Lecture Notes: Đại số tuyến tính

Chương 2: Không gian véc tơ và ánh xạ tuyến tính

Biên soạn: Phan Quang Sáng- Bộ môn Toán, Đại học Phenikaa

Ngày 3 tháng 10 năm 2023

Mục lục

1 Định nghĩa và ví dụ về không gian véc tơ **2**

2 Độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ véc tơ **4**
2.1 Định nghĩa 4
2.2 Hạng của hệ véc tơ 6

3 Không gian véc tơ con **8**

4 Cơ sở và số chiều của không gian véc tơ **9**

5 Tọa độ của véc tơ **11**
5.1 Định nghĩa 11
5.2 Liên hệ giữa hạng của hệ véc tơ và hạng của ma trận 12
5.3 Đổi cơ sở 13

6 Giới thiệu về ánh xạ tuyến tính **14**
6.1 Định nghĩa 14
6.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính 15

7 Giới thiệu về không gian Ơclit và không gian Unita **16**

8 Giới thiệu phần mềm tính toán **18**

Chương 2. Không gian vectơ và ánh xạ tuyến tính

1 Định nghĩa và ví dụ về không gian véc tơ

Trong toán học, không gian vectơ là một tập hợp khác rỗng của các phần tử gọi là các vectơ, trên đó chúng ta trang bị các toán hai ngôi giữa các phần tử gọi là phép cộng véc tơ và nhân một phần tử bởi một số (số thực hoặc số phức) gọi là phép nhân vô hướng. Các phép toán này phải thỏa mãn thỏa mãn các điều kiện nhất định gọi là tiên đề, như được trình bày dưới đây.

Định nghĩa 1.1. *Một tập hợp $E \neq \emptyset$ cùng với hai phép toán trên E: phép cộng, ký hiệu $(+)$, và nhân vô hướng, ký hiệu là $(.)$, được gọi là một không gian véc tơ thực trên $\mathbb{R}$ (hoặc phức trên $\mathbb{C}$) nếu các tiên đề sau được thỏa mãn:*

- *Đối với phép cộng: với mọi phần tử $u, v, w \in E$*

  (1) $u + v \in E$;

  (2) Tính giao hoán: $u + v = v + u$;

  (3) Tính kết hợp: $(u + v) + w = u + (v + w)$;

  (4) Có phần tử không: có một phần tử $\theta \in E$ sao cho $u + \theta = \theta + u = u$;

  (5) Có đối xứng: có $u' \in E$ sao cho $u + u' = u' + u = \theta$, u' được ký hiệu là $-u$;

- *Đối với phép nhân vô hướng: với mọi phần tử $u \in E$ và với mọi số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$)*

  (1') $\alpha u \in E$;

  (2') Tính phân phối: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

  (3') Tính phân phối: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

  (4') Tính kết hợp: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$;

  (5') $1u = u$;

Khi đó mỗi phần tử của E còn được gọi là một véc tơ.

Chú ý: các nội dung trong phần này được trình bày cho trường hợp không gian véc tơ thực, nhưng cũng dễ dàng được mở rộng tương tự cho không gian véc tơ phức.

Một số ví dụ về KGVT

(1) Không gian véc tơ thực : với mỗi số n nguyên dương, ta định nghĩa tập hợp

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) |\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Tập $\mathbb{R}^n$ được trang bị phép cộng hai bộ số và nhân vô hướng bởi một số thực thông thường là một không gian véc tơ thực.

Nếu $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ thì

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$kx = (kx_1, kx_2, \cdots, kx_n),\ k \in \mathbb{R}.$$

Khi đó mỗi véc tơ của $\mathbb{R}^n$ là một bộ số $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ và nó có thể được biểu diễn dưới dạng véc tơ dòng hoặc véc tơ cột tùy theo hoàn cảnh.

Ví dụ: cho các véc tơ

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(2) Không gian véc tơ các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$, ký hiệu $Mat_{(m,n)}(\mathbb{R})$, được trang bị phép cộng hai ma trận và phép nhân vô hướng với ma trận.

(3) Không gian véc tơ các đa thức bậc không quá n, ký hiệu $P_n[x]$, được trang bị phép cộng hai đa thức và phép nhân vô hướng (một số) với một đa thức thông thường.

Tương tự thì tập tất cả các đa thức (bậc tùy ý) $P[x]$ cũng là một không gian véc tơ.

Một số tính chất

1) Véc tơ không và véc tơ đối là duy nhất.

2) $0u = \theta$ với mọi u.

3) $\alpha\theta = \theta$ với mọi α.

4) $(-1)u = -u$.

5) Nếu $\alpha u = \theta$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \theta$. Từ đó,

   nếu $\alpha u = \beta u$, $u \neq \theta$ thì $\alpha = \beta$,

   nếu $\alpha u = \alpha v$, $\alpha \neq 0$ thì $u = \theta$.

2 Độc lập, phụ thuộc tuyến tính của hệ véc tơ

2.1 Định nghĩa

Giả sử $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một hệ véc tơ của không gian véc tơ E. Ta gọi một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của U là một véc tơ dạng

$$u = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n,$$

trong đó k_i là các hằng số.

Ngược lại nếu một véc tơ u được biểu diễn như trên thì chúng ta cũng nói rằng u được biểu diễn tuyến tính theo các véc tơ của hệ U.

Định nghĩa 2.1. *Hệ véc tơ $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu giả sử*

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n = \theta, \text{ với các } k_i \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

thì

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

Hệ không độc lập tuyến tính được gọi là phụ thuộc tuyến tính và khi đó phương trình (2.1) đúng với ít nhất một trong các hệ số $k_i \neq 0$.

Ví dụ 1: hệ ba véc tơ

$$u_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} -6 & 42 & 24 & 54 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 21 & -21 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

là phụ thuộc tuyến tính vì $6u_1 - \dfrac{1}{2}u_2 - u_3 = 0$.

Ví dụ 2: Hệ hai véc tơ $\{((1,2),(-3,4)\}$ là độc lập tuyến tính.

Thật vậy: giả sử $k_1(1,2) + k_2(-3,4) = \theta$ thì

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Phương trình trên dẫn đến hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 - 3k_2 & = 0 \\ 2k_1 + 4k_2 & = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $k_1 = k_2 = 0$ vì là hệ Cramer thuần nhất có định thức $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$.

Một số tính chất:

(1) Mọi hệ con của một hệ véc tơ độc lập tuyến tính đều độc lập tuyến tính. Từ đó, mọi hệ chứa một hệ con phụ thuộc tuyến tính cũng phụ thuộc tuyến tính. Đặc biệt mọi hệ chứa véc tơ θ đều phụ thuộc tuyến tính.

(2) Theo định nghĩa trên nếu hệ độc lập thì giữa các véc tơ không có quan hệ tuyến tính. Ngược lại, hệ U phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có ít nhất một véc tơ của hệ được biểu diễn tuyến tính theo các véc tơ khác.

Thật vậy, giả sử phương trình (2.1) đúng với $k_j \neq 0$, khi đó

$$k_j u_j = -k_2 u_2 - \cdots - k_n u_n \Rightarrow u_j = -\sum_{i \neq j} \frac{k_i}{k_j} u_i.$$

(3) Một véc tơ biểu diễn tuyến tính theo một hệ độc lập tuyến tính thì cách biểu diễn là duy nhất. Điều đó có nghĩa là nếu hệ U như trên là độc lập tuyến tính và giả sử $u = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u$ thì các hệ số k_i là duy nhất.

Chú ý: Hệ hai véc tơ $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ trong $\mathbb{R}^n$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi các thành phần của chúng tương ứng tỷ lệ:

$$\frac{u_1}{v_1} = \ldots = \frac{u_n}{v_n},$$

trong đó quy ước tỷ lệ trên nếu mẫu số bằng 0 thì tỷ số cũng phải bằng 0.

Ví dụ: hai véc tơ $\{((1, 0, -2, 3), (-2, 0, 4, -6)\}$ phụ thuộc tuyến tính vì

$$\frac{1}{-2} = \frac{0}{0} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6}$$

Ví dụ: hai véc tơ $\{((4, -6, 5), (2, -3, 7)\}$ độc lập tuyến tính vì

$$\frac{4}{2} \neq \frac{5}{7}.$$

2.2 Hạng của hệ véc tơ

Định lý 2.2. *Cho $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là hai hệ độc lập tuyến tính của E. Nếu mọi véc tơ của hệ U đều biểu diễn tuyến tính theo các véc tơ của hệ V thì $n \leq m$.*

Phần chứng minh định lý trên được đưa ra ở cuối mục này.

Định nghĩa 2.3. *Hạng của một hệ véc tơ $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ trong không gian véc tơ E là số véc tơ độc lập tuyến tính tối đại có trong U, ký hiệu là $r(U)$.*

Chú ý:

1) Giả sử U_1 là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của U, khi đó mọi véc tơ trong U biểu diễn tuyến tính theo U_1.

2) Từ chú ý 1) và định lý 2.2 ở trên chúng ta chứng minh được mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của U đều có cùng số véc tơ và do đó khái niệm hạng của hệ véc tơ U không phụ thuộc vào hệ con độc lập tuyến tính tối đại của U.

3) Hiển nhiên từ định nghĩa thì hệ U gồm n véc tơ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $r(U) = n$.

Ví dụ 1: tìm hạng của các hệ véc tơ sau

$$U = \{(0,1),(1,0),(-1,2)\}$$

Dễ thấy hệ 3 véc tơ trên phụ thuộc tuyến tính vì $(-1,2) = -(1,0) + 2(1,0)$ và hệ 2 véc tơ $\{(0,1),(1,0)\}$ độc lập tuyến tính. Do đó $r(U) = 2$.

Ví dụ 2: tìm hạng của các hệ véc tơ sau

$$V = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,1,2),(2,1,3)\}$$

$$W = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,2,2),(1,1,1)\}$$

Đáp số: $r(V) = 3$, $r(W) = 2$.

Chứng minh. (Chứng minh định lý 2.2) Giả sử phản chứng $n > m$.

Do giả thiết các véc tơ của hệ U đều biểu thị tuyến tính theo các véc tơ của hệ V nên $u_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i,\ j = \overline{1,n}$.

Do hệ U độc lập tuyến tính nên giả sử

$$\sum_{j=1}^n k_j u_j = \theta \Rightarrow \forall k_j = 0.$$

Thay các biểu diễn tuyến tính của các véc tơ u_i vào phương trình trên ta được

$$\sum_{j=1}^n k_j \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i = \theta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij}k_j)v_i = \theta.$$

Mặt khác do hệ V cũng độc lập tuyến tính nên từ phương trình trên phải suy ra

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}k_j = 0,\ i = \overline{1,m}$$

Đó là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm m phương trình và n ẩn số nên nếu giả thiết phản chứng $m < n$ thì hệ phương trình trên có nghiệm không tầm thường, tức là tồn tại ít nhất một $k_j \neq 0$ thỏa mãn. Như vậy dẫn đến mâu thuẫn và do đó $n \leq m$. $\square$

3 Không gian véc tơ con

Định nghĩa 3.1. *Cho E là một không gian véc tơ. Một tập con $S \neq \emptyset$ được gọi là không gian véc tơ con của E nếu S cùng với hai phép toán cộng và nhân vô hướng của E cũng lập thành một không gian véc tơ.*

Ví dụ 1 : E, $\{\theta\}$ là các không gian véc tơ con (tầm thường) của E.

Ví dụ 2: Không gian véc tơ các đa thức bậc không quá n, $P_n[x]$ là không gian véc tơ con của không gian véc tơ các đa thức (bậc tùy ý) $P[x]$.

Chú ý: mọi không gian véc tơ con đều phải chứa véc tơ không.

Định lý 3.2. *Tập con $S \neq \emptyset$ là không gian véc tơ con của không gian véc tơ thực (hoặc phức) E khi và chỉ khi:*

(1) $u + v \in S$ với mọi $u, v \in S$

(2) $ku \in S$ với mọi $u \in S$ và mọi $k \in \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$).

Từ định lý trên suy ra để chứng minh một tập hợp là không gian véc tơ con của một không gian véc tơ chúng ta chỉ cần chứng minh nó khác rỗng (tức là chứa ít nhất một véc tơ, ví dụ phải chứa véc tơ không) và đóng kín với hai phép toán cộng véc tơ và nhân vô hướng.

Một số ví dụ

1) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

2) $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | -3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$ là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

3) Tập hợp các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $Ax = 0$.

4) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2\}$ không là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

Định lý 3.3. *(Tùy chọn) Giả sử S_1 và S_2 là hai không gian véc tơ con của không gian véc tơ E. Khi đó giao $S_1 \cap S_2$ và tổng $S_1 + S_2$ cũng là các không gian véc tơ con của E. Ở đây tổng $S_1 + S_2$ được định nghĩa bởi*

$$S_1 + S_2 = \{u + v \mid u \in S_1, v \in S_2\}.$$

Hơn nữa nếu $S_1 \cap S_2 = \{\theta\}$ thì tổng của S_1 và S_2 được gọi là tổng trực tiếp và được ký hiệu là $S_1 \oplus S_2$.

Chú ý:

1) $S_1 \cup S_2$ nói chung không phải không gian véc tơ con.

2) Chúng ta có thể chứng minh được $S_1 + S_2$ là không gian véc tơ con nhỏ nhất chứa cả S_1 và S_2, tức là chứa $S_1 \cup S_2$.

Không gian véc tơ con sinh bởi một hệ véc tơ

Định nghĩa 3.4. *Cho $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là một hệ véc tơ của không gian véc tơ E. Không gian véc tơ con sinh bởi hệ U được định nghĩa là không gian véc tơ con nhỏ nhất của E chứa mọi véc tơ của U, ký hiệu là $L(U)$ hoặc $Span(U)$.*

Hơn nữa, sử dụng Định lý 3.2 ta có thể chứng minh không gian sinh này là tập hợp các tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của U nên nó còn được gọi là bao tuyến tính của U:

$$L(U) = \{k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_mu_m \mid k_i \in \mathbb{R}\}.$$

Nếu một không gian véc tơ con $S = L(U)$ thì người ta cũng nói rằng U là một hệ sinh của S.

Chú ý: thực tế $S = L(U)$ được sinh bởi một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của U (sau này gọi nó là một cơ sở của S).

4 Cơ sở và số chiều của không gian véc tơ

Định nghĩa 4.1. *Cho E là một không gian véc tơ. Một hệ $\mathcal{B}$ các véc tơ của E được gọi là một cơ sở của E nếu hệ $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính và mọi véc tơ của E đều có thể biểu diễn tuyến tính theo các véc tơ của hệ $\mathcal{B}$.*

Như vậy E được sinh ra bởi cơ sở $\mathcal{B}$: $E = L(\mathcal{B})$.

Định nghĩa 4.2. *Nếu không gian véc tơ E có một cơ sở gồm n véc tơ thì mọi cơ sở khác của E cũng có n véc tơ. Số n được gọi là số chiều của E, ký hiệu $dim(E) = n$, và ta nói E là không gian véc tơ (hữu hạn) n chiều.*

Bài tập: hãy chứng minh nếu không gian véc tơ E có một cơ sở gồm n véc tơ thì mọi cơ sở khác của E cũng có n véc tơ.

Một số ví dụ:

1) $\mathbb{R}^n$ là không gian véc tơ n chiều. Nó có một cơ sở gồm n véc tơ được gọi là cơ sơ chính tắc, ví dụ với $n = 3$:

$$e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1).$$

2) $P_n[x]$ là không gian véc tơ $n + 1$ chiều.
3) $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ là không gian véc tơ $m \times n$ chiều.

Chúng ta dễ dàng chứng minh được các mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.3. *Giả sử E là một không gian véc tơ n chiều. Khi đó:*

1) Mọi hệ có nhiều hơn $(n + 1)$ véc tơ đều phụ thuộc tuyến tính. (Nói cách khác không gian véc tơ n chiều có tối đa n véc tơ độc lập tuyến tính).

2) Mọi hệ gồm n véc tơ độc lập tuyến tính là cơ sở của E (và ngược lại).

Ví dụ: chứng minh

1) $U = \{(-1, 2), (2, 3)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

2) $V = \{(-1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, 0, 1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Mệnh đề 4.4. *Cho S là một không gian véc tơ con của E và giả sử S sinh bởi một hệ U của E (gồm m véc tơ) với hạng $r(U) = r$ ($r \leq m$) thì:*

(1) S là không gian véc tơ r chiều và một hệ con r véc tơ độc lập tuyến tính (tối đại) của U là một cơ sở của S.

(2) Mọi hệ sinh của S phải có tối thiểu r véc tơ.

Chú ý 1:

1) Nếu E là không gian véc tơ n chiều và $r(U) = n$ thì $E = L(U)$.

2) Có thể bổ sung vào một hệ véc tơ độc lập tuyến tính các véc tơ khác để được một cơ sở của không gian véc tơ. Như vậy một không gian véc tơ hữu hạn chiều luôn có cơ sở.

Chú ý 2: nếu một không gian véc tơ E có một cơ sở gồm vô số véc tơ thì nó được gọi là không gian véc tơ vô hạn chiều.

Ví dụ: Không gian véc tơ các đa thức $P[x]$ là một không gian véc tơ vô hạn chiều, nó có một cơ sở chính tắc gồm vô hạn (đếm được) các véc tơ:

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}.$$

Ví dụ: Không gian véc tơ các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a; b]$, ký hiệu là $\mathcal{C}[a; b]$ là một không gian véc tơ vô hạn chiều, thậm chí nó không có một cơ sở nào gồm đếm được các véc tơ.

5 Tọa độ của véc tơ

5.1 Định nghĩa

Giả sử E là không gian véc tơ n chiều và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở. Khi đó mọi $u \in E$ được biểu diễn tuyến tính duy nhất theo các véc tơ của $\mathcal{B}$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n.$$

Khi đó bộ số, được ký hiệu $u_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$, được gọi là tọa độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B}$. Bên cạnh đó, người ta cũng gọi ma trận cột, ký hiệu $[u]_{\mathcal{B}}$,

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

là tọa độ cột của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Một số ví dụ

(1) Mỗi véc tơ của $\mathbb{R}^n$ có tọa độ trong cơ sở chính tắc chính là các thành phần của véc tơ đó.

Ví dụ véc tơ $u = (-2, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$ có tọa độ trong cơ sở chính tắc là $(-2, 3, 4)$.

(2) Tìm tọa độ của $u = (-3, 4)$ trong cơ sở $U = \{(-1, 2), (2, 3)\}$.

(3) Tìm tọa độ $u = (3, 1, 2)$ trong cơ sở $V = \{(-1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, 0, 1)\}$.

5.2 Liên hệ giữa hạng của hệ véc tơ và hạng của ma trận

Giả sử E là không gian véc tơ n chiều và $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là một hệ véc tơ trong E.

Định lý 5.1. *Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở tùy ý của E. Lập ma trận A có các cột là các tọa độ cột của các véc tơ của U trong cơ sở $\mathcal{B}$,*

$$A = ([u_1]_{\mathcal{B}} \quad [u_2]_{\mathcal{B}} \quad \cdots \quad [u_m]_{\mathcal{B}}).$$

Khi đó ta có kết quả

$$r(U) = r(A).$$

Chú ý:

(1) Nếu hệ U gồm n véc tơ thì khi đó A sẽ là ma trận vuông, hệ U độc lập tuyến tính (và do đó là một cơ sở của E) khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

(2) Từ định lý trên để tìm hạng của hệ véc tơ U chúng ta có thể áp dụng phương pháp tìm hạng của ma trận đã biêt trước đây. Chúng ta nhắc lại rằng có thể sử dụng các phép biến đổi cơ bản trên hàng (hoặc cột) của A để đưa nó về ma trận dạng bậc thang.

(3) Nếu U gồm các véc tơ của $\mathbb{R}^n$ với cơ sở chính tắc, khi đó chúng ta lập được ngay ma trận A gồm các cột là các tọa độ cột của các véc tơ của U. Hơn nữa do $r(A^T) = r(A)$ nên chúng ta có thể thao tác tính hạng đối với ma trận gồm các tọa độ cột hoặc dòng của U.

(4) Ngược lại, hạng của một ma trận A cũng chính là hạng của hệ véc tơ dòng hoặc hệ véc tơ cột của nó.

Ví dụ 1: tìm hạng của các hệ véc tơ sau

1) $U = \{(0, 1), (1, 0), (-1, 2)\}$

2) $V = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 1, 2), (2, 1, 3)\}$

3) $W = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 2, 2), (1, 1, 1)\}$

Ví dụ 2: hệ véc tơ sau có phải một cơ sở của $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,2,2)\}$$

Giải: Chúng ta tính định thức của ma trận tạo bởi các véc tơ cột của hệ B:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Do đó $r(U) = r(A) = 3$ và do đó hệ véc tơ U là độc lập tuyến tính. Như vậy hệ U gồm 3 véc tơ độc lập tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ có số chiều bằng 3 nên hệ U là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

5.3 Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở của một không gian véc tơ n chiều E. Cho $u \in E$ và giả tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$. Chúng ta hãy tìm mối liên hệ giữa tọa độ của u trong cơ sở cũ $[u]_{\mathcal{B}}$ và tọa độ trong cơ sở mới $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Trước hết ta định nghĩa *ma trận chuyển cơ sở* từ $\mathcal{B}$ (cũ) sang cơ sở $\mathcal{B}'$ (mới) là ma trận có các cột là các tọa độ cột của các véc tơ của cơ sở (cũ) $\mathcal{B}$ trong cơ sở (mới) $\mathcal{B}'$,

$$P = ([u_1]_{\mathcal{B}'} \;\; [u_2]_{\mathcal{B}'} \;\; \cdots \;\; [u_n]_{\mathcal{B}'}).$$

Khi đó ta có thể chứng minh mối liên hệ

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P[u]_{\mathcal{B}},$$

và ngược lại

$$[u]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[u]_{\mathcal{B}'}$$

với chú ý rằng ma trận chuyển cơ sở P là khả nghịch vì $r(P) = r(\mathcal{B}) = n$.

Bên cạnh đó, P^{-1} chính là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}'$ sang cơ sở $\mathcal{B}$.

Một số ví dụ

1) Tìm tọa độ của $u = (-3,4)$ trong cơ sở chính tắc và trong cơ sở $U = \{(-1,2),(2,3)\}$.

2) Tìm ma trận chuyển cơ sở và tọa độ của $u = (-3, 1, 2)$ trong các cơ sở sau

$$U = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\},$$
$$V = \{(-1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, -1, 1)\}.$$

3) Chứng minh hệ các ma trận sau là một cơ sở của $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm tọa độ của $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ trong cơ sở trên.

6 Giới thiệu về ánh xạ tuyến tính

6.1 Định nghĩa

Định nghĩa 6.1. *Cho E và F là hai không gian véc tơ thực (hoặc phức). Một ánh xạ $f : E \to F$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn:*

(1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in E$;

(2) $f(ku) = kf(u)$ với mọi $u \in E$ và mọi $k \in \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$).

Ví dụ 1: kiểm tra các ánh xạ sau có phải là ánh xạ tuyến tính hay không?
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, -3x)$.
2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$.
3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (2x + y + 1, x - 3y)$.
4) Toán tử đạo hàm $D : f \mapsto f'$ từ không gian véc tơ các hàm số thực khả vi (trên một khoảng nào đó) vào không gian véc tơ các hàm số thực.
5) $s : \mathbb{R}^2 \to Mat_{(2,2)}(\mathbb{R})$, $s(x, y) = \begin{bmatrix} x - y & x + 2y \\ 3y & -2x + 4y \end{bmatrix}$.

Ví dụ 2: cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ cấp 3×2.

Khi đó ánh xạ, cũng ký hiệu bởi $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto y = A(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \mapsto y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}$

Một cách tổng quát, cho A là một ma trận cấp $m \times n$, khi đó ánh xạ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cho bởi

$$x \mapsto y = A(x) = Ax$$

là một ánh xạ tuyến tính và được gọi là ánh xạ tuyến tính tương ứng với ma trận A.

Tính chất 6.2. *Giả sử $f : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó,*

(1) Ánh xạ tuyến tính biến véc tơ không thành véc tơ không: $f(\theta_E) = \theta_F$.

(2) $f(\sum_{i=1}^n x_i u_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(u_i)$ với mọi số x_i và $u_i \in E$.

Ví dụ: $f(2u - 3v + 5w) = f(2u - 3v) + f(5w) = f(2u) + f(-3v) + 5f(w) = 2f(u) - 3f(v) + 5f(w)$.

Định lý 6.3. *Ánh xạ tuyến tính $f : E \to F$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của E.*

6.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho $f : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả sử $Dim(E) = n$, $Dim(F) = m$, và giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của E, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một cơ sở của F.

Định nghĩa 6.4. *Ma trận cấp $m \times n$ gồm các cột là tọa độ cột của các véc tơ $f(u_i)$ (ảnh của cơ sở $\mathcal{B}$ của E) trong cơ sở $\mathcal{V}$ của F,*

$$A = [\ [f(u_1)]_{\mathcal{V}}\ [f(u_2)]_{\mathcal{V}} \cdots [f(u_n)]_{\mathcal{V}}\ ],$$

được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong các cơ sở $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$.

Khi đó nếu véc tơ $u \in E$ có tọa độ cột trong cơ sở $\mathcal{B}$ là $x = [u]_{\mathcal{B}}$ thì $f(u)$ có tọa độ cột trong cơ sở $\mathcal{V}$ là

$$y = [f(u)]_{\mathcal{V}} = Ax.$$

Chú ý : Nếu $F \equiv E$ và $\mathcal{V} \equiv \mathcal{B}$ thì ta nói A là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Ví dụ: Xác định ma trận của các ánh xạ tuyến tính

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y + 7z, 3x - 4y, 2x + y + 5z)$ trong các cơ sở chính tắc.

Chúng ta dễ dàng tìm được

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x-y, x+y-3z)$ trong các cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ và $\mathcal{V} = \{(1, 1), (1, 2)\}$. Cho $u = (-1, 0, 3)$, xác định tọa độ của $f(u)$ trong cơ sở $\mathcal{V}$. **(Gợi ý** $u = 2u_1 - 3u_2 + u_3$**)**

(3) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (2x+z, x-y, 2x+y+z)$ trong cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

7 Giới thiệu về không gian Ơclit và không gian Unita

Chúng ta nhắc lại rằng nếu u và v là hai véc tơ của $\mathbb{R}^n$, khi đó tích vô hướng thông thường (hoặc còn được goi là tích trong) của hai véc tơ u và v, được ký hiệu là $u \bullet v$ hoặc (u, v), và được cho bởi

$$(u, v) = u \bullet v = uv^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Khái niệm trên có thể được mở rộng cho các không gian véc tơ thực (hoặc phức).

Định nghĩa 7.1. *Một không gian véc tơ thực E được trang bị một tích vô hướng được gọi là không gian Ơclit (hay không gian thực tiền Hilber). Ở đây chúng ta định nghĩa tích vô hướng giữa hai véc tơ bấy kỳ u và v của E là một số thực duy nhất, ký hiệu là (u, v), thỏa mãn các tiên đề sau:*

(1) Tính đối xứng: với mọi véc tơ $u, v \in E$,

$$(u, v) = (v, u);$$

(2) Tính tuyến tính: với mọi số thực k_1, k_2 và mọi véc tơ $u, w, v \in E$,

$$(k_1 u + k_2 w, v) = k_1(u, v) + k_2(w, v);$$

(3) Tính xác định dương: với mọi véc tơ $u \in E$,

$$(u, u) \geq 0,$$

$$(u, u) = 0 \quad \textit{khi và chỉ khi} \quad u = 0.$$

Hai véc tơ trong không gian Ơclit được gọi là vuông góc (hoặc trực giao) nếu tích vô hướng của chúng $(u, v) = 0$.

Người ta cũng định nghĩa độ dài, hay còn gọi là chuẩn của một véc tơ của E bởi

$$\| u \| = \sqrt{(u, u)}.$$

Ví dụ: không gian véc tơ $C[a; b]$ các hàm số thực liên tục trên đoạn $[a; b]$ là một không gian Ơclid với tích vô hướng sau

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Chú ý: nếu E là không gian véc tơ phức và tích vô hướng của hai véc tơ u và v của E được định nghĩa là một số phức $(u, v) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn các tiên đề (2), (3) như trong định nghĩa trên với mọi véc tơ của E và với mọi số phức k_1, k_2; chỉ thay tiên đề (1) bởi tiên đề

$$(u, v) = \overline{(v, u)}, \text{ (số phức liên hợp)}$$

thì E được gọi là không gian Unita.

Ví dụ: chúng ta có thể trang bị cho $\mathbb{C}$-không gian véc tơ $\mathbb{C}^n$ một tích vô hướng phức và nó trở thành một không gian Unita như sau:

$$(u, v) = \overline{u}^T v,\ \ u, v \in \mathbb{C}^n.$$

Chẳng hạn, với $n = 2$: cho $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_2 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ thì

$$(u, v) = [\overline{u_1}\ \overline{u_2}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \overline{u_1} v_1 + \overline{u_2} v_2.$$

8 Giới thiệu phần mềm tính toán

Giới thiệu một số ứng dụng sử dụng một phần mềm, ví dụ Mathematica, hoặc Maple... với véc tơ.

Tài liệu

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, (10th Edition, 2011), Nhà xuất bản Wiley, p. 256-309.

[2] Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp Tập I* (2014), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[3] Strang Gilbert, *Introduction to Linear Algebra* (5th Edition, 2016), Wellesley-Cambridge Press.