TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Học kỳ 1, Năm học 2023-2024
Hà Nội, 17/10/2023

Chương 1

Ma trận, Định thức, và Hệ phương trình tuyến tính

Chương 2

Không gian véctơ,
và Ánh xạ tuyến tính

Chương 3

Bài toán giá trị riêng, và Chéo hóa ma trận

3.1 Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Các véc tơ dưới đây có phải véc tơ riêng của A không?

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bài 2. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Các véc tơ dưới đây có phải véc tơ riêng của A không?

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix},\ w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bài 3. Các ánh xạ trượt ngang và trượt dọc của $\mathbb{R}^2$ lần lượt cho bởi các ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tìm các giá trị riêng và các véctơ riêng của các ma trận đó.

Bài 4. Cùng câu hỏi cho các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của và các véc tơ riêng tương ứng của ma trận..

(b) Ma trận có chéo hóa được không?

Bài 5. Hãy viết ma trận của phép quay của $\mathbb{R}^2$ quanh gốc tọa độ O một góc 30 độ ngược chiều kim đồng hồ. Tìm các giá trị riêng và các véctơ riêng (nếu có) của ma trận đó.

Bài 6. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của và các véc tơ riêng tương ứng của A.

(b) Ma trận A có chéo hóa được không. Nếu có hãy tìm ma trận làm chéo hóa A và ma trận chéo đồng dạng của A.

(c) Tính A^{2023}.

Bài 7. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của A.

(b) Tìm các véc tơ riêng thực của A.

Bài 8. Cùng câu hỏi cho các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

(a) Tìm các giá trị riêng của và các véc tơ riêng tương ứng của ma trận.

(b) Ma trận có chéo hóa được không. Nếu có hãy tìm ma trận làm chéo hóa A và ma trận chéo đồng dạng của nó.

Bài 9. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của. Ma trận A có chéo hóa được không?

(b) Tìm các véc tơ riêng tương ứng của A.

(c) Xác định ma trận làm chéo hóa A và ma trận chéo đồng dạng của A.

Bài 10. Cho ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Chéo hóa A (nếu có thể).

(b) Tính A^{2023}.

Bài 11. Chéo hóa các ma trận sau (nếu có thể)

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bài 12. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của và các véc tơ riêng tương ứng của A.

(b) Ma trận A có chéo hóa được không. Nếu có hãy tìm ma trận làm chéo hóa A và ma trận chéo đồng dạng của A.

(c) Tìm ma trận B (nếu có) sao cho $A^3B = I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3.

Bài 13. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của và các véc tơ riêng tương ứng của A.

(b) Ma trận A có chéo hóa được không. Nếu có hãy tìm ma trận làm chéo hóa A và ma trận chéo đồng dạng của A.

(c) Tìm ma trận B (nếu có) sao cho $BA^3 = I - 2B$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3.

Bài 14. Cho ma trận sau đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Cho các véc tơ $u = (1, -3, 4)^T, v = (2, 3, -1)^T$. Hãy kiểm tra rằng $(Au, v) = (u, Av)$.

(b) Chứng minh rằng $(Au, v) = (u, Av)$ với mọi véc tơ cột $u, v \in \mathbb{R}^3$.

(c) Hãy chéo hóa A.

(d) Hãy chéo hóa trực giao A, tức là tìm một ma trận trực giao P sao cho P^TAP có dạng chéo.

Bài 15. Gọi a là chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 6a - 25 & -3a + 15 \\ 10a - 50 & -5a + 30 \end{bmatrix}.$$

Bài 16. Gọi a, b là hai chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} -4a + b + 9 & -2a + b + 5 \\ -2a + b + 5 & -a + b + 3 \end{bmatrix}.$$

Bài 17. Gọi a, b là hai chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} 4a - 3b & 12a - 12b & 6a - 6b \\ -a + b & -3a + 4b & -2a + 2b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Bài 18. Gọi a, b là hai chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} -1 & -1-b & -1-b \\ -a-1 & -2a+2b-1 & -3a+2b-1 \\ a+1 & 2a-b+1 & 3a-b+1 \end{bmatrix}.$$

Bài 19. Gọi a, b, c là ba chữ số cuối cùng trong mã sinh viên, hãy chéo hóa ma trận sau

$$\begin{bmatrix} c & b+c & b+c \\ -a+c & -2a-2b+c & -3a-2b+c \\ a-c & 2a+b-c & 3a+b-c \end{bmatrix}.$$

Bài 20. Giả sử A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận A^2 bằng bình phương của các giá trị riêng của A (kể cả bội).