Logic mờ và lập luận xấp xỉ

Mở đầu:

Các hệ logic cổ điển đã cung cấp cơ sở toán học cho các phương pháp lập luận dựa trên các giả thiết chính xác (có giá trị chân lý đúng hoặc sai). Tuy nhiên các tri thức hàng ngày mà chúng ta có được hầu hết không có tính chất đó, điều này có thể giải thích là vì ngôn ngữ mà con người dùng là tập hữu hạn, trong khi thế giới quanh ta lại muôn hình muôn vẻ, việc dùng cái hữu hạn để mô tả, thể hiện, tư duy những cái vô hạn đương nhiên không thể chính xác tuyệt đối. Vì vậy nếu dừng ở 2 giá trị chân lý đúng và sai của logic cổ điển thì không thể mô phỏng hết được tính chất thực của thực tế

Lý thuyết tập mờ và logic mờ được xuất hiện vào năm 1965 do L. Zadeh khởi xướng. Nó đã cố gắng mô tả một cách toán học những khái niệm mơ hồ mà ta thường gặp trong cuộc sống như: cao, thấp; đúng, sai bằng các tập mờ. Nhờ việc xây dựng lý thuyết tập mờ mà con người có thể suy diễn từ khái niệm mơ hồ này đến khái niệm mơ hồ khác mà bản thân logic kinh điển không làm được. Trên cơ sở cái gần chính xác thu được người ta có thể đưa ra những quyết định chính xác cho từng tình huống của bài toán

Trong chuyên đề này chúng tôi sẽ trình bày một số khái niệm cơ bản của lý thuyết tập mờ, logic mờ

1. Tập mờ

1.1. Khái niệm tập rõ

Một tập rõ A trong một vũ trụ nào đó có thể xác định bằng cách liệt kê ra tất cả các phần tử của nó, chẳng hạn A = {3, 5, 6, 9}. Trong trường hợp không thể liệt kê ra hết được các phần tử của tập A, chúng ta có thể chỉ ra các tính chất chính xác mà các phần tử của tập A thoả mãn, chẳng hạn A = {x | x là số nguyên tố}. Một tập rõ có thể được xác định bởi hàm đặc trưng, hay còn gọi là hàm thuộc (membership function) của nó. Hàm thuộc của tập rõ A, được ký hiệu là λ_A , đó là hàm 2 trị (1/0), nó nhận giá trị 1 trên các đối tượng x thuộc tập A và giá trị 0 trên các đối tượng x không thuộc A. Các tập có một ranh giới rõ ràng giữa các phần tử thuộc và không thuộc nó

1.2. Khái niệm tập mờ

Bây giờ chúng ta quan tâm đến những người trẻ tuổi. Ai là những người được xem là trẻ? Chúng ta có thể xem những người dưới 30 tuổi là trẻ, những người trên 60 tuổi là không trẻ. Vậy những người 35, 40, 45, 50 .. thì sao? Trược cách mạng tháng 8 năm 45, 50 tuổi đã được xem là già, nhưng nay 50 tuổi không thể là già, nhưng cũng không thể là trẻ. Tính chất người trẻ không phải là một tính chất chính xác để xác định một tập rõ, cũng như tính chất số gần 7 hoặc tốc độ nhanh… Đối với tập rõ được xác định bởi các tính chất chính xác cho phép ta biết một đối tượng là thuộc hay không thuộc tập đã cho, các tập mờ được xác định bởi các tính chất không chính xác, không rõ ràng, chẳng hạn các tính chất người trẻm người già, người đẹp, áp suất cao, số gần 7, tốc độ nhanh,…Các tập mờ được xác định bởi hàm thộc mà các giá trị của nó là các số thực từ 0 đến 1. Chẳng hạn, tập mờ những người thoả mãn tính chất người trẻ (chúng ta sẽ gọi là tập mờ người trẻ) được xác định bởi hàm thuộc nhận giá trị 1 trên tất cả những người dưới 30 tuổi, nhận giá trị 0 trên tất cả những người trên 60 tuổi và nhận giá trị giảm dần từ 1 tới 0 trên các tuổi từ 30 đến 60.

Một tập mờ A trong vũ trụ U được xác định là một hàm μ_A: $U \rightarrow [0, 1]$.

Hàm μ_A được gọi là hàm thuộc (hàm đặc trưng) của tập mờ A còn $\mu_A(x)$ được gọi là mức độ thuộc của x vào tập mờ A

Như vậy tập mờ là sự tổng quát hoá tập rõ bằng cách cho phép hàm thộc lấy giá trị bất kỳ trong khoảng [0, 1], trong khi hàm thuộc của tập rõ chỉ lấy hai giá trị 0 hoặc 1

Tập mờ A trong vũ trụ U được biểu diễn bằng tập tất cả các cặp phần tử và mức độ thuộc của nó

$A = \{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}$

Ví dụ 1.1: Giả sử các điểm thi được cho từ 0 đến 10, $U = \{0, 1, …, 10\}$. Chúng ta xác định ba tập mờ A = "điểm khá", B = "điểm trung bình", C = "điểm kém" bằng cách cho mức độ thuộc của các điểm vào mỗi tập mờ như sau:

Điểm	***A***	***B***	***C***
0	0	0	1
1	0	0	1
2	0	0	1
3	0	0,2	0,9
4	0	0,8	0,7
5	0,1	1	0,5
6	0,5	0,8	0,1
7	0,8	0,3	0
8	1	0	0
9	1	0	0

10	1	0	0

Sau đây là các ký hiệu truyền thống biểu diễn tập mờ. Nếu vũ trụ *U* là rời rạc và hữu hạn thì tập mờ *A* trong vũ trụ U được biểu diễn như sau:

$$A = \sum_{x \in U} \frac{\mu_A(x)}{x}$$

Ví dụ 1.2: Giả sử *U*={*a*, *b*, *c*, *d*, *e*}, ta có thể xác định một tập mờ *A* như sau:

$$A = \frac{0,7}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0,3}{c} + \frac{1}{d} + \frac{0,5}{e}$$

Ví dụ 1.3: Giả sử tuổi của người là từ 0 đến 100. Tập mờ *A* = "tuổi trẻ" có thể xác định như sau:

$$A = \sum_{y=0}^{25} \frac{1}{y} + \sum_{y=25}^{100} \frac{\left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1}}{y}$$

Đó là một cách biểu diễn của tập mờ có hàm thuộc là:

$$\mu_A(y) = \begin{cases} 1 & 0 \le y \le 25 \\ \left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1} & 25 \le y \le 100 \end{cases}$$

Khi vũ trụ *U* là liên tục, người ta sử dụng cách viết sau để biểu diễn tập mờ *A*

$$A = \int_U \mu_A(x) / x$$

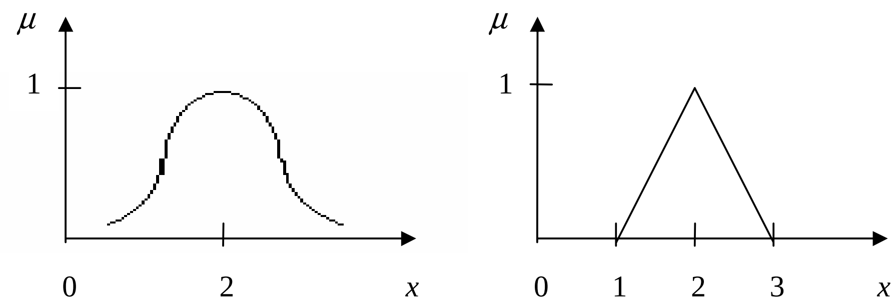
trong đó, dấu tích phân (cũng như dấu tổng ở trên) không có nghĩa là tích phân mà để chỉ tập hợp tất cả các phần tử *x* được gắn với mức độ thuộc của nó

Ví dụ 1.4: Tập mờ *A* = "số gần 2" có thể được xác định bởi hàm thuộc như sau:

$\mu_A(x) = e^{-(x-2)^2}$, chúng ta viết $A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2)^2} / x$

Cần chú ý rằng, hàm thuộc đặc trưng cho tập mờ số gần 2 có thể được xác định bằng cách khác, chẳng hạn

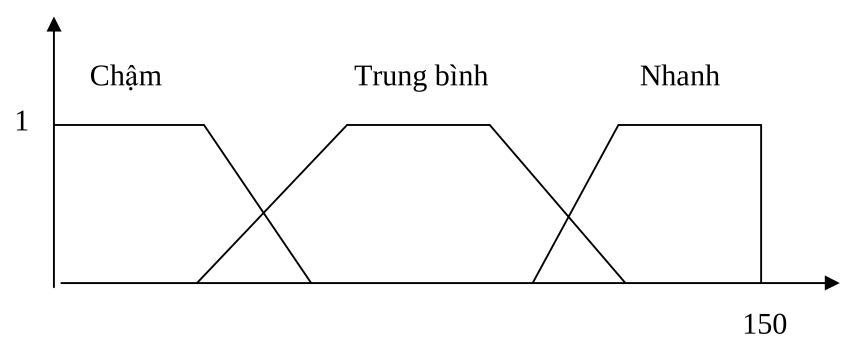
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ -x + 3 & 2 < x \le 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$



Hình 1.1 **Các hàm thuộc khác nhau số tập mờ số gần 2**

Các tập mờ được sử dụng rộng rãi nhất trong các ứng dụng là các tập mờ trên đường thẳng thực *R* và các tập mờ trong không gian Ơclit *n* chiều R^n ($n \geq 2$)

Ví dụ 1.5: Giả sử tốc độ của một chuyển động có thể lấy giá trị từ 0 với ν_{max} = 150 (km/h). Chúng ta có thể xác định 3 tập mờ "tốc độ chậm", "tốc độ trung bình", "tốc độ nhanh" như trong hình 1.2 Các tập mờ này được gọi là các tập mờ hình thang, vì hàm thuộc của chúng có dạng hình thang



Hình 1.2. **Các tập mờ "tốc độ chậm", "tốc độ trung bình", "tốc độ nhanh"**

Nhận xét

- Các tập mờ được đưa để biểu diễn các tính chất không chính xác, không rõ ràng, mờ, chẳng hạn các tính chất "người già", "số gần 2", "nhiệt độ thấp", "áp suất cao", "tốc độ nhanh",..

- Khái niệm tập mờ là một khái niệm toán học hoàn toàn chính xác: một tập mờ trong vũ trụ U là một hàm xác định trên U và nhận giá trị trong đoạn [0, 1]. Các tập rõ là tập mờ, hàm thuộc của tập rõ chỉ nhận giá trị 1, 0. Khái niệm tập mờ là sử tổng quát hoá khái niệm tập rõ
- Một tính chất mờ có thể mô tả các tập mờ khác nhau, trong các ứng dụng ta cần xác định các tập mờ biểu diễn các tính chất mờ sao cho phù hợp với thực tế, với các số liệu thực nghiệm

1.4. Một số khái niệm cơ bản liên quan

Giả sử A là một tập mờ trên vũ trụ U. Giá đỡ của tập mờ A, ký hiệu là *supp*(A) là một tập rõ bao gồm tất cả các phần tử $x \in U$ có mức độ thuộc vào tập mờ A lớn hơn không, tức là

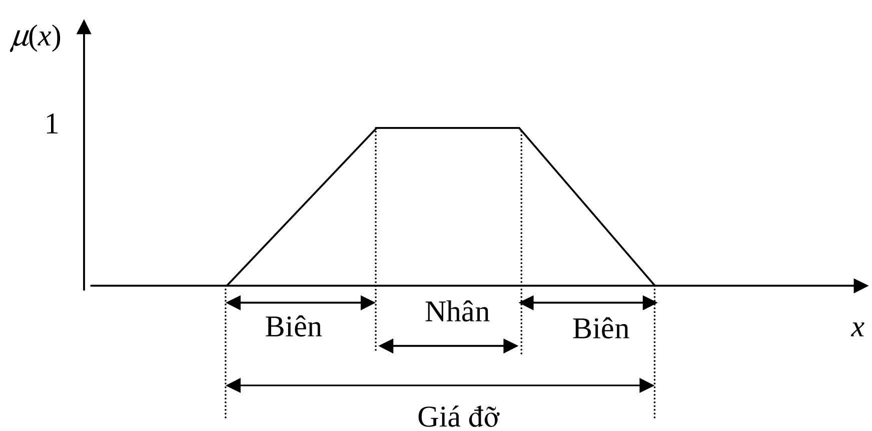
$$\text{supp}(A) = \{ x \in A \mid \mu_A(x) > 0\}$$

Nhân của tập mờ A là một tập rõ bao gồm tất cả các phần tử $x \in U$ sao cho $\mu_A(x) = 1$. Còn biên của tập mờ A sẽ gồm tất cả các $x \in U$ sao cho $0 < \mu_A(x) < 1$. Hình ?? minh hoạ giá đỡ, nhân và biên của một tập mờ

Độ cao của một tập mờ A, ký hiệu là height(A), được xác định là cận trên đúng của các $\mu_A(x)$ với x chạy trên vũ trụ U, tức là

$$height(A) = \sup_{x \in U} \mu_A(x)$$

Các tập mờ có độ cao bằng 1 được gọi là các tập mờ chuẩn tắc (normal fuzzy set). Chẳng hạn, các tập mờ A, B, C trong các ví dụ trên đều là tập mờ chuẩn tắc



Hình 1.3. **Giá đỡ, nhân và biên của tập mờ**

Lát cắt α (α- cut) của tập mờ A, ký hiệu A_α là một tập rõ bao gồm tất cả các phần tử của vũ trụ U có mức độ thuộc vào A lớn hơn hoặc bằng α. Tức là

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) > \alpha\}$$

Ví dụ 1.6: Giả sử $U = \{a, b, c, d, e, m, n\}$ và A là tập mờ được xác định như sau:

$$A = \frac{0{,}1}{a} + \frac{0{,}7}{b} + \frac{0{,}5}{c} + \frac{0}{d} + \frac{1}{e} + \frac{0{,}8}{m} + \frac{0}{n}$$

Khi đó ta có

$$A_{0,1} = \{a, b, c, e, m\}$$

$$A_{0,3} = \{b, c, e, m\}$$

$$A_{0,8} = \{e, m\}$$

Một khái niệm quan trọng nữa là khái niệm tập mờ lồi. Khi tập vũ trụ U là không gian Ơclit n chiều, $U = R^n$, khái niệm tập lồi có thể tổng quát hoá cho các tập mờ. Một tập mờ A trong không gian R^n được gọi là tập mờ lồi nếu mọi lát cắt A_α đều là tập lồi, với $\alpha \in (0, 1]$. Sử dụng khái niệm lát cắt và tập lồi trong không gian R^n, chúng ta dễ ràng chứng minh được khẳng định sau đây:

$$\mu_A[\lambda x+(1-\lambda)y] \geq [\mu_A(x), \mu_A(y)]$$

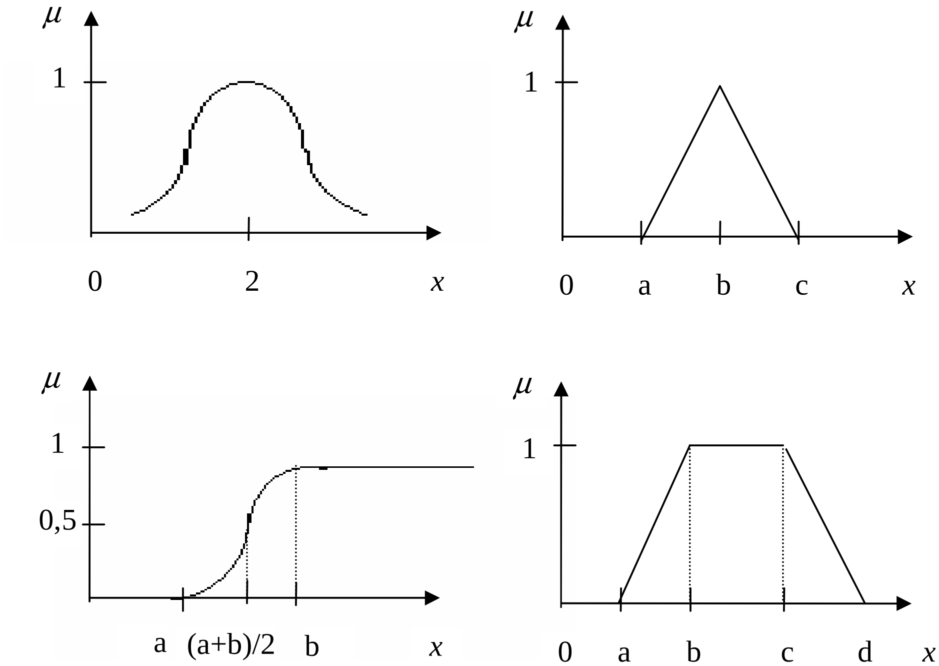
Chúng ta sẽ biểu diễn các định lượng không chính xác, chẳng hạn "số gần 5", bởi các số mờ.

Một tập mờ lồi chuẩn tắc trên đường thẳng thực mà một lát cắt α là một khoảng đóng, được gọi là số mờ (fuzzy number), lưu ý rằng, điều kiện các lát cắt α là các khoảng đóng tương đương với điều kiện hàm liên tục từng khúc. Việc nghiên cứu các phép toán số học +, - , *, / và các phép toán so sánh trên các số mờ là nội dung của lĩnh vực số học mờ. Số học mờ là một nhánh nghiên cứu của lý thuyết tập mờ. Các số mờ đóng vai trò quan trong trong các ứng dụng, đặc biệt trong các hệ mờ

Các số mờ đặc biệt, được sử dụng nhiều trong các ứng dụng là các số mờ hình tam giác, các số mờ hình thang, số mờ hình chữ S và các số mờ hình chuông. Các số mờ dạng này được minh hoạ trong hình 1.4. Chúng ta có thể đưa ra biểu thức giải tích của các hàm thuộc của các số mờ này. Chẳng hạn, số mờ hình tam giác A (hình 1.4) có hàm thuộc được xác định như sau: $\mu_A(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & a \leq x < b \\ (c-x)/(c-b) & b \leq x \leq c \\ 0 & x > c \ or \ x < a \end{cases}$

Hàm thuộc của số mờ S (Hình 1.4) được xác định như sau:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 & a \le x < \dfrac{a+b}{2} \\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & \dfrac{a+b}{2} \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$



Hình 1.4. **Các dạng số mờ đặc biệt**

2. Các phép toán trên tập mờ

2.1. Các phép toán chuẩn trên tập mờ

Giả sử *A* và *B* là các tập mờ trên vũ trụ *U*. Ta nói tập mờ *A* bằng tập mờ *B*, $A = B$ nếu với mọi $x \in U$ $\mu_A(x) = \mu_B(x)$

Tập mờ *A* được gọi là tập con của tập mờ *B*, $A \subseteq B$ nếu với mọi $x \in U$ $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$

1. Phần bù:

Phần bù của tập mờ *A* là tập mờ $\overline{A}$ với hàm thuộc $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ (1)

2. Hợp:

Hợp của hai tập mờ *A* và *B* là tập mờ $A \cup B$ với hàm thuộc được xác định như sau:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \tag{2}$$

3. Giao:

Giao của hai tập mờ A và B là tập mờ A ∩ B với hàm thuộc được xác định như sau:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (3)$$

Ví dụ 2.1: Giả sử $U = \{a, b, c, d, e\}$ và A, B là các tập mờ như sau

$$A = \frac{0,3}{a} + \frac{0,7}{c} + \frac{0}{c} + \frac{1}{d} + \frac{0,5}{e}$$

$$A = \frac{0,1}{a} + \frac{0,9}{c} + \frac{0,6}{c} + \frac{1}{d} + \frac{0,5}{e}$$

Khi đó chúng ta có các tập mờ như sau

$$\overline{A} = \frac{0,7}{a} + \frac{0,3}{c} + \frac{1}{c} + \frac{0}{d} + \frac{0,5}{e}$$

$$A \cup B = \frac{0,3}{a} + \frac{0,9}{c} + \frac{0,6}{c} + \frac{1}{d} + \frac{0,5}{e}$$

$$A \cap B = \frac{0,3}{a} + \frac{0,7}{c} + \frac{0}{c} + \frac{1}{d} + \frac{0,5}{e}$$

4. Tích đề các:

Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập mờ trên các vũ trụ $U_1, U_2, \ldots, U_n$ tương ứng. Tích đề các của $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là tập mờ $A = A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ trên không gian $U = U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$ với hàm thuộc được xác định như sau:

$$\mu_A(x_1,\ldots,x_n) = \min(\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2),\ldots,\mu_{An}(x_n)) \quad x_1 \in U_1,\ldots,x_n \in U_n \quad (4)$$

5. Phép chiếu:

Giả sử A là tập mờ trong không gian tích $U_1 \times U_2$. Hình chiếu của A trên U_1 là tập mờ A_1 với hàm thuộc

$$\mu_{A1}(x_1) = \max_{x_2 \in U_2} \mu_A(x_1, x_2) \quad (5)$$

Định nghĩa này có thể mở rộng cho trường hợp A là tập mờ trên không gian $U_{i_1} \times U_{i_2} \times \ldots \times U_{i_k}$. Ta có thể tham chiếu A lên không gian tích $U_{i_1} \times U_{i_2} \times \ldots \times U_{i_k}$, trong đó $(i_1,\ldots,i_k)$ là các dãy con của dãy (1, 2, …, n), để nhận được tập mờ trên không gian $U_{i_1} \times U_{i_2} \times \ldots \times U_{i_k}$

6. Mở rộng hình trụ:

Giả sử A_1 là tập mờ trên vũ trụ U_1. Mở rộng hình trụ của A_1 trên không gian tích $U_1 \times U_2$ là tập mờ A trên vũ trụ $U_1 \times U_2$ với hàm thuộc được xác định bởi:

$$\mu_A(x_1, x_2) = \mu_{A1}(x_1) \qquad (6)$$

Đương nhiên ta có thể mở rộng một tập mờ trong không gian $U_{i_1} \times U_{i_2} \times ... \times U_{i_k}$ thành một tập mờ hình trụ trong không gian $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ trong đó $(i_1, ..., i_k)$ là các dãy con của dãy (1, 2, …, n)

Ví dụ 2.2: Giả sử $U_1 = \{a, b, c\}$ và $U_2 = \{d, e\}$. Giả sử A_1, A_2 là các tập mờ trên U_1, U_2 tương ứng:

$$A_1 = \frac{1}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0,5}{c}$$

$$A_2 = \frac{0,3}{d} + \frac{0,7}{e}$$

Khi đó ta có

$$A_1 \times A_2 = \frac{0,3}{(a,d)} + \frac{0,7}{(a,e)} + \frac{0}{(b,d)} + \frac{0}{(b,e)} + \frac{0,3}{(c,d)} + \frac{0,5}{(c,e)}$$

Nếu chiếu tập mờ này lên U_1, ta nhận được tập mờ sau:

$$\frac{0,7}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0,5}{c}$$

Mở rộng hình trụ của tập mờ A_1 trên không gian $U_1 \times U_2$ là tập mờ sau:

$$\frac{1}{(a,d)} + \frac{1}{(a,e)} + \frac{0}{(b,d)} + \frac{0}{(b,e)} + \frac{0,5}{(c,d)} + \frac{0,5}{(c,e)}$$

2.2. Các phép toán khác trên tập mờ

Các phép toán chuẩn: Phần bù, hợp, giao được xác định bởi các công thức (1), (2), (3) không phải là sự tổng quát hoá duy nhất của các phép toán phần bù, hợp, giao trên tập rõ. Có thể thấy rằng, tập mờ $A \cup B$ được xác định bởi (2) là tập mờ nhỏ nhất chứa cả A và B, còn tập mờ $A \cap B$ được xác định bởi (3) là tập mờ nhỏ nhất nằm trong cả A và B. Còn có những cách khác để xác định các phép toán phần bù, hợp, giao trên các tập mờ. Chẳng hạn, ta có thể xác định hợp của A và B là tập bất kỳ chứa cả A và B. Sau đây chúng ta sẽ đưa vào các phép toán mà chúng là tổng quát hoá của các phép toán chuẩn được xác định bởi (1), (2) và (3)

1. **Phần bù mờ**

Giả sử chúng ta xác định hàm C: [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] bởi công thức $C(a)$ = 1 - a, $\forall a \in$ [0, 1]. Khi đó từ công thức (1) xác định phần bù chuẩn, ta có

$$\mu_{\overline{A}}(x) = C[\mu_A(x)] \tag{7}$$

Điều này gợi ý rằng, nếu chúng ta có một hàm C thoả mãn một số điều kiện nào đó thì chúng ta có thể xác định phần bù $\overline{A}$ của tạo mờ A bởi công thức (7). Tổng quát hoá các tính chất của hàm C, $C(a) = 1- a$, chúng ta đưa ra định nghĩa sau:

Phần bù của tập mờ A là tập mờ $\overline{A}$ với hàm thuộc được xác định trong (7), trong đó C là hàm thoả mãn các điều kiện sau:

- Tiên đề C_1 (điều kiện biên). $C(0) = 1$, $C(1) = 0$
- Tiên đề C_2 (đơn điệu không tăng). Nếu $a < b$ thì $C(a) \geq C(b)$ với mọi $a, b \in$ [0, 1]

Hàm C thoả mãn các điều kiện C_1, C_2 sẽ được gọi là hàm phần bù. Chẳng hạn, hàm $C(a) = 1- a$ thoả mãn cả 2 điều kiện trên

Sau đây là một số lớp phần bù mờ quan trọng

Ví dụ 2.3: Các phần bù mờ lớp Sugeno được xác định bởi hàm C như sau:

$$C(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}$$

trong đó, λ là tham số, λ > 1, ứng với mỗi giá trị của λ chúng ta nhận được một phần bù. Khi λ = 0 phần bù Sugeno trở thành phần bù chuẩn (1)

Ví dụ 2.4: Các phần bù lớp Yager được xác định bởi hàm C.

$$C(a) = (1-a^w)^{\frac{1}{w}}$$

trong đó w là tham số, $w > 0$, ứng với mối giá trị của tham số w chúng ta sẽ có một phần bù và với $w = 1$ phần bù Yager trở thành phần bù chuẩn (1)

2. Hợp mờ - các phép toán S – norm

Phép toán hợp chuẩn được xác định bởi (2), tức là nó được xác định nhờ hàm $\max(a, b)$: [0, 1] $\times$ [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1]. Từ các tính chất của hàm max này, chúng ta đưa ra một lớp các hàm được gọi là S – norm.

Một hàm S: [0, 1] $\times$ [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] được gọi là S – norm nếu nó thoả mãn các tính chất sau:

- Tiên đề S_1 (điều kiện biên): S(1, 1) = 1; S(0, a) = S(a, 0) = a

- Tiên đề S_2 (tính giao hoán): S(a, b) = S(b, a)
- Tiên đề S_3 (tính kết hợp): S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c))
- Tiên đề S_4 (đơn điệu tăng): Nếu a ≤ a', b ≤ b' thì S(a, b) ≤ S(a', b')

Ứng với mỗi S – norm, chúng ta xác định một phép hợp mờ như sau: Hợp của *A* và *B* là tập mờ $A \cup B$ với hàm thuộc được xác định bởi biểu thức

$$\mu_{A\cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) \tag{8}$$

Các phép hợp được xác định bởi (8) được gọi là các phép toán S – norm. Chẳng hạn, hàm max(*a*, *b*) thoả mã các điều kiện (S_1) đến (S_4), do đó hợp chuẩn (2) là phép toán S – norm. Người ta thường ký hiệu max(*a*, *b*) = $a \vee b$. Sau đây là một số phép toán S – norm quan trong khác

Ví dụ 2.5: Tổng Drastic

$$a \vee b = \begin{cases} a & if \quad b = 0 \\ b & if \quad a = 0 \\ 1 & if \quad a > 0, b > 0 \end{cases}$$

Tổng chặn: $a \oplus b = \min(1, a + b)$

Tổng đại số: $a \hat{+} b = a + b - ab$

Ví dụ 2.6: Các phép hợp Yager

$$S_w = \min\left[1, (a^w + b^w)^{\frac{1}{w}}\right]$$

trong đó *w* là tham số, *w* > 0, ứng với mỗi giá trị của *w* chúng ta có một S – norm cụ thể, khi *w* = 1, hợp Yager trở thành tổng chặn. Có thể thấy rằng

$$\lim_{w\to\infty} S_w(a,b) = \max(a,b)$$

$$\lim_{w\to 0} S_w(a,b) = a \vee b$$

Như vậy khi $w \to \infty$, giao Yager trở thành hợp chuẩn

Giao mờ - các phép toán T – norm

Chúng ta đã xác định giao chuẩn bởi hàm min(*a*, *b*): [0, 1] × [0, 1] → [0, 1]. Tổng quát hoá từ các tính chất của hàm min này, chúng ta đưa ra một lớp các hàm được gọi là T – norm.

Một hàm T: [0, 1] $\times$ [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] được gọi là T – norm nếu nó thoả mãn các tính chất sau:

- Tiên đề T_1 (điều kiện biên): T(0, 0) = 0; S(1, a) = S(a, 1) = a
- Tiên đề T_2 (tính giao hoán): T(a, b) = T(b, a)
- Tiên đề T_3 (tính kết hợp): T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))
- Tiên đề T_4 (đơn điệu tăng): Nếu a $\leq$ a', b $\leq$ b' thì T(a, b) $\leq$ T(a', b')

Ứng với mỗi T – norm, chúng ta xác định một phép giao mờ như sau: Giao của *A* và *B* là tập mờ $A \cap B$ với hàm thuộc được xác định bởi biểu thức

$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) \qquad (9)$$

trong đó T là một T – norm. Các phép giao mờ được xác định bởi 9 được gọi là các phép toán T – norm. Chẳng hạn, hàm min(*a*, *b*) là T – norm. Chúng ta sẽ ký hiệu min(*a*, *b*) = $a \wedge b$

Một số T – norm quan trọng

Ví dụ 2.7:

Tích đại số: $a \,.\, b = ab$

Tích Drastic: $a \wedge b = \begin{cases} a & if \quad b = 1 \\ b & if \quad a = 1 \\ 0 & if \quad a, b < 1 \end{cases}$

Tích chặn: $a \bullet b = \max(0, a + b - 1)$

Ví dụ 2.8: Các phép giao Yager

$$T_w = 1 - \min\left[1, ((1 - a^w) + (1 - b^w))^{\frac{1}{w}}\right]$$

trong đó *w* là tham số, *w* > 0. Khi *w* = 1, giao Yager trở thành tích chặn. Có thể chỉ ra rằng:

$$\lim_{w\to\infty} T_w(a,b) = \min(a,b)$$

$$\lim_{w\to 0} T_w(a,b) = a \wedge b$$

Khi $w \rightarrow \infty$, giao Yager trở thành giao chuẩn

Mối quan hệ giữa các S – norm và T – norm được phát biểu trong định lý sau:

Định lý: Giả sử T là một T – norm và S là một S – norm. Khi đó chúng ta có các bất đẳng thức sau:

$a \wedge b \le \mathrm{T}(a, b) \le \min(a, b)$

$\max(a, b) \le \mathrm{S}(a, b) \le a \vee b$

trong đó $a \vee b$ là tổng Drastic còn $a \wedge b$ là tích Drastic

Từ định lý trên chúng ta thấy rừng, các phép toán min và max là cận trên và cận dưới của các phép toán T- norm và S – norm tương ứng. Như vậy các phép toán hợp và giao không thể nhận giá trị trong khoảng giữa min và max

Người ta đưa vào các phép toán V(a, b): [0, 1] × [0, 1] → [0, 1], mà các giá trị của nó nằm giữa min và max: $\min(a, b) \le \mathrm{V}(a, b) \le \max(a, b)$. Các phép toán này được gọi là phép toán lấy trung bình (averaging operators). Sau đây là một số phép toán lấy trung bình

Trung bình tổng quát: $V_\alpha(a,b) = \left(\dfrac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ trong đó, α là tham số và α ≠ 0

Trung bình max – min: $V_\lambda(a,b) = \lambda \max(a,b) + (1-\lambda)\min(a,b)$ trong đó, tham số λ ∈ [0, 1]

Tích đề các mờ: Chúng ta đã xác định tích đề các của các tập mờ A_1, …, A_n bởi biểu thức (4). Chúng ta gọi tích đề các được xác định bởi (4) (sử dụng phép toán min) là tích đề các chuẩn. Thay cho phép toán min, chúng ta có thể sử dụng phép toán T – norm bất kỳ để xác định tích đề các

Tích đề các của các tập mờ A_1, …, A_n trên các vũ trụ U_1, …, U_n tương ứng là các tập mờ $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ trên $U = U_1 \times \ldots \times U_n$ với hàm thuộc được xác định như sau:

$\mu_A(x_1,...,x_n) = \mu_{A_1}(x_1) * ... * \mu_{A_n}(x_n)$ trong đó $*$ là phép toán T- norm

3. Quan hệ mờ và nguyên lý mở rộng

3.1 Quan hệ mờ

Quan hệ mờ đóng vai trò quan trọng trong logic mờ và lập luận xấp xỉ. Khái niệm quan hệ mờ là sự tổng quát hoá trực tiếp của khái niệm quan hệ (quan hệ rõ). Trước hết ta nhắc lại khái niệm quan hệ

Giả sử U và V là 2 tập. Một quan hệ R từ U đến V (sẽ được gọi là quan hệ 2 ngôi) là một tập con của tích đề các $U \times V$. Trong trường hợp $U = V$, ta nói rằng R là quan hệ trên U. Chẳng hạn, tập R bao gồm tất cả các cặp người (a, b) trong đó a là chồng của b, xác định quan hệ "vợ - chồng" trên một tập người nào đó

Tổng quát, chúng ta xác định một quan hệ n – ngôi R trên các tập $U_1, \ldots, U_n$ là một tập con của tích đề các $U_1 \times \ldots \times U_n$

Khi U và V là các tập hữu hạn, chúng ta sẽ biểu diễn quan hệ R từ U đến V bởi ma trận, trong đó các dòng được đánh dấu bởi các phần tử $x \in U$ và các cột đọc đánh dấu bởi phần tử $y \in V$. Phần tử của ma trận nằm ở dòng x cột y là $\lambda_R(x, y)$

$$\lambda_R(x, y) = \begin{cases} 1 & if\ (x, y) \in R \\ 0 & if\ (x, y) \notin R \end{cases}$$

Ví dụ 3.1: Giả sử $U = \{x, y, z\}$ và $V = \{a, b, c, d\}$. Giả sử quan hệ R từ U đến V như sau:

$R = \{(x, a), (x, d), (y, a), (y, b), (z, c), (z, d)\}$

Chúng ta có thể biểu diễn quan hệ R bởi ma trận sau

$$R = \begin{pmatrix} & a & b & c & d \\ x & 1 & 0 & 0 & 1 \\ y & 1 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bây giờ chúng ta xét quan hệ "anh em họ gần" trên một tập người U nào đó. Quan hệ này không thể đặc trưng bởi một tập con rõ của tích đề các $U \times U$. Một cách hợp lý nhất là xác định quan hệ này bởi một tập mờ R trên $U \times U$. Chẳng hạn $\mu_R(a, b) = 1$ nếu a là anh em ruột của b, $\mu_R(a, b) = 0{,}9$ nếu a là anh em con chú con bác của b, $\mu_R(a, b) = 0{,}75$ nếu a là anh em cháu cô cháu cậu của b,..

Một quan hệ mờ từ U đến V là một tập mờ trên tích đề các $U \times V$

Tổng quát, một quan hệ mờ giữa các tập $U_1, \ldots, U_n$ là một tập mờ trên tích đề các $U_1 \times \ldots \times U_n$

Tương tự như trong trường hợp quan hệ rõ, khi cả U và V là các tập hữu hạn, chúng ta sẽ biểu diễn quan hệ mờ R bởi ma trận, trong đó phần tử nằm ở dòng $x \in U$ cột $y \in V$ là mức độ thuộc của (x, y) vào tập mờ R, tức là $\mu_R(x, y)$

Ví dụ 3.2: Giả sử $U = \{x, y, z\}$, $V = \{a, b, c\}$ và R là quan hệ mờ từ U đến V như sau:

$$R = \frac{0,5}{(x,a)} + \frac{1}{(x,b)} + \frac{0}{(x,c)} + \frac{0,3}{(y,a)} + \frac{0,75}{(y,b)} + \frac{0,8}{(y,c)} + \frac{0,9}{(z,a)} + \frac{0}{(z,b)} + \frac{0,42}{(z,c)}$$

Quan hệ mờ được biểu diễn bằng ma trận

$$R = \begin{pmatrix} & a & b & c \\ x & 0,5 & 1 & 0 \\ y & 0,3 & 0,75 & 0,8 \\ z & 0,9 & 0 & 0,42 \end{pmatrix}$$

3.2. Hợp thành của các quan hệ mờ

Đối với quan hệ rõ, hợp thành của quan hệ R từ U đến V với quan hệ S từ V đến W là quan hệ $R \circ S$ từ U đến W bao gồm tất cả các cặp $(u,w) \in U \times W$ sao cho có ít nhất một $v \in V$ mà $(u,v) \in R$ và $(v,w) \in S$

Từ định nghĩa trên chúng ta suy ra rằng, nếu xác định R, S và $R \circ S$ bởi các hàm đặc trưng λ_R, λ_S và λ_{RoS} tương ứng thì hàm đặc trưng λ_{RoS} được xác định bởi công thức

$$\lambda_{R \circ S}(u,w) = \max_{v \in V} \min[\lambda_R(u,v), \lambda_S(v,w)] \quad (1)$$

hoặc $\lambda_{R \circ S}(u,w) = \max_{v \in V} [\lambda_R(u,v)\lambda_S(v,w)]$ (2)

Ví dụ 3.3: Giả sử $U = \{u_1, u_2\}$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ và

$$R = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & 0 & 1 & 1 \\ u_2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} & w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó $R = \begin{pmatrix} & w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & 1 & 1 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bây giờ, giả sử rằng R là quan hệ mờ từ U đến V và S là quan hệ mờ từ V đến W. Tổng quát hoá các biểu thức (1) và (2) cho các quan hệ mờ ta có định nghĩa sau:

Hợp thành của quan hệ mờ R và quan hệ mờ S là quan hệ mờ $R \circ S$ từ U đến W với hàm thuộc được xác định như sau:

$$\mu_{R \circ S}(u,w) = \max_{v \in V} \min[\mu_R(u,v), \mu_S(v,w)] \quad (3)$$

hoặc $\mu_{R\circ S}(u,w) = \max_{v\in V} \; [\mu_R(u,v)\mu_S(v,w)]$ (4)

Hợp thành được xác định bởi (3) được gọi là hợp thành max – min. Hợp thành được xác định bởi (4) được gọi là hợp thành max – product. Ngoài hai hợp thành dạng trên, chúng ta còn có thể sử dụng một toán tử T – norm bất kỳ để xác định hợp thành của hai quan hệ mờ. Cụ thể là:

$$\mu_{R\circ S}(u,w) = \max_{v\in V} \; T[\mu_R(u,v), \mu_S(v,w)] \quad (5)$$

trong đó, T là toán tử T – norm. Trong (5) khi thay T bởi một toán tử T – norm, chúng ta lại nhận được một dạng hợp thành. Trong các ứng dụng, tuỳ từng trường hợp mà chúng ta lựa chọn toán tử T – norm trong (5). Tuy nhiên hợp thành max – min và hợp thành max – product là hai hợp thành được sử dụng rộng rãi nhất trong các ứng dụng

Ví dụ 3.4: Giả sử *R* và *S* là hai quan hệ mờ như sau:

$$R = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ u_2 & 0{,}7 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ u_3 & 0 & 0{,}6 & 1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} & w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & 0{,}6 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 1 & 0{,}5 \\ v_3 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ v_4 & 1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Khi đó hợp thành max – min của chúng là quan hệ mờ

$$R \circ S = \begin{pmatrix} & w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ u_2 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ u_3 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Hợp thành max – product của chúng là quan hệ mờ

$$R \circ S = \begin{pmatrix} & w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ u_2 & 0{,}42 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ u_3 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

3.2. Nguyên lý mở rộng

Nguyên lý mở rộng được đưa ra bởi Zadeh là một trong các công cụ quan trọng nhất của lý thuyết tập mờ. Nguyên lý mở rộng cho phép ta xác định ảnh của một tập mờ qua một hàm

Giả sử f: $X \rightarrow Y$ là một hàm từ không gian X vào không gian Y và A là một tập mờ trên X. Vấn đề đặt ra là chúng ta muốn xác định ảnh của tập mờ A qua hàm f. Nguyên lý mở rộng (*extention principle*) nói rằng, ảnh của tập mờ A qua hàm f là tập mờ B trên Y, ký hiệu $B = f(A)$ với hàm thuộc như sau:

$$\mu_B(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \qquad (6)$$

trong đó $f^{-1}(y)$ là tập tất cả các $x \in X$ mà $f(x) = y$

Ví dụ 3.5: Giả sử $U = \{0, 1, .., 10\}$ và f: $U \rightarrow U$ là hàm

$$f(x) = \begin{cases} 2x & if \quad x \le 5 \\ x & if \quad x > 5 \end{cases}$$

Giả sử A là tập mờ trên U

$$A = \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0{,}9}{3} + \frac{0{,}7}{4} + \frac{0{,}5}{5} + \frac{0{,}1}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0}{10}$$

Khi đó ta có ảnh của A là tập mờ sau:

$$B = f(A) = \frac{1}{0} + \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0{,}9}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0{,}7}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0{,}5}{10}$$

4. LOGIC MỜ

4.1. Biến ngôn ngữ

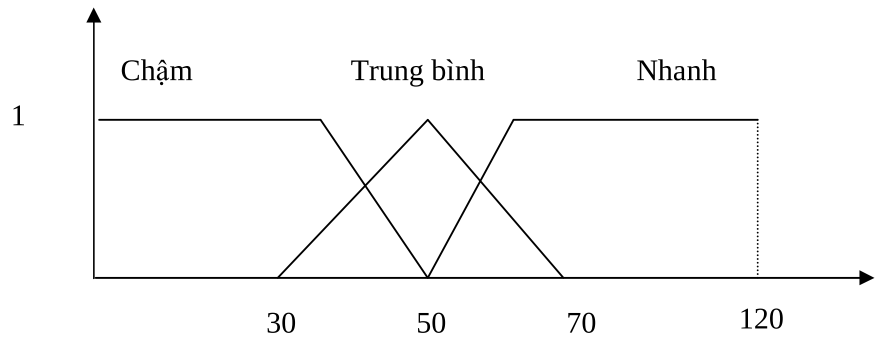
Chúng ta xét một biến, chẳng hạn "nhiệt độ", biến này có thể nhận các giá trị số: 13°C, 25°C,…Song trong đời sống hàng ngày, chúng ta vẫn thường nói "nhiệt độ cao", "nhiệt độ trung bình", "nhiệt độ thấp". Chúng ta có thể xem biến "nhiệt độ" lấy các từ "cao", "trung bình", "thấp" làm giá trị của nó. Khi một biến nhận các từ trong ngôn ngữ tự nhiên làm các giá trị thì biến đó được gọi là biến ngôn ngữ (linguistic variable)

Khái niệm biến ngôn ngữ được Zadeh đưa ra năm 1973, nó có thể được định nghĩa hình thức như sau:

Một biến ngôn ngữ được xác định bởi bộ 4 (x, T, U, M), trong đó

- x là tên biến
- T là một tập nào đó các từ (các giá trị ngôn ngữ) mà biến x có thể nhận
- U là miền các giá trị vật lý mà x với tư cách biến số, có thể nhận
- M là luật ngữ nghĩa, ứng với mỗi từ t $\in$ T với một tập mờ A trên vũ trụ U

Ví dụ 4.1: x là “tốc độ”, T = {chậm, trung bình, nhanh} và các từ “chậm”, “trung bình”, “nhanh” được xác định bởi các tập mờ trong hình 4.1



***Hình 4.1.* Các tập mờ biểu diễn giá trị ngôn ngữ “Chậm”, “Nhanh”, “Trung bình”**

Từ định nghĩa trên, chúng ta có thể nói rằng biến ngôn ngữ là biến có thể nhận giá trị là các tập mờ trên một miền nào đó

4.2. Mệnh đề mờ

Trong logic cổ điển (logic vị từ cấp một), một mệnh đề phân tử $P(x)$ là một phát biểu có dạng:

x là P (1)

trong đó x là ký hiệu một đối tượng nằm trong một tập các đối tượng nào đó (hay nói cách khác, x là một giá trị trên miền U), còn P là một tính chất nào đó của các đối tượng trong miền U. Chẳng hạn, các mệnh đề

“n là số nguyên tố”

“x là người Ấn độ”

Trong các mệnh đề (1) của logic kinh điển, tính chất P cho phép ta xác định một tập con rõ A của U sao cho $x \in A$ nếu và chỉ nếu x thoả mãn tính chất P. Chẳng hạn, tính chất “là số nguyên tố” xác định một tập con rõ của tập tất cả các số nguyên, đó là tập tất cả các số nguyên tố

Nếu chúng tra kí hiệu Truth($P(x)$) là giá trị chân lý của mệnh đề rõ (1) thì

Truth($P(x)$) $=\lambda_A(x)$ (2)

trong đó, $\lambda_A(x)$ là hàm đặc trưng của tập rõ A, tập A được xác định bởi một tính chất P

Một ***mệnh đề mờ*** phân tử cũng có dạng tương tự như (1), chỉ có điều ở đây P không phải là một tính chất chính xác, mà là một tính chất không rõ ràng, mờ. Chẳng hạn, các mệnh đề "tốc độ là nhanh", "áp suất là cao" "nhiệt độ là thấp",…là các mệnh đề mờ. Chúng ta có định nghĩa sau:

Một mệnh đề mờ phân tử có dạng

x là t (3)

trong đó, x là biến ngôn ngữ, còn t là một giá trị ngôn ngữ của x

Theo định nghĩa biến ngôn ngữ, từ t trong (3) được xác định bởi một tập mờ A trên vũ trụ U. Do đó, chúng ta còn có thể định nghĩa mệnh đề mờ phân tử là phát biểu có dạng

x là A (4)

trong đó, x là biến ngôn ngữ, còn A là một tập mờ trên miền U các giá trị vật lý của x

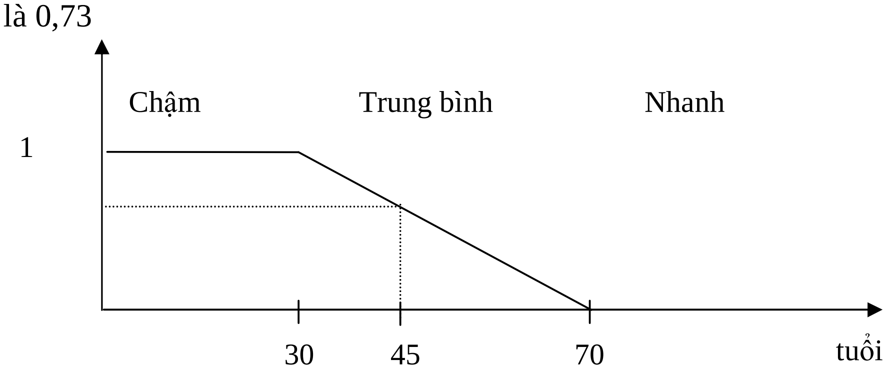
Logic cổ điển là logic 2 trị, một mệnh đề chỉ có thể là đúng (giá trị chân lý là 1) hoặc sai (giá trị chân lý là 0). Logic mờ là mở rộng của logic cổ điển. Trong logic mờ, giá trị chân lý của một mệnh đề mờ là một số trong [0, 1]

Chúng ta ký hiệu $P(x)$ là mệnh đề mờ (3), hoặc (4). Giá trị chân lý Truth($P(x)$) của nó được xác định như sau:

Truth($P(x)$) = $\mu_A(x)$ (5)

Điều đó có nghĩa là giá trị chân lý của mệnh đề mờ $P(x)$ = "x là A" là mức độ thuộc của x vào tập mờ A

Ví dụ 4.2: Giả sử P(x) là mệnh đề mờ "tuổi là trẻ". Giả sử tập mờ A = "tuổi trẻ" được cho trong hình 4.2 và $\mu_A(45) = 0,73$. Khi đó mệnh đề mờ "tuổi 45 là trẻ" có giá trị chân lý là 0,73



Hình 4.2. **Tập mờ "tuổi trẻ"**

4.3. Các mệnh đề hợp thành

Cũng như trong logic kinh điển, từ các mệnh đề mờ phân tử, bằng cách sử dụng các kết nối logic: $\wedge$ (and), $\vee$ (or), $\rceil$(not) chúng ta sẽ tạo ra các mệnh đề mờ hợp thành

Giả sử mệnh đề rõ $P(x)$ được minh hoạ như tập con rõ A trong vũ trụ U, (cần lưu ý rằng, điều đó có nghĩa là Truth($P(x)$) = 1 $\Leftrightarrow$ $x \in A$), và mệnh đề rõ $Q(y)$ được minh hoạ như tập con rõ B trong V. Từ bảng chân lý của các phép toán $\wedge$ (and), $\vee$ (or), $\rceil$ (not) trong logic cổ điển chúng ta suy ra:

- Mệnh đề $\rceil P(x)$ được minh hoạ như tập rõ $\overline{A}$
- Mệnh đề $P(x) \wedge Q(x)$ được minh hoạ như quan hệ rõ $A \times B$ trên $U \times V$
- Mệnh đề $P(x) \vee Q(x)$ được minh hoạ như quan hệ rõ $(A \times V) \cup (U \times B)$

Chuyển sang logic mờ, giả sử rằng $P(x)$ là mệnh đề mờ được minh hoạ như tập mờ A trên U và $Q(y)$ là mệnh đề được minh hoạ như tập mờ B trên V. Tổng quát hoá từ các mệnh đề rõ, chúng ta xác định như sau:

- Mệnh đề mờ $\rceil P(x)$ được minh hoạ như phủ định mờ $\overline{A}$ của tập mờ A:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = C(\mu_A(x)) \tag{6}$$

trong đó, C là hàm phần bù. Khi C là hàm phần bù chuẩn ta có

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{7}$$

- Mệnh đề $P(x) \wedge Q(x)$ được minh hoạ như quan hệ mờ $A \wedge B$, trong đó $A \wedge B$ được xác định là tích đề các mờ của A và B. Từ định nghĩa của tích đề các mờ, ta có:

$$\mu_{A \wedge B}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y)) \tag{8}$$

trong đó, T là một T – norm nào đó. Với T là phép lấy min, ta có

$$\mu_{A \wedge B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

- Mệnh đề $P(x) \vee Q(x)$ được minh hoạ như quan hệ mờ $A \vee B$, trong đó $A \vee B$ được xác định là tích đề các mờ của A và B. Từ định nghĩa của tích đề các mờ, ta có:

$$\mu_{A \wedge B}(x, y) = S(\mu_A(x), \mu_B(y)) \tag{10}$$

trong đó, S là một S – norm nào đó. Với S là phép lấy max, ta có

$$\mu_{A \wedge B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (11)$$

4.4. Kéo theo mờ - Luật if – then mờ

Trước hết, chúng ta xét phép kéo theo trong logic cổ điển. Giả sử $P(x)$ và $Q(y)$ là các mệnh đề được minh hoạ như các tập rõ A và B trên U và V tương ứng. Từ bảng chân lý của phép kéo theo trong logic cổ điển, chúng ta suy ra rằng, mệnh đề $P(x) \Rightarrow Q(y)$ được minh hoạ như quan hệ rõ trên $U \times V$:

$$R = (\overline{A} \times V) \cup (U \times B) \quad (12)$$

hoặc $$R = (\overline{A} \times V) \cup (A \times B) \quad (13)$$

Trong logic mờ, một kéo theo mờ có dạng

<Mệnh đề mờ> ⇒ <Mệnh đề mờ> (14)

Hay

if <Mệnh đề mờ> then <Mệnh đề mờ> (15)

Dạng này được gọi là luật if – then mờ. Chẳng hạn các phát biểu:

if "nhiệt độ cao" then "áp suất lớn"

if "tốc độ nhanh" then "ma sát lớn"

là các luật if – then mờ. Một vấn đề đặt ra là chúng ta cần hiểu ngữ nghĩa của (14) như thế nào? Xét một kéo theo mờ sau đây

$$P(x) \Rightarrow Q(x) \quad (16)$$

trong đó, $P(x)$ là mệnh đề mờ được minh hoạ như tập mờ A trên U và $Q(y)$ là mệnh đề mờ được minh hoạ như tập mờ B trên V

Tổng quát hoá từ (12) và (13), chúng ta có thể hiểu được kéo theo mờ (16) như là một quan hệ mờ R trên $U \times V$ được xác dịnh bởi (12) hoặc (13) nhưng các phép toán đó là các phép toán trên tập mờ

Từ (12) và (13) và định nghĩa của các phép toán lấy phần bù mờ, tích đề các mờ và hợp mờ, chúng ta có:

$$\mu_R(x, y) = S(C(\mu_A(x)), \mu_B(y)) \quad (17)$$

hoặc $$\mu_R(x, y) = S(C(\mu_A(x)), T(\mu_A(x), \mu_B(y))) \quad (18)$$

trong đó C là hàm phần bù, S là toán tử S – norm, T là toán tử T – norm

Như vậy kéo theo mờ (16) được minh hoạ như quan hệ mờ *R* với hàm thuộc xác định bởi (17) hoặc (18), ứng với mỗi cách lựa chọn các hàm *C*, *S*, *T* chúng ta nhận được một quan hệ mờ *R* minh hoạ cho kéo theo mờ (16). Như vậy kéo theo mờ (16) được minh hoạ bởi rất nhiều các quan hệ mờ khác nhau, sau đây là một số kéo theo mờ quan trọng

Kéo theo Dienes – Rescher

Trong (17), nếu thay S bởi phép toán lấy max và C bởi hàm phần bù chuẩn, chúng ta nhận được quan hệ mờ R với hàm thuộc:

$$\mu_R(x, y) = \max(1-\mu_A(x), \mu_B(y)) \tag{19}$$

Kéo theo Lukasiewicz

Nếu sử dụng phép hợp Yager với *w* = 1 thay cho S và C là phần bù chuẩn thì từ (17) chúng nao nhận được quan hệ mờ R với hàm thuộc:

$$\mu_R(x, y) = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)) \tag{20}$$

Kéo theo Zadeh

Trong (18), nếu sử dụng S là max, T là min và C là hàm phần bù chuẩn, chúng ta nhận được quan hệ mờ R với hàm thuộc

$$\mu_R(x, y) = \max(1-\mu_A(x), \min(\mu_A(y), \mu_B(y))) \tag{21}$$

Trên đây chúng ta hiểu kéo theo mờ $P(x) \Rightarrow Q(y)$ như quan hệ mờ *R* được xác định bởi (17), (18). Cách hiểu như thế là sự tổng quát hoá trực tiếp ngữ nghĩa của kéo theo cổ điển. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể hiểu: Kéo theo mờ $P(x) \Rightarrow Q(y)$ chỉ có giá trị chân lý lớn khi cả $P(x)$ và $Q(y)$ đều có giá trị chân lý lớn, tức là chúng ta có thệ minh hoạ kéo theo mờ (16) như là quan hệ mờ *R* được xác định là tích đề các mờ của *A* và *B*

$$R = A \times B \tag{22}$$

Từ (22) chúng ta xác định được hàm thuộc của quan hệ mờ *R*

$$\mu_R(x, y)=T(\mu_A(x), \mu_B(y)) \tag{23}$$

với *T* là toán tử *T* – norm

Kéo theo Mamdani

Trong (23), nếu sử dụng *T* là phép toán lấy min hoặc tích đại số, chúng ta có:

$$\mu_R(x, y)=\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \tag{24}$$

hoặc

$$\mu_R(x, y)=\mu_A(x)\mu_B(y) \tag{25}$$

Kéo theo mờ (16) được hiểu như một quan hệ mờ R với hàm thuộc được xác định bởi (24) hoặc (25) được gọi là keo theo Mamdani. Kéo theo Mamdani được sử dụng rộng rãi nhất trong các hệ mờ

Ví dụ 4.3: Xét luật if – then mờ sau: if “x là A” then “y là B” trong đó, A và B là các tập mờ sau:

$$A = \frac{1}{m} + \frac{0{,}7}{n} + \frac{0{,}1}{l}$$

$$B = \frac{0}{a} + \frac{0{,}3}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

Áp dụng các công thức (19), (20), (21) và (23) chúng ta xác định được các quan hệ mờ sau:

Quan hệ Dienes – Rescher

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \\ l \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Quan hệ Lukasiewics

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \\ l \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 1 & 1 \\ 0{,}9 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Quan hệ Zadeh

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \\ l \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Quan hệ Mamdani

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \\ l \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.5. Lập luận xấp xỉ đơn điều kiện

Thuật ngữ lập luận xấp xỉ được L.A. Zadeh sử dụng lần đầu tiên và được nghiên cứu trong các công trình []. Zadeh xuất phát từ ví dụ sau về phương pháp lập luận của con người:

Tiền đề 1: Nếu vỏ của quả cà chua là *đỏ*, thì quả cà chua là *chín*

Tiền đề 2: Vỏ của quả cà chua *c* là *rất đỏ* . (3.6-16)

Kết luận: quả cà chua *c* là *rất chín*

Tiền đề thứ nhất thể hiện tri thức, sự hiểu biết của chúng ta, tiền đề thứ hai là dữ kiện hay sự kiện (fact) và kết luận được rút ra từ hai Tiền đề 1 và 2. (3.6-16) được gọi là một lược đồ lập luận xấp xỉ đơn điều kiện, vì chỉ có một tiền đề có dạng luật nếu-thì.

Chúng ta thường hay gặp kiểu lập luận xấp xỉ như vậy trong suy luận của chúng ta bằng ngôn ngữ tự nhiên. Câu hỏi đặt ra là liệu chúng ta có thể có một cách tiếp cận tính toán để mô phỏng phương pháp lập luận nêu trên?

3.6.4.1. Quy tắc suy luận hợp thành

Một cách tổng quát, lược đồ lập luận (3.6-16) được biểu thị như sau với *A*, *A’*, *B* và *B’* là các tập mờ tương ứng trên các không gian tham chiếu ***U*** của $\mathcal{X}$ và ***V*** của $\mathcal{Y}$,

Tiền đề 1: Nếu $\mathcal{X}$ là *A*, thì $\mathcal{Y}$ là *B*

Tiền đề 2: $\mathcal{X}$ là *A’* . (3.6-17)

Kết luận: $\mathcal{Y}$ là *B’*

Tiền đề 1 biểu thị mối quan hệ giữa hai đại lượng $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$, với $\mathcal{X}$ nhận giá trị trong ***U*** và $\mathcal{Y}$ nhận giá trị trong ***V***. Lược đồ lập luận (3.6-17) được gọi là ***quy tắc cắt đuôi tổng quát hóa*** (generalized modus ponens). Nó khác quy tắc cắt đuôi kinh điển ở chỗ sự kiện “$\mathcal{X}$ là *A’*” trong Tiền đề 2 không trùng với sự kiện trong phần “nếu” hay tiền tố của Tiền đề 1.

Chúng ta thiết lập quy tắc suy luận hợp thành để áp dụng vào lược đồ lập luận (3.6-17) dựa trên quan sát các trường hợp sau.

1) Trường hợp $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ có quan hệ hàm số, tức là $v = f(u)$, $v \in$ ***V*** và $u \in$ ***U***. Khi đó, nếu ta có sự kiện “$\mathcal{X}$ là *u’*” thì ta suy ra $v' = f(u')$, nhờ tri thức $\mathcal{X}$ xác định hàm $\mathcal{Y}$. Nếu

ta có sự kiện "$\mathcal{X}$ là A'", trong đó A' là tập con của $\boldsymbol{U}$, thì ta suy ra được tập $B' = \{v' \in \boldsymbol{V}: v' = f(u') \text{ và } u' \in \boldsymbol{U}\} \subseteq \boldsymbol{V}$.

2) Trường hợp $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ có quan hệ được cho bởi quan hệ 2-ngôi kinh điển $R \subseteq \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}$. Khi đó, nếu ta có sự kiện "$\mathcal{X}$ là u'" thì ta suy ra được tập $B = \{v' \in \boldsymbol{V}: (u', v') \in R\}$. Tương tự, nếu ta có sự kiện "$\mathcal{X}$ là A'", trong đó A' là tập con của $\boldsymbol{U}$, thì ta suy ra được tập

$$B' = \{v' \in \boldsymbol{V}: (u', v') \in R \text{ và } u' \in A'\} \subseteq \boldsymbol{V}$$

Sử dụng thuật ngữ hàm đặc trưng, với $\varphi_{A'}$, $\varphi_{B'}$ và φ_R là các hàm đặc trưng tương ứng của các tập A', B' và R, công thức tính B' ở trên có thể viết dưới dạng sau

$$\varphi_{B'}(v') = \vee_{u' \in \boldsymbol{U}} [\varphi_{A'}(u') \wedge \varphi_R(u', v')], \forall v' \in \boldsymbol{V} \qquad (3.6\text{-}18)$$

3) Trường hợp $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ có quan hệ được cho bởi *quan hệ mờ 2-ngôi R* trên $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}$. Như chúng ta biết, ngữ nghĩa của mệnh đề nếu-thì trong (3.6-17) có thể được biểu thị bằng một quan hệ mờ R trên $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}$. Nó được xác định dựa trên tập mờ A trên $\boldsymbol{U}$ và tập mờ B trên $\boldsymbol{V}$, và dựa trên ngữ nghĩa của phép kép theo mờ đã được nghiên cứu trong Mục 3.6.2. Tức là,

$$R = Impl(A, B) = A \overset{*}{\rightarrow} B, \text{ hay } \mu_R(u, v) = \mathcal{I}(\mu_A(u), \mu_B(v)) \qquad (3.6\text{-}19)$$

Sự khác biệt của trường hợp này so với trường hợp đã đề cập trong 2) là thay vì các hàm đặc trưng chúng ta có các hàm thuộc $\mu_{A'}$, $\mu_{B'}$ và μ_R. Vì vậy, nếu ta có sự kiện "$\mathcal{X}$ là A'" với A' là tập mờ trên $\boldsymbol{U}$, thì chúng ta có thể suy luận ra tập mờ B' được tính bằng công thức được khái quát hóa từ (3.6-18) như sau

$$\mu_{B'}(v') = \vee_{u' \in \boldsymbol{U}} [\mu_{A'}(u') \wedge \mu_R(u', v')], \forall v' \in \boldsymbol{V} \qquad (3.6\text{-}20)$$

Như chúng ta đã nghiên cứu trong Mục 3.4, công thức (3.6-20) có thể được biểu diễn ở dạng ma trận

$$B' = A' \circ R \qquad (3.6\text{-}21)$$

trong đó $\circ$ là phép hợp thành max-min (max-min composition). Chính vì B' được suy luận ra từ công thức (3.6-21) nên phương pháp lập luận xấp xỉ này được gọi là *quy tắc suy luận hợp thành*.

Nếu ta thay phép min $\wedge$ bằng một phép t-norm T nào đó trong (3.6-20) và (3.6-21), ta có quy tắc suy luận hợp thành max-T được ký hiệu là $\circ_T$, cụ thể ta có

$$\mu_{B'}(v') = \vee_{u' \in \boldsymbol{U}}\ T(\mu_{A'}(u'), \mu_R(u', v')),\ \forall v' \in \boldsymbol{V} \quad (3.6\text{-}20^*)$$

và

$$B' = A' \overset{T}{\circ} R \qquad (3.6\text{-}21^*)$$

Ví dụ, xét lược đồ suy luận (3.6-17) với $\boldsymbol{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $\boldsymbol{V} = \{v_1, v_2\}$, $A = 0{,}5/u_1 + 1{,}0/u_2 + 0{,}6/u_3$ và $B = 1{,}0/v_1 + 0{,}4/v_2$. Cho sự kiện "$\mathscr{X}$ là A'" với $A' = 0{,}6/u_1 + 0{,}9/u_2 + 0{,}7/u_3$. Chúng ta sẽ suy luận dựa theo quy tắc suy luận cắt đuôi tổng quát và vì vậy trước hết chúng ta tính quan hệ mờ $R = A \overset{*}{\to} B$ dựa vào phép kéo mờ theo Lukasiewicz $s \overset{L}{\to} t = 1 \wedge (1 - s + t)$. Như vậy, $\mu_R(u, v) = \mu_A(u) \overset{L}{\to} \mu_B(v) = 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))$, $u \in \boldsymbol{U}$ và $v \in \boldsymbol{V}$. Với các dự liệu của bài toán, quan hệ mờ R có dạng ma trận sau

$$R = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}9 \\ 1{,}0 & 0{,}4 \\ 1{,}0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \text{ và do đó, theo (3.7-6), } B' = A' \circ R = (0{,}6\ 0{,}9\ 0{,}7) \circ \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}9 \\ 1{,}0 & 0{,}4 \\ 1{,}0 & 0{,}8 \end{pmatrix} = (0{,}9\ 0{,}7)$$

Như vậy, ta suy ra $B' = 0{,}9/v_1 + 0{,}7/v_2$.

Quy tắc suy luận hợp thành cũng có thể ứng dụng cho ***quy tắc modus tollens tổng quát hóa*** có dạng lược đồ lập luận sau:

Tiền đề 1: Nếu $\mathscr{X}$ là A, thì $\mathscr{Y}$ là B

Tiền đề 2: $\mathscr{Y}$ là B'. (3.6-22)

Kết luận: $\mathscr{X}$ là A'

Lưu ý rằng nói chung $B' \neq B$. Khác với quan hệ hàm số, quan hệ mờ R có tính đối xứng giữa hai biến $\mathscr{X}$ và $\mathscr{Y}$, cho nên sử dụng phép hợp thành trên các quan hệ mờ, việc suy luận ra A' có thể được tính theo công thức sau với B' là vectơ cột

$$A' = R \circ B' \qquad (3.6\text{-}23)$$

Chúng ta xét một ví dụ với các dữ kiện giống như trong ví dụ vừa xem xét ở trên, trừ việc ta không có sự kiện "$\mathscr{X}$ là A'" mà ở đây ta lại so sự kiện "$\mathscr{Y}$ là B'" với B' được cho là $B' = 0{,}9/v_1 + 0{,}7/v_2$, nghĩa là nó chính là kết luận trong ví dụ trên. Khi đó, quan hệ mờ R vẫn như đã được tính trong ví dụ trên và kết luận A' được tính theo (3.6-23) như sau

$$A' = R \circ B' = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}9 \\ 1{,}0 & 0{,}4 \\ 1{,}0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}7 \end{pmatrix} = (0{,}9\ 0{,}9\ 0{,}9)$$

Như vậy, ta đa suy ra được kết luận $A' = 0{,}9/u_1 + 0{,}9/u_2 + 0{,}9/u_3$.

3.6.4.3. Xây dựng phương pháp lập luận dựa trên phương trình quan hệ mờ

Trong hai Mục 3.6.4.2 chúng ta đã trình tiêu chuẩn lựa chọn phép kéo theo mờ $\mathcal{J}$ để xác định quan hệ R sao cho nó thỏa biểu thức

$$B = A \circ R \qquad (3.6\text{-}27)$$

đối với quy tắc cắt đuôi tổng quát hóa, và thỏa biểu thức

$$N(A) = R \circ N(B) \qquad (3.6\text{-}28)$$

đối với quy tắc modus tollens tổng quát hóa.

Như vậy, bản chất của việc tìm một phương pháp lập luận xấp xỉ là việc xác định quan hệ mờ R một cách phù hợp. Tuy nhiên, khi quan sát hai biểu thức (3.6-27) và (3.6-28), chúng ta có thể coi chúng như là các phương trình quan hệ mờ và bài toán xây dựng một phương pháp lập luận xấp xỉ trở thành việc giải phương trình quan hệ mờ (3.6-27) hay (3.6-28) đển tìm lời giải R khi cho biết các "quan hệ mờ" A và B.

Bây giờ chúng ta đi nghiên cứu một số phương pháp giải các phương trình quan hệ ở hai dạng nếu trên.

1) *Phương trình quan hệ mờ*

Cho các quan hệ mờ 2-ngôi $P(u, v)$, $Q(v, w)$ và $R(u, w)$, với $u \in \boldsymbol{U}$, $v \in \boldsymbol{V}$ và $w \in \boldsymbol{W}$. Đối với việc nghiên cứu phương trình quan hệ, chúng ta giới hạn việc xét các quan hệ mờ rời rạc, t.l. $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ và $\boldsymbol{W}$ là các tập hữu hạn

$$\boldsymbol{U} = \{u_i : i = 1, \ldots, n\},\ \boldsymbol{V} = \{v_j : j = 1, \ldots, m\} \text{ và } \boldsymbol{W} = \{w_k : k = 1, \ldots, l\}$$

Khi đó các quan hệ mờ có thể biểu thị ở dạng ma trận.

Xét phương trình quan hệ mờ

$$R = P \overset{T}{\circ} Q \qquad (3.6\text{-}29)$$

Giả sử rằng các quan hệ R và Q là các dữ kiện cho trước. Bài toán đặt ra là tìm quan hệ mờ P sao cho nó thỏa phương trình quan hệ (3.6-29). Vì phép $\overset{T}{\circ}$ không giao hoán, một bài toán tương tự là, cho trước R và P, tìm quan hệ Q sao cho nó thỏa phương trình (3.6-19).

Công thức (3.6-29) cũng có thể được xem như là một sự phân tích quan hệ R thành quan hệ Q khi cho trước P, hoặc một sự phân tích quan hệ R thành quan hệ P khi cho trước quan hệ Q.

Vì các quan hệ có thể biểu thị ở dạng ma trận, như chúng ta đã biết, phép hợp thành "$\overset{T}{\circ}$" ứng với phép t-norm T sẽ là phép tích ma trận tương tự như phép tích ma trận thông thường, với phép nhân là phép t-norm T và phép cộng là phép lấy max. Vì vậy chúng ta có thể sử dụng công cụ ma trận để giải phương trình (3.6-29).

Một cách tổng quát, các quan hệ trong (3.6-29) có thể suy biến thành các các ma trận một hàng hay một cột. Chẳng hạn, R và P có thể suy biên thành hai vectơ hàng, hoặc R và Q là hai vectơ cột.

▪ *Vấn đề phân hoạch bài toán*

Trước hết ta xét bài toán cho trước ma trận R và Q, hãy xác định tập các ma trận $\mathcal{S}(Q, R)$ thỏa phương trình (3.6-29), t.l. xác định tập lời giải của phương trình (3.6-29)

$$\mathcal{S}(Q, R) = \{P : P \circ Q = R\} \qquad (3.6\text{-}30)$$

trong đó, phép hợp thành $\circ$ được giới hạn là phép hợp thành max-min.

Không mất tính chất tổng quát có thể thấy dễ dàng và tự nhiên rằng bài toán này sẽ được phân tách thành tập các bài toán biểu thị bằng phương trình ma trận sau

$$\boldsymbol{p}_i \circ Q = \boldsymbol{r}_i \qquad (3.6\text{-}31)$$

trong đó $i = 1, \ldots, n$, và các vectơ hàng $\boldsymbol{p}_i = (p_{ij} : j = 1, \ldots, m)$ và $\boldsymbol{r}_i = (r_{ik} : k = 1, \ldots, l)$. Công thức (3.6-31) có nghĩa,

$$r_{ik} = \max_{1\le j\le m} \min(p_{ij}, q_{jk}) \qquad (3.6\text{-}32)$$

Ký hiệu tập các lời giải của phương trình (3.6-31) là

$$\mathcal{S}_i(Q, \boldsymbol{r}_i) = \{\boldsymbol{p}_i : \boldsymbol{p}_i \circ Q = \boldsymbol{r}_i\} \qquad (3.6\text{-}33)$$

với $i = 1, \ldots, n$. Khi đó lời giải của phương trình (3.6-29) sẽ là vectơ cột

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \end{pmatrix}, \text{ với } \boldsymbol{p}_i \in \mathcal{S}_i(Q, \boldsymbol{r}_i) \text{ với mọi } i = 1, \ldots, n.$$

Một câu hỏi đặt ra là khi nào phương trình ma trân (3.6-31) có nghiệm hay không có nghiệm, hay khi nào $S_i(Q, \boldsymbol{r}_i) \neq \varnothing$?

Từ công thức (3.6-32) co thể thấy ngay là nếu

$$\max_{1\le j\le m} q_{jk} < \max_{1\le i\le n} r_{ik} \qquad (3.6\text{-}34)$$

với một chỉ số k nào đó, thì $\mathcal{S}_i(Q, \boldsymbol{r}_i) = \varnothing$, nghĩa là không có một ma trận P nào thỏa mãn phương trình ma trận (3.6-29).

Ví dụ 3.6-1. Xét phương trình ma trận dạng (3.6-29) sau

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}8 \\ 1{,}0 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 1{,}0 \end{pmatrix},$$

với ma trận thứ nhất P là ẩn số. Bài toán đặt ra là xác định tập nghiệm $\mathcal{S}(Q, R)$. Như chúng ta đã trình bày ở trên, bài toán này được phân hoạch thành một tập các bài toán con dạng (3.6-31) sau

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}8 \\ 1{,}0 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

và

$$\begin{pmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}8 \\ 1{,}0 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1{,}0 \end{pmatrix}.$$

Tuy nhiên, với $k = 2$, $i = 2$, ta có $r_{22} = 1{,}0$ và chúng ta kiểm chứng thấy

$$\max_{1\le j\le m} q_{jk} = \max(0{,}5\ \ 0{,}8\ \ 0{,}4) < 1{,}0 = r_{22}.$$

Vậy, phương trình ma trân đã cho không có nghiệm, t.l. $\mathcal{S}(Q, R) = \varnothing$.

Sau đây chúng ta nghiên cứu phương pháp giải phương trình (3.6-29) hoặc (3.6-31), kể cả phương pháp giải xấp xỉ trong trường hợp $\mathcal{S}(Q, R) = \emptyset$.

▪ *Phương pháp giải phương trình ma trận với phép hợp thành* max-min

Xét phương trình quan hệ

$$\boldsymbol{p} \circ Q = \boldsymbol{r} \qquad (3.6\text{-}35)$$

của một phân hoạch nào đó, t.l. ta bỏ qua chỉ số phân hoạch i trong phương trình (3.6-31). Trước hết, chúng ta khảo sát cấu trúc của tập lời giải của phương trình (3.6-35), $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{p} : \boldsymbol{p} \circ Q = \boldsymbol{r}\}$.

Gọi $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m) : p_j \in [0, 1], j = 1, \ldots, m\}$, t.l. $\boldsymbol{p}$ là tập mờ trên không gian $\boldsymbol{V}$. Trên $\mathcal{P}$ ta định nghĩa quan hệ thứ tự bộ phận ≤ trên các vectơ, t.l. $\boldsymbol{p} \le \boldsymbol{p}'$ nếu và chỉ nếu $p_j \le p'_j$, với mọi $j = 1, \ldots, m$. Với bây kỳ 2 phần tử $\boldsymbol{p}$ và $\boldsymbol{p}'$, với $\boldsymbol{p} \le \boldsymbol{p}'$, ta định nghĩa đoạn

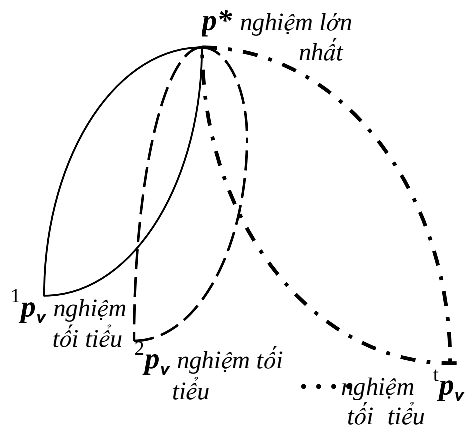
$$[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'] = \{\boldsymbol{p}'': \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{p}'' \le \boldsymbol{p}'\}.$$

Chúng ta biết rằng tập $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}']$ sẽ tạo thành một dàn (lattice).

Dựa trên cấu trúc $\mathcal{P}$ ta định nghĩa một số khái niệm sau.

Xét tập lời giải hay tập nghiệm $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$. Phần tử $\boldsymbol{p}^*$ của $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$ được gọi là *nghiệm tối đại* nếu với mọi $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$, ta có $\boldsymbol{p} \ge \boldsymbol{p}^* \Rightarrow \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^*$, t.l. không tồn tại một nghiệm của (3.6-35) nào thực sự lớn hơn $\boldsymbol{p}^*$. Nghiệm $\boldsymbol{p}^*$ được gọi là *lớn nhất* nếu $\boldsymbol{p}^* \ge \boldsymbol{p}$, với $\forall \boldsymbol{p} \in \mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$.

Một cách tương tự, $\boldsymbol{p}_* \in \mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$ được gọi là *nghiệm tối tiểu* nếu với mọi $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$, ta có $\boldsymbol{p} \le \boldsymbol{p}_* \Rightarrow \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_*$, t.l. không tồn tại một nghiệm của (3.6-35) nào thực sự nhỏ hơn $\boldsymbol{p}_*$. Nghiệm $\boldsymbol{p}_v$ được gọi là *nhỏ nhất* nếu $\boldsymbol{p}_v \le \boldsymbol{p}$, với $\forall \boldsymbol{p} \in \mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$.



Hình 3.6-1. Cấu trúc tập $S(Q, \boldsymbol{r})$

Người ta đã xác định được cấu trúc của tập nghiệm $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$ như sau:

- Tập $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$ luôn tồn tại nghiệm lớn nhất $\boldsymbol{p}^*$;
- Tập $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$ chứa nhiều nghiệm tối tiểu, t.l. nhìn chung phương trình (3.6-35) không có nghiệm nhỏ nhất;
- Với $\boldsymbol{p}'$ là một nghiệm tối tiểu và $\boldsymbol{p}^*$ là nghiệm lớn nhất của (3.6-35), ta có $[\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}^*] \subseteq \mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$. Nói khác đi, khi ký hiệu $\mathcal{S}_{min} = \mathcal{S}_{min}(Q, \boldsymbol{r})$ là tập các nghiệm tối tiểu của $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$, ta có

$$\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r}) = \bigcup_{p_* \in S_*} [p_*, p^*]$$

Trên Hình 3.6-1 chúng ta thấy hình ảnh cấu trúc tập nghiệm $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$ với chỉ một nghiệm lớn nhất và một số nghiệm tối tiểu còn tập $[{}^{l}\boldsymbol{p}_v, \boldsymbol{p}^*]$ biểu thị bằng hình chiếc lá.

Bây giờ ta xem xét phương pháp hay thủ tục xác định cấu trúc $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$.

(i) *Xác định nghiệm lớn nhất*: Người ta cũng chứng tỏ rằng nếu $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r}) \neq \emptyset$ thì nghiệm lớn nhất $\boldsymbol{p}^* = (p_j^* : j = 1, \ldots, m)$ được xác định như sau

$$p_j^* = \min_{1 \le k \le l} \varphi(q_{jk}, r_k), \text{ với } \varphi(q_{jk}, r_k) = \begin{cases} r_k & if\ q_{jk} > r_k \\ 1 & otherwise \end{cases} \qquad (3.6\text{-}36)$$

và nếu $\boldsymbol{p}^*$ không thỏa mãn phương trình (3.6-35) thì $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r}) = \emptyset$, nghĩa là việc tồn tại nghiệm lớn nhất được xác định bởi (3.6-36) là điều kiện cần và đủ để $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r}) \neq \emptyset$.

(ii) *Xác định tập nghiệm tối tiểu* $\mathcal{S}_{min}(Q, \boldsymbol{r})$: Để xác định được cấu trúc của tập $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$, tiếp theo ta chỉ cần xác định tập $\mathcal{S}_{min}(Q, \boldsymbol{r})$, t.l. ta giải bài toán tìm trong các phần tử $\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{p*}$, tất cả các nghiệm tối tiểu của (3.6-35). Không mất tính tổng quát giả thiết rằng $r_1 \geq \ldots \geq r_s > 0$, với $s \geq l$, nghĩa là giả thiết này kéo theo việc ta chỉ xét phương trình (3.6-35) với việc rút gọn vectơ $\boldsymbol{r}$ xuống còn s thành phần. Thực vậy, nếu các thành phần của vectơ hàng $\boldsymbol{r}$ không phải là dãy số đơn điệu không tăng, ta chỉ cần thực hiện một phép hoán vị thích hợp các vị trí của chúng. Ta có quyền làm được điều mày vì tập chỉ số của vectơ $\boldsymbol{r}$ tương ứng với các phần tử của không gian $\boldsymbol{W}$ mà các phần tử của nó không bị buộc phải được xắp thứ tự. Sau đó, để không làm thay đổi phương trình ma trận (3.6-35) chúng ta thực hiện chính phép hoán vị đó đối với các chỉ số cột của ma trận Q (lưu ý rằng chỉ số cột của Q trùng với chỉ số các thành phần của $\boldsymbol{r}$). Ngoài ra, với thành phần $r_k = 0$, $k > s$, ta có thể loại bỏ thành phần này của vectơ $\boldsymbol{r}$ và cột thứ k của Q, vì nếu $\boldsymbol{p}$ là nghiệm của phương trình (3.6-35) đã được rút gọn thì ta cũng có $\max_{1\leq j \leq m} \min\{p_j, q_{jk}\} = r_k = 0$. Thực vậy, vì $\boldsymbol{p*}$ là nghiệm nên ta phải có

$$\max_{1\leq j \leq m} \min\{ p^*_j, q_{jk}\} = r_k = 0. \qquad (3.6\text{-}37)$$

Từ đây ta suy ra nếu $q_{jk} \neq 0$ thì $p^*_j = 0$ và nếu $q_{jk} = 0$ thì p^*_j có thể nhận giá trị tùy ý trong [0, 1] mà ta vẫn có đẳng thức (3.6-37). Vì $\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{p*}$, nên ta có $p_j = 0$ đối với j mà $q_{jk} \neq 0$ và do đó $\boldsymbol{p}$ thỏa mãn (3.6-37). Như vậy mọi nghiệm của phương trình (3.6-35) rút gọn đều là nghiệm của phương trình gốc.

Bây giờ ta chỉ ra rằng ta có thể rút gọn tiếp phương trình (3.6-35) bỏ các dữ liệu liên quan đến các chỉ số j mà $p^*_j = 0$. Cụ thể đối với những chỉ số j này ta loại bỏ thành phần p^*_j của vectơ $\boldsymbol{p*}$ và hàng thứ j của ma trận Q. Khi đó, nếu $\boldsymbol{p}$ là nghiệm của pgương trình (3.6-35) rút gọn, thì khi khôi phục lại thành phần thứ j đã loại với giá trị bằng 0 ta sẽ thu được nghiệm của phương trình gốc, t.l. việc $\boldsymbol{p}$ được khôi phục như vậy sẽ thỏa phương trình gốc.

Như vậy, chúng ta có thể giả thiết rằng mọi thành phần của vectơ nghiệm lớn nhất $\boldsymbol{p*}$ và vectơ $\boldsymbol{r}$ đều khác 0, t.l. $p^*_j \neq 0$, với $j = 1, \ldots, m$, và $r_k \neq 0$, với $k = 1, \ldots, l$. Khi đó, cho trước Q, $\boldsymbol{r}$ và $\boldsymbol{p*}$ thỏa mãn các điều kiện trên, tập nghiệm tối tiểu của phương trình rút gọn (3.6-35) được xác định bằng một thủ tục.

Để tránh việc trình bày các kỹ thuật phức tạp chúng ta sẽ không chứng minh tính đúng đắn của thủ tục này. Nhưng để nắm được ý tưởng của thủ tục ta nêu ra một số nhận xét trực quan.

Ta viết lại công thức (3.6-32) để xem xét, với lưu ý rằng ta bỏ qua chỉ số i trong công thức này vì ta đang xét bài toán của một phân hoạch với phương trình (3.6-35):

$$r_k = \max_{1\leq j\leq m} \min(p_j, q_{jk}), \qquad (*)$$

trong đó p_j là thành phần của một vectơ nghiệm tối tiểu nào đó. Như vậy, phải có những chỉ số j để $\min(p_j, q_{jk}) = r_k$, với mọi k. Vì $\boldsymbol{p}$ là tối tiểu nên, đối với những chỉ số j như vậy, ta phải có $p_j = r_k$. Đối với những chỉ số j' khác, giá trị $p_{j'}$ của vectơ $\boldsymbol{p}$ không ảnh hưởng đến kết quả của công thức (*), vì $\min(p_{j'}, q_{jk}) < r_k$. Vì vậy, vì $\boldsymbol{p}$ là tối tiểu nên $p_{j'} = 0$. Vì vậy, các bước chính của thủ tục xác định tập $\mathcal{S}_{min}(Q, \boldsymbol{r})$ bao gồm:

1. Xác định các tập $J_k(\boldsymbol{p*}) = \{j: 1 \leq j \leq m, \min(p^*_j, q_{jk}) = r_k\}$, $k = 1, \ldots, l$.

   Thiết lập tich Đề-các

   $$J(\boldsymbol{p*}) = J_1(\boldsymbol{p*}) \times J_2(\boldsymbol{p*}) \times \ldots \times J_l(\boldsymbol{p*}).$$

   Ký hiệu các phần tử của $J(\boldsymbol{p*})$ là $\beta = (\beta_k : k = 1, \ldots, l)$.

2. Đối với mỗi $\beta \in J(\boldsymbol{p*})$ và mỗi chỉ số j, $1 \leq j \leq m$, ta xác định tập sau

   $$K(\beta, j) = \{k : 1 \leq k \leq l, \beta_k = j\}.$$

3. Với mỗi phần tử $\beta \in J(\boldsymbol{p*})$, ta sinh các vectơ sau $g(\beta) = (g_j(\beta): j = 1, \ldots, m)$, trong đó

$$g_j(\beta) = \begin{cases} \max_{k \in K(\beta, j)} r_k & if \quad K(\beta, j) \neq \emptyset, \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

4. Lựa chọn trong các vectơ m-chiều được sinh ra trong Bước 3 những phần tử tối tiểu theo quan hệ thứ tự một phần trong $\mathcal{D}$. Các phần tử như vậy tồn tại vì số các phần tử $g(\beta)$ là hữu hạn và chúng là tập tất cả các nghiệm tối tiểu.

Ví dụ 3.6-2. Cho trước quan hệ Q và $\boldsymbol{r}$ như sau:

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}0 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}0 \end{pmatrix}$$

Hãy xác định tập tất cả các nghiệm $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r})$ của (3.6-35).

(i) Trước hết ta xác định nghiệm lớn nhất $\boldsymbol{p^*}$ dựa vào công thức (3.6-36). Ta có,

$$p_1^* = \min(1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 0{,}0) = 0{,}0$$
$$p_2^* = \min(0{,}8 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0) = 0{,}8$$
$$p_3^* = \min(1{,}0 \;\; 0{,}7 \;\; 1{,}0 \;\; 1{,}0) = 0{,}7$$
$$p_4^* = \min(1{,}0 \;\; 1{,}0 \;\; 0{,}5 \;\; 1{,}0) = 0{,}5$$

và $\boldsymbol{p^*} = (0{,}0 \;\; 0{,}8 \;\; 0{,}7 \;\; 0{,}5)$. Chúng ta có thể kiểm chứng rằng $\boldsymbol{p^*}$ là nghiệm và do đó $\mathcal{S}(Q, \boldsymbol{r}) \neq \emptyset$.

(ii) Xác định các nghiệm tối tiểu: Do $p_1^* = 0{,}0$ và $r_4 = 0{,}0$ ta có phương trình ma trận rút gọn sau:

$$\begin{pmatrix} p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Bây giờ ta thức hiện thủ tục 4 bước đã trình bày ở trên.

1. Với $\boldsymbol{p^*} = (0{,}8 \;\; 0{,}7 \;\; 0{,}5)$, ta có $J_1(\boldsymbol{p^*}) = \{2\}$, $J_2(\boldsymbol{p^*}) = \{2, 3\}$ và $J_3(\boldsymbol{p^*}) = \{3, 4\}$. Vậy, $J(\boldsymbol{p^*}) = \{2\} \times \{2, 3\} \times \{3, 4\}$. (Lưu ý rằng, sau khi rút gọn, $j = 2, 3, 4$ còn $k = 1, 2, 3$).

2. Tập $K(\beta, j)$ và các vectơ $g(\beta)$, $\beta \in J(\boldsymbol{p^*}) = \{2\} \times \{2, 3\} \times \{3, 4\}$, được xác định và liệt kê trong Bảng 3.6-3 sau:

Bảng 3.6-3: Kết quả Bước 2 và 3 trong Ví dụ 3.6-2

$K(\beta, j)$	$j :=$ 2	3	4	$g(\beta)$, $j :=$ 2 3 4
$\beta =$ 2 2 3	{1, 2}	{3}	$\emptyset$	(0,8 0,5 0,0)
2 2 4	{1, 2}	$\emptyset$	{3}	(0,8 0,0 0,5)
2 3 3	{1}	{2, 3}	$\emptyset$	(0,8 0,7 0,0)
2 3 4	{1}	{2}	{3}	(0,8 0,7 0,5)

3. Đối với mỗi $\beta \in J(\boldsymbol{p^*})$, ta sinh các vectơ $g(\beta)$ được cho trong cột cuối của Bảng 3.6-3.

4. Dựa trên quan hệ thứ tự trên $\mathcal{D}$, ta thấy có hai vectơ tối tiểu là (0,8 0,5 0,0) và (0,8 0,0 0,5) và chúng là lập thành tất cả các nghiệm tối tiểu của phương trình ma trận đã cho. Quay về

phương trình gốc chưa rút gọn, nghiệm tối tiểu thu được bằng việc thêm thành phần $p_1^* = 0{,}0$ và, do đó, ta thu được $S_*(Q, \boldsymbol{r}) = \{(0{,}0\ \ 0{,}8\ \ 0{,}5\ \ 0{,}0), (0{,}0\ \ 0{,}8\ \ 0{,}0\ \ 0{,}5)\}$.

3.6.4.4. Lập luận với phương trình quan hệ dựa trên các phép hợp thành sup-T

Xét phương trình ma trận

$$P \overset{T}{\circ} Q = R \qquad (3.6\text{-}38)$$

trong đó, thay vì phép hợp thành max-min, $\circ_T$ ở đây là phép hợp thành sup-T với phép t-norm T, còn các ký hiệu liên quan đến các quan hệ P, Q và R hoàn toàn giữ nguyên như trong mục trên. Tương tự như trong Mục 3.6.4.3, bài toán đặt ra là cho trước các ma trận Q và R, hãy tìm nghiệm ma trận P. Ta sẽ sử dụng cùng các ký pháp như trong mục trước, chẳng hạn $\mathcal{S}(Q, R)$ là tập tất cả các nghiệm của (3.6-38), $\boldsymbol{p^*}$ là nghiệm lớn nhất, t.l. nó là phần tử lớn nhất của $\mathcal{S}(Q, R)$ trong tập sắp thứ tự một phần $\mathcal{P}$.

Như ta biết, phương trình (3.6-38) biểu thị một tập các phương trình có dạng

$$\sup_{1\le j\le m} T(p_{ij}, q_{jk}) = r_{ik} \qquad (3.6\text{-}39)$$

với mọi $i = 1, \ldots, n$ và $k = 1, \ldots, l$, và T là một phép t-norm cho trước.

Để giải bài toán này, chúng ta nghiên cứu hai loại phép tính hợp thành được gọi là phép hợp thành sup-T (hay max-T, trong trường hợp hữu hạn) và phép hợp thành $\inf_{\mathcal{J}T}$.

1) *Phép hợp thành* sup-T *trên các quan hệ mờ*

Khái quát hóa của phép hợp thành sup-min, hay max-min trong trường hợp hữu hạn, là phép hợp thành sup-T, ký hiệu là $\overset{T}{\circ}$, trong đó T là phép t- chuẩn (t-norm) được định nghĩa như sau:

$$(P \overset{T}{\circ} Q)(u, w) = \sup_{v\in V} T(P(u, v), Q(v, w)) \qquad (3.6\text{-}40)$$

với $\forall u \in \boldsymbol{U}$ và $\forall w \in \boldsymbol{W}$. Như vậy nó trở về phép hợp thành sup-min khi thay phép t-norm T bằng phép min ($\wedge$).

Giả sử P, P_j là các quan hệ mờ trên $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}$, Q và Q_j là các quan hệ mờ xác dịnh trên $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{W}$ và R là quan hệ mờ xác định trên $\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{Z}$, trong đó chỉ số $j \in \boldsymbol{J}$. Khi đó, chúng ta có thể kiểm chứng tính đúng đắn của các tính chất sau:

(i) $(P \overset{T}{\circ} Q) \overset{T}{\circ} R = P \overset{T}{\circ} (Q \overset{T}{\circ} R)$, (tính chất kết hợp của phép $\circ_T$)

(ii) $P \overset{T}{\circ} (\bigcup_{j\in J} Q_j) = \bigcup_{j\in J} (P \overset{T}{\circ} Q_j)$,

(iii) $P \overset{T}{\circ} (\bigcap_{j\in J} Q_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} (P \overset{T}{\circ} Q_j)$,

(iv) $(\bigcup_{j\in J} P_j) \overset{T}{\circ} Q = \bigcup_{j\in J} (P_j \overset{T}{\circ} Q)$,

(v) $(\bigcap_{j\in J} P_j) \overset{T}{\circ} Q \subseteq \bigcap_{j\in J} (P_j \overset{T}{\circ} Q)$,

(vi) $(P \overset{T}{\circ} Q)^{t} = Q^{t} \overset{T}{\circ} P^{t}$, trong đó phép "^{t}" là phép chuyển vị ma trận hàng thành cột hay, một cách tương đương, chuyển cột thành hàng;

(vii) $Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow (P \overset{T}{\circ} Q_1 \subseteq P \overset{T}{\circ} Q_2)\ \&\ (Q_1 \overset{T}{\circ} P \subseteq Q_2 \overset{T}{\circ} P)$.

Bây giờ ta chỉ xét trường hợp mà tất cả các quan hệ mờ 2-ngôi đều xác định trên không gian $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{U}$, hay gọi đơn giản là các quan hệ 2-ngôi trên $\boldsymbol{U}$. Tập tất cả các quan hệ như vậy được kí hiệu là $\mathcal{R}(\boldsymbol{U})$. Tương tự như trong Mục 3.4.3, ở đây ta có khái niệm T-bắc cầu:

Quan hệ 2-ngôi R trên $\boldsymbol{U}$ là ***T*-bắc cầu** nếu và chỉ nếu $R \overset{T}{\circ} R \subseteq R$.

Nếu R không phải là T-bắc cầu ta định nghĩa bao đóng T-bắc cầu của nó, ký hiệu là R_T, là quan hệ T-bắc cầu *nhỏ nhất* chứa R. Để nghiên cứu bao đóng T-bắc cầu của quan hệ R, ta đưa ra ký pháp sau: Ký hiệu $R^{2(\mathrm{T})} = R$, $R^{2(\mathrm{T})} = R \overset{T}{\circ} R$ và, bởi quy nạp, ta định nghĩa $R^{k(\mathrm{T})} = R^{k-1(\mathrm{T})} \overset{T}{\circ} R$. Nếu không có gì nhầm lẫn, để cho gọn, ta loại bỏ kí hiệu (T) ở số mũ, t.l. thay vì viết $R^{k(\mathrm{T})}$ ta viết R^k. Theo tính chất kết hợp của $\circ_T$, ta có $R^k \overset{T}{\circ} R^l = R^{k+l}$.

Theo định nghĩa của phép $\overset{T}{\circ}$, ta có thể thấy rằng

$$R^k(u, v) = \sup_{z_1,\ldots,z_{k-1}} T(R(u, z_1), R(z_1, z_2), \ldots, R(z_{k-1}, v)) \qquad (3.6\text{-}41)$$

2) *Phép hợp thành* $\inf_{\Im_T}$ *trên các quan hệ mờ*

Cho phép t-norm T, phép kéo theo liên kết với T, $\mathcal{J}_T$, được định nghĩa trong Mục 3.6.2 là

$$\mathcal{J}_T(s, t) = \sup \{u \in [0, 1] : T(s, u) \le t\} \qquad (3.6\text{-}44)$$

Giả sử P và Q là hai quan hệ mờ xác định tương ứng trên $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}$ và $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}$. Phép hợp thành $\inf_{\Im_T}$, ký hiệu là $\overset{\Im_T}{\circ}$, trên các quan hệ mờ 2-ngôi được định nghĩa như sau

$$(P \overset{\Im_T}{\circ} Q)(u, w) = \inf_{v \in V} \mathcal{J}_T(P(u, v), Q(v, w)) \qquad (3.6\text{-}45)$$

với mọi $(u, w) \in \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{W}$.

4.5. Luật Modus – Ponens tổng quát

Trong logic cổ điển, luật Modus – Ponens phát biểu rằng: từ hai mệnh đề if $P(x)$ then $Q(y)$ và $P(x)$, chúng ta có thể suy ra mệnh đề $Q(y)$. Luật Modus – Ponens là một trong những luật suy diễn được sử dụng rộng rãi nhất trong các lập luận. Chúng ta có thể tổng quát hoá luật này cho logic mờ

Modus – Ponens trong logic mờ phát biểu rằng, từ hai mệnh đề mờ

if x là A then y là B và x là A' chúng ta có thể suy ra mệnh đề mới y là B', sao cho nến A' càng gần với A thì B' càng gần với B, trong đó A và A' là các tập mờ trên U, còn B và B' là các tập mờ trên V

Chúng ta viết luật Modus – Ponens dưới dạng (26)

Giả thiết 1: if x là A then y là B

Giả thiết 2: x là A'

Kết luận: *y* là *B'*

Cần lưu ý rằng, khác với Modus – Ponens cổ điển, trong luật Modus – Ponens tổng quát giả thiết 1 là luật if – then với điều kiện *x* là *A*, trong khi giả thiết 2 là mệnh đề *x* là *A'* (dữ liệu thu được từ quan sát), mệnh đề này không đòi hỏi chính xác phải trùng với điều kiện của luật if – then

Vấn đề đặt ra là, làm thế nào để đánh gia được tập mờ B' trong kết luật được suy ra *y* là *B'*

Như chúng ta đã biết luật if – then mờ if *x* là *A* then *y* là *B* được minh hoạ như quan hệ mờ *R* trên không gian tích $U \times V$. Từ tập mờ *A'* chúng ta xây dựng mở rộng hình trụ của nó $A' \times V$ trên $U \times V$. Gọi giao của $A' \times V$ với quan hệ *R* và *R'*. Chiếu quan hệ mờ *R'* lên *U*, chúng ta nhận được tập mờ *B'*

Vì $R' = R \cap (A' \times V)$, chúng ta có:

$$\mu_{R'}(x, y) = T(\mu_R(x, y), \mu_{A'}(x))$$

Mặt khác, vì *B'* là hình chiếu của *R'* trên *U*, do đó:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} \mu_{R'}(x, y)$$

Từ hai hệ thức trên chúng ta nhận được

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} T(\mu_R(x, y), \mu_{A'}(x)) \text{ trong đó, T là phép toán T – norm} \quad (27)$$

Như vậy trong luật Modus – Ponens tổng quát (26), từ các giả thiết của luật chúng ta suy ra kết luận *y* là *B'*, trong đó *B'* là tập mờ được xác định bởi (27). Trong (27), với T là phép lấy min, chúng ta có

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} \min(\mu_R(x, y), \mu_{A'}(x)) \quad (28)$$

Chú ý rằng, trong (27), R là quan hệ mờ được sinh ra bởi luật if – then mờ if *x* là *A* then *y* là *B*. Chúng ta có thể sử dụng *R* là một trong các quan hệ mờ (19), (20), (21), (23) hoặc bất kỳ quan hệ mờ nào khác được xác định bởi (17) hoặc (18)

Ví dụ 4.4: Xét luật if – then mờ sau: if "*x* là *A*" then "*y* là *B*" trong đó, *A* và *B* là các tập mờ sau:

$$A = \frac{1}{m} + \frac{0{,}7}{n} + \frac{0{,}1}{l}$$

$$B = \frac{0}{a} + \frac{0{,}3}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

Giả sử chúng ta có mệnh đề *x* là *A’* với *A’* là tập mờ sau:

$$A' = \frac{0{,}5}{m} + \frac{1}{n} + \frac{0{,}3}{l}$$

Khi đó chúng ta suy ra y là *B’* với *B’* là tập mờ xác định như sau:

- Nếu *R* là quan hệ Dienes – Rescher thì

$$R = \begin{pmatrix} & a & b & c & d \\ m & 0 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ n & 0{,}3 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ l & 0{,}9 & 0{,}9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

đánh giá *B’* theo công thức (28) ta có $B' = \frac{0{,}3}{a} + \frac{0{,}3}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$

- Nếu *R* là quan hệ Lukasiewics thì

$$R = \begin{pmatrix} & a & b & c & d \\ m & 0 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ n & 0{,}3 & 0{,}6 & 1 & 1 \\ l & 0{,}9 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

đánh giá *B’* theo công thức (28) ta có $B' = \frac{0{,}3}{a} + \frac{0{,}6}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$

- Nếu *R* là quan hệ Zadeh thì

$$R = \begin{pmatrix} & a & b & c & d \\ m & 0 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ n & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ l & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

đánh giá *B’* theo công thức (28) ta có $B' = \frac{0{,}3}{a} + \frac{0{,}3}{b} + \frac{0{,}7}{c} + \frac{0{,}7}{d}$

- Nếu *R* là quan hệ Mamdani thì

$$R = \begin{pmatrix} & a & b & c & d \\ m & 0 & 0{,}3 & 1 & 1 \\ n & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ l & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

đánh giá *B'* theo công thức (28) ta có $B' = \frac{0}{a} + \frac{0,3}{b} + \frac{0,7}{c} + \frac{0,7}{d}$

Ví dụ 4.5: Giả sử quan hệ giữa nhiệt độ và áp suất trong một thiết bị được biểu diễn bằng luật sau:

if nhiệt độ là cao then áp suất lớn

Giả sử nhiệt độ tính bằng độ *C* nhận giá trị trong miền *U* = [30, 35, 40, 45] và áp suất (tính bằng atmotphe) nhận giá trị trong miền *V* = [50, 55, 60, 65]

Giả sử:

$$A = \text{“nhiệt độ cao”} = \frac{0}{30} + \frac{0,3}{35} + \frac{0,9}{40} + \frac{1}{45}$$

$$B = \text{“ áp suất lớn”} = \frac{0}{50} + \frac{0,5}{55} + \frac{1}{60} + \frac{1}{65}$$

Xem luật if – then như kéo theo Mamdani (25) chúng ta nhận được quan hệ mờ sau:

$$R = \begin{pmatrix} & 50 & 55 & 60 & 65 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0,15 & 0,3 & 0,3 \\ 40 & 0 & 0,45 & 0,9 & 0,9 \\ 45 & 0 & 0,5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bây giờ, giả sử chúng ta biết nhiệt độ trung bình và

$$A' = \text{“nhiệt độ trung bình”} = \frac{0,6}{30} + \frac{1}{35} + \frac{0,8}{40} + \frac{0,1}{45}$$

Áp dụng công thức (28) ta suy ra *B'* như sau

$$B' = \frac{0}{50} + \frac{0,45}{55} + \frac{0,8}{60} + \frac{0,8}{65}$$

5. Hệ mờ

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày các nguyên lý tổng quát để thiết kế một hệ mờ. Hệ mờ là hệ dựa trên tri thức, tri thức trong hệ mờ được biểu diễn dưới dạng các luật if – then mờ. Hệ mờ đã được áp dụng thành công trong rất nhiều lĩnh vực: điều khiển tự động, xử lý tín hiệu, truyền thông, các hệ chuyên gia trong y học, trong các hoạt động quản lý kinh doanh… Tuy nhiên, những áp dụng thành công nhất của hệ mờ vẫn là các áp dụng trong các vấn đề điều khiển: hệ điều khiển mờ (fuzzy control systems)

5.1 Kiến trúc hệ mờ

Thành phần trung tâm của hệ mờ là cơ sở luật mờ (fuzzy rule base). Cơ sở luật mờ bao gồm các luật if – then mờ mô tả tri thức của các chuyên gia về một lĩnh vực áp dụng nào đó

Thành phần thứ hai trong hệ mờ là bộ suy diễn mờ (fuzzy inference engine), nhiệm vụ của nó là kết hợp các luật if – then mờ trong cơ sở luật mờ để tạo thành một phép biến đổi: chuyển mỗi tập mờ đầu vào trên không gian *U* thành một tập mờ đầu ra trên không gian *V*

Tuy nhiên trong thực tế, dữliệu mà hệ thu nhận được từ môi trường là các giá trị số và giá trị mà hệ cho ra cũng cần phải là giá trị số chứ không thể là các tập mờ. Vì vậy cần có các giao diện để hệ tương tác với môi trường, một giao diện biến đổi các giá trị số thành một tập mờ trên U được gọi là mờ hoá (fuzzifier). Một giao diện khác biến đổi một tập mờ trên V thành một giá trị số, giao diện này được khọi là khử mờ (defuzzifier). Như vậy, kiến trúc cơ bản của một hệ mờ như hình sau

Khi đầu vào của một hệ mờ trong hình ?? và một véc tơ trong không gian $U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, tức là $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với $x_i \in U_i \subset R$ (i=1,…,n), chúng ta có hệ mờ nhiều đầu vào - một đầu ra, hình vẽ

Một hệ mờ nhiều đầu vào - nhiều đầu ra có thể phân tích thành các hệ nhiều đầu vào - một đầu ra. Vì vậy sau này chúng ta chỉ xét các hệ nhiều đầu vào - một đầu ra (gọi tắt là hệ nhiều - một)

Cơ sở luật mờ

Cơ sở luật mờ của hệ mờ m đầu vào – 1 đầu ra bao gồm n luật if – then mờ (1)

If $X_1 = A_{11}$ AND ... AND $X_m = A_{1m}$ then $Y = B_1$

If $X_1 = A_{21}$ AND ... AND $X_m = A_{2m}$ then $Y = B_2$ (1)

. . . .

If $X_1 = A_{n1}$ AND ... AND $X_m = A_{nm}$ then $Y = B_n$

trong đó A_{ij} và B_i, $i = 1,.., n$, $j = 1,.., m$, là những từ ngôn ngữ mô tả các đại lượng của biến ngôn ngữ X_j và Y, mô hình này được gọi là bộ nhớ mờ liên hợp FAM (Fuzzy Associate Memory).

Bộ suy diễn mờ

Như chúng ta đã nói, bộ duy diễn mờ thực hiện nhiệm vụ kết hợp các luật if – then mờ trong cơ sở luật mờ tạo thành một phép biến đổi: chuyển một tập mờ A' trên U thành một tập mờ B' trên V.

Phương pháp suy diễn kết hợp: Tử tưởng của phương pháp này là kết hợp m luật trong cơ sở luật thành một luật if – then mờ, sau đó áp dụng luật suy diễn Modus Ponens tổng quát

Xem mỗi luật trong (1) như luật

if "x là A_k" then "y là B_k" (2)

trong đó, x = (x_1, x_2, …,x_n) và A_k là các tập mờ trên không gian U = $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, $A_k = A_{k_1} \times A_{k_2} \times \ldots \times A_{k\,n}$

Do đó chúng ta có

$$\mu_{A_k} = \mu_{Ak_1}(x_1) * \mu_{Ak_2}(x_2) * \ldots * \mu_{Ak_n}(x_n) \quad (3)$$

trong đó $*$ là phép toán T – norm

Mỗi luật mờ (2) được minh hoạ như một quan hệ R_k, R_k được xác định từ A_k, B_k theo các phương pháp đã nêu

Sau đó m luật dạng 2 được kết hợp thành luật

if "x là A" then "y là B"

Luật này được minh hoạ như quan hệ R, với R được xác định như sau

- Với cách nhìn thứ nhất

$$R = \bigcup_{k=1}^{m} R_k$$

$\mu_R(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) + \ldots + \mu_{R_m}(x,y)$ trong đó + là phép toán S - norm

- Với cách nhìn thứ hai

$$R = \bigcap_{k=1}^{m} R_k \quad (5)$$

$\mu_R(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) * \ldots * \mu_{R_m}(x,y)$ trong đó $*$ là phép toán T – norm

Như vậy toàn bộ cơ sở luật mờ được hợp thành một luật if – then mờ được minh hoạ bằng một quan hệ R với hàm thuộc được xác định bởi (4) hoặc (5)

Bây giờ, nếu chúng ta đưa vào tập mờ A' trên U thì áo dụng luật suy diễn Modus – Ponens tổng quát chúng ta suy ra tập mờ B' trên V với hàm thuộc

$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} T(\mu_R(x, y), \mu_{A'}(x))$ trong đó, T là phép toán T – norm

Tóm lại với cách tiếp cận của lý thuyết tập mờ, mỗi mô hình mờ sẽ được ***mô phỏng*** bằng một quan hệ mờ hai ngôi *R*. Khi đó ứng với vectơ đầu vào *A'*, giá trị của biến đầu ra được tính theo công thức *B'* = *A'* * *R*, trong đó * là một phép kết nhập (Aggreegation operator).

Mờ hoá

Mờ hoá (fuzzifier) là quá trình biến đổi một véc tơ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ các giá trị số, $x \in U \subset R^n$ thành một tập mờ A' trên U. (A' sẽ là tập mờ đầu vào cho bộ suy diễn mờ). Mờ hoá phải thoả mãn các tiêu chuẩn sau:

Điểm dữ liệu x phải có mức độ thuộc cao vào tập mờ A'

Véc tơ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ thu được từ môi trường quan sát có thể sai lệnh do nhiễu. Tập mờ A' phải biểu diễn được tính gần đúng nhất của dữ liệu x

Phải đơn giản cho các tính toán trong bộ suy diễn

Các phương pháp mờ hoá:

Mờ hoá đơn thể: Mỗi dữ liệu x được xem như một đơn thể mờ, tức là tập mờ A' có hàm thuộc $\mu_{A'}(u) = \begin{cases} 1 & if \quad u = x \\ 0 & if \quad u \neq x \end{cases}$ (?)

Mờ hoá Gaus: Mỗi giá trị số x_i (i=1,…,n) trong véc tơ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ được biểu diễn thành một số mờ A'_i

$\mu_{A'}(u_i) = e^{-\left(\frac{u_i - x_i}{a_i}\right)^2}$ trong đó $u_i \in U_i$ và a_i là tham số dương. Số mờ A'_i được cho trong hình ????. Tập mờ A' được xác định như là tích đề các của các tập mờ A'_i

$A' = A'_1 \times \ldots \times A'_n$

Mờ hoá tam giác: Mỗi giá trị số x_i (i=1,…,n) được biến đổi thành một số mờ hình tam giác A'_i

$$\mu_{A'}(u_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|u_i - x_i|}{b_i} & if \quad |u_i - x_i| \leq b_i \\ 0 & if \quad |u_i - x_i| \geq b_i \end{cases} \qquad (??)$$

trong đó $u_i \in U_i$ và b_i là các tham số dương. Số mờ A'_i được cho trong hình ???. Sau đó chúng ta cũng lấy A' là tích đề các mờ của các tập mờ A'_i. Trong tích đề các mờ chúng ta có thể sử dung T – norm là phép lấy min hoặc tích đại số

Khử mờ

Khử mờ là quá trình xác định một điểm $y \in V$ từ một tập mờ B' trên V (tập mờ B' là đầu ra của bộ suy diễn mờ ứng với đầu vào A). Khử mờ phải thoả mãn các tính chất sau:

- Điểm y là đại diện tốt nhất cho tập mờ B', về trực quan điều này có nghĩa là y phải là điểm có mức độ thuộc cao nhất vào tập mờ B' và y nằm ở trung tâm của giá đỡ của tập mờ B'
- Khi tập mò B' thay đổi ít thì y cũng thay đổi ít

Phương pháp cực đại: Tư tưởng của phương pháp này là, chọn điểm y là điểm có mức độ thuộc cao nhất vào tập mờ B'

Chúng ta xác định tập rõ H

$$H = \left\{ y \in V \mid \mu_{B'}(y) = \sup_{v \in V} \mu_{B'}(v) \right\}$$

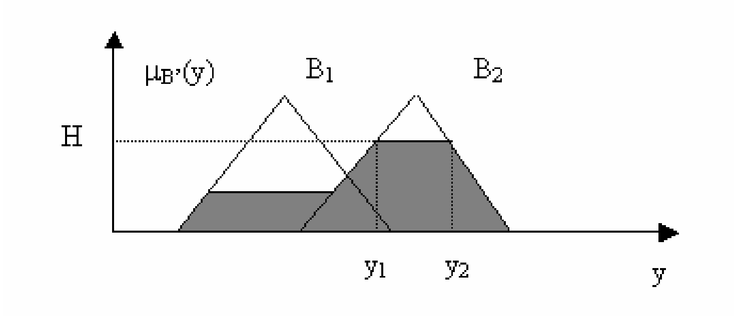
Sau đó chúng ta có thể lấy y là

Một điểm bất kỳ trong H

Điểm lớn nhất hoặc điểm nhỏ nhất trong H

Trung điểm của H

Trong ví dụ hình ??? thì H=[y_1, y_2]



Phương pháp điểm trọng tâm

Công thức xác định $y' = \dfrac{\int_S y\mu_{B'}(y)dy}{\int_S \mu_{B'}(y)dy}$ trong đó S là miền xác định của tập mờ B'