ĐỀ THI

Ngân hàng câu hỏi của trường SuperKids có 10^9 bài toán đánh số từ 1 tới 10^9, bài toán thứ i có độ khó là i. Giáo sư X muốn chọn k bài toán khác nhau trong số đó để làm một đề thi sao cho tổng độ khó của các bài toán được chọn đúng bằng n. Hãy cho biết giáo sư X có bao nhiêu cách chọn.

(Hai cách chọn được gọi là khác nhau nếu có một bài toán được chọn trong một cách nhưng không được chọn trong cách còn lại)

Dữ liệu: Vào từ file văn bản TASKSELECT.INP gồm một dòng chứa hai số nguyên dương k, n ($k \leq 10; n \leq 10^9$)

Kết quả: Ghi ra file văn bản TASKSELECT.OUT một số nguyên duy nhất là số dư của kết quả tìm được khi chia cho 1000000007 ($10^9 + 7$)

Ví dụ:

TASKSELECT.INP	TASKELECT.OUT	Giải thích
3 10	4	1 + 2 + 7 = 10 1 + 3 + 6 = 10 1 + 4 + 5 = 10 2 + 3 + 5 = 10

Thuật toán

Bài toán quy về đếm số dãy $a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$

Đáp số chính là số nghiệm nguyên dương của phương trình:

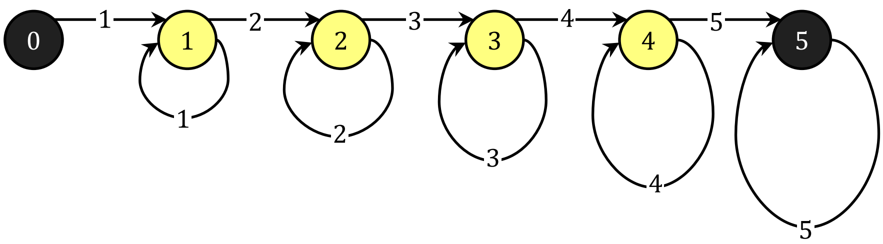
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + kx_k = n$$

(Thật vậy, ta chỉ cần đặt $a_i = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_k$ $(1 \leq i \leq k)$ là được dãy A giảm ngặt có tổng bằng n)

Để đơn giản, ta lấy ví dụ cụ thể với $k = 5$. Phương trình:

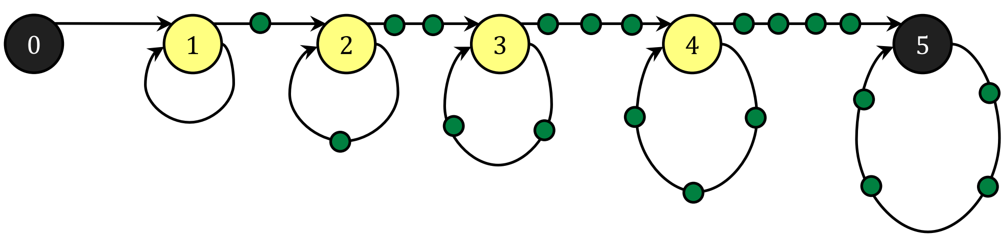
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = n$$

Xây dựng đồ thị có hướng có trọng số: Các đỉnh đánh số từ 0 tới k, đỉnh $i - 1$ nối với đỉnh i bằng cung trọng số i, đỉnh i có khuyên nối tới chính nó với trọng số cũng là i $(1 \leq i \leq k)$



Nhận xét: Một đường đi có trọng số n từ đỉnh 0 tới đỉnh k cho tương ứng với một nghiệm và ngược lại (x_i khi đó bằng số lần đi qua khuyên i cộng thêm 1)

Bây giờ trên mỗi cung trọng số w, ta "chấm" thêm $w - 1$ đỉnh trên cung để chia cung đó thành các "khúc" trọng số đơn vị. Đồ thị sẽ có thêm $k \times (k - 1)$ đỉnh nữa nhưng coi như không còn trọng số (trọng số tính bằng số cung)



Gọi A là ma trận kề của đồ thị: $A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{nếu } (i, j) \text{ là cạnh} \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$

Xét ma trận A^n (tích của n ma trận A), ta biết rằng $A^n[i][j]$ sẽ là số đường đi từ i tới j qua đúng n cung.

Đáp số là $A^n[0][k]$.

A^n có thể tính bằng chia để trị với độ phức tạp $\mathrm{O}(\log n \times \text{chi phí nhân ma trận})$. Cài thông thường thì là $\mathrm{O}(\log n \times k^6)$