

BÀI TẬP CHƯƠNG 4
MÔN HỌC: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
HỌC KỲ I, NĂM HỌC 2023-2024
TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA

Bài tập 1) Trong hệ toạ độ Đề-các ba chiều, xét các vectơ sau: $\mathbf{a} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (-3, 2, 0)$, $\mathbf{c} = (1, 4, -2)$, và $\mathbf{d} = (5, -1, 3)$. Tính các phép toán sau:

- 1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
- 2) $3\mathbf{c} \times 5\mathbf{d}$, $15\mathbf{d} \times \mathbf{c}$, $15\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$, $15\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$.
- 3) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d}$, $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{d}$, $\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$.

Bài tập 2) Trong hệ toạ độ Đề-các ba chiều, chứng minh các đẳng thức sau cho các vectơ bất kỳ:

- 1) $\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}$.
- 2) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

Bài tập 3) Tìm thể tích của hình hộp xiên, biết các vectơ cạnh của nó là $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, và $-2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$.

Bài tập 4) Lực của trường tĩnh điện được cho bởi hàm f và có hướng của gradient của f . Tính $\text{grad } f$ và giá trị của nó tại điểm P , biết

- 1) $f(x, y) = xy$ và $P(-4, 5)$.
- 2) $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$ và $P(12, 0, 16)$, với $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- 3) $f(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2$ và $P(5, -1, -11)$.

Bài tập 5) Một dòng chảy có thế năng vận tốc là f , hãy tìm vận tốc $\mathbf{v} = \nabla f$ và giá trị của vận tốc tại điểm P , biết

- 1) $f(x, y) = x^2 - 6x - y^2$ và $P(-1, 5)$.
- 2) $f(x, y) = x[1 + (x^2 + y^2)^{-1}]$ và $P(1, 1)$.

Bài tập 6) Các thí nghiệm chỉ ra rằng trong một trường nhiệt độ, nhiệt sẽ truyền theo hướng của gradient của nhiệt độ T . Tìm hướng này tại điểm P , biết

- 1) $T = 3x^2 - 2y^2$ và $P(2, 1)$,
- 2) $T = \frac{z}{x^2 + y^2}$ và $P(0, 1, 2)$.

Bài tập 7) Cho các hàm $f = xy - yz$, $\mathbf{v} = [2y, 2z, 4x + z]$ và $\mathbf{w} = [3z^2, x^2 - y^2, y^2]$. Tính

- 1) $\text{div } \mathbf{v}$, $\text{div } \mathbf{w}$.
- 2) $\text{curl } \mathbf{v}$, $\text{curl } \mathbf{w}$.

3) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f), \quad \nabla^2 f, \quad \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{w})$.

Bài tập 8) Xét hệ hai hạt chất điểm, một hạt nằm tại điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$, hạt còn lại nằm tại điểm $P(x, y, z)$. Thế năng hấp dẫn giữa hai hạt này được mô tả bởi hàm $f(x, y, z) = \frac{c}{r}$, với $r (> 0)$ là khoảng cách giữa hai điểm P_0 và P , và c là hằng số tương tác hấp dẫn. Hãy tính lực hút (lực hấp dẫn) \mathbf{F} giữa hai hạt chất điểm này biết rằng $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$.

Bài tập 9) Xét trường vô hướng $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$. Tính đạo hàm của f theo hướng véc-tơ $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ tại điểm $P(2, 1, 3)$. Dấu của giá trị đạo hàm thu được cho ta thông tin gì về sự tăng giảm giá trị của f theo hướng \mathbf{v} ?