# Chia để trị II

Bùi Việt Dũng

Ngày 22 tháng 6 năm 2022

# Đa thức

# Đa thức

Đa thức một biến là một hàm số có dạng như sau:

# Đa thức

Đa thức một biến là một hàm số có dạng như sau:
$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ với $n \in \mathbb{N}$

# Đa thức

Đa thức một biến là một hàm số có dạng như sau:
$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ với $n \in \mathbb{N}$
$a_0, a_1, ..., a_n$ được gọi là các hệ số của đa thức.

# Đa thức

Đa thức một biến là một hàm số có dạng như sau:
$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ với $n \in \mathbb{N}$
$a_0, a_1, ..., a_n$ được gọi là các hệ số của đa thức.
Nếu $a_n \neq 0$ thì $f(x)$ là một đa thức bậc $n$, kí hiệu $\deg(f(x)) = n$

# Đa thức

Đa thức một biến là một hàm số có dạng như sau:
$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ với $n \in \mathbb{N}$
$a_0, a_1, ..., a_n$ được gọi là các hệ số của đa thức.
Nếu $a_n \neq 0$ thì $f(x)$ là một đa thức bậc $n$, kí hiệu $\deg(f(x)) = n$
Lưu ý: $f(x) = 0$ là một đa thức không có bậc

Đa thức một biến là một hàm số có dạng như sau:
$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ với $n \in \mathbb{N}$
$a_0, a_1, ..., a_n$ được gọi là các hệ số của đa thức.
Nếu $a_n \neq 0$ thì $f(x)$ là một đa thức bậc $n$, kí hiệu $\deg(f(x)) = n$
Lưu ý: $f(x) = 0$ là một đa thức không có bậc

## Tính chất

- Tổng/Hiệu/Tích hai đa thức là một đa thức.

# Đa thức

Đa thức một biến là một hàm số có dạng như sau:
$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ với $n \in \mathbb{N}$
$a_0, a_1, \ldots, a_n$ được gọi là các hệ số của đa thức.
Nếu $a_n \neq 0$ thì $f(x)$ là một đa thức bậc $n$, kí hiệu $\deg(f(x)) = n$
Lưu ý: $f(x) = 0$ là một đa thức không có bậc

## Tính chất

- Tổng/Hiệu/Tích hai đa thức là một đa thức.
- Với hai đa thức $f(x)$, $g(x)$ có bậc, $\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

### Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:
$(x+1)(x+1)(x+1)$

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:
$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x$

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:

$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1$

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

**Hệ thức Newton**

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:

$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:

$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:

$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$

Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:
$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$
Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

- Với thừa số thứ nhất, chọn một trong hai số $x$ và 1.

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:
$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$
Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

- Với thừa số thứ nhất, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ hai, chọn một trong hai số $x$ và 1.

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:

$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$

Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

- Với thừa số thứ nhất, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ hai, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ ba, chọn một trong hai số $x$ và 1.

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:
$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$
Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

- Với thừa số thứ nhất, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ hai, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ ba, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Nhân các số đã chọn với nhau.

### Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:

$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$

Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

- Với thừa số thứ nhất, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ hai, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ ba, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Nhân các số đã chọn với nhau.

Hệ số của $x^i$ sẽ là số cách chọn sao cho ta có được $x^i$

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:

$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$

Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

- Với thừa số thứ nhất, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ hai, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ ba, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Nhân các số đã chọn với nhau.

Hệ số của $x^i$ sẽ là số cách chọn sao cho ta có được $x^i$ và bằng số tập con có $i$ phần tử của tập $\{1, 2, 3\}$

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:
$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$
Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

- Với thừa số thứ nhất, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ hai, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ ba, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Nhân các số đã chọn với nhau.

Hệ số của $x^i$ sẽ là số cách chọn sao cho ta có được $x^i$ và bằng số tập con có $i$ phần tử của tập $\{1, 2, 3\}$ và bằng $\binom{3}{i}$.

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:

$(x+1)(x+1)(x+1) = x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot x$
$+ x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1$

Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

- Với thừa số thứ nhất, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ hai, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ ba, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Nhân các số đã chọn với nhau.

Hệ số của $x^i$ sẽ là số cách chọn sao cho ta có được $x^i$ và bằng số tập con có $i$ phần tử của tập $\{1, 2, 3\}$ và bằng $\binom{3}{i}$. Do $0 \leq i \leq 3$ nên $(x+1)^3 = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} x^i$

# Nhân đa thức (hệ số nguyên dương)

## Hệ thức Newton

Chứng minh rằng $(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ với $\binom{n}{i}$ là số tập con có $i$ phần tử của một tập có $n$ phần tử.

Ta thấy:
$(x+1)(x+1)(x+1) = x\cdot x\cdot x + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x$
$+ x\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x + 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot 1\cdot 1$
Để tạo một số hạng của tổng trên, ta cần:

- Với thừa số thứ nhất, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ hai, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Với thừa số thứ ba, chọn một trong hai số $x$ và 1.
- Nhân các số đã chọn với nhau.

Hệ số của $x^i$ sẽ là số cách chọn sao cho ta có được $x^i$ và bằng số tập con có $i$ phần tử của tập $\{1,2,3\}$ và bằng $\binom{3}{i}$. Do $0 \le i \le 3$ nên $(x+1)^3 = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} x^i$
Ta có thể mở rộng lập luận trên cho $(x+1)^n$ để có điều phải chứng minh.

# Bài toán

# Bài toán

## Nhân hai đa thức

Cho hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ bậc $n \geq 1$.

# Bài toán

## Nhân hai đa thức

Cho hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ bậc $n \geq 1$.
$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$
$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$

# Bài toán

## Nhân hai đa thức

Cho hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ bậc $n \geq 1$.
$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$
$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$
Tính đa thức $C(x) = A(x)B(x)$

# Ứng dụng 1

# Ứng dụng 1

**Nhân hai số nguyên lớn**

Cho hai số nguyên có $n$ đơn vị $A$ và $B$, tính $A \times B$

# Ứng dụng 1

## Nhân hai số nguyên lớn

Cho hai số nguyên có $n$ đơn vị $A$ và $B$, tính $A \times B$

## Ý tưởng 1

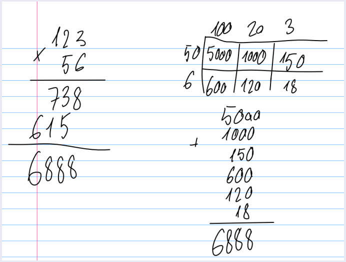
Sử dụng thuật toán "đặt tính rồi tính"

## Nhân hai số nguyên lớn

Cho hai số nguyên có $n$ đơn vị $A$ và $B$, tính $A \times B$

## Ý tưởng 1

Sử dụng thuật toán "đặt tính rồi tính"



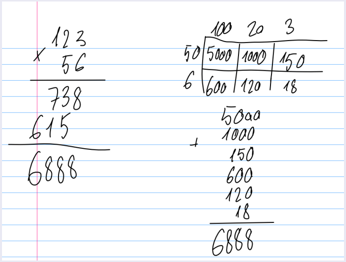
# Ứng dụng 1

## Nhân hai số nguyên lớn

Cho hai số nguyên có $n$ đơn vị $A$ và $B$, tính $A \times B$

## Ý tưởng 1

Sử dụng thuật toán "đặt tính rồi tính"




Độ phức tạp của thuật toán: $O(n^2)$

# Ứng dụng 1

# Ứng dụng 1

## Ý tưởng 2

Với mỗi số nguyên bất kì, ta có thể phân tích cấu tạo số đó. Ví dụ:

# Ứng dụng 1

## Ý tưởng 2

Với mỗi số nguyên bất kì, ta có thể phân tích cấu tạo số đó. Ví dụ:

- $123 = 100 + 20 + 3 = 3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$

# Ứng dụng 1

## Ý tưởng 2

Với mỗi số nguyên bất kì, ta có thể phân tích cấu tạo số đó. Ví dụ:

- $123 = 100 + 20 + 3 = 3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$
- $-456 = -400 - 50 - 6 = -6 \times 10^0 - 5 \times 10^1 - 4 \times 10^2$

# Ứng dụng 1

## Ý tưởng 2

Với mỗi số nguyên bất kì, ta có thể phân tích cấu tạo số đó. Ví dụ:

- $123 = 100 + 20 + 3 = 3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$
- $-456 = -400 - 50 - 6 = -6 \times 10^0 - 5 \times 10^1 - 4 \times 10^2$

Do đó, $A = p(10)$ với $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ và $B = q(10)$ với $q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i$

# Ứng dụng 1

## Ý tưởng 2

Với mỗi số nguyên bất kì, ta có thể phân tích cấu tạo số đó. Ví dụ:

- $123 = 100 + 20 + 3 = 3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$
- $-456 = -400 - 50 - 6 = -6 \times 10^0 - 5 \times 10^1 - 4 \times 10^2$

Do đó, $A = p(10)$ với $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ và $B = q(10)$ với $q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i$

Để tính $A \times B$, ta có thể tính $h(x) = p(x)q(x)$, rồi tính $h(10) = p(10)q(10) = A \times B$

# Ứng dụng 1

## Ý tưởng 2

Với mỗi số nguyên bất kì, ta có thể phân tích cấu tạo số đó. Ví dụ:

- $123 = 100 + 20 + 3 = 3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$
- $-456 = -400 - 50 - 6 = -6 \times 10^0 - 5 \times 10^1 - 4 \times 10^2$

Do đó, $A = p(10)$ với $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ và $B = q(10)$ với $q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i$
Để tính $A \times B$, ta có thể tính $h(x) = p(x)q(x)$, rồi tính $h(10) = p(10)q(10) = A \times B$

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Trước thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2 \cdot 10^n)$

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Trước thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2 \cdot 10^n)$
- Thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2)$

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Trước thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2 \cdot 10^n)$
- Thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2)$
- Năm 1805: Trong một công trình nghiên cứu chưa được xuất bản, Gauss viết "Dễ thấy ta có thể nhân nhanh hai đa thức bậc $n$ trong $O(n \log n)$"

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Trước thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2 \cdot 10^n)$
- Thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2)$
- Năm 1805: Trong một công trình nghiên cứu chưa được xuất bản, Gauss viết "Dễ thấy ta có thể nhân nhanh hai đa thức bậc $n$ trong $O(n \log n)$"
- Năm 1945: Bài toán nhân đa thức được quan tâm trở lại (ứng dụng trong việc tìm những nơi có thể có bom nguyên tử của quân Phát-xít)

- Trước thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2 \cdot 10^n)$
- Thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2)$
- Năm 1805: Trong một công trình nghiên cứu chưa được xuất bản, Gauss viết "Dễ thấy ta có thể nhân nhanh hai đa thức bậc $n$ trong $O(n \log n)$"
- Năm 1945: Bài toán nhân đa thức được quan tâm trở lại (ứng dụng trong việc tìm những nơi có thể có bom nguyên tử của quân Phát-xít)
- Năm 1956: Các nhà khoa học máy tính bắt đầu tìm cách chứng minh là không thể làm bài toán này nhanh hơn $O(n^2)$

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Trước thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2 \cdot 10^n)$
- Thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2)$
- Năm 1805: Trong một công trình nghiên cứu chưa được xuất bản, Gauss viết "Dễ thấy ta có thể nhân nhanh hai đa thức bậc $n$ trong $O(n \log n)$"
- Năm 1945: Bài toán nhân đa thức được quan tâm trở lại (ứng dụng trong việc tìm những nơi có thể có bom nguyên tử của quân Phát-xít)
- Năm 1956: Các nhà khoa học máy tính bắt đầu tìm cách chứng minh là không thể làm bài toán này nhanh hơn $O(n^2)$
- Năm 1960: Karatsuba tìm ra thuật toán $O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.585})$

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Trước thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2 \cdot 10^n)$
- Thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2)$
- Năm 1805: Trong một công trình nghiên cứu chưa được xuất bản, Gauss viết "Dễ thấy ta có thể nhân nhanh hai đa thức bậc $n$ trong $O(n \log n)$"
- Năm 1945: Bài toán nhân đa thức được quan tâm trở lại (ứng dụng trong việc tìm những nơi có thể có bom nguyên tử của quân Phát-xít)
- Năm 1956: Các nhà khoa học máy tính bắt đầu tìm cách chứng minh là không thể làm bài toán này nhanh hơn $O(n^2)$
- Năm 1960: Karatsuba tìm ra thuật toán $O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.585})$
- Năm 1963: Andrei Toom tìm ra thuật toán $O(n^{\log_4 7}) \approx O(n^{1.403})$

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Trước thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2 \cdot 10^n)$
- Thế kỉ XIII: Độ phức tạp $O(n^2)$
- Năm 1805: Trong một công trình nghiên cứu chưa được xuất bản, Gauss viết "Dễ thấy ta có thể nhân nhanh hai đa thức bậc $n$ trong $O(n \log n)$"
- Năm 1945: Bài toán nhân đa thức được quan tâm trở lại (ứng dụng trong việc tìm những nơi có thể có bom nguyên tử của quân Phát-xít)
- Năm 1956: Các nhà khoa học máy tính bắt đầu tìm cách chứng minh là không thể làm bài toán này nhanh hơn $O(n^2)$
- Năm 1960: Karatsuba tìm ra thuật toán $O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.585})$
- Năm 1963: Andrei Toom tìm ra thuật toán $O(n^{\log_4 7}) \approx O(n^{1.403})$

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Năm 1965: Cooley và Tukey phát minh lại thuật toán của Gauss và đặt tên cho thuật toán là thuật toán FFT (độ phức tạp trong việc nhân hai số nguyên là $O(n \log n \cdot \log \log n)$)

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Năm 1965: Cooley và Tukey phát minh lại thuật toán của Gauss và đặt tên cho thuật toán là thuật toán FFT (độ phức tạp trong việc nhân hai số nguyên là $O(n \log n \cdot \log \log n)$)
- Năm 2019: David Harvey và Joris van der Hoeven tìm được thuật toán có độ phức tạp $O(n \log n)$

# Lịch sử bài toán Nhân hai số nguyên lớn

- Năm 1965: Cooley và Tukey phát minh lại thuật toán của Gauss và đặt tên cho thuật toán là thuật toán FFT (độ phức tạp trong việc nhân hai số nguyên là $O(n \log n \cdot \log \log n)$)
- Năm 2019: David Harvey và Joris van der Hoeven tìm được thuật toán có độ phức tạp $O(n \log n)$
- Các nhà khoa học máy tính vẫn chưa chứng minh được là ta không thể nhân hai số nguyên $n$ đơn vị nhanh hơn $O(n \log n)$

# Thuật toán Karatsuba

Giả sử ta cần nhân hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ cùng có bậc $n$

# Thuật toán Karatsuba

Giả sử ta cần nhân hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ cùng có bậc $n$
Gọi $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ta có:

Giả sử ta cần nhân hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ cùng có bậc $n$

Gọi $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ta có:

- $A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + \ldots + a_nx^n = (a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_{m-1}x^{m-1}) + x^m(a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + \ldots + a_nx^{n-m})$

Giả sử ta cần nhân hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ cùng có bậc $n$
Gọi $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ta có:

- $A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + ... + a_nx^n = (a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}) + x^m(a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m})$
  Đặt $A_l(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}$,
  $A_r(x) = a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m}$, ta có
  $A(x) = A_l(x) + x^mA_r(x)$

Giả sử ta cần nhân hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ cùng có bậc $n$

Gọi $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ta có:

- $A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ...a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + ... + a_nx^n = (a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}) + x^m(a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m})$
  Đặt $A_l(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}$,
  $A_r(x) = a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m}$, ta có
  $A(x) = A_l(x) + x^mA_r(x)$
- Tương tự, ta có $B(x) = B_l(x) + x^mB_r(x)$

# Thuật toán Karatsuba

Giả sử ta cần nhân hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ cùng có bậc $n$

Gọi $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ta có:

- $A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + \ldots + a_nx^n = (a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_{m-1}x^{m-1}) + x^m(a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + \ldots + a_nx^{n-m})$
  Đặt $A_l(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_{m-1}x^{m-1}$,
  $A_r(x) = a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + \ldots + a_nx^{n-m}$, ta có
  $A(x) = A_l(x) + x^mA_r(x)$
- Tương tự, ta có $B(x) = B_l(x) + x^mB_r(x)$

Như vậy:

$A(x)B(x) = (A_l(x) + x^mA_r(x))(B_l(x) + x^mB_r(x))$

Giả sử ta cần nhân hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ cùng có bậc $n$

Gọi $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ta có:

- $A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + ... + a_nx^n = (a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}) + x^m(a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m})$
  Đặt $A_l(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}$,
  $A_r(x) = a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m}$, ta có
  $A(x) = A_l(x) + x^mA_r(x)$
- Tương tự, ta có $B(x) = B_l(x) + x^mB_r(x)$

Như vậy:

$A(x)B(x) = (A_l(x) + x^mA_r(x))(B_l(x) + x^mB_r(x))$

$A(x)B(x) =$

$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$

Giả sử ta cần nhân hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ cùng có bậc $n$

Gọi $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ta có:

- $A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + ... + a_nx^n = (a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}) + x^m(a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m})$
  Đặt $A_l(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}$,
  $A_r(x) = a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m}$, ta có
  $A(x) = A_l(x) + x^mA_r(x)$
- Tương tự, ta có $B(x) = B_l(x) + x^mB_r(x)$

Như vậy:

$A(x)B(x) = (A_l(x) + x^mA_r(x))(B_l(x) + x^mB_r(x))$

$A(x)B(x) =$

$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$

Ta có thể tính được:

$A_l(x)B_l(x), A_r(x)B_l(x), B_r(x)A_l(x), A_r(x)B_r(x)$ bằng cách nhân hai đa thức có bậc $\frac{n}{2}$, rồi cộng các kết quả với nhau trong $O(n)$

Giả sử ta cần nhân hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$ cùng có bậc $n$

Gọi $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ta có:

- $A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + ... + a_nx^n = (a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}) + x^m(a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m})$
  Đặt $A_l(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + ... + a_{m-1}x^{m-1}$,
  $A_r(x) = a_mx^0 + a_{m+1}x^1 + ... + a_nx^{n-m}$, ta có
  $A(x) = A_l(x) + x^mA_r(x)$
- Tương tự, ta có $B(x) = B_l(x) + x^mB_r(x)$

Như vậy:

$A(x)B(x) = (A_l(x) + x^mA_r(x))(B_l(x) + x^mB_r(x))$

$A(x)B(x) =$

$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$

Ta có thể tính được:

$A_l(x)B_l(x), A_r(x)B_l(x), B_r(x)A_l(x), A_r(x)B_r(x)$ bằng cách nhân hai đa thức có bậc $\frac{n}{2}$, rồi cộng các kết quả với nhau trong $O(n)$

Gọi $T(n)$ là số phép tính để nhân hai đa thức bậc $n$, ta có

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n)$

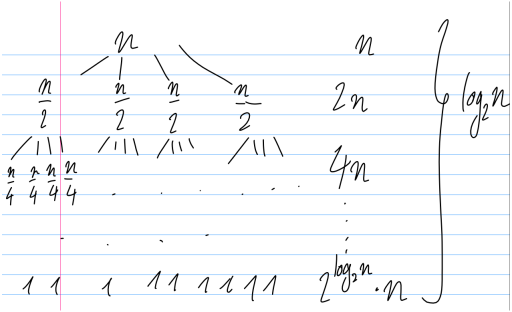
# $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

# $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

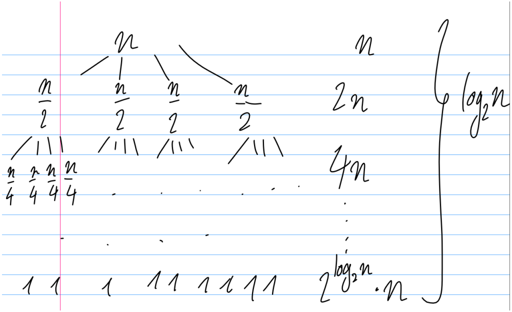
Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có:

# $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có:



Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có:




$$T(n) = n + 2n + 4n + \ldots + 2^{\log_2 n} n$$

## Tổng của một cấp số nhân

Cho $u_1, u_2, ..., u_n$ là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ...$ khác 1.
Khi đó $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

## Tổng của một cấp số nhân

Cho $u_1, u_2, ..., u_n$ là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ...$ khác 1.
Khi đó $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

## Chứng minh

Đặt $P = u_1 + u_2 + ... + u_n$, ta có:

## Tổng của một cấp số nhân

Cho $u_1, u_2, ..., u_n$ là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ...$ khác 1.
Khi đó $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

## Chứng minh

Đặt $P = u_1 + u_2 + ... + u_n$, ta có:
$P = u_1q^0 + u_1q^1 + ... + u_1q^{n-1} = u_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$

## Tổng của một cấp số nhân

Cho $u_1, u_2, ..., u_n$ là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ...$ khác 1.
Khi đó $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

## Chứng minh

Đặt $P = u_1 + u_2 + ... + u_n$, ta có:
$P = u_1q^0 + u_1q^1 + ... + u_1q^{n-1} = u_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$
$qP = u_1(q + q^2 + ... + q^n)$

## Tổng của một cấp số nhân

Cho $u_1, u_2, ..., u_n$ là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ...$ khác 1.
Khi đó $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

## Chứng minh

Đặt $P = u_1 + u_2 + ... + u_n$, ta có:
$P = u_1 q^0 + u_1 q^1 + ... + u_1 q^{n-1} = u_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$
$qP = u_1(q + q^2 + ... + q^n)$
$(q-1)P = u_1(q^n - 1)$

## Tổng của một cấp số nhân

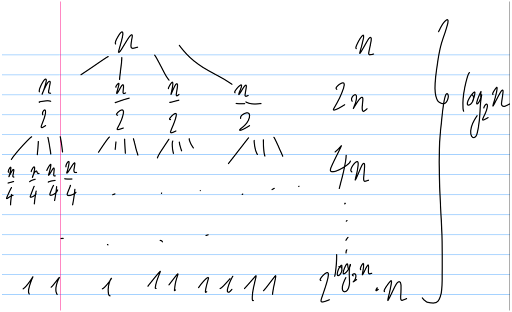
Cho $u_1, u_2, ..., u_n$ là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ...$ khác 1.
Khi đó $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

## Chứng minh

Đặt $P = u_1 + u_2 + ... + u_n$, ta có:
$P = u_1q^0 + u_1q^1 + ... + u_1q^{n-1} = u_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$
$qP = u_1(q + q^2 + ... + q^n)$
$(q-1)P = u_1(q^n - 1)$
$\Rightarrow P = u_1\frac{q^n-1}{q-1}$

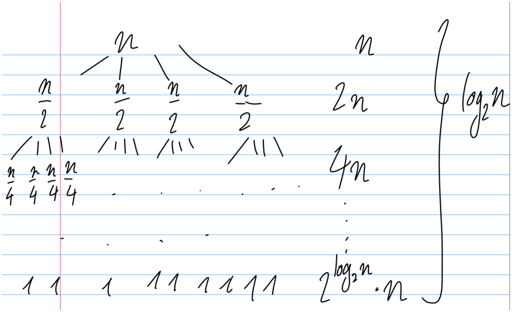
## $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp hình chữ nhật, ta có



# $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

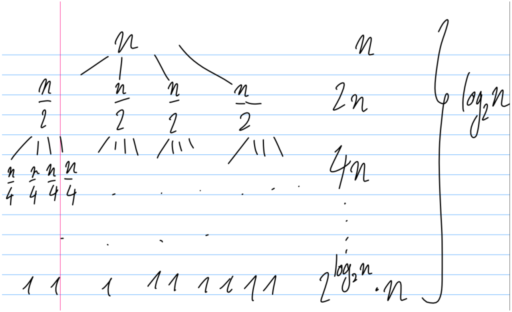
Sử dụng phương pháp hình chữ nhật, ta có




$$T(n) = n\frac{2^{(\log_2 n)+1}-1}{2-1} \leq 2n(2^{\log_2 n}) = 2n \cdot n^{\log_2 2} = 2n^2 \in O(n^2)$$

# $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp hình chữ nhật, ta có




$T(n) = n\frac{2^{(\log_2 n)+1}-1}{2-1} \le 2n(2^{\log_2 n}) = 2n \cdot n^{\log_2 2} = 2n^2 \in O(n^2)$

Do đó $T(n) \in O(n^2)$

# Thuật toán Karatsuba

$$A(x)B(x) =$$
$$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$$

# Thuật toán Karatsuba

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$

# Thuật toán Karatsuba

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$
Liệu ta có thể viết lại $YZ + TX$ theo $XZ$ và $TY$ để tiết kiệm số lần nhân đa thức hay không?

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$
Liệu ta có thể viết lại $YZ + TX$ theo $XZ$ và $TY$ để tiết kiệm số lần nhân đa thức hay không?
Ta có:

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$
Liệu ta có thể viết lại $YZ + TX$ theo $XZ$ và $TY$ để tiết kiệm số lần nhân đa thức hay không?
Ta có:
$YZ + TX - ZX - TY$

# Thuật toán Karatsuba

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$
Liệu ta có thể viết lại $YZ + TX$ theo $XZ$ và $TY$ để tiết kiệm số lần nhân đa thức hay không?
Ta có:
$YZ + TX - ZX - TY = Y(Z - T) + X(T - Z)$

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$
Liệu ta có thể viết lại $YZ + TX$ theo $XZ$ và $TY$ để tiết kiệm số lần nhân đa thức hay không?
Ta có:
$YZ + TX - ZX - TY = Y(Z - T) + X(T - Z) = (Y - X)(Z - T)$

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$
Liệu ta có thể viết lại $YZ + TX$ theo $XZ$ và $TY$ để tiết kiệm số lần nhân đa thức hay không?
Ta có:
$YZ + TX - ZX - TY = Y(Z - T) + X(T - Z) = (Y - X)(Z - T)$
$\Rightarrow \boxed{YZ + TX = ZX + TY + (Y - X)(Z - T)}$

# Thuật toán Karatsuba

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$
Liệu ta có thể viết lại $YZ + TX$ theo $XZ$ và $TY$ để tiết kiệm số lần nhân đa thức hay không?
Ta có:
$YZ + TX - ZX - TY = Y(Z - T) + X(T - Z) = (Y - X)(Z - T)$
$\Rightarrow \boxed{YZ + TX = ZX + TY + (Y - X)(Z - T)}$
$X, Y, Z, T$ đều là các đa thức có bậc $\frac{n}{2}$ nên ta có thể tính $Y - X$ và $Z - T$ trong $O(n)$.

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$
Liệu ta có thể viết lại $YZ + TX$ theo $XZ$ và $TY$ để tiết kiệm số lần nhân đa thức hay không?
Ta có:
$YZ + TX - ZX - TY = Y(Z - T) + X(T - Z) = (Y - X)(Z - T)$
$\Rightarrow \boxed{YZ + TX = ZX + TY + (Y - X)(Z - T)}$
$X, Y, Z, T$ đều là các đa thức có bậc $\frac{n}{2}$ nên ta có thể tính $Y - X$ và $Z - T$ trong $O(n)$.
Do $Y - X$ và $Z - T$ có bậc không vượt quá $\frac{n}{2}$ nên ta có thể tính $(Y - X)(Z - T)$ trong $T(\frac{n}{2})$

# Thuật toán Karatsuba

$A(x)B(x) =$
$A_l(x)B_l(x) + x^m(A_r(x)B_l(x) + B_r(x)A_l(x)) + x^{2m}(A_r(x)B_r(x))$
Đặt $A_l(x) = X$, $A_r(x) = Y$, $B_l(x) = Z$, $B_r(x) = T$
Liệu ta có thể viết lại $YZ + TX$ theo $XZ$ và $TY$ để tiết kiệm số lần nhân đa thức hay không?
Ta có:
$YZ + TX - ZX - TY = Y(Z - T) + X(T - Z) = (Y - X)(Z - T)$
$\Rightarrow \boxed{YZ + TX = ZX + TY + (Y - X)(Z - T)}$
$X, Y, Z, T$ đều là các đa thức có bậc $\frac{n}{2}$ nên ta có thể tính $Y - X$ và $Z - T$ trong $O(n)$.
Do $Y - X$ và $Z - T$ có bậc không vượt quá $\frac{n}{2}$ nên ta có thể tính $(Y - X)(Z - T)$ trong $T(\frac{n}{2})$
Vậy $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n)$

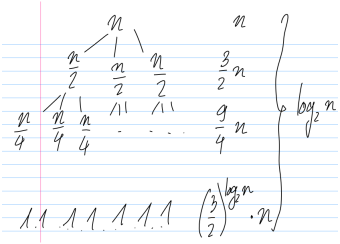
## $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

# $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có

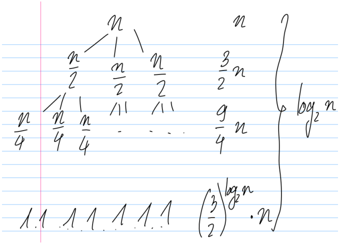
# $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có



# $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

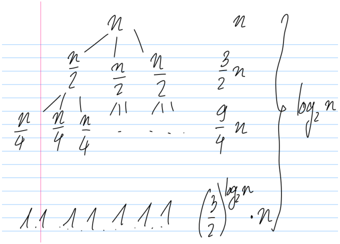
Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có




$$T(n) = n + \frac{3}{2}n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} n$$

# $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

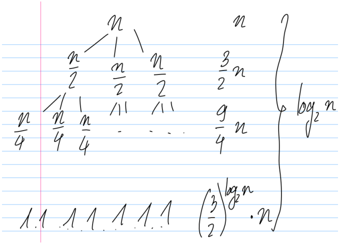
Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có




$$T(n) = n + \frac{3}{2}n + (\frac{3}{2})^2 n + \ldots + (\frac{3}{2})^{\log_2 n} n$$
$$T(n) = n\frac{(\frac{3}{2})^{(\log_2 n)+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$$

# $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có

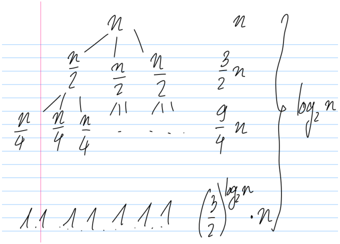


$$T(n) = n + \frac{3}{2}n + (\frac{3}{2})^2 n + \ldots + (\frac{3}{2})^{\log_2 n} n$$

$$T(n) = n\frac{(\frac{3}{2})^{(\log_2 n)+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \leq 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot n \cdot (\frac{3}{2})^{\log_2 n}$$

# $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có

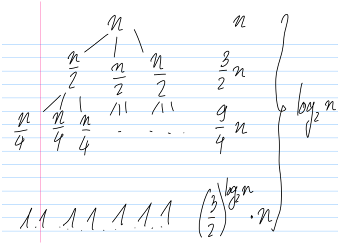



$$T(n) = n + \frac{3}{2}n + (\frac{3}{2})^2 n + \ldots + (\frac{3}{2})^{\log_2 n} n$$

$$T(n) = n\frac{(\frac{3}{2})^{(\log_2 n)+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \leq 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot n \cdot (\frac{3}{2})^{\log_2 n} = 3n^{1+\log_2 3 - \log_2 2}$$

# $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có



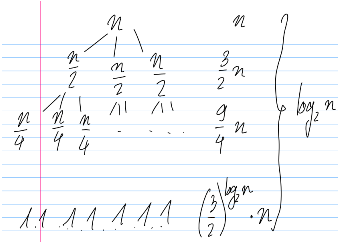

$$T(n) = n + \frac{3}{2}n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} n$$

$$T(n) = n\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n)+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \leq 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} = 3n^{1+\log_2 3 - \log_2 2}$$

$$= 3n^{\log_2 3}$$

# $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có



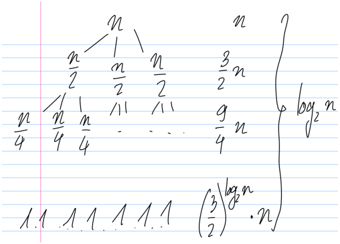

$$T(n) = n + \frac{3}{2}n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} n$$

$$T(n) = n\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{(\log_2 n)+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \leq 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} = 3n^{1+\log_2 3 - \log_2 2}$$

$$= 3n^{\log_2 3} \in O(n^{\log_2 3})$$

# $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + O(n) \in O(?)$

Sử dụng phương pháp vẽ cây, ta có




$T(n) = n + \frac{3}{2}n + (\frac{3}{2})^2 n + \ldots + (\frac{3}{2})^{\log_2 n} n$

$T(n) = n\frac{(\frac{3}{2})^{(\log_2 n)+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \leq 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot n \cdot (\frac{3}{2})^{\log_2 n} = 3n^{1+\log_2 3 - \log_2 2}$

$= 3n^{\log_2 3} \in O(n^{\log_2 3})$

Do đó $T(n) \in O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.585})$, nhanh hơn $O(n^2)$

# Ứng dụng 2

# Ứng dụng 2

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_0, c_1, ..., c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$

# Ứng dụng 2

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ và $b_0, b_1, \ldots, b_n$, tính $c_0, c_1, \ldots, c_{2n}$ biết
$c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

# Ứng dụng 2

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_0, c_1, ..., c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:

# Ứng dụng 2

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_0, c_1, ..., c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:
$A(x)B(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n)$

# Ứng dụng 2

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_0, c_1, ..., c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:
$A(x)B(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n)$
$A(x)B(x) = a_0(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + ... + b_n x^n) + a_1 x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n) + ... + a_n x^n(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + ... + b_n x^n)$

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_0, c_1, ..., c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:
$A(x)B(x) = (a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)(b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n)$
$A(x)B(x) = a_0(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_nx^n) + a_1x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n) + ... + a_nx^n(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_nx^n)$
$A(x)B(x) =$

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_0, c_1, ..., c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:
$A(x)B(x) = (a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)(b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n)$
$A(x)B(x) = a_0(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_nx^n) + a_1x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n) + ... + a_nx^n(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_nx^n)$
$A(x)B(x) = a_0b_0$

# Ứng dụng 2

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_0, c_1, ..., c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:
$A(x)B(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n)$
$A(x)B(x) = a_0(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_nx^n) + a_1x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n) + ... + a_nx^n(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_nx^n)$
$A(x)B(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1$

**Tính tích chập**

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_0, c_1, ..., c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:
$A(x)B(x) = (a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)(b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n)$
$A(x)B(x) = a_0(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_nx^n) + a_1x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n) + ... + a_nx^n(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + ... + b_nx^n)$
$A(x)B(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2$

# Ứng dụng 2

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_0, c_1, ..., c_{2n}$ biết
$c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:
$A(x)B(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n)$
$A(x)B(x) = a_0(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + ... + b_n x^n) + a_1 x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n) + ... + a_n x^n(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + ... + b_n x^n)$
$A(x)B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)x^3 + ...$

# Ứng dụng 2

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ và $b_0, b_1, \ldots, b_n$, tính $c_0, c_1, \ldots, c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:

$A(x)B(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)$

$A(x)B(x) = a_0(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n) + a_1 x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n) + \ldots + a_n x^n(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)$

$A(x)B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)x^3 + \ldots$

$$A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{2n} \left( \boxed{\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}} \right) x^i$$

## Tính tích chập

Cho hai dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ và $b_0, b_1, \ldots, b_n$, tính $c_0, c_1, \ldots, c_{2n}$ biết $c_i = \sum_{x=0}^{i} a_x b_{i-x}$
(tức $c_i$ là tổng các $a_x b_y$ có $x + y = i$)

Ta có:

$A(x)B(x) = (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n)$

$A(x)B(x) = a_0(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n) + a_1x(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n) + \ldots + a_nx^n(b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n)$

$A(x)B(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \ldots$

$$A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\boxed{\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}}\right)x^i$$

# Ứng dụng 3

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ và $b_0, b_1, \ldots, b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_n$ biết

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ và $b_0, b_1, \ldots, b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_n$ biết

$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ và $b_0, b_1, \ldots, b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_n$ biết

$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$

(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ và $b_0, b_1, \ldots, b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_n$ biết

$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$

(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)

Nếu $x + i > n$ hoặc $x + i < 0$ thì ta coi $b_{x+i} = 0$

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, ..., c_n$ biết

$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$

(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)

Nếu $x + i > n$ hoặc $x + i < 0$ thì ta coi $b_{x+i} = 0$

Ta có:

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, ..., c_n$ biết
$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$
(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)
Nếu $x + i > n$ hoặc $x + i < 0$ thì ta coi $b_{x+i} = 0$

Ta có:
$A(x)B(x^{-1}) =$
$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + ... + b_nx^{-n})$

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ và $b_0, b_1, \ldots, b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_n$ biết
$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$
(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)
Nếu $x + i > n$ hoặc $x + i < 0$ thì ta coi $b_{x+i} = 0$

Ta có:
$A(x)B(x^{-1}) =$
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + \ldots + b_n x^{-n})$
$A(x)B(x^{-1}) =$

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, ..., c_n$ biết
$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$
(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)
Nếu $x + i > n$ hoặc $x + i < 0$ thì ta coi $b_{x+i} = 0$

Ta có:
$A(x)B(x^{-1}) =$
$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + ... + b_nx^{-n})$
$A(x)B(x^{-1}) = a_0b_nx^{-n}$

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, ..., c_n$ biết

$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$

(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)

Nếu $x + i > n$ hoặc $x + i < 0$ thì ta coi $b_{x+i} = 0$

Ta có:

$A(x)B(x^{-1}) =$

$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + ... + b_nx^{-n})$

$A(x)B(x^{-1}) = a_0b_nx^{-n} + (a_0b_{n-1} + a_1b_n)x^{n-1}$

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, ..., c_n$ biết
$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$
(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)
Nếu $x + i > n$ hoặc $x + i < 0$ thì ta coi $b_{x+i} = 0$

Ta có:
$A(x)B(x^{-1}) =$
$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + ... + b_nx^{-n})$
$A(x)B(x^{-1}) = a_0b_nx^{-n} + (a_0b_{n-1} + a_1b_n)x^{n-1}$
$+(a_0b_{n-2} + a_1b_{n-1} + a_2b_n)x^{n-2} + ...$

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, ..., c_n$ biết
$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$
(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)
Nếu $x + i > n$ hoặc $x + i < 0$ thì ta coi $b_{x+i} = 0$

Ta có:
$A(x)B(x^{-1}) =$
$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + ... + b_nx^{-n})$
$A(x)B(x^{-1}) = a_0b_nx^{-n} + (a_0b_{n-1} + a_1b_n)x^{n-1}$
$+(a_0b_{n-2} + a_1b_{n-1} + a_2b_n)x^{n-2} + ...$

$$A(x)B(x^{-1}) = \sum_{i=-n}^{n}\left(\boxed{\sum_{j=0}^{n} a_j b_{j+i}}\right)x^i$$

# Ứng dụng 3

## Tính tương quan

Cho hai dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ và $b_0, b_1, ..., b_n$, tính $c_{-n}, c_{-n+1}, ..., c_n$ biết
$c_i = \sum_{x=0}^{n} a_x b_{x+i}$
(dịch $b$ sang trái $i$ phần tử rồi tính tích các cặp phần tử)
Nếu $x + i > n$ hoặc $x + i < 0$ thì ta coi $b_{x+i} = 0$

Ta có:
$A(x)B(x^{-1}) =$
$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + ... + b_nx^{-n})$
$A(x)B(x^{-1}) = a_0b_nx^{-n} + (a_0b_{n-1} + a_1b_n)x^{n-1}$
$+(a_0b_{n-2} + a_1b_{n-1} + a_2b_n)x^{n-2} + ...$

$$A(x)B(x^{-1}) = \sum_{i=-n}^{n}\left(\boxed{\sum_{j=0}^{n} a_jb_{j+i}}\right)x^i$$

Để tránh số mũ âm khi tính toán thì ta tính $A(x)(x^nB(x^{-1}))$ rồi chia kết quả cho $x^n$

# Ứng dụng 4

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- Với mặt hàng, ta có thể chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên $c_i$) hoặc không chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên 0)

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- Với mặt hàng, ta có thể chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên $c_i$) hoặc không chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên 0) $\rightarrow$ ta có thể biểu diễn mặt hàng $i$ bằng đa thức $p_i(x) = x^0 + x^{c_i} = 1 + x^{c_i}$

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- Với mặt hàng, ta có thể chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên $c_i$) hoặc không chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên 0) $\rightarrow$ ta có thể biểu diễn mặt hàng $i$ bằng đa thức $p_i(x) = x^0 + x^{c_i} = 1 + x^{c_i}$
- Dễ thấy hệ số của $x^w$ của đa thức $p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$ bằng số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị là $w$.

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- Với mặt hàng, ta có thể chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên $c_i$) hoặc không chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên 0) $\rightarrow$ ta có thể biểu diễn mặt hàng $i$ bằng đa thức $p_i(x) = x^0 + x^{c_i} = 1 + x^{c_i}$
- Dễ thấy hệ số của $x^w$ của đa thức $p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$ bằng số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị là $w$.
- Vấn đề: Tính $p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$ cần $O(C^{\log_2 3} n)$

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- Với mặt hàng, ta có thể chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên $c_i$) hoặc không chọn mặt hàng đó (tổng giá trị tăng lên 0) $\rightarrow$ ta có thể biểu diễn mặt hàng $i$ bằng đa thức $p_i(x) = x^0 + x^{c_i} = 1 + x^{c_i}$
- Dễ thấy hệ số của $x^w$ của đa thức $p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$ bằng số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị là $w$.
- Vấn đề: Tính $p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$ cần $O(C^{\log_2 3} n)$

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- Ta có thể sử dụng phương pháp chia để trị để tính $p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- Ta có thể sử dụng phương pháp chia để trị để tính $p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$
- Độ phức tạp là $O(C^{\log_2 3} \log n)$

# Độ phức tạp tính toán

Với $a, b > 0$, ta thấy

# Độ phức tạp tính toán

Với $a, b > 0$, ta thấy

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$

# Độ phức tạp tính toán

Với $a, b > 0$, ta thấy

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \geq a^3 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$

# Độ phức tạp tính toán

Với $a, b > 0$, ta thấy

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \geq a^3 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$

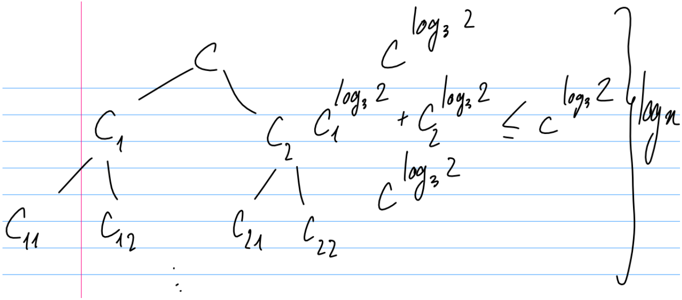
Các bất đẳng thức trên cũng đúng khi số mũ là $\log_2 3$, và cả khi ta có nhiều số dương.

# Độ phức tạp tính toán

Với $a, b > 0$, ta thấy

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \geq a^3 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$

Các bất đẳng thức trên cũng đúng khi số mũ là $\log_2 3$, và cả khi ta có nhiều số dương.

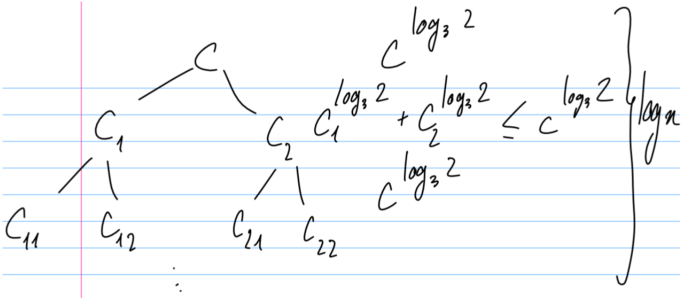


# Độ phức tạp tính toán

Với $a, b > 0$, ta thấy

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \geq a^3 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$

Các bất đẳng thức trên cũng đúng khi số mũ là $\log_2 3$, và cả khi ta có nhiều số dương.




Vậy độ phức tạp của thuật toán là $O(C^{\log_2 3} \log n)$

# Hàm sinh

# Hàm sinh

Cho một dãy số $(a_n)$. Hàm sinh của dãy số $a_n$ là

# Hàm sinh

Cho một dãy số $(a_n)$. Hàm sinh của dãy số $a_n$ là
$f(x) = ... + a_{-3}x^{-3} + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$
$f(x) = \sum_i a_i x^i$

# Hàm sinh

Cho một dãy số $(a_n)$. Hàm sinh của dãy số $a_n$ là
$f(x) = ... + a_{-3}x^{-3} + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$
$f(x) = \sum_i a_i x^i$
Với một số dãy số đặc biệt, $f(x)$ có thể bằng một số hàm đặc biệt:

# Hàm sinh

Cho một dãy số $(a_n)$. Hàm sinh của dãy số $a_n$ là
$f(x) = ... + a_{-3}x^{-3} + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$
$f(x) = \sum_i a_i x^i$
Với một số dãy số đặc biệt, $f(x)$ có thể bằng một số hàm đặc biệt:
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

Cho một dãy số $(a_n)$. Hàm sinh của dãy số $a_n$ là
$f(x) = ... + a_{-3}x^{-3} + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$
$f(x) = \sum_i a_i x^i$
Với một số dãy số đặc biệt, $f(x)$ có thể bằng một số hàm đặc biệt:
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...$

# Hàm sinh

Cho một dãy số $(a_n)$. Hàm sinh của dãy số $a_n$ là
$f(x) = ... + a_{-3}x^{-3} + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$
$f(x) = \sum_i a_i x^i$
Với một số dãy số đặc biệt, $f(x)$ có thể bằng một số hàm đặc biệt:
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...$
(khai triển Maclaurin / Taylor)

# Hàm sinh

Cho một dãy số $(a_n)$. Hàm sinh của dãy số $a_n$ là
$f(x) = ... + a_{-3}x^{-3} + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$
$f(x) = \sum_i a_ix^i$
Với một số dãy số đặc biệt, $f(x)$ có thể bằng một số hàm đặc biệt:
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...$
(khai triển Maclaurin / Taylor)
Lưu ý: $x$ ở đây là chỉ là một công cụ để biểu diễn $f$ nên ta không cần xét tính hội tụ của $f$

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- $p_i(x) = 1 + x^{c_i}$ là hàm sinh của bài toán khi ta chỉ có một vật phẩm $i$.

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- $p_i(x) = 1 + x^{c_i}$ là hàm sinh của bài toán khi ta chỉ có một vật phẩm $i$.
- $p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$ là hàm sinh của bài toán khi ta có $n$ vật phẩm.

# Ứng dụng 4

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy tính số cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng được chọn đúng bằng $w$. Ta chỉ cần in kết quả sau khi chia lấy dư với một số dương $M$ nào đó.
Độ phức tạp cần đạt: $O(C^{\log_2 3} \log n)$

## Ý tưởng 1

- $p_i(x) = 1 + x^{c_i}$ là hàm sinh của bài toán khi ta chỉ có một vật phẩm $i$.
- $p_1(x)p_2(x)...p_n(x)$ là hàm sinh của bài toán khi ta có $n$ vật phẩm.

# Ứng dụng 4'

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

## Ý tưởng 1

- Ta có thể sử dụng ý tưởng 1 của bài toán trước: đếm số cách chọn các mặt hàng rồi kiểm tra số cách chọn với 0

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

## Ý tưởng 1

- Ta có thể sử dụng ý tưởng 1 của bài toán trước: đếm số cách chọn các mặt hàng rồi kiểm tra số cách chọn với 0
- Tuy nhiên, nếu ta chỉ sử dụng một số $M$ (với $M = 10^9 + 7$) thì dễ dẫn đến trường hợp số cách chọn là $2M, 3M, \ldots$, khi chia lấy dư bằng 0

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

## Ý tưởng 1

- Ta có thể sử dụng ý tưởng 1 của bài toán trước: đếm số cách chọn các mặt hàng rồi kiểm tra số cách chọn với 0
- Tuy nhiên, nếu ta chỉ sử dụng một số $M$ (với $M = 10^9 + 7$) thì dễ dẫn đến trường hợp số cách chọn là $2M, 3M, \dots$, khi chia lấy dư bằng 0 $\rightarrow$ kết quả sai.

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

## Ý tưởng 1

- Ta có thể sử dụng ý tưởng 1 của bài toán trước: đếm số cách chọn các mặt hàng rồi kiểm tra số cách chọn với 0
- Tuy nhiên, nếu ta chỉ sử dụng một số $M$ (với $M = 10^9 + 7$) thì dễ dẫn đến trường hợp số cách chọn là $2M, 3M, ...$, khi chia lấy dư bằng $0 \rightarrow$ kết quả sai.
- Cách khắc phục: Làm bài toán trước 4 lần, mỗi lần chia lấy dư với một số nguyên tố lớn khác nhau (ví dụ $M_1 = 10^9 + 7, M_2 = 10^9 + 9, M_3 = 10^9 + 31, M_4 = 10^9 + 33$)

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

## Ý tưởng 2 (3$k$ trick)

- Giả sử $n$ mặt hàng có $m$ giá trị khác nhau, khi đó $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \geq 1 + 2 + 3 + ... + m$

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

## Ý tưởng 2 (3$k$ trick)

- Giả sử $n$ mặt hàng có $m$ giá trị khác nhau, khi đó
  $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \geq 1 + 2 + 3 + ... + m$
  $\Rightarrow C \geq \frac{m(m-1)}{2} \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}(\sqrt{8C+1} + 1) \Rightarrow m \in O(\sqrt{C})$

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

## Ý tưởng 2 ($3k$ trick)

- Giả sử $n$ mặt hàng có $m$ giá trị khác nhau, khi đó $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \geq 1 + 2 + 3 + ... + m$
  $\Rightarrow C \geq \frac{m(m-1)}{2} \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}(\sqrt{8C+1}+1) \Rightarrow m \in O(\sqrt{C})$
- Giả sử trong $n$ mặt hàng có 3 mặt hàng cùng giá trị $k$ thì ta có thể thay 3 mặt hàng đó thành 2 mặt hàng có giá trị $k$ và $2k$ mà không làm thay đổi kết quả bài toán.

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

## Ý tưởng 2 (3$k$ trick)

- Giả sử $n$ mặt hàng có $m$ giá trị khác nhau, khi đó
  $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \geq 1 + 2 + 3 + \ldots + m$
  $\Rightarrow C \geq \frac{m(m-1)}{2} \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}(\sqrt{8C+1}+1) \Rightarrow m \in O(\sqrt{C})$
- Giả sử trong $n$ mặt hàng có 3 mặt hàng cùng giá trị $k$ thì ta có thể thay 3 mặt hàng đó thành 2 mặt hàng có giá trị $k$ và $2k$ mà không làm thay đổi kết quả bài toán. Ta thay liên tục cho đến khi không có 3 mặt hàng nào có cùng giá trị.

# Ứng dụng 4'

## Bài toán Cái túi

Có $n$ mặt hàng, mặt hàng thứ $i$ có giá $c_i$. Đặt $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$, với mỗi $w$ từ 0 đến $C$, hãy cho biết có cách chọn các mặt hàng để tổng giá trị các mặt hàng bằng $w$ hay không?

## Ý tưởng 2 (3$k$ trick)

- Giả sử $n$ mặt hàng có $m$ giá trị khác nhau, khi đó $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \geq 1 + 2 + 3 + ... + m$ $\Rightarrow C \geq \frac{m(m-1)}{2} \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}(\sqrt{8C+1}+1) \Rightarrow m \in O(\sqrt{C})$
- Giả sử trong $n$ mặt hàng có 3 mặt hàng cùng giá trị $k$ thì ta có thể thay 3 mặt hàng đó thành 2 mặt hàng có giá trị $k$ và $2k$ mà không làm thay đổi kết quả bài toán. Ta thay liên tục cho đến khi không có 3 mặt hàng nào có cùng giá trị.
- Đến đây, ta có thể giải bài toán bằng phương pháp Quy hoạch động (có tối ưu bộ nhớ) trong $O(C\sqrt{C})$

# Ứng dụng 5

# Ứng dụng 5

## Đếm số cấp số cộng độ dài 3

Cho một tập số nguyên dương $S$ gồm $n$ phần tử.

# Ứng dụng 5

## Đếm số cấp số cộng độ dài 3

Cho một tập số nguyên dương $S$ gồm $n$ phần tử. Đếm số cách chọn 3 số nguyên dương khác nhau trong $S$ sao cho 3 số nguyên dương đó tạo thành một cấp số cộng.

# Ứng dụng 5

## Đếm số cấp số cộng độ dài 3

Cho một tập số nguyên dương $S$ gồm $n$ phần tử. Đếm số cách chọn 3 số nguyên dương khác nhau trong $S$ sao cho 3 số nguyên dương đó tạo thành một cấp số cộng.
Ví dụ: Nếu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ thì ta có thể chọn các số 1, 5, và 3 để tạo thành cấp số cộng $1, 3, 5$.

# Ứng dụng 5

## Đếm số cấp số cộng độ dài 3

Cho một tập số nguyên dương $S$ gồm $n$ phần tử. Đếm số cách chọn 3 số nguyên dương khác nhau trong $S$ sao cho 3 số nguyên dương đó tạo thành một cấp số cộng.
Ví dụ: Nếu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ thì ta có thể chọn các số 1, 5, và 3 để tạo thành cấp số cộng $1, 3, 5$.
Các cách chọn là hoán vị của nhau được tính là một cách.

# Ứng dụng 5

## Đếm số cấp số cộng độ dài 3

Cho một tập số nguyên dương $S$ gồm $n$ phần tử. Đếm số cách chọn 3 số nguyên dương khác nhau trong $S$ sao cho 3 số nguyên dương đó tạo thành một cấp số cộng.
Ví dụ: Nếu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ thì ta có thể chọn các số 1, 5, và 3 để tạo thành cấp số cộng $1, 3, 5$.
Các cách chọn là hoán vị của nhau được tính là một cách.
Độ phức tạp cần đạt: $O(n^{\log_2 3})$

# Ý tưởng

# Ý tưởng

- Mẹo: Cố định số nằm giữa và xem xét mối quan hệ của số ở giữa với các số còn lại.

# Ý tưởng

- Mẹo: Cố định số nằm giữa và xem xét mối quan hệ của số ở giữa với các số còn lại.
  - Giả sử ta có cấp số cộng $a_1, a_2, a_3$, khi đó $a_2 = 2(a_1 + a_3)$

# Ý tưởng

- Mẹo: Cố định số nằm giữa và xem xét mối quan hệ của số ở giữa với các số còn lại.
  - Giả sử ta có cấp số cộng $a_1, a_2, a_3$, khi đó $a_2 = 2(a_1 + a_3)$
- Nếu $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, đặt $p(x) = x^{s_1} + x^{s_2} + ... + x^{s_n}$.

# Ý tưởng

- Mẹo: Cố định số nằm giữa và xem xét mối quan hệ của số ở giữa với các số còn lại.
  - Giả sử ta có cấp số cộng $a_1, a_2, a_3$, khi đó $a_2 = 2(a_1 + a_3)$
- Nếu $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, đặt $p(x) = x^{s_1} + x^{s_2} + ... + x^{s_n}$. Khi đó hệ số của $x^i$ của $p(x)$ sẽ là số cách chọn hai số trong $S$ (không nhất thiết phải phân biệt) có tổng là $x^i$.

# Ý tưởng

- Mẹo: Cố định số nằm giữa và xem xét mối quan hệ của số ở giữa với các số còn lại.
    - Giả sử ta có cấp số cộng $a_1, a_2, a_3$, khi đó $a_2 = 2(a_1 + a_3)$
- Nếu $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, đặt $p(x) = x^{s_1} + x^{s_2} + ... + x^{s_n}$. Khi đó hệ số của $x^i$ của $p(x)$ sẽ là số cách chọn hai số trong $S$ (không nhất thiết phải phân biệt) có tổng là $x^i$. Với mỗi cách chọn hai số này, ta chỉ cần nhân với số cách chọn số $\frac{i}{2}$ trong tập $S$ là ra cách chọn 3 số trong $S$ để có một cấp số cộng mà có tổng số đầu và số cuối bằng $i$.

# Ý tưởng

- Mẹo: Cố định số nằm giữa và xem xét mối quan hệ của số ở giữa với các số còn lại.
    - Giả sử ta có cấp số cộng $a_1, a_2, a_3$, khi đó $a_2 = 2(a_1 + a_3)$
- Nếu $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, đặt $p(x) = x^{s_1} + x^{s_2} + ... + x^{s_n}$. Khi đó hệ số của $x^i$ của $p(x)$ sẽ là số cách chọn hai số trong $S$ (không nhất thiết phải phân biệt) có tổng là $x^i$. Với mỗi cách chọn hai số này, ta chỉ cần nhân với số cách chọn số $\frac{i}{2}$ trong tập $S$ là ra cách chọn 3 số trong $S$ để có một cấp số cộng mà có tổng số đầu và số cuối bằng $i$.
- Lọc bỏ các trường hợp trùng nhau:

# Ý tưởng

- Mẹo: Cố định số nằm giữa và xem xét mối quan hệ của số ở giữa với các số còn lại.
  - Giả sử ta có cấp số cộng $a_1, a_2, a_3$, khi đó $a_2 = 2(a_1 + a_3)$
- Nếu $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, đặt $p(x) = x^{s_1} + x^{s_2} + ... + x^{s_n}$. Khi đó hệ số của $x^i$ của $p(x)$ sẽ là số cách chọn hai số trong $S$ (không nhất thiết phải phân biệt) có tổng là $x^i$. Với mỗi cách chọn hai số này, ta chỉ cần nhân với số cách chọn số $\frac{i}{2}$ trong tập $S$ là ra cách chọn 3 số trong $S$ để có một cấp số cộng mà có tổng số đầu và số cuối bằng $i$.
- Lọc bỏ các trường hợp trùng nhau:
  - Cấp số cộng gồm 3 số bằng nhau không được tính.

# Ý tưởng

- Mẹo: Cố định số nằm giữa và xem xét mối quan hệ của số ở giữa với các số còn lại.
  - Giả sử ta có cấp số cộng $a_1, a_2, a_3$, khi đó $a_2 = 2(a_1 + a_3)$
- Nếu $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, đặt $p(x) = x^{s_1} + x^{s_2} + ... + x^{s_n}$. Khi đó hệ số của $x^i$ của $p(x)$ sẽ là số cách chọn hai số trong $S$ (không nhất thiết phải phân biệt) có tổng là $x^i$. Với mỗi cách chọn hai số này, ta chỉ cần nhân với số cách chọn số $\frac{i}{2}$ trong tập $S$ là ra cách chọn 3 số trong $S$ để có một cấp số cộng mà có tổng số đầu và số cuối bằng $i$.
- Lọc bỏ các trường hợp trùng nhau:
  - Cấp số cộng gồm 3 số bằng nhau không được tính.
  - Không có cấp số cộng nào có đúng 2 số bằng nhau.

# Ý tưởng

- Mẹo: Cố định số nằm giữa và xem xét mối quan hệ của số ở giữa với các số còn lại.
  - Giả sử ta có cấp số cộng $a_1, a_2, a_3$, khi đó $a_2 = 2(a_1 + a_3)$
- Nếu $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, đặt $p(x) = x^{s_1} + x^{s_2} + ... + x^{s_n}$. Khi đó hệ số của $x^i$ của $p(x)$ sẽ là số cách chọn hai số trong $S$ (không nhất thiết phải phân biệt) có tổng là $x^i$. Với mỗi cách chọn hai số này, ta chỉ cần nhân với số cách chọn số $\frac{i}{2}$ trong tập $S$ là ra cách chọn 3 số trong $S$ để có một cấp số cộng mà có tổng số đầu và số cuối bằng $i$.
- Lọc bỏ các trường hợp trùng nhau:
  - Cấp số cộng gồm 3 số bằng nhau không được tính.
  - Không có cấp số cộng nào có đúng 2 số bằng nhau.
  - Mỗi các cấp số cộng gồm 3 số phân biệt bị đếm 2 lần.

# Ứng dụng 6

# Ứng dụng 6

**Đếm số đoạn thẳng có cùng độ dài**

Cho $n$ điểm nguyên phân biệt nằm trong hình chữ nhật có các đỉnh $(0,0);(0,A);(A,B);(B,0)$ trên mặt phẳng $Oxy$. Đếm số đoạn thẳng có độ dài $d > 0$ có đầu mút là 2 trong số $n$ điểm này.

**Đếm số đoạn thẳng có cùng độ dài**

Cho $n$ điểm nguyên phân biệt nằm trong hình chữ nhật có các đỉnh $(0,0);(0,A);(A,B);(B,0)$ trên mặt phẳng $Oxy$. Đếm số đoạn thẳng có độ dài $d > 0$ có đầu mút là 2 trong số $n$ điểm này. Độ phức tạp cần đạt $O((AB)^{\log_2 3})$

# Gợi ý

- Khoảng cách giữa hai điểm phụ thuộc vào hiệu giữa hai hoành độ và hiệu giữa hai tung độ.

# Gợi ý

- Khoảng cách giữa hai điểm phụ thuộc vào hiệu giữa hai hoành độ và hiệu giữa hai tung độ.
- Gọi $n$ điểm là $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$.

# Gợi ý

- Khoảng cách giữa hai điểm phụ thuộc vào hiệu giữa hai hoành độ và hiệu giữa hai tung độ.
- Gọi $n$ điểm là $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$. Giả sử số mũ có thể là tọa độ, đặt $p(x) = x^{(a_1,b_1)} + x^{(a_2,b_2)} + ... + x^{(a_n,b_n)}$ và $q(x) = x^{(-a_1,-b_1)} + x^{(-a_2,-b_2)} + ... + x^{(-a_n,-b_n)}$

# Gợi ý

- Khoảng cách giữa hai điểm phụ thuộc vào hiệu giữa hai hoành độ và hiệu giữa hai tung độ.
- Gọi $n$ điểm là $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$. Giả sử số mũ có thể là tọa độ, đặt $p(x) = x^{(a_1,b_1)} + x^{(a_2,b_2)} + ... + x^{(a_n,b_n)}$ và $q(x) = x^{(-a_1,-b_1)} + x^{(-a_2,-b_2)} + ... + x^{(-a_n,-b_n)}$
- Khi đó, hệ số của $x^{(\Delta a,\Delta b)}$ trong đa thức $p(x)q(x)$ sẽ là số cách chọn 2 điểm sao cho hiệu giữa hai hoành độ là $\Delta a$ và hiệu giữa hai tung độ là $\Delta b$.

# Gợi ý

- Khoảng cách giữa hai điểm phụ thuộc vào hiệu giữa hai hoành độ và hiệu giữa hai tung độ.
- Gọi $n$ điểm là $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$. Giả sử số mũ có thể là tọa độ, đặt $p(x) = x^{(a_1,b_1)} + x^{(a_2,b_2)} + ... + x^{(a_n,b_n)}$ và $q(x) = x^{(-a_1,-b_1)} + x^{(-a_2,-b_2)} + ... + x^{(-a_n,-b_n)}$
- Khi đó, hệ số của $x^{(\Delta a,\Delta b)}$ trong đa thức $p(x)q(x)$ sẽ là số cách chọn 2 điểm sao cho hiệu giữa hai hoành độ là $\Delta a$ và hiệu giữa hai tung độ là $\Delta b$.
- Sau khi tính $p(x)q(x)$ trong $O((AB)^{\log_2 3})$ thì ta có thể duyệt hết các $(\Delta a, \Delta b)$ có thể trong $O(AB)$ rồi cộng hệ số vào kết quả nếu $(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 = d^2$

# Gợi ý

- Khoảng cách giữa hai điểm phụ thuộc vào hiệu giữa hai hoành độ và hiệu giữa hai tung độ.
- Gọi $n$ điểm là $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$. Giả sử số mũ có thể là tọa độ, đặt $p(x) = x^{(a_1,b_1)} + x^{(a_2,b_2)} + ... + x^{(a_n,b_n)}$ và $q(x) = x^{(-a_1,-b_1)} + x^{(-a_2,-b_2)} + ... + x^{(-a_n,-b_n)}$
- Khi đó, hệ số của $x^{(\Delta a,\Delta b)}$ trong đa thức $p(x)q(x)$ sẽ là số cách chọn 2 điểm sao cho hiệu giữa hai hoành độ là $\Delta a$ và hiệu giữa hai tung độ là $\Delta b$.
- Sau khi tính $p(x)q(x)$ trong $O((AB)^{\log_2 3})$ thì ta có thể duyệt hết các $(\Delta a, \Delta b)$ có thể trong $O(AB)$ rồi cộng hệ số vào kết quả nếu $(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 = d^2$
- Bài tập: Tìm cách mã hóa $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), (-a_1, -b_1), (-a_2, -b_2), ..., (-a_n, -b_n)$ thành các số nguyên không âm.

# Gợi ý

- Khoảng cách giữa hai điểm phụ thuộc vào hiệu giữa hai hoành độ và hiệu giữa hai tung độ.
- Gọi $n$ điểm là $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$. Giả sử số mũ có thể là tọa độ, đặt $p(x) = x^{(a_1,b_1)} + x^{(a_2,b_2)} + ... + x^{(a_n,b_n)}$ và $q(x) = x^{(-a_1,-b_1)} + x^{(-a_2,-b_2)} + ... + x^{(-a_n,-b_n)}$
- Khi đó, hệ số của $x^{(\Delta a,\Delta b)}$ trong đa thức $p(x)q(x)$ sẽ là số cách chọn 2 điểm sao cho hiệu giữa hai hoành độ là $\Delta a$ và hiệu giữa hai tung độ là $\Delta b$.
- Sau khi tính $p(x)q(x)$ trong $O((AB)^{\log_2 3})$ thì ta có thể duyệt hết các $(\Delta a, \Delta b)$ có thể trong $O(AB)$ rồi cộng hệ số vào kết quả nếu $(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 = d^2$
- Bài tập: Tìm cách mã hóa $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), (-a_1, -b_1), (-a_2, -b_2), ..., (-a_n, -b_n)$ thành các số nguyên không âm.

# Ứng dụng 7

# Ứng dụng 7

**Nhận dạng mẫu với kí tự khuyết (Pattern matching with don't cares)**

Cho xâu $s$ và một xâu mẫu $t$.

# Ứng dụng 7

**Nhận dạng mẫu với kí tự khuyết (Pattern matching with don't cares)**

Cho xâu $s$ và một xâu mẫu $t$. Xâu $s$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường, xâu $t$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường và kí tự ?.

# Ứng dụng 7

**Nhận dạng mẫu với kí tự khuyết (Pattern matching with don't cares)**

Cho xâu $s$ và một xâu mẫu $t$. Xâu $s$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường, xâu $t$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường và kí tự ?. Xâu $t$ được coi là xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ nếu xâu con độ dài $|t|$ bắt đầu từ vị trí $i$ của xâu $s$ bằng với xâu $t$, trừ các vị trí có kí tự ?.

# Ứng dụng 7

## Nhận dạng mẫu với kí tự khuyết (Pattern matching with don't cares)

Cho xâu $s$ và một xâu mẫu $t$. Xâu $s$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường, xâu $t$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường và kí tự ?.
Xâu $t$ được coi là xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ nếu xâu con độ dài $|t|$ bắt đầu từ vị trí $i$ của xâu $s$ bằng với xâu $t$, trừ các vị trí có kí tự ?.
Với mỗi $i$ chạy từ 0 đến $|s| - 1$, hãy cho biết xâu $t$ có xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ hay không.

# Ứng dụng 7

## Nhận dạng mẫu với kí tự khuyết (Pattern matching with don't cares)

Cho xâu $s$ và một xâu mẫu $t$. Xâu $s$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường, xâu $t$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường và kí tự ?.
Xâu $t$ được coi là xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ nếu xâu con độ dài $|t|$ bắt đầu từ vị trí $i$ của xâu $s$ bằng với xâu $t$, trừ các vị trí có kí tự ?.
Với mỗi $i$ chạy từ 0 đến $|s| - 1$, hãy cho biết xâu $t$ có xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ hay không.

## Ví dụ

Giả sử $s = \text{abababaa}$, $|s| = 8$

# Ứng dụng 7

## Nhận dạng mẫu với kí tự khuyết (Pattern matching with don't cares)

Cho xâu $s$ và một xâu mẫu $t$. Xâu $s$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường, xâu $t$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường và kí tự ?.
Xâu $t$ được coi là xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ nếu xâu con độ dài $|t|$ bắt đầu từ vị trí $i$ của xâu $s$ bằng với xâu $t$, trừ các vị trí có kí tự ?.
Với mỗi $i$ chạy từ 0 đến $|s|-1$, hãy cho biết xâu $t$ có xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ hay không.

## Ví dụ

Giả sử $s = \text{abababaa}$, $|s| = 8$

- Nếu $t = ?$ thì $t$ xuất hiện ở tất cả các vị trí của $s$

# Ứng dụng 7

## Nhận dạng mẫu với kí tự khuyết (Pattern matching with don't cares)

Cho xâu $s$ và một xâu mẫu $t$. Xâu $s$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường, xâu $t$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường và kí tự ?.
Xâu $t$ được coi là xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ nếu xâu con độ dài $|t|$ bắt đầu từ vị trí $i$ của xâu $s$ bằng với xâu $t$, trừ các vị trí có kí tự ?.
Với mỗi $i$ chạy từ 0 đến $|s| - 1$, hãy cho biết xâu $t$ có xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ hay không.

## Ví dụ

Giả sử $s = \text{abababaa}$, $|s| = 8$

- Nếu $t = ?$ thì $t$ xuất hiện ở tất cả các vị trí của $s$
- Nếu $t = \text{a?}$ thì $t$ xuất hiện ở vị trí 0, 2, 4, 6

# Ứng dụng 7

## Nhận dạng mẫu với kí tự khuyết (Pattern matching with don't cares)

Cho xâu $s$ và một xâu mẫu $t$. Xâu $s$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường, xâu $t$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường và kí tự ?.
Xâu $t$ được coi là xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ nếu xâu con độ dài $|t|$ bắt đầu từ vị trí $i$ của xâu $s$ bằng với xâu $t$, trừ các vị trí có kí tự ?.
Với mỗi $i$ chạy từ 0 đến $|s| - 1$, hãy cho biết xâu $t$ có xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ hay không.

## Ví dụ

Giả sử $s = \text{abababaa}$, $|s| = 8$

- Nếu $t = ?$ thì $t$ xuất hiện ở tất cả các vị trí của $s$
- Nếu $t = \text{a?}$ thì $t$ xuất hiện ở vị trí 0, 2, 4, 6
- Nếu $t = \text{a?b}$ thì $t$ không xuất hiện ở vị trí nào.

# Ứng dụng 7

## Nhận dạng mẫu với kí tự khuyết (Pattern matching with don't cares)

Cho xâu $s$ và một xâu mẫu $t$. Xâu $s$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường, xâu $t$ gồm các chữ cái tiếng Anh in thường và kí tự ?.
Xâu $t$ được coi là xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ nếu xâu con độ dài $|t|$ bắt đầu từ vị trí $i$ của xâu $s$ bằng với xâu $t$, trừ các vị trí có kí tự ?.
Với mỗi $i$ chạy từ 0 đến $|s| - 1$, hãy cho biết xâu $t$ có xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$ hay không.

## Ví dụ

Giả sử $s = \text{abababaa}$, $|s| = 8$

- Nếu $t = ?$ thì $t$ xuất hiện ở tất cả các vị trí của $s$
- Nếu $t = \text{a?}$ thì $t$ xuất hiện ở vị trí 0, 2, 4, 6
- Nếu $t = \text{a?b}$ thì $t$ không xuất hiện ở vị trí nào.

# Thuật toán Clifford-Clifford (2010)

Ta chuyển các kí tự trong bảng chữ cái tiếng Anh thành các số nguyên từ 1 đến 26 và chuyển kí tự ? thành số 0

# Thuật toán Clifford-Clifford (2010)

Ta chuyển các kí tự trong bảng chữ cái tiếng Anh thành các số nguyên từ 1 đến 26 và chuyển kí tự ? thành số 0

Kí tự $s_i$ trùng với kí tự $t_j$

Ta chuyển các kí tự trong bảng chữ cái tiếng Anh thành các số nguyên từ 1 đến 26 và chuyển kí tự ? thành số 0

Kí tự $s_i$ trùng với kí tự $t_j \Leftrightarrow s_i = t_j$ hoặc $t_j = 0$

# Thuật toán Clifford-Clifford (2010)

Ta chuyển các kí tự trong bảng chữ cái tiếng Anh thành các số nguyên từ 1 đến 26 và chuyển kí tự ? thành số 0

Kí tự $s_i$ trùng với kí tự $t_j \Leftrightarrow s_i = t_j$ hoặc $t_j = 0 \Leftrightarrow (s_i - t_j)t_j = 0$

Xâu $t$ xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$

# Thuật toán Clifford-Clifford (2010)

Ta chuyển các kí tự trong bảng chữ cái tiếng Anh thành các số nguyên từ 1 đến 26 và chuyển kí tự ? thành số 0

Kí tự $s_i$ trùng với kí tự $t_j \Leftrightarrow s_i = t_j$ hoặc $t_j = 0 \Leftrightarrow (s_i - t_j)t_j = 0$

Xâu $t$ xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$

$\Leftrightarrow s_i$ trùng với $t_0$ và $s_{i+1}$ trùng với $t_1$ và ...

Ta chuyển các kí tự trong bảng chữ cái tiếng Anh thành các số nguyên từ 1 đến 26 và chuyển kí tự ? thành số 0

Kí tự $s_i$ trùng với kí tự $t_j \Leftrightarrow s_i = t_j$ hoặc $t_j = 0 \Leftrightarrow (s_i - t_j)t_j = 0$

Xâu $t$ xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$

$\Leftrightarrow s_i$ trùng với $t_0$ và $s_{i+1}$ trùng với $t_1$ và ...

$\Leftrightarrow (s_i - t_0)t_0 = 0$ và $(s_{i+1} - t_1)t_1 = 0$ và ...

# Thuật toán Clifford-Clifford (2010)

Ta chuyển các kí tự trong bảng chữ cái tiếng Anh thành các số nguyên từ 1 đến 26 và chuyển kí tự ? thành số 0

Kí tự $s_i$ trùng với kí tự $t_j \Leftrightarrow s_i = t_j$ hoặc $t_j = 0 \Leftrightarrow (s_i - t_j)t_j = 0$

Xâu $t$ xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$

$\Leftrightarrow s_i$ trùng với $t_0$ và $s_{i+1}$ trùng với $t_1$ và ...

$\Leftrightarrow (s_i - t_0)t_0 = 0$ và $(s_{i+1} - t_1)t_1 = 0$ và ...

$\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{|t|-1}(s_{x+i} - t_x)^2 t_x = 0$

Ta chuyển các kí tự trong bảng chữ cái tiếng Anh thành các số nguyên từ 1 đến 26 và chuyển kí tự ? thành số 0

Kí tự $s_i$ trùng với kí tự $t_j \Leftrightarrow s_i = t_j$ hoặc $t_j = 0 \Leftrightarrow (s_i - t_j)t_j = 0$

Xâu $t$ xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$

$\Leftrightarrow s_i$ trùng với $t_0$ và $s_{i+1}$ trùng với $t_1$ và ...

$\Leftrightarrow (s_i - t_0)t_0 = 0$ và $(s_{i+1} - t_1)t_1 = 0$ và ...

$\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{|t|-1}(s_{x+i} - t_x)^2 t_x = 0$

$\Leftrightarrow (\sum_{x=0}^{|t|-1} s_{x+i}^2 t_x) - 2(\sum_{x=0}^{|t|-1} s_{x+i} t_x^2) + (\sum_{x=0}^{|t|-1} t_x^3) = 0$

Ta chuyển các kí tự trong bảng chữ cái tiếng Anh thành các số nguyên từ 1 đến 26 và chuyển kí tự ? thành số 0

Kí tự $s_i$ trùng với kí tự $t_j \Leftrightarrow s_i = t_j$ hoặc $t_j = 0 \Leftrightarrow (s_i - t_j)t_j = 0$

Xâu $t$ xuất hiện ở vị trí $i$ của xâu $s$

$\Leftrightarrow s_i$ trùng với $t_0$ và $s_{i+1}$ trùng với $t_1$ và ...

$\Leftrightarrow (s_i - t_0)t_0 = 0$ và $(s_{i+1} - t_1)t_1 = 0$ và ...

$\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{|t|-1}(s_{x+i} - t_x)^2 t_x = 0$

$\Leftrightarrow (\sum_{x=0}^{|t|-1} s_{x+i}^2 t_x) - 2(\sum_{x=0}^{|t|-1} s_{x+i} t_x^2) + (\sum_{x=0}^{|t|-1} t_x^3) = 0$

Ta có thể tính $\sum_{x=0}^{|t|-1} s_{x+i}^2 t_x$ và $\sum_{x=0}^{|t|-1} s_{x+i} t_x^2$ với mọi $i$ trong $O(\max\{|s|, |t|\}^{\log_2 3})$ do đây đều là tương quan của hai dãy số.

## Sự tồn tại của trọng tâm cây

Một nút $u$ được gọi là trọng tâm của đồ thị $G$ gồm $n$ đỉnh khi và chỉ khi nếu ta loại bỏ $u$ khỏi $G$ thì các thành phần liên thông của $G$ đều có số đỉnh không vượt quá $\frac{n}{2}$

# Chia để trị trên cây

## Sự tồn tại của trọng tâm cây

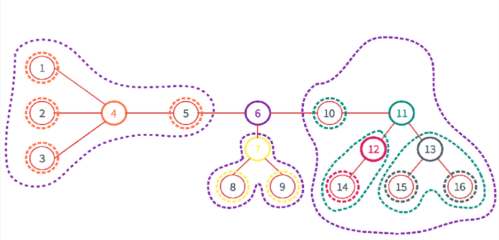
Một nút $u$ được gọi là trọng tâm của đồ thị $G$ gồm $n$ đỉnh khi và chỉ khi nếu ta loại bỏ $u$ khỏi $G$ thì các thành phần liên thông của $G$ đều có số đỉnh không vượt quá $\frac{n}{2}$

Với mọi cây $T$, luôn tồn tại một nút $u$ là trọng tâm của cây.

## Sự tồn tại của trọng tâm cây

Một nút $u$ được gọi là trọng tâm của đồ thị $G$ gồm $n$ đỉnh khi và chỉ khi nếu ta loại bỏ $u$ khỏi $G$ thì các thành phần liên thông của $G$ đều có số đỉnh không vượt quá $\frac{n}{2}$

Với mọi cây $T$, luôn tồn tại một nút $u$ là trọng tâm của cây.



**Đường đi trên cây**

Xét đường đi đơn giữa hai nút $u$ và $v$ của cây $T$ có gốc $r$. Khi đó:

## Đường đi trên cây

Xét đường đi đơn giữa hai nút $u$ và $v$ của cây $T$ có gốc $r$. Khi đó:

- Đường đi không đi qua $r$ khi và chỉ khi $u$ và $v$ cùng thuộc một cây con của $r$

# Chia để trị trên cây

## Đường đi trên cây

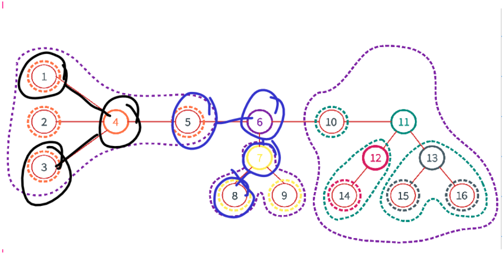
Xét đường đi đơn giữa hai nút $u$ và $v$ của cây $T$ có gốc $r$. Khi đó:

- Đường đi không đi qua $r$ khi và chỉ khi $u$ và $v$ cùng thuộc một cây con của $r$
- Đường đi đi qua $r$ khi và chỉ khi $u$ và $v$ không cùng thuộc một cây con của $r$

## Đường đi trên cây

Xét đường đi đơn giữa hai nút $u$ và $v$ của cây $T$ có gốc $r$. Khi đó:

- Đường đi không đi qua $r$ khi và chỉ khi $u$ và $v$ cùng thuộc một cây con của $r$
- Đường đi đi qua $r$ khi và chỉ khi $u$ và $v$ không cùng thuộc một cây con của $r$



# Chia để trị trên cây

## Ứng dụng

Các bài toán liên quan đến đường đi trên cây (ví dụ như tính tổng độ dài các đường đi trên cây)

# Chia để trị trên cây

## Ứng dụng

Các bài toán liên quan đến đường đi trên cây (ví dụ như tính tổng độ dài các đường đi trên cây)

## Phương pháp

- Để giải bài toán trên cây $T$ có $n$ đỉnh

# Chia để trị trên cây

## Ứng dụng

Các bài toán liên quan đến đường đi trên cây (ví dụ như tính tổng độ dài các đường đi trên cây)

## Phương pháp

- Để giải bài toán trên cây $T$ có $n$ đỉnh
    - Tìm một trọng tâm của $T$ và đặt nút đó là gốc $r$.

# Chia để trị trên cây

## Ứng dụng

Các bài toán liên quan đến đường đi trên cây (ví dụ như tính tổng độ dài các đường đi trên cây)

## Phương pháp

- Để giải bài toán trên cây $T$ có $n$ đỉnh
  - Tìm một trọng tâm của $T$ và đặt nút đó là gốc $r$.
  - Giải bài toán với các đường đi phải đi qua $r$ trong $O(n)$ hoặc $O(n \log n)$

# Chia để trị trên cây

## Ứng dụng

Các bài toán liên quan đến đường đi trên cây (ví dụ như tính tổng độ dài các đường đi trên cây)

## Phương pháp

- Để giải bài toán trên cây $T$ có $n$ đỉnh
  - Tìm một trọng tâm của $T$ và đặt nút đó là gốc $r$.
  - Giải bài toán với các đường đi phải đi qua $r$ trong $O(n)$ hoặc $O(n \log n)$
  - Gọi đệ quy để giải bài toán trên các cây con của $r$.

# Chia để trị trên cây

## Ứng dụng

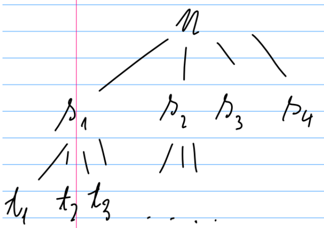
Các bài toán liên quan đến đường đi trên cây (ví dụ như tính tổng độ dài các đường đi trên cây)

## Phương pháp

- Để giải bài toán trên cây $T$ có $n$ đỉnh
  - Tìm một trọng tâm của $T$ và đặt nút đó là gốc $r$.
  - Giải bài toán với các đường đi phải đi qua $r$ trong $O(n)$ hoặc $O(n \log n)$
  - Gọi đệ quy để giải bài toán trên các cây con của $r$.
  - Kết hợp các kết quả bài toán.

# Chia để trị trên cây - Độ phức tạp tính toán

# Chia để trị trên cây - Độ phức tạp tính toán



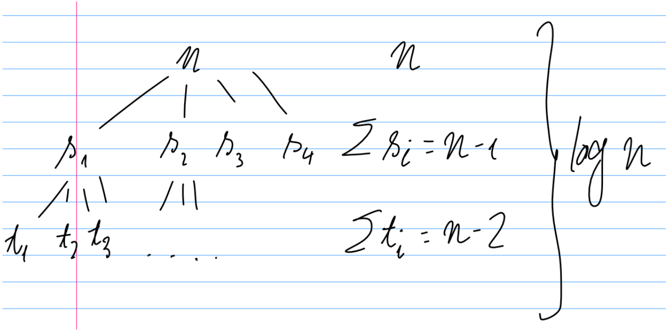

$n$

$\sum s_i = n - 1$

$\sum t_i = n - 2$

$\log n$

# Chia để trị trên cây - Độ phức tạp tính toán



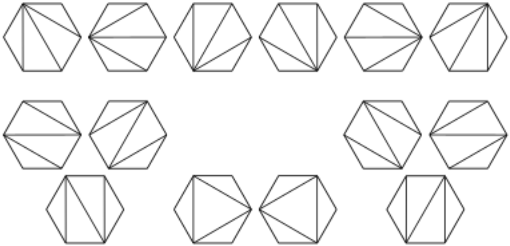

$T(n) \in O(n \log n)$

# Chia để trị trên đa giác (lồi)

Với một đa giác không tự cắt có $n$ đỉnh, ta có thể dùng các đường chéo để chia đa giác đó thành $n - 2$ tam giác theo nhiều cách khác nhau.

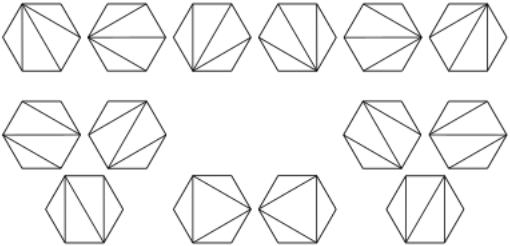
# Chia để trị trên đa giác (lồi)

Với một đa giác không tự cắt có $n$ đỉnh, ta có thể dùng các đường chéo để chia đa giác đó thành $n-2$ tam giác theo nhiều cách khác nhau.



# Chia để trị trên đa giác (lồi)

Với một đa giác không tự cắt có $n$ đỉnh, ta có thể dùng các đường chéo để chia đa giác đó thành $n-2$ tam giác theo nhiều cách khác nhau.



## Tính chất đặc biệt

Với mọi cách chia đa giác lồi $n$ đỉnh thành $n-2$ tam giác, ta luôn tìm đươc một đường chéo để chia đa giác thành hai phần, phần lớn hơn có $\frac{2n}{3}$ đỉnh và phần nhỏ hơn có ít nhất $\frac{n}{3}$ đỉnh.

# Tính chất đặc biệt

# Tính chất đặc biệt

## Chứng minh (Gennady Korotkevich, 2015)

Gọi đa giác được cho là đa giác $A_1A_2...A_n$
Mọi cách chia một đa giác lồi thành các tam giác đều hợp lệ nếu đa giác đấy là đa giác đều, vì vậy không làm mất tính tổng quát, giả sử đa giác $A_1A_2...A_n$ là đa giác đều.
Khi đó, tồn tại đường tròn $(O)$ ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$. Tâm $O$ cũng nằm trong đa giác này, nên tồn tại tam giác $A_xA_yA_z$ chứa tâm $O$ trong cách chia được cho.
Xét đường tròn $(O)$, ta thấy tổng số đo ba cung $A_xA_y$, $A_yA_z$, $A_xA_z$ bằng $360^o$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử cung $A_xA_y$ là cung lớn nhất. Có thể chứng minh được số đo của $A_xA_y$ nhỏ nhất là $120^o$ ($\frac{1}{3}$ đường tròn) và lớn nhất là $180^o$ ($\frac{1}{2}$ đường tròn, do $O$ nằm trong tam giác $A_xA_yA_z$). Do đó đường chéo $A_xA_y$ sẽ chia đa giác thành hai phần, một phần có từ $\frac{n}{3}$ đến $\frac{n}{2}$ đỉnh và phần còn lại có từ $\frac{n}{2}$ đến $\frac{2n}{3}$ đỉnh. Ta có điều phải chứng minh.

# Chia để trị trên đa giác

# Chia để trị trên đa giác

**Ứng dụng**

Coi các đỉnh và cạnh của đa giác là các đỉnh và các cạnh của một đồ thị, ta có thể giải một số bài toán về đường đi trên đồ thị này

# Chia để trị trên đa giác

## Ứng dụng

Coi các đỉnh và cạnh của đa giác là các đỉnh và các cạnh của một đồ thị, ta có thể giải một số bài toán về đường đi trên đồ thị này

## Phương pháp

- Để giải bài toán trên đa giác $S$ có $n$ đỉnh

## Ứng dụng

Coi các đỉnh và cạnh của đa giác là các đỉnh và các cạnh của một đồ thị, ta có thể giải một số bài toán về đường đi trên đồ thị này

## Phương pháp

- Để giải bài toán trên đa giác $S$ có $n$ đỉnh
  - Tìm một đường chéo $l$ thỏa mãn tính chất đặc biệt (duyệt $O(n)$)

# Chia để trị trên đa giác

## Ứng dụng

Coi các đỉnh và cạnh của đa giác là các đỉnh và các cạnh của một đồ thị, ta có thể giải một số bài toán về đường đi trên đồ thị này

## Phương pháp

- Để giải bài toán trên đa giác $S$ có $n$ đỉnh
  - Tìm một đường chéo $l$ thỏa mãn tính chất đặc biệt (duyệt $O(n)$)
  - Giải phần bài toán liên quan đến đường chéo $l$ trong $O(n)$ hoặc $O(n \log n)$

# Chia để trị trên đa giác

## Ứng dụng

Coi các đỉnh và cạnh của đa giác là các đỉnh và các cạnh của một đồ thị, ta có thể giải một số bài toán về đường đi trên đồ thị này

## Phương pháp

- Để giải bài toán trên đa giác $S$ có $n$ đỉnh
  - Tìm một đường chéo $l$ thỏa mãn tính chất đặc biệt (duyệt $O(n)$)
  - Giải phần bài toán liên quan đến đường chéo $l$ trong $O(n)$ hoặc $O(n \log n)$
  - Dùng đường chéo $l$ để cắt đa giác làm hai phần, rồi gọi đệ quy để giải bài toán trên hai đa giác này.

# Chia để trị trên đa giác

## Ứng dụng

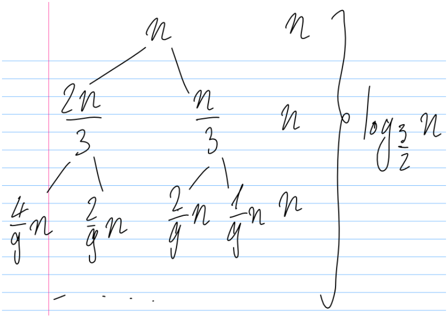
Coi các đỉnh và cạnh của đa giác là các đỉnh và các cạnh của một đồ thị, ta có thể giải một số bài toán về đường đi trên đồ thị này

## Phương pháp

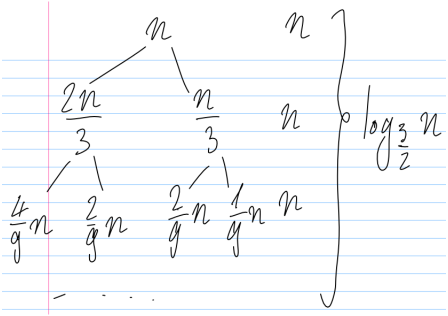
- Để giải bài toán trên đa giác $S$ có $n$ đỉnh
  - Tìm một đường chéo $l$ thỏa mãn tính chất đặc biệt (duyệt $O(n)$)
  - Giải phần bài toán liên quan đến đường chéo $l$ trong $O(n)$ hoặc $O(n \log n)$
  - Dùng đường chéo $l$ để cắt đa giác làm hai phần, rồi gọi đệ quy để giải bài toán trên hai đa giác này.
  - Kết hợp các kết quả bài toán.

# Chia để trị trên đa giác - Độ phức tạp tính toán

# Chia để trị trên đa giác - Độ phức tạp tính toán



# Chia để trị trên đa giác - Độ phức tạp tính toán




$$T(n) \in O(n \log_{\frac{3}{2}} n) = O(n \log n)$$