TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHENIKAA
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Học kỳ 1, Năm học 2023-2024
Hà Nội, 17/10/2023

Chương 1

Ma trận, Định thức,
và Hệ phương trình tuyến tính

Chương 2

Không gian véctơ

2.1 Bài tập đề nghị

Bài 1. Tập hợp nào dưới đây là không gian véctơ con của các không gian tương ứng? Nêu lý do?

1) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3z=1\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
2) $Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xy-2z=0\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
3) $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+2t-3=0, y-t-z=0\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
4) $J=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+3z=0\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
5) $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-2y\ge 0\}$.

Bài 2. Cho các vec tơ $u_1=(3,4,-1,0), u_2=(4,2,0,1), u_3=(1,1,2,0)$.

1) Hãy tìm vec tơ $v=u_1-2u_2+3u_3$
2) Tìm vec tơ u thoả mãn hệ thức: $3(u_1+2u_2-u_3+u)=u-u_1+u_2$

Bài 3. Tìm $u+v,\ u-v,\ 2u-3v,\ |3u|,\ |v-u|$ với u,v là các vec tơ sau đây.

1) $u=(5,-12),\ \ v=(-3,-6)$.
2) $u=(4,0,3),\ \ v=(-2,1,5)$.
3) $u=4i+j,\ \ v=i-2j$ biết $i=(1,0),\ \ j=(0,1)$ là các vec tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^2$.
4) $u=i+2j-3k,\ \ v=-2i-j+5k$ biết $i=(1,0,0),\ \ j=(0,1,0),\ \ k=(0,0,1)$ là các vec tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^3$.
5) (+) $u=2i-4j+4k,\ \ v=2j-k$ biết $i=(1,0,0),\ \ j=(0,1,0),\ \ k=(0,0,1)$ là các vec tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^3$.

Bài 4. Trong $\mathbb{R}^3$, véctơ u sau đây có phải là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại không? Tại sao? Với $u_1=(1,1,1), u_2=(0,-1,1), u_3=(-2,-1,3), u=(2,-1,5)$.

Bài 5. Tìm điều kiện của m để véctơ u trong $\mathbb{R}^3$ sau đây là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại với $u_1=(0,1,-1), u_2=(-2,1,3), u_3=(m,2,-1), u=(1,m,2)$.

Bài 6(+). Hãy xác định các mệnh đề sau là đúng hay sai.

1) Nếu S là một hệ vec tơ phụ thuộc tuyến tính thì mỗi vec tơ trong hệ S biểu diễn được tuyến tính thông qua các vec tơ còn lại của hệ.
2) Mọi hệ vec tơ chứa vec tơ 0 là phụ thuộc tuyến tính.
3) Hệ rỗng là hệ phụ thuộc tuyến tính.
4) Các hệ con của hệ phụ thuộc tuyến tính là phụ thuộc tuyến tính.
5) Các hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

Bài 7. Họ các véctơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong không gian tương ứng?

1) $V=\{v_1=(-2,4), v_2=(1,-2)\}$ trong $\mathbb{R}^2$.
2) $V=\{v_1=(2,-1,1,0), v_2=(4,-2,2,1)\}$ trong $\mathbb{R}^4$
3) $U=\{u_1=(1,-2,0,4), u_2=(3,-2,1,1), u_3=(0,0,0,0)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
4) $U=\{u_1=(1,-2,0), u_2=(3,-2,1), u_3=(2,0,1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
5) $U=\{u_1=(-1,2,4), u_2=(3,-2,2), u_3=(1,0,3), u_4=(1,1,1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
6) $S=\{s_1=(0,-1,2,4), s_2=(-1,2,4,0), s_3=(2,4,0,-1), s_4=(4,0,-1,2)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

Bài 8. Họ vec tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

1) $V=\{v_1=(1,0,-2,5),v_2=(2,1,0,-1),v_3=(1,1,2,1)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^4$.

2) $S=\{v_1=(1,0,0),\ v_2=(1,-1,0),\ v_3=(1,1,2),\ v_4=(2,3,m)\}$.

Bài 9. Với giá trị nào của m thì họ vec tơ sau là họ vec tơ độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

1) $U=\{u_1=(1,2,3),u_2=(m,2,0),u_3=(m-1,1,4)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

2) (+) $V=\{v_1=(2,1,2m),v_2=(2,1,-1),v_3=(m+1,2,-3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

3) (+) $S=\{s_1=(2;1;1;m);s_2=(2;1;-1,m);s_3=(10;5;-1;5m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

Bài 10. Với giá trị nào của m thì họ véctơ sau đây độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

1) $V=\{v_1=(2,1,1,m),v_2=(2,1,-1,m),v_3=(10,5,-1,5m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

2) $U=\{u_1=(2,1,2m),u_2=(2,1,-1),u_3=(1+m,2,-3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

3) $W=\{w_1=(m,2,1),w_2=(1,-2,m),w_3=(2,2,3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

Bài 11: Chứng minh $U=\{u=(1,-1),v=(0,3)\}$ là một hệ sinh của không gian véctơ $\mathbb{R}^2$. Hãy tìm biểu thị tuyến tính của mỗi véctơ $w=(4,2),\ t=(-2,5),\ s=-3w+t$ qua hệ véctơ U.

Bài 12.

1) Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho họ véctơ:

$$V=\{v_1=(-1,2,4),v_2=(3,-2,1),v_3=(2,-1,5)\}$$

a) Chứng minh rằng họ V là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$.

b) Các họ véctơ $I=\{v_1,v_2\}$ và $J=\{v_1,v_3\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính? Vì sao?

c) Hãy tìm một biểu thị tuyến tính của véctơ v_1 qua các véctơ còn lại của họ véctơ V.

2) Chứng minh họ véctơ $U=\{u_1=(1,3),u_2=(2,-2)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

3) Họ véctơ sau đây có phải là một cơ sở của không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ không?

$$W=\{w_1=(-2,3,4),w_2=(3,-2,5),w_3=(5,0,23)\}$$

Bài 13. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp: $Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2z=0, x-y-z=0\}$.

1) Chứng minh rằng Q là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian Q.

3) Chứng minh véctơ $u=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in Q$ và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

Bài 14. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-3y+z=0\}$

1) Véctơ $u=(1,2,3)$ có thuộc W không? Chỉ ra một véctơ (khác véc tơ không) thuộc W.

2) Chứng minh rằng W là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

3) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian W.

4) Chứng minh véctơ $u=(1,2,5)\in W$ và tìm tọa độ của u trong cơ sở của W tìm được ở trên.

Bài 15. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+2t=0, y-z-t=0\}$

1) Véctơ $u=(1,2,5,4)$ có thuộc S không?

2) Chứng minh rằng S là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$.

3) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian S.

Bài 16. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2t = 0\}$.

1) Chứng minh H là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^4$
2) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian H
3) Chứng minh véctơ $u = (-4; 2; -1; 1)$ thuộc H và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

Bài 17. Tìm hạng của họ các véctơ sau:

1) $U = \{u_1 = (-2,1,1), u_2 = (2,-3,1), u_3 = (-1,0,1), u_4 = (1,-3,2)\}$ trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$.
2) $V = \{v_1 = (-2,1,1), v_2 = (2,-3,1), v_3 = (4,0,1)\}$ trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$.
3) $W = \{w_1 = (2,2,0,0,-1), w_2 = (3,-3,1,5,2), w_3 = (1,-1,-1,0,0)\}$ trong KGVT $\mathbb{R}^5$.

Bài 18. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ hãy tìm hạng của họ các véctơ sau tùy theo m :

$$U = \{u_1 = (2,1,1,m), u_2 = (1,3,-1,2), u_3 = (-3,1,-3m,0)\}$$

Bài 19. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^2$ cho hai tập hợp

$$U = \{u_1 = (1,-1), u_2 = (2,1)\} \text{ và } V = \{v_1 = (3,1), v_2 = (1,-1)\}$$

1) Chứng minh rằng U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
2) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.
3) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.
4) Tìm tọa độ của véctơ $x = (3,-1)$ trong cơ sở U.
5) Tìm véctơ y trong $\mathbb{R}^2$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U = (4,-5)$.
6) Biết tọa độ của véctơ z trong cơ sở U là $z_U = (7,2)$, tìm tọa độ của z trong cơ sở V.

Bài 20. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho hai tập hợp $U = \{u_1 = (1,1,-1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (2,1,-1)\}$ và $V = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (1,1,1)\}$.

1) Chứng minh U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.
3) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.
4) Tìm tọa độ của véctơ $x = (2,3,-1)$ trong cơ sở U.
5) Tìm véctơ y trong $\mathbb{R}^3$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U = (1,1,-1)$.
6) Biết tọa độ của véctơ z trong cơ sở V là $z_V = (1,0,2)$, tìm tọa độ của z trong cơ sở U.

Bài 21. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào không phải ánh xạ tuyến tính ?

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x, 3x)$
2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = (x + 2y, 3x - y + 1)$
3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ h(x, y) = (xy, x - y)$
4) $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ k(x, y, z) = (x + 2y, x - y + z, x - 2z)$
5) $l : \mathbb{R}^2 \to Mat_{2\times2}(\mathbb{R}),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ l(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - y & x + y \\ -x + 3y & 3x - y \end{bmatrix}$

Bài 22. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+y,y-z)$

1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
2) Tìm $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ sao cho và $f(u)=0$.
3) Tìm ma trận của f trong cơ sở $U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(1,0,1),\ u_3=(1,1,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $V=\{v_1=(1,1),\ v_2=(1,2)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

Bài 23. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+2y,3y+z,3x-2z)$$

1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
2) Tìm ma trận A của f trong cơ sở $U=\{u_1=(0,1,1),u_2=(1,0,1),u_3=(1,1,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Bài 24. Giả sử $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là một ánh xạ tuyến tính sao cho $f(1,1)=(3,4)$ và $f(2,3)=(5,2)$

1) Tìm $f(3,-4)$
2) Xác định $f(x,y)$ với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Bài 25. Giả sử $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính sao cho

$$f(1,-1)=(-1,1,2),\ f(-2,3)=(2,3,-4).$$

1) Chứng minh rằng $U=\{u_1=(1,-1),\ u_2=(-2,3)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$
2) Tìm $f(3,-5)$
3) Tổng quát, tìm $f(x,y)$ với mọi $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Bài 26. Tính tích vô hướng $\langle u,v\rangle$, $\|u\|,\|v\|$ với:

1) $u=(2,-1,3),v=(-1,1,1)$
2) $u=(1,-1,9,7,4),v=(2,1,0,-1,0)$

2.2 Bài tập tham khảo

Bài 1. Chứng minh các tập sau là không gian vecto con của $\mathbb{R}^3$, xác định cơ sở và số chiều của các không gian con đó

(a) $W = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 2z = 0\}$

(b) $W = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y - z = 0\}$

(c) $W = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -2x - 3y + z = 0\}$

Bài 2. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (a+1)x + y + (b+2)z = 0\}.$$

(a) Chứng minh W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm một cơ sở S của W và tìm tọa độ của véc tơ $u = (1, 1 - a + b, -1)$ trong cơ sở S đó.

Bài 3. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + ay + (b+1)z = 0\}.$$

(a) Chứng minh rằng W là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm một cơ sở và tính số chiều của W.

(c) Tìm tọa độ của véctơ $\mathbf{v} = (a-1, a+b, 1)$ trong cơ sở vừa tìm được.

Bài 4. Xét hệ vector $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong không gian vector $\mathbb{R}^4$, với $u_1 = (3, 1, 4, 1)$, $u_2 = (m, 2, 3, 1)$, $u_3 = (3, -1, 1, 0)$, và $u_4 = (3, 3, 7, 2)$, với m là một tham số có giá trị tuỳ ý. Tìm giá trị của m để $r(S) = 2$.

Bài 5. Xét hệ vector $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ trong không gian vector $\mathbb{R}^3$, biết rằng $u_1 = (3, 1, 4)$, $u_2 = (2, -3, 5)$, và $u_3 = (\lambda, 5, -1)$.

(a) Hãy tìm giá trị của λ để hệ S độc lập tuyến tính.

(b) Cho $\lambda = 0$, hãy biểu diễn vector sau $w = (-1, -1, -1)$ thành tổ hợp tuyến tính của các vector của hệ S.

(c) Cho $\lambda = 1$, hãy kiểm tra xem hệ vector sau $S' = \{u_1, u_2, u_3, w\}$ có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không ?

Bài 6. Hãy tìm véc tơ tọa độ và ma trận tọa độ của vec tơ v đối với cơ sở $B = \{u_1; u_2; u_3\}$ tương ứng

(a) $v = (4, 1, 1); B = \{u_1 = (1, -2, 1); u_2 = (-1, 1, -2); u_3 = (2, 1, 1)\}$

(b) $v = (2, -1, 3); B = \{u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (2, 2, 0); u_3 = (3, 3, 3)\}$

(c) $v = (5, -12, 3); B = \{u_1 = (1, 2, 3); u_2 = (-4, 5, 6); u_3 = (7, -8, 9)\}$

Bài 7. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các hệ véc tơ sau

$$B = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 2), u_3 = (0, 1, 2)\}$$

$$B' = \{v_1 = (2, 1, -3), v_2 = (3, 2, -5), v_3 = (1, -1, 1)\}$$

(a) Chứng minh rằng B và B' là các cơ sở của $\mathbb{R}^3$

(b) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở B'.

(c) Tìm toạ độ của véc tơ $x = -2u_1 + 3u_2 - u_3$ trong cơ sở B'.

Bài 8. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho véc tơ $v = (3; 1; 2)$ và họ véc tơ sau

$$B = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (2, 1, 3), v_3 = (4, 2, 6)\}$$

(a) Xác định không gian con sinh bởi họ véc tơ B trên

(b) Hỏi v có thuộc không gian con sinh bởi họ véc tơ trên hay không?