

Tên học phần: Giải tích   Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

## Đề số 1

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)

(a) Xác định miền  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ và } x^2 + y^2 \leq 1\}$  trong toạ độ cực.(b) Tính tích phân  $I = \iint_D x^2 dx dy$ .

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iiint_V z \, dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là một miền được giới hạn bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) và mặt nón  $z^2 = x^2 + y^2$  với  $z \geq 0$ .

Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung  $(C)$  là một phần tư đường tròn  $x^2 + y^2 = 4$ , định hướng từ  $A(2, 0)$  đến  $B(0, 2)$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $(C)$ .(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 - 2xy, x^2 + y^2 - 3y)$ .

Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt cầu  $(S)$   $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) định hướng ra ngoài.

(a) Tìm một biểu diễn tham số của  $(S)$  và một vectơ pháp tuyến  $\mathbf{N}$  tương ứng.(b) Tính tích phân của hàm vectơ  $\mathbf{F} = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$  trên mặt  $(S)$ .

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất sau:

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 \sin x.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: Giải tích   Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

## Đề số 2

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)

(a) Xác định miền  $D = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ và } x^2 + y^2 \leq 1\}$  trong toạ độ cực.(b) Tính tích phân  $I = \iint_D y^2 dx dy$ .

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)z \, dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là một miền giới hạn bởi mặt nón  $z^2 = x^2 + y^2$  với  $0 \leq z \leq a$ .

Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)

Cho cung  $C$  là một phần tư đường tròn  $x^2 + y^2 = 9$ , định hướng từ  $A(-3, 0)$  đến  $B(0, -3)$ .(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $C$ .(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + xy, x^2 + y^2 + x)$ .

Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)

Cho mặt nón  $(S)$   $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ ,  $h \geq 0$ , định hướng ra ngoài.(a) Tìm một biểu diễn tham số của  $(S)$  và một vectơ pháp tuyến  $\mathbf{N}$  tương ứng.(b) Tính tích phân của hàm vectơ  $\mathbf{F} = (y - z, z - x, x - y)$  trên mặt  $(S)$ .

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)

Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất sau:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^3 \sin x.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: Giải tích   Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

## Đề số 3

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)(a) Xác định miền  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  trong toạ độ cực.(b) Tính tích phân  $I = \iint_D (x^2 + y^2 - xy) dx dy$ .**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) z \, dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là một miền trong  $\mathbb{R}^3$  thỏa mãn các điều kiện:  $4 \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, z \geq 0$ .**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung  $(C)$  là một phần parabol  $\begin{cases} y = 2x^2 \\ z = 2, \end{cases}$  định hướng từ  $A(0, 0, 2)$  đến  $B(1, 2, 2)$ .(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $(C)$ .(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (2x^2 - 3y, 2y^2 - 3x, xy - x - y)$ .**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt  $(S)$   $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$  (với  $a > 0$ ) hướng ra ngoài.(a) Tìm một biểu diễn tham số của  $(S)$  và một vectơ pháp tuyến tương ứng.(b) Tính tích phân của hàm vectơ  $\mathbf{F} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$  trên mặt  $(S)$ .**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất sau:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^3 e^x.$$

----- Hết -----

Tên học phần: Giải tích   Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

## Đề số 4

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)

(a) Miền  $D$  được giới hạn bởi 4 đường  $x - 3y = -1$ ,  $x - 3y = 1$ ,  $x + 2y = 0$ , và  $x + 2y = 2$ .  
Xác định miền  $D$  theo biến mới  $u = x - 3y$  và  $v = x + 2y$  và tính Jacobian  $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ ?

(b) Tính tích phân  $I = \iint_D 5x dx dy$ ?

**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân  $I = \iiint_V (x^2 + y^2)z \, dx dy dz$ , trong đó  $V$  là một miền giới hạn bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) cùng với các điều kiện  $z \geq 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung  $C$  là một phần parabol  $\begin{cases} y = -3x^2 \\ z = 1, \end{cases}$  định hướng từ  $A(0, 0, 1)$  đến  $B(1, -3, 1)$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $C$ .

(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (y^2 + xy, x^2 - xy, -3)$ .

**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt nón  $(S)$   $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , định hướng ra ngoài.

(a) Tìm một biểu diễn tham số của  $(S)$  và một vectơ pháp tuyến  $\mathbf{N}$  tương ứng.

(b) Tính tích phân của hàm véc tơ  $\mathbf{F} = (xy, 0, -z)$  trên mặt  $(S)$ .

**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất sau:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^3 \cos x.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: Giải tích   Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

## Đề số 5

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân  $I = \iint_D (1+y)e^x dx dy$ , biết miền  $D$  là tam giác có ba đỉnh  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ , và  $(1,1)$ .

**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iiint_V xyz \, dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là một miền giới hạn bởi mặt trụ  $x^2 + y^2 = b^2$  ( $b > 0$ ) cùng với các điều kiện  $0 \leq z \leq a$  ( $a > 0$ ),  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung  $C$  là một phần tư đường tròn  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = 1, \end{cases}$

định hướng từ  $A(1,0,1)$  đến  $B(0,1,1)$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $C$ .

(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2 + x + y, 3x - 2y + z, xy)$ .

**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt nón  $(S)$   $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ ,  $0 \leq z \leq 2$ , định hướng ra ngoài.

(a) Tìm một biểu diễn tham số của  $(S)$  và một vectơ pháp tuyến  $\mathbf{N}$  tương ứng.

(b) Tính tích phân của hàm vectơ  $\mathbf{F} = (y^2, xz, -z^2)$  trên mặt  $(S)$ .

**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân đẳng cấp (hay thuần nhất) sau:

$$y^2 + x^2 y' = 2xy y'.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: Giải tích   Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

## Đề số 6

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iint_D (1 + x + y) dx dy,$$

biết miền  $D$  giới hạn bởi hai đường  $y = x^2$  và  $y = 1$ .

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iiint_V xyz \, dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là một miền giới hạn bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) cùng với các điều kiện  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung  $C$  là một phần tư đường tròn  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ z = 2, \end{cases}$ định hướng từ  $A(0, 1, 2)$  đến  $B(-1, 0, 2)$ .(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $C$ .(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (3x - 2y + z, 3y - 2z + x, 3z - 2x + y)$ .Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt trụ  $(S)$   $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq a$  ( $a > 0$ ), định hướng ra ngoài.(a) Tìm một biểu diễn tham số của  $(S)$  và một vectơ pháp tuyến  $\mathbf{N}$  tương ứng.(b) Tính tích phân của hàm vectơ  $\mathbf{F} = (xy, yz, z)$  trên mặt  $(S)$ .

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân đẳng cấp (hay thuần nhất) sau:

$$y^2 - x^2 y' = 2xy y'.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.   - Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: Giải tích   Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

## Đề số 7

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân  $I = \iint_D (x + y - 2) dx dy$ , biết miền  $D$  là tam giác có ba đỉnh  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ , và  $(3, 1)$ .

**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iiint_V z \, dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là một miền thỏa mãn các điều kiện:  $x + y + z \leq a$  ( $a > 0$ ),  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho  $C$  là đoạn thẳng định hướng từ  $A(0, 0, 0)$  đến  $B(1, 2, 3)$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $C$ .

(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (x^2 - yz + \sin^2 \frac{\pi x}{4}, y^2 - zx, z^2 - xy)$ .

**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt trụ  $(S)$   $x^2 + y^2 = 36$ ,  $-3 \leq z \leq 1$ , định hướng ra ngoài.

(a) Tìm một biểu diễn tham số của  $(S)$  và một vectơ pháp tuyến  $\mathbf{N}$  tương ứng.

(b) Tính tích phân của hàm vectơ  $\mathbf{F} = (x + y, x, zx^2)$  trên mặt  $(S)$ .

**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất sau:

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 \cos x.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: Giải tích   Số TC: 03

Ngày thi: 13/07/2022

Thời gian làm bài: 90 phút

## Đề số 8

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1). Tính tích phân

$$I = \iint_D (x - 2y) dx dy,$$

biết miền  $D$  được giới hạn bởi ba đường  $y = 0$ ,  $y = x$ , và  $x + y = 2$ .

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1). Tính tích phân

$$I = \iiint_V (x + y) dx dy dz,$$

biết miền  $V$  được giới hạn bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) với điều kiện  $x \geq 0$  và  $y \geq 0$ .Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1).  $C$  là đoạn thẳng  $AB$ , định hướng từ  $A(0, 0, 0)$  đến  $B(3, 2, 1)$ .(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $C$ .(b) Tính tích phân  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2 + \cos^2 \frac{\pi z}{4})$ .Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1). Cho mặt trụ  $(S)$  xác định bởi  $x^2 + y^2 = 1$  và  $0 \leq z \leq 2$ , định hướng ra ngoài.(a) Tìm một biểu diễn tham số của  $(S)$  và một vectơ pháp tuyến  $\mathbf{N}$  tương ứng.(b) Tính tích phân của hàm vectơ  $\mathbf{F} = (x^2, z, y)$  trên mặt  $(S)$ .

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1). Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất sau:

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^x.$$

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi **không** giải thích gì thêm.



Đề số: 01

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1			2
	a		1
		$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$	0,5
		$0 \leq r \leq 1$	0,25
		$0 \leq \varphi \leq \pi$	0,25
	b		1
		$ J  = r$ or $dxdy = r dr d\varphi$	0,25
		$I = \int_0^1 dr \int_0^\pi r^2 \cos^2 \varphi r d\varphi$	0,25
		$I = (r^4/4)_0^1 (\varphi/2 + \sin(2\varphi)/4)_0^\pi$	0,25
		$I = \pi/8$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2			2,00
		• Vẽ được hình kem ốc quế (cầu và nón) [không bắt buộc]	
		• Tọa độ cầu $z = r \cos \theta, x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi$	0,5
		• Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi/4], r \in [0, a]$	0,25
		• Định thức Jacobi: $ J  = r^2 \sin \theta$	0,25
		• $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^a r^3 \sin \theta \cos \theta dr$	0,25
		• Biết cách tính tích phân: $\int r^3 dr = r^4/4$ [hoặc $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ ]	0,25
		• Biết cách tính tích phân: $\int \sin \theta \cos \theta d\theta = \sin^2(\theta)/2$	0,25
		• Đáp số: $\pi a^4/8$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
3		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	0,5
	b		1,50

		$dx = -2 \sin t dt, \quad dy = 2 \cos t dt$	0,25
		$I = \int_0^{\pi/2} (4 - 8 \cos t \sin t)(-2 \sin t) dt + (4 - 6 \sin t)(2 \cos t) dt$	0,5
		$= \int_0^{\pi/2} (-8 \sin t + 8 \cos t + 16 \sin^2 t \cos t - 12 \sin t \cos t) dt$	0,25
		$= (8 \cos t + 8 \sin t + \frac{16}{3} \sin^3 t + 3 \cos 2t) \Big _0^{\pi/2}$	0,25
		$= -\frac{2}{3}$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
4			<b>2,00</b>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tham số hóa</li> </ul> $x = a \sin u \cos v, y = a \sin u \sin v, z = a \cos u$	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Miền lấy tích phân</li> </ul> $0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\begin{cases} r'_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u) \\ r'_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0) \end{cases}</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\mathbf{N} = r'_u \times r'_v = ((a \sin u)^2 \cos v, (a \sin u)^2 \sin v, a^2 \sin u \cos u)</math></li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Đưa về tích phân</li> </ul> $I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3a \sin u dv du$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Đưa về</li> </ul> $I = 3a \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \sin u du = 6a\pi \left( -\cos u \Big _0^\pi \right)$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tính đúng</li> </ul> $I = 12a\pi$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5		<b>(Làm cách khác, ví dụ theo phương pháp Lagrange - biến thiên hằng số, đúng vẫn tính đủ điểm)</b>	<b>2,00</b>
		Viết được: $y(x) = u(x)v(x)$	0,25
		Viết lại được phương trình vi phân: $u'v + u \left( v' - \frac{1}{x}v \right) = x^2 \sin x$	0,25
		Tìm được nghiệm riêng của phương trình $v' - \frac{1}{x}v = 0$ như sau: $\mathbf{v} = \mathbf{x}$	0,5

		Viết được: $u' = x \sin x$	0,25
		Viết được: $\mathbf{u} = \int \mathbf{x} \sin \mathbf{x} d\mathbf{x}$	0,25
		Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính được: $\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C$	0,25
		Viết được nghiệm tổng quát: $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (\sin \mathbf{x} - \mathbf{x} \cos \mathbf{x} + \mathbf{C}) \mathbf{x} = \mathbf{x} (\sin \mathbf{x} - \mathbf{x} \cos \mathbf{x}) + \mathbf{C}\mathbf{x}$ , với $C$ là hằng số tích phân có giá trị tùy ý.	0,25

Đề số: 2

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1			2
	a		1
		$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$	0,5
		$0 \leq r \leq 1$	0,25
		$0 \leq \varphi \leq \pi$	0,25
	b		1
		$ J  = r$ or $dxdy = r dr d\varphi$	0,25
		$I = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\varphi r^2 \sin^2 \varphi \cdot r$	0,25
		$I = (r^4/4)_0^1 (\varphi/2 - \sin(2\varphi)/4)_0^\pi$	0,25
		$I = \pi/8$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2			2,00
		• Vẽ được hình nón [không bắt buộc]	
		• Tọa độ trụ $z = z, x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$	0,5
		• Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, 2\pi], z \in [0, a], r \in [0, z]$	0,25
		• Định thức Jacobi: $ J  = r$	0,25
		• Tích phân bằng $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dz \int_0^z dr r^3 z$ [lưu ý đúng thứ tự tích phân]	0,25
		• Tính được tích phân: $\int_0^z dr r^3 = z^4/4$ [hoặc $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ ]	0,25
		• Tính được thêm tích phân thứ hai: $\int_0^a dz z^5 = a^6/6$	0,25
		• Đáp số: $\pi a^6/12$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
3		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, \pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$	0,5
	b		1,50
		$dx = -3 \sin t dt, \quad dy = 3 \cos t dt$	0,25

		$I = \int_{\pi}^{3\pi/2} (9 + 9 \cos t \sin t)(-3 \sin t) dt + (9 + 3 \cos t)(3 \cos t) dt$	0,5
		$= \int_{\pi}^{3\pi/2} (-27 \sin t + 27 \cos t - 27 \sin^2 t \cos t + 9 \cos^2 t) dt$	0,25
		$= (27 \cos t + 27 \sin t - 9 \sin^3 t + \frac{9t}{2} + \frac{9}{4} \sin 2t) \Big _{\pi}^{3\pi/2}$	0,25
		$= 9 + \frac{9\pi}{4}$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
4			<b>2,00</b>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tham số hóa</li> </ul> $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, \quad 0 \leq u \leq h,$	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Miền lấy tích phân</li> </ul> $0 \leq u \leq h, 0 \leq v \leq 2\pi$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\begin{cases} \mathbf{r}'_u = (\cos v, \sin v, 1) \\ \mathbf{r}'_v = (-u \sin v, u \cos v, 0) \end{cases}</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\mathbf{N} = \mathbf{r}'_v \times \mathbf{r}'_u = (u \cos v, u \sin v, -u)</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Đưa về tích phân</li> </ul> $I = \int_0^h \int_0^{2\pi} 2u^2 (\sin v - \cos v) dv du$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Chuyển về</li> </ul> $I = 2 \int_0^h u^2 du \int_0^{2\pi} (\sin v - \cos v) dv = 2 \left( \frac{u^3}{3} \Big _0^h \right) \left( -\cos v - \sin v \Big _0^{2\pi} \right)$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tính đúng <math>I = 0</math></li> </ul>	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5		(Làm cách khác, ví dụ theo phương pháp Lagrange - biến thiên hằng số, đúng vẫn tính đủ điểm)	<b>2,00</b>
		Viết được: $y(x) = u(x)v(x)$ .	0,25
		Viết lại được phương trình vi phân: $u'v + u \left( v' - \frac{2}{x}v \right) = x^3 \sin x$	0,25
		Tìm được nghiệm riêng của phương trình $v' - \frac{2}{x}v = 0$ như sau: $\mathbf{v} = \mathbf{x}^2$	0,5

	Viết được: $u' = x \sin x$	0,25
	Viết được: $\mathbf{u} = \int \mathbf{x} \sin \mathbf{x} d\mathbf{x} + \mathbf{C}$	0,25
	Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính được: $\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x$	0,25
	Viết được nghiệm tổng quát: $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (\sin \mathbf{x} - \mathbf{x} \cos \mathbf{x} + \mathbf{C}) \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^2(\sin \mathbf{x} - \mathbf{x} \cos \mathbf{x}) + \mathbf{C}\mathbf{x}^2$ , với $C$ là hằng số tích phân có giá trị tùy ý.	0,25

Đề số: 03

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1			2
	a		1
		$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$	0,5
		$1 \leq r \leq 2$	0,25
		$0 \leq \varphi \leq 2\pi$	0,25
	b		1
		$ J  = r$ or $dxdy = r dr d\varphi$	0,25
		$I = \int_1^2 dr \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) r d\varphi$	0,25
		$I = (r^4/4)_1^2 (\varphi + \cos(2\varphi)/4)_0^{2\pi}$	0,25
		$I = 15\pi/2$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2			2,00
		• Vẽ được hai hình cầu [không bắt buộc]	
		• Tọa độ cầu $z = r \cos \theta, x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi$	0,5
		• Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, 2\pi], r \in [1, 2], \theta \in [0, \pi/2]$	0,25
		• Định thức Jacobi: $ J  = r^2 \sin \theta$	0,25
		• Tích phân bằng $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r^5 \sin^3 \theta \cos \theta dr$	0,25
		• Tính được tích phân $\int r^5 dr = r^6/6$ [hoặc $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ ]	0,25
		• Tính được thêm tích phân thứ hai $\int \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \sin^4(\theta)/4$	0,25
		• Đáp số: $21\pi/4$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
3		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = t, y = 2t^2, z = 2, 0 \leq t \leq 1$	0,5
	b		1,50

	$dx = dt, \quad dy = 4t dt, \quad dz = 0$	0,25
	$I = \int_0^1 (2t^2 - 3.2t^2) dt + (2.(2t^2)^2 - 3t) 4t dt + 0$	0,5
	$= \int_0^1 (-16t^2 + 32t^5) dt$	0,25
	$= \left(-\frac{16}{3}t^3 + \frac{32}{6}t^6\right) \Big _0^1$	0,25
	$= 0$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
4			<b>2,00</b>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tham số hóa</li> </ul> $x = a \sin u \cos v, y = a \sin u \sin v, z = a \cos u$	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Miền lấy tích phân</li> </ul> $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\begin{cases} r'_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u) \\ r'_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0) \end{cases}</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\mathbf{N} = r'_u \times r'_v = ((a \sin u)^2 \cos v, (a \sin u)^2 \sin v, a^2 \sin u \cos u)</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Đưa về tích phân</li> </ul> $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin u \, du dv$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Chuyển về</li> </ul> $I = a^2 \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, du = 2a^2 \pi \left( -\cos u \Big _0^{\frac{\pi}{2}} \right)$	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tính đúng</li> </ul> $I = 2a^2 \pi$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5		(Làm cách khác, ví dụ theo phương pháp Lagrange - biến thiên hằng số, đúng vẫn tính đủ điểm)	<b>2,00</b>



	Viết được: $y(x) = u(x)v(x)$	0,25
	Viết lại được phương trình vi phân: $u'v + u \left( v' - \frac{2}{x}v \right) = x^3 e^x$	0,25
	Tìm được nghiệm riêng của phương trình $v' - \frac{2}{x}v = 0$ như sau: $\mathbf{v} = \mathbf{x}^2$	0,5
	Viết được: $u' = xe^x$	0,25
	Viết được: $\mathbf{u} = \int \mathbf{x}e^{\mathbf{x}}d\mathbf{x}$	0,25
	Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính được: $\int xe^x dx = e^x(x - 1) + C$	0,25
	Viết được nghiệm tổng quát: $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = [\mathbf{e}^{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{1}) + \mathbf{C}] \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^2 \mathbf{e}^{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{1}) + \mathbf{C} \mathbf{x}^2$ , với $C$ là hằng số tích phân có giá trị tùy ý.	0,25

Đề số: 04

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1			2
	a		1
		$-1 \leq u \leq 1$ và $0 \leq v \leq 2$	0,5
		$J = 1/5$	0,5
	b		1
		$I = \int_{-1}^1 du \int_0^2 dv (2u + 3v) \cdot (1/5)$	0,5
		$I = \int_{-1}^1 du (4u + 6)/5$	0,25
		$I = 12/5$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2			2,00
		• Vẽ được hình cầu [không bắt buộc]	
		• Tọa độ cầu $z = r \cos \theta$ , $x = r \sin \theta \cos \phi$ , $y = r \sin \theta \sin \phi$	0,5
		• Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, \pi/2]$ , $r \in [0, a]$ , $\theta \in [0, \pi/2]$	0,25
		• Định thức Jacobi: $ J  = r^2 \sin \theta$	0,25
		• Tích phân bằng $I = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a dr r^5 \sin^3 \theta \cos \theta$	0,25
		• Tính được tích phân $\int dr r^5 = r^6/6$ [hoặc $\int_0^{\pi/2} d\phi = \pi/2$ ]	0,25
		• Tính được thêm tích phân thứ hai $\int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3 \theta \cos \theta = \sin^4(\theta)/4$	0,25
		• Đáp số: $\pi a^6/48$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
3		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = t, y = -3t^2, z = 1, 0 \leq t \leq 1$	0,5
	b		1,50
		$dx = dt, \quad dy = -6tdt, \quad dz = 0$	0,25
		$I = \int_0^1 ((-3t^2)^2 + t(-3t^2))dt + (t^2 - t(-3t^2))(-6t)dt + 0$	0,5
		$= \int_0^1 (-9t^4 - 9t^3)dt$	0,25

		$= \left(-\frac{9}{5}t^5 - \frac{9}{4}t^4\right) \Big _0^1$	0,25
		$= -\frac{81}{20}$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
4			<b>2,00</b>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tham số hóa  <math display="block">x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi</math> </li> </ul>	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Miền lấy tích phân  <math display="block">0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\begin{cases} \mathbf{r}'_u = (\cos v, \sin v, 1) \\ \mathbf{r}'_v = (-u \sin v, u \cos v, 0) \end{cases}</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\mathbf{N} = \mathbf{r}'_v \times \mathbf{r}'_u = (u \cos v, u \sin v, -u)</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Đưa về tích phân  <math display="block">I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (u^3 \cos^2 v \sin v + u^2) \, du \, dv</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Chuyển về  <math display="block">I = \int_0^{2\pi} \left( \frac{u^4}{4} \cos^2 v \sin v + \frac{u^3}{3} \Big _0^1 \right) dv = \frac{v}{3} - \frac{1}{12} \cos^3 v \Big _0^{2\pi}</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tính đúng  <math display="block">I = \frac{2\pi}{3}</math> </li> </ul>	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5		(Làm cách khác, ví dụ theo phương pháp Lagrange - biến thiên hằng số, đúng vẫn tính đủ điểm)	<b>2,00</b>
		Viết được: $y(x) = u(x)v(x)$	0,25
		Viết lại được phương trình vi phân: $u'v + u \left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x^3 \cos x$	0,25
		Tìm được nghiệm riêng của phương trình $v' - \frac{2}{x}v = 0$ như sau: $\mathbf{v} = \mathbf{x}^2$	0,5
		Viết được: $u' = x \cos x$	0,25

		Viết được: $\mathbf{u} = \int \mathbf{x} \cos \mathbf{x} d\mathbf{x} + \mathbf{C}$	0,25
		Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính được: $\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x$	0,25
		Viết được nghiệm tổng quát: $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (\cos \mathbf{x} + \mathbf{x} \sin \mathbf{x} + \mathbf{C}) \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^2 (\cos \mathbf{x} + \mathbf{x} \sin \mathbf{x}) + \mathbf{C} \mathbf{x}^2$ , với $C$ là hằng số tích phân có giá trị tùy ý.	0,25

Đề số: 05

Câu	Nội dung	Điểm
1		2
	$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ và } 0 \leq y \leq x\}$	0,5
	$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy (1+y)e^x$	0,5
	$I = \int_0^1 dx (x + x^2/2)e^x$	0,5
	$I = (x^2 e^x / 2)_0^1$	0,25
	$I = e/2$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2			2,00
		• Vẽ được hình trụ [không bắt buộc]	
		• Tọa độ trụ $z = z, x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$	0,5
		• Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, \pi/2], z \in [0, a], r \in [0, b]$	0,25
		• Định thức Jacobi: $ J  = r$	0,25
		• Tích phân bằng $I = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^a dz \int_0^b dr r^3 z \sin \phi \cos \phi$	0,25
		• Tính được tích phân $\int dr r^3 = r^4/4$ [hoặc $\int dz z = z^2/2$ ]	0,25
		• Tính được thêm tích phân thứ hai $\int d\phi \sin \phi \cos \phi = \sin^2(\phi)/2$	0,25
		• Đáp số: $b^4 a^2 / 16$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
3		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = \cos t, y = \sin t, z = 1, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	0,5
	b		1,50
		$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = 0$	0,25
		$I = \int_0^{\pi/2} (2 + \sin t + \cos t)(-\sin t) dt + (3 \cos t - 2 \sin t + 1)(\cos t) dt + 0$	0,5
		$= \int_0^{\pi/2} (-2 \sin t + \cos t - 3 \sin t \cos t - \sin^2 t + 3 \cos^2 t) dt$	0,25
		$= (2 \cos t + \sin t + \frac{3}{4} \cos 2t + t + \sin 2t) \Big _0^{\pi/2}$	0,25
		$= -\frac{5}{2} + \frac{\pi}{2}$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
4			<b>2,00</b>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tham số hóa  <math display="block">x = u \cos v, y = u \sin v, z = 2u</math> </li> </ul>	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Miền lấy tích phân  <math display="block">0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\begin{cases} r'_u = (\cos v, \sin v, 2) \\ r'_v = (-u \sin v, u \cos v, 0) \end{cases}</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\mathbf{N} = r'_v \times r'_u = (2u \cos v, 2u \sin v, -u)</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Đưa về tích phân  <math display="block">\int_0^{2\pi} \int_0^1 u^3 (2 \sin^2 v \cos v + 4 \cos v \sin v + 4) du dv</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Chuyển về  <math display="block">I = \int_0^1 u^3 du \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 v \cos v + 2 \sin 2v + 4) dv = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} \sin^3 v - \cos 2v + 4v \right) \Big _0^{2\pi}</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tính đúng  <math display="block">I = 2\pi</math> </li> </ul>	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5		<b>(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)</b>	<b>2,00</b>
		Đặt ẩn phụ: $u = \frac{y}{x}$	0,25
		Viết được: $y' = u'x + u$	0,25
		Viết lại phương trình: $u'x + u = \frac{u^2}{2u-1}$	0,25
		Viết được: $\int \frac{2u-1}{u(1-u)} du = \int \frac{dx}{x}$	0,25
		Phân tách được: $\int \frac{2u-1}{u(1-u)} du = - \int \frac{du}{u} + \frac{du}{1-u}$	0,25
		Tính được: $- \int \frac{du}{u} + \frac{du}{1-u} = - \ln  u(1-u) $	0,25
		Tính được: $\int \frac{dx}{x} = \ln  \bar{C}x $	0,25
		Tính được tích phân tổng quát: $u(1-u) = \frac{1}{\bar{C}x} \rightarrow \mathbf{y^2 - xy + Cx = 0}$	0,25

Đề số: 06

Câu	Nội dung	Điểm
1		<b>2,00</b>
	$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \text{ và } x^2 \leq y \leq 1\}$	0,5
	$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy (1 + x + y)$	0,5
	$I = \int_{-1}^1 dx (3/2 - x^2 + x - x^3 - x^4/2)$	0,5
	$I = (3x/2 - x^3/3 + x^2/2 - x^4/4 - x^5/10) \Big _{-1}^1$	0,25
	$I = 32/15$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2			<b>2,00</b>
		• Vẽ được hình cầu [không bắt buộc]	
		• Tọa độ cầu $z = r \cos \theta$ , $x = r \sin \theta \cos \phi$ , $y = r \sin \theta \sin \phi$	0,5
		• Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, \pi/2]$ , $r \in [0, a]$ , $\theta \in [0, \pi/2]$	0,25
		• Định thức Jacobi: $ J  = r^2 \sin \theta$	0,25
		• Tích phân bằng $I = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a dr r^5 \sin^3 \theta \cos \theta \cos \phi \sin \phi$	0,25
		• Tính được tích phân $\int dr r^5 = r^6/6$ [hoặc $\int d\phi \cos \phi \sin \phi = \sin^2(\phi)/2$ ]	0,25
		• Tính được thêm tích phân thứ hai $\int d\theta \sin^3 \theta \cos \theta = \sin^4(\theta)/4$	0,25
		• Đáp số: $a^6/48$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
3		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	<b>2,00</b>
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = \cos t, y = \sin t, z = 2, \pi/2 \leq t \leq \pi$	0,5
	b		1,50
		$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = 0$	0,25
		$I = \int_{\pi/2}^{\pi} (3 \cos t - 2 \sin t + 2)(-\sin t) dt + (3 \sin t - 4 + \cos t)(\cos t) dt + 0$	0,5
		$= \int_{\pi/2}^{\pi} (-2 \sin t - 4 \cos t + 2 \sin^2 t + \cos^2 t) dt$	0,25
		$= (2 \cos t - 4 \sin t + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4} \sin 2t) \Big _{\pi/2}^{\pi}$	0,25
		$= 2 + \frac{3\pi}{4}$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
4			<b>2,00</b>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tham số hóa  <math display="block">x = \cos u, y = \sin u, z = v</math> </li> </ul>	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Miền lấy tích phân  <math display="block">0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq a</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\begin{cases} r'_u = (-\sin u, \cos u, 0) \\ r'_v = (0, 0, 1) \end{cases}</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\mathbf{N} = r'_u \times r'_v = (\cos u, \sin u, 0)</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Đưa về tích phân  <math display="block">\int_0^a \int_0^{2\pi} (\cos^2 u \sin u + v \sin^2 u) \, du dv</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Chuyển về  <math display="block">I = \int_0^a \left( -\frac{1}{3} \cos^3 u + v \left( \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} \right) \Big _0^{2\pi} \right) dv = \pi \int_0^a v dv</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tính đúng  <math display="block">I = \frac{\pi a^2}{2}</math> </li> </ul>	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5		<b>(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)</b>	<b>2,00</b>
		Đặt ẩn phụ: $u = \frac{y}{x}$	0,25
		Viết được: $y' = u'x + u$	0,25
		Viết lại phương trình: $u'x + u = \frac{u^2}{2u+1}$	0,25
		Viết được: $-\int \frac{2u+1}{u(1+u)} du = \int \frac{dx}{x}$	0,25
		Phân tách được: $-\int \frac{2u+1}{u(1+u)} du = -\int \frac{du}{u} - \frac{du}{1+u}$	0,25
		Tính được: $-\int \frac{du}{u} - \frac{du}{1+u} = -\ln u(1+u) $	0,25
		Tính được: $\int \frac{dx}{x} = \ln \bar{C}x $	0,25
		Tính được tích phân tổng quát: $u(1+u) = \frac{1}{\bar{C}x} \rightarrow \mathbf{y^2 + xy + Cx = 0}$	0,25



Đề số: 07

Câu	Nội dung	Điểm
1		2
	$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3 \text{ và } \frac{1}{3}x \leq y \leq 1\}$	0,5
	$I = \int_0^3 dx \int_{\frac{1}{3}x}^1 dy (x + y - 2)$	0,5
	$I = \int_0^3 dx (-3/2 + 5x/3 - 7x^2/18)$	0,5
	$I = (-3x/2 + 5x^2/6 - 7x^3/54)_0^3$	0,25
	$I = -1/2$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2			2,00
		• Vẽ được hình [không bắt buộc]	
		• Miền lấy tích phân: $z \in [0, a], x \in [0, a - z], y \in [0, a - z - x]$	0,5
		• Tích phân bằng $I = \int_0^a dz \int_0^{a-z} dx \int_0^{a-z-x} dy z$ [lưu ý đúng thứ tự tích phân]	0,5
		• Tính được tích phân $\int_0^{a-z-x} dy = a - z - x$	0,25
		• Tính được thêm tích phân thứ hai $\int_0^{a-z} dx (a - z - x) = \frac{(a-z)^2}{2}$	0,25
		• Tính được thêm tích phân thứ ba $\int dz z(a - z)^2 = z^4/4 - 2az^3/3 + a^2z^2/2$	0,25
		• Đáp số: $a^4/24$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
3		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	2,00
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = t, y = 2t, z = 3t, 0 \leq t \leq 1$	0,5
	b		1,50
		$dx = dt, \quad dy = 2dt, \quad dz = 3dt$	0,25
		$I = \int_0^1 (t^2 - 6t^2 + \sin^2 \frac{\pi t}{4}) dt + (4t^2 - 3t^2) 2dt + (9t^2 - 2t^2) 3dt$	0,5
		$= \int_0^1 (18t^2 + \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{\pi t}{2})) dt$	0,25
		$= (6t^3 + \frac{t}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2}) \Big _0^1$	0,25
		$= \frac{13}{2} - \frac{1}{\pi}$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
4			<b>2,00</b>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tham số hóa  <math display="block">x = 6 \cos u, y = 6 \sin u, z = v</math> </li> </ul>	0,5
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Miền lấy tích phân  <math display="block">-3 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq 2\pi</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\begin{cases} r'_u = (-6 \sin u, 6 \cos u, 0) \\ r'_v = (0, 0, 1) \end{cases}</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">\mathbf{N} = r'_u \times r'_v = (6 \cos u, 6 \sin u, 0)</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Đưa về tích phân  <math display="block">\int_{-3}^1 \int_0^{2\pi} 36(\cos^2 u + \sin 2u) \, du dv</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Chuyển về  <math display="block">I = 36 \int_{-3}^1 dv \int_0^{2\pi} (\cos^2 u + \sin 2u) du = 144 \left( \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} - \frac{\cos 2u}{2} \Big _0^{2\pi} \right)</math> </li> </ul>	0,25
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Tính đúng  <math display="block">I = 144\pi</math> </li> </ul>	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
5		<b>(Làm cách khác, ví dụ theo phương pháp Lagrange - biến thiên hằng số, đúng vẫn tính đủ điểm)</b>	<b>2,00</b>
		Viết được: $y(x) = u(x)v(x)$	0,25
		Viết lại được phương trình vi phân: $u'v + u \left( v' - \frac{1}{x}v \right) = x^2 \cos x$	0,25
		Tìm được nghiệm riêng của phương trình $v' - \frac{1}{x}v = 0$ như sau: $\mathbf{v} = \mathbf{x}$	0,5
		Viết được: $u' = x \cos x$	0,25
		Viết được: $\mathbf{u} = \int \mathbf{x} \cos \mathbf{x} d\mathbf{x} + \mathbf{C}$	0,25
		Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính được: $\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x$	0,25

		<p>Viết được nghiệm tổng quát:</p> $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (\cos \mathbf{x} + \mathbf{x} \sin \mathbf{x} + \mathbf{C}) \mathbf{x} = \mathbf{x} (\cos \mathbf{x} + \mathbf{x} \sin \mathbf{x}) + \mathbf{C}\mathbf{x},$ <p>với <math>C</math> là hằng số tích phân có giá trị tùy ý.</p>	0,25
--	--	---	------

Đề số 8

Câu	Nội dung	Điểm
<b>1</b>		<b>2</b>
	$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 \text{ và } y \leq x \leq 2 - y\}$	0,5
	$I = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} dx(x - 2y)$	0,5
	$I = \int_0^1 dy 2(1 - y)(1 - 2y)$	0,5
	$I = (2y - 3y^2 + 4y^3/3)_0^1$	0,25
	$I = 1/3$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
<b>2</b>		<b>2,00</b>
	Vẽ được hình cầu [không bắt buộc]	
	Tọa độ cầu $z = r \cos \theta$ , $x = r \sin \theta \cos \phi$ , $y = r \sin \theta \sin \phi$	0,5
	Miền lấy tích phân: $\phi \in [0, \pi/2]$ , $r \in [0, a]$ , $\theta \in [0, \pi]$	0,25
	Định thức Jacobi: $ J  = r^2 \sin \theta$	0,25
	Tích phân bằng $I = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a dr r^3 \sin^2 \theta (\cos \phi + \sin \phi)$	0,25
	Tính được tích phân $\int dr r^3 = r^4/4$ [hoặc $\int d\phi (\cos \phi + \sin \phi) = \sin \phi - \cos \phi$ ]	0,25
	Tính được thêm tích phân thứ hai: $2 \int d\theta \sin^2 \theta = \int d\theta [1 - \cos(2\theta)] = \theta - \sin(2\theta)/2$	0,25
	Đáp số: $\pi a^4/4$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
<b>3</b>		(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)	<b>2,00</b>
	a		0,5
		Biểu diễn tham số: $x = 3t, y = 2t, z = t, 0 \leq t \leq 1$	0,5
	b		1,50
		$dx = 3dt, \quad dy = 2dt, \quad dz = dt$	0,25
		$I = \int_0^1 (4t^2 + t^2)3dt + (t^2 + 9t^2)2dt + (9t^2 + 4t^2 + \cos^2 \frac{\pi t}{4})dt$	0,5
		$= \int_0^1 (48t^2 + \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi t}{2}))dt$	0,25
		$= (16t^3 + \frac{t}{2} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2}) \Big _0^1$	0,25

		$= \frac{33}{2} + \frac{1}{\pi}$	0,25
--	--	----------------------------------	------

Câu	Nội dung	Điểm
4		<b>2,00</b>
	Tham số hóa $x = \cos u, y = \sin u, z = v$	0,5
	Miền lấy tích phân $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2$	0,25
	$\begin{cases} \mathbf{r}'_u = (-\sin u, \cos u, 0) \\ \mathbf{r}'_v = (0, 0, 1) \end{cases}$	0,25
	$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (\cos u, \sin u, 0)$	0,25
	Đưa về tích phân $\int_0^2 \int_0^{2\pi} (\cos^3 u + v \sin u) \, du dv$	0,25
	Chuyển về $I = \int_0^2 \left( \sin u - \frac{\sin^3 u}{3} - v \cos u \right) \Big _0^{2\pi} dv$	0,25
	Tính đúng $I = 0$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
5	<b>(Làm cách khác đúng vẫn tính đủ điểm)</b>	<b>2,00</b>
	Viết được: $y(x) = u(x)v(x)$	0,25
	Viết lại được phương trình vi phân: $u'v + u \left( v' - \frac{1}{x}v \right) = x^2 e^x$	0,25
	Tìm được nghiệm riêng của phương trình $v' - \frac{1}{x}v = 0$ như sau: $\mathbf{v} = \mathbf{x}$	0,5
	Viết được: $u' = x e^x$	0,25
	Viết được: $\mathbf{u} = \int \mathbf{x} e^{\mathbf{x}} d\mathbf{x} + \mathbf{C}$	0,25
	Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính được: $\int x e^x dx = e^x(x - 1)$	0,25
	Viết được nghiệm tổng quát: $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = [e^{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - 1) + \mathbf{C}] \mathbf{x} = \mathbf{x} e^{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - 1) + \mathbf{C}\mathbf{x}$ , với $C$ là hằng số tích phân có giá trị tùy ý.	0,25