Cấu trúc dữ liệu Bao lồi

Bùi Việt Dũng

Ngày 24 tháng 4 năm 2022

Bài toán mở đầu

Cho n điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trên trục hoành.
$(n \leq 10^6, 0 \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq 10^9)$
Tìm các vẽ một số đoạn thẳng trên trục hoành sao cho điểm nào trong số n điểm được cho cũng nằm trên một đoạn, và tổng chi phí vẽ các đoạn là thấp nhất. Một đoạn được vẽ có thể là một điểm.
Chi phí vẽ một đoạn $[l, r]$ được tính như sau:

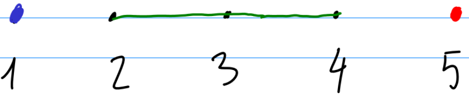
- Phiên bản dễ: $(r - l)^2 + c$ (coveredwalkway trên Kattis)
- Phiên bản khó: $\sqrt{r - l + c}$

với c là một hằng số chung dùng cho tất cả các đoạn được vẽ.
Ở phiên bản dễ, $1 \leq c \leq 10^9$, còn ở phiên bản khó, $c > 10^9$

Bài toán mở đầu

$n = 5$

$c = 3$



Chi phí: $[(1-1)^2 + 3] + [(4-2)^2 + 3]$

$+ [(5-5)^2 + 3] = 13$

Lời giải $O(n^2)$

Nhận xét:

- Ta chỉ cần vẽ các đoạn trong khoảng $[x_1, x_n]$
- Nếu ta vẽ nhiều hơn 1 đoạn thì giữa hai đoạn liên tiếp sẽ có một "khoảng trống" không chứa đoạn nào hay điểm nào.

Lời giải $O(n^2)$

Nhận xét:

- Ta chỉ cần vẽ các đoạn trong khoảng $[x_1, x_n]$
- Nếu ta vẽ nhiều hơn 1 đoạn thì giữa hai đoạn liên tiếp sẽ có một "khoảng trống" không chứa đoạn nào hay điểm nào.

Từ hai nhận xét trên, gọi $dp(i)$ là đáp án khi ta chỉ xét i điểm đầu tiên, ta có công thức quy hoạch động:

Lời giải $O(n^2)$

Nhận xét:

- Ta chỉ cần vẽ các đoạn trong khoảng $[x_1, x_n]$
- Nếu ta vẽ nhiều hơn 1 đoạn thì giữa hai đoạn liên tiếp sẽ có một "khoảng trống" không chứa đoạn nào hay điểm nào.

Từ hai nhận xét trên, gọi $dp(i)$ là đáp án khi ta chỉ xét i điểm đầu tiên, ta có công thức quy hoạch động:

$dp(0) = 0$

$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + (x_i - x_{j+1})^2 + c]$

Lời giải $O(n^2)$

Nhận xét:

- Ta chỉ cần vẽ các đoạn trong khoảng $[x_1, x_n]$
- Nếu ta vẽ nhiều hơn 1 đoạn thì giữa hai đoạn liên tiếp sẽ có một "khoảng trống" không chứa đoạn nào hay điểm nào.

Từ hai nhận xét trên, gọi $dp(i)$ là đáp án khi ta chỉ xét i điểm đầu tiên, ta có công thức quy hoạch động:

$dp(0) = 0$

$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + (x_i - x_{j+1})^2 + c]$

Đáp án là $dp(n)$. Ta có thể tính được $dp(n)$ bằng hai vòng lặp lồng nhau trong $O(n^2)$

Cách làm tốt hơn

Cách làm tốt hơn

Ta có:

Cách làm tốt hơn

Ta có:

$$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + (x_i - x_{j+1})^2 + c]$$

Cách làm tốt hơn

Ta có:

$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + (x_i - x_{j+1})^2 + c]$

$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_i^2 + x_{j+1}^2 - 2x_i x_{j+1} + c]$

Cách làm tốt hơn

Ta có:

$$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + (x_i - x_{j+1})^2 + c]$$

$$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_i^2 + x_{j+1}^2 - 2x_i x_{j+1} + c]$$

$$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1}[-2x_{j+1}x_i + dp(j) + x_{j+1}^2]$$

Cách làm tốt hơn

Ta có:

$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + (x_i - x_{j+1})^2 + c]$

$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_i^2 + x_{j+1}^2 - 2x_i x_{j+1} + c]$

$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1}[-2x_{j+1}x_i + dp(j) + x_{j+1}^2]$

$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1}[-2x_{j+1}x_i] + \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_{j+1}^2]$

Cách làm tốt hơn

Ta có:
$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + (x_i - x_{j+1})^2 + c]$
$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_i^2 + x_{j+1}^2 - 2x_i x_{j+1} + c]$
$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1}[-2x_{j+1}x_i + dp(j) + x_{j+1}^2]$
$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1}[-2x_{j+1}x_i] + \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_{j+1}^2]$
Đặt $f_j(t) = a_j t + b_j$ với $a_j = -2x_{j+1}$ và $b_j = (dp(j) + x_{j+1}^2)$, ta có thể viết lại công thức trên thành

Cách làm tốt hơn

Ta có:

$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + (x_i - x_{j+1})^2 + c]$

$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_i^2 + x_{j+1}^2 - 2x_i x_{j+1} + c]$

$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1}[-2x_{j+1}x_i + dp(j) + x_{j+1}^2]$

$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1}[-2x_{j+1}x_i] + \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_{j+1}^2]$

Đặt $f_j(t) = a_j t + b_j$ với $a_j = -2x_{j+1}$ và $b_j = (dp(j) + x_{j+1}^2)$, ta có thể viết lại công thức trên thành

$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$

Ta có:
$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + (x_i - x_{j+1})^2 + c]$
$dp(i) = \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_i^2 + x_{j+1}^2 - 2x_i x_{j+1} + c]$
$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1}[-2x_{j+1}x_i + dp(j) + x_{j+1}^2]$
$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1}[-2x_{j+1}x_i] + \min_{j=0}^{i-1}[dp(j) + x_{j+1}^2]$
Đặt $f_j(t) = a_j t + b_j$ với $a_j = -2x_{j+1}$ và $b_j = (dp(j) + x_{j+1}^2)$, ta có thể viết lại công thức trên thành
$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$
$\Rightarrow$ cần một cấu trúc dữ liệu có thể tìm nhanh $\min_{j=0}^{i-1} f_j(x)$ với một số x nào đó.

Cấu trúc dữ liệu H

Cho n hàm số $f_1, f_2, ..., f_n$ đôi một khác nhau xác định trên $[l, r]$.

Cấu trúc dữ liệu H

Cho n hàm số $f_1, f_2, ..., f_n$ đôi một khác nhau xác định trên $[l, r]$.
Các hàm số này thỏa mãn 4 tính chất sau:

1. Với mỗi i, f_i liên tục và có đạo hàm 2 lần trên $[l, r]$.
2. Với $i \neq j$, $f_i - f_j = 0$ chỉ có nhiều nhất một nghiệm
3. Với mỗi i, f_i là hàm lồi trên $[l, r]$.
4. Với $i \neq j$, $f_i' - f_j' = 0$ có tập nghiệm là $[l, r]$ hoặc $\emptyset$

Cho n hàm số $f_1, f_2, ..., f_n$ đôi một khác nhau xác định trên $[l, r]$.
Các hàm số này thỏa mãn 4 tính chất sau:

1. Với mỗi i, f_i liên tục và có đạo hàm 2 lần trên $[l, r]$.
2. Với $i \neq j$, $f_i - f_j = 0$ chỉ có nhiều nhất một nghiệm
3. Với mỗi i, f_i là hàm lồi trên $[l, r]$.
4. Với $i \neq j$, $f_i' - f_j' = 0$ có tập nghiệm là $[l, r]$ hoặc $\emptyset$

Tìm $H : [l, r] \to \mathbb{R}, x \mapsto \min_{i=1}^{n} f_i(x)$

$f_i(x) = a_i x + b_i$ có thỏa mãn 4 tính chất?

$f_i(x) = a_i x + b_i$ có thỏa mãn 4 tính chất?

1. $f_i(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục và có đạo hàm 2 lần trên $[l, r]$.

$f_i(x) = a_i x + b_i$ có thỏa mãn 4 tính chất?

1. $f_i(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục và có đạo hàm 2 lần trên $[l, r]$.
2. Lấy hai hàm f_i, f_j khác nhau. Khi đó $f_i(x) = a_i x + b_i$, $f_j(x) = a_j x + b_j$ với $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$.

$f_i(x) = a_i x + b_i$ có thỏa mãn 4 tính chất?

1. $f_i(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục và có đạo hàm 2 lần trên $[l, r]$.
2. Lấy hai hàm f_i, f_j khác nhau. Khi đó $f_i(x) = a_i x + b_i$, $f_j(x) = a_j x + b_j$ với $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$.
   $f_i(x) - f_j(x) = 0 \Leftrightarrow (a_i - a_j)x + (b_i - b_j) = 0.$

$f_i(x) = a_i x + b_i$ có thỏa mãn 4 tính chất?

1. $f_i(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục và có đạo hàm 2 lần trên $[l, r]$.
2. Lấy hai hàm f_i, f_j khác nhau. Khi đó $f_i(x) = a_i x + b_i$, $f_j(x) = a_j x + b_j$ với $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$.
   $f_i(x) - f_j(x) = 0 \Leftrightarrow (a_i - a_j)x + (b_i - b_j) = 0$.
   Phương trình có nhiều hơn một nghiệm khi và chỉ khi $a_i = a_j$ và $b_i = b_j$, nhưng điều này không thể xảy ra do $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$. Do đó, phương trình $f_i(x) - f_j(x)$ có nhiều nhất một nghiệm

$f_i(x) = a_i x + b_i$ có thỏa mãn 4 tính chất?

1. $f_i(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục và có đạo hàm 2 lần trên $[l, r]$.
2. Lấy hai hàm f_i, f_j khác nhau. Khi đó $f_i(x) = a_i x + b_i$, $f_j(x) = a_j x + b_j$ với $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$.
   $f_i(x) - f_j(x) = 0 \Leftrightarrow (a_i - a_j)x + (b_i - b_j) = 0$.
   Phương trình có nhiều hơn một nghiệm khi và chỉ khi $a_i = a_j$ và $b_i = b_j$, nhưng điều này không thể xảy ra do $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$. Do đó, phương trình $f_i(x) - f_j(x)$ có nhiều nhất một nghiệm
3. $f_i'(x) = a_i$. $f_i''(x) = 0 \leq 0 \Rightarrow f_i$ là hàm lồi.

$f_i(x) = a_i x + b_i$ có thỏa mãn 4 tính chất?

1. $f_i(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục và có đạo hàm 2 lần trên $[l, r]$.
2. Lấy hai hàm f_i, f_j khác nhau. Khi đó $f_i(x) = a_i x + b_i$, $f_j(x) = a_j x + b_j$ với $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$.
   $f_i(x) - f_j(x) = 0 \Leftrightarrow (a_i - a_j)x + (b_i - b_j) = 0$.
   Phương trình có nhiều hơn một nghiệm khi và chỉ khi $a_i = a_j$ và $b_i = b_j$, nhưng điều này không thể xảy ra do $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$. Do đó, phương trình $f_i(x) - f_j(x)$ có nhiều nhất một nghiệm
3. $f_i'(x) = a_i$. $f_i''(x) = 0 \leq 0 \Rightarrow f_i$ là hàm lồi.
4. Lấy hai hàm f_i, f_j khác nhau. Ta có
   $f_i'(x) - f_j'(x) = 0 \Leftrightarrow a_i - a_j = 0$.

$f_i(x) = a_i x + b_i$ có thỏa mãn 4 tính chất?

1. $f_i(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục và có đạo hàm 2 lần trên $[l, r]$.
2. Lấy hai hàm f_i, f_j khác nhau. Khi đó $f_i(x) = a_i x + b_i$, $f_j(x) = a_j x + b_j$ với $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$.
   $f_i(x) - f_j(x) = 0 \Leftrightarrow (a_i - a_j)x + (b_i - b_j) = 0$.
   Phương trình có nhiều hơn một nghiệm khi và chỉ khi $a_i = a_j$ và $b_i = b_j$, nhưng điều này không thể xảy ra do $a_i \neq a_j$ hoặc $b_i \neq b_j$. Do đó, phương trình $f_i(x) - f_j(x)$ có nhiều nhất một nghiệm
3. $f_i'(x) = a_i$. $f_i''(x) = 0 \leq 0 \Rightarrow f_i$ là hàm lồi.
4. Lấy hai hàm f_i, f_j khác nhau. Ta có
   $f_i'(x) - f_j'(x) = 0 \Leftrightarrow a_i - a_j = 0$.
   Nếu $a_i - a_j = 0$ thì phương trình có tập nghiệm là tập xác định của f_i, f_j, tức $[l, r]$, còn nếu $a_i - a_j \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm, tức tập nghiệm là $\emptyset$

H cần có tính chất gì?

H cần có tính chất gì?

Ta muốn H có khả năng cập nhật khi thêm một hàm mới, hoặc trả lời một truy vấn trong $O(1) - O(\log n)$.

H cần có tính chất gì?

Ta muốn H có khả năng cập nhật khi thêm một hàm mới, hoặc trả lời một truy vấn trong $O(1) - O(\log n)$.
Để làm được điều này, ta cần hai tính chất:

H cần có tính chất gì?

Ta muốn H có khả năng cập nhật khi thêm một hàm mới, hoặc trả lời một truy vấn trong $O(1) - O(\log n)$.
Để làm được điều này, ta cần hai tính chất:

- Ta biểu diễn H trong bộ nhớ $\rightarrow$ chứng minh tính không chen giữa của H

H cần có tính chất gì?

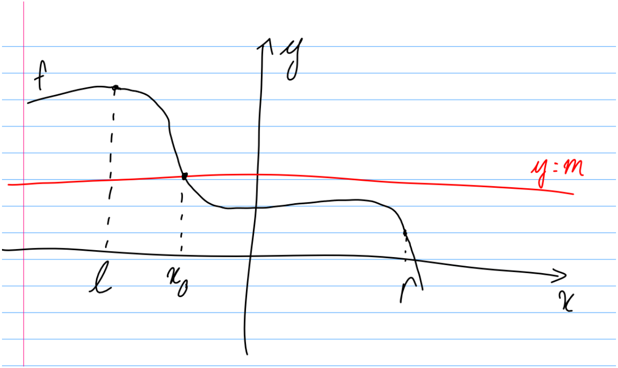
Ta muốn H có khả năng cập nhật khi thêm một hàm mới, hoặc trả lời một truy vấn trong $O(1) - O(\log n)$.
Để làm được điều này, ta cần hai tính chất:

- Ta biểu diễn H trong bộ nhớ $\rightarrow$ chứng minh tính không chen giữa của H
- Các phần tử trong H cần có một thứ tự nào đó $\rightarrow$ tính lồi của H

Định lí giá trị trung gian của hàm số liên tục

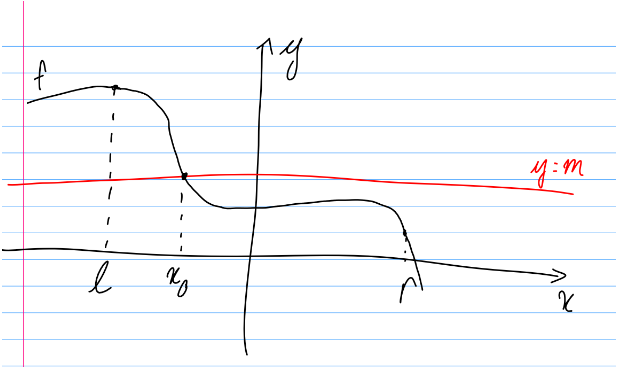
Nếu hàm f liên tục trên $[l, r]$ thì
$\forall m \in (\min\{f(l), f(r)\}, \max\{f(l), f(r)\}) : \exists x_0 \in (l, r) : f(x_0) = m$

Nếu hàm f liên tục trên $[l, r]$ thì
$\forall m \in (\min\{f(l), f(r)\}, \max\{f(l), f(r)\}) : \exists x_0 \in (l, r) : f(x_0) = m$



Định lí giá trị trung gian của hàm số liên tục

Nếu hàm f liên tục trên $[l, r]$ thì
$\forall m \in (\min\{f(l), f(r)\}, \max\{f(l), f(r)\}) : \exists x_0 \in (l, r) : f(x_0) = m$



Định lí Bolzano: Nếu $f(l)f(r) < 0$ thì $\exists x_0 \in (l, r) : f(x_0) = 0$

Luyện tập

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

Luyện tập

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

Giả sử $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$ sai, tức $\exists x \in [l, r] : f(x) \geq g(x)$. Lấy một số x như vậy, ta có $f(x) \geq g(x)$. Do $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm, $f(x) > g(x)$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $x_0 < x$

Luyện tập

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

Giả sử $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$ sai, tức $\exists x \in [l, r] : f(x) \geq g(x)$. Lấy một số x như vậy, ta có $f(x) \geq g(x)$. Do $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm, $f(x) > g(x)$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử
$x_0 < x$
Ta có:

Luyện tập

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

Giả sử $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$ sai, tức $\exists x \in [l, r] : f(x) \geq g(x)$. Lấy một số x như vậy, ta có $f(x) \geq g(x)$. Do $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm, $f(x) > g(x)$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $x_0 < x$

Ta có:

- $f(x_0) < g(x_0) \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) < 0$

Luyện tập

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

Giả sử $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$ sai, tức $\exists x \in [l, r] : f(x) \geq g(x)$. Lấy một số x như vậy, ta có $f(x) \geq g(x)$. Do $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm, $f(x) > g(x)$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $x_0 < x$

Ta có:

- $f(x_0) < g(x_0) \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) < 0$
- $f(x) > g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) > 0$

Luyện tập

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

Giả sử $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$ sai, tức $\exists x \in [l, r] : f(x) \geq g(x)$. Lấy một số x như vậy, ta có $f(x) \geq g(x)$. Do $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm, $f(x) > g(x)$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $x_0 < x$

Ta có:

- $f(x_0) < g(x_0) \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) < 0$
- $f(x) > g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) > 0$
- f, g là hai hàm liên tục $\Rightarrow f - g$ là hàm liên tục

Luyện tập

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

Giả sử $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$ sai, tức $\exists x \in [l, r] : f(x) \geq g(x)$. Lấy một số x như vậy, ta có $f(x) \geq g(x)$. Do $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm, $f(x) > g(x)$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử
$x_0 < x$
Ta có:

- $f(x_0) < g(x_0) \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) < 0$
- $f(x) > g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) > 0$
- f, g là hai hàm liên tục $\Rightarrow f - g$ là hàm liên tục

nên theo định lí Bolzano, ta có thể chọn số $k \in (x_0, x)$ sao cho $f(k) - g(k) = 0$ (vô lý vì trái với giả thiết $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm).

Luyện tập

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

Giả sử $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$ sai, tức $\exists x \in [l, r] : f(x) \geq g(x)$. Lấy một số x như vậy, ta có $f(x) \geq g(x)$. Do $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm, $f(x) > g(x)$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $x_0 < x$

Ta có:

- $f(x_0) < g(x_0) \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) < 0$
- $f(x) > g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) > 0$
- f, g là hai hàm liên tục $\Rightarrow f - g$ là hàm liên tục

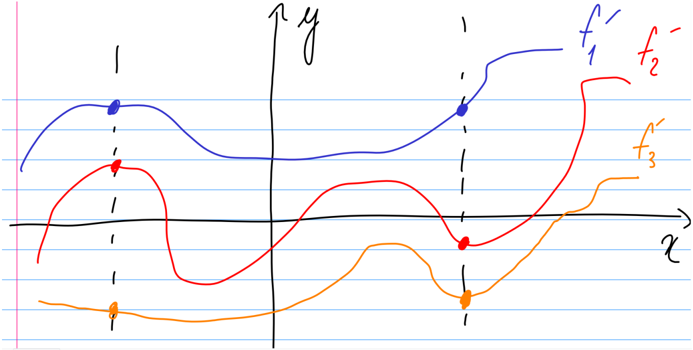
nên theo định lí Bolzano, ta có thể chọn số $k \in (x_0, x)$ sao cho $f(k) - g(k) = 0$ (vô lý vì trái với giả thiết $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm). Do đó giả sử ban đầu sai, tức $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$ đúng.

Hệ quả

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

Hệ quả

Cho hai hàm f, g liên tục trên $[l, r]$ sao cho $f(x) - g(x) = 0$ vô nghiệm (tức $\forall x \in [l, r] : f(x) - g(x) \neq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x_0 \in [l, r]$, nếu $f(x_0) < g(x_0)$ thì $\forall x \in [l, r] : f(x) < g(x)$

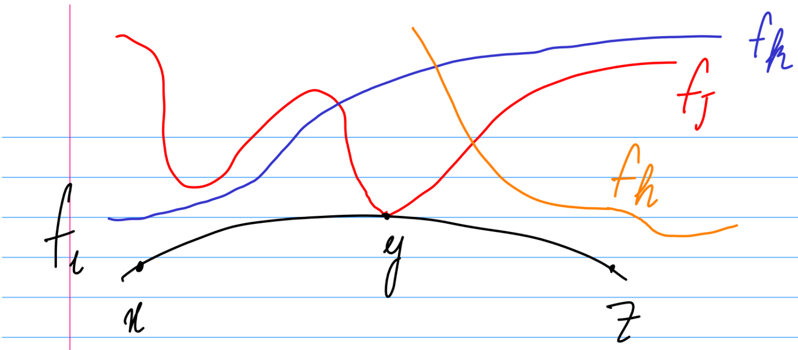


Tính không chen giữa của H

Cho $x, y, z \in [l, r]$ thỏa mãn $x < y < z$. Khi đó nếu $H(x) = f_i(x)$ và $H(z) = f_i(z)$ thì $H(y) = f_i(y)$

Tính không chen giữa của H

Cho $x, y, z \in [l, r]$ thỏa mãn $x < y < z$. Khi đó nếu $H(x) = f_i(x)$ và $H(z) = f_i(z)$ thì $H(y) = f_i(y)$



$$H = \min(f_i, f_j, f_h, f_k)$$

Chứng minh

Chứng minh

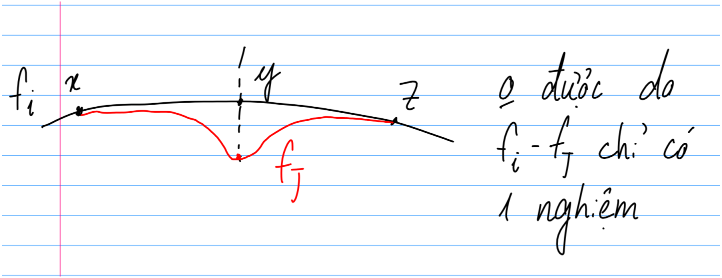
Lấy bất cứ $x, y, z \in [l, r]$ thỏa mãn $x < y < z$ sao cho $H(x) = f_i(x)$ và $H(z) = f_i(z)$

Chứng minh

Lấy bất cứ $x, y, z \in [l, r]$ thỏa mãn $x < y < z$ sao cho $H(x) = f_i(x)$ và $H(z) = f_i(z)$
Giả sử $H(y) \neq f_i(y)$. Khi đó, ta có thể chọn $f_j \neq f_i$ sao cho $H(y) = f_j(y)$. Ngoài ra, ta còn biết $f_j(y) < f_i(y)$, và $f_i(x) \leq f_j(x)$ và $f_i(z) \leq f_j(z)$

Chứng minh

Lấy bất cứ $x, y, z \in [l, r]$ thỏa mãn $x < y < z$ sao cho $H(x) = f_i(x)$ và $H(z) = f_i(z)$
Giả sử $H(y) \neq f_i(y)$. Khi đó, ta có thể chọn $f_j \neq f_i$ sao cho $H(y) = f_j(y)$. Ngoài ra, ta còn biết $f_j(y) < f_i(y)$, và $f_i(x) \leq f_j(x)$ và $f_i(z) \leq f_j(z)$

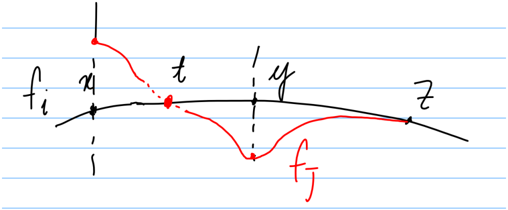


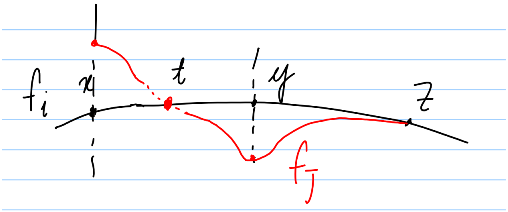
Chứng minh

Do $f_i - f_j = 0$ chỉ có nhiều nhất một nghiệm, $f_i(x) = f_j(x)$ và $f_i(z) = f_j(z)$ không thể đồng thời đúng. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $f_i(x) \neq f_j(x)$. Khi đó $f_i(x) - f_j(x) < 0$

Chứng minh

Do $f_i - f_j = 0$ chỉ có nhiều nhất một nghiệm, $f_i(x) = f_j(x)$ và $f_i(z) = f_j(z)$ không thể đồng thời đúng. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $f_i(x) \neq f_j(x)$. Khi đó $f_i(x) - f_j(x) < 0$

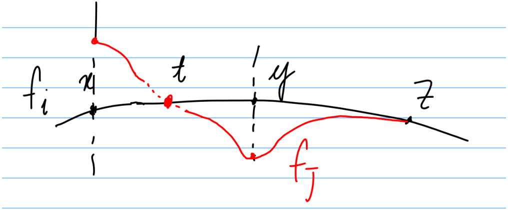




Ta có:

- $f_i(x) - f_j(x) < 0$
- $f_i(y) - f_j(y) > 0$
- f_i, f_j là hai hàm liên tục $\Rightarrow f_i - f_j$ liên tục

Chứng minh



Ta có:

- $f_i(x) - f_j(x) < 0$
- $f_i(y) - f_j(y) > 0$
- f_i, f_j là hai hàm liên tục $\Rightarrow f_i - f_j$ liên tục

Do đó theo định lý giá trị trung gian, ta tìm được $t \in (x, y)$ sao cho $f_i(t) = f_j(t)$

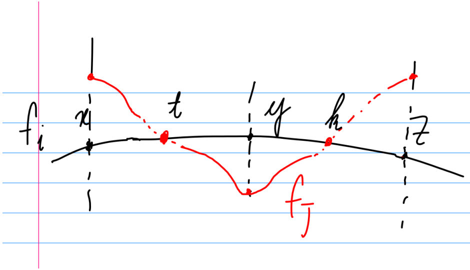
Chứng minh

Chứng minh

Do $f_i - f_j = 0$ chỉ có một nghiệm và ta đã có $f_i(t) - f_j(t) = 0$, $f_i(z) - f_j(z) \neq 0$. Điều này đồng nghĩa với việc $f_i(z) < f_j(z)$.

Chứng minh

Do $f_i - f_j = 0$ chỉ có một nghiệm và ta đã có $f_i(t) - f_j(t) = 0$, $f_i(z) - f_j(z) \neq 0$. Điều này đồng nghĩa với việc $f_i(z) < f_j(z)$.



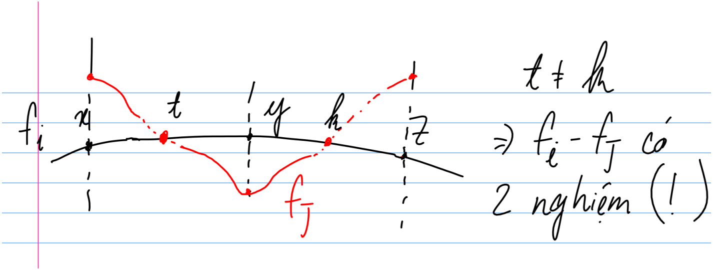
$t \neq h$

$\Rightarrow f_i - f_j$ có

2 nghiệm (!)

Chứng minh

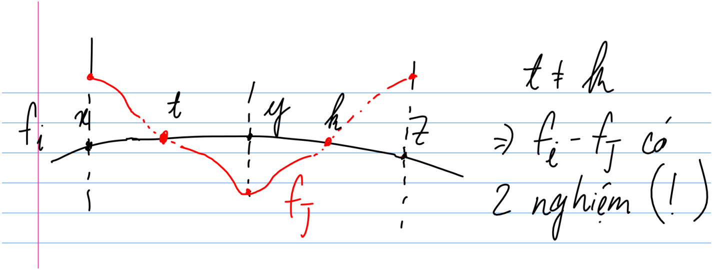
Do $f_i - f_j = 0$ chỉ có một nghiệm và ta đã có $f_i(t) - f_j(t) = 0$, $f_i(z) - f_j(z) \neq 0$. Điều này đồng nghĩa với việc $f_i(z) < f_j(z)$.



Ta có:

- $f_i(y) - f_j(y) > 0$
- $f_i(z) - f_j(z) < 0$
- $f_i - f_j$ là hàm liên tục

Do $f_i - f_j = 0$ chỉ có một nghiệm và ta đã có $f_i(t) - f_j(t) = 0$, $f_i(z) - f_j(z) \neq 0$. Điều này đồng nghĩa với việc $f_i(z) < f_j(z)$.



Ta có:

- $f_i(y) - f_j(y) > 0$
- $f_i(z) - f_j(z) < 0$
- $f_i - f_j$ là hàm liên tục

Do đó theo định lý giá trị trung gian, ta tìm được $k \in (y, z)$ sao cho $f_i(k) = f_j(k)$

Chứng minh

Do $t \in (x, y)$ và $k \in (y, z)$ và $(x, y) \cap (y, z) = \emptyset$, $t \neq k$. Do đó ta tìm được hai nghiệm t và k của $f_i - f_j = 0$ (vô lý). Do đó giả sử ban đầu sai; nói cách khác, $H(y) = f_i(y)$.

Chứng minh

Do $t \in (x, y)$ và $k \in (y, z)$ và $(x, y) \cap (y, z) = \emptyset$, $t \neq k$. Do đó ta tìm được hai nghiệm t và k của $f_i - f_j = 0$ (vô lý). Do đó giả sử ban đầu sai; nói cách khác, $H(y) = f_i(y)$.
Do ta chọn x, y, z bất kì, ta có thể kết luận

$$\forall x, y, z \in [l, r], x < y < z : \begin{cases} H(x) = f_i(x) \\ H(z) = f_i(z) \end{cases} \Rightarrow H(y) = f_i(y)$$

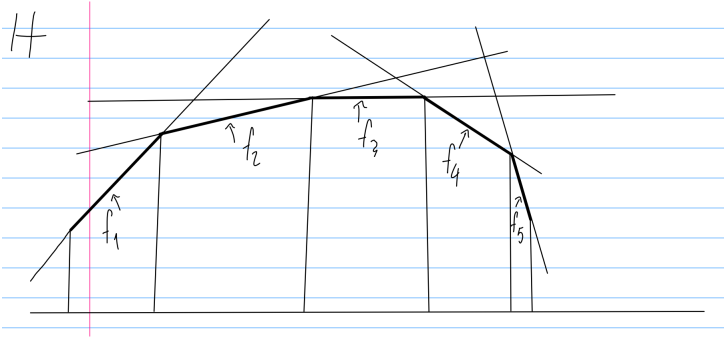
Chứng minh

Do $t \in (x, y)$ và $k \in (y, z)$ và $(x, y) \cap (y, z) = \emptyset$, $t \neq k$. Do đó ta tìm được hai nghiệm t và k của $f_i - f_j = 0$ (vô lý). Do đó giả sử ban đầu sai; nói cách khác, $H(y) = f_i(y)$.
Do ta chọn x, y, z bất kì, ta có thể kết luận

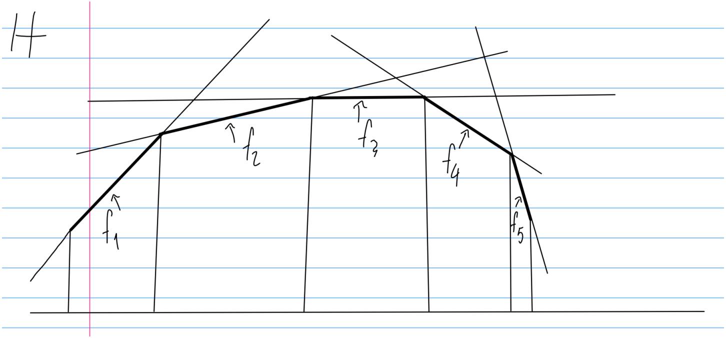
$$\forall x, y, z \in [l, r], x < y < z : \begin{cases} H(x) = f_i(x) \\ H(z) = f_i(z) \end{cases} \Rightarrow H(y) = f_i(y)$$

Đây là điều phải chứng minh.

Hệ quả



Từ tính liên tục, ta biết được mỗi hàm f_i, $H(x) = f_i(x)$ khi và chỉ khi $x \in [l_i, r_i]$ với $[l_i, r_i] \subset [l, r]$ là một khoảng liên tục nào đó.



Từ tính liên tục, ta biết được mỗi hàm f_i, $H(x) = f_i(x)$ khi và chỉ khi $x \in [l_i, r_i]$ với $[l_i, r_i] \subset [l, r]$ là một khoảng liên tục nào đó. Ngoài ra, bằng định lí giá trị trung gian, ta còn có thể chứng minh được thêm là $\forall x \in (l_i, r_i) : \forall j \neq i : f_i(x) < f_j(x)$, và l_i, r_i hoặc bằng l, hoặc bằng r, hoặc bằng hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số nào đó.

Tính lồi của H

Tính lồi của H

Một tính chất quan trọng của H là H là hàm lồi.

Tính lồi của H

Một tính chất quan trọng của H là H là hàm lồi.
Một hàm f là hàm lồi khi nào?

Tính lồi của H

Một tính chất quan trọng của H là H là hàm lồi.
Một hàm f là hàm lồi khi nào?

- $f'' \leq 0$ trên tập xác định của nó.

Tính lồi của H

Một tính chất quan trọng của H là H là hàm lồi.
Một hàm f là hàm lồi khi nào?

- $f'' \leq 0$ trên tập xác định của nó.
- f' là hàm giảm (không chặt).

Tính lồi của H

Một tính chất quan trọng của H là H là hàm lồi.
Một hàm f là hàm lồi khi nào?

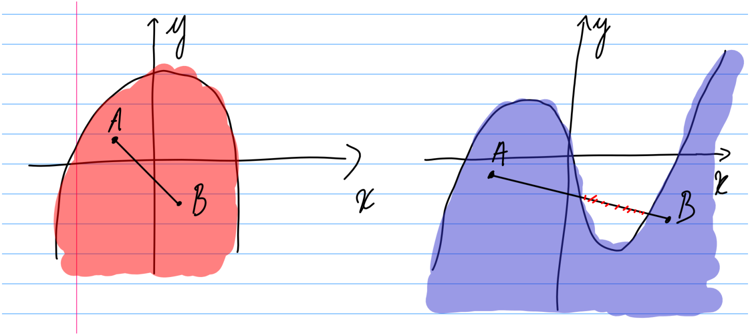
- $f'' \leq 0$ trên tập xác định của nó.
- f' là hàm giảm (không chặt).
- Nửa mặt phẳng nằm dưới đồ thị của f là hình lồi.

Tính lồi của H

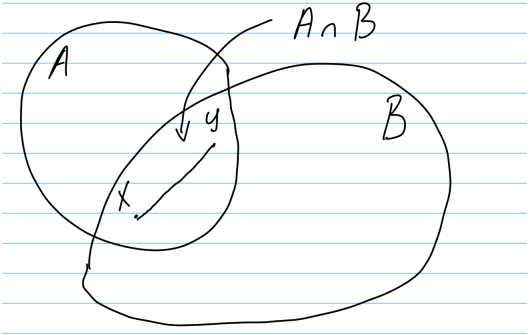
Một tính chất quan trọng của H là H là hàm lồi.
Một hàm f là hàm lồi khi nào?

- $f'' \leq 0$ trên tập xác định của nó.
- f' là hàm giảm (không chặt).
- Nửa mặt phẳng nằm dưới đồ thị của f là hình lồi.
  - Một hình lồi là hình C thỏa mãn tính chất: Với hai điểm bất kì nằm trong hình C, đoạn thẳng nối hai điểm đó cũng nằm trong hình C.

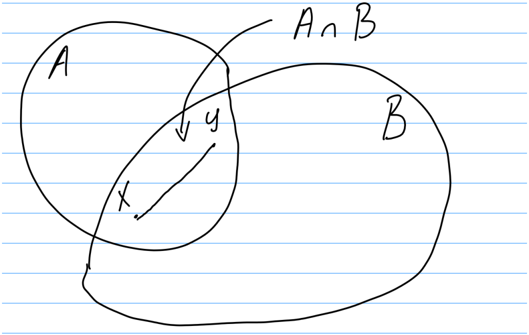
Tính lồi của H



Bổ đề: Giao của hai hình lồi là một hình lồi

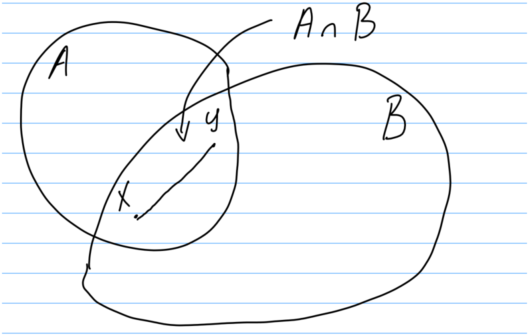


Bổ đề: Giao của hai hình lồi là một hình lồi



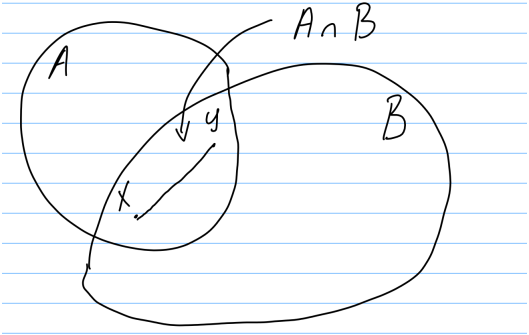
Giả sử A và B là hai hình lồi. Ta cần chứng minh $A \cap B$ là một hình lồi, tức $\forall X, Y \in A \cap B : XY \subset A \cap B$.

Bổ đề: Giao của hai hình lồi là một hình lồi



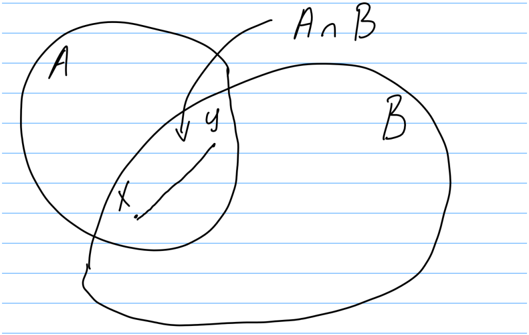
Giả sử A và B là hai hình lồi. Ta cần chứng minh $A \cap B$ là một hình lồi, tức $\forall X, Y \in A \cap B : XY \subset A \cap B$.
Lấy hai điểm $X, Y \in A \cap B$ bất kì.

Bổ đề: Giao của hai hình lồi là một hình lồi

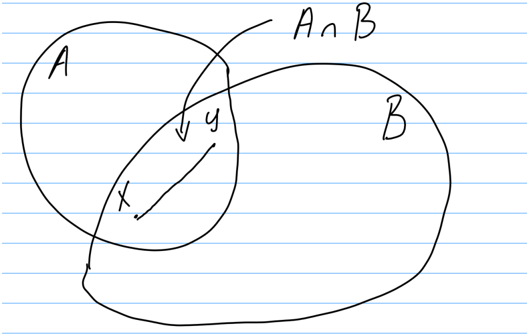


Giả sử A và B là hai hình lồi. Ta cần chứng minh $A \cap B$ là một hình lồi, tức $\forall X, Y \in A \cap B : XY \subset A \cap B$.
Lấy hai điểm $X, Y \in A \cap B$ bất kì.
Khi đó $X, Y \in A$, mà A là hình lồi nên $XY \subset A$.

Bổ đề: Giao của hai hình lồi là một hình lồi



Giả sử A và B là hai hình lồi. Ta cần chứng minh $A \cap B$ là một hình lồi, tức $\forall X, Y \in A \cap B : XY \subset A \cap B$.
Lấy hai điểm $X, Y \in A \cap B$ bất kì.
Khi đó $X, Y \in A$, mà A là hình lồi nên $XY \subset A$.
Tương tự, ta cũng có $XY \subset B$



Giả sử A và B là hai hình lồi. Ta cần chứng minh $A \cap B$ là một hình lồi, tức $\forall X, Y \in A \cap B : XY \subset A \cap B$.
Lấy hai điểm $X, Y \in A \cap B$ bất kì.
Khi đó $X, Y \in A$, mà A là hình lồi nên $XY \subset A$.
Tương tự, ta cũng có $XY \subset B$

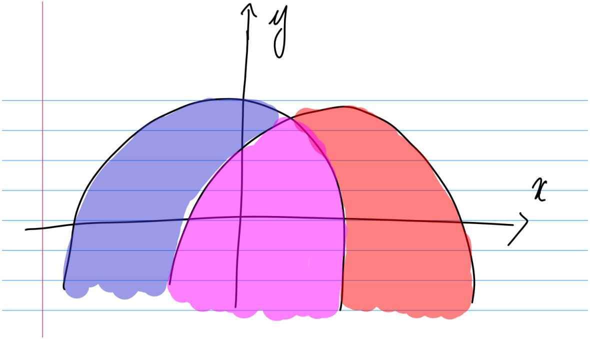
$$\begin{cases} XY \subset A \\ XY \subset B \end{cases} \Rightarrow XY \subset A \cap B$$

Hệ quả

Nếu f, g là hai hàm lồi thì $\min(f, g)$ là một hàm lồi.

Hệ quả

Nếu f, g là hai hàm lồi thì $\min(f, g)$ là một hàm lồi.



Gọi $A(k)$: $(\min_{i=1}^{k} f_i)$ là hàm lồi.
Ta có thể chứng minh $\forall k \in \mathbb{Z}^+ : A(k)$ bằng phương pháp quy nạp

- f_1 là hàm lồi, nên $A(1)$ đúng.
- Giả sử $A(k)$ đúng với một số $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, ta cần chứng minh $A(k+1)$ đúng Gọi:
  - U là nửa mặt phẳng nằm dưới đồ thị hàm số $\min_{i=1}^{k+1} f_i$
  - V là nửa mặt phẳng nằm dưới đồ thị hàm số $\min_{i=1}^{k} f_i$
  - T là nửa mặt phẳng nằm dưới đồ thị hàm số f_{k+1}.

  Dễ dàng chứng minh được $U \cap V = T$
  Do $A(k) \Rightarrow \min_{i=1}^{k} f_i$ là hàm lồi, V là hình lồi.
  Do f_{k+1} là hàm lồi, T là hình lồi.
  Do $U = V \cap T$ và V, T là hai hình lồi, U là hình lồi
  $\Rightarrow \min_{i=1}^{k+1} f_i$ là hàm lồi
  $\Rightarrow A(k+1)$ đúng.

$$\begin{cases} A(1) \\ \forall k \in \mathbb{Z}^+ : A(k) \Rightarrow A(k+1) \end{cases} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}^+ : A(k)$$

Do $n \in \mathbb{Z}^+$, $A(n)$ đúng $\Rightarrow \min_{i=1}^{n} f_i$ là hàm lồi $\Rightarrow H$ là hàm lồi.

Hệ quả

Hệ quả

Do H là hàm lồi, H' làm hàm nghịch biến.

Hệ quả

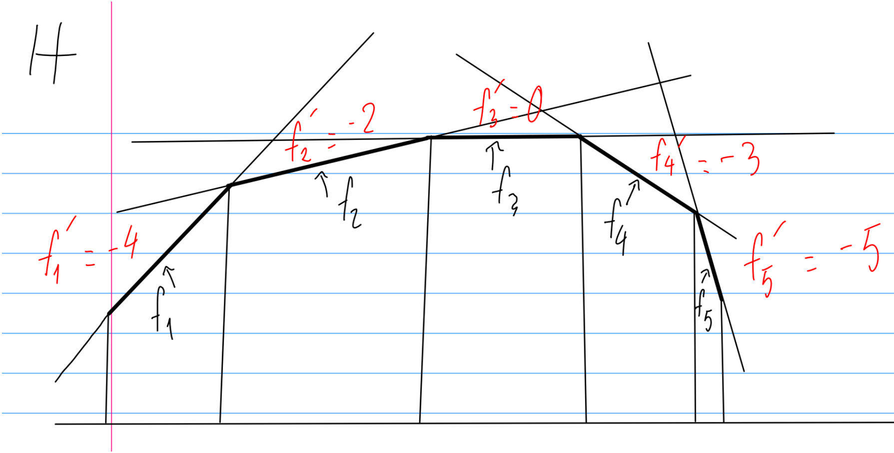
Do H là hàm lồi, H' làm hàm nghịch biến.

Ý nghĩa hình học: Khi ta đi từ trái sang phải thì hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị hàm số H sẽ giảm dần.

Hệ quả

Do H là hàm lồi, H' làm hàm nghịch biến.

Ý nghĩa hình học: Khi ta đi từ trái sang phải thì hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị hàm số H sẽ giảm dần.



Thuật toán: Bước 1

Thuật toán: Bước 1

Sắp xếp lại các hàm f_i theo thứ tự f_i' giảm dần.

Thuật toán: Bước 1

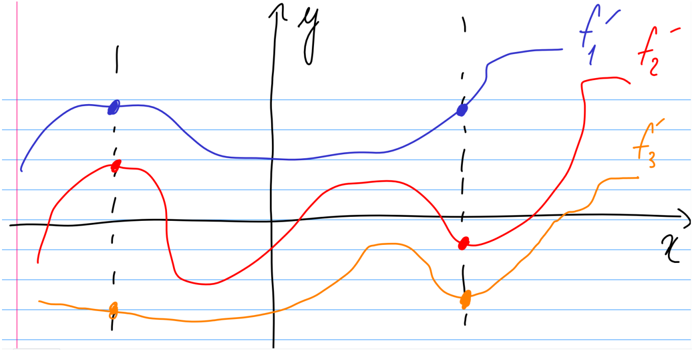
Sắp xếp lại các hàm f_i theo thứ tự f_i' giảm dần.

- Tính chất 4 giúp chúng ta làm điều này.

Thuật toán: Bước 1

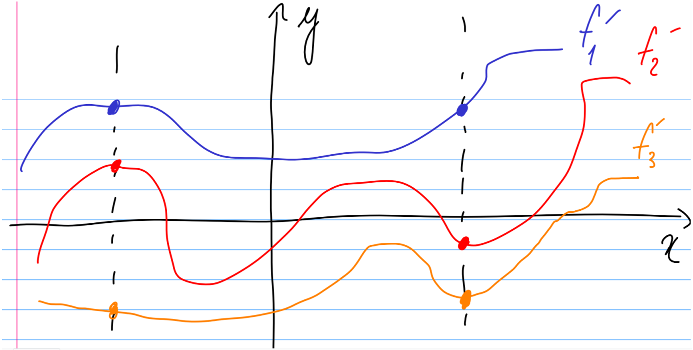
Sắp xếp lại các hàm f_i theo thứ tự f_i' giảm dần.

- Tính chất 4 giúp chúng ta làm điều này.



Sắp xếp lại các hàm f_i theo thứ tự f_i' giảm dần.

- Tính chất 4 giúp chúng ta làm điều này.



- Trong nhiều bài tập, ta có thể chứng minh các hàm f_i đã được sắp xếp sẵn theo thứ tự f_i' giảm dần.

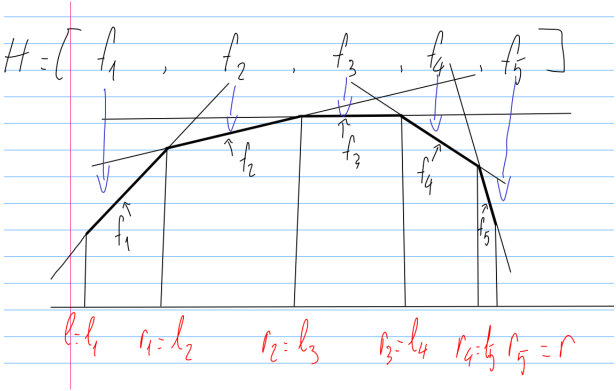
Thuật toán: Bước 2

Thuật toán: Bước 2

Tạo một vector H chứa các hàm số f_i và các đoạn $[l_i, r_i]$ mà hàm số f_i giúp H đạt giá trị nhỏ nhất

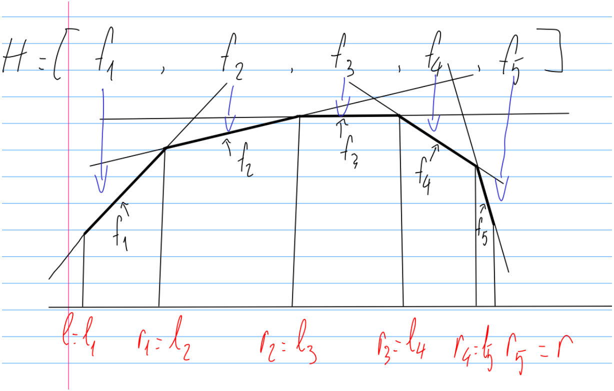
Thuật toán: Bước 2

Tạo một vector H chứa các hàm số f_i và các đoạn $[l_i, r_i]$ mà hàm số f_i giúp H đạt giá trị nhỏ nhất



Thuật toán: Bước 2

Tạo một vector H chứa các hàm số f_i và các đoạn $[l_i, r_i]$ mà hàm số f_i giúp H đạt giá trị nhỏ nhất



- Do l_i, r_i thường là hoành độ giao điểm hai đồ thị của hai hàm số liên tiếp trong H, ta không nhất thiết phải lưu l_i, r_i mà có thể tìm giao điểm hai hàm số khi cần đến hai giá trị này.

Thuật toán: Bước 3

Thuật toán: Bước 3

Với mỗi hàm f_i trong dãy đã sắp xếp, lặp cho đến khi cho f_j được vào H hoặc biết được f_j không cần thiết.

Thuật toán: Bước 3

Với mỗi hàm f_i trong dãy đã sắp xếp, lặp cho đến khi cho f_j được vào H hoặc biết được f_j không cần thiết.

- (Trường hợp 1 hàm số) Nếu H rỗng thì cho f_i vào H. Đoạn mà f_i giúp H đạt giá trị nhỏ nhất là $[l, r]$. **Kết thúc vòng lặp**

Thuật toán: Bước 3

Với mỗi hàm f_i trong dãy đã sắp xếp, lặp cho đến khi cho f_j được vào H hoặc biết được f_j không cần thiết.

- (Trường hợp 1 hàm số) Nếu H rỗng thì cho f_i vào H. Đoạn mà f_i giúp H đạt giá trị nhỏ nhất là $[l, r]$. **Kết thúc vòng lặp**
- Nếu H không rỗng, lấy hàm số cuối cùng của H. Gọi hàm số này là f_j với đoạn tương ứng là $[l_j, r_j]$ (lưu ý: $r_j = r$). Ở đây ta có hai trường hợp.

Bước 3: Trường hợp 1.1

Bước 3: Trường hợp 1.1

Nếu $f_i - f_j = 0$ vô nghiệm thì một trong hai hàm f_i, f_j sẽ luôn nhỏ hơn hàm số kia trên $[l, r]$.

Bước 3: Trường hợp 1.1

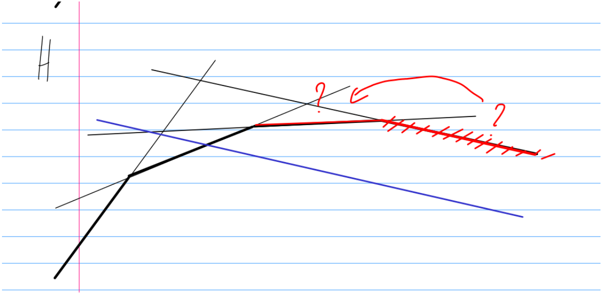
Nếu $f_i - f_j = 0$ vô nghiệm thì một trong hai hàm f_i, f_j sẽ luôn nhỏ hơn hàm số kia trên $[l, r]$.

- Nếu f_i nhỏ hơn f_j thì f_j không cần thiết, bỏ f_j khỏi H và **tiếp tục vòng lặp**.

Bước 3: Trường hợp 1.1

Nếu $f_i - f_j = 0$ vô nghiệm thì một trong hai hàm f_i, f_j sẽ luôn nhỏ hơn hàm số kia trên $[l, r]$.

- Nếu f_i nhỏ hơn f_j thì f_j không cần thiết, bỏ f_j khỏi H và **tiếp tục vòng lặp**.



Bước 3: Trường hợp 1.2

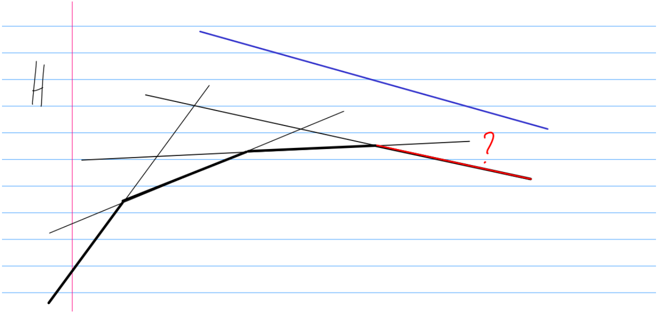
Bước 3: Trường hợp 1.2

Nếu $f_i - f_j = 0$ vô nghiệm thì một trong hai hàm f_i, f_j sẽ luôn nhỏ hơn hàm số kia trên $[l, r]$.

Bước 3: Trường hợp 1.2

Nếu $f_i - f_j = 0$ vô nghiệm thì một trong hai hàm f_i, f_j sẽ luôn nhỏ hơn hàm số kia trên $[l, r]$.

- Nếu f_j nhỏ hơn f_i thì f_i không cần thiết, ta không chèn f_i vào H. **Kết thúc vòng lặp**.



Bước 3: Trường hợp 2.1

Bước 3: Trường hợp 2.1

Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

Bước 3: Trường hợp 2.1

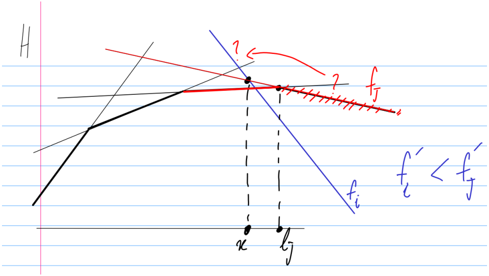
Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

- Giả sử $x \leq l_j$.

Bước 3: Trường hợp 2.1

Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

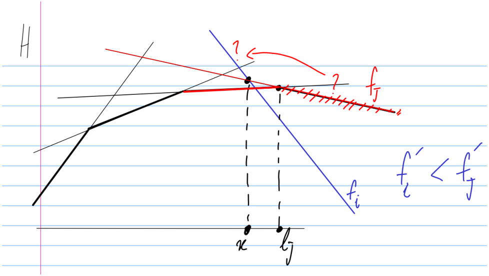
- Giả sử $x \leq l_j$.



Bước 3: Trường hợp 2.1

Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

- Giả sử $x \leq l_j$.

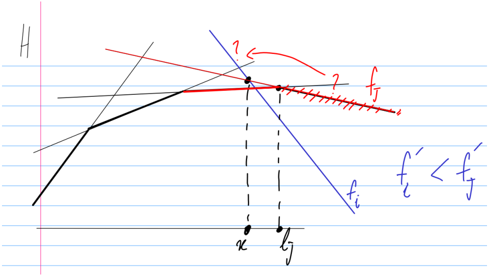


Lấy $y \in [l_j, r]$ bất kì, ta có:

Bước 3: Trường hợp 2.1

Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

- Giả sử $x \leq l_j$.

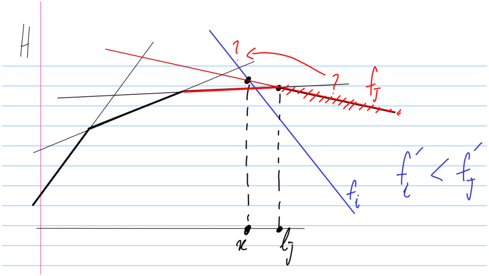


Lấy $y \in [l_j, r]$ bất kì, ta có:
$f_j(y) = f_j(x) + \int_x^y f_j'(t)dt$ và $f_i(y) = f_i(x) + \int_x^y f_i'(t)dt$

Bước 3: Trường hợp 2.1

Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

- Giả sử $x \leq l_j$.

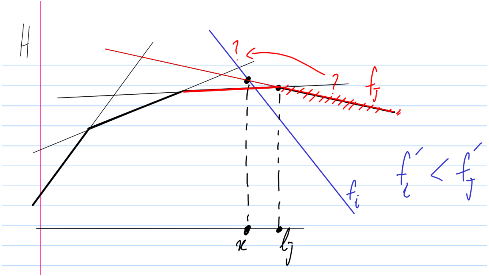


Lấy $y \in [l_j, r]$ bất kì, ta có:
$f_j(y) = f_j(x) + \int_x^y f_j'(t)dt$ và $f_i(y) = f_i(x) + \int_x^y f_i'(t)dt$
$\Rightarrow f_i(y) - f_j(y) = (f_i(x) - f_j(x)) + \int_x^y [f_i'(t) - f_j'(t)]dt \leq 0$ (do $f_i(x) - f_j(x) = 0$ và $f_i'(t) \leq f_j'(t)$)

Bước 3: Trường hợp 2.1

Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

- Giả sử $x \leq l_j$.

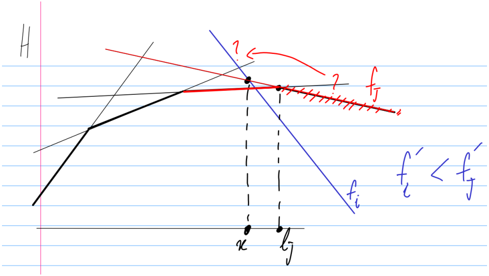


Lấy $y \in [l_j, r]$ bất kì, ta có:
$f_j(y) = f_j(x) + \int_x^y f_j'(t)dt$ và $f_i(y) = f_i(x) + \int_x^y f_i'(t)dt$
$\Rightarrow f_i(y) - f_j(y) = (f_i(x) - f_j(x)) + \int_x^y [f_i'(t) - f_j'(t)]dt \leq 0$ (do $f_i(x) - f_j(x) = 0$ và $f_i'(t) \leq f_j'(t)$)
$\Rightarrow f_i(y) \leq f_j(y)$

Bước 3: Trường hợp 2.1

Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

- Giả sử $x \leq l_j$.



Lấy $y \in [l_j, r]$ bất kì, ta có:
$f_j(y) = f_j(x) + \int_x^y f_j'(t)dt$ và $f_i(y) = f_i(x) + \int_x^y f_i'(t)dt$
$\Rightarrow f_i(y) - f_j(y) = (f_i(x) - f_j(x)) + \int_x^y [f_i'(t) - f_j'(t)]dt \leq 0$ (do $f_i(x) - f_j(x) = 0$ và $f_i'(t) \leq f_j'(t)$)
$\Rightarrow f_i(y) \leq f_j(y)$
Do đó hàm f_j không cần thiết, ta bỏ f_j khỏi H và **tiếp tục vòng lặp**

Bước 3: Trường hợp 2.2

Bước 3: Trường hợp 2.2

Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

Bước 3: Trường hợp 2.2

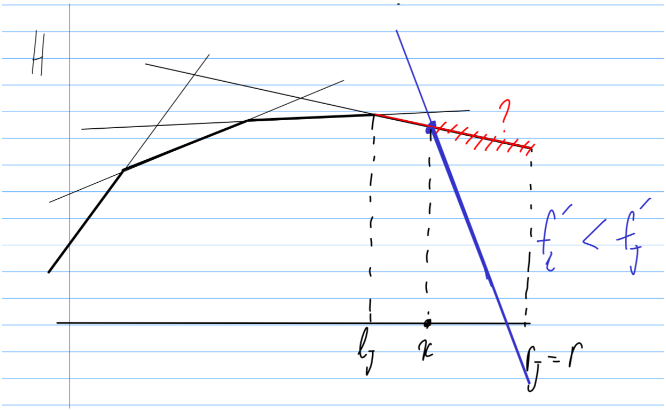
Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

- Giả sử $x > l_j$. Khi đó ta thêm f_j sẽ giúp H đạt giá trị nhỏ nhất tại đoạn $[l_j, x]$, còn f_i sẽ giúp H đạt giá trị nhỏ nhất tại đoạn $[x, r]$. **Kết thúc vòng lặp**

Bước 3: Trường hợp 2.2

Nếu $f_i - f_j = 0$ có nghiệm x thì:

- Giả sử $x > l_j$. Khi đó ta thêm f_j sẽ giúp H đạt giá trị nhỏ nhất tại đoạn $[l_j, x]$, còn f_i sẽ giúp H đạt giá trị nhỏ nhất tại đoạn $[x, r]$. **Kết thúc vòng lặp**



Độ phức tạp

Độ phức tạp

- Do mỗi hàm trong $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ sẽ được cho vào H nhiều nhất một lần và cho ra khỏi H nhiều nhất một lần, độ phức tạp của vòng lặp lồng nhau này là $O(N)$

Độ phức tạp

- Do mỗi hàm trong $\{f_i\}_{i=1}^n$ sẽ được cho vào H nhiều nhất một lần và cho ra khỏi H nhiều nhất một lần, độ phức tạp của vòng lặp lồng nhau này là $O(N)$
- Do các f_i trong H được sắp xếp theo thứ tự f_i' giảm dần và H có tính lồi, các đoạn $[l_i, r_i]$ sẽ tăng dần. Do đó, để tính $H(x)$, ta có thể sử dụng thuật toán tìm kiếm nhị phân để tìm hàm f_i trong H có đoạn $[l_i, r_i]$ chứa x. Thực tế thì thường các giá trị x được truy vấn sẽ tăng dần nên ta có thể dùng thêm một con trỏ để trỏ vào vị trí thích hợp của H để tính $H(x)$ trong thời gian trung bình $O(1)$

Độ phức tạp

- Do mỗi hàm trong $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ sẽ được cho vào H nhiều nhất một lần và cho ra khỏi H nhiều nhất một lần, độ phức tạp của vòng lặp lồng nhau này là $O(N)$
- Do các f_i trong H được sắp xếp theo thứ tự f_i' giảm dần và H có tính lồi, các đoạn $[l_i, r_i]$ sẽ tăng dần. Do đó, để tính $H(x)$, ta có thể sử dụng thuật toán tìm kiếm nhị phân để tìm hàm f_i trong H có đoạn $[l_i, r_i]$ chứa x. Thực tế thì thường các giá trị x được truy vấn sẽ tăng dần nên ta có thể dùng thêm một con trỏ để trỏ vào vị trí thích hợp của H để tính $H(x)$ trong thời gian trung bình $O(1)$
- Đây là một thuật toán tuần tự, vì thế nếu ta chỉ quan tâm đến j hàm đầu tiên như trong bài toán Quy hoạch động thì ta có thể dùng H trong lúc đang xây dựng.

Quay lại bài toán mở đầu

Quay lại bài toán mở đầu

$$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$$

Quay lại bài toán mở đầu

$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$
Mỗi lần tính xong $dp(i-1)$, ta lại cho thêm hàm f_{i-1} vào H để có $H(x) = \min_{j=0}^{i-1} f_j(x)$. Sau đó, để tính $dp(i)$, ta tính $H(x_i) = \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$

Quay lại bài toán mở đầu

$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$
Mỗi lần tính xong $dp(i-1)$, ta lại cho thêm hàm f_{i-1} vào H để có $H(x) = \min_{j=0}^{i-1} f_j(x)$. Sau đó, để tính $dp(i)$, ta tính $H(x_i) = \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$

- Khi j tăng, x_{j+1} tăng, dẫn đến $-2x_{j+1}$ giảm $\Rightarrow f_j'$ giảm khi j tăng $\Rightarrow$ mỗi lần thêm hàm f_j vào H, ta chỉ cần xét vị trí cuối $\Rightarrow$ độ phức tạp trung bình mỗi lần thêm một hàm là $O(1)$

Quay lại bài toán mở đầu

$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$
Mỗi lần tính xong $dp(i-1)$, ta lại cho thêm hàm f_{i-1} vào H để có $H(x) = \min_{j=0}^{i-1} f_j(x)$. Sau đó, để tính $dp(i)$, ta tính $H(x_i) = \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$

- Khi j tăng, x_{j+1} tăng, dẫn đến $-2x_{j+1}$ giảm $\Rightarrow f_j'$ giảm khi j tăng $\Rightarrow$ mỗi lần thêm hàm f_j vào H, ta chỉ cần xét vị trí cuối $\Rightarrow$ độ phức tạp trung bình mỗi lần thêm một hàm là $O(1)$
- Các điểm truy vấn là $x_1, x_2, ..., x_n$ tăng dần. Vì vậy, ta có thể dùng một con trỏ chỉ đoạn ta đang "quan tâm" trong H để tìm $H(x_i)$ trong thời gian trung bình $O(1)$

Quay lại bài toán mở đầu

$dp(i) = x_i^2 + c + \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$
Mỗi lần tính xong $dp(i-1)$, ta lại cho thêm hàm f_{i-1} vào H để có $H(x) = \min_{j=0}^{i-1} f_j(x)$. Sau đó, để tính $dp(i)$, ta tính
$H(x_i) = \min_{j=0}^{i-1} f_j(x_i)$

- Khi j tăng, x_{j+1} tăng, dẫn đến $-2x_{j+1}$ giảm $\Rightarrow f_j'$ giảm khi j tăng $\Rightarrow$ mỗi lần thêm hàm f_j vào H, ta chỉ cần xét vị trí cuối $\Rightarrow$ độ phức tạp trung bình mỗi lần thêm một hàm là $O(1)$
- Các điểm truy vấn là $x_1, x_2, ..., x_n$ tăng dần. Vì vậy, ta có thể dùng một con trỏ chỉ đoạn ta đang "quan tâm" trong H để tìm $H(x_i)$ trong thời gian trung bình $O(1)$

Vì vậy ta giảm được độ phức tạp tính toán từ $O(n^2)$ xuống $O(n)$

Lưu ý:

- Nếu các hàm f là các đường thẳng có tọa độ nguyên thì ta cần tránh dùng số thực để tính toán bằng cách sử dụng tính chất
  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$ khi $b, d > 0$

Lưu ý:

- Nếu các hàm f là các đường thẳng có tọa độ nguyên thì ta cần tránh dùng số thực để tính toán bằng cách sử dụng tính chất
  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$ khi $b, d > 0$
- Thay vì dùng hai con trỏ (con trỏ đầu và con trỏ cuối), ta nên sử dụng cấu trúc dữ liệu `deque` để đỡ phải cập nhật con trỏ và hạn chế lỗi sai khi lập trình.

Một số bài tập

Một số bài tập

- Giải phiên bản khó của bài toán mở đầu, bao gồm chứng minh f_i thỏa mãn 4 tính chất.

Một số bài tập

- Giải phiên bản khó của bài toán mở đầu, bao gồm chứng minh f_i thỏa mãn 4 tính chất.
- Không dùng kiến thức giải tích, chứng minh lại các tính chất của H khi các hàm là hàm bậc nhất một ẩn.

Một số bài tập

- Giải phiên bản khó của bài toán mở đầu, bao gồm chứng minh f_i thỏa mãn 4 tính chất.
- Không dùng kiến thức giải tích, chứng minh lại các tính chất của H khi các hàm là hàm bậc nhất một ẩn.
- Tìm cách nới lỏng một số điều kiện để dùng bao lồi (ví dụ: thay vì các hàm đều cùng phải xác định trên $[l, r]$, tìm cách dùng bao lồi khi chỉ các hàm trong bao lồi xác định tại điểm cần truy vấn còn các hàm ngoài bao lồi thì không)

Một số bài tập

- Giải phiên bản khó của bài toán mở đầu, bao gồm chứng minh f_i thỏa mãn 4 tính chất.
- Không dùng kiến thức giải tích, chứng minh lại các tính chất của H khi các hàm là hàm bậc nhất một ẩn.
- Tìm cách nới lỏng một số điều kiện để dùng bao lồi (ví dụ: thay vì các hàm đều cùng phải xác định trên $[l, r]$, tìm cách dùng bao lồi khi chỉ các hàm trong bao lồi xác định tại điểm cần truy vấn còn các hàm ngoài bao lồi thì không)
- Ta có thể bỏ tính chất 4 được không?

Một số bài tập

- Giải phiên bản khó của bài toán mở đầu, bao gồm chứng minh f_i thỏa mãn 4 tính chất.
- Không dùng kiến thức giải tích, chứng minh lại các tính chất của H khi các hàm là hàm bậc nhất một ẩn.
- Tìm cách nới lỏng một số điều kiện để dùng bao lồi (ví dụ: thay vì các hàm đều cùng phải xác định trên $[l, r]$, tìm cách dùng bao lồi khi chỉ các hàm trong bao lồi xác định tại điểm cần truy vấn còn các hàm ngoài bao lồi thì không)
- Ta có thể bỏ tính chất 4 được không?
- Tìm hiểu về cây Li-Chao (hay còn gọi là cây IT trên tập đoạn thẳng). Xác định các bài toán mà cấu trúc dữ liệu bao lồi giải quyết được mà cây Li-Chao không giải quyết được và ngược lại.

Một số bài tập

- Giải phiên bản khó của bài toán mở đầu, bao gồm chứng minh f_i thỏa mãn 4 tính chất.
- Không dùng kiến thức giải tích, chứng minh lại các tính chất của H khi các hàm là hàm bậc nhất một ẩn.
- Tìm cách nới lỏng một số điều kiện để dùng bao lồi (ví dụ: thay vì các hàm đều cùng phải xác định trên $[l, r]$, tìm cách dùng bao lồi khi chỉ các hàm trong bao lồi xác định tại điểm cần truy vấn còn các hàm ngoài bao lồi thì không)
- Ta có thể bỏ tính chất 4 được không?
- Tìm hiểu về cây Li-Chao (hay còn gọi là cây IT trên tập đoạn thẳng). Xác định các bài toán mà cấu trúc dữ liệu bao lồi giải quyết được mà cây Li-Chao không giải quyết được và ngược lại.
- Sửa đổi lại thuật toán để giải quyết trường hợp f_i' không tăng dần hay giảm dần (`LineContainer` trong KACTL)

Tài liệu tham khảo

1. Convex Hull Trick viết bởi Andi Qu.
https://usaco.guide/plat/convex-hull-trick
2. Bài giảng về Convex Hull Optimization của Algorithms Live!
https://www.youtube.com/watch?v=OrH2ah4ylv4
3. Convex Hull Trick viết bởi meooow.
https://codeforces.com/blog/entry/63823
4. Kĩ thuật Bao lồi trên wcipeg. Bản dịch của Phan Minh Hoàng và Lê Anh Đức.
https://vnoi.info/wiki/translate/wcipeg/Convex-Hull-Trick.md