

Bài tập chương 1 - Giải tích

Vũ Hữu Nhựt – PHENIKAA University

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1 Đạo hàm - vi phân

Bài 1.1. Tính $f'(1)$, $f''(2)$ và $f'''(3)$ của $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

Bài 1.2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$a. y = (x+1)\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x+3},$$

$$c. y = \sin(\cos^2(5-3x)),$$

$$e. y = x^{\cos x},$$

$$g. y = \log_x(\cot x),$$

$$b. y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(3-x)^3},$$

$$d. y = \arctan^2(1 - \ln x),$$

$$f. y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2),$$

$$h. y = \operatorname{arccot} \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}.$$

Bài 1.3. Tính đạo hàm cấp cao tương ứng của

$$(a) y = e^{x \sin x}. \text{ Tính } y''(0).$$

$$(b) y = \frac{x^2}{1-x^2}. \text{ Tính } y^{(4)}.$$

$$(c) y = \ln(x^2 - 3x + 2). \text{ Tính } y^{(5)}(4).$$

$$(d) y = \frac{1}{2x+1}. \text{ Tính } y^{(n)}.$$

$$(e) y = x^2 e^x. \text{ Tính } y^{(10)}(0).$$

$$(f) y = \sin(2x). \text{ Tính } y^{(100)}.$$

$$(g) y = \ln \frac{1+2x}{1-2x}. \text{ Tính } y^{(100)}.$$

Bài 1.4. Với các hàm số dưới đây, vẽ phác đồ thị của chúng và sử dụng định nghĩa của đạo hàm để chứng minh các hàm số này **không** khả vi tại $x = 1$.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x-1 & x > 1. \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 1, \\ 3x & x > 1. \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & x \leq 1, \\ x & x > 1. \end{cases}$$

Bài 1.5. Tìm giá trị của a và b để các hàm số dưới đây khả vi trên toàn trục số.

$$(a) f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0, \\ x^2 + ax + b & x > 0. \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 3, \\ x^2 & x \geq 3. \end{cases}$$

Bài 1.6. Với các hàm số dưới đây, chứng tỏ rằng không tồn tại số c thỏa mãn $f(1) - f(-1) = f'(c)(2)$. Giải thích vì sao Định lý Lagrange không áp dụng được trên đoạn $[-1, 1]$.

$$(a) f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|.$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

(c) $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Bài 1.7. Tính các giới hạn sau đây.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}$.

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/\cos x}$.

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$.

Bài 1.8. Tìm số trung gian c trong Định lý Rolle của hàm số $f(x) = (x+1)(x-2)(x+5)$ trên đoạn $[-5, 2]$.

Bài 1.9. Tìm số trung gian c trong Định lý Lagrange với $f(x) = x^3 - 5x$ và $a = 0, b = 2$.

Bài 1.10. Chứng minh rằng:

(a) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

(b) $|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|$.

(c) $|\arcsin x - \arcsin y| \geq |x - y|, \quad x, y \in (-1, 1)$.

2 Khai triển Taylor

Bài 2.1. Khai triển hàm số $f(x) = x^5 + 2x^3 - 7$ theo lũy thừa của $(x - 3)$.

Bài 2.2. Khai triển Taylor hàm số $f(x) = \frac{1}{x+2}$ tới cấp 5 tại $x = 1$.

Bài 2.3. Khai triển Maclaurin hàm số $f(x) = x^2 e^x$ tới cấp 4.

Bài 2.4. Khai triển hàm số $y = \ln(1 + 2x)$ theo lũy thừa nguyên dương của x tới x^4 .

Bài 2.5. Khai triển hàm số $y = \sin^2(3x)$ theo lũy thừa nguyên dương của $x - \frac{\pi}{2}$ tới $(x - \frac{\pi}{2})^3$.

Bài 2.6. Tìm bốn số hạng đầu trong khai triển Taylor của $y = x^{10} - 4x^5 + 4x^2 - 7x$ tại $x = 2$. Sử dụng khai triển đó để tính gần đúng $y(2,05)$ và $y(1,97)$.

3 Chuỗi số. Chuỗi Taylor. Chuỗi Maclaurin

Bài 3.1. Tính tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Bài 3.2. Tính tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}.$$

Bài 3.3. Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{1-x}$ thành chuỗi lũy thừa của x (hướng dẫn: khai triển Maclaurin).

Bài 3.4. Khai triển hàm số $f(x) = \ln(1 + 3x)$ thành chuỗi lũy thừa của x .

Bài 3.5. Khai triển hàm số $f(x) = \sin(2x)$ thành chuỗi lũy thừa của x .

4 Hàm nhiều biến

Bài 4.1. Tính các đạo hàm riêng và vi phân toàn phần (cấp 1, cấp 2) của hàm số $u(x, y) = x^3 \sin^2 y$.

Bài 4.2. Tính các đạo hàm riêng và vi phân toàn phần (cấp 1, cấp 2) của hàm số $u(x, y) = (x + 1) \arctan \frac{x}{y+1}$.

Bài 4.3. Tính các đạo hàm riêng và vi phân toàn phần (cấp 1, cấp 2) của hàm số $u(x, y, z) = x^3 e^{yz^2}$.

Bài 4.4. Tính các đạo hàm riêng và vi phân toàn phần (cấp 1, cấp 2) của hàm số $u(x, y, z) = \frac{2^z}{x + \cot y}$.

Bài 4.5. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau

$$f(x, y) = \ln \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{và} \quad g(x, y, z) = \arccos \frac{z}{x + y}.$$

Bài 4.6. Cho $u = \ln(x^2 + y^2)$. Tính $\Delta = u''_{xx} + u''_{yy}$.

Bài 4.7. Tìm hàm số $u = u(x, y)$ biết $u'_x = 1$, $u'_y = y$ và $u(0, 0) = 0$.

Bài 4.8. Tìm hàm số $u = u(x, y)$ biết $u'_x = e^y$, $u'_y = xe^y$.

Bài 4.9. Tìm hàm số $u = u(x, y)$ biết $u'_x = 2x \sin(x^2 + y^2)$, $u'_y = 2y \sin(x^2 + y^2) + 1$ và $u(0, \sqrt{\pi}) = \pi$.

Bài 4.10. Cho hàm số $z = z(x, y)$ thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và 2 của z .

Bài 4.11. Cho hàm số $z = z(x, y)$ thỏa mãn

$$x + y + z = e^z.$$

Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và 2 của z .

Bài 5.1. Cho hàm số $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$. Tính các đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y)$.

Từ đó, hãy tính gần đúng giá trị của biểu thức

$$A = \arctan \frac{1,02}{0,99}.$$

Bài 5.2. Tính vi phân toàn phần của hàm số $u = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$. Từ đó, hãy tính gần đúng giá trị của biểu thức

$$A = \sqrt{1,01^2 + 2 \times 1,98^2 + 3 \times 2,99^2}.$$

Bài 5.3. Tính các đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^3 - z^2}$. Từ đó, hãy tính gần đúng giá trị của biểu thức

$$A = e^{2,02^2 + 0,01^3 - 1,99^2}.$$

Bài 5.4. Cho hàm số $f(x, y, z) = \ln \frac{x^3 + y^3}{z^2}$. Tính vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y, z)$. Từ đó, hãy tính gần đúng giá trị của biểu thức

$$A = \ln \frac{0,99^3 + 1,98^3}{3,01^2}.$$