Lecture Notes: Giải tích

Chương 3: Tích phân đường, tích phân mặt

Biên soạn: Vũ Hữu Nhự, PHENIKAA University

Ngày 5 tháng 5 năm 2022

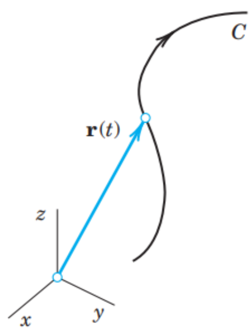
Mục lục

Chương 3

Tích phân đường và tích phân mặt

3.1 Đường cong: biểu diễn tham số, véc tơ tiếp xúc, tiếp tuyến, độ dài

- **Biểu diễn tham số của đường cong**: *Biểu diễn tham số* của đường cong C với tham số t có dạng
$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \tag{3.1}$$
ở đó $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ và $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ (xem Hình 3.1).



Hình 3.1: Biểu diễn tham số của đường cong C

- **Đường cong định hướng**: Đường cong C có thể được định hướng bằng cách chọn một điểm đầu và một điểm cuối. Chẳng hạn, trên đường cong C ta chọn điểm A là điểm đầu và điểm B là điểm cuối, khi đó ta nói đường cong C được định hướng từ A tới B và ta gọi hướng từ A tới B là *hướng dương*, ngược lại, hướng từ B tới A là *hướng âm*.

  Ta nói biểu diễn tham số (3.1) phù hợp với hướng dương của đường cong C nếu
$$\begin{cases} a \le b \\ \text{khi } t \text{ chạy từ } a \text{ tới } b \text{ thì } M(x(t), y(t), z(t)) \text{ chạy theo hướng dương của đường cong } C. \end{cases}$$

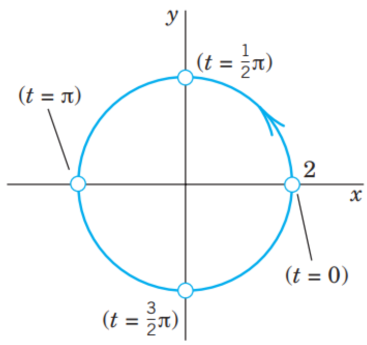
Nhận xét 3.1. *Khi đường cong C nằm trên mặp phẳng $Oxy(z = 0)$, biểu diễn tham số của C có thể được cho dưới dạng*
$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}. \tag{3.2}$$

Ví dụ 3.1. *Đường cong* $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ *nằm trong mặt phẳng Oxy với tâm là gốc tọa độ O và bán kính $r = 2$ có biểu diễn tham số sau*
$$\boldsymbol{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 0], \quad \textit{hay ta có thể viết gọn hơn} \quad \boldsymbol{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t]$$

với $0 \le t \le 2\pi$.

- *Với* $t = 0$, *ta có* $\boldsymbol{r}(0) = [2, 0]$.
- *Với* $t = \frac{\pi}{2}$, *ta có* $\boldsymbol{r}(0) = [0, 2]$.
- *Với* $t = \pi$, *ta có* $\boldsymbol{r}(\pi) = [-2, 0]$.
- *Với* $t = \frac{3\pi}{2}$, *ta có* $\boldsymbol{r}(3\pi/2) = [0, -2]$.

Hướng dương của đường cong C (tương ứng với biểu diễn tham số $\boldsymbol{r}(t)$*) là hướng ngược chiều kim đồng hồ (xem Hình 3.2).*

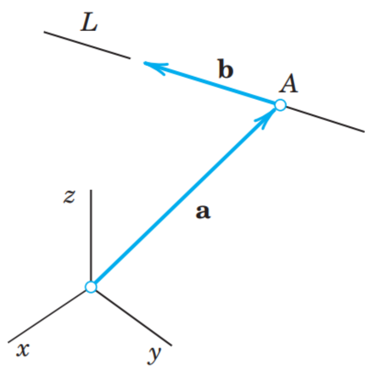


Hình 3.2: Đường tròn với hướng dương ngược chiều kim đồng hồ

Ví dụ 3.2. *Đường thẳng L qua điểm* $A(a_1, a_2, a_3)$ *và có véc tơ chỉ phương* $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *có phương trình tham số sau*

$$\boldsymbol{r}(t) = a + t\boldsymbol{b} = [a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3] \quad \text{với} \quad \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

(xem Hình 3.3).



Hình 3.3: Biểu diễn tham số của đường thẳng L

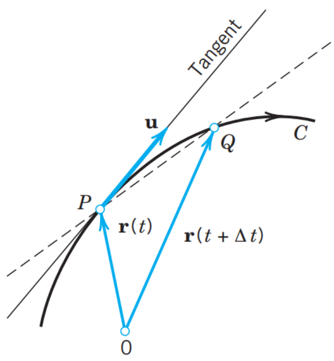
- **Tiếp tuyến của đường cong**: Cho đường cong C có biểu diễn tham số (3.1) và hai điểm $P = \mathbf{r}(t_0)$ và $Q = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$. *Véc tơ tiếp xúc* của C tại điểm P được cho bởi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t_0) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)] \\ &= [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

và *véc tơ tiếp xúc đơn vị* của C tại điểm P được cho bởi

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t_0) &= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t_0)|}\mathbf{r}'(t_0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2+(z'(t_0))^2}}[x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)]\end{aligned}$$

(xem Hình 3.4). Do đó, biểu diễn tham số của *tiếp tuyến* của đường cong C tại $P = \mathbf{r}(t_0)$



Hình 3.4: Tiếp tuyến của đường cong C

có dạng

$$\mathbf{q}(w) = \mathbf{r}(t_0) + w\mathbf{r}'(t_0) \quad (w \text{ là tham số}). \tag{3.4}$$

Ví dụ 3.3. *Viết phương trình tiếp tuyến của elliptic (E) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tại $P(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.*

Giải. Biểu diễn tham số của elliptic (E) là

$$\boldsymbol{r}(t) = [2\cos t, \sin t].$$

Đạo hàm $\boldsymbol{r}'(t) = [-2\sin t, \cos t]$.

Dễ thấy $P = \boldsymbol{r}(t_0)$ với $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Do đó $\boldsymbol{r}'(\pi/4) = [-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ và biểu diễn tham số của tiếp tuyến với (E) tại P là

$$\boldsymbol{q}(w) = \boldsymbol{r}(t_0) + w\boldsymbol{r}'(t_0) = [\sqrt{2}(1-w), \frac{1}{\sqrt{2}}(1+w)].$$

- **Độ dài của một cung**. Cho cung C có biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad a \le t \le b.$$

Khi đó *độ dài* của cung C được tính bằng công thức sau

$$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t)}dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt. \tag{3.5}$$

3.2 Tích phân đường trong mặt phẳng và không gian, tính chất, cách tính, ứng dụng tìm công cơ học. Định lý Green trong mặt phẳng (liên hệ tích phân đường loại 2 với tích phân kép)

3.2.1 Định nghĩa và cách tính

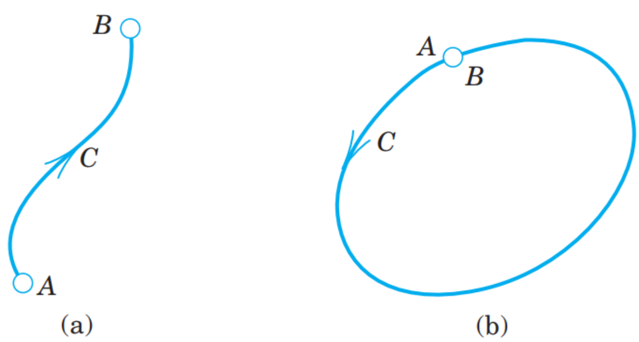
Cho đường cong C có biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b. \tag{3.6}$$

Đường cong C (xem Hình 3.5) được định hướng từ $A = \mathbf{r}(a)$ (ứng với $t = a$) đến $B = \mathbf{r}(b)$ (ứng với $t = b$). Ta gọi

- $A = \mathbf{r}(a)$ là *điểm đầu.*
- $B = \mathbf{r}(b)$ là *điểm cuối.*
- C là đường cong *kín* nếu $A \equiv B$.
- C là đường cong *trơn* nếu $\mathbf{r}'(t)$ liên tục trên $[a, b]$.
- C là đường cong *trơn từng khúc (piecewise smooth)* nếu nó là hợp của hữu hạn các đường cong trơn.

Ví dụ 3.4. *Hình chữ nhật có biên là một đường cong trơn từng khúc.*



Hình 3.5: Đường cong định hướng C. (b) - đường cong kín

Bài toán: *Xét một chất điểm M di chuyển theo một đường cong C từ điểm đầu $A = \mathbf{r}(a)$ đến điểm cuối $B = \mathbf{r}(b)$ dưới tác dụng của một lực $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Hãy tính công W của lực $\mathbf{F}$?*

Để đưa ra lời giải cho bài toán trên, người ta chia cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường cong C bằng các điểm $A_i = \mathbf{r}(t_i)$, $0 \le i \le n$, với

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Khi đó công W của lực $\mathbf{F}$ bằng tổng các công thực hiện ΔW_i để đưa vật từ điểm A_i tới điểm A_{i+1} và $\Delta W_i \approx \mathbf{F}(\mathbf{r})(\xi_i) \cdot \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ với $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Bằng cách thông qua giới hạn, người ta xây dựng được khái niệm *tích phân đường* $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ và giá trị của tích phân đường đó bằng đúng công W cần tính (xem Định nghĩa 3.1 và công thức (3.8)).

Giả thiết tổng quát. Trong chương này, chúng ta luôn giả thiết: C **là đường cong trơn từng khúc**.

Định nghĩa 3.1 (Tích phân đường (loại 2))**.** Cho hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), F_2(\mathbf{r}), F_3(\mathbf{r}))$ xác định trên đường cong C được định hướng từ $A = \mathbf{r}(a)$ tới $B = \mathbf{r}(b)$ với $a \le b$. Khi đó *tích phân đường* (loại 2) của hàm véc tơ $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ trên đường cong C là đại lượng được cho bởi

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}), \tag{3.7}$$

ở đó

(-) $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ hàm véc tơ dưới dấu tích phân.

(-) C *là đường lấy tích phân.*

(-) $d\mathbf{r} = [dx, dy, dz]$.

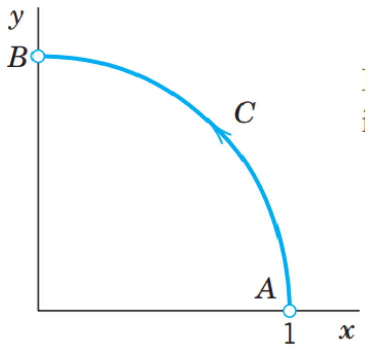
Vì $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1, F_2, F_3)$, nên ta có

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z')dt. \qquad (3.7')$$

• Nếu C là đường cong kín, trong công thức (3.7) ta viết

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \text{thay vì} \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Ví dụ 3.5 (Tích phân đường trên mặt phẳng)**.** *Tính tích phân đường của hàm véc tơ* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [-y, -xy]$ *trên đường cong* C *với* C *là một cung tròn từ* A *đến* B *được cho trong Hình 3.6.*



Hình 3.6: Cung C cho Ví dụ 3.5

Giải. Biểu diễn tham số của $C : \boldsymbol{r}(t) = [\cos t, \sin t]$ *với* $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. *Khi đó*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [-y, -xy] = [-\sin t, -\sin t \cos t]$$

và

$$\boldsymbol{r}'(t) = [-\sin t, \cos t].$$

Theo công thức (3.7'), *ta có*

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{\pi/2} (F_1 x' + F_2 y')dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} [(-\sin t)(-\sin t) + (-\sin t \cos t) \cos t]dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3.6 (Tích phân đường trong không gian)**.** *Tính tích phân đường của hàm véc tơ* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [z, x, y]$ *trên đường xoắn ốc* C :

$$\boldsymbol{r}(t) = [\cos t, \sin t, 3t], \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải. Ta có

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = [z, x, y] = [3t, \cos t, \sin t]$$

và

$$\boldsymbol{r}'(t) = [-\sin t, \cos t, 3].$$

Theo công thức (3.7'), *ta có*

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{\pi/2} (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z')dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} [3t(-\sin t) + \cos t \cos t + 3 \sin t]dt = 7\pi.$$

Nhận xét 3.2. *Từ Định nghĩa 3.1 ta thấy rằng nếu $\boldsymbol{F}$ liên tục trên đường cong trơn (hoặc trơn từng khúc) C, thì tích phân đường $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ tồn tại.*

3.2.2 Tính chất của tích phân đường

Tích phân đường có một số tích chất sau.

(i) $\int_C k\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = k \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ với k là hằng số.

(ii) $\int_C [\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \mathbf{G}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$.

(iii) Nếu C chia thành hai đường cong C_1 và C_2 có hướng cùng hướng với C, thì

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

(iv) Nếu đổi hướng dương của cung C thì tích phân (3.7) đổi dấu.

(v) Tích phân đường (3.7) không phụ thuộc vào cách biểu diễn tham số của C, có nghĩa là, nếu C có hai cách biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad a \leq t \leq b$$

và

$$\mathbf{r}^*(t^*) = [x^*(t^*), y^*(t^*), z^*(t^*)], \quad a^* \leq t^* \leq b^*,$$

thì

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}^*) \cdot d\mathbf{r}^*.$$

(vi) Trong trường hợp tổng quát thì tích phân đường (3.7) phụ thuộc vào hàm véc tơ $\mathbf{F}$, điểm đầu A, điểm cuối B và đường cong C điểm A tới điểm B.

3.2.3 Ứng dụng: Tìm công cơ học

Công của lực $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ để di chuyển một chất điểm M dọc theo một cung C từ A đến B được tính bởi

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \tag{3.8}$$

Ví dụ 3.7 (Công bằng độ biến thiên của động năng)**.** *Xét một vật M có khối lượng m chuyển động dọc theo cung $C : \boldsymbol{r}(t)$ (với t là thời gian) dưới tác động của một lực $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Khi đó* vận *tốc $\boldsymbol{v}$ của vật M được cho bởi*

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

Từ công thức (3.8)*, ta có*

$$W = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{v}(t) dt. \tag{3.9}$$

Theo định luật 2 Newton, ta có

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m\boldsymbol{r}''(t) = m\boldsymbol{v}'(t).$$

Thay biểu thức trên vào (3.9) *thu được*

$$W = \int_a^b m\boldsymbol{v}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) dt = \frac{m}{2} |\boldsymbol{v}|^2 \Big|_{t=a}^{t=b}.$$

Trong vế phải của biểu thức trên, $\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2$ chính là động năng của vật M. Vì vậy, công thực hiện chính bằng độ biến thiên của động năng.

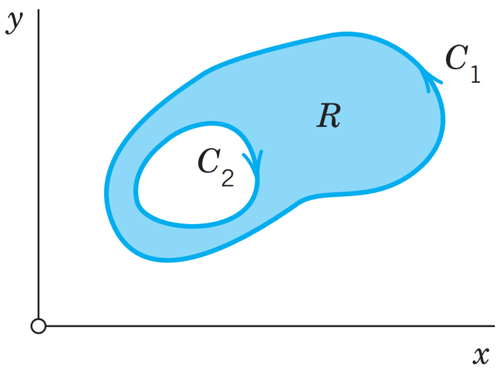
3.2.4 Công thức Green trong mặt phẳng

Công thức Green trong mặt phẳng giúp chúng ta biến đổi giữa tích phân kép trên một miền $R \subset \mathbb{R}^2$ sang tích phân đường và ngược lại.

Định lý 3.1 (Công thức Green trong mặt phẳng)**.** *Cho R là miền đóng và bị chặn trong mặt phẳng Oxy với biên C là đường cong trơn từng khúc. Giả sử $F_1(x,y)$ và $F_2(x,y)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ và $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ liên tục trên một miền chứa R. Khi đó,*

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)\,. \tag{3.10}$$

Ở đây, biên C của R được định hướng dương sao cho miền R luôn nằm bên trái C nếu ta di chuyển trên C theo hướng dương đó (xem Hình 3.7).



Hình 3.7: Miền R với biên C gồm hai phần C_1 và C_2. C_1 được định hướng ngược chiều kim đồng hồ và C_2 được định hướng cùng chiều kim đồng hồ.

Nhận xét 3.3. *Công thức Green* (3.10) *có thể được viết dưới dạng sau*

$$\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_R \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} dxdy. \tag{3.11}$$

Ví dụ 3.8. *Kiểm chứng công thức Green* (3.10) *với $F_1 = y^2 - 7y$, $F_2 = 2xy + 2x$ và đường cong C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.*

Giải. Miền R là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$. Vế trái của (3.10) *là*

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R [(2y+2) - (2y-7)]dxdy = 9\iint_R dxdy = 9S(R) = 9\pi,$$

với $S(R)$ là diện tích của miền R.

Theo Định lý 3.1, hướng dương của đường cong C phải là hướng ngược chiều kim đồng hồ. Do đó, ta có biểu diễn tham số của C

$$\boldsymbol{r}(t) = [x, y] = [\cos t, \sin t], \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nên

$$F_1 = y^2 - 7y = \sin^2 t - 7\sin t, \quad F_2 = 2xy + 2x = 2\cos t \sin t + 2\cos t.$$

Vì vậy, vế phải của (3.10) *là*

$$\begin{aligned}
\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) &= \int_0^{2\pi} [(\sin^2 t - 7\sin t)(-\sin t) + (2\cos t\sin t + 2\cos t)\cos t]dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-\sin^3 t + 7\sin^2 t + 2\cos^2 t\sin t + 2\cos^2 t]dt \\
&= 9\pi.
\end{aligned}$$

Vậy, ta có

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy).$$

3.3 Mặt trong không gian 3 chiều: biểu diễn tham số, véc tơ pháp tuyến, mặt định hướng được

• **Biểu diễn của mặt trong hệ tọa độ** $Oxyz$. Phương trình của mặt cong S trong hệ tọa độ $Oxyz$ được cho bởi

$$z = f(x, y) \quad \text{hoặc} \quad g(x, y, z) = 0. \tag{3.12}$$

Ví dụ 3.9. *Nửa mặt cầu phía trên mặt Oxy với tâm $O(0, 0, 0)$ và bán kính $r = a$ có phương trình*

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

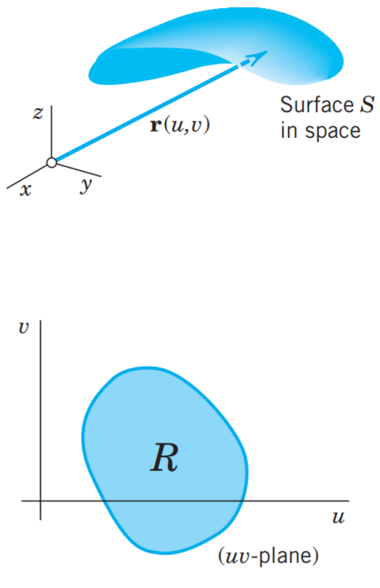
hoặc

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (z \geq 0).$$

• **Biểu diễn tham số của mặt**. Biểu diễn tham số của mặt S có dạng

$$\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.13}$$

ở đó u và v là các tham số (xem Hình 3.8).



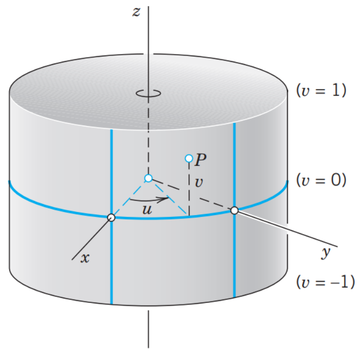
Hình 3.8: Biểu diễn tham số của mặt cong

Ví dụ 3.10 (Biểu diễn tham số của một mặt trụ). *Mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$, $-1 \leq z \leq 1$ có bán kính đáy a, chiều cao bằng 2 và đường sinh song song với Oz. Một biểu diễn tham số của mặt trụ có dạng*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [a\cos u, a\sin u, v] = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}, \tag{3.14}$$

với tham số $(u, v) \in R$ (xem Hình 3.9). Trong đó, miền R là hình chữ nhật

$$R := \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1\}.$$



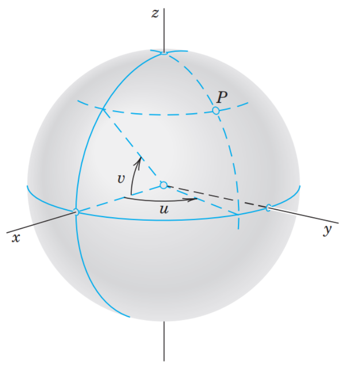
Hình 3.9: Biểu diễn tham số của mặt trụ

Ví dụ 3.11 (Biểu diễn tham số của một mặt cầu). *Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ có một biểu diễn tham số dạng*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v], \tag{3.15}$$

với tham số $(u, v) \in R$ (xem Hình 3.10). Trong đó, miền R là hình chữ nhật

$$R := \left\{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$



Hình 3.10: Biểu diễn tham số của mặt cầu

Ví dụ 3.12 (Biểu diễn tham số của một mặt nón). *Mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq H$ có một biểu diễn tham số dạng*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u], \tag{3.16}$$

với tham số $(u, v) \in R$. Trong đó, miền R là hình chữ nhật

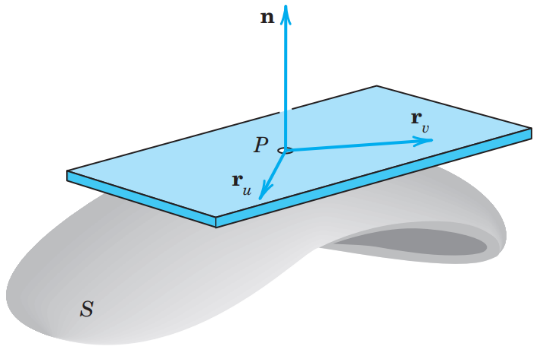
$$R := \{(u, v) : 0 \leq u \leq H, 0 \leq v \leq 2\pi\}.$$

- **Mặt phẳng tiếp xúc và véc tơ pháp tuyến.**

Định nghĩa 3.2. Cho mặt cong S và điểm $P \in S$. Khi đó, ta gọi:

(i) một véc tơ tiếp xúc với một đường cong tùy ý nằm trong S tại điểm P là *véc tơ tiếp xúc* của S tại P;

(ii) tập tất cả véc tơ tiếp xúc với S tại điểm P là *mặt phẳng tiếp xúc* của S tại P;



Hình 3.11: Véc tơ pháp tuyến và mặt phẳng tiếp xúc của S tại P

(iii) một véc tơ vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc của S tại P là *véc tơ pháp tuyến* của S tại P

(xem mặt phẳng tiếp xúc và véc tơ pháp tuyến trong Hình 3.11).

Giả sử mặt cong S có biểu diễn tham số $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ trong (3.13) và điểm $P = \mathbf{r}(u_0, v_0) \in S$. Khi đó các đạo hàm riêng $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ và $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ là các véc tơ tiếp xúc với S tại P. Giả sử hai véc tơ tiếp xúc này độc lập tuyến tính, khi đó một véc tơ pháp tuyến của S tại P là

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \neq \mathbf{0} = (0, 0, 0). \tag{3.17}$$

Ở đây, với $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, kí hiệu

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

là *tích ngoài (tích có hướng)* của hai véc vơ $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$.

Véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại P là

$$\mathbf{n}(u_0, v_0) = \frac{1}{|\mathbf{N}(u_0, v_0)|} \mathbf{N}(u_0, v_0). \tag{3.19}$$

Nhận xét 3.4. *Nếu S được cho bởi phương trình*

$$g(x, y, z) = 0,$$

khi đó, véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại $P(x_0, y_0, z_0)$ được cho bởi

$$\boldsymbol{n}(P) = \frac{1}{|\text{grad } g(P)|} \text{grad } g(P), \tag{3.20}$$

với grad $g = \nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$.

Ví dụ 3.13. *Mặt cầu $S : g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ có véc tơ pháp tuyến đơn vị tại điểm $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ là*

$$\boldsymbol{n}(P) = \left[\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{a}, \frac{z_0}{a} \right].$$

Ví dụ 3.14. *Cho mặt nón $S : g(x, y, z) = -z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ và điểm $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ và P không phải là đỉnh của hình nón. Khi đó véc tơ pháp tuyến đơn vị của S tại P là*

$$\boldsymbol{n}(P) = \left[\frac{x_0}{\sqrt{2(x_0^2 + y_0^2)}}, \frac{y_0}{\sqrt{2(x_0^2 + y_0^2)}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right].$$

• **Mặt trơn và mặt trơn từng mảnh**.

Định nghĩa 3.3. (i) Mặt cong S được gọi là mặt *trơn* nếu hai véc tơ tiếp xúc $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ tại điểm P bất kỳ là độc lập tuyến tính và véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}$ phụ thuộc liên tục vào điểm P.

(ii) Mặt cong S được gọi là *trơn từng mảnh* nếu nó là hợp của hữu hạn các mặt trơn không dẫm lên nhau.

Ví dụ 3.15. ◦ *Mặt cầu là mặt trơn.*

◦ *Mặt là biên của hình hộp chữ nhật là mặt trơn từng mảnh.*

• **Sự định hướng của mặt trơn và mặt trơn từng mảnh**.

◦ Cho mặt **trơn** S. Tại mỗi điểm P của mặt S có hai véc tơ pháp tuyến là $\widetilde{\mathbf{n}}$ và $\mathbf{n}' = -\widetilde{\mathbf{n}}$. Nếu ta chọn một hướng của pháp tuyến là *hướng dương*, thì hướng ngược lại là *hướng âm.*

Chẳng hạn, ta chọn hướng của $\widetilde{\mathbf{n}}$ là hướng dương, thì hướng $\mathbf{n}' = -\widetilde{\mathbf{n}}$ là hướng âm.

◦ Cho mặt **trơn** S có biên là đường cong C. Giả sử S được định hướng dương bởi hướng của véc tơ pháp tuyến $\widetilde{\mathbf{n}}$. Ta nói *hướng dương của biên C phù hợp với sự định hướng dương của mặt S* nếu một người đứng thẳng theo hướng pháp tuyến $\widetilde{\mathbf{n}}$ và đi dọc theo chiều dương của biên C thì miền S sẽ nằm bên trái của người đó (xem Hình 3.12 (a)).

◦ Cho mặt cong S là mặt **trơn từng mảnh** có các mặt trơn thành phần là $S_1, S_2, ..., S_k$. Ta có thể định hướng dương mặt S thông qua sự định hướng dương của từng mặt S_i sao cho biên chung C^* của hai mặt tiếp giáp bất kỳ, chẳng hạn S_1 và S_2, thỏa mãn tích chất sau: các hướng dương của C^* phù hợp với sự định hướng dương của S_1 và của S_2 là ngược hướng nhau (xem Hình 3.12 (b)).

3.4 Tích phân mặt loại 2: định nghĩa, cách tính; ứng tính thông lượng của một trường véc tơ qua một mặt (tùy chọn)

3.4.1 Định nghĩa và cách tính

• **Biểu diễn tham số phù hợp với sự định hướng của mặt**. Cho mặt trơn S được định hướng dương bởi một véc tơ pháp tuyến $\widetilde{\mathbf{n}}$. Xét một biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2. \quad (3.21)$$

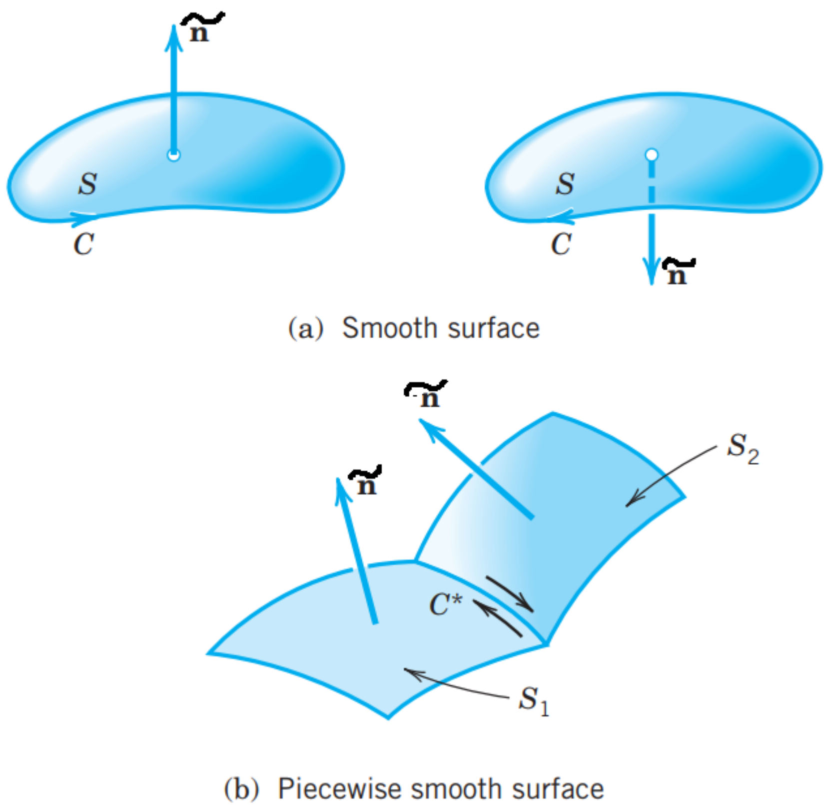
Khi đó một véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ tại điểm $P = \mathbf{r}(u,v)$ tùy ý, được tính bởi công thức (3.17),

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) \neq \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Ta nói rằng $\mathbf{N}$ *phù hợp với hướng dương của S* nếu $\mathbf{N}$ cùng hướng với $\widetilde{\mathbf{n}}$.

Định nghĩa 3.4 (Tích phân mặt loại 2)**.** Giả sử véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ được cho bởi công thức (3.22) phù hợp với hướng dương của mặt định hướng S. Khi đó *tích phân mặt (loại 2)* của hàm véc tơ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ trên mặt cong định hướng S được ký hiệu là

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.23)$$



Hình 3.12: (a) sự định hướng của mặt trơn; (b) sự định hướng của mặt trơn từng mảnh

và có giá trị bằng

$$\iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{N}(u,v) du dv, \tag{3.24}$$

ở đó

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N} \text{ là véc tơ pháp tuyến đơn vị cùng hướng với } \mathbf{N}$$

và

$$\mathbf{n} dA = \mathbf{N} du dv \quad \text{với } dA \text{ là yếu tố diện tích trên mặt } S.$$

- **Cách tính tích phân mặt**. Ta có

$$\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3],$$
$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3] = \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right],$$
$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1),$$

với α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi $\mathbf{n}$ và tia Ox, Oy, Oz (*chúng ta gọi* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *là các cosin chỉ hướng của véc tơ pháp tuyến đơn vị* $\boldsymbol{n}$). Từ công thức (3.24), ta thu được

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iint_S (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma) dA \\ &= \iint_R (F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3) du dv. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nhận xét 3.5. *(i) Trong công thức (3.25), ta có*

$$\cos\alpha dA = dydz, \quad \cos\beta dA = dzdx, \quad \cos\gamma dA = dxdy.$$

Vì vậy, ta thu được công thức sau

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA = \iint_S (F_1dydz + F_2dzdx + F_3dxdy). \tag{3.26}$$

*Do đó, tích phân mặt (loại 2) của hàm **F** trên mặt định hướng S cũng được **ký hiệu** là*

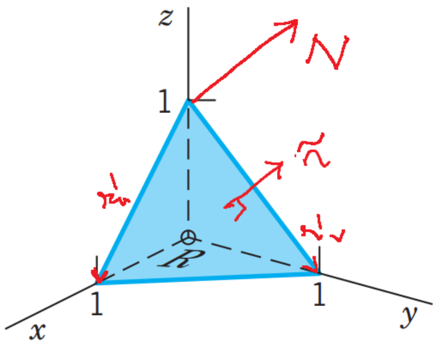
$$\iint_S (F_1dydz + F_2dzdx + F_3dxdy). \tag{3.27}$$

Tuy nhiên, khi sử dụng ký hiệu trên, chúng ta phải chú ý đến hướng của mặt cong S.

(ii) Từ công thức (3.25), ta thấy:

- *Nếu hàm véc tơ **F** liên tục trên mặt cong trơn (hoặc trơn từng mảnh) S thì tích phân mặt loại 2 (3.23) tồn tại.*
- *Nếu chúng ta đổi hướng mặt S, thì tích phân mặt loại 2 (3.24) đổi dấu.*
- *Tích phân mặt loại 2 có các tính chất tương tự như tích phân kép.*

Ví dụ 3.16. *Tính tích phân mặt của hàm véc tơ $\boldsymbol{F} = [x^2, 0, 3y^2]$ trên mặt S. Trong đó S là phía trên phần giới hạn của mặt phẳng $x + y + z = 1$ trong góc phần tám thứ nhất (xem Hình 3.13).*



Hình 3.13: Véc tơ chỉ phương $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$ và véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ của mặt S

Giải. *Đặt $x = u, y = v$, ta có $z = 1 - u - v$. Do đó chúng ta có thể biểu diễn tham số mặt S bởi*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [u, v, 1 - u - v], \quad (u, v) \in R$$

với R là tam giác có các đỉnh $(0, 0, 0), (1, 0, 0)$ và $(0, 1, 0)$ trên mặt Oxy. Các véc tơ chỉ phương của S là

$$\boldsymbol{r}'_u = (1, 0, -1), \quad \boldsymbol{r}'_v = (0, 1, -1).$$

Do đó, véc tơ pháp tuyến $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = (1, 1, 1)$.

*Theo giả thiết S là phần phía trên của mặt $x + y + z = 1$ giới hạn trong góc phần tám thứ nhất, nên S được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến $\tilde{\boldsymbol{n}}$ hướng lên trên. Dễ thấy **N** cùng hướng với $\tilde{\boldsymbol{n}}$ và vì vậy **N** phù hợp với hướng dương của S.*

Dễ thấy $\boldsymbol{F} = [u^2, 0, 3v^2]$. Theo định nghĩa, ta có

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA &= \iint_R \boldsymbol{F(r)}\cdot\boldsymbol{N}dudv\\ &= \iint_R \left[u^2.1+0.1+3v^2.1\right]dudv\\ &= \iint_R (u^2+3v^2)dudv.\end{aligned}$$

Hơn nữa, R có thể biểu diễn dưới dạng sau

$$R = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le v\le 1, 0\le u\le 1-v\right\}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA &= \int_0^1 dv\int_0^{1-v}(u^2+3v^2)du\\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-v)^3+3v^2(1-v)dv = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nhận xét 3.6. *Khi biểu diễn tham số $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ có véc tơ pháp tuyến $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$* ***không phù hợp với hướng dương của*** *S, ta có thể đổi thứ tự u và v cho nhau để thu được một biểu diễn tham số khác của S,*

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(u,v)=\boldsymbol{r}(v,u),$$

có véc tơ pháp tuyến

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}=\tilde{\boldsymbol{r}}'_u\times\tilde{\boldsymbol{r}}'_v=-\boldsymbol{N}$$

phù hợp với hướng dương của S.

3.4.2 Ứng dụng tính thông lượng của một trường véc tơ (tùy chọn)

Giả sử ta nhúng một màng cong S trong môi trường chất lỏng có mật độ khối lượng ρ và đang chảy với vận tốc $\mathbf{v}$ không phụ thuộc vào thời gian. Khi đó *thông lượng* Φ của trường véc tơ

$$\mathbf{F}=\rho\mathbf{v}$$

biểu thị khối lượng của chất lỏng chảy qua S trong một đơn vị thời gian.

Người ta đã chứng minh được rằng, thông lượng Φ chính là tích phân mặt loại 2 của hàm véc tơ $\mathbf{F}$ trên mặt cong định hướng S,

$$\Phi=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA. \tag{3.28}$$

Hơn nữa thông lượng Φ là một đại lượng đại số, có nghĩa là, nếu ta coi lượng chất lỏng chảy qua mặt S theo hướng của véc tơ pháp tuyến là dương thì lượng chất lỏng chảy qua S theo hướng ngược lại là âm.

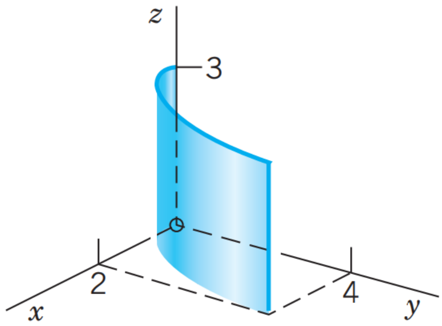
Ví dụ 3.17. *Tính thông lượng của dòng nước chảy qua mặt trụ-parabolic $S: y=x^2, 0\le x\le 2, 0\le z\le 3$ (xem Hình 3.14) nếu vận tốc của dòng nước là $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}=[3z^2,6,6xz](m/s)$. (Mật độ khối lượng hay khối lượng riêng của nước $\rho=1g/cm^3=1ton/m^3$.)*

Giải. Đặt $x=u, z=v$, ta có $y=u^2$. Khi đó mặt cong S được biểu diễn dưới dạng

$$S:\boldsymbol{r}=[u,u^2,v],\quad 0\le u\le 2, 0\le v\le 3.$$

Véc tơ pháp tuyến của S là

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v=[1,2u,0]\times[0,0,1]=[2u,-1,0].$$



Hình 3.14: Mặt cong S trong Ví dụ 3.17

Dễ thấy

$$\boldsymbol{F} = [3z^2, 6, 6xz] = [3v^2, 6, 6uv] \implies \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} = 6uv^2 - 6.$$

Do đó, lưu lượng nước chảy qua mặt S là

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA = \iint_R \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dudv \\ &= \int_0^2 du \int_0^3 (6uv^2 - 6)dv = 72\,[m^3/s].\end{aligned}$$

Vậy lưu lượng nước chảy qua mặt S là 72 lít/giây.

3.5 Tích phân mặt loại 1: định nghĩa, cách tính; ứng dụng (tính diện tích mặt, khối lượng mặt, trọng tâm, mô men quán tính) (tùy chọn)

3.5.1 Định nghĩa và cách tính

Định nghĩa 3.5 (Tích phân mặt loại 1)**.** Cho hàm $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ liên tục và mặt cong trơn (hoặc trơn từng mảnh) S được cho bởi biểu diễn tham số (3.13). Khi đó *tích phân mặt loại 1* của hàm G trên mặt cong S được ký hiệu là

$$\iint_S G(\mathbf{r})dA \tag{3.29}$$

và có giá trị bằng

$$\iint_R G(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{N}(u,v)|dudv. \tag{3.30}$$

Ở đó

$$dA = |\mathbf{N}|dudv = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|dudv \quad \text{là yếu tố diện tích của mặt } S.$$

Nhận xét 3.7. *Trong định nghĩa trên của tích phân mặt loại 1, chúng ta không cần chú ý tới sự định hướng của mặt cong S.*

• **Ứng dụng: Tính khối lượng mặt cong** S. Nếu $G(\mathbf{r})$ là mật độ khối lượng (khối lượng trên một đơn vị diện tích) của S, thì khối lượng của mặt cong S là

$$m(S) = \iint_S G(\mathbf{r})dA. \tag{3.31}$$

• **Ứng dụng: Tính diện tích mặt cong** S. Nếu $G \equiv 1$, thì tích phân mặt loại 1 của G trên mặt S chính là diện tích mặt S. Vì vậy,

$$A(s) = \iint_S dA = \iint_R |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv. \tag{3.32}$$

Ví dụ 3.18 (Diện tích mặt cầu)**.** *Tính diện tích mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Giải. Biểu diễn tham số của mặt cầu S là

$$\boldsymbol{r}(u, v) = [a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v], \quad 0 \le u \le 2\pi, \frac{-\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}.$$

(xem Ví dụ 3.11). Bởi tính toán đơn giản, ta thu được

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = [a^2 \cos^2 v \cos u, a^2 \cos^2 v \sin u, a^2 \cos v \sin v]$$

và

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| &= a^2 \sqrt{(\cos^2 v \cos u)^2 + (\cos^2 v \sin u)^2 + (\cos v \sin v)^2} \\ &= a^2 |\cos v| \\ &= a^2 \cos v \quad \text{do } v \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{aligned}$$

Vậy diện tích mặt cầu S là

$$A(S) = \int_0^{2\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos v dv = 4\pi a^2.$$

3.5.2 Xét trường hợp mặt cong S được cho bởi $z = f(x, y)$

Khi đó, đặt $x = u, y = v$, ta có $z = f(u, v)$ và biểu diễn tham số của S là

$$\mathbf{r}(u, v) = [u, v, f(u, v)].$$

Dễ thấy,

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}'_u = [1, 0, f'_u], \quad \mathbf{r}'_v = [0, 1, f'_v], \\ &\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = [-f'_u, -f'_v, 1], \quad |\mathbf{N}| = \sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2}. \end{aligned}$$

Vì vậy, từ công thức (3.29)–(3.30), ta có

$$\iint_S G(\mathbf{r}) dA = \iint_{R^*} G(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy, \tag{3.33}$$

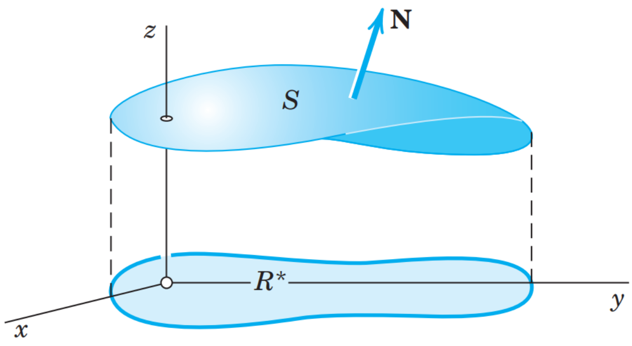
ở đó R^* là hình chiếu của mặt cong S trên mặt Oxy và véc tơ pháp tuyến **N** của S hướng lên (xem Hình 3.15). Nếu **N** hướng xuống dưới, ta thêm dấu " $-$ " vào vế phải của công thức (3.33).

• **Áp dụng tính diện tích mặt cong**. Cho $G = 1$, ta thu được công thức tính diện tích mặt cong S như sau:

$$A(S) = \iint_{R^*} G(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy. \tag{3.34}$$

3.6 Công thức Gauss–Ostrogradsky (liên hệ giữa tích phân mặt loại 2 và tích phân bội 3)

Mối liên hệ giữa tích phân mặt loại 2 và tích phân bội 3 được thể hiện qua Định lý Gauss–Ostrogradsky dưới đây (Định lý 3.2). Định lý này sẽ giúp thiết lập những phương trình cơ bản trong sự dịch chuyển của chất lỏng, sự truyền nhiệt,...



Hình 3.15: Mặt cong S và hình chiếu R^* trên mặt Oxy

Toán tử *div* hay *toán tử phân kỳ* áp dụng trên hàm véc tơ $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$ và được cho bởi công thức

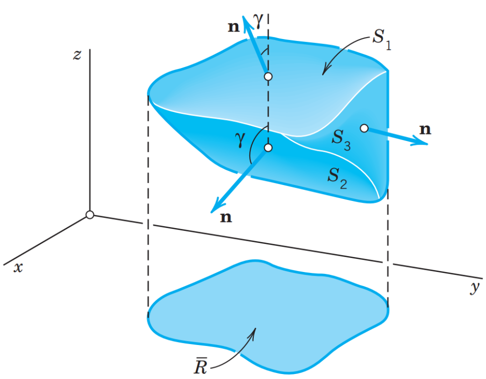
$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{3.35}$$

Định lý 3.2 (Công thức Gauss–Ostrogradsky)**.** *Cho T là miền đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ với biên S là mặt cong trơn (hoặc trơn từng mảnh) được định hướng dương theo hướng pháp tuyến ngoài $\boldsymbol{n}$ (xem Hình 3.16). Giả sử $\boldsymbol{F}$ là hàm véc tơ có các đạo hàm riêng liên tục trên miền chứa T. Khi đó*

$$\iiint_T \operatorname{div} F dV = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA. \tag{3.36}$$

Công thức (3.36) *còn được viết dưới dạng sau: Với $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$ và véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài $\boldsymbol{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ với $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của $\boldsymbol{n}$, khi đó công thức* (3.36) *trở thành*

$$\begin{aligned}\iiint_T \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right] dxdydz &= \iint_S (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma) dA \\ &= \iint_S (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy).\end{aligned} \tag{3.36*}$$

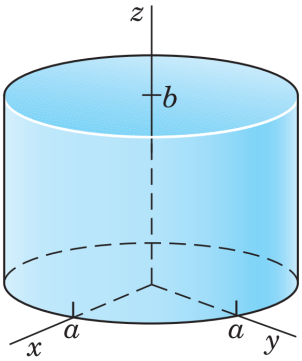


Hình 3.16: Biên S của miền T và véc tơ pháp tuyến ngoài $\mathbf{n}$

Ví dụ 3.19. *Tính*

$$I = \iint_S (x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy)$$

với S là phía ngoài của mặt đóng kín gồm phần hình trụ $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ 0\le z\le b \end{cases}$ *và hai đáy nằm trên các mặt $z=0$ (đáy dưới) và $z=b$ (đáy trên) (xem Hình 3.17).*



Hình 3.17: Mặt S trong Ví dụ 3.19

Giải. Ta có $F_1=x^3, F_2=x^2y, F_3=x^2z$. *Do đó* $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=3x^2+x^2+x^2=5x^2$. *Theo công thức Gauss-Ostrogradsky* (3.36), *ta có*

$$I=\iint_S (x^3dydz+x^2ydzdx+x^2zdxdy)=\iiint_T \operatorname{div} Fdxdydz=\iiint_T 5x^2dxdydz.$$

Ở đây T là khối trụ với biên S và $\boldsymbol{n}$ là véc tơ pháp tuyến ngoài của S.

Xét phép biến đổi sang tọa độ trụ (r,θ,z):

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z, \end{cases}$$

ta có

$$dxdydz=rdrd\theta dz$$

và

$$(x,y,z)\in T \quad \Leftrightarrow \quad (0\le r\le a, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le b).$$

Vậy

$$\begin{aligned} I&=\iiint_T 5x^2dxdydz=\int_0^b dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a (5r^2\cos^2\theta)rdr \\ &=5\int_0^b dz\int_0^{2\pi}\frac{a^4}{4}\cos^2\theta d\theta=\frac{5\pi}{4}a^4b. \end{aligned}$$

3.7 Định lý Stokes (liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân mặt loại 2)

Công thức Stokes trong Định lý 3.3 thể hiện mối liên hệ giữa tích phân đường loại 2 và tích phân mặt loại 2 và nó là sự mở rộng của Công thức Green (3.10).

Cho hàm véc tơ $\mathbf{F}=[F_1,F_2,F_3]$, *curl* (*độ xoáy*) của trường véc tơ $\mathbf{F}$ được cho bởi

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}=\left[\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]. \qquad (3.37)$$

Định lý 3.3 (Định lý Stokes). *Cho S là mặt cong trơn từng mảnh và được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị $\boldsymbol{n}$. Giả sử C là biên của S được định hướng dương phù hợp với hướng của S (xem Hình 3.18). Cho $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$ là hàm véc tơ có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền chứa S. Khi đó, ta có*

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy\right] = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz). \tag{3.38}$$

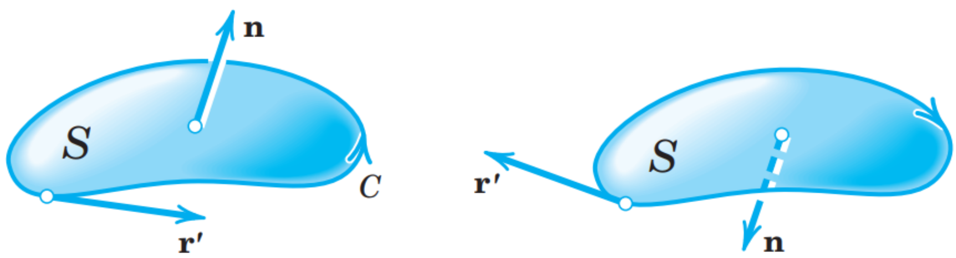
Nếu mặt cong S được tham số hóa bởi

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \quad (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.39}$$

sao cho véc tơ pháp tuyến $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = [N_1, N_2, N_3]$ có hướng phù hợp với hướng của S, thì công thức (3.38) *được viết dưới dạng*

$$\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}'(s) ds, \tag{3.38*}$$

ở đó $\boldsymbol{r}'(s) = \frac{\partial r}{ds}$ là véc tơ tiếp xúc đơn vị của đường C và s là (tham số) độ dài cung C. Trong đó $\boldsymbol{F} = [F_1, F_2, F_3]$, $\boldsymbol{n} dA = \boldsymbol{N} dudv$ và $\boldsymbol{r}' ds = [dx, dy, dz]$.



Hình 3.18: Biên C của mặt cong S

Ví dụ 3.20. *Kiểm chứng Định lý Stokes với $\boldsymbol{F} = [y, z, x]$ và S là phía ngoài mặt paraboloid tròn xoay*

$$z = f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 0$$

(xem Hình 3.19).

Giải. Biên C của S được định hướng như Hình 3.19 phù hợp với hướng dương của S. Khi đó, C có biểu diễn tham số

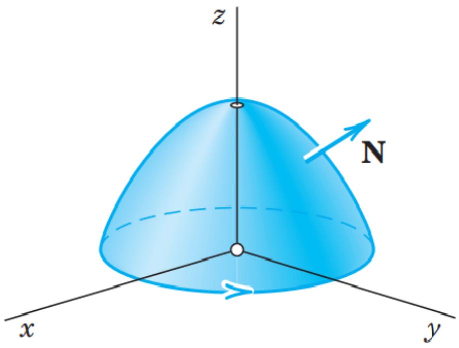
$$\boldsymbol{r}(s) = [\cos s, \sin s, 0], \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Véc tơ tiếp xúc đơn vị của C là $\boldsymbol{r}'(s) = [-\sin s, \cos s, 0]$. Hàm véc tơ $\boldsymbol{F}$ hạn chế trên C là

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})(s) = [\sin s, 0, \cos s].$$

Vậy

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})(s) \cdot \boldsymbol{r}' ds = \int_0^{2\pi} [\sin s(-\sin s) + 0.\cos s + 0.\cos s] ds = -\pi.$$



Hình 3.19: Mặt cong S trong Ví dụ 3.20

Tiếp theo, ta sẽ tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA$. *Ta có* $F_1 = y, F_2 = z, F_3 = x$ *và*

$$\text{curl } \boldsymbol{F} = [-1, -1, -1].$$

Véc tơ pháp tuyến của S *là*

$$\boldsymbol{N} = \text{grad } g(x,y,z) = [2x, 2y, 1]$$

với $g(x,y,z) = z - f(x,y) = (x^2 + y^2) + z - 1$. *Dễ thấy* $\boldsymbol{N}$ *có hướng phù hợp với hướng dương của* S. *Nên*

$$\begin{aligned}\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA &= \iint_R (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N} dxdy \quad (u = x, v = y) \\ &= \iint_R (-2x - 2y - 1) dxdy.\end{aligned}$$

Ở đó R *là hình tròn đơn vị trong mặt phẳng* Oxy. *Bằng phép đổi biến sang hệ tọa độ cực,* $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, *khi đó*

$$R = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Nên ta thu được

$$\iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-2r\cos\theta - 2r\sin\theta - 1) r dr = -\pi.$$

Vậy, ta kiểm chứng được công thức Stoke:

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA.$$

Ví dụ 3.21. *Tính* $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ *ở đó* C *là đường tròn* $x^2 + y^2 = 4; z = -3$, *được định hướng dương ngược chiều kim đồng hồ và*

$$\boldsymbol{F} = [y, xz^3, -zy^3].$$

Giải. C *là biên của đĩa* $S : x^2 + y^2 \le 4$ *nằm trong mặt phẳng* $z = -3$ *và hướng dương của* S *là hướng pháp tuyến* $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$. *Dễ thấy hướng của biên* C *phù hợp với hướng dương của* S. *Với* $z = -3$, *ta có*

$$F_1 = y, F_2 = -27x, F_3 = 3y^3$$

và

$$(\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28.$$

Theo công thức Stokes, ta có

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\text{curl } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dA = \iint_S (-28) dA = -28 \times 4\pi = -112\pi.$$

Bài tập

Bài 3.1. Tìm biểu diễn tham số của đường tròn là giao của mặt phẳng $z = 1$ với mặt cầu (S). Ở đó (S) có tâm $(3, 2, 1)$ và đi qua gốc tọa độ.

Bài 3.2. Biểu diễn tham số đường thẳng đi qua $(2, 1, 3)$ và có véc tơ chỉ phương $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Bài 3.3. Viết biểu diễn tham số của đường Helix có phương trình $x^2 + y^2 = 25$, $z = 2\arctan\frac{y}{x}$.

Bài 3.4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong C tại điểm P với

(a) $C : \mathbf{r}(t) = [t, t^2/2, 1]$; $P(2, 2, 1)$.

(b) $C : \mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, 9t]$; $P(1, 0, 18\pi)$.

Bài 3.5. Tìm độ dài của các cung sau:

(a) (Circular helix) $C : \mathbf{r}(t) = [4\cos t, 4\sin t, 5t]$ từ $(4, 0, 0)$ đến $(4, 0, 10\pi)$.

(b) (Hypocycloid) $C : \mathbf{r}(t) = [a\cos^3 t, a\sin^3 t]$.

Bài 3.6. Tính tích phân đường $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, trong đó:

(a) $C : y = 4x^2$ từ $(0, 0)$ tới $(1, 4)$ và $\mathbf{F} = [y^2, -x^2]$.

(b) C là một phần tư đường tròn tâm $(0, 0)$ từ $(2, 0)$ tới $(0, 2)$ và $\mathbf{F} = [xy, x^2y^2]$.

(c) $C : \mathbf{r} = [2\cos t, t, 2\sin t]$ từ $(2, 0, 0)$ tới $(2, 2\pi, 0)$ và $\mathbf{F} = [x - y, y - z, z - x]$.

Bài 3.7. Tính công W của lực $\mathbf{F}$ thực hiện dọc theo đường cong C trong các trường hợp sau:

(a) $C : \mathbf{r} = [2t, 5t, t]$ từ $t = 0$ tới $t = 1$ và $\mathbf{F} = [x + y, y + z, z + x]$.

(b) C là đường thẳng từ $(0, 0, 0)$ tới $(1, 1, 0)$ và $\mathbf{F} = [x, -z, 2y]$.

(c) $C : \mathbf{r} = [t, t^2, t]$ từ $(0, 0, 0)$ tới $(2, 4, 2)$ và $\mathbf{F} = [e^{-x}, e^{-y}, e^{-z}]$.

Bài 3.8. Tính tích phân đường $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ với C là biên của miền R và được định hướng ngược chiều kim đồng hồ, trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [y, -x]$; $C : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

(b) $\mathbf{F} = [x^2e^y, y^2e^x]$; C là hình chữ nhật với các đỉnh $(0, 0), (2, 0), (2, 3), (0, 3)$.

(c) $\mathbf{F} = [x^2 + y^2, x^2 - y^2]$; $R : 1 \le y \le 2 - x^2$.

(d) $\mathbf{F} = [x^2y^2, \frac{-x}{y^2}]$; $R : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge x$.

Bài 3.9. Tìm véc tơ pháp tuyến đơn vị của mặt cong $S : \mathbf{r}(u, v)$ tại điểm $P = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ trong các trường hợp sau:

(a) hình nón $\mathbf{r}(u, v) = [u\cos v, u\sin v, cu]$, $c > 0$;

(b) ellipsoid $\mathbf{r}(u, v) = [a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v]$, $a, b, c > 0$.

Bài 3.10. Tìm một véc tơ pháp tuyến (tại điểm P tùy ý) và viết một biểu diễn tham số của các mặt cong sau:

(a) Mặt phẳng $4x + 3y + 2z = 12$;

(b) Hình trụ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$;

(c) Hình nón elliptic $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

Bài 3.11. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA$, với $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ phù hợp với hướng dương của S trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [-x^2, y^2, 0]$, $\quad S : \mathbf{r} = [u, v, 3u - 2v]$, $\quad 0 \leq u \leq \frac{3}{2}, -2 \leq v \leq 2$;

(b) $\mathbf{F} = [x, y, z]$, $\quad S : \mathbf{r} = [u \cos v, u \sin v, u^2]$, $\quad 0 \leq u \leq 4, -\pi \leq v \leq \pi$.

Bài 3.12. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ trong các trường hợp sau:

(a) $\mathbf{F} = [e^y, e^x, 1]$ và S là phía trên của mặt $x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (hướng dương của S được định hướng bởi véc tơ pháp tuyến hướng lên trên);

(b) $\mathbf{F} = [0, x, 0]$ và S là phần phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất;

(c) $\mathbf{F} = [0, \sin y, \cos z]$ và S là phần mặt trụ $x = y^2$ với $0 \leq y \leq \pi/4$, $0 \leq z \leq y$ và hướng dương của S có hướng từ phải qua trái.

Bài 3.13. Tính tích phân mặt loại 1, $\iint_S G(\mathbf{r}) dA$, trong các trường hợp sau:

(a) $G = \cos x + \sin x$ và S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất;

(b) $G = x + y + z$ và mặt S được giới hạn bởi $z = x + 2y$ với $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq x$;

(c) $G = z$ và S là phần mặt cầu đơn vị nằm trong góc phần tám thứ nhất;

Bài 3.14. Mô-ment quán tính I của mặt cong S đối với trục L được cho bởi công thức sau:

$$I = \iint_S \rho D^2 dA \tag{3.40}$$

trong đó

- $\rho = \rho(x, y, z)$ là mật độ khối lượng (khối lượng trên một đơn vị diện tích) của mặt S,
- $D = D(x, y, z)$ là khoảng cách từ điểm (x, y, z) tới L.

Hãy tính mô-ment quán tính I của mặt cong S đối với trục L trong các trường hợp sau:

(a) $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, S là mặt đồng chất (ρ là hằng số) có khối lượng M và L là trục Oz;

(b) $S : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2$ và L là đường thẳng $z = 1$ trong mặt phẳng Ozx;

(c) $S : x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$ và L là trục Oz.

Bài 3.15. Cho S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ được định hướng bởi véc tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ hướng ra ngoài mặt cầu. Tính

$$I = \iint_S (7x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dA$$

bằng hai cách:

(a) bởi công thức Gauss–Ostrogradsky;

(b) bởi cách tính trực tiếp bằng định nghĩa của tích phân mặt loại 2 (xem Định nghĩa 3.4).

Bài 3.16. Tính tích phân mặt loại 2, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$, bằng công thức Gauss-Ostrogradsky với:

(a) $\mathbf{F} = [x^2, 0, z^2]$, S là phía ngoài của mặt của hộp $|x| \leq 1, |y| \leq 3, 0 \leq z \leq 2$. Kiểm tra lại kết quả tính $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$ bằng cách tính trực tiếp từ định nghĩa;

(b) $\mathbf{F} = [e^x, e^y, e^z]$, S là phía ngoài của mặt của khối lập phương $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$;

(c) $\mathbf{F} = [x^3 - y^3, y^3 - z^3, z^3 - x^3]$, S là phía ngoài của mặt của khối $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 0$.

Bài 3.17. Tính tích phân $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA$ với:

(a) $\mathbf{F} = [z^2, -x^2, 0]$, S là phía trên của hình chữ nhật với 4 đỉnh $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 4, 4)$, $(1, 4, 4)$;

(b) $\mathbf{F} = [e^{-z}, e^{-z} \cos y, e^{-z} \sin y]$, $S : z = y^2/2, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến $\mathbf{n}$ sao cho $\mathbf{n}$ tạo với tia Oz một góc nhọn.

(c) $\mathbf{F} = [z^2, 3x/2, 0]$, $S : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, z = 1$ được định hướng dương bởi tia Oz.

(d) $\mathbf{F} = [y^3, -x^3, 0]$, $S : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ được định hướng dương bởi tia Oz.

Bài 3.18. Tính tích phân $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds$ bằng công thức Stokes với:

(a) $\mathbf{F} = [-5y, 4x, z]$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 16, z = 4$ có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ;

(b) $\mathbf{F} = [z^3, x^3, y^3]$, C là đường tròn $y^2 + z^2 = 9, x = 2$ có hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ;

(c) $\mathbf{F} = [y^2, x^2, z + x]$, C là tam giác ABC với $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$ được định hướng dương từ $A \to B \to C \to A$.

Tài liệu tham khảo

[1] Erwin Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Nhà xuất bản Wiley (10th Edition, 2011) (Chương 9 & 10).

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, tập III, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (2014) (Chương 3).