

BÀI GIẢNG  
VẬT LÝ ĐẠI CƯƠNG 1 (Cơ và Nhiệt)

HUỲNH TRÚC PHƯƠNG

Email: [htphuong.oarai@gmail.com](mailto:htphuong.oarai@gmail.com)

## CHƯƠNG 4

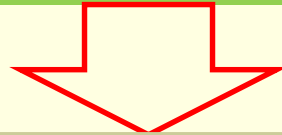
# CƠ HỌC VẬT RẮN

- 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn
- 4.2. Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục
- 4.3. Mômen quán tính của vài vật rắn cơ bản
- 4.4. Động năng của vật rắn quay quanh trục cố định
- 4.5. Định luật bảo toàn momen động lượng của vật rắn quay



## 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

Vật rắn là một hệ chất điểm mà *khoảng cách* giữa các chất điểm *luôn giữ không đổi* trong quá trình chuyển động.

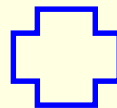


Có thể áp dụng các quy luật chuyển động của hệ chất điểm vào chuyển động của vật rắn!!!

**Chuyển động của vật rắn**



**Chuyển động tịnh tiến**

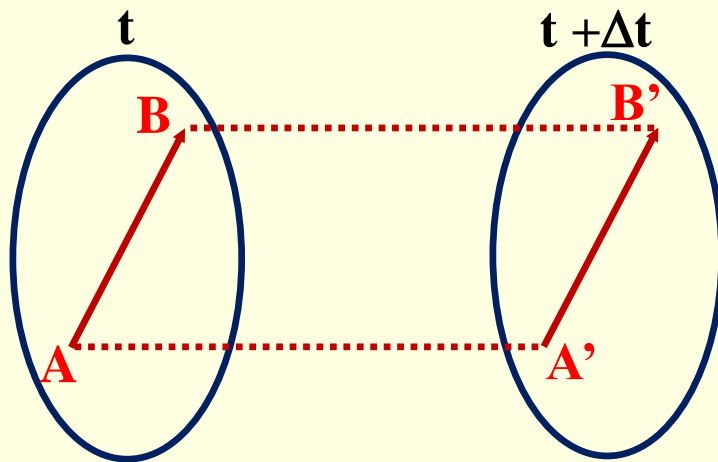


**Chuyển động quay**

# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

## 4.1.1. Chuyển động tịnh tiến

1. Định nghĩa: Chuyển động tịnh tiến là chuyển động mà trong đó đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của vật rắn luôn song song với chính nó.



# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

## 4.1.1. Chuyển động tịnh tiến

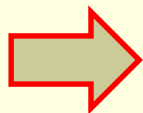
### 2. Đặc điểm:

- Cho một vật rắn chuyển động trong hệ qui chiếu quán tính Oxyz. Xét điểm A, B trên vật rắn:

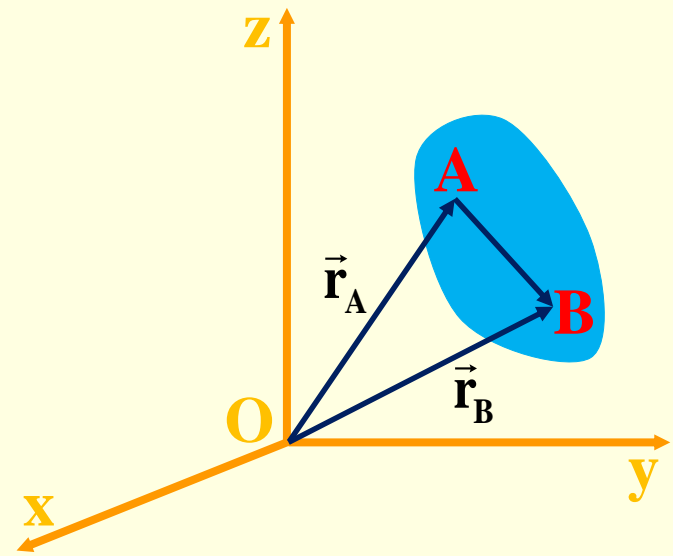
$$\vec{r}_A + \vec{AB} = \vec{r}_B$$

- Lấy đạo hàm hai vế biểu thức trên:

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$$



$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \dots$$



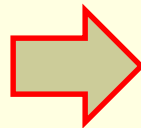
# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

## 4.1.1. Chuyển động tịnh tiến

### 2. Đặc điểm:

□ Tiếp tục lấy đạo hàm vận tốc theo thời gian:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \dots$$



$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \dots$$

**Vậy: khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, mọi chất điểm của vật rắn có cùng véctor vận tốc và cùng véctor gia tốc.**

# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

## 4.1.1. Chuyển động tịnh tiến

### 3. Khối tâm của vật rắn:

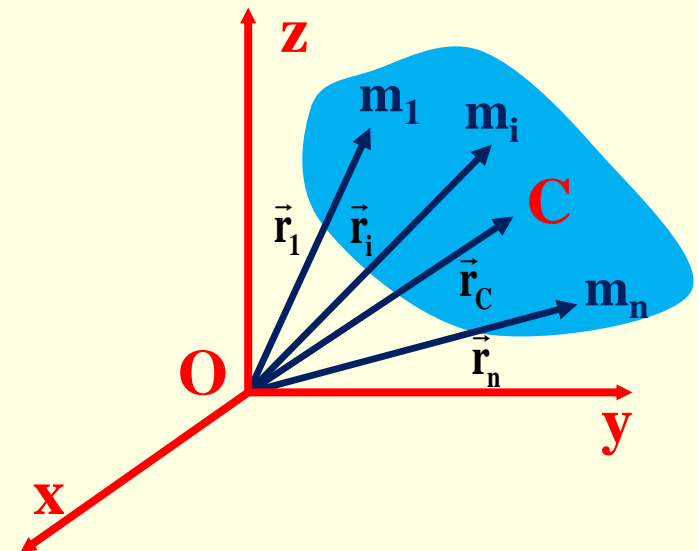
a) Định nghĩa: C được gọi là khối tâm của vật rắn nếu vị trí của C thỏa công thức:

□ Phân bố rời rạc:

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

□ Phân bố liên tục:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} dm$$



# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

## 4.1.1. Chuyển động tịnh tiến

### 3. Khối tâm của vật rắn:

**Ví dụ 4.1:** Một hệ gồm 3 chất điểm được đặt trong mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ. Xác định vị trí khối tâm của hệ. Biết  $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$  và  $m_3 = 2\text{kg}$ .

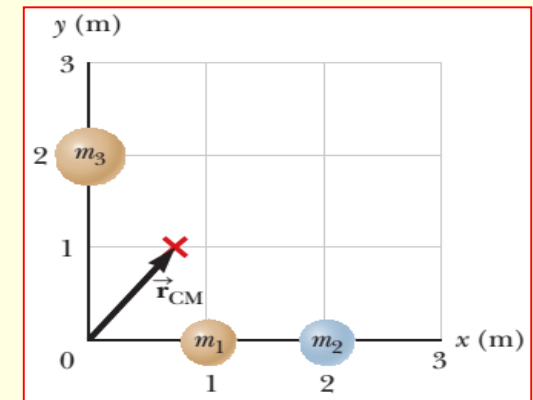
**Bài giải:**

$$\vec{r}_C = (r_x \vec{i} + r_y \vec{j})$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) \vec{i} + (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) \vec{j} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left( (1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 0) \vec{i} + (1 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 2) \vec{j} \right)$$

$$= 0,75 \vec{i} + 1,0 \vec{j}$$





# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

## 4.1.1. Chuyển động tịnh tiến

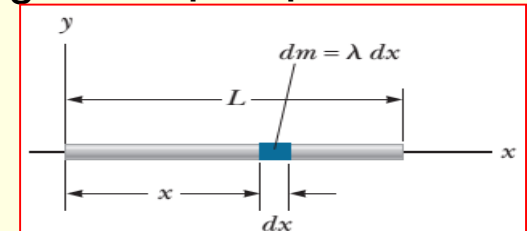
### 3. Khối tâm của vật rắn:

**Ví dụ 4.2:** (A) Chứng minh rằng khối tâm của thanh khối lượng  $M$  dài  $L$  nằm chính giữa thanh. Giả sử thanh phân bố đều khối lượng trên mỗi đơn vị chiều dài.

(B) Giả sử thanh phân bố khối lượng không đều và khối lượng trên mỗi đơn vị dài phụ thuộc  $x$  như sau:  $\lambda = ax$ ,  $a$  hằng số dương. Tìm tọa độ khối tâm theo  $L$ .

#### Bài giải

- ❖ Gọi  $\lambda$  là mật độ khối lượng trên mỗi đơn vị chiều dài



$$\lambda = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \lambda dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^M dm = \int_0^L \lambda dx \Rightarrow M = \lambda L$$

Vị trí khối tâm: 
$$r_C = \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L \lambda x dx = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{L}{2}$$

# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

## 4.1.1. Chuyển động tịnh tiến

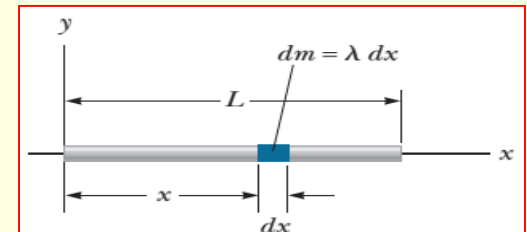
### 3. Khối tâm của vật rắn:

(B) Giả sử thanh phân bố khối lượng không đều và khối lượng trên mỗi đơn vị dài phụ thuộc  $x$  như sau:  $\lambda = ax$ ,  $a$  hằng số dương. Tìm tọa độ khối tâm theo  $L$ .

#### Bài giải

Vị trí khối tâm:

$$r_C = \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L \lambda x dx = \frac{a}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{aL^3}{3M}$$



# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

## 4.1.1. Chuyển động tịnh tiến

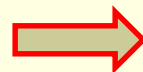
b) Đặc điểm của khối tâm:

❖ Vận tốc khối tâm

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

➡ Động lượng vật rắn:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$



$$\vec{P} = M\vec{v}_C$$

❖ Gia tốc khối tâm

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

➡ Lực tổng hợp tác dụng lên vật rắn:

$$\vec{F} = M\vec{a}_C$$

## 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

### Kết luận

- ❑ *Chuyển động tịnh tiến của vật rắn tương đương với chuyển động của khối tâm của nó, với khối lượng bằng khối lượng của vật rắn và ngoại lực bằng hợp lực tác dụng lên vật rắn.*
- ❑ *Có thể xem bài toán chuyển động tịnh tiến của vật rắn như bài toán chuyển động của một chất điểm đặt tại khối tâm và có khối lượng bằng khối lượng của vật rắn.*

# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

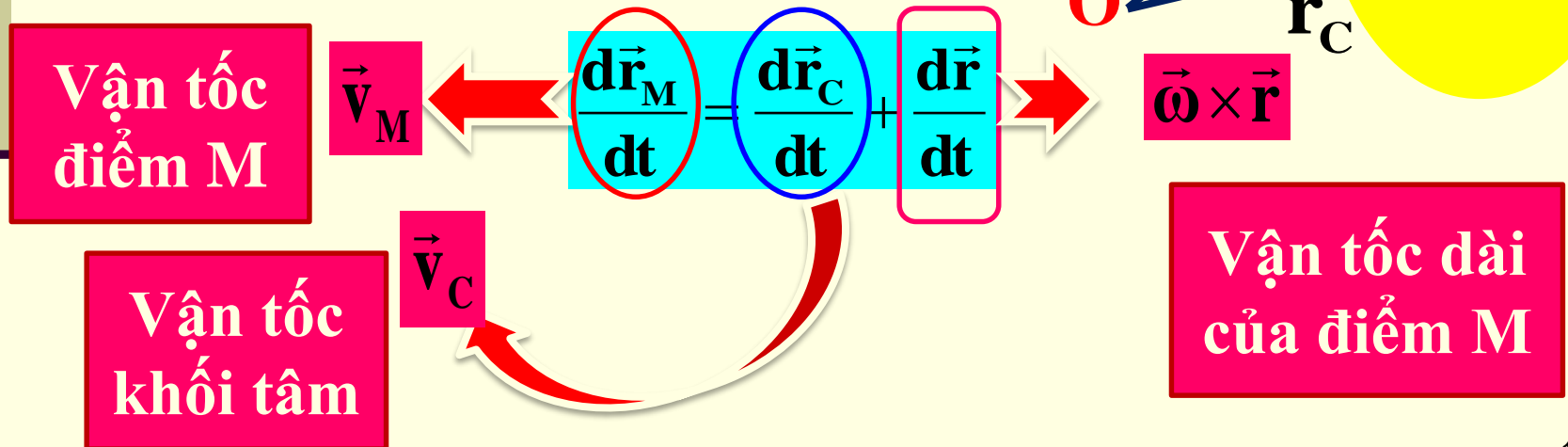
## 4.1.2. Chuyển động tổng quát của vật rắn

❖ Xét chuyển động song phẳng bất kỳ của vật rắn.

Theo tắc cộng vector:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_C + \vec{r}$$

Lấy đạo hàm theo thời gian của biểu thức trên:



## 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

### 4.1.2. Chuyển động tổng quát của vật rắn

**Vận tốc của điểm M trong chuyển động song phẳng bất kì.**

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

#### Ý nghĩa

Chuyển động song phẳng bất kỳ của vật rắn bao giờ cũng có thể phân thành hai chuyển động thành phần:

- *Chuyển động tịnh tiến của khối tâm của vật rắn.*
- *Chuyển động quay của vật rắn quanh trục quay đi qua khối tâm.*

# 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

## 4.1.3. Chuyển động quay quanh trục của vật rắn

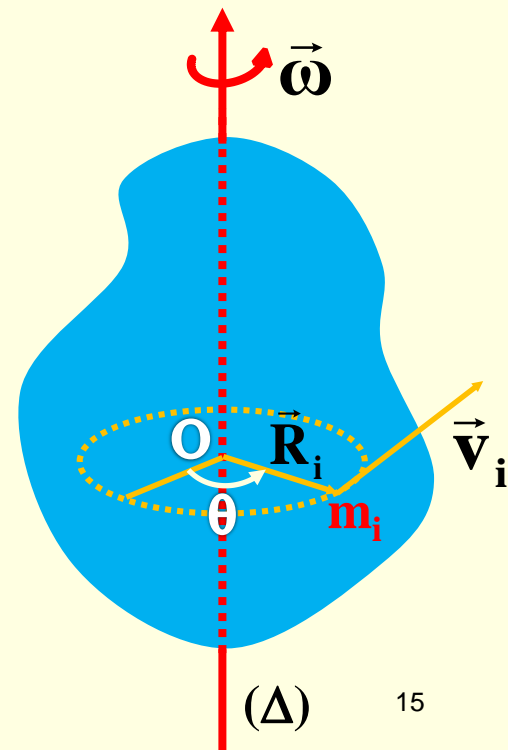
**Định nghĩa:** Là chuyển động mà các chất điểm của vật rắn có quỹ đạo là những vòng tròn tâm nằm trên trục quay và bán kính bằng khoảng cách từ chất điểm đến trục quay.

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_n$$

❖ Với trục quay cố định

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3 = \dots = \vec{\omega}_n$$

$$\vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2 = \vec{\beta}_3 = \dots = \vec{\beta}_n$$



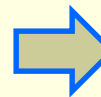
## 4.1. Các dạng chuyển động của vật rắn

### 4.1.3. Chuyển động quay quanh trục của vật rắn

❖ Vận tốc dài và gia tốc tiếp tuyến



$$v_i = R_i \omega_i = R_i \omega$$



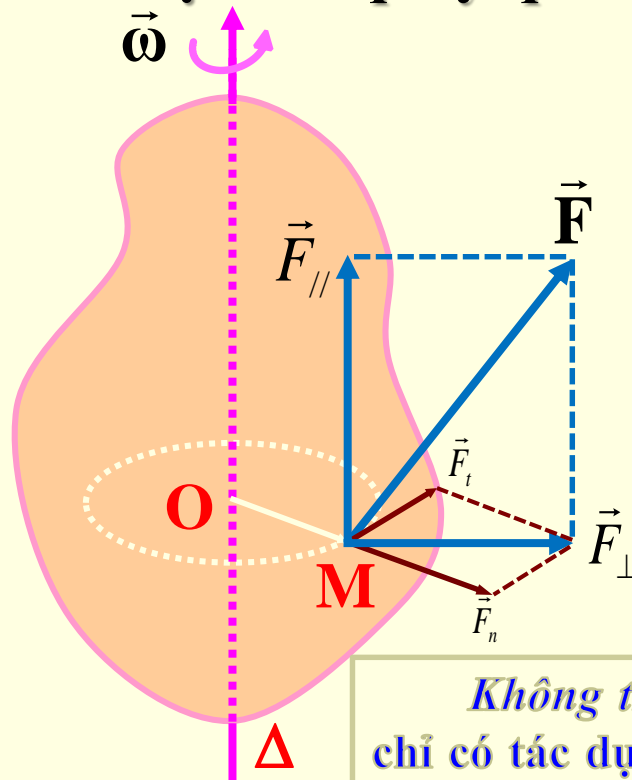
$$a_{\tau i} = R_i \beta_i = R_i \beta$$

❖ **Vậy:** khi quay chất điểm nào càng xa trục thì vận tốc dài và gia tốc tiếp tuyến càng lớn, chất điểm nằm trên trục thì vận tốc dài và gia tốc tiếp tuyến bằng không.



## 4.2. Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục cố định

Xét vật rắn quay quanh trục dưới tác dụng của lực  $\vec{F}$ .



Có tác dụng làm vật rắn quay!!!

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_t + \vec{F}_n$$

*Không thể làm vật rắn quay, chỉ có tác dụng làm vật rắn trượt dọc theo trục quay, (không thể có vì theo giả thiết vật rắn chỉ quay quanh trục quay).*

*Không thể làm vật rắn quay, chỉ có tác dụng dời vật rắn khỏi trục quay (cũng không thể có).*

## 4.2. Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục cố định

### 4.2.1. Mômen động lượng của vật rắn quay

➤ Mômen động lượng của chất điểm thứ  $i$  đối với trục quay:

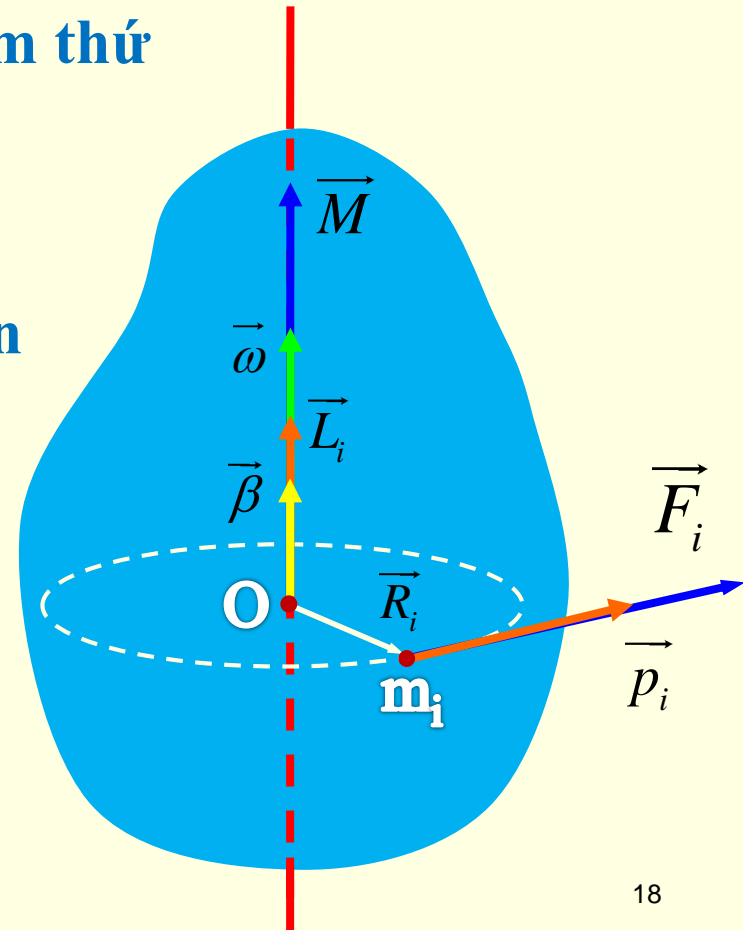
$$\vec{L}_i = \vec{R}_i \times \vec{p}_i$$

➤ Mômen động lượng của vật rắn đối với trục quay:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \times \vec{p}_i$$

➤ Độ lớn:

$$L = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega_i = \left( \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \right) \omega = I \omega$$



## 4.2. Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục cố định

### 4.2.1. Mômen động lượng của vật rắn quay

Vậy:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

**Mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay**

➤ Công thức:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

➤ Ý nghĩa: là đại lượng vật lý đặc trưng cho mức quán tính của các vật thể trong chuyển động quay, tương tự khối lượng trong chuyển động thẳng.

## 4.2. Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục cố định

### 4.2.2. Vector mômen lực đối với trục quay

Véctơ mômen lực đối với trục quay tác dụng lên vật rắn:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \times \vec{F}_i$$

- Độ lớn:  $M_i = R_i F_i$
- Hướng: theo trục quay.

□ Định luật biến thiên mômen động lượng:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

**Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục cố định**

$$\vec{M} = I\vec{\beta}$$

## 4.2. Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục cố định

**Ví dụ 4.3:** Một lực  $F_T = 15 \text{ N}$  tác động vào sợi dây mắc qua ròng rọc khối lượng  $M = 4 \text{ kg}$ , bán kính  $R = 33 \text{ cm}$  (hình vẽ). Ròng rọc được gia tốc với tốc độ  $30 \text{ rad/s}$  trong  $3 \text{ s}$ . Mômen lực ma sát tại trục quay của ròng rọc là  $M_{ms} = 1.1 \text{ m.N}$ . Xác định mômen quán tính của ròng rọc.

### Bài giải:

❖ Gia tốc góc của ròng rọc:  $\beta = \frac{\omega}{t} = \frac{30}{3} = 10 (\text{rad/s}^2)$

❖ Mômen của các ngoại lực:

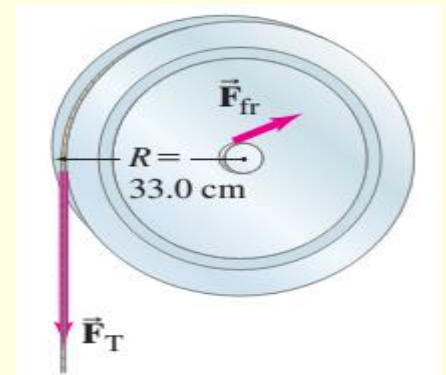
$$M = M_T - M_{ms} = F_T R - M_{ms} = 15 \times 0,33 - 1,1 = 3,85 (\text{m.N})$$

❖ Từ phương trình cơ bản:  $M = I\beta$



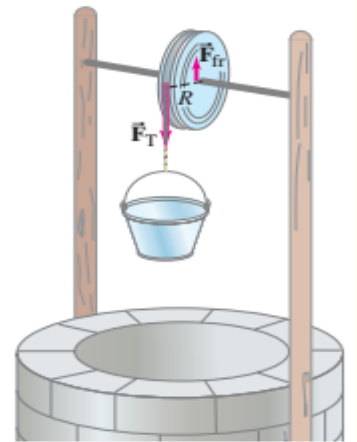
Mô men quán tính:

$$I = \frac{M}{\beta} = \frac{3,85}{10} = 0,385 (\text{kg.m}^2)$$



## 4.2. Phương trình cơ bản của vật rắn quay quanh trục cố định

**Ví dụ 4.4:** Xét lại ví dụ 4.3. Thay vì tác dụng 1 lực  $F_T$  lên dây, bây giờ ta treo một thùng nước có trọng lượng  $P = 15 \text{ N}$  vào sợi dây. Bỏ qua khối lượng của dây và dây không trượt trên ròng rọc. Tính gia tốc góc  $\beta$  của ròng rọc và gia tốc tuyến tính  $a$  của thùng nước. Giả sử mômen lực ma sát tác dụng lên trục  $M_{ms} = 1.1 \text{ m.N}$



**Bài giải:**

❖ Gia tốc góc của ròng rọc:  $M = T.R - M_{ms} = I\beta = I \cdot \frac{a}{R} \quad (1)$

❖ Áp dụng định luật II Newton cho thùng nước:  $P - T = ma = \frac{P}{g} a$

➡  $T = P - \frac{P}{g} a$  Thay vào (1)

$$a = \frac{PR - M_{ms}}{PR/g + I/R} = \frac{15 \times 0,33 - 1,1}{15 \times 0,33/9,8 - 0,385/0,33} = 2,3 (\text{m/s}^2)$$

$$\beta = \frac{a}{R} = \frac{2,3}{0,33} = 6,98 (\text{rad/s}^2)$$

## 4.3. Mô men quán tính của một số vật rắn đơn giản

### 4.3.1. Công thức

- Vật rắn gồm các chất điểm phân bố rời rạc:

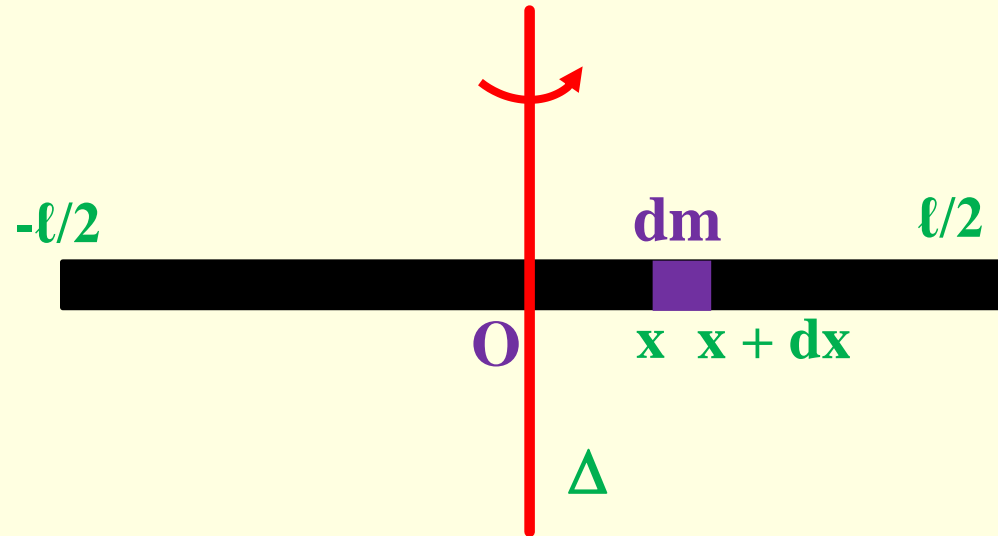
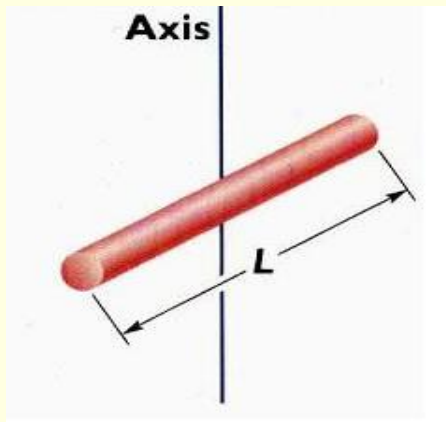
$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

- Khi vật rắn gồm các chất điểm phân bố liên tục:

$$I = \int_m R^2 dm$$

## 4.3. Mômen quán tính của một số vật rắn đơn giản

### 1. Mômen quán tính $I$ của thanh đồng chất có trục quay vuông góc với thanh tại trung điểm

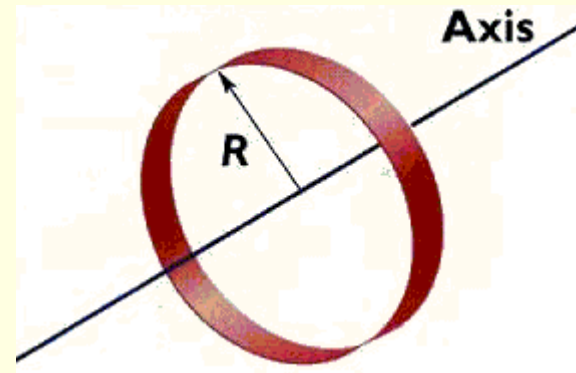
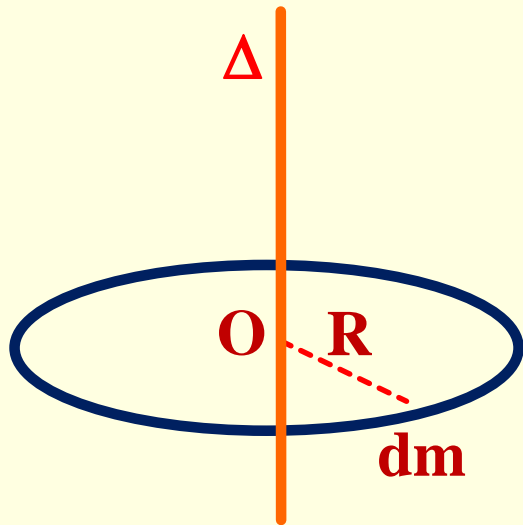


$$I = \frac{1}{12} m \ell^2$$



## 4.3. Mômen quán tính của một số vật rắn đơn giản

**2. Mômen quán tính  $I$  của vòng tròn đối với trục quay là trục của vòng tròn**

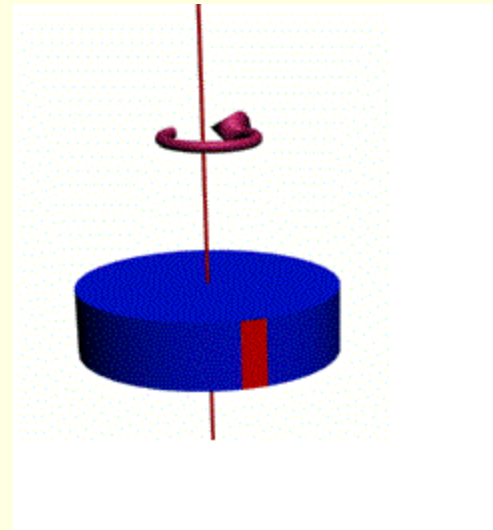
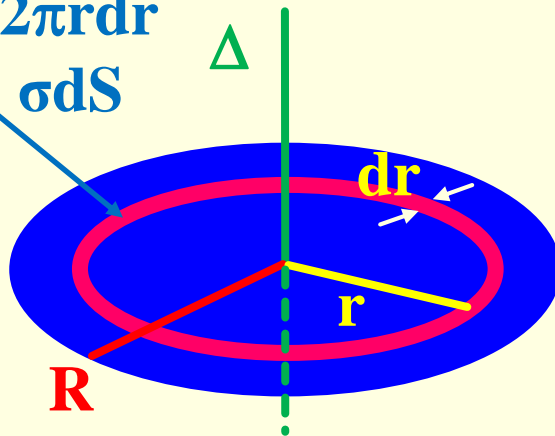


$$I = mR^2$$

## 4.3. Mômen quán tính của một số vật rắn đơn giản

**3. Mômen quán tính  $I$  của đĩa tròn đối với trục quay là trục của đĩa**

$$dS = 2\pi r dr$$
$$dm = \sigma dS$$

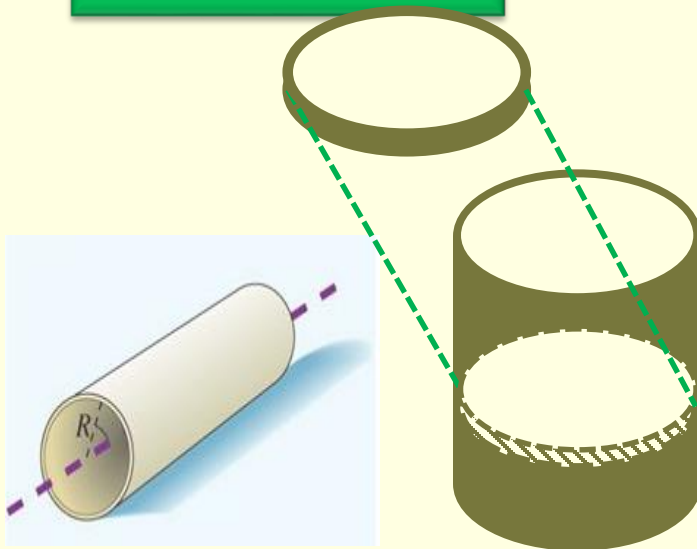


$$I = \frac{mR^2}{2}$$

## 4.3. Mômen quán tính của một số vật rắn đơn giản

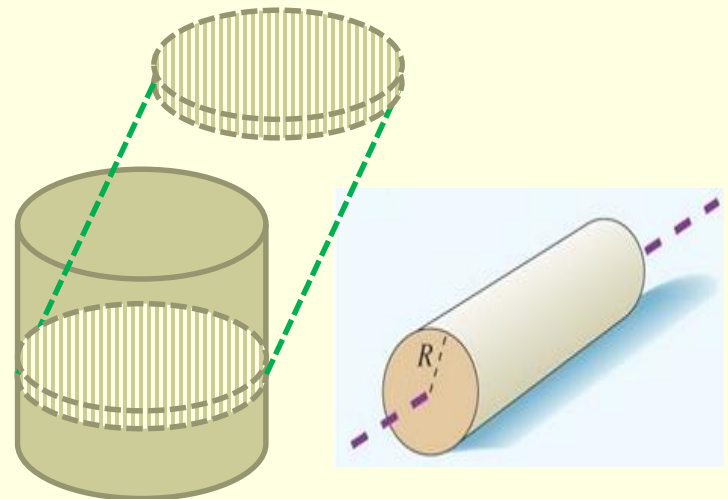
4. Mômen quán tính  $I$  của hình trụ đối với trục quay là trục của hình trụ

Trụ rỗng



$$I = mR^2$$

Trụ đặc



$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

## 4.3. Mômen quán tính của một số vật rắn đơn giản

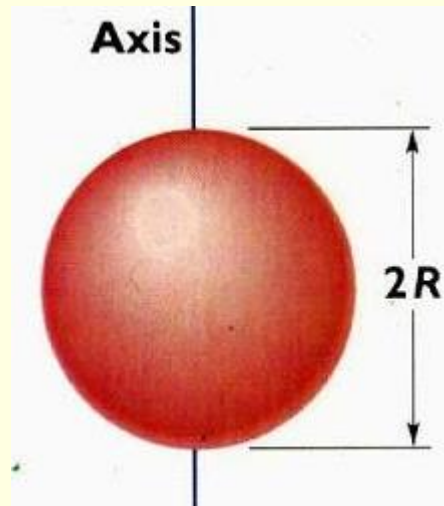
### 5. Mômen quán tính I của quả cầu

Quả cầu đặc

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Quả cầu rỗng

$$I = \frac{2}{3}mR^2$$

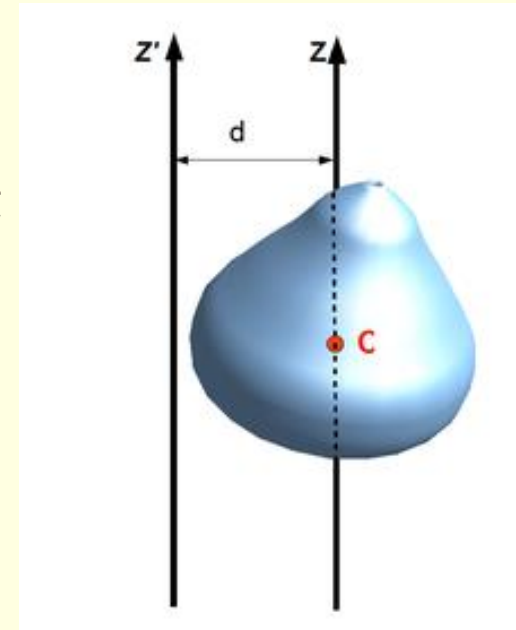
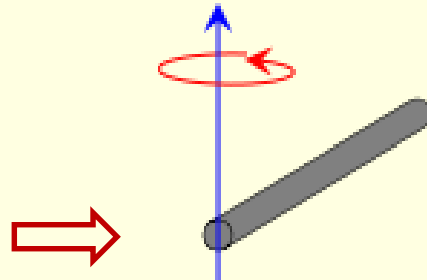
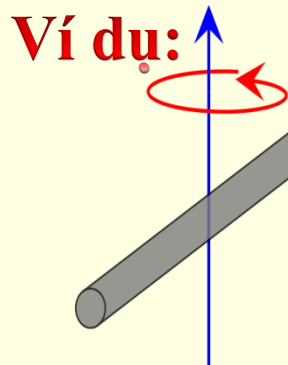


## 4.3. Mômen quán tính của một số vật rắn đơn giản

### 4.3.2. Định lý Steiner – Huyghens

Mômen quán tính  $I$  đối với một trục bất kì không đi qua tâm:

$$I = I_C + md^2$$



$$I = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

## 4.4. Động năng của vật rắn quay quanh trục cố định

- Động năng quay của vật rắn quay quanh một trục cố định

$$K_q = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \right) \omega^2$$



$$K_q = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- Nếu vật lăn (vừa tịnh tiến vừa quay):

$$K = K_{tt} + K_q = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

## 4.4. Động năng của vật rắn quay quanh trục cố định

**Ví dụ 3.7:** Một quả cầu rắn khối lượng  $m = 6 \text{ kg}$ , bán kính  $R$ , ban đầu ở độ cao  $H = 1,2 \text{ m}$  của một mặt phẳng nghiêng  $\theta = 30^\circ$  (hình vẽ). Quả cầu lăn (không trượt) không vận tốc đầu xuống.

- Tính vận tốc của quả cầu tại đáy mặt phẳng nghiêng.
- Xác định độ lớn của lực ma sát khi nó lăn xuống mặt phẳng.

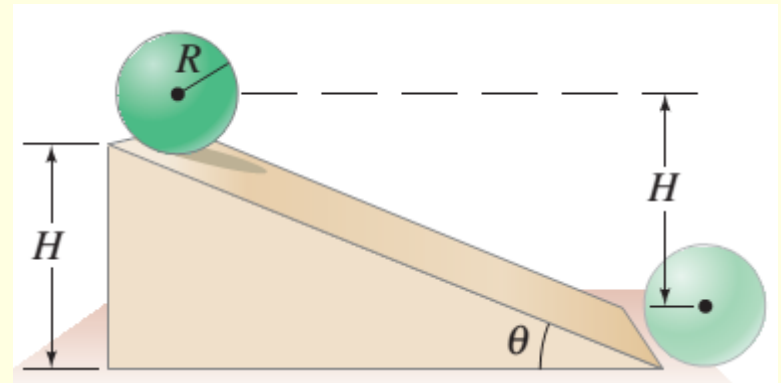
### Bài giải:

a) Vận tốc tại đáy

❖ Áp dụng ĐL BTCN:

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} mR^2 \left( \frac{v}{R} \right)^2 = \frac{7}{10}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10}{7}gH} = \sqrt{\frac{10}{7} \times 9,8 \times 1,2} = 4,1 (\text{m/s})$$



## 4.4. Động năng của vật rắn quay quanh trục cố định

### Bài giải:

b) Lực ma sát

❖ Phương trình động lực học Newton:

$$mg \sin \theta - f_{ms} = ma \quad (1)$$

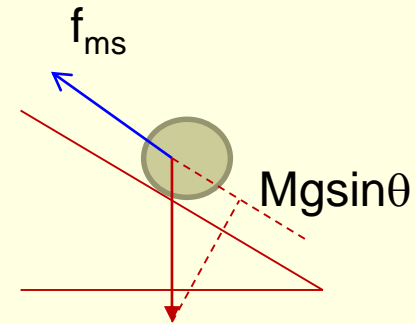
❖ Phương trình cơ bản của vật rắn quay:

$$M = f_{ms} R = I\beta = \frac{2}{5} mR^2 \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{2} \frac{f_{ms}}{m}$$

Thay vào (1):  $mg \sin \theta - f_{ms} = \frac{5}{2} f_{ms}$



$$f_{ms} = \frac{2}{7} mg \sin \theta = \frac{2}{7} \times 6 \times 9,8 \times \sin 30^\circ = 8,4 \text{ (N)}$$






## 4.4. Động năng của vật rắn quay quanh trục cố định

**Ví dụ 3.8:** Một quả cầu đặc và quả cầu rỗng cùng bán kính  $R$  lăn xuống một dốc nghiêng. Quả cầu nào lăn xuống đáy dốc nhanh hơn?

**Bài giải:**


❖ Áp dụng ĐL BTCN cho quả cầu đặc:

$$\begin{aligned} m_1 gH &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m_1 R^2 \left( \frac{v_1}{R} \right)^2 = \frac{7}{10} m_1 v_1^2 \end{aligned}$$


$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7} gH}$$

❖ Áp dụng ĐL BTCN cho quả cầu rỗng:

$$\begin{aligned} m_2 gH &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{3} m_2 R^2 \left( \frac{v_2}{R} \right)^2 = \frac{5}{6} m_2 v_2^2 \end{aligned}$$


$$v_2 = \sqrt{\frac{6}{5} gH}$$

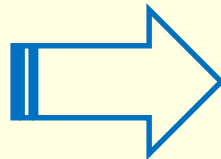
$v_1 = 1,1v_2$

## 4.5. Định luật bảo toàn mô men động lượng của vật rắn quay

### 4.5.1 Trường hợp một vật rắn

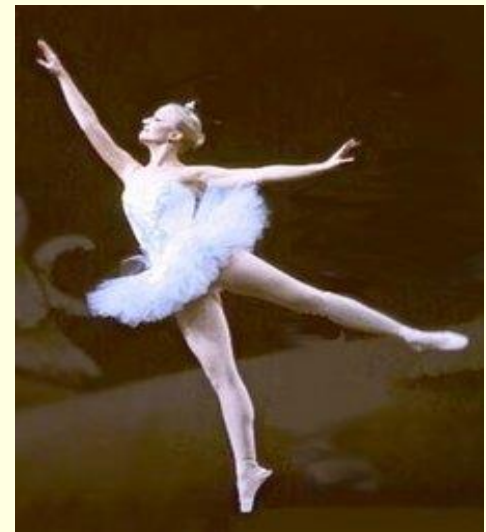
- Xét vật rắn cô lập quay quanh trục cố định:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$



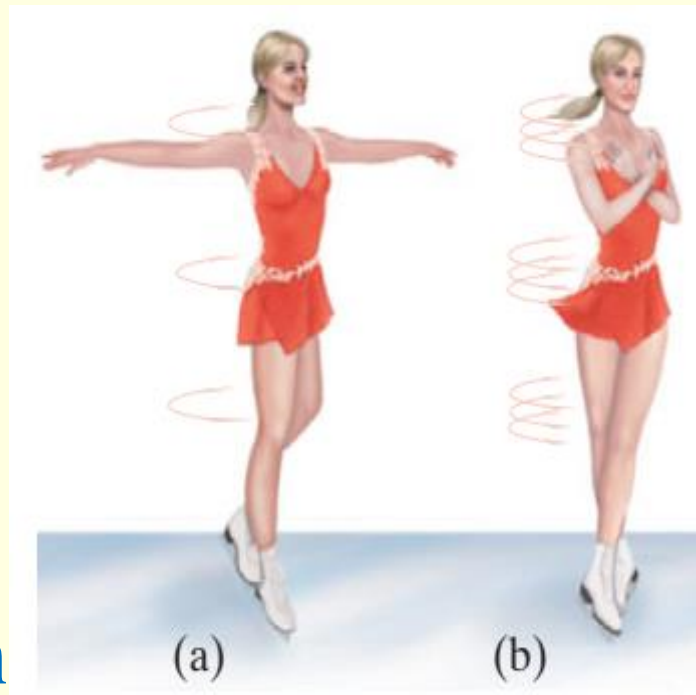
$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}$$

Ví dụ: Khi vũ công quay tròn, ngoại lực tác dụng lên vũ công là trọng lực, vì trọng lực song song với trục quay nên mômen lực bằng 0.



## 4.5. Định luật bảo toàn mô men động lượng của vật rắn quay

**R tăng**  
↓  
**I tăng**  
↓  
 **$\omega$  giảm**  
↓  
**quay chậm**



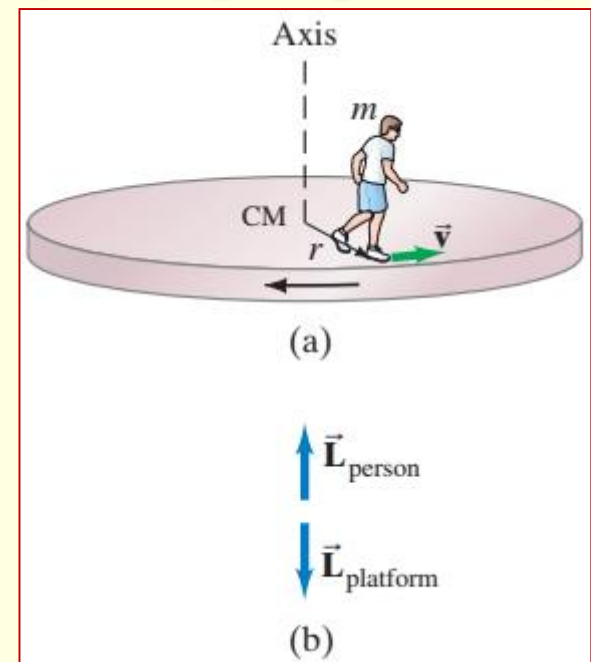
**R giảm**  
↓  
**I giảm**  
↓  
 **$\omega$  tăng**  
↓  
**quay nhanh**

## 4.5. Định luật bảo toàn mô men động lượng của vật rắn quay

### 4.5.2 Hệ gồm nhiều vật rắn quay quanh trục

➤ Xét hệ cô lập hay hệ có mômen lực tổng hợp tác dụng bằng không:

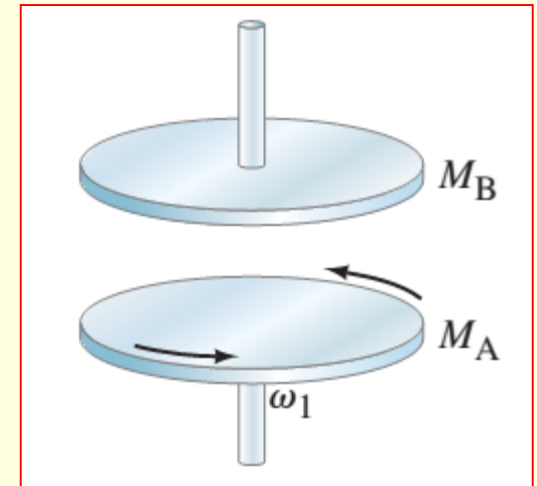
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i \vec{\omega}_i = \text{const}$$



## 4.5. Định luật bảo toàn mô men động lượng của vật rắn quay

**Ví dụ 4.9:** Một động cơ liên kết trục gồm 2 đĩa trụ mà có thể ép với nhau để tạo thành 1 hệ đồng trục. Hai đĩa có khối lượng  $m_A = 6 \text{ kg}$  và  $m_B = 9 \text{ kg}$ , có cùng bán kính  $R = 0,6 \text{ m}$ . Ban đầu chúng tách xa nhau (hình vẽ). Đĩa  $m_A$  được gia tốc với vận tốc góc  $\omega_1 = 7,2 \text{ rad/s}$  trong thời gian  $\Delta t = 2 \text{ s}$ .

- Tính mômen động lượng của  $m_A$ .
- Tính mômen lực cần thiết để gia tốc  $m_A$  đến  $\omega_1$ .
- Sau đó, đĩa  $m_B$ , ban đầu đứng yên, đặt đè lên  $m_A$  và 2 đĩa quay với vận tốc góc  $\omega_2$ , có thể xem  $\omega_2 < \omega_1$ . Tính  $\omega_2$



## 4.5. Định luật bảo toàn mô men động lượng của vật rắn quay

### Bài giải:

a) Mô men động lượng của đĩa A


$$\begin{aligned} L_A &= I_A \omega_1 = \frac{1}{2} m_A R^2 \omega_1 \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times (0,6)^2 \times 7,2 = 7,8 (\text{kg.m}^2 / \text{s}) \end{aligned}$$


b) Mô men lực của đĩa A

$$\begin{aligned} M_A &= I_A \beta_1 = \frac{1}{2} m_A R^2 \frac{\omega_1}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times (0,6)^2 \times \frac{7,2}{2} = 3,9 (\text{m.N}) \end{aligned}$$

c) Tính  $\omega_2$

$$\vec{L}_A + \vec{L}_B = \vec{L}_{A+B} \Leftrightarrow L_A + 0 = L_{A+B}$$

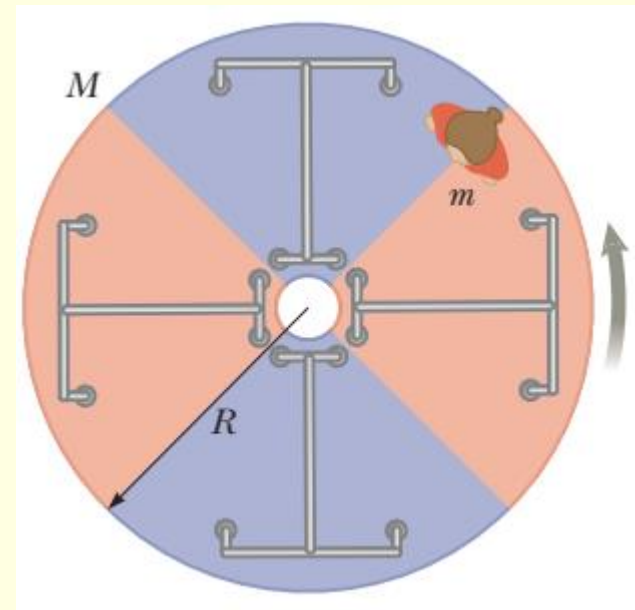

$$I_A \omega_1 = I_{A+B} \omega_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_A R^2 \omega_1 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) R^2 \omega_2$$


$$\omega_2 = \frac{m_A}{m_A + m_B} \omega_1 = \frac{6}{6+9} \times 7,2 = 2,9 (\text{rad/s})$$

## 4.5. Định luật bảo toàn mô men động lượng của vật rắn quay

**Ví dụ 4.10:** Một mặt phẳng nằm ngang có dạng đĩa tròn quay tự do trên mặt phẳng nằm ngang quanh trục không ma sát. Đĩa tròn có khối lượng  $M = 100$  kg và bán kính  $R = 2$  m. Một sinh viên có khối lượng  $m = 60$  kg đi chậm chậm từ mép đĩa về hướng tâm đĩa. Biết rằng, vận tốc góc của hệ khi sinh viên ở mép đĩa là  $2$  rad/s.

- Tính vận tốc góc khi sinh viên đến vị trí cách tâm đĩa  $r = 0,5$  m.
- Tính động năng của hệ trước và sau khi sinh viên này đến vị trí  $r$ .



## 4.5. Định luật bảo toàn mô men động lượng của vật rắn quay

### Bài giải:

a) Vận tốc góc của SV ở vị trí  $r$

❖ Mô men quán tính của hệ khi SV ở mép đĩa

$$I_1 = I_{\text{đ}} + I_{\text{sv}} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

❖ Mô men quán tính của hệ khi SV ở vị trí  $r$

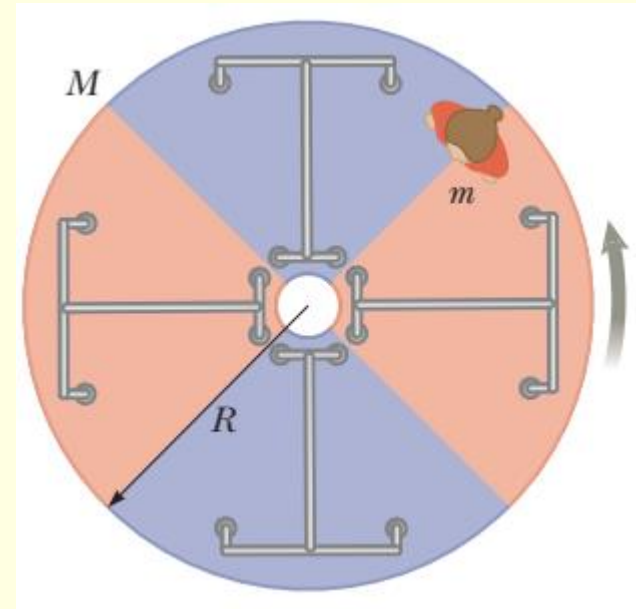
$$I_2 = I_{\text{đ}} + I'_{\text{sv}} = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

❖ ĐL BT mô men động lượng  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$



23/3/2023

$$\omega_2 = \left( \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} \right) \omega_1 = 4,1(\text{rad/s})$$





## 4.5. Định luật bảo toàn mô men động lượng của vật rắn quay

### Bài giải:

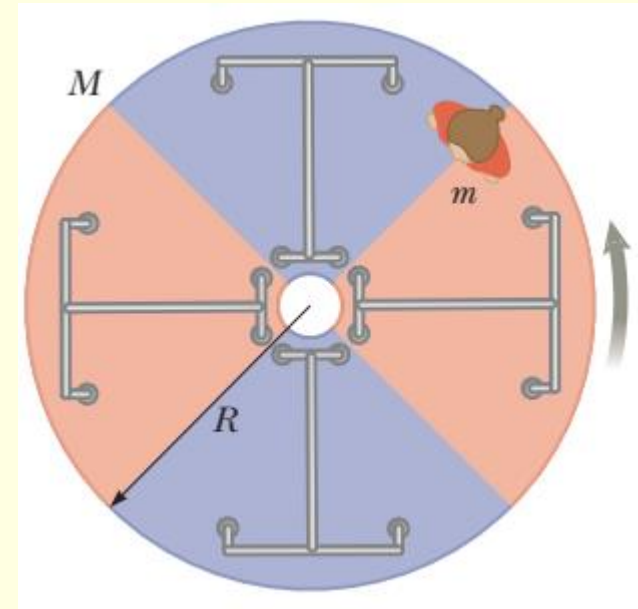
b)

❖ Động năng của hệ khi SV khi ở mép đĩa

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = 880 \text{ (J)}$$

❖ Động năng của hệ khi SV ở vị trí r

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = 1,8 \cdot 10^3 \text{ (J)}$$



# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Một bánh mài đang quay với vận tốc 300 vòng/phút thì bị ngắt điện và nó quay chậm dần đều. Sau 1 phút thì bánh mài chỉ quay với vận tốc 180 vòng/phút. Gia tốc góc của bánh mài là

- a.  $-\pi/5 \text{ rad/s}^2$       b.  $-2\pi/5 \text{ rad/s}^2$       **c.  $-\pi/15 \text{ rad/s}^2$**       d.  $-4\pi \text{ rad/s}^2$

**Bài giải:**

$$\beta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{180 \times 2\pi / 60 - 300 \times 2\pi / 60}{60} = -\frac{\pi}{15}$$

**Câu 2:** Một hệ thống truyền động gồm vô lăng, bánh xe và cuaroa nối giữa bánh xe và vô lăng. Gọi  $\omega_1$ ,  $R_1$  và  $\omega_2$ ,  $R_2$  là vận tốc góc, bán kính của vô lăng và bánh xe. Quan hệ nào sau đây là đúng?

- a.  $\omega_1 = \omega_2$       **b.  $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$**       c.  $\omega_2 R_1 = \omega_1 R_2$       d. a, b, c đều sai

**Bài giải:**

$$v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TRẮC NGHIỆM

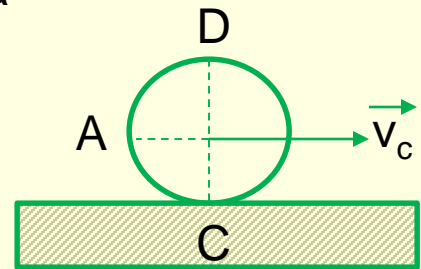
**Câu 3:** Bánh xe bán kính  $R$  lăn không trượt trên một đường thẳng với vận tốc tịnh tiến của khối tâm  $\vec{v}_c$  (hình vẽ). Vận tốc của điểm D là

a.  $\vec{v}_D = \vec{v}_c$

b.  $\vec{v}_D = 2\vec{v}_c$

c.  $\vec{v}_D = \sqrt{2}\vec{v}_c$

d.  $\vec{v}_D = 0$



**Bài giải:**  $\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}_C = 2\vec{v}_C$

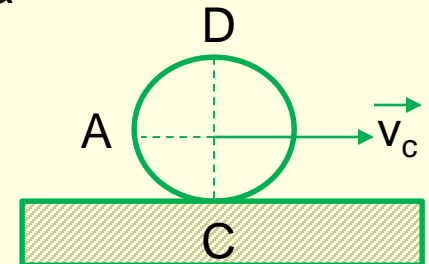
**Câu 4:** Bánh xe bán kính  $R$  lăn không trượt trên một đường thẳng với vận tốc tịnh tiến của khối tâm  $\vec{v}_c$  (hình vẽ). Vận tốc của điểm C là

a.  $\vec{v}_C = \vec{v}_c$

b.  $\vec{v}_C = 2\vec{v}_c$

c.  $\vec{v}_C = \sqrt{2}\vec{v}_c$

d.  $\vec{v}_C = 0$



**Bài giải:**  
23/3/2023

$$\vec{v}_C = \vec{v}_C + \vec{v} = \vec{v}_C - \vec{v}_C = 0$$

# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TRẮC NGHIỆM

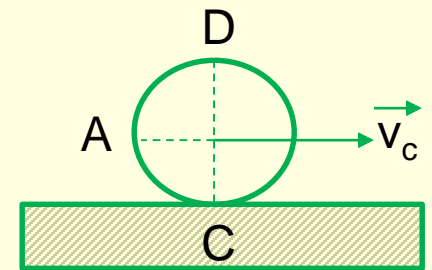
**Câu 5:** Bánh xe bán kính  $R$  lăn không trượt trên một đường thẳng với vận tốc tịnh tiến của khối tâm  $\vec{v}_c$  (hình vẽ). Vận tốc của điểm A là

a.  $v_A = v_c$

b.  $v_A = 2v_c$

c.  $v_A = \sqrt{2}v_c$

d.  $v_A = 0$



**Bài giải:**

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v} \Rightarrow v_A = \sqrt{v_C^2 + v_C^2} = v_C \sqrt{2}$$

# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TRẮC NGHIỆM

**Câu 6:** Có 4 hạt có khối lượng là 50g, 25g, 50g và 30g lần lượt đặt tại 4 điểm A, B, C và D của hệ trục tọa độ Oxy, trong đó A (2; 2), B(0; 4), C(-3; -3), D(-2; 4), đơn vị cm. Mômen quán tính của hệ đối với trục Ox là

- a.  $1,53.10^{-4}\text{kg.m}^2$     b.  $0,77.10^{-4}\text{kg.m}^2$     c.  $1,73.10^{-4}\text{kg.m}^2$     d.  $1,53.10^{-3}\text{kg.m}^2$

**Bài làm**  $I_x = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 + m_4 y_4^2 =$

$$= 0,05 \times (0,02)^2 + 0,025 \times (0,04)^2 + 0,05 \times (-0,03)^2 + 0,03 \times (0,04)^2 = 1,53.10^{-4}$$

**Câu 7:** Có 4 hạt có khối lượng là 50g, 25g, 50g và 30g lần lượt đặt tại 4 điểm A, B, C và D của hệ trục tọa độ Oxy, trong đó A (2; 2), B(0; 4), C(-3; -3), D(-2; 4), đơn vị cm. Mômen quán tính của hệ đối với trục Oy là

- a.  $1,53.10^{-4}\text{kg.m}^2$     b.  $0,77.10^{-4}\text{kg.m}^2$     c.  $1,73.10^{-4}\text{kg.m}^2$     d.  $1,53.10^{-3}\text{kg.m}^2$

**Bài làm**  $I_x = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 + m_4 x_4^2 =$

$$= 0,05 \times (0,02)^2 + 0,025 \times (0)^2 + 0,05 \times (-0,03)^2 + 0,03 \times (-0,02)^2 = 7,7.10^{-5}$$

# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TRẮC NGHIỆM

**Câu 8:** Một sợi dây nhẹ, không co giãn, vắt qua ròng rọc có dạng đĩa tròn đồng chất khối lượng  $m = 800\text{g}$ , hai đầu dây buộc chặt 2 vật  $m_1 = 2,6\text{kg}$  và  $m_2 = 1\text{kg}$ . Thả cho 2 vật chuyển động thẳng đứng. Bỏ qua ma sát của ròng rọc, biết dây không trượt trên ròng rọc, lấy  $g = 9,8\text{m/s}^2$ , mômen quán tính của ròng rọc  $I = 1/2mR^2$ . Gia tốc của các vật là

- a.  $3,92\text{m/s}^2$       b.  $4,24\text{m/s}^2$       c.  $3,5\text{m/s}^2$       d.  $4,5\text{m/s}^2$

### Bài làm

❖ Vật  $m_1$ :


$$m_1g - T_1 = m_1a \quad (1)$$

❖ Vật  $m_2$ :

$$-m_2g + T_2 = m_2a \quad (2)$$

❖ Ròng rọc  $m$ :

$$M = (T_1 - T_2)R = I\beta = 1/2mR^2a/R$$

  $T_1 - T_2 = 1/2 ma \quad (3)$

$(1)+(2)+(3) \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2} g = 3,92$

# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TRẮC NGHIỆM

**Câu 9:** Một vô lăng hình đĩa tròn đồng chất có khối lượng 10kg, bán kính 20cm đang quay với vận tốc 240 vòng/phút thì bị hãm đều và dừng lại sau 20s. Mômen quán tính của vô lăng  $I = 1/2 mR^2$ . Độ lớn của mômen hãm là  
a. 0,13 m.N      b. 0,16 m.N      **c. 0,25 m.N**      d. 1,0 m.N

**Bài làm**

$$M = I\beta = \frac{1}{2} mR^2 \frac{|\omega - \omega_0|}{\Delta t} = \frac{1}{2} 10 \times (0,2)^2 \frac{|0 - 240 \times 2\pi / 60|}{20} = 0,25$$

**Câu 10:** Một quả cầu đồng nhất bán kính  $R = 1m$ , chịu tác dụng bởi mômen quay 960 m.N và nó quay với gia tốc góc  $6 \text{ rad/s}^2$  quanh trục qua tâm quả cầu. Mômen quán tính của quả cầu là  $I = 2/5 mR^2$ . Khối lượng của vỏ cầu là  
a. 160kg      b. 200kg      **c. 400kg**      d. 240kg

**Bài làm:**

$$M = I\beta = \frac{2}{5} mR^2 \beta \Rightarrow m = \frac{5}{2} \frac{M}{R^2 \beta} = 400$$

# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TRẮC NGHIỆM

**Câu 11:** Một khối trụ lỗng không trượt từ đỉnh một con dốc cao 7,2m. Tính tốc độ của khối trụ tại đáy con dốc. Biết mômen quán tính của khối trụ  $I = 1/2mR^2$ . Lấy  $g = 9,8m/s^2$

- a. 9,7 m/s      b. 9,16 m/s      c. 9,25 m/s      d. 10,0 m/s

**Bài làm:**

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 9,7$$

**Câu 12:** Một quả bowling có khối lượng 7,25kg và bán kính 10,8cm lỗng không trượt trên sàn gỗ tại tốc độ 3,1m/s. Tính động năng toàn phần của bowling. Biết mômen quán tính của bowling  $I = 2/5mR^2$ .

- a. 48,8 J      b. 49,6 J      c. 39,25 J      d. 40,0 J

**Bài làm**

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2 = 48,8$$



# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TRẮC NGHIỆM

**Câu 13:** Một người đang đứng thẳng, hai tay xuôi dọc cơ thể quay với tốc độ 0,9 vòng/s. Khi người đó dang 2 tay thẳng ra song song với mặt ngang thì tốc độ giảm còn 0,6 vòng/s. So sánh mômen quán tính khi xuôi tay và dang tay

a.  $I_2 = I_1$

b.  $I_2 = 0,5I_1$

c.  $I_2 = 1,5I_1$

d.  $I_2 = 2I_1$

**Bài làm:**

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow I_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} I_2 = \frac{2}{3} I_2$$

**Câu 14:** Một đĩa trụ chưa quay có mômen quán tính  $I$  được thả xuống một đĩa đồng dạng đang quay với tốc độ góc  $\omega$ . Sau khi tiếp xúc hai đĩa quay với tốc độ góc là

a.  $\omega' = \omega/2$

b.  $\omega' = \omega$

c.  $\omega' = 2\omega$

d.  $\omega' = \omega/4$

**Bài làm:**  $L_1 = L_2 \Leftrightarrow I\omega = I'\omega' = 2I\omega' \Rightarrow \omega' = \omega/2$

# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TỰ LUẬN

**Bài 1:** Một quả cầu khối lượng  $M = 2 \text{ kg}$  lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang đến đáy của một mặt phẳng nghiêng góc  $\alpha = 30^\circ$ , tại đáy quả cầu có vận tốc  $v$ . Sau đó quả cầu tiếp tục lăn trên mặt phẳng nghiêng thêm một quãng đường  $d = 2 \text{ m}$  rồi dừng lại và lăn trở xuống dốc nghiêng. Bỏ qua ma sát giữa quả cầu và mặt phẳng. Dùng định luật bảo toàn cơ năng, hãy tính vận tốc  $v$  của quả cầu tại đáy mặt phẳng nghiêng.

**Bài 2:** Một vật khối lượng  $m = 2 \text{ kg}$  mắc vào ròng rọc khối lượng  $M = 3 \text{ kg}$ , bán kính  $R$  bằng sợi dây có khối lượng không đáng kể. Ban đầu giữ cho vật  $m$  ở độ cao  $h = 0,5 \text{ m}$  so với mặt phẳng nằm ngang, sau đó buông để cho vật chuyển động xuống.

- Tính gia tốc  $a$  và sức căng dây  $T$  của vật
- Sau thời gian bao lâu thì vật chạm mặt phẳng nằm ngang?

# ÔN TẬP CHƯƠNG 4

## TỰ LUYỆN

**Bài 3:** Một quả cầu đặc có khối lượng  $M = 2 \text{ kg}$  bắt đầu lăn xuống không vận tốc đầu ( $v_0 = 0$ ) (không trượt) tại đỉnh cao  $h = 0,5 \text{ m}$  của mặt phẳng nghiêng góc  $30^\circ$  so với mặt phẳng nằm ngang.

1) Bỏ qua ma sát giữa quả cầu và mặt phẳng nghiêng. a) Tính vận tốc  $\mathbf{v}$  của quả cầu tại đáy mặt phẳng nghiêng. b) Tính gia tốc  $\mathbf{a}$  của quả cầu lăn trên mặt phẳng nghiêng.

2) Khi xuống tới đáy, quả cầu lăn trên mặt phẳng nằm ngang thêm một đoạn  $x$  bằng bao nhiêu rồi dừng lại? Biết hệ số ma sát giữa quả cầu và mặt phẳng nằm ngang là  $\mu = 0,25$