

Tên học phần: *Giải tích*   Số tín chỉ: 3

Ngày thi: 10/6/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

**Đề số 1**

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)

(a) Xác định miền  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  trong tọa độ cực.

(b) Tính tích phân  $I = \iint_D (x^2 + 2y^2) \, dx \, dy$ .

**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân sau:

$$I = \iiint_B \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} \, dV,$$

trong đó  $B$  là miền xác định bởi  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $z \geq 0$ .

**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung  $(C)$  là một phần tư đường tròn  $x^2 + y^2 = 1$ , định hướng từ  $A(1, 0)$  đến  $B(0, 1)$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $(C)$ .

(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (2x^2 + y^2, 2x - 3y)$ .

**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt  $S$  xác định bởi  $x + y + z = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , và  $z \geq 0$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r}(u, v)$  của  $S$  và một vectơ pháp  $\mathbf{N}$  tương ứng.

(b) Giả sử  $S$  được định hướng bởi vectơ pháp đơn vị  $\mathbf{n}$  hướng lên trên, có nghĩa là  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ .

Tính tích phân  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA$ , trong đó  $\mathbf{F} = (1, e^y, e^x)$ .

**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3 + 3x.$$

Hết

– Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.

– Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: *Giải tích*   Số tín chỉ: 3

Ngày thi: 10/6/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề số 10

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

biết miền  $D$  được giới hạn bởi đường tròn  $x^2 + y^2 = 4x$ .

**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính thể tích của hình được xác định bởi các điều kiện  $x^2 + y^2 \leq z^4$  và  $z^2 \leq 4$ .

**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho các điểm  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 2)$  và gọi  $(C)$  là cung tròn định hướng từ điểm chính giữa  $M$  của cung  $AB$  đến điểm  $B$  của đường tròn  $x^2 + y^2 = 4$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $(C)$ .

(b) Tính tích phân đường  $J = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  của hàm vectơ  $\mathbf{F} = (2x + 6y, x^2 + y^2 - 4y)$ .

**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt  $S$  xác định bởi  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 4$

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r}(u, v)$  của  $S$  và một vectơ pháp tuyến  $\mathbf{N}$  tương ứng.

(b) Tính tích phân  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ , trong đó  $\mathbf{F} = (y, 3z^2, 3xz)$  và vectơ pháp đơn vị  $\mathbf{n}$  tạo với chiều dương của  $Oy$  một góc tù.

**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân sau:

$$y'(x^2 - y^2) - xy = 0.$$

Hết

– Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.

– Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: *Giải tích*   Số tín chỉ: 3

Ngày thi: 10/6/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

**Đề số 2**

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1)

(a) Tính Jacobian  $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ , biết  $u = x - y$  và  $v = x + 2y$ .

(b) Tính tích phân  $I = \iint_D (2x + y) dx dy$ , biết

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x - y \leq 3 \text{ và } -1 \leq x + 2y \leq 1\}.$$

**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân sau:

$$I = \iiint_B \frac{\cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{x^2 + y^2 + z^2} dV,$$

trong đó  $B$  là miền xác định bởi  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  và  $z \leq 0$

**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung  $(C)$  là một phần tư đường tròn  $x^2 + y^2 = 9$ , định hướng từ  $A(3, 0)$  đến  $B(0, 3)$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $(C)$ .

(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (-x^2 + y^2, x + y - 2)$ .

**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt  $S$  xác định bởi  $2x + 3y + z = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , và  $z \geq 0$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r}(u, v)$  của  $S$  và một vectơ pháp  $\mathbf{N}$  tương ứng.

(b) Giả sử  $S$  được định hướng bởi vectơ pháp đơn vị  $\mathbf{n}$  hướng lên trên, tức là  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ . Tính tích phân  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ , trong đó  $\mathbf{F} = (e^y, e^x, 0)$ .

**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{4 \sin 2x}{x^2} + \sqrt{x}.$$

Hết

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: *Giải tích*   Số tín chỉ: 3

Ngày thi: 10/6/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề số 9

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iint_D xy^2 dx dy,$$

biết miền  $D$  được xác định bởi  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0\}$ .

**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân

$$I = \iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz,$$

trong đó  $V$  là miền trong không gian  $Oxyz$  xác định bởi các điều kiện:  $x, y, z \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ , và  $x^2 + y^2 \leq z^2$ .

**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung  $(C)$  là nửa đường tròn  $x^2 + y^2 = 4$ , định hướng ngược chiều kim đồng hồ từ điểm  $A(0, 2)$  đến điểm  $B(0, -2)$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $(C)$ .

(b) Tính tích phân đường  $J = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  của hàm vectơ  $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + 3x, 3 - 2y)$ .

**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt  $S$  xác định bởi  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r}(u, v)$  của  $S$  và một vectơ pháp tuyến  $\mathbf{N}$  tương ứng.

(b) Tính tích phân  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ , trong đó  $\mathbf{F} = (3z^2, 1, xz)$  và vectơ pháp đơn vị  $\mathbf{n}$  tạo với chiều dương của  $Ox$  một góc nhọn.

**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân sau:

$$y'(2x + y) - 9x - 2y = 0.$$

Hết

– Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.

– Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: *Giải tích*   Số tín chỉ: 3

Ngày thi: 10/6/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

**Đề số 4**

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân  $I = \iint_D (2 + x - y) dx dy$ , biết miền  $D$  giới hạn bởi hai đường  $y = x^2$  và  $y = x + 2$ .

**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân sau:

$$I = \iiint_B \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dV,$$

trong đó  $B$  là miền xác định bởi  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  và  $x \leq 0$ .

**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho  $C$  là đoạn thẳng định hướng từ  $A(0,0,0)$  đến  $B(3,2,1)$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $C$ .

(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (xy - y^2, yz - z^2, (x + y)e^z)$ .

**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt  $S$  xác định bởi  $x = y^2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  và  $0 \leq z \leq y$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r}(u, v)$  của  $S$  và một vectơ pháp  $\mathbf{N}$  tương ứng.

(b) Tính tích phân  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ , trong đó  $\mathbf{F} = (\sin(y), 0, \cos(z^2))$  và  $\mathbf{n}$  là vectơ pháp đơn vị của  $S$  sao cho  $\mathbf{n}$  tạo với chiều dương của  $Ox$  một góc nhọn.

**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$y' - 2xy = 8x.$$

Hết

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: *Giải tích*   Số tín chỉ: 3

Ngày thi: 10/6/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề số 5

**Câu 1** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân  $I = \iint_D (x + y - 1)^2 dx dy$ , biết miền  $D = [-1, 1] \times [0, 2]$ .

**Câu 2** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Tính tích phân sau:

$$I = \iiint_B \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{x^2 + y^2 + z^2} dV,$$

trong đó  $B$  là miền xác định bởi  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  và  $y \geq 0$ .

**Câu 3** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho cung  $C$  là một phần parabol  $\begin{cases} y = x^2 \\ z = -x, \end{cases}$  định hướng từ  $A(0, 0, 0)$  đến  $B(1, 1, -1)$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  của  $C$ .

(b) Tính  $I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , biết  $\mathbf{F} = (x^2 + yz, y^2 + zx, z^2 + xe^z)$ .

**Câu 4** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho mặt  $S$  xác định bởi  $x = 2y^2, 0 \leq y \leq 2$ , và  $0 \leq z \leq y$ .

(a) Tìm một biểu diễn tham số  $\mathbf{r}(u, v)$  của  $S$  và một vectơ pháp  $\mathbf{N}$  tương ứng.

(b) Tính tích phân  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ , trong đó  $\mathbf{F} = (0, y, x \sin(z))$  và  $\mathbf{n}$  là vectơ pháp đơn vị tạo với chiều dương của  $Ox$  một góc nhọn.

**Câu 5** (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Giải phương trình vi phân sau:

$$2x^2 y' - x^2 - x - 1 = 0,$$

với điều kiện  $y(1) = 0$ .

————— Hết —————

– Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.

– Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Đề số 1

Câu 1		2,00 điểm	CĐR 1.1
(a)		1,00	
	$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$	0,5	
	$1 \leq r \leq 2$	0,25	
	$0 \leq \varphi \leq 2\pi$	0,25	
(b)		1,00	
	$ J  = r, \quad dxdy = r dr d\varphi$	0,25	
	$I = \int_1^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi (1 + \sin^2 \varphi) r^3$	0,25	
	$I = (r^4/4)_1^2 [3\varphi/2 - \sin(2\varphi)/4]_0^{2\pi}$	0,25	
	$I = 45\pi/4$	0,25	

Câu 2		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Đổi biến $x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta), y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta), z = \rho \cos(\phi)$	0,25	
	Xác định cận $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$	0.25	

	Jacobian $J = \rho^2 \sin(\phi)$	0,25	
	Hàm số dưới dấu tích phân $\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{e^\rho}{\rho^2}$	0,25	
	$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \frac{e^\rho}{\rho^2} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$	0,25	
	$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin(\phi) d\phi \int_1^2 e^\rho d\rho$	0,25	
	$= 2\pi \left( -\cos(\phi) \Big _0^{\pi/2} \right) \left( e^\rho \Big _1^2 \right)$	0,25	
	$= 2\pi(e^2 - e)$	0,25	

<b>Câu 3</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)		<b>0,5</b>	
	Biểu diễn tham số: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	0,5	
(b)		<b>1,5</b>	
	Tính được vi phân: $d\mathbf{r} = [-\sin t dt, \cos t dt]$	0,5	
	$I = \int_0^{\pi/2} (2\cos^2 t + \sin^2 t)(-\sin t) dt + (2\cos t - 3\sin t) \cos t dt$	0,25	
	$= \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos^2 t)(-\sin t) + 2\cos^2 t - 3\sin t \cos t] dt$	0,25	
	$= \left( \cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + \frac{3}{4} \cos 2t \right) \Big _0^{\pi/2}$	0,25	
	$= \frac{\pi}{2} - \frac{17}{6}$	0,25	

<b>Câu 4</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)		<b>1,0</b>	
	Biểu diễn tham số $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ .	0,25	
	Xác định miền của $u, v$ : $(u, v) \in R := \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u\}$ .	0,25	
	Tính $\mathbf{r}_u = (1, 0, -1)$ , $\mathbf{r}_v = (0, 1, -1)$ .	0,25	
	Tính $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (1, 1, 1) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .	0,25	



(b)		<b>1,0</b>	
	Tính được $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) = 1 + e^v + e^u$ .	0,25	
	Viết được $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \iint_R (1 + e^v + e^u) du dv$ .	0,25	
	Đưa về tích phân lặp $\int_0^1 du \int_0^{1-u} (1 + e^v + e^u) dv$ .	0,25	
	$= \int_0^1 (e^{1-u} - u + (1-u)e^u) du = 2e - 7/2$ .	0,25	
Ghi chú	Nếu thí sinh chọn một biểu diễn tham số mà vectơ pháp $\mathbf{N}$ có hướng ngược lại thì chấm tương tự, kết quả đổi dấu và sinh viên vẫn được đủ điểm.	0,25	

<b>Câu 5</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
	Đặt $y(x) = u(x)v(x)$	0,25	
	Đưa PTVP về $u'v + u \left( v' - \frac{2}{x}v \right) = 2x^3 + 3x.$	0,25	
	Một nghiệm $v \neq 0$ thỏa mãn PT $v' - \frac{2}{x}v = 0,$ $v = x^2$	0,5	
	Tìm $u$ thỏa mãn PT $u'x^2 = 2x^3 + 3x$ .	0,25	
	$u = \int (2x + \frac{3}{x}) dx$	0,25	
	$u = x^2 + 3 \ln x  + C$	0,25	
	Nghiệm TQ $y = uv = x^4 + 3x^2 \ln x  + Cx^2.$	0,25	

Đề số 10

Câu 1		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Vẽ hình. Đặt $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, J = r$ . Miền $D'$ xác định bởi $D' = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 4 \cos \varphi\}.$	0,5	
	$I = \iint_{D'} r^3 dr d\varphi$ $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} r^3 dr$	0.5	
	$I = \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^4}{4} \right _0^{4 \cos \varphi} d\varphi.$	0.5	
	$I = 8 \int_0^{2\pi} (3 + 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi) d\varphi.$	0.25	
	$I = 48\pi.$	0.25	

Câu 2		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Thể tích của hình được xác định bởi tích phân: $I = \int_V dV$	0,25	
	Đổi biến: $x = r \cos \phi; y = r \sin \phi; z = z$	0,25	
	Xác định cận: $z \in [-2, 2]; \phi \in [0, 2\pi]$	0,25	

	$r \in [0, z^2]$	0,25	
	Jacobian: $J(r, \phi, z) = r$	0,25	
	Tích phân: $I = \int_{-2}^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z^2} dr r$	0,25	
	$I = 2\pi \int_{-2}^2 dz \frac{1}{2} z^4$	0,25	
	$I = \pi \frac{1}{5} z^5 \Big _{-2}^2 = \frac{64\pi}{5}$	0,25	

<b>Câu 3</b>		<b>2,00 điểm</b>	<b>CĐR 1.1</b>
(a)	Biểu diễn tham số $r = r(t) : x = 2 \cos t, y = 2 \sin t,$	0,25	
	ĐK của tham số: $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	0,25	
(b)	$r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ $F = (4 \cos t + 12 \sin t, 4 - 8 \sin t)$	0,5	
	$F \bullet r'(t) = -24 \sin^2 t + 8 \cos t - 24 \sin t \cos t$	0,25	
	$J = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-24 \sin^2 t + 8 \cos t - 24 \sin t \cos t) dt$	0,25	
	$J = \int_{\pi/4}^{\pi/2} [-12(1 - \cos 2t) + 8 \cos t - 12 \sin 2t] dt$	0,25	

	$J = -3\pi - 4 - 4\sqrt{2}$	0,25	
--	-----------------------------	------	--

<b>Câu 4</b>		<b>2,00 điểm</b>	<b>CĐR 1.1</b>
(a)		<b>0,5</b>	
	Đặt $x = u, z = v$ . Suy ra $y = u^2$ . Khi đó, mặt $S$ có biểu diễn tham số $\mathbf{r}(u, v) = (u, u^2, v), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 4.$	0,25	
	Các vector chỉ phương của $S$ là $\mathbf{r}'_u = (1, 2u, 0)$ và $\mathbf{r}'_v = (0, 0, 1)$ . Do đó, vector pháp tuyến của mặt $S$ là $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (2u, -1, 0).$	0,25	
(b)		<b>1,5</b>	
	Trước hết, $\mathbf{F} = (y, 3z^2, 3xz) = (u^2, 3v^2, 3uv)$ .	0,25	
	Theo định nghĩa, ta có $\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA &= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{N} du dv \\ &= \iint_R [3u^2 \cdot 2u + 3v^2 \cdot (-1) + 3uv \cdot 0] du dv \\ &= \iint_R [6u^3 - 3v^2] du dv. \end{aligned}$	0,25	
	Miền $R$ được xác định bởi $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 4\}.$	0,25	
	Vậy $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA = \int_0^4 dv \int_0^1 (6u^3 - 3v^2) du.$	0,25	
	Tính chi tiết $\int_0^4 dv \int_0^1 (6u^3 - 3v^2) du = -58.$	0,25	
	Kết luận $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA = -58.$	0,25	

<b>Câu 5</b>		<b>2,00 điểm</b>	<b>CĐR 1.1</b>
	Viết được: $y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$	0,25	
	Đặt: $u = \frac{y}{x}$ và tính được $y' = u + u'x$ .	0,25	
	Viết lại được phương trình theo $u$ : $u'x = -\frac{u^3}{u^2 - 1}$	0,25	
	Viết được: $\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{u^2 - 1}{u^3} du.$	0,25	
	Tính được: $\ln \left  \frac{x}{C} \right  = -\int \frac{u^2 - 1}{u^3} du = -\ln  u  - \frac{1}{2u^2}.$	0,5	
	Suy ra được tích phân tổng quát (nghiệm tổng quát): $ye^{\frac{x^2}{2y^2}} = C,$ với $C$ là hằng số tích phân tùy ý.	0,5	

**Đề số 2**

<b>Câu 1</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)		<b>1,00</b>	
	$x = (2u + v)/3, \quad y = (-u + v)/3$	0,5	
	$J = \frac{1}{3}$	0,5	
(b)		<b>1,00</b>	
	$0 \leq u \leq 3, \quad -1 \leq v \leq 1$	0,25	
	$I = \int_0^3 du \int_{-1}^1 dv (u + v) \cdot (1/3)$	0,25	
	$I = \int_0^3 du 2u/3$	0,25	
	$I = 3$	0,25	

<b>Câu 2</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
	Đổi biến $x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \quad z = \rho \cos(\phi)$	0,25	
	Xác định cận $1 \leq \rho \leq 2, \quad \pi/2 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$	0,25	
	Jacobian $J = \rho^2 \sin(\phi)$	0,25	

	Hàm số dưới dấu tích phân $\frac{\cos(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\cos(\rho)}{\rho^2}$	0,25	
	$I = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \frac{\cos(\rho)}{\rho^2} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$	0,25	
	$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(\phi) d\phi \int_1^2 \cos(\rho) d\rho$	0,25	
	$= 2\pi \left( -\cos(\phi) \Big _{\pi/2}^{\pi} \right) \left( \sin(\rho) \Big _1^2 \right)$	0,25	
	$= 2\pi (\sin(2) - \sin(1))$	0,25	

<b>Câu 3</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)		<b>0,5</b>	
	Biểu diễn tham số: $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	0,5	
(b)		<b>1,5</b>	
	Tính được vi phân: $d\mathbf{r} = [-3 \sin t dt, 3 \cos t dt]$	0,5	
	$I = \int_0^{\pi/2} (-9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t) (-3 \sin t) dt + (3 \cos t + 3 \sin t - 2)(3 \cos t) dt$ $= \int_0^{\pi/2} [(9 - 18 \cos^2 t)(-3 \sin t) + 9 \cos^2 t + 9 \sin t \cos t - 6 \cos t] dt$ $= \left( 27 \cos t - 54 \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{9}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) - \frac{9}{4} \cos 2t - 6 \sin t \right) \Big _0^{\pi/2}$ $= \frac{9\pi}{4} - \frac{21}{2}$	0,25 0,25 0,25 0,25	

<b>Câu 4</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)		<b>1,0</b>	
	Biểu diễn tham số $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 - 2u - 3v)$ .	0,25	
	Xác định miền của $u, v$ : $(u, v) \in R := \left\{ (u, v) \mid 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, 0 \leq v \leq \frac{1-2u}{3} \right\}$ .	0,25	
	Tính $\mathbf{r}_u = (1, 0, -2)$ , $\mathbf{r}_v = (0, 1, -3)$ .	0,25	
	Tính $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (2, 3, 1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .	0,25	
(b)		<b>1,0</b>	
	Tính được $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) = 2e^v + 3e^u$ .	0,25	
	Viết được $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \iint_R (2e^v + 3e^u) du dv$ .	0,25	

	Đưa về tích phân lặp $\int_0^{\frac{1}{2}} du \int_0^{\frac{1-2u}{3}} (2e^v + 3e^u) dv.$	0,25	
	$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( e^{(1-2u)/3} + e^u(1-2u) - 2 \right) du = -7 + \sqrt[3]{e} + 2\sqrt{e}.$	0,25	

<b>Câu 5</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
	Đặt $y(x) = u(x)v(x)$	0,25	
	Đưa PTVP về $u'v + u \left( v' + \frac{2}{x}v \right) = \frac{4 \sin 2x}{x^2} + \sqrt{x}$	0,25	
	Một nghiệm $v \neq 0$ thỏa mãn PT $v' + \frac{2}{x}v = 0,$ $v = \frac{1}{x^2}$	0,5	
	Tìm $u$ thỏa mãn PT $u' \frac{1}{x^2} = \frac{4 \sin 2x}{x^2} + \sqrt{x}$	0,25	
	$u = \int (4 \sin 2x + x^{5/2}) dx$	0,25	
	$u = -2 \cos 2x + \frac{2}{7} x^{7/2} + C$	0,25	
	Nghiem TQ $y = uv = \frac{1}{x^2} \left( -2 \cos 2x + \frac{2}{7} x^{7/2} + C \right).$	0,25	



Đề số 9

Câu 1		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Vẽ hình. Đặt $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, J = r$ . Miền $D'$ xác định bởi $D' = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 5 \right\}.$	0,5	
	$I = \iint_{D'} r^4 \cos \varphi \sin^2 \varphi dr d\varphi$	0.5	
	$I = \int_0^5 r^4 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi$	0.5	
	$I = \frac{r^5}{5} \left  \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right _{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.$	0.25	
	$I = \frac{1250}{3}.$	0.25	

Câu 2		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Đổi biến: $x = r \cos \phi \sin \theta; y = r \sin \phi \sin \theta; z = r \cos \theta$	0,25	
	Xác định cận: $r \in [1, 2]$	0,25	
	$\phi \in [0, \pi/2]$	0,25	
	$\theta \in [0, \pi/4]$	0,25	

	Jacobian: $J(r, \phi, \theta) = r^2 \sin \theta$	0,25	
	Tích phân: $I = \int_1^2 r^2 e^{r^3} dr \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta$	0,25	
	$I = \frac{1}{3} \int_1^2 e^{r^3} dr^3 \frac{\pi}{2} [-\cos \theta]_0^{\pi/4}$	0,25	
	$I = \frac{\pi}{6} (e^8 - e^1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0,25	

<b>Câu 3</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)	Biểu diễn tham số $r = r(t) : x = 2 \cos t, y = 2 \sin t,$	0,25	
	ĐK của tham số: $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$	0,25	
(b)	$r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ $F = (4 + 6 \cos t, 3 - 4 \sin t)$	0,5	
	$F \bullet r'(t) = -8 \sin t + 6 \cos t - 20 \sin t \cos t$	0,25	
	$J = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-8 \sin t + 6 \cos t - 20 \sin t \cos t) dt$	0,25	
	$J = [8 \cos t + 6 \sin t + 5 \cos(2t)]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -12$	0,25	

<b>Câu 4</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
--------------	--	------------------	---------

(a)		<b>0,5</b>	
	Đặt $x = u, z = v$ . Suy ra $y = u^2$ . Khi đó, mặt $S$ có biểu diễn tham số $\mathbf{r}(u, v) = (u, u^2, v), \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 1.$	0,25	
	Các vector chỉ phương của $S$ là $\mathbf{r}'_u = (1, 2u, 0)$ và $\mathbf{r}'_v = (0, 0, 1)$ . Do đó, vector pháp tuyến của mặt $S$ là $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (2u, -1, 0).$	0,25	
(b)		<b>1,5</b>	
	Trước hết, $\mathbf{F} = (3z^2, 1, xz) = (3v^2, 1, uv)$ .	0,25	
	Theo định nghĩa, ta có $\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA &= \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{N} du dv \\ &= \iint_R [3v^2 \cdot 2u + 1 \cdot (-1) + uv \cdot 0] du dv \\ &= \iint_R [6uv^2 - 1] du dv. \end{aligned}$	0,25	
	Miền $R$ được xác định bởi $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 1\}.$	0,25	
	Vậy $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA = \int_0^1 dv \int_0^2 (6uv^2 - 1) du.$	0,25	
	Tính chi tiết $\int_0^1 dv \int_0^2 (6uv^2 - 1) du = 2.$	0,25	
	Kết luận $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA = 2.$	0,25	

<b>Câu 5</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
	Viết được: $y' = \frac{9 + 2\frac{y}{x}}{2 + \frac{y}{x}}.$	0,25	
	Đặt: $u = \frac{y}{x}$ và tính được $y' = u + u'x$ .	0,25	

	Viết lại được phương trình theo $u$ : $u'x = -\frac{u^2-9}{u+2}$	0,25	
	Viết được: $\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{u+2}{u^2-9} du.$	0,25	
	Tích được: $\ln\left \frac{x}{C}\right  = -\frac{1}{6} \int \left( \frac{5}{u-3} + \frac{1}{u+3} \right) du = \frac{1}{6} \ln\left  \frac{1}{(u-3)^5(u+3)} \right .$	0,5	
	Suy ra được tích phân tổng quát (nghiệm tổng quát): $(y-3x)^5(y+3x) = C,$ với $C$ là hằng số tích phân tùy ý.	0,5	

**Đề số 4**

<b>Câu 1</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
	$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 2 \text{ và } x^2 \leq y \leq x + 2\}$	0,5	
	$I = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy (2 + x - y)$	0,5	
	$I = -\frac{1}{2} \int_{-1}^2 dx [(2 + x - y)^2]_{x^2}^{x+2}$	0,25	
	$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 dx (2 + x - x^2)^2$	0,25	
	$I = \frac{1}{2} (x^5/5 - x^4/2 - x^3 + 2x^2 + 4x)^2_{-1}$	0,25	
	$I = 81/20$	0,25	

<b>Câu 2</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
	Đổi biến $x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta), y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta), z = \rho \cos(\phi)$	0,25	
	Xác định cận $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi, \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$	0,25	
	Jacobian $J = \rho^2 \sin(\phi)$	0,25	

	Hàm số dưới dấu tích phân $\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\rho \cos(\phi)}{\rho^2} = \frac{\cos(\phi)}{\rho}$	0,25	
	$I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{\pi} \int_1^2 \frac{\cos(\phi)}{\rho} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$	0,25	
	$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_0^{\pi} \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi \int_1^2 \rho d\rho$	0,25	
	$= \pi \left( -\frac{\cos(2\phi)}{4} \Big _0^{\pi} \right) \left( \frac{\rho^2}{2} \Big _1^2 \right)$	0,25	
	$= 0$	0,25	

<b>Câu 3</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)		<b>0,5</b>	
	Biểu diễn tham số: $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 2t, \\ z = t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$	0,5	
(b)		<b>1,5</b>	
	Tính được vi phân: $d\mathbf{r} = [3, 2, 1]dt$	0,5	
	$I = \int_0^1 (6t^2 - 4t^2)(3)dt + (2t^2 - t^2)(2)dt + (2t + 3t)e^t dt$ $= \int_0^1 [8t^2 + 5te^t]dt$ $= \left( \frac{8}{3}t^3 + 5(t-1)e^t \right) \Big _0^1$ $= \frac{23}{3}$	0,25 0,25 0,25 0,25	

<b>Câu 4</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)		<b>1,0</b>	
	Biểu diễn tham số $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (u^2, u, v)$ .	0,25	
	Xác định miền của $u, v$ : $(u, v) \in R := \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq u\}$ .	0,25	
	Tính $\mathbf{r}_u = (2u, 1, 0)$ , $\mathbf{r}_v = (0, 0, 1)$ .	0,25	
	Tính $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (1, -2u, 0) = \mathbf{i} - 2u\mathbf{j}$ .	0,25	
(b)		<b>1,0</b>	
	Tính được $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) = \sin(u)$ .	0,25	

	Viết được $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \iiint_R (\sin(u)) du dv.$	0,25	
	Đưa về tích phân lặp $\int_0^{\pi/2} du \int_0^u \sin(u) dv.$	0,25	
	$= \int_0^{\pi/2} u \sin(u) du = 1.$	0,25	

<b>Câu 5</b>		<b>2,00 điểm</b>	<b>CĐR 1.1</b>
	Đặt $y(x) = u(x)v(x)$	0,25	
	Đưa PTVP về $u'v + u(v' - 2xv) = 8x$	0,25	
	Một nghiệm $v \neq 0$ thỏa mãn PT $v' - 2xv = 0,$ $v = e^{x^2}$	0,5	
	Tìm $u$ thỏa mãn PT: $u'e^{x^2} = 8x$	0,25	
	$u = \int 8xe^{-x^2} dx$	0,25	
	Đổi biến $t = -x^2$ tìm được $u = -4e^{-x^2} + C$	0,25	
	Nghiem TQ $y = uv = Ce^{x^2} - 4$	0,25	

Đề số 5

Câu 1		2,00 điểm	CĐR 1.1
	$D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ và } 0 \leq y \leq 2\}$	0,5	
	$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dy (x+y-1)^2$	0,5	
	$I = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 dx [(x+y-1)^3]_0^2$	0,25	
	$I = \int_{-1}^1 dx (2x^2 + 2/3)$	0,25	
	$I = (2x^3/3 + 2x/3)_{-1}^1$	0,25	
	$I = 8/3$	0,25	

Câu 2		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Đổi biến $x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta), y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta), z = \rho \cos(\phi)$	0,25	
	Xác định cận $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$	0,25	
	Jacobian $J = \rho^2 \sin(\phi)$	0,25	



	Hàm số dưới dấu tích phân $\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sin(\rho)}{\rho^2}$	0,25	
	$I = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_1^2 \frac{\sin(\rho)}{\rho^2} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$	0,25	
	$= \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi \int_1^2 \sin(\rho) d\rho$	0,25	
	$= \pi \left( -\cos(\phi) \Big _0^\pi \right) \left( -\cos(\rho) \Big _1^2 \right)$	0,25	
	$= 2\pi (\cos(1) - \cos(2))$	0,25	

<b>Câu 3</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)		<b>0,5</b>	
	Biểu diễn tham số: $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = -t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$	0,5	
(b)		<b>1,5</b>	
	Tính được vi phân: $d\mathbf{r} = [1, 2t, -1]dt$	0,5	
	$I = \int_0^1 (t^2 - t^3)(1)dt + (t^4 - t^2)(2t)dt + (t^2 + te^{-t})(-1)dt$ $= \int_0^1 [2t^5 - 3t^3 - te^{-t}]dt$ $= \left( \frac{2}{6}t^6 - \frac{3}{4}t^4 + (t+1)e^{-t} \right) \Big _0^1$ $= -\frac{17}{12} + 2e^{-1}$	0,25 0,25 0,25 0,25	

<b>Câu 4</b>		<b>2,00 điểm</b>	CĐR 1.1
(a)		<b>1,0</b>	
	Biểu diễn tham số $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (2u^2, u, v)$ .	0,25	
	Xác định miền của $u, v$ : $(u, v) \in R := \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq u\}$ .	0,25	
	Tính $\mathbf{r}_u = (4u, 1, 0)$ , $\mathbf{r}_v = (0, 0, 1)$ .	0,25	
	Tính $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (1, -4u, 0) = \mathbf{i} - 4u\mathbf{j}$ .	0,25	
(b)		<b>1,0</b>	
	Tính được $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) = -4u^2$ .	0,25	

	Viết được $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \iiint_R (-4u^2) du dv.$	0,25	
	Đưa về tích phân lặp $\int_0^2 du \int_0^u (-4u^2) dv.$	0,25	
	$= \int_0^2 (-4u^3) du = -u^4 \Big _0^2 = -16.$	0,25	

<b>Câu 5</b>		<b>2,00 điểm</b>	<b>CĐR 1.1</b>
	Viết được: $y' = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2}.$	0,25	
	Viết được $\int dy = \int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \right) dx.$	0,5	
	Tính được kết quả: $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln x  - \frac{1}{2x} + C,$ với $C$ là hằng số tích phân có giá trị tùy ý.	0,5	
	Từ điều kiện $y(1) = 0$ tính được giá trị của $C = 0$ .	0,5	
	Kết luận được nghiệm riêng cần tìm: $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln x  - \frac{1}{2x}.$	0,25	