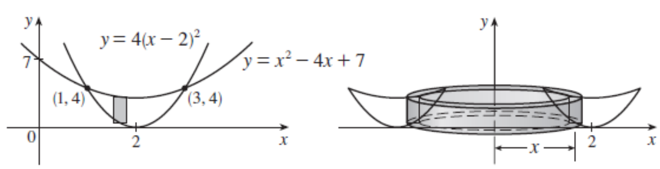
3. 2π



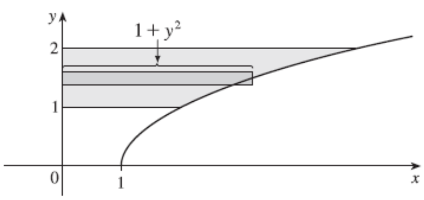
5. $\pi(1 - 1/e)$

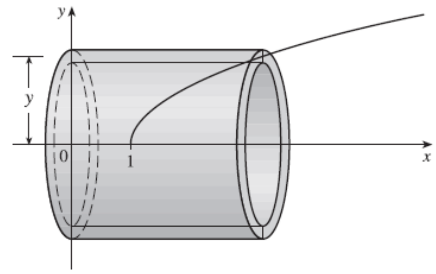


7. 16π



9. $21\pi/2$





11. $768\pi/7$ **13.** $16\pi/3$ **15.** $7\pi/15$ **17.** $8\pi/3$

19. $5\pi/14$ **21.** $\int_1^2 2\pi x \ln x \, dx$

23. $\int_0^1 2\pi(x+1)[\sin(\pi x/2) - x^4]\, dx$

25. $\int_0^\pi 2\pi(4-y)\sqrt{\sin y}\, dy$ **27.** 3.68

29. Solid obtained by rotating the region $0 \leqslant y \leqslant x^4$, $0 \leqslant x \leqslant 3$ about the y-axis

31. Solid obtained by rotating the region bounded by (i) $x = 1 - y^2$, $x = 0$, and $y = 0$, or (ii) $x = y^2$, $x = 1$, and $y = 0$ about the line $y = 3$

33. 0.13 **35.** $\frac{1}{32}\pi^3$ **37.** 8π **39.** $2\pi(12 - 4\ln 4)$

41. $\frac{4}{3}\pi$ **43.** $\frac{4}{3}\pi r^3$ **45.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

BÀI 6.4. CÔNG

Từ công được dùng trong ngôn ngữ hằng ngày để chỉ toàn bộ công sức bỏ ra để thực hiện một công việc nào đó. Trong vật lý nó là một thuật ngữ có nghĩa đặc trưng phụ thuộc vào ý nghĩa của lực. Nói một cách trực giác, bạn có thể nghĩ về lực chẳng hạn lực đẩy hay kéo lên một vật thể-như đẩy một cuốn sách lên mặt bàn hay lực kéo về phía dưới của trọng lực trái đất trên một quả bóng. Tổng quát, nếu một vật thể di chuyển trên một đường thẳng theo hàm số vị trí s(t), thế thì **lực F** tác dụng trên vật (theo cùng một hướng) được định nghĩa bằng Định Luật Chuyển Động Thứ Ba của Newton là tích của khối lượng m của nó với gia tốc của nó:

1 $$F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Trong hệ thống SI, khối lượng tính bằng kilogram (kg), độ dài tính bằng mét (m), thời gian tính bằng giây (s), và lực tính bằng newton (N = kg.m/s^2). Do đó một lực 1 N tác dụng lên một khối lượng 1 kg sẽ sinh ra một gia tốc 1 m/s^2. Trong hệ thống của Mỹ, đơn vị cơ bản được chọn là đơn vị lực, gọi là pound.

Trong trường hợp gia tốc không đổi, lực F cũng không đổi và công được định nghĩa là tích của lực F với quãng đường di chuyển d của vật:

2 W = Fd công = lực x quãng đường

Nếu F tính bằng newton và d bằng mét, thì đơn vị công W là newton-mét, gọi là joule (J). Nếu F tính bằng pound và d bằng foot, thì đơn vị công W là foot-pound (ft-lb), tương đương 1.36 J.

VÍ DỤ 1

(a) Mất bao nhiêu công để nâng quyển sách 1.2 kg khỏi nền nhà và đặt nó lên bàn cao 0.7 m? Cho biết gia tốc trọng trường là g = 9.8 m/s^2.

(b) Mất bao nhiêu công để nâng một khối lượng 20 lb lên khỏi mặt đất 6 ft?

GIẢI

(a) Lực tác động bằng và ngược hướng với trọng lực, do đó Phương trình 1 cho

$$F = mg = (1.2)(9.8) = 11.76 \text{ N}$$

và Phương trình 2 cho ta công cần tìm

$$W = Fd = (11.76)(0.7) \approx 8.2 \text{ J}$$

(b) Ở đây lực cho trước là 20 lb, do đó công bỏ ra là

$$W = Fd = 20 \, . \, 6 = 120 \text{ ft-lb}$$

Chú ý là trong phần (b), không giống phần (a), ta không phải nhân cho g vì ta được cho biết trọng lượng (kể là một lực) chứ không phải khối lượng.

Phương trình 2 định nghĩa công khi mà lực là không đổi, nhưng điều gì xảy ra khi lực biến thiên? Hãy giả sử vật chuyển động trên trục x theo chiều dương từ x = a đến x = b, và tại mỗi điểm x giữa a vả b một lực f(x) tác dụng lên vật thể trong đó f là một hàm số liên tục. Ta chia đoạn [a, b] thành n phân đoạn có đầu mút là những điểm x_0, x_1, . . . , x_n và có chiều rộng bằng nhau Δx. Ta chọn một điểm mẫu x_i^* thuộc [x_{i-1}, x_i]. Thế thì lực tại điểm đó là f(x_i^*). Nếu n lớn, thì Δx nhỏ, và vì f liên tục nên giá trị của f không thay đổi nhiều trên khoảng [x_{i-1}, x_i]. Nói cách khác, f hầu như không đổi trên đoạn đó và do đó công W_i sinh ra khi di chuyển vật từ x_{i-1} đến x_i có giá trị xấp xỉ cho bởi Phương trình 2:

$$W \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

Do đó ta có thể tính xấp xỉ công toàn phần là

3
$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Có vẽ như giá trị xấp xỉ này càng lúc càng tốt hơn khi n càng lớn. Do đó ta định nghĩa **công thực hiện khi di chuyển vật từ a đến b** là giới hạn của của đại lượng này khi n $\to \infty$. Vì vế phải của (3) là tổng Riemann, ta nhận ra giới hạn này chính là một tích phân và do đó

4
$$\boxed{W \approx \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx}$$

VÍ DỤ 2 Khi chất điểm ở vị trí x cách gốc, nó chịu tác động bởi một lực có cường độ $x^2 + 2x$ pound. Hỏi mất bao nhiêu công khi di chuyển nó từ x = 1 đến x = 3?

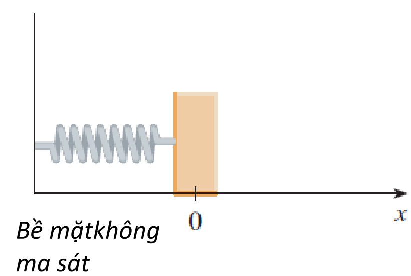
GIẢI
$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_1^3 = \frac{50}{3}$$

Công tạo ra là $16\frac{2}{3}$ ft-lb.

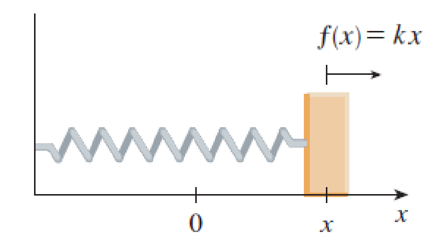
Trong ví dụ sau ta dùng một định luật có tên **Định Luật Hooke** phát biểu rằng lực cần tác động để duy trì lò xo giãn ra x đơn vị khỏi độ dài tự nhiên của nó thì tỷ lệ với x:

$$F(x) = kx$$

trong đó k là hằng số dương (gọi là hằng số là xo). Định luật Hooke chỉ đúng khi x không quá lớn (xem Hình 1).



(a) Vị trí tự nhiên của lò xo



(b) Vị trí kéo giãn của lò xo

HÌNH 1

VÍ DỤ 3 Một lực 40 N được dùng để giữ một lò xo kéo giãn ra từ độ dài tự nhiên 10 cm đến độ dài 15 cm. Hỏi bao nhiêu công được làm để kéo giãn lò xo từ 15 cm đến 18 cm?

GIẢI Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là f(x) = kx. Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài 10 cm đến 15 cm, lượng kéo giãn là 5 cm = 0.05 m. Điều này có nghĩa f(0.05) = 40, do đó

$$0.05k = 40 \qquad \text{hay} \qquad k = \frac{40}{0.05} = 800$$

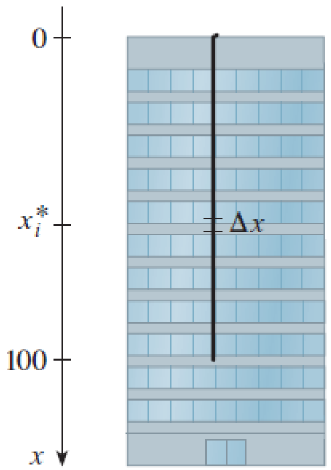
Vậy f(x) = 800x và công cần để kéo giãn lò xo từ 15 cm đến 18 cm là

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x\,dx = 800\frac{x^2}{2}\Big]_{0.05}^{0.08}$$
$$= 400\left[(0.08)^2 - (0.05)^2\right] = 1.56\ J$$

VÍ DỤ 4 Một dây cáp nặng 200 lb có chiều dài 100 ft và được treo thẳng đứng từ đỉnh một tòa nhà. Hỏi cần bao nhiêu công để nâng dây cáp lên đỉnh tòa nhả.

GIẢI Ở đây ta không có công thức cho hàm số lực, nhưng ta có thể lập luận tương tự như với Định nghĩa 4.

Hãy đặt điểm gốc tại đỉnh tòa nhà và chiều dương như trong Hình 2. Ta chia dây cáp thành những đoạn nhỏ có độ dài Δx. Nếu x_i^* là một điểm thuộc đoạn thứ i, thế thì mọi điểm trong đoạn đều được nâng bằng một lượng xấp xỉ như nhau, cụ thể x_i^*. Dây cáp nặng 2 pound mỗi foot, do đó trọng lượng của đoạn i là 2Δx. Vậy công ứng với đoạn thứ i, tính bằng foot-pound, là



HÌNH 2

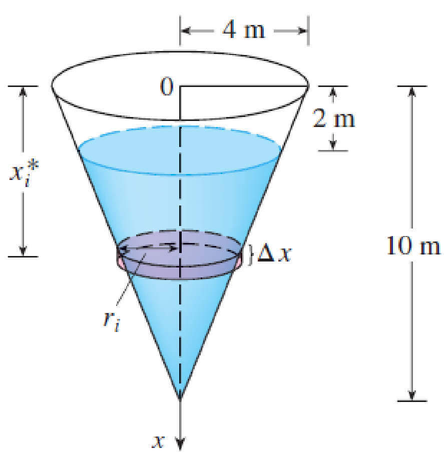
$$\underbrace{(2\Delta x)}_{\text{lực}} \quad \underbrace{x_i^*}_{\text{quãng đường}} = 2x_i^*\Delta x$$

Ta được toàn bộ công bằng cách cộng tất cả những giá trị xấp xỉ này và cho số phân đoạn tiến đến vô cùng (và như thế Δx → 0):

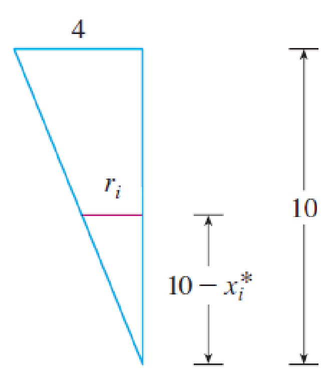
$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2x_i^*\,\Delta x = \int_0^{100} 2x\,dx$$

$$= x^2\Big]_0^{100} = 10{,}000\ ft-lb$$

VÍ DỤ 5 Một tháp chứa có hình khối nón lật ngược, chiều cao 10 m và bán kính đáy 4 m. Tháp chứa nước lên đến chiều cao 8 m. Tìm công cần để tháo hết nước bằng cách bơm hết nước ra khỏi tháp. (Tỷ trọng hay khối lượng riêng của nước là 1000 kg/m^3.)



HÌNH 3



GIẢI Hãy đo các chiều sâu từ đỉnh của tháp chứa bằng cách sử dụng một trục thẳng đứng như trong Hình 3. Mực nước đi từ 2 m đến 10 m, do đó ta chia đoạn [2, 10] ra làm n phân đoạn với các đầu mút $x_0, x_1, \ldots, x_n$ và chọn x_i^* thuộc phân đoạn thứ i. Như vậy ta đã chia khối nước thành n lớp. Lớp thứ i được tính xấp xỉ bằng một khối trụ tròn xoay bán kính r_i và chiều cao Δx. Ta có thể tính r_i từ hai tam giác đồng dạng, dựa vào Hình 4, như sau:

$$\frac{r_i}{10-x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad hay \qquad r_i = \frac{2}{5}(10-x_i^*)$$

Do đó giá trị xấp xỉ của thể tích lớp nước thứ i là

$$V_i \approx \pi r_i^2\,\Delta x = \frac{4\pi}{25}(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$

Suy ra khối lượng của nó là

$$m_i = \text{tỷ trọng x thể tích}$$
$$\approx 1000\,.\,\frac{4\pi}{25}\left(10-x_i^*\right)^2\Delta x = 160\pi(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$

Lực cần thiết để đưa lớp nước này phải thắng trọng lực và do đó

$$F_i = m_i g \approx (9.8)\ 160\pi(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$
$$\approx 1570\pi(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$

Mỗi chất điểm trong lớp nước phải di chuyển một quãng xấp xỉ bằng x_i^*. Công W_i cần thiết để nâng lớp nước này lên đến đỉnh xấp xỉ bằng tích của lực F_i với quãng đường x_i^*:

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1570\pi\, x_i^*(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$

Để tìm công toàn bộ bơm hết nước ra khỏi tháp, ta phải cộng tất cả W_i của n lớp rồi cho $n \to \infty$:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \Delta x = \int_2^{10} 1570\pi x(10 - x)^2\, dx$$

$$= 1570\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\, dx = 1570\pi \left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_2^{10}$$

$$= 1570\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3.4 \times 10^6 \text{ J}$$

BÀI TẬP

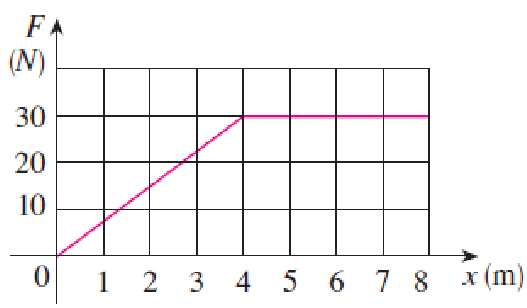
1. Bao nhiêu công phải mất để nâng bao cát 49 kg lên chiều cao 1.5 m?

2. Tìm công cần dùng nếu dùng một lực không đổi 100 lb kéo một xe hàng đi 200 ft.

3. Một chất điểm di chuyển trên trục x bởi một lực có cường độ $10/(1 + x)^2$ pound tại điểm x feet cách gốc. Tìm công cần để di chuyển chất điểm từ gốc đến một khoảng cách 9 ft.

4. Khi một chất điểm ở cách gốc x mét, một lực $\cos(\pi x/3)$ newton tác dụng lên nó. Bao nhiêu công cần để di chuyển chất điểm từ x = 1 đến x = 2? Lý giải trả lời của bạn bằng cách xét công từ x = 1 đến x = 1.5 và công từ x = 1.5 đến 2.

5. Bên dưới là đồ thị của hàm số lực (tính bằng newton) đồng biến đến cực đại rồi sau đó là hằng số. Mất bao nhiêu công tạo bởi lực khi di chuyển một vật một khoảng 8 m?



6. Bảng dưới cho thấy giá trị của hàm số lực f(x), trong đó x được tính bằng mét và f(x) bằng newton. Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính công mà lực tạo ra khi di chuyển một vật từ x = 4 đến x = 20.

7. Một lực 10 lb được sử dụng để giữ một lò xo kéo giãn ra thêm 4 in. từ độ dài tự nhiên của nó. Bao nhiêu công cần để kéo giãn nó ra thêm 6 in. từ độ dài tự nhiên của nó.

8. Một lò xo có độ dài tự nhiên là 20 cm. Nếu phải cần một lực 25 N để giữ nó giãn ra đến 30 cm, hỏi phải cần bao nhiêu công để kéo giãn nó từ 20 đến 25 cm.

9. Giả sử phải cần 2 J công để kéo giãn một lò xo từ độ dài tự nhiên 30 cm đến độ dài 42 cm.

(a) Phải cần bao nhiêu công để kéo giãn lò xo từ 35 cm đến 40 cm?

(b) Một lực 30 N sẽ kéo giãn lò xo thêm bao nhiêu cm từ độ dài tự nhiên?

10. Nếu công cần dùng để kéo giãn một lò xo thêm 1 ft từ độ dài tự nhiên là 12 ft-lb, cần bao nhiêu công để kéo giãn nó thêm 9 cm từ độ dài tự nhiên?

11. Một lò xo có độ dài tự nhiên là 20 cm. So sánh công W_1 dùng kéo giãn lò xo từ 20 cm đến 30 cm với công W_2 dùng kéo giãn nó từ 30 cm đến 40 cm. W_2 và W_1 liên hệ nhau thế nào?

12. Nếu cần công 6 J để kéo giãn một lò xo từ 10 cm đến 12 cm và cần công 10 J để kéo giãn nó từ 12 cm đến 14 cm, hỏi độ dài tự nhiên của lò xo là bao nhiêu?

13-20. Chứng tỏ bằng cách nào để tính xấp xỉ công cần thiết bằng tổng Riemann. Sau đó biểu diễn công bằng một tích phân rồi tính tích phân ấy.

13. Một dây thừng, dài 50 ft, nặng 0.5 lb/ft và treo qua bờ một tòa nhà cao 120 ft.

(a) Phải cần bao nhiêu công để kéo dây lên đến đỉnh tòa nhà?

(b) Phải cần bao nhiêu công để kéo nửa sợi dây lên đến đỉnh tòa nhà?

14. Một dây xích nằm trên mặt đất dài 10 m và khối lượng 80 kg. Hỏi phải cần bao nhiêu công để nâng một đầu dây xích lên đến độ cao 6 m?

15. Một dây cáp nặng 2 lb/ft được dùng để nâng 800 lb than lên khỏi hầm lò sâu 500 ft. Tìm công cần dùng.

16. Một thùng nước nặng 4 lb và một sợi dây có trọng lượng không đáng kể được dùng để kéo nước từ giếng sâu 80 ft lên. Thùng chứa 40 lb nước và kéo lên với vận tốc 2 ft/s, nhưng nước thoát ra từ một lỗ trên thùng với lưu lượng 0.2 lb/s. Tìm công cần để kéo thùng nước lên đến miệng giếng.

17. Một thùng 10 kg có thủng lỗ được nâng từ mặt đất đến độ cao 12 m với vận tốc không đổi bằng một sợi dây thừng nặng 0.8 kg/m. Lúc đầu thùng chứa 36 kg nước, nhưng nước thất thoát qua lỗ với lưu lượng không đổi và khi len đến 12 m thì ngưng chảy ra. Hỏi phải tốn bao nhiêu công?

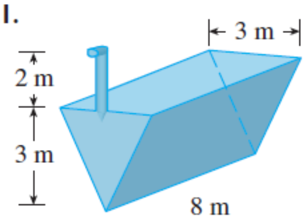
18. Một dây xích dài 10 ft và nặng 25 lb được treo một đầu ở trần nhà. Tìm công cần dùng để nâng đầu kia lên trần nhà ngang với đầu đã treo.

19. Một bể nuôi cá dài 2 m, rộng 1 m, và sâu 1 m chứa đầy nước. Tìm công cần dùng để bơm nửa lượng nước ra ngoài bể. (Cho biết tỷ trọng của nước là 1000 kg/m^3.)

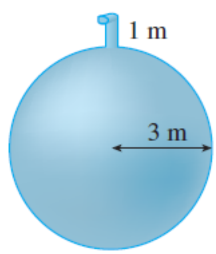
20. Một hồ bơi hình tròn có đường kính 24 ft, vách cao 5 ft, mực nước sâu 4 ft. Cần bao nhiêu công để bơm tất cả nước ra ngoài bờ hồ. (Cho biết tỷ trọng của nước là 1000 kg/m^3.)

21-24. Một bình chứa đầy nước. Tìm công cần thiết để bơm nước ra khỏi vòi. Trong Bài tập 23 và 24 cho biết nước nặng 62.5 lb/ft^3.

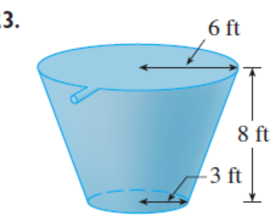
21.



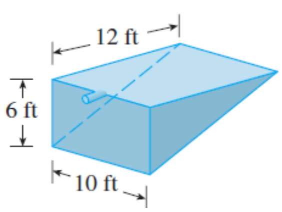
22.



23.



24.

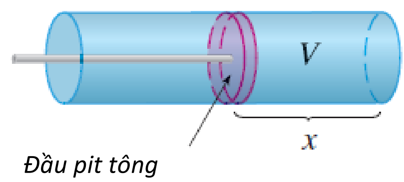


25. Giả sử đối với thùng chứa trong Bài tập 21 bơm bổng hư sau khi 4.7 x 10^5 J công đã thực hiện. Tìm độ sâu của nước còn lại trong thùng.

26. Giải Bài tập 22 nếu thùng chứa dầu đến phân nửa dung lượng thùng, biết dầu có tỷ trọng 900 kg/m^3.

27. Khi ga giãn nở trong một xy lanh bán kính r, áp suất ở một thời điểm bất kỳ là một hàm số của thể tích: P = P(V). Lực mà ga tác dụng lên pit tông (xem hình) là tích của áp suất và diện tích: F = π r^{2}P. Chứng tỏ rằng công do ga tạo ra khi thể tích giãn nở từ thể tích V_1 đến thể tích V_2 là

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$



28. Trong một máy hơi nước áp suất P và thể tích V của hơi nước thỏa mãn phương trình $PV^{1.4} = k$, trong đó k là hằng số. (Điều này đúng khi ga giãn nở khi không có lan truyền nhiệt giữa xy lanh và môi trường.) Dùng Bài tập 27 để tính công do động cơ tạo ra trong một chu kỳ khi hơi nước bắt đầu ở áp suất 160 lb/in^2 với một thể tích 100 in^3 và giãn nở đến một thể tích 800 in^3.

29. Định Luật Hấp Dẫn của Newton phát biểu rằng hai khối lượng m_1 và m_2 hút nhau với một lực

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

trong đó r là khoảng cách giữa hai khối lượng và G là hằng số trọng trường. Nếu một trong hai khối cố định, tìm công cần để di chuyển khối kia từ r = a đến r = b.

30. Dùng Định Luật Hấp Dẫn của Newton để tính công cần thiết để phóng một vệ tinh 1000 kg bay thẳng đứng đến quỹ đạo cao 1000 km. Giả sử khối lượng trái đất là 5.98 x 10^{24} kg và tập trung ở tâm trái đất. Cho biết bán kính trái đất là 6.37 x 10^6 m và G = 6.67 x 10^{-11} N-m^2/kg^2.

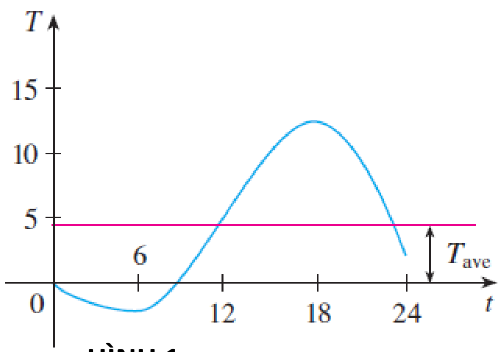
ĐÁP SỐ

1. 588 J **3.** 9 ft-lb **5.** 180 J **7.** $\frac{15}{4}$ ft-lb
9. (a) $\frac{25}{24} \approx 1.04$ J (b) 10.8 cm **11.** $W_2 = 3W_1$
13. (a) 625 ft-lb (b) $\frac{1875}{4}$ ft-lb **15.** 650,000 ft-lb
17. 3857 J **19.** 2450 J **21.** $\approx 1.06 \times 10^6$ J
23. $\approx 1.04 \times 10^5$ ft-lb **25.** 2.0 m **29.** $Gm_1m_2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

BÀI 6.5. GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CỦA MỘT HÀM SỐ

Tính trung bình y_{ave} của một số hữu hạn các giá trị $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là điều dễ dàng:

$$y_{ave} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$



HÌNH 1

Nhưng làm sao ta tính được nhiệt độ trung bình trong một ngày nếu ta có thể đọc được vô số nhiệt độ trong ngày đó? Hình 1 cho thấy hàm số nhiệt độ T(t), trong đó t tính bằng giờ và T bằng ^{0}C, và một dự đoán về nhiệt độ trung bình T_{ave}.

Tổng quát, ta hãy thử tính giá trị trung bình của hàm số y = f(x), a ≤ x ≤ b. Ta bắt đầu bằng cách chia đoạn [a, b] thành n phân đoạn, mỗi phân đoạn có độ dài Δx = (b – a)/n. Tiếp theo ta chọn những điểm x_1^*, x_2^*, . . . , x_n^* thuộc những phân đoạn liên tiếp và tính trung bình của những số $f(x_1^*), f(x_2^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \ldots + f(x_n^*)}{n}$$

(Chẳng hạn, nếu f là hàm số nhiệt độ và n = 24, thì điều này có nghĩa là ta ghi nhiệt độ mỗi giờ trong ngày rồi tính trung bình của chúng.) Vì Δx = (b – a)/n, ta có thể viết n = (b – a)/ Δx và giá trị trung bình trở thành

$$\frac{f(x_1^*) + \ldots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*) + \ldots + f(x_n^*)\right]\Delta x$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Nếu ta cho n tăng, tức là ta tính trung bình của một số lớn các giá trị cách đều nhau rất sát. (Chẳng hạn, ta có thể tính trung bình các
nhiệt độ đã được ghi nhận mỗi giây.) Giới hạn là

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Do đó ta định nghĩa giá trị trung bình của f trên đoạn [a, b] là

$$\boxed{f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

VÍ DỤ 1 Tính giá trị trung bình của hàm số $f(x) = 1 + x^2$ trên đoạn [- 1, 2].

GIẢI Với a = - 1 và b = 2 ta có

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(1+x^2)dx = \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2$$

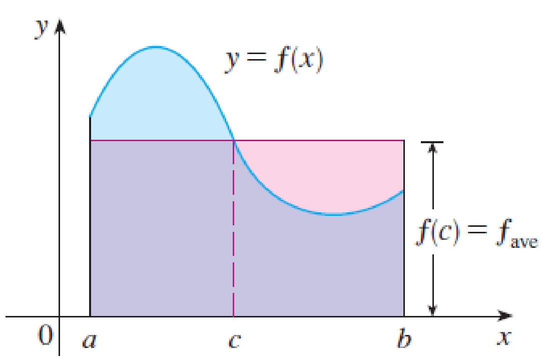
Nếu T(t) là nhiệt độ ở thời điểm t, ta tự hỏi liệu có một thời điểm nào tại đó nhiệt độ bằng với nhiệt độ trung bình hay không. Với hàm số nhiệt độ có đồ thị trong Hình 1, ta thấy có hai thời điểm như thế - ngay trước trưa và ngay trước giữa đêm. Tổng quát, câu hỏi là có tồn tại số c tại đó giá trị của hàm số f là giá trị trung bình của hàm số, đó là f (c) = f_{ave} ? Định lý sau đây đúng cho mọi hàm số liên tục.

ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CỦA TÍCH PHÂN **Nếuf liên tục trên [a, b], thế thì tồn tại một số c thuộc [a, b]sao cho**

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

nghĩa là,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



Định Lý Giá Trị Trung Bình của Tích Phân là kết quả của Định Lý Gía Trị Trung Bình của đạo hàm và Định Lý Nền Tảng của Giải Tích. Chứng minh được cho dưới dạng Bài tập 23.

Ý nghĩa hình học của Định Lý Giá Trị Trung Bình cho Tích Phân là, đối với hàm số dương f, tồn tại số c sao cho hình chữ nhật có đáy [a, b] và chiều cao f(c) có cùng diện tích với mền bên dưới đồ thị f từ a đến b. (Xem Hình 2.)

HÌNH 2

VÍ DỤ 2 Vì f(x) = 1 + x^2 liên tục trên [- 1, 2], Định Lý Giá Trị Trung Bình cho Tích Phân nói rằng tồn tại số c thuộc [-1, 2] sao cho

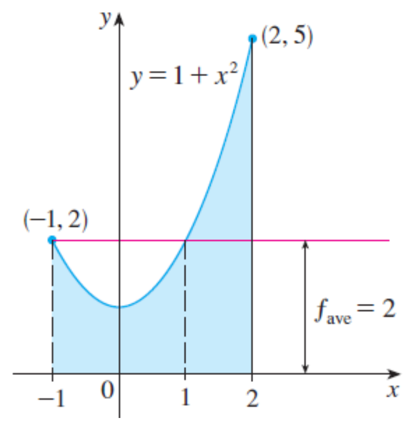
$$\int_{-1}^{2}(1+x^2)\,dx = f(c)[2-(-1)]$$

Trong trường hợp đặc biệt này, ta có thể tìm c một cách tường minh . Từ Ví dụ 1 ta biết rằng f_{ave} = 2, do đó giá trị c thỏa mãn

f(c) = f_{ave} = 2 hay 1 + c^2 = 2 hay c^2 = 1

Như vậy trong trường hợp này có hai giá trị c = ± 1 thuộc đoạn [- 1, 2].

Ví dụ 1 và 2 được minh họa trong Hình 3.



HÌNH 3

VÍ DỤ 3 Chứng tỏ rằng vận tốc trung bình của một ô tô trong khoảng thời gian [t_1, t_2] cũng bằng trung bình của vận tốc của nó trong khoảng ấy.

GIẢI Nếu s(t) là hàm số vị trí của ô tô tại thời điểm t, thế thì theo định nghĩa, vận tốc trung bình của ô tô trong khoảng thời gian ấy là

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

Mặt khác giá trị trung bình của hàm số vận tốc trên khoảng ấy là

$$v_{ave} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} vt)\,dt = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[s(t_2) - s(t_1)\right]$$

$$= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

= vận tốc trung bình

BÀI TẬP

1-8. Tìm giá trị trung bình của các hàm số sau trên đoạn cho trước.

1. $f(x) = 4x - x^2, \quad [0, 4]$ **2.** $f(x) = \sin 4x, \quad [-\pi, \pi]$

3. $g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad [1, 8]$ **4.** $g(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}, \quad [0, 2]$

5. $f(t) = te^{-t^2}, \quad [0, 5]$

6. $f(\theta) = \sec^2(\theta/2), \quad [0, \pi/2]$

7. $h(x) = \cos^4 x \sin x, \quad [0, \pi]$

8. $h(u) = (3 - 2u)^{-1}, \quad [-1, 1]$

9-12.
(a) Tìm giá trị trung bình của f trên đoạn cho trước.
(b) Tìm c sao cho $f(c) = f_{ave}$.
(c) Vẽ đồ thị (bằng máy, nếu cần) của f và hình chữ nhật có diện tích bằng diện tích bên dưới đồ thị f.

9. $f(x) = (x - 3)^2, \quad [2, 5]$

10. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

11. $f(x) = 2\sin x - \sin 2x, \quad [0, \pi]$

12. $f(x) = 2x/(1 + x^2)^2, \quad [0, 2]$

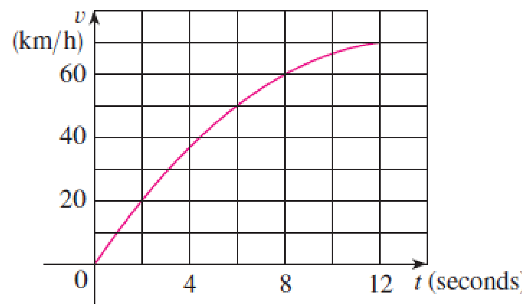
13. Nếu f liên tục và $\int_1^3 f(x)\,dx = 8$, chứng tỏ rằng f nhận giá trị bằng 4 ít nhất một lần trên đoạn [1, 3].

14. Tìm số b sao cho giá trị trung bình của $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ trên đoạn [0, b] bằng 3.

15. Bảng dưới cho ta những giá trị của một hàm số liên tục. Dùng Quy Tắc Trung Điểm để ước tính giá trị trung bình trên [20, 50].

x	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	42	38	31	29	35	48	60

16. Đồ thị vận tốc của một ô tô đang tăng tốc được cho bện dưới.
(a) Ước tính vận tốc trung bình của ô tô trong 12 giây đầu tiên.
(b) Ở thời điểm nào vận tốc tức thời bằng với vận tốc trung bình?



17. Trong một thành phố nhiệt độ (tính bằng °F) lúc t giờ sau 9 AM được mô hình hóa bằng hàm số

$$T(t) = 50 + 14\sin\frac{\pi t}{12}$$

Tìm nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian từ 9 AM đến 9 PM.

18. (a) Một tách cà phê có nhiệt độ 95°C và cần 30 phút để nguội còn 61°C trong gian phòng có nhiệt độ 20°C. Dùng Định Luật Làm Mát của Newton (Bài 3.8) để chứng tỏ rằng nhiệt độ của cà phê sau t phút là

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}$$

trong đó $k \approx 0.02$.
(b) Tìm nhiệt độ trung bình của cà phê trong khoảng nửa giờ đầu tiên.

19. Tỷ trọng tuyến tính của một thanh dài 8 m là 12/ $\sqrt{x+1}\ kg/m$, trong đó khoảng cách x tới một đầu mút được tính bằng mét. Tìm tỷ trọng trung bình của thanh.

20. Nếu một vật rơi tự do từ trạng thái đứng yên, thế thì khoảng đường di chuyển cho bởi $s = ½\, gt^2$. Gọi vận tốc sau thời gian T là v_T. Chứng tỏ rằng nếu ta tính giá trị trung bình của vận tốc đối với t nếu ta được $v_{ave} = ½\, v_T$, nhưng nếu ta tính giá trị trung bình của vận tốc đối với s ta được $v_{ave} = {}^2/_3\, v_T$.

21. Dùng kết quả của Bài tập 79 trong Bài 5.5 để tính thể tích trung bình của không khí hít vào phổi trong một chu kỳ hô hấp.

22. Vận tốc v của máu chảy trong mạch máu với bán kính R và chiều dài l ở khoảng cách r từ trục tâm là

$$v(t) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

trong đó P là hiệu số áp suất giữa hai đầu mạch máu và η là độ nhớt của máu (xem Bài tập 7 của Bài 3.7). Tìm vận tốc trung bình (đối với r) trên khoảng $0 \le r \le R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc cực đại.

23. Chứng minh Định Lý Giá Trị Trung Bình của Tích Phân bằng cách áp dụng Định Lý Giá Trị Trung Bình của đạo hàm (xem Bài 4.2) cho hàm số F(x) = $\int_a^x f(t)\, dt$

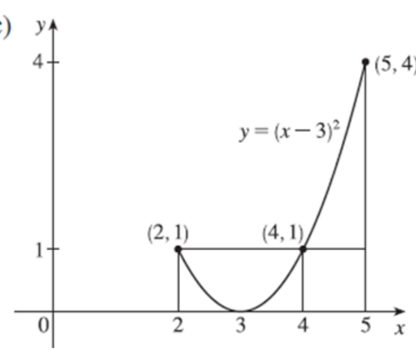
24. Nếu f_{ave} [a, b] chỉ giá trị trung bình của f trên đoạn [a, b] và a < c < b, chứng tỏ rằng

$$f_{ave}[a,b] = \frac{c-a}{b-a} f_{ave}[a,c] + \frac{b-c}{b-a} f_{ave}[c,b]$$

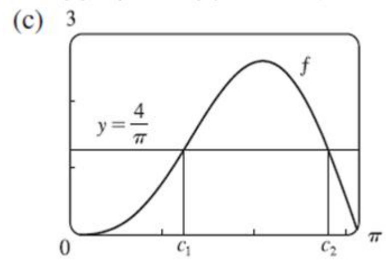
ĐÁP SỐ

1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{45}{28}$ **5.** $\frac{1}{10}(1 - e^{-25})$ **7.** $2/(5\pi)$

9. (a) 1 (b) 2, 4 (c)



11. (a) $4/\pi$ (b) $\approx 1.24, 2.81$
(c)

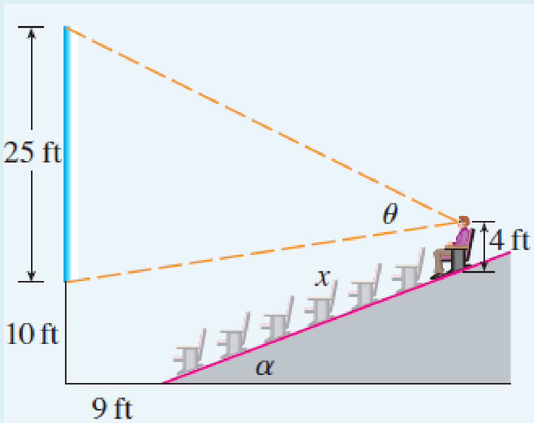


15. $38\frac{1}{3}$ **17.** $(50 + 28/\pi)°F \approx 59°F$ **19.** 6 kg/m

21. $5/(4\pi) \approx 0.4$ L

DỰ ÁN ỨNG DỤNG

NÊN NGỒI CHỖ NÀO TRONG RẠP CHIẾU BÓNG



Rạp chiếu bóng có một màn ảnh đặt cách nền 10 ft và cao 25 ft. Hàng ghế đầu tiên cách màn ảnh 9 ft và mỗi hàng cách nhau 3 ft. Nền rạp nơi đặt ghế ngồi nghiêng một góc $\alpha = 20^o$ với mặt nằm ngang và khoảng cách từ chỗ bạn ngồi đến hàng ghế đầu là x. Rạp chứa 21 hàng ghế, do đó $0 \le x \le 60$. Giả sử bạn cho rằng chỗ ngồi tốt nhất là ở trong hàng ghế tại đó góc nhìn β của mắt bạn đối với màn ảnh là lớn nhất. Cũng giả sử là mắt bạn cách sàn 4 ft, như trong hình. (Trong Bài tập 70 của Bài 4.7 ta gặp bài toán tương tự nhưng đơn giản hơn, khi sàn phòng nằm ngang, trong khi ở tình huống này thì phức tạp hơn, đòi hỏi kỹ năng cao hơn.)

1. Chứng tỏ rằng $\theta = \arccos\left(\dfrac{a^2 + b^2 - 625}{2ab}\right)$

trong đó $a^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (31 - x\sin\alpha)^2$ *và* $b^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (x\sin\alpha - 6)^2$

2. Dùng đồ thị của θ như hàm số theo x để ước tính giá trị của x sao cho θ lớn nhất. Ở hàng nào bạn nên ngồi? Ở hàng này góc nhìn θ bằng bao nhiêu?

3. Dùng máy tính có công cụ hệ thống đại số để vi phân θ và tìm nghiệm của phương trình $d\theta/dx = 0$. Giá trị này có khẳng định kết quả của bạn ở phần 2 hay không?

4. Dùng đồ thị của θ để ước tính giá trị trung bình của θ trên đoạn $0 \le x \le 60$. Rồi dùng máy tính CAS của bạn để tính giá trị trung bình. So sánh với giá trị cực đại và cực tiểu của θ.

ÔN CHƯƠNG 6

KIỂM TRA KHÁI NIỆM

1. (a) Vẽ hai đường cong tiêu biểu y = f(x) và y = g(x), trong đó f(x) ≥ g(x) với a ≤ x ≤ b. Trình bày cách thức tính xấp xỉ diện tích giữa hai đường bằng tổng Riemann và vẽ những hình chữ nhật xấp xỉ tương ứng. Sau đó viết biểu thức giá trị đúng của diện tích.

(b) Giải thích tình thế thay đổi ra sao nếu đường cong có phương trình x = f(y) và x = g(y), trong đó f(y) ≥ g(y) với c ≤ y ≤ d.

2. Giả sử Sue chạy nhanh hơn Kathy suốt chặng đường đua 1500 mét. Ý nghĩa vật lý của diện tích giữa đường cong vận tốc trong phút đầu tiên của cuộc đua.?

3. (a) Giả sử S là một khối với diện tích thiết diện thẳng được biết. Giải thích cách tính xấp xỉ thể tích của S bằng tổng Riemann. Rồi viết ra biểu thức giá trị đúng của thể tích.

(b) Nếu S là khối tròn xoay, ta tìm diện tích của thiết diện thẳng cách nào?

4. (a) Thể tích của vỏ trụ là gì?

(b) Giải thích cách dùng vỏ trụ để tìm thể tích của một khối tròn xoay.

(c) Tại sao bạn muốn dùng phương pháp vỏ trụ để tính thể tích thay phương pháp cắt lát.

5. Giả sử bạn đẩy một quyển sách đi 6m trên mặt bàn bằng cách tác dụng vào nó một lực f(x) tại mỗi điểm từ x = 0 đến x = 6. $\int_a^b f(x)\,dx$ biểu thị điều gì? Nếu f(x) tính bằng newton, tích phân tính bằng đơn vị gì?

6. (a) Giá trị trung bình của một hàm số trên đoạn [a, b] là gì?

(b) Định Lý Giá Trị Trung Bình của Tích Phân nghĩa là gì? Ý nghĩa hình học của nó là gì?

BÀI TẬP

1-6. Tìm diện tích của miền giới hạn boi các đường cho trước.

1. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

2. $y = 1/x, \quad y = x^2, \quad y = 0, \quad x = e$

3. $y = 1 - 2x^2, \quad y = |x|$

4. $x + y = 0, \quad x = y^2 + 3y$

5. $y = \sin(\pi x/2), \quad y = x^2 - 2x$

6. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2, \quad x = 2$

7-11. Tìm thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi các đường cho trước quanh các trục đã chỉ ra. trước.

7. $y = 2x, \ y = x^2$; about the x-axis

8. $x = 1 + y^2, \ y = x - 3$; about the y-axis

9. $x = 0, \ x = 9 - y^2$; about $x = -1$

10. $y = x^2 + 1, \ y = 9 - x^2$; about $y = -1$

11. $x^2 - y^2 = a^2, \ x = a + h$ (where $a > 0$, $h > 0$); about the y-axis

12-14. Thiết lập, nhưng không tính, tích phân thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi các đường cho trước quanh các trục đã chỉ ra.

12. $y = \tan x, \ y = x, \ x = \pi/3$; about the y-axis

13. $y = \cos^2 x, \ |x| \leqslant \pi/2, \ y = \frac{1}{4}$; about $x = \pi/2$

14. $y = \sqrt{x}, \ y = x^2$; about $y = 2$

15. Tìm thể tích của khối sinh ra khi quay miền giới hạn bởi đường y = x và y = x^2 quanh các đường sau.

(a) Trục x (b) Trục y (c) y = 2

16. Cho R là miền trong góc phần tư thứ nhất giới hạn bởi các đường y = x^3 và y = 2x – x^2. Tính các đại lượng sau.

(a) Diện tích của R

(b) Thể tích có được khi quay R quanh trục x.

(c) Thể tích có được khi quay R quanh trục y.

17. Cho R là miền giới hạn bởi các đường y = tan(x^2), x = 1, và y = 0. Dùng Quy Tắc Trung Điểm với n = 4để ước tính các đại lượng sau.

(a) Diện tích của R

(b) Thể tích có được khi quay R quanh trục x.

18. Cho R là miền giới hạn bởi các đường y = 1 - x^2 và y = x^6 – x + 1. Ước tính các đại lượng sau.

(a) Hoành độ giao điểm của các đường cong.

(b) Diện tích của R

(c) Thể tích có được khi quay R quanh trục x.

(d) Thể tích có được khi quay R quanh trục y.

19-22. Mỗi tích phân sau biểu thị thể tích của một khối. Mô tả khối đó.

19. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x\, dx$ **20.** $\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x\, dx$

21. $\int_0^{\pi} \pi(2 - \sin x)^2\, dx$ **22.** $\int_0^{4} 2\pi(6 - y)(4y - y^2)\, dy$

23. Đáy một khối ;à một đĩa (hình) tròn có bán kính 3. Tìm thể tích của khối nếu các thiết diện song song vuông góc với đáy là những tam giác vuông cân có cạnh huyền nằm trên đáy.

24. Đáy của một khối là miền giới hạn bởi các parabol $y = x^2$ và $y = 2 - x^2$. Tìm thể tích của khối nếu thiết diện thẳng vuông góc với trục x là những hình vuông có một cạnh nằm trên đáy.

25. Chiều cao của một đài tưởng niệm là 20 m. Một thiết diện nằm ngang cách đỉnh x mét là một tam giác đều có cạnh là ¼ x mét. Tìm thể tích của đài tưởng niệm.

26. (a) Đáy của một khối là một hình vuông có đỉnh tại (1, 0), (0, 1), (-1, 0), và (0, - 1). MỖi thiết diện thẳng vuông góc với trục x là nữa hình tròn. Tìm thể tích của khối.

(b) Chứng tỏ rằng bằng cách cắt khối nói ở phần (a), ta có thể sắp xếp lại để tạo thành một khối nón. Sau đó tính thể tích khối này một cách đơn giản hơn.

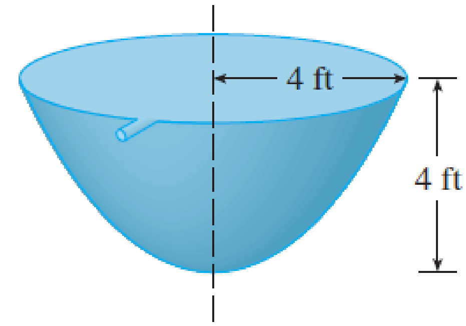
27. Một lực 30 N cần thiết để giữ một lò xo có độ dài tự nhiên 12 cm kéo giãn ra đến 15 cm. Hỏi cần bao nhiêu công để kéo giãn lò xo từ 12 cm đến 20 cm?

28. Một thang máy nặng 1600 lb được treo bằng một dây cáp 200 ft nặng 10 lb/ft. Hỏi cần bao nhiêu công để nâng thang máy từ hầm lên đến tầng ba cách nhau 30 ft?

29. Một bể chứa đầy nước có dạng một paraboloit tròn xoay như trong hình; đó là hình sinh ra khi quay một đường parabol quanh trục của nó.

(a) Nếu chiều cao của nó là 4 ft và bán kính tại đỉnh là 4 ft, tìm công cần thiết để bơm hết nước ra khỏi bể chứa.

(b) Sau 4000 ft-lb công bơm nước, tìm chiều cao của mực nước còn lại trong bể chứa.



30. Tìm giá trị trung bình của hàm số $f(t) = t\sin(t^2)$ trên đoạn [0, 10].

31. Nếu f là hàm số liên tục, tìm giới hạn khi $h \to 0$ của giá trị trung bình của f trên đoạn [x , x + h].

32. Cho R_1 là miền giới hạn bởi $y = x^2$, $y = 0$, và $x = b$, trong đó $b > 0$. Gọi R_2 là miền giới hạn bởi $y = x^2$, $x = 0$, và $y = b^2$.

(a) Có giá trị nào của b sao cho R_1 và R_2 có cùng diện tích không?

(b) Có giá trị nào của b sao cho R_1 quét cùng thể tích khi quay quanh trục x và quay quanh trục y không?

(c) Có giá trị nào của b sao cho R_1 và R_2 quét cùng thể tích khi quay quanh trục x không?

(d) Có giá trị nào của b sao cho R_1 và R_2 quét cùng thể tích khi quay quanh trục y không?

ĐÁP SỐ

1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{7}{12}$ **5.** $\frac{4}{3} + 4/\pi$ **7.** $64\pi/15$ **9.** $1656\pi/5$

11. $\frac{4}{3}\pi(2ah + h^2)^{3/2}$ **13.** $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\pi(\pi/2 - x)(\cos^2 x - \frac{1}{4})\, dx$

15. (a) $2\pi/15$ (b) $\pi/6$ (c) $8\pi/15$

17. (a) 0.38 (b) 0.87

19. Solid obtained by rotating the region $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ about the y-axis

21. Solid obtained by rotating the region $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2 - \sin x$ about the x-axis

23. 36 **25.** $\frac{125}{3}\sqrt{3}\ \text{m}^3$ **27.** 3.2 J

29. (a) $8000\pi/3 \approx 8378$ ft-lb (b) 2.1 ft **31.** $f(x)$

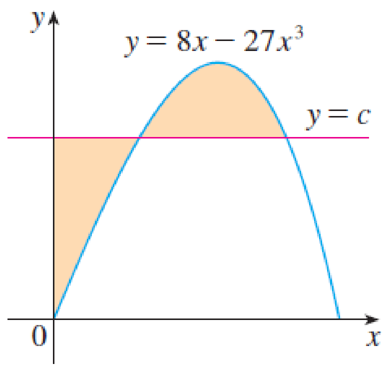
BÀI TẬP LÀM THÊM

1. (a) Tìm một hàm số liên tục dương f sao cho diện tích bên dưới đồ thị của nó từ 0 đến t là $A(t) = t^3$ với mọi $t > 0$.

(b) Một khối sinh ra khi quay quanh trục x miền bên dưới đường cong $y = f(x)$, trong đó f là hàm số dương và $x \geq 0$. Thể tích sinh bởi phần đường cong từ $x = 0$ đến $x = b$ là b^2 với mọi $b > 0$. Tìm hàm số f.

2. Có một đường thẳng đi qua gốc chia miền giới hạn bởi parabol $y = x - x^2$ thành hai miền có diện tích bằng nhau. Tìm độ dốc của đường đó.

3. Hình bên cho thấy đường thẳng nằm ngang $y = c$ cắt đường cong $y = 8x - 27x^3$.
Tìm số c sao cho diện tích hai miền có tô màu bằng nhau.



4. Một bình thủy tinh hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao L được đổ nước và rồi nghiêng bình cho đến khi nước còn lại trong bình vừa đúng phủ trọn mặt đáy bình.

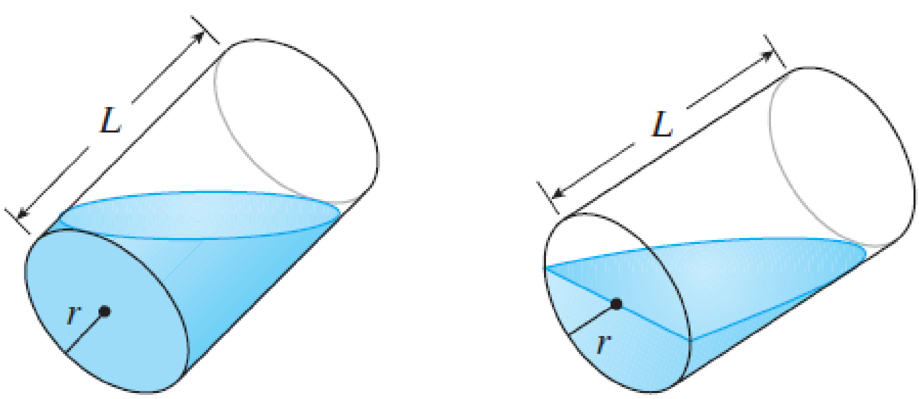
(a) Xác định một cách "cắt lát" khối nước thành những thiết diện thẳng hình chữ nhật song song, rồi thiết lập một tích phân xác định để tính thể tích của khối nước trong bình.

(b) Xác định một cách "cắt lát" khối nước thành những thiết diện thẳng hình thoi rồi thiết lập một tích phân xác định để tính thể tích của khối nước trong bình.

(c) Tìm thể tích nước trong bình bằng cách tính một trong hai tích phân ở phần (a) hay (b).

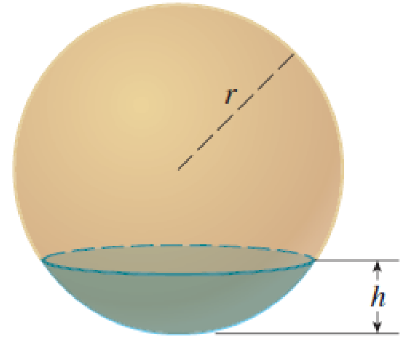
(d) Tìm thể tích nước trong bình bằng cách phương pháp hình học thuần túy.

(e) Giả sử bình nghiêng cho đến khi nước vừa đúng che phủ nửa mặt đáy. Theo hướng nào bạn có thể "cắt lát" nước thành những thiết diện tam giác? Thành thiết diện hình chữ nhật? Thành những thiết diện là hình viên phân? Tìm thể tích nước trong ly.



5. (a) Chứng tỏ rằng thể tích khối chỏm cầu có chiều cao h của một khối cầu bán kính r là

$$V = {}^1\!/_3\, \pi h^2(3r - h)$$



(b) Chứng tỏ rằng nếu một khối cầu bán kính 1 được cắt bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng x sao cho thể tích khối chỏm cầu này bằng hai lần khối chỏm cầu kia, thế thì x là nghiệm của phương trình

$$3x^3 - 9x + 2 = 0$$

với 0 < x < 1. Dùng phương pháp Newton để tìm x đúng đến bốn chữ số thập phân.

(c) Dùng công thức thể tích khối chỏm cầu, có thể chứng minh rằng một khối cầu bán kính r nổi trong nước sẽ chìm trong nước với độ sâu x là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0$$

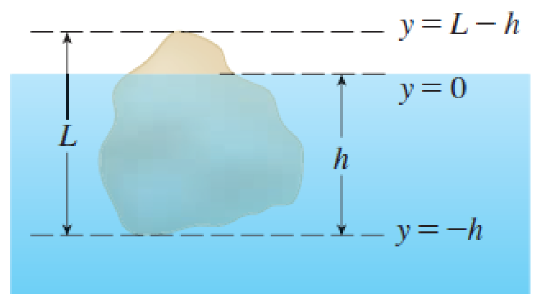
trong đó s là tỷ trọng của khối cầu. Giả sử khối cầu gỗ bán kính 0.5 m có tỷ trọng 0.75. Tính , đúng đến bốn chữ số thập phân, độ sâu của phần khối cầu chìm dưới nước.

(d) Một cái chén hình bán cầu có bán kính 5 in-xơ và nước chảy vào chén với tốc độ 0.2 in^3/s.

(i) Mực nước dâng nhanh cỡ nào tại thời điểm nước sâu 3 in-xơ.

(ii) Tại một lúc nào đó, mực nước là 4 in-xơ. Trong bao lâu, nước sẽ đầy chén?

6. Nguyên Lý Archimedes nói rằng một vật thể chìm hay nổi trong chất lõng sẽ chịu tác dụng của một lực đẩy lên có cường độ bằng trọng lượng của chất lõng mà vật chiếm chỗ. Do đó, đối với một vật có tỷ trọng ρ_o nổi trong chất lõng có tỷ trọng ρ_f , lực đẩy được cho bởi $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)\, dy$, trong đó g là gia tốc trọng trường và A(y) là diện tích của một thiết diện thẳng tiêu biểu của vật thể. Trọng lượng của vật thể được cho bằng công thức



$$W = \rho_o g \int_{-h}^{L-h} A(y)\, dy$$

(a) Chứng tỏ rằng phần trăm thể tích của vật thể nằm phía trên chất lõng là

$$100\frac{\rho_f - \rho_o}{\rho_f}$$

(b) Tỷ trọng của băng là 917 kg/m^3 và của nước biển là 1030 kg/m^3. Tìm phần trăm thể tích của khối băng ở phía trên mặt nước.

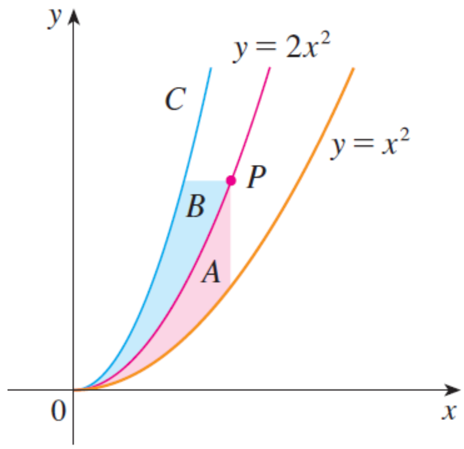
(c) Một khối nước đá nổi trong ly nước đầy đến miệng. Hỏi nước có tràn ra khỏi ly khi nước đá tan hết hay không?

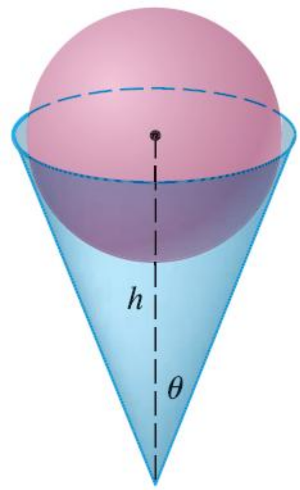
(d) Một khối c6a2u bán kính 0.4 m và có trọng lượng không đáng kể nổi trong một hồ nước lớn. Hỏi cần bao nhiêu công để nhấn chìm hoàn toàn khối cầu trong nước? Tỷ trọng của nước hồ là 1000 kg/m^3.

7. Nước trong một chén bốc hơi với tốc độ tỷ lệ với diện tích của mặt nước. (Điều này có nghĩa tốc độ giảm của thể tích thì tỷ lệ với diện tích của mặt nước) Chứng tỏ rằng mực nước giảm với tốc độ không đổi, độc lập với hình dáng của chén.

8. Một khối cầu bán kính 1 giao với một khối cầu nhỏ hơn bán kính r sao cho phần giao của chúng là một hình tròn bán kính r. (Nói cách khác, chúng giao nhau theo một hình tròn lớn của khối cầu nhỏ.) Tìm r sao cho thể tích bên trong khối cầu nhỏ và bên ngoài khối cầu lớn là lớn nhất.

9. Hình dưới trái cho thấy một đường cong C có tính chất : với mỗi điểm P trên đường cong ở giữa y = 2x^2, diện tích A và B bằng nhau. Tìm phương trình của C.





10. Một ly giấy chứa đầy nước có dạng một hình nón với nửa góc đỉnh θ (xem hình trên phải). Một quả cầu được đặt cẩn thận vào ly, do đó làm một số nước tràn ra ngoài ly. Tìm bán kính của quả cầu sao cho lượng nước tràn khỏi ly là lớn nhất.

11. Đồng hồ nước là một bình chứa thủy tinh có một lỗ nhỏ ở đáy qua đó nước có thể thoát ra ngoài. Đồng hồ được ghi vạch để đo thời gian tương ứng với mực nước ở những mốc thời điểm cách đều nhau (Hình dưới trái). Cho x = f(y) là hàm số liên tục trên đoạn [0, b] và giả sử là bình chứa được tạo ra bằng cách quay đồ thị của f quanh trục y. Gọi V là thể tích nước và h là chiều cao mực nước ở thời điểm t.

(a) Xác định V như là hàm số theo h.

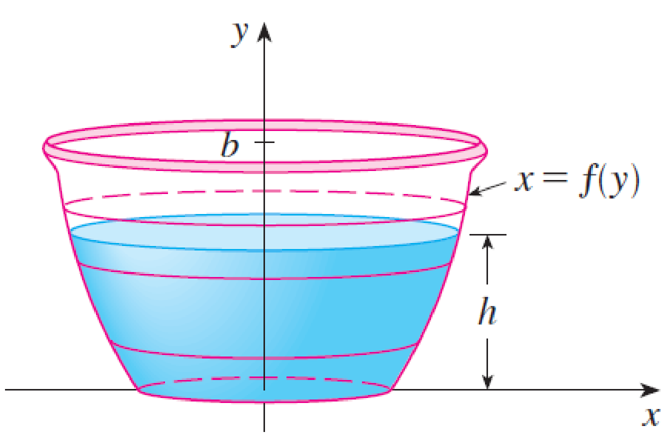
(b) Chứng tỏ rằng

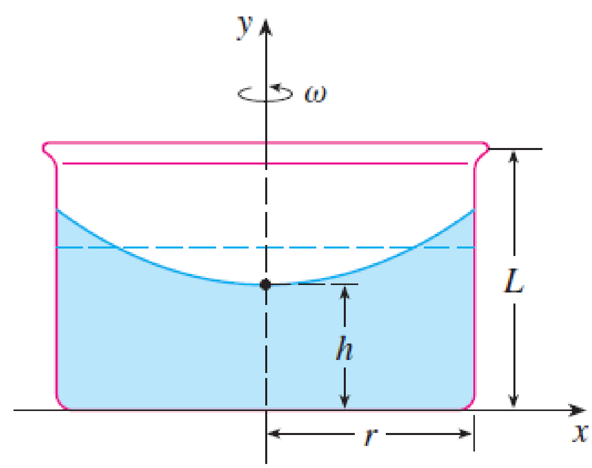
$$\frac{dV}{dt} = \pi\left[f(h)\right]^2 \frac{dh}{dt}$$

(c) Giả sử A là diện tích của lỗ ở đáy bình chứa. Theo Định Luật Torricelli cho rằng tốc độ biến thiên của thể tích nước cho bởi

$$\frac{dV}{dt} = kA\sqrt{h}$$

trong đó k là hằng số âm. Xác định công thức cho hàm số f sao cho dh/dt là một hằng số C. Có thuận lợi gì khi cho dh/dt = C?





12. Một bình chứa hình trụ có bán kính r và chiều cao L được đổ một thể tích V chất lỏng. Nếu bình chứa quay quanh trục đối xứng của nó với vận tốc góc không đổi, bình chứa sẽ gây ra một chuyển động quay cho chất lỏng quanh trục đó. Kết quả là sau cùng chất lõng cũng quay với vận tốc góc như bình chứa. Mặt thoáng của chất lõng sẽ lồi như trong hình trên phải, vì lực ly tâm tác dụng lên các phần tử chất lõng càng lớn khi chúng càng cách xa trục quay. Ta có thể chứng tỏ được rằng mặt thoáng của chất lõng là một hình paraboloit tròn xoay sinh ra khi quay một parabol

$$y = h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

quanh trục y, trong đó g là gia tốc trọng trường.

(a) Xác định h như một hàm số theo ω.

(b) Với góc quay nào thì mặt thoáng của chất lõng chạm đến đáy? Với góc quay nào thì chất lõng tràn ra khỏi bình?

(c) Giả sử bán kính bình là 2 ft, chiều cao là 7 ft, và bình chứa cùng chất lõng quay với cùng một vận tốc góc. Mặt thoáng chất lõng ở trục quay ở dưới miệng bình 5 ft và mặt thoáng ở cách trục quay 1 ft thì ở dưới miệng bình 4 ft.

(i) Xác định góc quay của bình chứa và thể tích của khối chất lõng.

(ii) Ở vách bình mặt thoáng chất lõng cách miệng bình bao xa?

13. Giả sử đồ thị của hàm số bậc ba cắt parabol $y = x^2$ khi $x = 0$, $x = a$, và $x = b$, với $0 < a < b$. Nếu hai miền giữa các đường có cùng diện tích, tìm liên hệ của b đối với a.

14. Giả sử ta muốn làm một bánh taco (bánh thịt chiên dòn) từ một bánh tortilla tròn (bánh bắp) có đường kính 8 in-xơ bằng cách cuốn bánh tortilla lên bề mặt một hình trụ tròn. Sau đó ta sẽ dổ đầy thịt, phô mai, và rau củ đến tận mép bánh. Vấn đề của ta là xác định cách thức cuốn bánh tortilla sao cho nó có thể chứa tối đa thực phẩm bên trong.

(a) Ta bắt đầu bằng cách đặt hình trụ bán kính r dọc theo đường kính của tortilla và gấp bánh lại quanh hình trụ. Gọi x là khoảng cách từ tâm bánh tortilla đến một điểm P trên đường kính (xem hình). Chứng tỏ rằng diện tích thiết diện thẳng của bánh taco đầy thịt cắt bởi mặt phẳng P vuông góc với trục hình trụ là

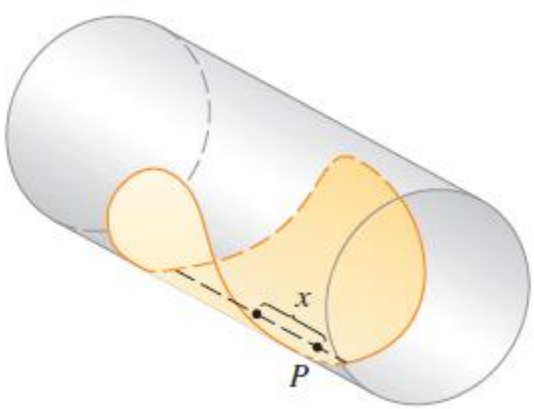
$$A(x) = r\sqrt{16 - x^2} - \frac{1}{2} r^2 \sin\left(\frac{2}{r}\sqrt{16 - x^2}\right)$$

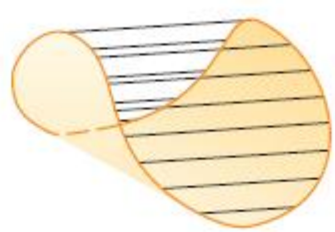
và viết biểu thức thể tích của bánh taco.

(b) Xác định (một cách xấp xỉ) giá trị của r sao cho thể tích bánh taco là lớn nhất. (Dùng máy tính để tiếp cận kết quả bằng đồ thị)

Bánh Tortilla

Bánh Taco



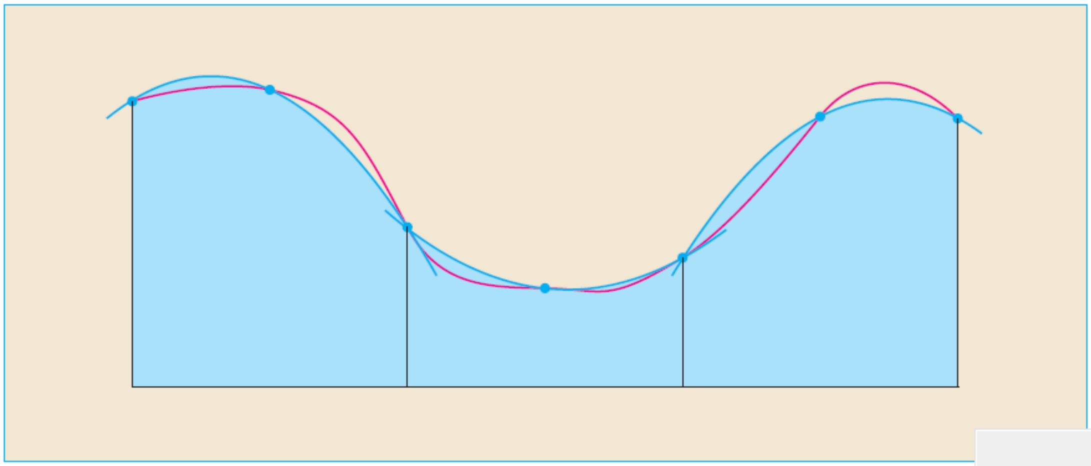


15. Nếu tiếp tuyến với đường cong y = x^3 tại điểm P lại cắt đường ấy tại điểm thứ hai Q, gọi A là diện tích giới hạn bởi đường cong và đoạn tiếp tuyến PQ**.** Gọi B là diện tích của miền xác định tương tự nhưng bắt đầu từ Q thay vì P. Tìm mối liên hệ giữa A và B.

ĐÁP SỐ

1. (a) $f(t) = 3t^2$ (b) $f(x) = \sqrt{2x/\pi}$ **3.** $\frac{32}{27}$
5. (b) 0.2261 (c) 0.6736 m
(d) (i) $1/(105\pi) \approx 0.003$ in/s (ii) $370\pi/3$ s ≈ 6.5 min
9. $y = \frac{32}{9}x^2$
11. (a) $V = \int_0^h \pi[f(y)]^2\,dy$ (c) $f(y) = \sqrt{kA/(\pi C)}\,y^{1/4}$
Advantage: the markings on the container are equally spaced.
13. $b = 2a$ **15.** $B = 16A$

CHƯƠNG 7 PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN



7.1. Tích Phân Từng Phần...506
7.2. Tích Phân Hàm Số Lượng Giác.........................514
7.3. Phương Pháp Đổi Biến Lượng Giác.................522
7.4. Tích Phân Hàm Số Hữu Tỷ...............................529
7.5. Thuật Toán Tính Tích Phân................................540

Người dịch : Trần Quang Nghĩa

Nhờ vào Định Lý Nền Tảng của Giải Tích ta có thể tính tích phân một hàm số nếu biết được một nguyên hàm của hàm số đó. Ta tóm tắt dưới đây những tích phân không xác định quan trọng nhất mà ta đã từng biết.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Trong chương này ta sẽ phát triển những kỹ thuật dựa vào những công thức này để tìm ra những tích phân không xác định của những hàm số phức tạp hơn. Ta đã học qua phương pháp quan trọng nhất của tích phân, đó là phương pháp Đổi Biến, trong Bài 5.5. Một phương pháp tổng quát khác, tích phân từng phần, sẽ được trình bày trong Bài 7.1. Sau đó là những phương pháp đặc biệt dành cho những lớp hàm số đặc biệt, chẳng hạn hàm số lượng giác và hàm số hữu tỷ.

Tích phân không phải lúc nào cũng tính được trực tiếp như vi phân; không tồn tại một quy tắc để lúc nào cũng tính được một tích phân không xác định của một hàm số. Do đó ta cần biết qua một "chiến lược" để đi truy tìm tích phân, được giới thiệu trong Bài 7.5.

BÀI 7.1. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Mỗi quy tắc vi phân có một phương pháp tích phân tương ứng. Chẳng hạn, Phương Pháp Đổi biến trong tích phân tương ứng với Quy Tắc Dây Xích trong phép vi phân. Phương pháp tương ứng với Quy Tắc Nhân trong phép vi phân được gọi là phương pháp tích phân từng phần .

Quy Tắc Nhân nói rằng nếu f và g là hai hàm số khả vi, thì

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]$$

Trong ký hiệu tích phân không xác định phương trình này trở thành

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x)g(x)$$

Hay
$$\int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x)$$

Sắp xếp lại ta được phương trình

1 $$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx}$$

Công thức 1 được gọi là **công thức tích phân từng phần.** Để dễ nhớ ta dùng ký hiệu sau. Đặt u = f(x)và v = g(x). Thế thì vi phân là du = f '(x)dx và dv = g'(x)dx, do đó, theo Quy Tắc Thế, công thức tích phân từng phần trở thành

2 $$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

VÍ DỤ 1 Tìm $\int x\sin xdx$

GIẢI DÙNG CT 1 Giả sử ta chọn f(x) = x và g'(x) = sin x. Thế thì f '(x) = 1 và g(x) = - cos x. (Với g ta có thể chọn bất kỳ nguyên hàm nào của g'.) Do đó, dùng Công thức 1, ta có

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx\\ &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx\\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

Muốn kiểm tra kết quả, ta chỉ việc lấy đạo hàm nó.

GIẢI DÙNG CT 2 Đặt u = x dv = sin x dx

Thế thì du = dx v = - cosx

và như thế

$$\int x\sin x\,dx = \int \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\sin x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\ \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

GHI CHÚ Mục đích trong cách dùng tích phân từng phần là để tính một tích phân đơn giản hơn tích phân ban đầu. Như, trong Ví dụ 1, thay vì phải tính tích phân $\int x\sin x\,dx$ theo yêu cầu, ta tính tích phân đơn giản hơn là $\int \cos x\,dx$. Nếu ta chọn ngược lại u = sin x và dv = xdx, thì du = cos x dx và v = $x^2/2$, và công thức tích phân từng phần cho ta

$$\int x\sin x\,dx = (\sin x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx$$

Kết quả ta lại được một tích phân còn phức tạp hơn tích phân cần tính, như vậy là ta biết là mình đã đặt sai hướng. Một cách tổng quát, khi quyết định chọn cái nào là u, cái nào là dv, ta thường nên chọn u = f(x) là hàm số mà khi tính đạo hàm nó trở nên đơn giản hơn (hay ít ra không phức tạp hơn), miễn là dv = g'(x)dx lúc nào cũng phải sẵn sàng tích phân được để cho ta v.

VÍ DỤ 2 Tính $\int \ln x\,dx$

GIẢI Ở đây ta chỉ có một đường lựa chọn cho u và dv, đó là đặt

u = ln x dv = dx

Thế thì du = $\frac{1}{x}dx$ v = x

Tích phân từng phần cho ta

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x}$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

Tích phân từng phần hiệu quả trong ví dụ này vì đạo hàm của hàm số f(x) = ln x đơn giản hơn f.

VÍ DỤ 3 Tìm $\int t^2 e^t\, dt$.

GIẢI Chú ý là t^2 sẽ trở nên đơn giản hơn khi được lấy đạo hàm (trong khi e^t thì không thay đổi khi lấy đạo hàm hoặc lấy tích phân), vì thế ta chọn

$$u = t^2 \qquad dv = e^t dt$$

Thế thì $$du = 2tdt \qquad v = e^t$$

Tích phân từng phần cho ta

3 $$\int t^2 e^t\, dt = t^2 e^t - 2\int t e^t\, dt$$

Tích phân mà ta được, $\int t e^t\, dt$, đơn giản hơn tích phân ban đầu nhưng vẫn không hiển nhiên. Do đó, ta cần phải tích phân từng phần lần thứ hai, lần này đặt u = t và dv = e^t dt. Suy ra du = dt, v = e^t, và

$$\int t e^t\, dt = te^t - \int e^t\, dt = te^t - e^t\, dt + C$$

Thế phương trình này vào phương trình 3, ta được

$$\int t^2 e^t\, dt = t^2 e^t - 2\int t e^t\, dt$$
$$= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C)$$
$$= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{(trong đó đặt } C_1 = 2C)$$

VÍ DỤ 4 Tính $\int e^x \sin x\, dx$

GIẢI Cả e^x và sin x đều không đơn giản hơn khi lấy đạo hàm, nhưng ta thử chọn

$$u = e^x \qquad dv = \sin x\, dx$$

thì $$du = e^x dx \qquad v = -\cos x$$

Và tích phân từng phần cho ta

4 $$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

Tích phân ta được, $\int e^x \cos x\, dx$, không đơn giản hơn tích phân ban đầu, nhưng ít nhất nó cũng không khó hơn. Đã từng thành công khi tích phân từng phần hai lần trong ví dụ trước, ta kiên trì thực hiện lần nữa. Lần này ta dùng

$$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$$

thì $$du = e^x dx \qquad v = \sin x$$

và **5** $$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

Thoạt nhìn, có vẻ như là ta lâm vào vòng lẩn quẩn bởi vì ta gặp lại tích phân ban đầu là $\int e^x \sin x\, dx$. Tuy nhiên, nếu ta thế biểu thức của $\int e^x \cos x\, dx$ từ phương trình 5 vào phương trình 4 ta được

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

Có thể coi đây là phương trình dùng để tính tích phân chưa biết. Chuyển vế, ta được

$$2\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

Suy ra
$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

Nếu chúng ta tiếp tục kết hợp công thức tích phân từng phần với Phần 2 của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích , ta có thể tính tích phân xác định bằng phương pháp từng phần. Tính hai vế của Công thức 1 từ a đến b, giả sử f ' và g ' liên tục, và dùng Định Lý Nền Tảng, ta được

6
$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx}$$

VÍ DỤ 5 Tính $\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$

GIẢI Đặt

u = $\tan^{-1}$x dv = dx

thì du = $\dfrac{dx}{1+x^2}$ v = x

Do đó Công thức 6 cho ta

$$\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= 1\,.\tan^{-1}1 - 0\,.\tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Để tính tích phân này ta dùng Phương Pháp Đổi Biến t = 1 + x^2 (vì ta đã dùng ký hiệu u ở trên). Thế thì dt = 2xdx, suy ra xdx = ½ dt. Khi x = 0, t = 1; khi x = 1, t = 2; do đó

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

Vậy
$$\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

VÍ DỤ 6 Chứng minh công thức thu gọn

7
$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}\,dx$$

trong đó n là một số nguyên ≥ 2.

GIẢI Đặt $u = \sin^{n-1} x$ $dv = \sin x\, dx$

Thế thì $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx$ $v = -\cos x$

Tích phân từng phần cho ta

$$\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

Vì $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ta có

$$\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \sin^n x\, dx$$

Như trong Ví dụ 4, ta giải phương trình này theo tích phân cần tìm là $\int \sin^n x\, dx$, chuyển số hạng cuối cùng từ vế phải sang trái. Ta được

$$n\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx$$

Hay $$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} dx \quad \text{(ĐPCM)}$$

Công thức thu gọn (7) hữu dụng vì nếu sử dụng nó tiếp tục ta cuối cùng có thể biểu diễn $\int \sin^n x\, dx$ theo số hạng $\int \sin x\, dx$ (nếu n lẻ) hay theo $\int (\sin x)^0\, dx = \int dx$ (nếu n chẵn).

BÀI TẬP

1-2. Tính tích phân dùng tích phân từng phần với sự chọn u và dv đã chỉ ra.

1. $\int x^2 \ln x\, dx$; $u = \ln x$, $dv = x^2\, dx$

2. $\int \theta \cos\theta\, d\theta$; $u = \theta$, $dv = \cos\theta\, d\theta$

3-32. Tính tích phân .

3. $\int x\cos 5x\, dx$

4. $\int xe^{-x}\, dx$

5. $\int re^{r/2}\, dr$

6. $\int t\sin 2t\, dt$

7. $\int x^2 \sin \pi x\, dx$

8. $\int x^2 \cos mx\, dx$

9. $\int \ln(2x+1)\, dx$

10. $\int \sin^{-1} x\, dx$

11. $\int \arctan 4t\, dt$

12. $\int p^5 \ln p\, dp$

13. $\int t\sec^2 2t\, dt$

14. $\int s2^s\, ds$

15. $\int (\ln x)^2\, dx$

16. $\int t\sinh mt\, dt$

17. $\int e^{2\theta}\sin 3\theta\, d\theta$

18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\, d\theta$

19. $\int_0^{\pi} t\sin 3t\, dt$

20. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\, dx$

21. $\int_0^1 t\cosh t\, dt$

22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\, dy$

23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

24. $\int_0^{\pi} x^3\cos x\, dx$

25. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$

26. $\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\,dx$

27. $\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

28. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

29. $\int \cos x \ln(\sin x)\,dx$

30. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

31. $\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx$

32. $\int_0^t e^s \sin(t-s)\,ds$

33-38. Trước tiên dùng phương pháp đổi biến sau đó dùng tích phân từng phần để tính các tích phân sau.

33. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

34. $\int t^3 e^{-t^2}\,dt$

35. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3\cos(\theta^2)\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi} e^{\cos t}\sin 2t\,dt$

37. $\int x\ln(1+x)\,dx$

38. $\int \sin(\ln x)\,dx$

39-42. Tính các tích phân không xác định. Minh họa, và kiểm tra trả lời của bạn là hợp lý, bằng cách vẽ đồ thị của cả hàm số lẫn nguyên hàm của nó (cho C = 0).

39. $\int (2x+3)e^x\,dx$

40. $\int x^{3/2}\ln x\,dx$

41. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

42. $\int x^2\sin 2x\,dx$

43. (a) Dùng công thức rút gọn trong Ví dụ 6 để chứng tỏ rằng

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(b) Dùng phần (a) và công thức rút gọn để tính $\int \sin^4 x\,dx$.

44. (a) Chứng minh công thức rút gọn sau

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

(b) Dùng phần (a) để tính $\int \cos^2 x\,dx$.

(c) Dùng phần (a) và (b) để tính $\int \cos^4 x\,dx$.

45. (a) Dùng công thức rút gọn trong Ví dụ 6 để chứng tỏ rằng

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx$$

với n nguyên ≥ 2.

(b) Dùng phần (a) để tính $\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\,dx$ và $\int_0^{\pi/2}\sin^5 x\,dx$.

(c) Dùng phần (a) chứng tỏ rằng với lũy thừa lẻ của sin,

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx = \frac{2.4.6.....2n}{3.5.7....(2n+1)}$$

46. Chứng tỏ rằng, với lũy thừa chẵn của sin,

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx = \frac{1.3.5.7....(2n-1)}{2.4.6.....2n}\frac{\pi}{2}$$

47-50. Dùng tích phân từng phần để chứng minh công thức rút gọn sau.

47. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

48. $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

49. $\tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

50. $\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x\sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

51. Dùng Bài tập 47 để tính $\int (\ln x)^3\,dx$.

52. Dùng Bài tập 48 để tính $\int x^4 e^x\,dx$.

53-54. Tìm diện tích của miền giới hạn bởi các đường cho trước.

53. $y = xe^{-0.4x}$, $y = 0$, $x = 5$

54. $y = 5\ln x$, $y = x\ln x$

55-56. Dùng đồ thị để tìm hoành độ xấp xỉ của giao điểm của cac đường cho trước. Rồi tìm (xấp xỉ) diện tích của miền giới hạn bởi các đường.

55. $y = x\sin x$, $y = (x-2)^2$

56. $y = \arctan 3x$, $y = x/2$

57-60. Dùng phương pháp vỏ trụ để tìm thể tích sinh bởi miền giới hạn bởi các đường cho trước quanh trục đã chỉ ra.

57. $y = \cos(\pi x/2),\ y = 0,\ 0 \le x \le 1;$ about the y-axis

58. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1;$ about the y-axis

59. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0;$ about $x = 1$

60. $y = e^x,\ x = 0,\ y = \pi;$ about the x-axis

61. Tìm giá trị trung bình của $f(x) = x^2 \ln x$ trên [1, 3].

62. Một tên lửa tăng tốc bằng sức đẩy của nhiên liệu mang theo, vì thế khối lượng của nó giảm dần theo thời gian. Giả sử khối lượng ban đầu của tên lửa ở thời điểm rời mặt đất (kể cả nhiên liệu) là m, nhiên liệu tiêu thụ với tốc độ r, và khí thoát ra với vận tốc không đổi v_e (đối với tên lửa). Một mô hình cho vận tốc của tên lửa ở thời điểm t được cho bởi phương trình

$$v(t) = -gt - v_e \ln\frac{m - rt}{m}$$

trong đó g là gia tốc trọng trường và t không quá lớn. Nếu g = 9.8 m/s^2, m = 30,000 kg, r = 160 kg/s, và v_e = 3000 m/s, tìm độ cao của tên lửa một phút sau khi rời mặt đất.

63. Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng có vận tốc $v(t) = t^2 e^{-t}$ m/s sau t giây. Hỏi trong t giây đầu tiên, chất điểm đi được quảng đường dài bao nhiêu?

64. Nếu f(0) = g(0) = 0 và f ” và g ” đều liên tục, chứng tỏ rằng

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)$$

65. Giả sử f(1) = 2, f(4) = 7, f ’(1) = 5, f ‘(4) = 3, và f “ liên tục. Tìm giá trị của $\int_1^4 xf''(x)\,dx$.

66. (a) Dùng tích phân từng phần để chứng tỏ rằng

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int x\, f'(x)\,dx$$

(b) Nếu f và g là hai hàm số nghịch đảo (inverse functions) và f ‘ liên tục, chứng tỏ rằng

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[Gợi ý: Dùng phần (a) và phép đổi biến y = f(x).]

(c) Trong trường hợp f và g là những hàm số dương và b > a > 0, vẽ biểu đồ minh họa ý nghĩa hình học của phần (b).

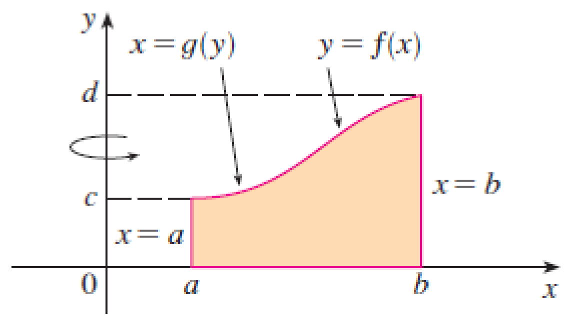
(d) Dùng phần (b) để tính $\int_1^e \ln x\,dx$.

67. Ta đã đến được Công thức 6.3.2, V = $\int_a^b 2\pi\, xf(x)\,dx$, bằng cách dùng phương pháp vỏ trụ, nhưng bây giờ ta có thể dùng tích phân từng phần để chứng tỏ nó dùng phương pháp cắt lát của Bài 6.2, ít nhất cho trường hợp f là hàm số một-một và do đó nó có hàm số nghịch đảo g. Dùng hình để chứng tỏ rằng

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi\,[g(y)]^2\,dy$$

Dùng phép đổi biến y = f(x) và sau đó dùng tích phân từng phần cho tích phân có được để chứng tỏ rằng

$$V = \int_a^b 2\,\pi\, x\, f(x)\,dx$$



68. Đặt $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

(a) Chứng tỏ rằng $I_{2n+2} \le I_{2n+1} \le I_{2n}$

(b) Dùng Bài tập 46 chứng tỏ rằng

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Dùng phần (a) và (b) để chứng tỏ rằng

$$\frac{2n+1}{2n+2} \le \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$$

và suy ra rằng $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1} / I_{2n} = 1$.

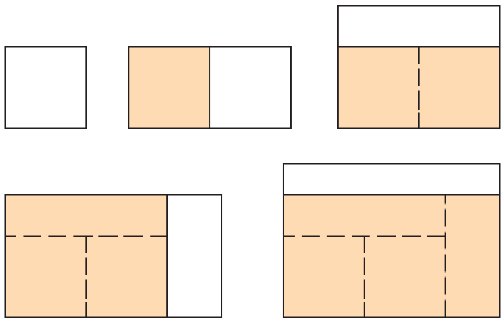
(d) Dùng phần (c) và Bài tập 45 và 46 để chứng tỏ rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Công thức thường viết dưới dạng một tích vô hạn:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ \cdots \text{ (tích Wallis).}$$

(e) Ta dựng các hình chữ nhật như sau: Bắt đầu bằng một hình vuông có diện tích là 1 và sau đó ghép các hình chữ nhật có diện tích 1 lần lượt bên cạnh hay bên trên những hình chữ nhật có trước (xem hình). Tìm giới hạn của tỷ số chiều rộng và chiều cao của hình chữ nhật này.



ĐÁP SỐ

1. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$ **3.** $\frac{1}{5}x \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x + C$

5. $2(r-2)e^{r/2} + C$

7. $-\dfrac{1}{\pi}x^2 \cos \pi x + \dfrac{2}{\pi^2} x \sin \pi x + \dfrac{2}{\pi^3} \cos \pi x + C$

9. $\frac{1}{2}(2x+1)\ln(2x+1) - x + C$

11. $t \arctan 4t - \frac{1}{8}\ln(1+16t^2) + C$

13. $\frac{1}{2}t \tan 2t - \frac{1}{4}\ln|\sec 2t| + C$

15. $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

17. $\frac{1}{13}e^{2\theta}(2\sin 3\theta - 3\cos 3\theta) + C$

19. $\pi/3$ **21.** $1 - 1/e$ **23.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ **25.** $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$

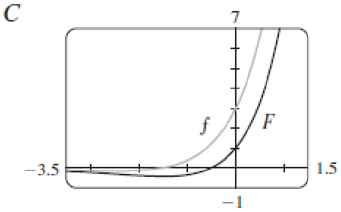
27. $\frac{1}{6}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$ **29.** $\sin x(\ln \sin x - 1) + C$

31. $\frac{32}{5}(\ln 2)^2 - \frac{64}{25}\ln 2 + \frac{62}{125}$

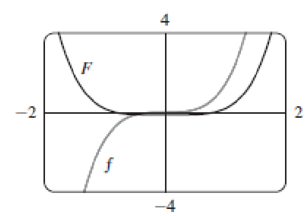
33. $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$ **35.** $-\frac{1}{2} - \pi/4$

37. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C$

39. $(2x+1)e^x + C$



41. $\frac{1}{3}x^2(1+x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1+x^2)^{5/2} + C$



43. (b) $-\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + C$

45. (b) $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ **51.** $x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + C$

53. $\frac{25}{4} - \frac{75}{4}e^{-2}$ **55.** 1.0475, 2.8731; 2.1828 **57.** $4 - 8/\pi$

59. $2\pi e$ **61.** $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{13}{9}$ **63.** $2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$ m

65. 2

BÀI 7.2. TÍCH PHÂN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Trong bài này ta dùng những đẳng thức lượng giác để tích phân một số tổ hợp các hàm số lượng giác. Ta bắt đầu với lũy thừa của sin và cos.

VÍ DỤ 1 Tính $\int \cos^3 x\, dx$

GIẢI Dùng phép đổi biến u = cos x không giải quyết được gì, vì khi đó du = - sin x dx. Để tích phân các lũy thừa của cos, ta cần đưa vào thêm nhân tử sin x. Tương tự, một lũy thừa của sin sẽ cần thêm một nhân tử cos. Do đó ở đây ta cần tách ra một nhân tử cos và biến đổi nhân tử $\cos^2 x$ còn lại thành $1 - \sin^2 x$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \,.\, \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$$

Bây giờ ta có thể đổi biến u = sin x, để được du = cos x dx và

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$$
$$= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C$$
$$= \sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Tổng quát, ta thử biến đổi hàm số được tích phân liên quan đến lũy thừa của sin và cos dưới dạng trong đó ta chỉ có một nhân tử sin (và phần còn lại có thể biểu diễn theo cos) hay chỉ có một nhân tử cos (và phần còn lại có thể biểu diễn theo sin). Đẳng thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ giúp ta biến đổi qua lại giữa cos và sin.

VÍ DỤ 2 Tính $\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx$

GIẢI Ta có thể đổi $\cos^2 x$ thành $1 - \sin^2 x$, nhưng như thế ta chỉ còn lại biểu thức chỉ chứa toàn sin mà không có dư nhân tử cos. Thay vào đó, ta tách một nhân tử sin và viết phần còn lại $\sin^4 x$ theo cos x.

$$\sin^5 x \cos^2 x = (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x$$

Đổi biến u = cos x, ta có du =- sin x dx và do đó

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x\, dx$$
$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x\, dx$$
$$= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du$$
$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C$$
$$= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Trong các ví dụ trước, một lũy thừa lẻ của sin hay cos giúp ta có thể tách ra một nhân tử đơn lẻ và biền đổi phần có lũy thừa chẵn còn lại. Nếu hàm số được tích phân chứa các lũy thừa chẵn của cả sin và cos, chiến thuật này thất bại. Trong trường hợp này, ta có thể lợi dụng đẳng thức góc chia đôi (hay công thức hạ bậc) sau đây:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

VÍ DỤ 3 Tính $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$

GIẢI Nếu ta viết $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, tích phân cũng không đơn giản hơn. Dùng công thức góc chia đôi cho $\sin^2 x$, ta được

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{1}{2}\pi$$

Chú ý là ta dùng phép đổi biến ngầm u = 2x khi tích phân cos 2x. Một cách giải khác đã được cho trong Bài tập 43 trong Bài 7.1.

VÍ DỤ 4 Tính $\int \sin^4 x\, dx$

GIẢI Ta có thể tính tích phân này dùng công thức rút gọn cho $\int \sin^n x\, dx$ (phương trình 7.1.7) cùng với Ví dụ 3, nhưng một phương pháp tốt hơn vì độc lập hơn là viết $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ và dùng công thức góc chia đôi:

$$\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

Tiếp tục dùng công thức góc chia đôi cho $\cos^2 2x$

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Suy ra ta được

$$\int \sin^4 x\, dx = \tfrac{1}{4}\int [1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)]\, dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int (\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{4}(\tfrac{3}{2}x - \sin 2x + \tfrac{1}{8}\sin 4x) + C$$

Tóm lại, ta liệt kê những gợi ý phải theo, giúp ta tính được các tích phân có dạng $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, trong đó m và n là những số nguyên không âm.

PHƯƠNG PHÁP TÍNH $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

(a) Nếu lũy thừa của cos x lẻ (n = 2k + 1), giữ lại một nhân tử cos x và dùng $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ để biểu diễn những nhân tử còn lại theo sin x: Rồi dùng phép đổi biến u = sin x.

(b) Nếu lũy thừa của sin x lẻ (m = 2k + 1), giữ lại một nhân tử sin x và dùng $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ để biểu diễn những nhân tử còn lại theo cos x:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \int (\sin^2 x)^k \cos^n x\ \sin x\, dx$$
$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^n x \sin x\, dx$$

Rồi dùng phép đổi biến u = cos x.

(c) Nếu lũy thừa của sin x và cos x đều chẵn, dùng công thức góc chia đôi

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

và có thể sin x cos x = ½ sin 2x

Ta có thể dùng chiến thuật tương tự để tính tích phân có dạng $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$. Vì (d/dx) tan x = $\sec^2$ x, ta có thể tách nhân tử $\sec^2$ x và biến đổi những lũy thừa (chẵn) còn lại của sec x theo tan x dùng đẳng thức $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Hay, vì (d/dx) sec x = sec x tan x, ta có thể tách nhân tử sec x tan x và biến đổi những lũy thừa (chẵn) còn lại của tan x thành sec x.

VÍ DỤ 5 Tính $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$

GIẢI Nếu ta tách nhân tử $\sec^2 x$ ra, ta có thể biểu diễn phần còn lại $\sec^2 x$ theo tan x, dùng đẳng thức $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Sau đó ta có thể tính tích phân bằng phép đổi biến u = atan x với du = $\sec^2 x$ dx

$$\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$
$$= \int \tan^6 x\,(1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$
$$= \int u^6(1 + u^2)\, du = \int (u^6 + u^8)\, du$$
$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$
$$= \tfrac{1}{7}\tan^7 x + \tfrac{1}{9}\tan^9 x + C$$

VÍ DỤ 6 Tính $\int \tan^5 \theta \sec^7 \theta\, d\theta$

GIẢI Nếu ta tách nhân tử $\sec^2\theta$ ra, như trong ví dụ trước, ta còn lại nhân tử $\sin^5 \theta$, không thể biến đổi thuận tiện về tan θ. Tuy nhiên, nếu ta tách nhân tử sec θ tan θ ra, ta có thể biến đổi lũy thừa còn lại của tan θ thành biểu thức chỉ chứa sec θ dùng đẳng thức $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$. Sau đó ta dùng phép đổi biến u = sec θ, với du = sec θ tan θ d θ.

$$\begin{aligned}\int \tan^5\theta\ \sec^7\theta\, d\theta &= \int \tan^4\theta\ \sec^6\theta\ \sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ &= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta\ \sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ &= \int (u^2-1)^2 u^6\, du \\ &= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6)\, du \\ &= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\ &= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C\end{aligned}$$

Các ví dụ trên cho ta chiến thuật tổng quát để tính tích phân có dạng $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ trong hai trường hợp như dưới đây

CHIẾN THUẬT TÍNH $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$

(a) Nếu lũy thừa của sec x chẵn (n = 2k, k ≥ 2), giữ lại một nhân tử $\sec^2 x$ và dùng $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ để biểu diễn nhân tử còn lại theo tan x:

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^{2k} x\, dx &= \int \tan^m x(\sec^2 x)^{k-1}\sec^2 x\, dx \\ &= \int \tan^m x(1+\tan^2 x)^{k-1}\sec^2 x\, dx\end{aligned}$$

Rồi đặt u = tan x.

(b) Nếu lũy thừa của tan x lẻ (m = 2k + 1), giữ lại một nhân tử sec x tanx và dùng $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ để biến đổi nhân tử còn lại theo sec x:

$$\begin{aligned}\int \tan^{2k+1} x \sec^n x\, dx &= \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x\, dx\end{aligned}$$

Rồi đặt u = sec x.

Với những trường hợp khác, những gợi ý không còn ăn chắc nữa. Ta có khi cần dùng những đẳng thức lượng giác, tích phân từng phần, và đôi khi một ít tinh xảo. Ta cũng cần nhớ tích phân của tan x đã thiết lập trong Bài 5.5.:

$$\boxed{\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C}$$

Và cả tích phân của sec x:

1 $$\boxed{\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C}$$

Ta có thể chứng minh Công thức 1 bằng cách lấy đạo hàm của vế phải, hoặc làm tiến hành trực tiếp như sau. Trước tiên nhân và chia cho sec x + tan x:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

Nếu ta đặt u = sec x + tan x, với du = (sec x tan x + $\sec^2$x) dx, tích phân trở thành

$$\int \left(\frac{1}{u}\right) du = \ln|u| + C. \quad \text{(ĐPCM)}$$

VÍ DỤ 7 Tính $\int \tan^3 x\, dx$

GIẢI Ở đây chỉ có tan x, do đó ta dùng $\tan^2$x = $\sec^2$x – 1 để viết lại nhân tử $\tan^2$x theo $\sec^2$x:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx = \int \tan x \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$
$$= \int \tan x \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx$$
$$= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$$

Trong tích phân đầu tiên ta đổi biến ngầm u = tan x với du = $\sec^2$x dx.

Nếu một lũy thừa chẵn của tan x xuất hiện với một lũy thừa lẻ của sec x, sẽ có ích nếu ta biểu diễn hàm số được tích phân hoàn toàn theo sec x. Các lũy thừa của sec x có thể cần tích phân từng phần, như trong ví dụ sau.

VÍ DỤ 8 Tính $\int \sec^3 x\, dx$

GIẢI Ở ta tích phân từng phần với

u = sec x dv = $\sec^2$x dx

du = sec x tan x dx v = tan x

Thế thì
$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Dùng Công thức 1 và giải để tìm tích phân cần tìm, ta được

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C$$

Các tích phân như tích phân trong ví dụ trên có vẻ rất đặc biệt nhưng thực ra chúng xảy ra thường trong các ứng dụng của tích phân, như ta sẽ thấy trong Chương 8. Các tích phân có dạng $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$ có thể tìm được bằng phương pháp tương tự nhờ đẳng thức $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

Cuối cùng, ta còn nhờ đến bộ công thức biến đổi lượng giác sau:

2 **Để tính các tích phân (a)** $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $(b) \int \sin mx \sin nx\, dx,$ *hay* $(c) \int \cos mx \cos nx\, dx$ **, ta dùng các đẳng thức sau:**

(a) $\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$

(b) $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

(c) $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

VÍ DỤ 9 Tính $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$

GIẢI Tích phân có thể được tính dùng tích phân từng phần, nhưng nếu dùng công thức biến đổi trong Phương trình 2(a) như sau:

$$\int \sin 4x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(-x) + \sin 9x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{9}\cos 9x\right) + C$$

BÀI TẬP

1-49. Tính tích phân

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$
2. $\int \sin^6 x \cos^3 x\, dx$
3. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5 x \cos^3 x\, dx$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$
5. $\int \sin^2(\pi x)\cos^5(\pi x)\, dx$
6. $\int \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$
8. $\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta)\, d\theta$
9. $\int_0^{\pi} \sin^4(3t)\, dt$
10. $\int_0^{\pi} \cos^6\theta\, d\theta$
11. $\int (1+\cos\theta)^2\, d\theta$
12. $\int x\cos^2 x\, dx$
13. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x\, dx$
14. $\int_0^{\pi} \sin^2 t \cos^4 t\, dt$
15. $\int \frac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}\, d\alpha$
16. $\int \cos\theta \cos^5(\sin\theta)\, d\theta$
17. $\int \cos^2 x \tan^3 x\, dx$
18. $\int \cot^5\theta \sin^4\theta\, d\theta$
19. $\int \frac{\cos x + \sin 2x}{\sin x}\, dx$
20. $\int \cos^2 x \sin 2x\, dx$
21. $\int \sec^2 x \tan x\, dx$
22. $\int_0^{\pi/2} \sec^4(t/2)\, dt$
23. $\int \tan^2 x\, dx$
24. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\, dx$
25. $\int \sec^6 t\, dt$
26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \tan^4\theta\, d\theta$
27. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x\, dx$
28. $\int \tan^3(2x)\sec^5(2x)\, dx$
29. $\int \tan^3 x \sec x\, dx$
30. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^6 x\, dx$
31. $\int \tan^5 x\, dx$
32. $\int \tan^6(ay)\, dy$
33. $\int \frac{\tan^3\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta$
34. $\int \tan^2 x \sec x\, dx$
35. $\int x\sec x \tan x\, dx$
36. $\int \frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi$
37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2 x\, dx$
38. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3 x\, dx$
39. $\int \cot^3\alpha \csc^3\alpha\, d\alpha$
40. $\int \csc^4 x \cot^6 x\, dx$
41. $\int \csc x\, dx$
42. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^3 x\, dx$
43. $\int \sin 8x \cos 5x\, dx$
44. $\int \cos \pi x \cos 4\pi x\, dx$
45. $\int \sin 5\theta \sin\theta\, d\theta$
46. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x}\, dx$
47. $\int \frac{1-\tan^2 x}{\sec^2 x}\, dx$
48. $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$
49. $\int t\sec^2(t^2)\tan^4(t^2)\, dt$

50. Nếu $\int \tan^6 x \sec x\, dx = I$, biểu diễn giá trị của $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x \sec x\, dx$ theo I.

51-54. Tính tích phân bất định. Minh họa, và kiểm tra trả lời của bạn xem có hợp lý không , bằng cách vẽ đồ thị của hàm số lẫn nguyên hàm của nó (lấy C = 0)

51. $\int x\sin^2(x^2)\, dx$

52. $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$

53. $\int \sin 3x \sin 6x\, dx$

54. $\int \sec^4 \frac{x}{2}\, dx$

55. Tìm giá trị trung bình của hàm số $f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

56. Tính $\int \sin x \cos x\, dx$ bằng bốn cách:

(a) dùng phép đổi biến u = cos x.
(b) dùng phép đổi biến u = sin x.
(c) dùng đẳng thức sin2x = 2sin x cos x

(d) dùng tích phân từng phần.
Giải thích sự khác nhau của các đáp số.

57-58. Tìm diện tích miền giới hạn bởi các đường cho trước.

57. $y = \sin^2 x$, $y = \cos^2 x$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$

58. $y = \sin^3 x$, $y = \cos^3 x$, $\pi/4 \le x \le 5\pi/4$

59-60. Dùng đồ thị của các hàm số được tích phân để ước đoán giá trị của tích phân. Rồi dùng phương pháp trong bài này để chứng tỏ ước đoán của bạn là đúng.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \, dx$ **60.** $\int_0^2 \sin 2\pi x \cos 5\pi x \, dx$

61-64. Tìm thể tích sinh ra khi quay miền giới hạn bởi các đường cho trước quanh trục được chỉ ra.

61. $y = \sin x$, $y = 0$, $\pi/2 \le x \le \pi$; about the x-axis

62. $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$; about the x-axis

63. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/4$; about $y = 1$

64. $y = \sec x$, $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/3$; about $y = -1$

65. Một chất điểm di chuyển trên một đường thẳng với hàm số vận tốc $v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$. Tìm hàm số vị trí $s = f(t)$ biết $f(0) = 0$.

66. Điện nhà được cung cấp dưới dạng điện xoay chiều biến thiên từ 155 V đến – 155 V với tần số 60 chu kỳ mỗi giây (Hz). Điện thế do đó được cho bởi phương trình $E(t) = 155 \sin(120\pi t)$ trong đó t tính bằng giây. Các volt-kế chỉ thị điện thế RMS, tức căn bậc hai của giá trị trung bình của $[E(t)]^2$ qua mỗi chu kỳ.

(a) Tính điện thế RMS của dòng điện nhà.

(b) Nhiều lò sưởi điện cần điện thế RMS là 220 V. Tìm cường độ A tương ứng cần có cho điện thế $E(t) = A\sin(120\pi t)$.

67-69. Chứng minh các đẳng thức sau, trong đó m và n là các số nguyên dương.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \ne n \\ \pi & \text{if } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \ne n \\ \pi & \text{if } m = n \end{cases}$

70. Chuỗi Fourier hữu hạn được cho bởi tổng

$$F(x) = \sum_{n-1}^{N} a_n \sin nx$$
$$= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ,. . . + a_n \sin nx$$

Chứng tỏ rằng hệ số thứ m a_m được cho bằng công thức

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

ĐÁP SỐ

1. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **3.** $-\frac{11}{384}$

5. $\frac{1}{3\pi}\sin^3(\pi x) - \frac{2}{5\pi}\sin^5(\pi x) + \frac{1}{7\pi}\sin^7(\pi x) + C$

7. $\pi/4$ **9.** $3\pi/8$ **11.** $\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$

13. $\pi/16$ **15.** $\frac{2}{45}\sqrt{\sin\alpha}\,(45 - 18\sin^2\alpha + 15\sin^4\alpha) + C$

17. $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$ **19.** $\ln|\sin x| + 2\sin x + C$

21. $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ **23.** $\tan x - x + C$

25. $\frac{1}{5}\tan^5 t + \frac{2}{3}\tan^3 t + \tan t + C$ **27.** $\frac{117}{8}$

29. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

31. $\frac{1}{4}\sec^4 x - \tan^2 x + \ln|\sec x| + C$

33. $\frac{1}{6}\tan^6\theta + \frac{1}{4}\tan^4\theta + C$

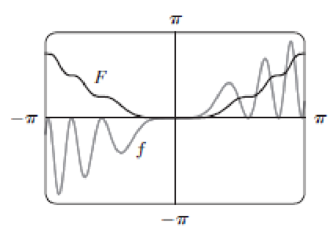
35. $x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$ **37.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$

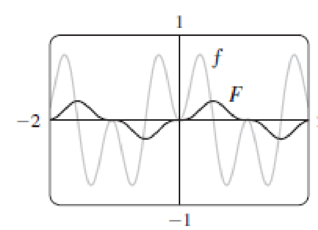
39. $\frac{1}{3}\csc^3\alpha - \frac{1}{5}\csc^5\alpha + C$ **41.** $\ln|\csc x - \cot x| + C$

43. $-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{26}\cos 13x + C$ **45.** $\frac{1}{8}\sin 4\theta - \frac{1}{12}\sin 6\theta + C$

47. $\frac{1}{2}\sin 2x + C$ **49.** $\frac{1}{10}\tan^5(t^2) + C$

51. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\sin(x^2)\cos(x^2) + C$ **53.** $\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{18}\sin 9x + C$





55. 0 **57.** 1 **59.** 0 **61.** $\pi^2/4$ **63.** $\pi(2\sqrt{2} - \frac{5}{2})$

65. $s = (1 - \cos^3\omega t)/(3\omega)$

BÀI 7. 3. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN LƯỢNG GIÁC

Trong khi tìm diện tích của một hình tròn hay một elip, ta gặp một tích phân có dạng $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, trong đó a > 0. Nếu là tích phân $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ thì phép đổi biến u = $a^2 - x^2$ sẽ công hiệu, nhưng ở đây, với $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, thì không ăn thua. Nếu ta đổi biến từ x sang θ bằng phép đổi biến x = asin θ, thì nhờ đẳng thức $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ cho phép ta thoát khỏi căn thức bởi vì

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\,|\cos\theta|$$

Chú ý sự khác biệt giữa phép đổi biến u = $a^2 - x^2$ (trong đó biến mới là hàm số theo biến cũ) và phép đổi biến x = asin θ (biến cũ là hàm số theo biến mới).

Tổng quát, ta có thể dùng phép đổi biến thuộc dạng x = g(t) bằng cách dùng Phép Đổi Biến nhưng theo hướng ngược lại. Để cho phép tính của ta đơn giản hơn, ta giả sử g có hàm số ngược, tức g là hàm số một-một. Trong trường hợp này, nếu ta thay u bằng x và x bằng t trong Quy Tắc Đổi Biến (Phương trình 5.5.4), ta được

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

Loại đổi biến này gọi là đổi biến ngược.

Ta có thể thực hiện phép đổi biến nghịch x = asin θ miễn là nó xác định một hàm số một-một. Điều này có thể thực hiện được nếu ta giới hạn biến θ thuộc đoạn [- π/2, π/2].

Trong bảng sau đây ta liệt kê những phép đổi biến lượng giác hữu ích cho những biểu thức vô tỷ nhờ những đẳng thức lượng giác đặc biệt. Trong mỗi trường hợp, ta nêu ra những giới hạn để bảo đảm hàm số đổi biến là hasomot-một. (Những giới hạn này chính là những đoạn từng dùng trong Bài 1.6 khi định nghĩa hàm số ngược).

BẢNG ĐỔI BIẾN LƯỢNG GIÁC

Biểu thức	*Phép đổi biến*	*Đẳng thức*
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta,\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta,\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta,\quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ or $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

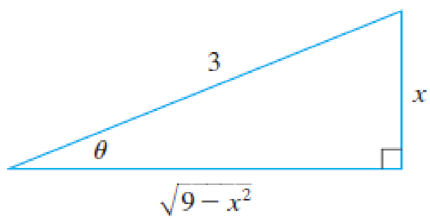
VÍ DỤ 1 Tính $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$

GIẢI Đặt x = 3sin θ, trong đó – π/2 ≤ θ ≤ π/2. Thì dx = 3cos θ d θ và

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9\sin^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\,|\cos\theta|$$

(Chú ý là cos θ ≥ 0 vì – π/2 ≤ θ ≤ π/2.) Do đó Quy Tắc Đổi Biến Ngược cho ta

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta} 3\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \int \cot^2\theta\,d\theta$$



HÌNH 1

$$= \int \left(\csc^2\theta - 1\right) d\theta$$
$$= -\cot\theta - \theta + C$$

Vì đây là tích phân vô định, ta phải quay về với biến ban đầu x. Điều này có thể làm được hoặc bằng cách dùng đẳng thức lượng giác để biểu diễn cot θ theo sin θ = x/3 hay bằng cách vẽ biểu đồ, như Hình 1, trong đó θ là một góc nhọn của một tam giác vuông . Vì sin θ = x/3, ta đặt độ dài cạnh đối và cạnh huyền lần lượt là x và 3. Do đó theo Định lý Pitago, ta được cạnh kề là $\sqrt{9-x^2}$, và

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

(Mặc dù θ > 0 trong hình, biểu thức tính cot θ vẫn có giá trị khi θ < 0.) Vì sin θ = x/3, ta có θ = $\sin^{-1}$ (x/3) và vì vậy

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

VÍ DỤ 2 Tính diện tích giới hạn bởi đường elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

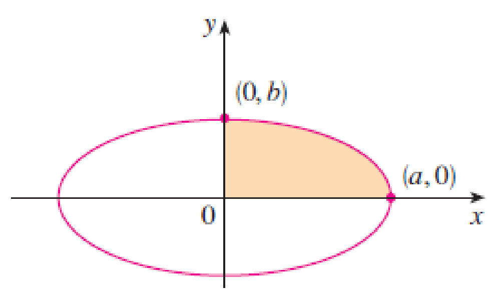
GIẢI Giải phương trình để tính y theo x, ta được :

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2} \qquad hay \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Vì elip đối xứng qua cả hai trục, nên diện tích A cần tìm gấp 4 lần diện tích ở phần tư thứ nhất (xem Hình 2). Phần elip thuộc phần tư thứ nhất cho bởi phương trình

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad 0 \le x \le a$$

Do đó
$$\frac{1}{4}A = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$



Để tính tích phân này ta đổi biến x = asin θ. Thế thì dx = acos θ d θ. Để đổi các cận của tích phân, ta chú ý rằng khi x = 0, sin θ = 0, nên θ = 0; khi x = a, sin θ = 1, nên θ = π/2, và

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\,|\cos\theta| = a\cos\theta$$

HÌNH 2

vì 0 ≤ θ ≤ π/2. Do đó

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2ab\left[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab$$

Ta đã chứng tỏ rằng diện tích của một hình elip với độ dài nửa trục a và b là πab. Đặc biệt, cho a = b = r, elip thành hình tròn bán kính r và ta tìm lại công thức nổi tiếng của diện tích hình tròn có bán kính r là πr^2.

GHI CHÚ Vì tích phân trong Ví dụ 2 là tích phân xác định, ta đã thay đổi cận của tích phân ứng với biến mới mà không cần trở về biến ban đầu x.

VÍ DỤ 3 Tìm $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

GIẢI Đặt x = 2tan θ, - π/2 < θ < π/2. Suy ra dx = 2 $\sec^2\theta\, d\theta$ và

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4(\tan^2\theta + 1)} = \sqrt{4\sec^2\theta c} = 2|\sec\theta| = 2\sec\theta$$

Do đó ta có

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4\tan^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$$

Để tính tích phân này ta biến đổi tất cả về sin θ và cos θ:

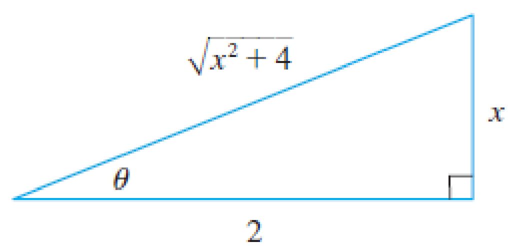
$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

Do đó, dùng phép đổi biến u = sin θ, ta có

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\sin\theta}$$

$$= -\frac{\csc\theta}{4} + C$$



HÌNH 3

Ta dùng Hình 3 để tìm được cấp số cộng $\theta = \sqrt{x^2+4}/x$ *và do đó*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

VÍ DỤ 4 Tìm $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

GIẢI Ở đây ta có thể thay x = 2 tan θ (như trong Ví dụ 3). Nhưng dùng đổi biến trực tiếp $u = x^2 + 4$ thì đơn giản hơn , vì du = 2x dx và

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

GHI CHÚ Ví dụ 4 cho thấy ngay cả khi phép đổi biến lượng giác có thể sử dụng được, chưa chắc nó cho ta cách giải dễ dàng nhất. Trước tiên bạn nên tìm một phương pháp đơn giản hơn.

VÍ DỤ 5 Tìm $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$, với a > 0

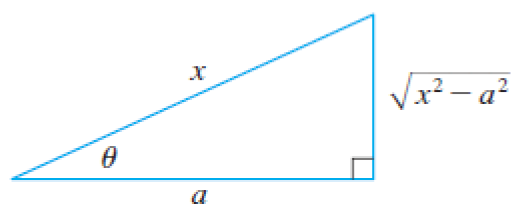
GIẢI Ta đặt x = a sec θ, trong đó 0 < θ < π/2 hay π < θ < 3π/2. Thế thì dx = a sec θ tan θ d θ và

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a\,|\tan\theta| = a\tan\theta$$

Do đó

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$



HÌNH 4

Tam giác trong Hình 4 cho tan $\theta = \sqrt{x^2-a^2}/a$, *do đó ta có*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + C$$

Viết $C_1 = C - \ln a$, *ta có*

$$\boxed{1} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C_1$$

VÍ DỤ 6 Tìm $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{(4x^2+9)^{3/2}}}dx$.

GIẢI Trước tiên ta chú ý là $(4x^2 + 9)^{3/2} = \left(\sqrt{4x^2+9}\right)^3$ do đó sử dụng phép đổi biến lượng giác là thích hợp. Mặc dù $\sqrt{4x^2+9}$ thoạt nhìn không có mặt trong các biểu thức đã liệt kê trong bảng đổi biến lượng giác, nhưng nếu đặt u = 2x, thì nó lại là một trong các phép đổi biến ấy. Khi ta kết hợp điều này với phép đổi biến $x = {}^3/_2 \tan\theta$, với $dx = 3/2 \sec^2\theta\, d\theta$ và

$$\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{9\tan^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Khi x = 0, tan θ = 0 , nên θ = 0; khi $x = 3\sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, nên θ = π/3

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\sin\theta\,d\theta$$

Đến đây ta đổi biến u = cos θ với du = - sin θ dθ. Khi θ = 0, u = 1; khi θ = π/3, u = ½. Do đó

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx = -\frac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}\,du = \frac{3}{16}\int_1^{1/2} (1-u^{-2})\,du$$

$$= \frac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} = \frac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right)-(1+1)\right] = \frac{3}{32}$$

VÍ DỤ 7 Tìm $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

GIẢI Trước tiên ta biến đổi hàm số được tích phân thành một hàm số thuộc dạng có trong bảng đổi biến lượng giác:

$3 - 2x - x^2 = 3 - (x^2 + 2x) = 4 - (x + 1)^2$

Đặt u = x + 1 với du = dx và x = u – 1, do đó

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$

Tiếp theo đặt u = 2 sin θ, cho du = 2 cos θ dθ và $\sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta$, do đó

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{2\sin\theta - 1}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int (2\sin\theta - 1)\,d\theta$$

$$= -2\cos\theta - \theta + C$$

$$= -\sqrt{4-u^2} - \sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= -\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

BÀI TẬP

1-3. Tính tích phân sau dùng phép đổi biến lượng giác. Vẽ tam giác vuông và ghi các độ dài thích hợp.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx; \quad x = 3\sec\theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx; \quad x = 3\sin\theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx; \quad x = 3\tan\theta$

4-30. Tính các tích phân.

4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}\,dt$

6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+100}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}\,dt$

11. $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5-u^2}}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2-1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2-b^2]^{3/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{25-t^2}}\,dt$

21. $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

23. $\displaystyle\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-6t+13}}$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3+4x-4x^2)^{3/2}}\,dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\,dt$

31. Dùng phép đổi biến lượng giác để chứng tỏ rằng

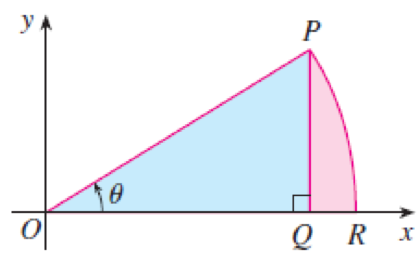
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

32. Tính $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx$

33.Tìm giá trị trung bình của f(x) = $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ trên đoạn [1, 7]

34. Tìm diện tích miền giới hạn bởi hypebol $9x^2 - 4y^2 = 36$ và đường thẳng x = 3.

35. Chứng minh công thức $A = \dfrac{1}{2}r^2\,\theta$ cho diện tích của hình quạt của hình tròn bán kính r và góc ở tâm θ. **[Gợi ý:** Giả sử 0 < θ < π/2 và đặt tâm đường tròn ở gốc toạ độ, phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = r^2$. Thế thì A là tổng diện tích của tam giác POQ và miền PQR trong hình.)



36. Tính tích phân

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-2}}$$

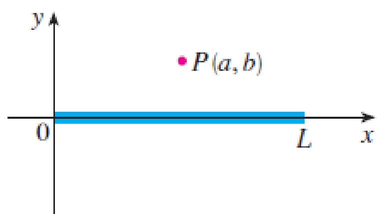
Vẽ đồ thị hàm số được tích phân và tích phân bất định trên cùng một màn hình và kiểm tra xem bạn trả lời hợp lý không.

37. Dùng đồ thị để ước tính nghiệm của phương trình $x^2\sqrt{4-x^2} = 2-x$. Rồi tính xấp xỉ diện tích giới hạn bởi các đường $y = x^2\sqrt{4-x^2}$ và đường y = 2 – x.

38. Một thanh tích điện có độ dài L phát sinh một điện trường tại điểm P(a, b) cho bởi

$$E(P)=\int_{-a}^{L-a}\frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_o(x^2+b^2)^{3/2}}\,dx$$

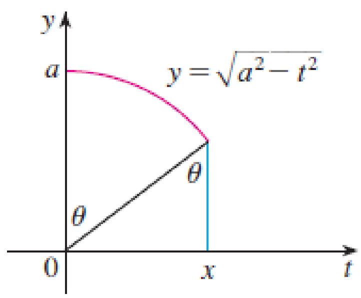
trong đó λ là mật độ điện trên mỗi đơn vị độ dài trên thanh và ε_o là hằng số điện môi (xem hình). Tính tích phân để xác định biểu thức cho điện trường E(P).



39. (a) Dùng phép đổi biến lượng giác để chứng tỏ rằng

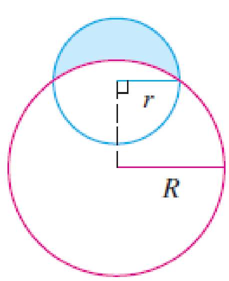
$$\int_a^x\sqrt{a^2-t^2}\,dt=\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}(x/a)+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

(b) Dùng hình dưới để đưa ra một ý nghĩa lượng giác của cả hai số hạng trên vế phải của phương trình ở phần (a).



40. Parabol $y = ½ x^2$ chia đĩa $x^2 + y^2 \le 8$ thành hai phần. Tính diện tích hai phần ấy.

41. Tìm diện tích hình trăng lưỡi liềm giới hạn bởi hai cung tròn bán kính r và R. (Xem hình)



42. Một bể chứa nước có dáng một hình trụ đường kính 10 ft. Nó được đặt sao cho hai đáy của nó thẳng đứng. Biết độ sâu của nước là 7 ft, cho biết nước chiếm bao nhiêu phần trăm dung lượng bể chứa?

43. Một hình xuyến sinh ra khi quay một đường tròn $x^2 + (y – R)^2 = r^2$ quanh trục x. Tìm thể tích giới hạn bởi hình xuyến.

ĐÁP SỐ

1. $\sqrt{x^2-9}/(9x)+C$ **3.** $\frac{1}{3}(x^2-18)\sqrt{x^2+9}+C$

5. $\pi/24+\sqrt{3}/8-\frac{1}{4}$ **7.** $-\sqrt{25-x^2}/(25x)+C$

9. $\ln\left(\sqrt{x^2+16}+x\right)+C$ **11.** $\frac{1}{4}\sin^{-1}(2x)+\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+C$

13. $\frac{1}{6}\sec^{-1}(x/3)-\sqrt{x^2-9}/(2x^2)+C$

15. $\frac{1}{16}\pi a^4$ **17.** $\sqrt{x^2-7}+C$

19. $\ln\left|\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)/x\right|+\sqrt{1+x^2}+C$ **21.** $\frac{9}{500}\pi$

23. $\frac{9}{2}\sin^{-1}((x-2)/3)+\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{5+4x-x^2}+C$

25. $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}\right)+C$

27. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C$

29. $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^2)+\frac{1}{4}x^2\sqrt{1-x^4}+C$

33. $\frac{1}{6}\left(\sqrt{48}-\sec^{-1}7\right)$ **37.** 0.81, 2; 2.10

41. $r\sqrt{R^2-r^2}+\pi r^2/2-R^2\arcsin(r/R)$ **43.** $2\pi^2Rr^2$

BÀI 7. 4. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ HỮU TỶ

Trong bài này ta sẽ học cách tính tích phân một hàm số hữu tỷ bất kỳ (một phân thức với tử vàm mẫu là các đa thức) bằng cách biểu diễn nó dưới dạng tổng các phân thức đơn giản hơn, gọi là các phân thức riêng phần, mà ta biết đã biết cách tích phân. Để minh họa phương pháp này, nhận xét rằng các phân thức như 2/(x – 1) và 1 /(x + 2) khi lấy mẫu thức chung ta được

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Nếu ta đi ngược lại quá trình, ta có thể thấy được cách thức để tích phân hàm số ở vế phải của đẳng thức:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=2\ln|x-1|-\ln|x+2|\ +C$$

Tổng quát, hãy xét một hàm số hữu tỷ

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

trong đó P và Q là các đa thức. Có thể biểu diễn f thành tổng các phân thức đơn giản hơn giả sử bậc của P nhỏ hơn bậc của Q. Những hàm số hữu tỷ như thế gọi là riêng. Nhớ lại rằng nếu

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + . . . + a_1x + a_o$$

với $a_n \neq 0$, thì bậc của P là n và ta ký hiệu deg(P) = n.

Nếu f không là phân thức riêng, tức deg(P) ≥ deg(Q), thì ta phải thực hiện bước sơ khởi là chia P cho Q (phép chia đa thức) để có dư thức R(x) có bậc nhỏ hơn bậc của Q. Ta viết

1 $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$ ức

với S và R là những đa thức.

Như ví dụ sau sẽ minh họa, đôi khi bước sơ khởi này là tất cả việc phải làm.

VÍ DỤ 1 Tìm $\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$

GIẢI Vì bậc của tử lớn hơn của mẫu, trước hết ta phải thực hiện phép chia. Ta có

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}dx=\int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+\ 2\ln|x-1|+C$$

Bước tiếp theo là phân tích ra nhân tử mẫu thức Q(x) càng nhiều càng tốt. Có thể chứng minh rằng bất kỳ đa thức Q nào có thể phân tích thành tích các nhân tử bậc nhất (thuộc dạng ax + b) và các nhân tử bậc hai tối giản (thuộc dạng $ax^2 + bx + c$, trong đó $b^2 - 4ac < 0$). Chẳng hạn , nếu $Q(x) = x^4 - 16$, ta có thể phân tích như sau

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

Bước thứ ba là biểu diễn những hàm số hữu tỷ riêng R(x)/Q(x) của Phương trình 1 thành tổng của những phân thức từng phần có dạng

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{hay} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Một định lý trong đại số khẳng định rằng ta luôn có thể thực hiện được điều này. Ta giải thích chi tiết cho bốn trường hợp xảy ra.

TH 1 * Mẫu thức Q(x) là tích các nhân tử bậc nhất phân biệt

Điều này có nghĩa ta có thể viết

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \ldots (a_kx + b_k)$$

trong đó không có nhân tử nào được lặp lại. Trong trường hợp này định lý phân thức từng phần phát biểu rằng tồn tại các hằng số $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sao cho

2 $$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{A_1}{a_kx+b_k}$$

Những hằng số này có thể được xác định theo cách được trình bày trong ví dụ sau.

VÍ DỤ 2 Tìm $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

GIẢI Vì bậc của tử nhỏ hơn của mẫu, ta không cần phải chia. Ta phân tích mẫu thức ra nhân tử:

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Vì mẫu thức có ba nhân tử bậc nhất phân biệt, nên theo (2) ta có thể phân tích hàm số được tích phân dưới dạng

3 $$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Để xác định A, B, và C, ta nhân hai vế của phương trình này cho tích các mẫu thức, $x(2x - 1)(x + 2)$, được

4 $$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

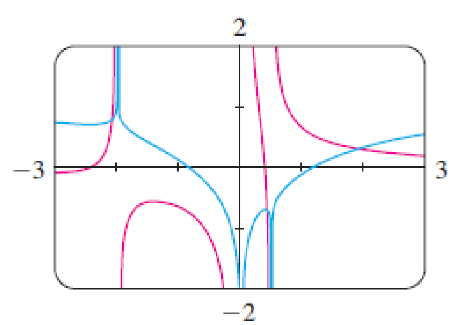
Khai triển vế phải của phương trình 4 và viết nó theo dạng chuẩn của đa thức, ta được

5 $$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Hai đa thức ở hai vế của phương trình 5 là đồng nhất, nên các hệ số tương ứng của chúng phải bằng nhau . Điều này cho ta hệ phương trình sau theo A, B, và C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Giải hệ này, ta được $A = ½$, $B = 1/5$, và $C = -1/10$, và như thế



HÌNH 1 Đây là đồ thị của hàm số được tích phân và nguyên hàm của nó. Bạn có nhận diện được đường nào là đường nào không?

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x-1| - \tfrac{1}{10}\ln|x+2| + K$$

Trong tích phân số hạng chính giữa ta đã thực hiện đổi biến nhẩm u = 2x – 1, với du = 2 dx hay dx = du/2.

GHI CHÚ Ta có thể dùng phương pháp khác để tìm các hệ số A, B, và C trong Ví dụ 2. Vì Phương trình 4 là một đồng nhất thức; nên nó đúng với mọi giá trị của x. Hãy chọn những giá trị của x giúp ta tính được A, B, C nhanh hơn. Cho x = 0 trong Phương trình 4 , thế thì các số hạng thứ hai và thứ ba đều triệt tiêu, và phương trình thành - 2A = - 1 cho ta có ngay A = ½. Tương tự, cho x = ½ ta được 5B/4 = ¼ ⇔ B = 1/5, và cho x = - 2 ta được 10C = - 1 ⇔ C = -1/10.

VÍ DỤ 3 Tìm $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, trong đó a ≠ 0.

GIẢI Phương pháp phân tích cho ta

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

và do đó A(x + a) + B(x – a) = 1

Dùng phương pháp trong phần ghi chú trên đây, ta cho x = a rồi bằng x = - a. để được

$$A = \frac{1}{2a} \qquad B = -\frac{1}{2a}$$

Do đó

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C$$

Như vậy ta có công thức cần nhớ sau:

6 $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

TH 2 * Mẫu thức Q(x) là tích các nhân tử bậc nhất, có lặp lại

Giả sử nhân tử đầu tiên $(a_1x + b_1)$ được lặp lại r lần, nghĩa là, $(a_1x + b_1)^r$ xuất hiện trong phân tích của Q(x). Thế thì thay vì chỉ có một số hạng đơn lẻ $\frac{A_1}{a_1x+b_1}$ trong Phương trình 2, bây giờ ta phải phân tích thành r phân thức từng phần

7 $$\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \ . \ . \ . + \frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$$

Để minh họa, ta có thể viết

$$\frac{x^3-x+1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

Sau đây là một ví dụ đơn giản hơn nhưng trình bày chi tiết hơn.

VÍ DỤ 4 Tìm $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$.

GIẢI Bước đầu tiên là thực hiện phép chia và được

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

Bước tiếp theo là phân tích mẫu thức Q(x) = $x^3 - x^2 - x + 1$. Vì Q(1) = 0, nên x – 1 là một nhân tử và ta viết

$$\begin{aligned} x^3-x^2-x+1 &= (x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)\\ &=(x-1)^2(x+1)\end{aligned}$$

Vì nhân tử x – 1 lặp lại 2 lần nên ta phân tích phân thức dưới dạng:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

Nhân cho mẫu thức chung nhỏ nhất, $(x-1)^2(x+1)$, ta được

$$\boxed{8}\qquad \begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2\\ &=(A+C)x^2+(B-2C)x+(-A+B+C)\end{aligned}$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế, ta được hệ

Cách khác: Cho lần lượt x = 1, x = -1 và x = 0 vào đây, ta sẽ tìm được B, C và cuối cùng A nhanh chóng hơn.

$$\begin{aligned} A \qquad + C &= 0\\ B-2C &= 4\\ -A+B+C &= 0\end{aligned}$$

Giải ra, ta được A = 1, B = 2 , và C = - 1, do đó

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx &= \int\left[x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right]dx\\ &=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+1|+K\\ &=\frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{x-1}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+K\end{aligned}$$

TH 3 * Mẫu thức Q(x) chứa là tích các nhân tử là tam thức tối giản, không lặp lại

Nếu Q(x) chứa nhân tử $ax^2 + bx + c$ với $b^2 - 4ac < 0$, thì,thay vì ta được các phân thức từng phần như trong Phương trình 2 và 7, biểu thức R(x)/Q(x) sẽ chứa một số hạng có dạng

$$\mathbf{9}\qquad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

trong đó A và B là những hằng số phải xác định. Chẳng hạn, hàm số $f(x)=\dfrac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)}$ sẽ được phân tích phân thức từng phần dưới dạng

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Phân thức 9 có thể tích phân bằng cách dùng công thức

10 $$\boxed{\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C}$$

VÍ **DỤ 5** Tìm $\displaystyle\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$.

GIẢI Vì $x^3+4x=x(x^2+4)$ không thể phân tích thêm được nữa, ta viết

$$\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Nhân cho $x(x^2+4)$, ta được

$$\begin{aligned}2x^2-x+4&=A(x^2+4)+(Bx+C)x\\&=(A+B)x^2+Cx+4A\end{aligned}$$

Đồng nhất các hệ số, ta được

$$A+B=2\qquad C=-1\qquad 4A=4$$

Do đó $A=1$, $B=1$, và $C=-1$ và như thế

$$\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx$$

Để tích phân số hạng thứ hai ta tách nó thành hai phần:

$$\int\frac{x-1}{x^2+4}\,dx=\int\frac{x}{x^2+4}\,dx-\int\frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Ta đổi biến $u=x^2+4$ trong tích phân đầu tiên với $du=2x\,dx$.
Ta tính tích phân thứ hai bằng Công thức 10 với $a=2$:

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}\,dx&=\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{x}{x^2+4}\,dx-\int\frac{1}{x^2+4}\,dx\\&=\ln|x|+\tfrac{1}{2}\ln(x^2+4)-\tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2)+K\end{aligned}$$

VÍ DỤ 6 Tính $\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx$

GIẢI Vì bậc của tử không nhỏ hơn bậc của mẫu trước tiên ta phải thực hiện phép chia phân thức và được

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}=1+\frac{x-1}{4x^2-4x+3}$$

Chú ý rằng tam thức $4x^2 - 4x + 3$ tối giản (vô nghiệm) vì $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Điều này có nghĩa nó không thể phân tích ra nhân tử. Để tích phân hàm số đã cho, ta phân tích tam thức ở mẫu như sau:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

Điều này gợi ý ta đổi biến $u = 2x - 1$, với $du = 2\,dx$ và $x = \frac{1}{2}(u + 1)$, do đó

$$`\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx=\int\left(1+\frac{x-1}{4x^2-4x+3}\right)dx$$

$$= x+\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}(u+1)-1}{u^2+2}\,du = x+\frac{1}{4}\int\frac{u-1}{u^2+2}\,du$$

$$= x+\tfrac{1}{4}\int\frac{u}{u^2+2}\,du-\tfrac{1}{4}\int\frac{1}{u^2+2}\,du$$

$$= x+\tfrac{1}{8}\ln(u^2+2)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$= x+\tfrac{1}{8}\ln(4x^2-4x+3)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

GHI CHÚ Ví dụ 6 minh họa phương pháp tổng quát tích phân các phân thức từng phần dạng

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \qquad \text{trong đó } b^2-4ac<0$$

Ta hoàn thành một bình phương ở mẫu thức (tức viết dưới dạng $(px+q)^2+r \quad (r>0)$) rồi đổi biến (u = px + q) để đưa tích phân về dạng

$$\int\frac{Cu+D}{u^2+a^2}\,du = C\int\frac{u}{u^2+a^2}u \;+\; D\int\frac{1}{u^2+a^2}\,du$$

Khi đó tích phân thứ nhất là một lôgarit và tích phân thứ hai tính theo $\tan^{-1}$.

TH 4 * Mẫu thức Q(x) chứa nhân tử là tam thức tối giản và có lặp lại

Nếu Q(x) chứa nhân tử $(ax^2 + bx + c)^r$ với $b^2 - 4ac < 0$, thì, thay vì chỉ có duy nhất một phân thức từng phần như trong Phương trình 9, ta có tổng r phân thức từng phần

11 $$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\;\cdots\;\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

sẽ xuất hiện trong phân tích của R(x)/Q(x). Mỗi số hạng của (11) có thể được tích phân theo cách đã nói trên.

VÍ DỤ 7 Phân tích phân thức sau ra các phân thức từng phần

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

GIẢI

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}+\frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}$$

VÍ DỤ 8 Tích phân $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

GIẢI Phân thức có thể phân tích thành

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Nhân cho $x(x^2+1)^2$ ta được :

$$\begin{aligned}-x^3+2x^2-x+1&=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x\\&=A(x^4+2x^2+1)+B(x^4+x^2)+C(x^3+x)+Dx^2+Ex\\&=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A\end{aligned}$$

Đồng nhất các hệ số, ta có hệ

$$A+B=0\qquad C=-1\qquad 2A+B+D=2\qquad C+E=-1\qquad A=1$$

Giải hệ, ta được: $A=1, B=-1, C=-1, D=1$, and $E=0$. *Do đó*

$$\begin{aligned}\int\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx&=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx\\&=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}\\&=\ln|x|-\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x-\frac{1}{2(x^2+1)}+K\qquad\square\end{aligned}$$

Ta cần chú ý là đôi khi phân thức từng phần có thể tránh được khi tích phân hàm số hữu tỷ. Chẳng hạn, mặc dù tích phân

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\ dx$$

có thể tính được bằng phương pháp của TH III, nhưng tính sẽ dễ dàng hơn nếu ta nhận xét được với u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x thì du = 3(x^2 + 1) dx và do đó

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x| + C$$

Cũng vậy tích phân $\int \frac{2x^2-4x+5}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx$, dù có thể tính được như trong TH III, sẽ tính dễ dàng hơn nếu ta nhận xét:

$$\int \frac{2x^2-4x+5}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{(x-2)^2+x^2+1}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \ \ldots$$

PHÉP ĐỔI BIẾN HỮU TỶ HÓA

Vài hàm số không hữu tỷ có thể được biến thành hàm số hữu tỷ qua một phép đổi biến thích hợp. Đặc biệt, khi hàm số được tích phân chứa biểu thức có dạng $\sqrt[n]{g(x)}$, thế thì đổi biến u = $\sqrt[n]{g(x)}$ có thể hiệu quả. Những tình huống khác sẽ xuất hiện trong phần bài tập.

VÍ DỤ 9 Tính $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$

GIẢI Đặt u = $\sqrt{x+4}$. Ta có u^2 = x + 4, suy ra x = u^2 – 4 và dx = 2u du. Do đó

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2-4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right) du$$

Ta có thể tính tích phân này hoặc bằng cách phân tích $u^2 - 4 = (u-2)(u+2)$ rồi phân tích ra phân thức từng phần hoặc dùng Công thức 6 với a = 2:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2-4}$$

$$= 2u + 8\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

BÀI TẬP

1-6. Phân tích các hàm số dưới dạng tổng các phân thức từng phần như trong Ví dụ 7. Không cần xác định các hệ số.

1. (a) $\dfrac{2x}{(x+3)(3x+1)}$ (b) $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$

2. (a) $\dfrac{x}{x^2+x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2+x+2}$

3. (a) $\dfrac{x^4+1}{x^5+4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2-9)^2}$

4. (a) $\dfrac{x^3}{x^2+4x+3}$ (b) $\dfrac{2x+1}{(x+1)^3(x^2+4)^2}$

5. (a) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$ (b) $\dfrac{t^4+t^2+1}{(t^2+1)(t^2+4)^2}$

6. (a) $\dfrac{x^4}{(x^3+x)(x^2-x+3)}$ (b) $\dfrac{1}{x^6-x^3}$

7-38. Tính các tích phân sau.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$ **10.** $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$ **16.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$ **18.** $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$ **36.** $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

39-50. Dùng phép đổi biến để biểu diễn hàm số được tích phân thành hàm số hữu tỷ rồi tính tích phân ấy.

39. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

41. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$ **42.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$ **44.** $\displaystyle\int_{1/3}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Hint:* Substitute $u=\sqrt[6]{x}$.]

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t+3\tan t+2}\,dt$

50. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}\,dx$

51-52. Dùng tích phân từng phần, cùng với các kỹ thuật của bài này, để tính tích phân

51. $\displaystyle\int \ln(x^2-x-2)\,dx$ **52.** $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx$

53. Dùng đồ thị của $f(x) = 1/(x^2 - 2x - 3)$ để xác định xem là dương hay âm. Dùng đồ thị để ước tính thô giá trị của tích phân và sau đó dùng phân thức từng phần để tìm giá trị đúng của tích phân.

54. Vẽ đồ thị của $y = 1/(x^3 - 2x^2)$ và một nguyên hàm của nó trên cùng màn hình.

55-56. Tính tích phân bằng cách dùng Công thức 6.

55. $\int \dfrac{dx}{x^2 - 2x}$ **56.** $\int \dfrac{2x+1}{4x^2 + 12x - 7}\, dx$

57. Nhà toán học Đức Karl Weierstrass (1815-1897) nhận xét rằng phép đổi biến t = tan(x/2) sẽ biến đổi bất kỳ hàm số hữu tỷ theo sin x và cos x thành một hàm số hữu tỷ bình thường theo t.

(a) Nếu t = tan(x/2), - π < x < π, vẽ tam giác vuông hay dùng đẳng thức lượng giác để chứng tỏ rằng

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Chứng tỏ rằng

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Chứng tỏ rằng

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

58-61. Dùng phép đổi biến trong Bài tập 57 để biến đổi hàm số được tích phân về thành hàm số hữu tỷ theo t rồi tích phân nó.

58. $\int \dfrac{dx}{3 - 5\sin x}$ **59.** $\int \dfrac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$

60. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \dfrac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$ **61.** $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin 2x}{2 + \cos x}\, dx$

62-63. Tìm diện tích của miền bên dưới đồ thị cho trước từ 1 đến 2.

62. $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$ **63.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - x^2}$

64. Tìm thể tích của khối sinh ra khi quay miền bên dưới đồ thị y = 1/(x^2 + 3x + 2) từ x = 0 đến x = 1 quanh

(a) trục x (b) trục y

65. Một phương pháp để làm chậm sự tăng trưởng của dân số côn trùng mà không cần phun thuốc trừ sâu là đưa vào dân số ấy một số con đực vô sinh, những con này sẽ giao phối với các con cái nhưng không sinh con. Nếu P biểu thị số con cái trong một dân số và S biểu thị số con đực vô sinh đưa vào mỗi thế hệ, và r là tốc độ tăng trưởng tự nhiên của dân số, thế thì số con cái liên hệ với thời gian t bằng công thức

$$t = \int \frac{P+S}{P[(r-1)P - S]}\, dP$$

Giả sử một dân số côn trùng có 10,000 con cái tăng trưởng với tốc độ r = 0.10 và 900 con đực vô sinh được đưa vào. Tính tích phân để cho ta phương trình liên hệ số con cái với thời gian. (Chú ý là phương trình sinh ra không thể giải được tường minh cho P.)

66. Phân tích x^4 + 1 thành hiệu hai bình phương, từ đó phân tích ra nhân tử. Dùng kết quả này để tính tích phân $\int \dfrac{dx}{x^4+1}$.

67. (a) Dùng máy tính có trang bị hệ đại số để tìm các phân thức từng phần của hàm số

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Dùng phần (a) để tìm $\int f(x)\, dx$ (bằng tay) và so sánh với kết quả dùng bằng máy tính CAS để tích phân trực tiếp f. Cho ý kiến về sự khập khiễng của hai kết quả.

68. (a) (a) Dùng máy tính có trang bị hệ đại số để tìm các phân thức từng phần của hàm số

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Dùng phần (a) để tìm $\int f(x)\, dx$ và vẽ đồ thị f và tích phân bất định của nó trên cùng màn hình.

(c) Dùng đồ thị của f để khám phá những đặc điểm chính của đồ thị của $\int f(x)\, dx$.

69. Giả sử F, G, và Q là các đa thức và

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

với mọi x trừ khi Q(x) = 0. Chứng tỏ rằng F(x) = G(x) với mọi x. [Gợi ý: Dùng tính liên tục.]

70. Nếu f là một tam thức sao cho f(0) = 1 và

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}\, dx$$

là một hàm số hữu tỷ, tìm giá trị của f ’(0).

ĐÁP SỐ

1. (a) $\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{3x+1}$ (b) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$

3. (a) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{Dx+E}{x^2+4}$

(b) $\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{(x+3)^2}+\dfrac{C}{x-3}+\dfrac{D}{(x-3)^2}$

5. (a) $1+\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

(b) $\dfrac{At+B}{t^2+1}+\dfrac{Ct+D}{t^2+4}+\dfrac{Et+F}{(t^2+4)^2}$

7. $x+6\ln|x-6|+C$

9. $2\ln|x+5|-\ln|x-2|+C$ **11.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

13. $a\ln|x-b|+C$ **15.** $\frac{7}{6}+\ln\frac{2}{3}$

17. $\frac{27}{5}\ln 2-\frac{9}{5}\ln 3$ (or $\frac{9}{5}\ln\frac{8}{3}$)

19. $-\dfrac{1}{36}\ln|x+5|+\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{36}\ln|x-1|+C$

21. $\frac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)+2\tan^{-1}(x/2)+C$

23. $2\ln|x|+(1/x)+3\ln|x+2|+C$

25. $\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\tan^{-1}(x/3)+C$

27. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+(1/\sqrt{2})\tan^{-1}(x/\sqrt{2})+C$

29. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+C$

31. $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

33. $\frac{1}{4}\ln\frac{8}{3}$ **35.** $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{32}\ln(x^2+4)+\dfrac{1}{8(x^2+4)}+C$

37. $\frac{7}{8}\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{3x-8}{4(x^2-4x+6)}+C$

39. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$

41. $2+\ln\frac{25}{9}$ **43.** $\frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3}-\frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3}+C$

45. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$

47. $\ln\left[\dfrac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right]+C$

49. $\ln|\tan t+1|-\ln|\tan t+2|+C$

51. $(x-\frac{1}{2})\ln(x^2-x+2)-2x+\sqrt{7}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)+C$

53. $-\frac{1}{2}\ln 3\approx -0.55$

55. $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C$ **59.** $\frac{1}{5}\ln\left|\dfrac{2\tan(x/2)-1}{\tan(x/2)+2}\right|+C$

61. $4\ln\frac{2}{3}+2$ **63.** $-1+\frac{11}{3}\ln 2$

65. $t=-\ln P-\frac{1}{9}\ln(0.9P+900)+C$, where $C\approx 10.23$

67. (a) $\dfrac{24{,}110}{4879}\dfrac{1}{5x+2}-\dfrac{668}{323}\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{9438}{80{,}155}\dfrac{1}{3x-7}+\dfrac{1}{260{,}015}\dfrac{22{,}098x+48{,}935}{x^2+x+5}$

(b) $\dfrac{4822}{4879}\ln|5x+2|-\dfrac{334}{323}\ln|2x+1|-\dfrac{3146}{80{,}155}\ln|3x-7|+\dfrac{11{,}049}{260{,}015}\ln(x^2+x+5)+\dfrac{75{,}772}{260{,}015\sqrt{19}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{19}}+C$

The CAS omits the absolute value signs and the constant of integration.

BÀI 7. 5. THUẬT TOÁN TÍNH TÍCH PHÂN

Như đã thấy, tính tích phân thì thử thách hơn tính đạo hàm. Khi tìm đạo hàm một hàm số, ta biết ngay ta cần công thức nào để bắt đầu áp dụng. Nhưng đối với tích phân thì không thế, đôi khi ta không biết phải bắt đầu từ đâu.

Từ trước đến giờ các kỹ năng cá nhân riêng biệt được đề cập trong mỗi bài. Chẳng hạn ta thường dùng phép đỏi biến trong các bài tập 5.5, tích phân từng phần trong các bài tập 7.1, và phân thức từng phần trong các bài tập 7.4. Nhưng trong bài này ta trình bày một tập hợp các tích phân đủ loại chọn lựa ngẩu nhiên và thách đố chủ yếu là nhận diện được kỹ thuật nào, công thức nào sẽ được sử dụng. Không có quy tắc nhanh chóng hoặc rõ ràng giúp ta có ngay phương pháp để áp dụng cho tình huống đang gặp, và chúng tôi chỉ đưa ra một vài lời khuyên bạn có thể thấy là hữu ích.

Điều kiện tiên quyết có thể giúp bạn chọn lựa thuật toán nào là bạn phải nắm vững các công thức tích phân cơ bản. Trong bảng sau chúng tôi đã tập họp các tích phân từ các phần liệt kê trước đây cùng với một vào công thức bổ sung đã được giới thiệu trong chương này. Đa phần các công thức này cần nên thuộc lòng, chỉ riêng công thức có đánh sao bạn không cần nhớ cũng được. Công thức 19 bạn chỉ việc nhớ phân tích ra các phân thức từng phần, còn công thức 20 chỉ cần đổi biến lượng giác.

BẢNG CÔNG THỨC TÍCH PHÂN *(Hằng số tích phân đã bị loại bỏ)*

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$ **2.** $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

3. $\int e^x\,dx = e^x$ **4.** $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x$ **6.** $\int \cos x\,dx = \sin x$

7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$ **8.** $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$

9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$ **10.** $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x$

11. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x|$ **12.** $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x|$

13. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$ **14.** $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|$

15. $\int \sinh x\,dx = \cosh x$ **16.** $\int \cosh x\,dx = \sinh x$

17. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ **18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

***19.** $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$ ***20.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

Một khi bạn đã thuộc bảng tích phân này mà vẫn không tìm ra cách giải thì hãy theo bốn bước sau:

1. Đơn giản hàm số được tích phân nếu có thể Đôi khi dùng các phép tính đại số hoặc lượng giác có thể đơn giản hàm số được tích phân và phương pháp tích phân sẽ hiện ra sau đó. Sau đây là vài ví dụ:

$$\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})\,dx = \int (\sqrt{x}+x)\,dx$$

$$\int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \sin 2\theta\,d\theta$$

$$\int (\sin x+\cos x)^2\,dx = \int (\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)\,dx$$

$$= \int (1+2\sin x\cos x)\,dx$$

2. Tìm một phép đổi biến thấy ngay Cố tìm một hàm số u = g(x) có mặt trong hàm số được tích phân mà vi phân du = g ’(x) dx cũng có mặt trong đó, nhân chia một hằng số tỷ lệ. Chẳng hạn, trong tích phân

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

ta chú ý rằng nếu đặt u = x^2 – 1 (có mặt ở mẫu) thì du = 2x dx (có mặt ở tử với hằng số tỷ lệ 2). Nhờ vậy ta không cần thức hiện việc phân tích ra phân thức từng phần.

3. Phân loại hàm số được tích phân theo dạng của nó Nếu bước 1 và 2 không đưa ta đến đâu, thì ta nhìn vào dạng của hàm số .

(a) Hàm số lượng giác. Nếu f(x) là tích các lũy thừa của sin xvà cos x, hay của tan x và sec x,hay của cot x và csc x, thì ta dùng các phéo đổi biến đã được giới thiệu trong Bài 7.2.

(b) Hàm số hữu tỷ. Nếu f là hàm số hữu tỷ, ta sử dụng phương pháp trình bày trong Bài 7.4 liên quan đến phân thức từng phần.

(c) Tích phân từng phần. Nếu f(x) là tích của một đa thức với một hàm số siêu việt (như hàm số lượng giác, mũ, hay lôga), thì ta thử dùng phép tích phân từng phần, chọn u và dv theo gợi ý của Bài 7.1. Nếu bạn nhìn vào các hàm số trong phần bài tập Bài 7.1., bạn sẽ thấy phần lớn bài tập ở đó đều thuộc loại vừa mô tả.

(d) Vô tỷ. Những loại phép đổi biến đặc biệt được giới thiệu khi có một số dạng vô tỷ quen thuộc xuất hiện.

(i) Nếu $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ xuất hiện, ta dùng các phép đổi biến lượng giác theo bảng chỉ dẫn trong Bài 7.3.

(ii) Nếu $\sqrt[n]{ax+b}$ xuất hiện, ta hữu tỷ hóa bằng biến u = $\sqrt[n]{ax+b}$. Tổng quát hơn, đôi khi biến $\sqrt[n]{g(x)}$ cũng hiệu quả.

4. Thử lần nữa Nếu ba bước đầu tiên vẫn không cho ta lời giải, nhớ là về cơ bản chỉ có hai phương pháp tích phân, đổi biến và từng phần.

(a) Thử phép đổi biến. Ngay cho dù không thấy phép đổi biến nào là hiển nhiên (Bước 2), nhờ hứng khởi cộng với sự điêu luyện (đôi khi do tuyệt vọng cũng có) có thể nảy sinh bất ngờ phép đổi biến thích hợp.

(b) Từng phần. Mặc dù tích phân từng phần được sử dụng phần lớn ở những dạng đã giới thiệu trong Bước 3(c) , đôi khi nó cũng hiệu quả cho những hàm số đơn lẻ. Nhìn lại Bài 7.1, ta thấy nó có kết quả với hàm số $\tan^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, và ln x, và đây toàn là hàm số ngược.

(c) "Táy máy" hàm số được tích phân. Những biến đổi đại số (có thể hữu tỷ hóa mẫu số hay dùng đẳng thức lượng giác) có thể hữu ích trong quá trình biến đổi nó về dạng đơn giản hơn. Những "táy máy" này có thể tính tế hơn trong Bước 1, và đòi hỏi một sự điêu luyện nhất định, chỉ được nhuần nhuyễn qua rèn luyện. Đây là một ví dụ:

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$$

Hoặc
$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2(x/2))} = \frac{1}{2}\int \csc^2(x/2)\,dx = \cot(x/2) + C$$

(d) Liên hệ bài toán đang giải với bài toán đã gặp. Khi bạn tích lũy được kinh nghiệm trong phép tính tích phân, bạn có thể dùng phương pháp tương tự đã gặp cho bài toán mới. Hoặc bạn có thể biểu diễn tích phân được cho theo tích phân đã gặp trước đây. Chẳng hạn, $\int \tan^2 x \sec x\,dx$ là một tích phân khó, nhưng nếu ta dùng đẳng thức $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, ta có thể viết

$$\int \tan^2 x \sec x\,dx = \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$$

Và nếu $\int \sec^3 x\,dx$ đã được tính trước đây (xem Ví dụ 8 Bài 7.2) thì phép tính này có thể sử dụng trong bài toán hiện thời.

(e) Dùng vài phương pháp kết hợp. Đôi khi cần đến hai hay ba phương pháp phối hợp mới công phá được tích phân đã cho. Phép tính có thể liên hệ đến vài phép đổi biến liên tiếp thuộc loại khác nhau, hay có thể phối hợp đổi biến và tích phân từng phần.

Trong các ví dụ sau chúng tôi chỉ đưa ra một phương pháp công phá nhưng không giải chi tiết.

VÍ DỤ 1 $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\,dx$

Trong Bước 1 ta viết lại tích phân:

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$$

Tích phân bây giờ có dạng $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ với m lẻ, nên ta có thể theo lời khuyên của Bài 7.2.

Còn nếu trong Bước 1 ta đã viết

$$\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\frac{1}{\cos^3}\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}$$

thì ta có thể đã tiếp tục như dưới đây với phép đổi biến u = cos x:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^6 x}\sin x\,dx = \int \frac{1-u^2}{u^6}(-du)$$

$$= \int \frac{u^2-1}{u^6}\,du = \int (u^{-4}-u^{-6})\,du$$

VÍ DỤ 2 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

Theo (ii) trong Bước 3(d), ta đặt u = $\sqrt{x}$, thì x = u^2 và dx = 2udu và

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int ue^u\,du$$

Tích phân bây giờ là tích của u (đa thức) với hàm số siêu việt e^u vì thế tiếp theo ta tpha từng phần.

VÍ DỤ 3 Tính $\int \frac{x^5+1}{x^3-3x^2-10x}\,dx$

Không có phép đơn giản đại số hay phép đổi biến nào hiển nhiên, nên Bước 1 và 2 không áp dụng được. Ở đây ta gặp một hàm số hữu tỷ nên áp dụng Bài học 7.4, nhớ rằng bước đầu tiên là thực hiện phép chia vì bậc của tử lớn hơn của mẫu.

VÍ DỤ 4 Tính $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Ở đây Bước 2 là tât cả những gì ta cần. Ta đặt u = ln vì vi phân là du = dx/x cũng có mặt trong hàm số.

VÍ DỤ 5 Tính $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Mặc dù phép đổi biến hữu tỷ hóa $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

có tác dụng ở đây [(ii) trong Bước 3(d)], nhưng sẽ dẫn đến một hàm số hữu tỷ phức tạp. Một phương pháp dễ dàng hơn là vận dụng biến đổi đại số một chút [hoặc Bước 1 hay Bước 4(c)]. Nhân tử và mẫu cho $\sqrt{1-x}$, ta có

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$$

TA CÓ THỂ TÍCH PHÂN MỌI HÀM SỐ LIÊN TỤC KHÔNG?

Một câu hỏi bống bật ra: Liệu thuật toán tích phân của nó có cho phép ta tìm được tích phân của mọi hàm số liên tục hay không? Chẳng hạn, ta có thể dùng nó để tích phân $\int e^{x^2}\,dx$ được không? Câu trả lời là Không, ít nhất không theo các hàm số mà ta quen thuộc.

Các hàm số mà ta nói tới trong sách này gọi là **hàm số sơ cấp**. Đây là những hàm số đa thức, hữu tỷ, lũy thừa, mũ, lôgarit, lượng giác, lượng giác ngược, và tât cả hàm số có thể suy từ các hàm số này qua năm phép tính cộng, trừ, nhân, chia, và hợp. Chẳng hạn, hàm số

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+2x-1}}+\ln(\cos x)-xe^{\sin 2x}$$

là một hàm số số cấp. Nếu f là một hàm số sơ cấp, thì f ‘ là một hàm số sơ cấp nhưng $\int f(x)dx$ không nhất thiết là hàm số sơ cấp. Xét f(x) = e^{x^2}. Vì f liên tục nên tích phân của nó tồn tại nhưng nếu ta định nghĩa hàm số F bằng

$$F(x)=\int e^{x^2}\,dx$$

thì theo Phần 1 của Định Lý Nền Tảng của Giải Tích ta có

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Do đó, f(x) = e^{x^2} có một nguyên hàm F, nhưng người ta đã chứng minh được rằng F không phải là một hàm số sô cấp. Điều này có nghĩa dù cố gắng thế nào, ta cũng không bao giờ có thể biểu diễn $\int e^{x^2}\,dx$ theo các hàm số mà ta đã biết. Tuy nhiên, ta có thể biểu diễn $\int e^{x^2}\,dx$ dưới dạng một chuỗi vô hạn được. Ta có thể phát biểu tương tự đối với các tích phân sau

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \sin(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Thật ra, đa số các hàm số sơ cấp không có nguyên hàm nguyên hàm sơ cấp. Tuy nhiên bạn an tâm vì các tích phân trong những bài tập sau đều là các hàm số sơ cấp.

BÀI TẬP

1-80. Tính các tích phân sau.

1. $\int \cos x\,(1+\sin^2 x)\,dx$

2. $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx$

3. $\int \dfrac{\sin x+\sec x}{\tan x}\,dx$

4. $\int \tan^3\theta\,d\theta$

5. $\int_0^2 \dfrac{2t}{(t-3)^2}\,dt$

6. $\int \dfrac{x}{\sqrt{3-x^4}}\,dx$

7. $\int_{-1}^{1} \dfrac{e^{\arctan y}}{1+y^2}\,dy$

8. $\int x\csc x\cot x\,dx$

9. $\int_1^3 r^4\ln r\,dr$

10. $\int_0^4 \dfrac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx$

11. $\int \dfrac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$

12. $\int \dfrac{x}{x^4+x^2+1}\,dx$

13. $\int \sin^3\theta\cos^5\theta\,d\theta$

14. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

15. $\int \dfrac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

17. $\int x\sin^2 x\,dx$

18. $\int \dfrac{e^{2t}}{1+e^{4t}}\,dt$

19. $\int e^{x+e^x}\,dx$

20. $\int e^2\,dx$

21. $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

22. $\int \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx$

23. $\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8\,dx$

24. $\int \ln(x^2-1)\,dx$

25. $\int \dfrac{3x^2-2}{x^2-2x-8}\,dx$

26. $\int \dfrac{3x^2-2}{x^3-2x-8}\,dx$

27. $\int \dfrac{dx}{1+e^x}$

28. $\int \sin\sqrt{at}\,dt$

29. $\int_0^5 \dfrac{3w-1}{w+2}\,dw$

30. $\int_{-2}^{2} |x^2-4x|\,dx$

31. $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,dx$

32. $\int \dfrac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}\,dx$

33. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{1+4\cot x}{4-\cot x}\,dx$

35. $\int_{-1}^{1} x^8\sin x\,dx$

36. $\int \sin 4x\cos 3x\,dx$

37. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\tan^2\theta\,d\theta$

38. $\int_0^{\pi/4} \tan^5\theta\sec^3\theta\,d\theta$

39. $\int \dfrac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta-\sec\theta}\,d\theta$

40. $\int \dfrac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}\,dy$

41. $\int \theta\tan^2\theta\,d\theta$

42. $\int \dfrac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

43. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

44. $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

45. $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

46. $\int \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx$

47. $\int x^3(x-1)^{-4}\,dx$

48. $\int \dfrac{x}{x^4-a^4}\,dx$

49. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

51. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

52. $\int \dfrac{dx}{x(x^4+1)}$

53. $\int x^2\sinh mx\,dx$

54. $\int (x+\sin x)^2\,dx$

55. $\int \dfrac{dx}{x+x\sqrt{x}}$

56. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

57. $\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx$

58. $\int \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

59. $\int \cos x\cos^3(\sin x)\,dx$

60. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$

61. $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

62. $\int \dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$

63. $\int \dfrac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}\,dx$

64. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}\,dx$

65. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

66. $\int_2^3 \dfrac{u^3+1}{u^3-u^2}\,du$

67. $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$

68. $\int \dfrac{1}{1+2e^x-e^{-x}}\,dx$

69. $\int \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

70. $\int \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

71. $\int \dfrac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

72. $\int \dfrac{4^x+10^x}{2^x}\,dx$

73. $\int \dfrac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$

74. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^4}$

75. $\int \dfrac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

76. $\int (x^2-bx)\sin 2x\,dx$

77. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$

78. $\int \dfrac{\sec x\cos 2x}{\sin x+\sec x}\,dx$

79. $\int x\sin^2 x\cos x\,dx$

80. $\int \dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$

81. Hàm số y = e^{x^2} và y = $x^2 e^{x^2}$ không có nguyên hàm sơ cấp, nhưng y = $(2x^2 + 1)\ e^{x^2}$ lại có. Tìm nguyên hàm ấy.

ĐÁP SỐ

1. $\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

3. $\sin x + \ln|\csc x - \cot x| + C$

5. $4 - \ln 9$ **7.** $e^{\pi/4} - e^{-\pi/4}$

9. $\frac{243}{5}\ln 3 - \frac{242}{25}$ **11.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + \tan^{-1}(x - 2) + C$

13. $\frac{1}{8}\cos^8\theta - \frac{1}{6}\cos^6\theta + C$ $\left(\text{or } \frac{1}{4}\sin^4\theta - \frac{1}{3}\sin^6\theta + \frac{1}{8}\sin^8\theta + C\right)$

15. $x/\sqrt{1 - x^2} + C$

17. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\sin x\cos x + \frac{1}{4}\sin^2 x + C$
$\left(\text{or } \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C\right)$

19. $e^{e^x} + C$ **21.** $(x + 1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

23. $\frac{4097}{45}$ **25.** $3x + \frac{23}{3}\ln|x - 4| - \frac{5}{3}\ln|x + 2| + C$

27. $x - \ln(1 + e^x) + C$ **29.** $15 + 7\ln\frac{2}{7}$

31. $\sin^{-1}x - \sqrt{1 - x^2} + C$

33. $2\sin^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + \frac{x + 1}{2}\sqrt{3 - 2x - x^2} + C$

35. 0 **37.** $\pi/8 - \frac{1}{4}$ **39.** $\ln|\sec\theta - 1| - \ln|\sec\theta| + C$

41. $\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \ln|\sec\theta| + C$ **43.** $\frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C$

45. $-\frac{1}{3}(x^3 + 1)e^{-x^3} + C$

47. $\ln|x - 1| - 3(x - 1)^{-1} - \frac{3}{2}(x - 1)^{-2} - \frac{1}{3}(x - 1)^{-3} + C$

49. $\ln\left|\frac{\sqrt{4x + 1} - 1}{\sqrt{4x + 1} + 1}\right| + C$ **51.** $-\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2 + 1} + 1}{2x}\right| + C$

53. $\frac{1}{m}x^2\cosh(mx) - \frac{2}{m^2}x\sinh(mx) + \frac{2}{m^3}\cosh(mx) + C$

55. $2\ln\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C$

57. $\frac{3}{7}(x + c)^{7/3} - \frac{3}{4}c(x + c)^{4/3} + C$

59. $\sin(\sin x) - \frac{1}{3}\sin^3(\sin x) + C$ **61.** $2(x - 2\sqrt{x} + 2)e^{\sqrt{x}} + C$

63. $-\tan^{-1}(\cos^2 x) + C$ **65.** $\frac{2}{3}[(x + 1)^{3/2} - x^{3/2}] + C$

67. $\sqrt{2} - 2/\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + \sqrt{2})$

69. $e^x - \ln(1 + e^x) + C$

71. $-\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$

73. $\frac{1}{8}\ln|x - 2| - \frac{1}{16}\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{8}\tan^{-1}(x/2) + C$

75. $2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} + 2\ln\frac{\sqrt{1 + e^x} + 1}{\sqrt{1 + e^x} - 1} + C$

77. $\frac{2}{3}\tan^{-1}(x^{3/2}) + C$

79. $\frac{1}{3}x\sin^3 x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{9}\cos^3 x + C$ **81.** $xe^{x^2} + C$