

Tên học phần: Đại số tuyến tính Số TC: 3

Ngày thi: 02/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề số 1

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho θ là một số thực. Xét ma trận sau

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính định thức của $A(\theta)$. Vì sao ma trận $A(\theta)$ có nghịch đảo với mọi θ ?

(b) Tính $A(\theta)A(-\theta)$. Từ đó, tìm ma trận nghịch đảo của $A(\theta)$.

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số x_1, x_2, x_3, x_4 và tham số m như sau

$$\begin{cases} 6x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3m + 4 \\ 32x_1 - 32x_2 + 27x_3 + 39x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

(b) Với giá trị m tìm được ở câu (a), hãy giải hệ phương trình.

Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Gọi X là tập hợp các vectơ $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ trong \mathbb{R}^3 xác định bởi phương trình

$$2x_1 - 2x_2 - 23x_3 = 0.$$

(a) Chứng minh X là một không gian vectơ con của \mathbb{R}^3 .

(b) Tìm một cơ sở U của X . Chứng tỏ $\mathbf{v} = (3, -20, 2)$ thuộc X và tìm tọa độ của \mathbf{v} trong cơ sở U .

Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -10 \\ -2 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A .

(b) Tìm một ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó.

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Trong không gian ba chiều cho hai điểm $A(1, 2, 3)$ và $B(3, 2, 1)$ và xét hàm số $f(x, y, z) = xyz$. Tính đạo hàm của hàm f theo hướng vectơ \overrightarrow{AB} tại điểm A .

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: Đại số tuyến tính Số TC: 3

Ngày thi: 02/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề số 2

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Trong các phép tính sau, cái nào thực hiện được? Nếu được, hãy thực hiện phép tính đó.

$$2A + B^T, AB, CA, BC.$$

(b) Tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -6 & 7 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số x_1, x_2, x_3, x_4 và tham số m như sau

$$\begin{cases} -2x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3m + 2 \\ -8x_1 - 24x_2 - 13x_3 - 35x_4 = -2. \end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

(b) Với giá trị m tìm được ở câu (a), hãy giải hệ phương trình.

Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Gọi X là tập hợp các vectơ $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ trong \mathbb{R}^3 xác định bởi phương trình

$$23x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

(a) Chứng minh X là một không gian vectơ con của \mathbb{R}^3 .

(b) Tìm một cơ sở U của X . Chứng tỏ $\mathbf{v} = (4, 45, 1)$ thuộc X và tìm tọa độ của \mathbf{v} trong cơ sở U .

Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -10 \\ -2 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A .

(b) Tìm một ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó.

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Trong không gian ba chiều cho hai điểm $A(1, 2, 3)$ và $B(3, 2, 1)$ và xét hàm số $f(x, y, z) = xyz$. Tính đạo hàm của hàm f theo hướng vectơ \overrightarrow{AB} tại điểm B .

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: Đại số tuyến tính Số TC: 3

Ngày thi: 02/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề số 3

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & x \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính định thức của A . Tìm x để A có nghịch đảo.

(b) Với $x = 2$, tìm hàng thứ ba của ma trận A^{-1} .

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số x_1, x_2, x_3, x_4 và tham số m như sau

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_4 = -4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 4m + 5 \\ 7x_1 + 21x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 5. \end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

(b) Với giá trị m tìm được ở câu (a), hãy giải hệ phương trình.

Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Gọi X là tập hợp các vectơ $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ trong \mathbb{R}^3 xác định bởi phương trình

$$2x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0.$$

(a) Chứng minh X là một không gian vectơ con của \mathbb{R}^3 .

(b) Tìm một cơ sở U của X . Chứng tỏ $\mathbf{v} = (1, -4, 2)$ thuộc X và tìm tọa độ của \mathbf{v} trong cơ sở U .

Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A .

(b) Tìm một ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó.

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Trong không gian ba chiều cho hai điểm $A(1, 2, 3)$ và $B(3, 2, 1)$ và xét hàm số $f(x, y, z) = xyz$. Tính đạo hàm của hàm f theo hướng vectơ \overrightarrow{BA} tại điểm B .

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

Tên học phần: Đại số tuyến tính Số TC: 3

Ngày thi: 02/02/2023

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề số 4

Câu 1 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm ma trận X sao cho $AX = 2X + B$.

(b) Tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Câu 2 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số x_1, x_2, x_3, x_4 và tham số m như sau

$$\begin{cases} 4x_1 - 24x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 = 5m + 1 \\ 9x_1 - 54x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -2. \end{cases}$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

(b) Với giá trị m tìm được ở câu (a), hãy giải hệ phương trình.

Câu 3 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Gọi X là tập hợp các vectơ $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ trong \mathbb{R}^3 xác định bởi phương trình

$$19x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0.$$

(a) Chứng minh X là một không gian vectơ con của \mathbb{R}^3 .

(b) Tìm một cơ sở U của X . Chứng tỏ $\mathbf{v} = (2, 4, 3)$ thuộc X và tìm tọa độ của \mathbf{v} trong cơ sở U .

Câu 4 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 10 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A .

(b) Tìm một ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo và viết ma trận chéo đó.

Câu 5 (2,0 điểm; chuẩn đầu ra 1.1) Trong không gian ba chiều cho hai điểm $A(1, 2, 3)$ và $B(3, 2, 1)$ và xét hàm số $f(x, y, z) = xyz$. Tính đạo hàm của hàm f theo hướng vectơ \overrightarrow{BA} tại điểm A .

----- Hết -----

- Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không cần giải thích gì.

ĐỀ SỐ: 1

Đáp án gồm có.....trang

<u>Câu 1</u>		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Khai triển theo hàng thứ ba hoặc cột thứ ba, ta có $\det(A) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$	0,5	
	Ma trận $A(\theta)$ có nghịch đảo vì $\det(A(\theta)) = 1 \neq 0$ với mọi θ	0.5	
	Tính $A(\theta)A(-\theta) = I$	0.5	
	Suy ra $A(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	0.5	

<u>Câu 2</u>		2,00 điểm	CĐR 1.1
(a)		1,25	
	Ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình $A^{bs} = \left[\begin{array}{cccc c} 6 & -6 & 5 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3m+4 \\ 32 & -32 & 27 & 39 & 0 \end{array} \right].$	0,25	

	<p>Dùng phương pháp khử Gauss (hoặc Gauss-Jordan) đưa A^{bs} về dạng bậc thang</p> $A^{bs} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3m+4 \\ 6 & -6 & 5 & 7 & -2 \\ 32 & -32 & 27 & 39 & 0 \end{array} \right]$ $\rightarrow \left[\begin{array}{cccc c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3m+4 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -18m-26 \\ 0 & 0 & -5 & -25 & -96m-128 \end{array} \right]$ $\rightarrow \left[\begin{array}{cccc c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3m+4 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -26-18m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-6m \end{array} \right] = E.$	0,5	
	Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = 2$.	0,25	
	$\Leftrightarrow 2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$.	0,25	
(b)		0,75	
	<p>Thay $m = \frac{1}{3}$ vào ma trận bậc thang E, thu được hệ phương trình</p> $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ -x_3 - 5x_4 = -32. \end{cases}$	0,25	
	<p>Đặt $x_2 = s \in \mathbb{R}, x_4 = t \in \mathbb{R}$ và thay thế ngược, thu được hệ phương trình tương đương</p> $\begin{cases} x_1 = s + 3t - 27 \\ x_2 = s \\ x_3 = -5t + 32 \\ x_4 = t. \end{cases}$ <p>Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là</p> $\{(s + 3t - 27, s, -5t + 32, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$ <p>(Lưu ý: SV có thể có cách chọn biến tự do khác và tìm ra công thức nghiệm khác với đáp án)</p>	0,5	

Câu 3		2,00 điểm	CĐR 1.1
--------------	--	------------------	---------

(a)		0,75	
	Chứng minh X đóng kín với phép cộng.	0,25	
	Chứng minh X đóng kín với phép nhân vô hướng.	0,25	
	Nhận xét rằng $X \neq \emptyset$ và đóng kín với các phép toán nên nó là không gian con.	0,25	
(b)		1,25	
	<p>X là được tham số hóa bởi s và t như sau:</p> $(s, t) \mapsto (s + (23/2)t, s, t).$	0,25	
	Chọn $s = 1, t = 0$, thu được $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)$; Chọn $s = 0, t = 1$, thu được $\mathbf{u}_2 = (23/2, 0, 1)$.	0,25	
	Chứng minh $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ là một cơ sở của X và suy ra số chiều của X bằng 2.	0,50	
	Tọa độ của \mathbf{v} là $(-20, 2)$.	0,25	
Ghi chú	Cơ sở U không duy nhất. Do đó, thí sinh có thể chọn cơ sở khác. Khi đó, tọa độ của \mathbf{v} cũng sẽ khác.		

Câu 4		2,00 điểm	CĐR 1.1
a)		0,5	
	<p>Ma trận</p> $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -10 \\ -2 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$ <p>Đa thức đặc trưng</p> $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2.$	0,25	
	Giá trị riêng $\lambda = 3$ (nghiệm đơn), $\lambda = 1$ (nghiệm kép)	0,25	
b)		1,5	
	Với $\lambda = 3$, các vector riêng là $(k, k, 0)$. Cho $k = -1$, ta có $u_1 = (-1, -1, 0)$.	0,25	
	Với $\lambda = 1$, các vector riêng là $(2s - 5t, s, t)$.	0,25	
	Cho $s = 3, t = 1$, ta có $u_2 = (1, 3, 1)$.	0,25	
	Cho $s = 2, t = 1$, ta có $u_3 = (-1, 2, 1)$.	0,25	

	Ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	0,25	
	Ma trận chéo cần tìm là $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.	0,25	

Câu 5		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Tính được gradient của f tại điểm A : $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) = \nabla f(A) = (6, 3, 2)$	0,5	
	Tính được: $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$	0,5	
	Tính được vector \vec{v} (vector đơn vị của \overrightarrow{AB}): $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{ \overrightarrow{AB} } = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$	0,5	
	Tính được đạo hàm theo hướng \overrightarrow{AB} của f tại A : $D_{\vec{v}}f(A) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \overrightarrow{\text{grad}} f(A) \cdot \vec{v} = 2\sqrt{2}$	0,5	

ĐỀ SỐ: 2

Đáp án gồm có.....trang

Câu 1		2,00 điểm	CĐR 1.1
	$2A + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$	0,5	
	$AB = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	0.5	
	Khai triển theo cột thứ hai $D = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	0,25	
	Khai triển theo hàng thứ nhất $D = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	0,25	
	Khai triển theo cột thứ ba $D = -8 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$	0,25	
	$D = 80$	0,25	

Câu 2		2,00 điểm	CDR 1.1
(a)		1,25	
	<p>Ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình</p> $A^{bs} = \left[\begin{array}{cccc c} -2 & -6 & -3 & -7 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3m+2 \\ -8 & -24 & -13 & -35 & -2 \end{array} \right].$	0,25	
	<p>Dùng phương pháp khử Gauss (hoặc Gauss-Jordan) đưa A^{bs} về dạng bậc thang</p> $\begin{aligned} A^{bs} &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 0 & 3m+2 \\ -2 & -6 & -3 & -7 & -4 \\ -8 & -24 & -13 & -35 & -2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 0 & 3m+2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 6m \\ 0 & 0 & -5 & -35 & 24m+14 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 0 & 3m+2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 6m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14-6m \end{array} \right] = E. \end{aligned}$	0,5	
	Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = 2$.	0,25	
	$\Leftrightarrow 14 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}$.	0,25	
(b)		0,75	
	<p>Thay $m = \frac{7}{3}$ vào ma trận bậc thang E, thu được hệ phương trình</p> $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ -x_3 - 7x_4 = 14. \end{cases}$	0,25	

	<p>Đặt $x_2 = s \in \mathbb{R}, x_4 = t \in \mathbb{R}$ và thay thế ngược, thu được hệ phương trình tương đương</p> $\begin{cases} x_1 = -3s + 7t + 23 \\ x_2 = s \\ x_3 = -7t - 14 \\ x_4 = t. \end{cases}$ <p>Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là</p> $\{(-3s + 7t + 23, s, -7t - 14, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$ <p>(Lưu ý: SV có thể có cách chọn biến tự do khác và tìm ra công thức nghiệm khác với đáp án)</p>	0,5	
--	--	-----	--

Câu 3		2,00 điểm	CDR 1.1
(a)		0,75	
	Chứng minh X đóng kín với phép cộng.	0,25	
	Chứng minh X đóng kín với phép nhân vô hướng.	0,25	
	Nhận xét rằng $X \neq \emptyset$ và đóng kín với các phép toán nên nó là không gian con.	0,25	
(b)		1,25	
	<p>X là được tham số hóa bởi s và t như sau:</p> $(s, t) \mapsto ((2/23)s + (2/23)t, s, t).$	0,25	
	Chọn $s = 1, t = 0$, thu được $\mathbf{u}_1 = (2/23, 1, 0)$; Chọn $s = 0, t = 1$, thu được $\mathbf{u}_2 = (2/23, 0, 1)$.	0,25	
	Chứng minh $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ là một cơ sở của X và suy ra số chiều của X bằng 2.	0,50	
	Tọa độ của \mathbf{v} là $(45, 1)$.	0,25	
Ghi chú	Cơ sở U không duy nhất. Do đó, thí sinh có thể chọn cơ sở khác. Khi đó, tọa độ của \mathbf{v} cũng sẽ khác.		

Câu 4		2,00 điểm	CDR 1.1
a)		0,5	

	<p>Mã trận</p> $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -10 \\ -2 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$ <p>Đa thức đặc trưng</p> $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2.$	0,25	
	Giá trị riêng $\lambda = 1$ (nghiệm đơn), $\lambda = -1$ (nghiệm kép)	0,25	
b)		1,5	
	Với $\lambda = 1$, các vector riêng là $(k, k, 0)$. Cho $k = -1$, ta có $u_1 = (-1, -1, 0)$.	0,25	
	Với $\lambda = -1$, các vector riêng là $(2s - 5t, s, t)$.	0,25	
	Cho $s = 3, t = 1$, ta có $u_2 = (1, 3, 1)$.	0,25	
	Cho $s = 2, t = 1$, ta có $u_3 = (-1, 2, 1)$.	0,25	
	<p>Mã trận làm chéo hóa $P = [u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$</p>	0,25	
	<p>Mã trận chéo cần tìm là $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$</p>	0,25	

Câu 5		2,00 điểm	CĐR 1.1
	<p>Tính được gradient của f tại điểm B:</p> $\overrightarrow{\text{grad}} f(B) = \nabla f(B) = (2, 3, 6)$	0,5	
	<p>Tính được: $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$</p>	0,5	
	<p>Tính được vector \vec{v} (vector đơn vị của \overrightarrow{AB}):</p> $\vec{l} = \frac{\overrightarrow{AB}}{ \overrightarrow{AB} } = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$	0,5	
	<p>Tính được đạo hàm theo hướng \overrightarrow{AB} của f tại B:</p> $D_{\vec{v}}f(B) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(B) = \overrightarrow{\text{grad}} f(B) \cdot \vec{v} = -2\sqrt{2}$	0,5	

ĐỀ SỐ: 3

Đáp án gồm có.....trang

<u>Câu 1</u>		2,0 điểm	CĐR 1.1
	Định thức của A $\det(A) = 5x - 5$	0,5	
	Ma trận A có nghịch đảo khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$	0,25	
	$\det(A) \neq 0 \iff x \neq 1.$	0,25	
	$c_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -15$	0,25	
	$c_{23} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 5$	0,25	
	$c_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5$	0,25	
	Hàng thứ ba cần tìm $\frac{1}{\det(A)} [c_{13} \ c_{23} \ c_{33}] = [-3 \ 1 \ -1]$	0,25	

<u>Câu 2</u>		2,00 điểm	CĐR 1.1
(a)		1,25	

	<p>Ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình</p> $A^{bs} = \left[\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4m+5 \\ 7 & 21 & 5 & -5 & 5 \end{array} \right].$	0,25	
	<p>Dùng phương pháp khử Gauss (hoặc Gauss-Jordan) đưa A^{bs} về dạng bậc thang</p> $\begin{aligned} A^{bs} &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4m+5 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & -4 \\ 7 & 21 & 5 & -5 & 5 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4m+5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -9-4m \\ 0 & 0 & -2 & -12 & -28m-30 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc c} 1 & 3 & 1 & 1 & 4m+5 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -9-4m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12-20m \end{array} \right] = E. \end{aligned}$	0,5	
	Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = 2$.	0,25	
	$\Leftrightarrow -12 - 20m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.	0,25	
(b)		0,75	
	<p>Thay $m = -\frac{3}{5}$ vào ma trận bậc thang E, thu được hệ phương trình</p> $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = \frac{13}{5} \\ -x_3 - 6x_4 = -\frac{33}{5}. \end{cases}$	0,25	

	<p>Đặt $x_2 = s \in \mathbb{R}, x_4 = t \in \mathbb{R}$ và thay thế ngược, thu được hệ phương trình tương đương</p> $\begin{cases} x_1 = -3s + 5t - 4 \\ x_2 = s \\ x_3 = -6t + \frac{33}{5} \\ x_4 = t. \end{cases}$ <p>Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là</p> $\left\{ \left(-3s + 5t - 4, s, -6t + \frac{33}{5}, t \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$ <p>(Lưu ý: SV có thể có cách chọn biến tự do khác và tìm ra công thức nghiệm khác với đáp án)</p>	0,5	
--	--	-----	--

Câu 3		2,00 điểm	CĐR 1.1
(a)		0,75	
	Chứng minh X đóng kín với phép cộng.	0,25	
	Chứng minh X đóng kín với phép nhân vô hướng.	0,25	
	Nhận xét rằng $X \neq \emptyset$ và đóng kín với các phép toán nên nó là không gian con.	0,25	
(b)		1,25	
	<p>X là được tham số hóa bởi s và t như sau:</p> $(s, t) \mapsto (2s + (9/2)t, s, t).$	0,25	
	Chọn $s = 1, t = 0$, thu được $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0)$; Chọn $s = 0, t = 1$, thu được $\mathbf{u}_2 = (9/2, 0, 1)$.	0,25	
	Chứng minh $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ là một cơ sở của X và suy ra số chiều của X bằng 2.	0,50	
	Tọa độ của \mathbf{v} là $(-4, 2)$.	0,25	
Ghi chú	Cơ sở U không duy nhất. Do đó, thí sinh có thể chọn cơ sở khác. Khi đó, tọa độ của \mathbf{v} cũng sẽ khác.		

Câu 4		2,00 điểm	CĐR 1.1
a)		0,5	

	<p>Ma trận</p> $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$ <p>Đa thức đặc trưng</p> $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda - 4 = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)^2.$	0,25	
	Giá trị riêng $\lambda = -1$ (nghiệm đơn), $\lambda = -2$ (nghiệm kép)	0,25	
b)		1,5	
	Với $\lambda = -1$, các vector riêng là $(k, k, 0)$. Cho $k = 1$, ta có $u_1 = (1, 1, 0)$.	0,25	
	Với $\lambda = -2$, các vector riêng là $(2s, t, s)$.	0,25	
	Cho $s = 3, t = 7$, ta có $u_2 = (6, 7, 3)$.	0,25	
	Cho $s = 1, t = 2$, ta có $u_3 = (2, 2, 1)$.	0,25	
	Ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$	0,25	
	Ma trận chéo cần tìm là $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$	0,25	

Câu 5		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Tính được gradient của f tại điểm B : $\overrightarrow{\text{grad}} f(B) = \nabla f(B) = (2, 3, 6)$	0,5	
	Tính được: $\overrightarrow{BA} = (-2, 0, 2)$	0,5	
	Tính được vector \vec{v} (vector đơn vị của \overrightarrow{BA}): $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{BA}}{ \overrightarrow{BA} } = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0,5	
	Tính được đạo hàm theo hướng \overrightarrow{BA} của f tại B : $D_{\vec{v}}f(B) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(B) = \overrightarrow{\text{grad}} f(B) \cdot \vec{v} = 2\sqrt{2}$	0,5	

ĐỀ SỐ: 4

Đáp án gồm có.....trang

Câu 1		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Chuyển về $(A - 2I)X = B$	0,5	
	Tính nghịch đảo của $A - 2I$ $(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$	0,25	
	Tính X $X = (A - 2I)^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$	0,25	
	Khai triển theo hàng thứ năm $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	0,25	
	Khai triển theo hàng thứ ba $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	0,25	
	Khai triển theo hàng thứ ba $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}$	0,25	

	$D = -1$	0,25	
--	----------	------	--

Câu 2		2,00 điểm	CĐR 1.1
(a)		1,25	
	Ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình $A^{bs} = \left[\begin{array}{cccc c} 4 & -24 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & -4 & 5m+1 \\ 9 & -54 & 7 & -4 & -2 \end{array} \right].$	0,25	
	Dùng phương pháp khử Gauss (hoặc Gauss-Jordan) đưa A^{bs} về dạng bậc thang $E = \left[\begin{array}{cccc c} 1 & -6 & 1 & -4 & 5m+1 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -3-20m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5-5m \end{array} \right].$	0,5	
	Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs}) = 2$.	0,25	
	$\Leftrightarrow -5 - 5m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.	0,25	
(b)		0,75	
	Thay $m = -1$ vào ma trận bậc thang E , thu được hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \\ -x_3 + 16x_4 = 17. \end{cases}$	0,25	

	<p>Đặt $x_2 = s \in \mathbb{R}, x_4 = t \in \mathbb{R}$ và thay thế ngược, thu được hệ phương trình tương đương</p> $\begin{cases} x_1 = 6s - 12t + 13 \\ x_2 = s \\ x_3 = 16t - 17 \\ x_4 = t. \end{cases}$ <p>Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là</p> $\{(6s - 12t + 13, s, 16t - 17, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$ <p>(Lưu ý: SV có thể có cách chọn biến tự do khác và tìm ra công thức nghiệm khác với đáp án)</p>	0,5	
--	--	-----	--

Câu 3		2,00 điểm	CĐR 1.1
(a)		0,75	
	Chứng minh X đóng kín với phép cộng.	0,25	
	Chứng minh X đóng kín với phép nhân vô hướng.	0,25	
	Nhận xét rằng $X \neq \emptyset$ và đóng kín với các phép toán nên nó là không gian con.	0,25	
(b)		1,25	
	<p>X là được tham số hóa bởi s và t như sau:</p> $(s, t) \mapsto ((8/19)s + (2/19)t, s, t).$	0,25	
	Chọn $s = 1, t = 0$, thu được $\mathbf{u}_1 = (8/19, 1, 0)$; Chọn $s = 0, t = 1$, thu được $\mathbf{u}_2 = (2/19, 0, 1)$.	0,25	
	Chứng minh $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ là một cơ sở của X và suy ra số chiều của X bằng 2.	0,50	
	Tọa độ của \mathbf{v} là $(4, 3)$.	0,25	
Ghi chú	Cơ sở U không duy nhất. Do đó, thí sinh có thể chọn cơ sở khác. Khi đó, tọa độ của \mathbf{v} cũng sẽ khác.		

Câu 4		2,00 điểm	CĐR 1.1
a)		0,5	

	<p>Ma trận</p> $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 10 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$ <p>Đa thức đặc trưng</p> $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2.$	0,25	
	Giá trị riêng $\lambda = 1$ (nghiệm đơn), $\lambda = 3$ (nghiệm kép)	0,25	
b)		1,5	
	Với $\lambda = 1$, các vector riêng là $(k, k, 0)$. Cho $k = -1$, ta có $u_1 = (-1, -1, 0)$.	0,25	
	Với $\lambda = 3$, các vector riêng là $(2s - 5t, s, t)$.	0,25	
	Cho $s = 3, t = 1$, ta có $u_2 = (1, 3, 1)$.	0,25	
	Cho $s = 2, t = 1$, ta có $u_3 = (-1, 2, 1)$.	0,25	
	Ma trận làm chéo hóa $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$	0,25	
	Ma trận chéo cần tìm là $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$	0,25	

Câu 5		2,00 điểm	CĐR 1.1
	Tính được gradient của f tại điểm A : $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) = \nabla f(A) = (6, 3, 2)$	0,5	
	Tính được: $\overrightarrow{BA} = (-2, 0, 2)$	0,5	
	Tính được vector \vec{v} (vector đơn vị của \overrightarrow{BA}): $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{BA}}{ \overrightarrow{BA} } = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0,5	
	Tính được đạo hàm theo hướng \overrightarrow{BA} của f tại A : $D_{\vec{v}}f(A) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A) = \overrightarrow{\text{grad}} f(A) \cdot \vec{v} = -2\sqrt{2}$	0,5	