

# Chương 4. HỆ THỨC ĐỆ QUY

## Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để giải hệ thức đệ quy ta sử dụng hàm `rsolve(eqns, fcns)`, trong đó `eqns` là các hệ thức đệ quy, điều kiện ban đầu; `fcns` là các giá trị cần tìm.

**Ví dụ 1.** Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy  $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ .

**> rsolve(a(n)-5\*a(n-1)+6\*a(n-2)=0, a(n));**

$$-(-3a(0) + a(1))2^n - (2a(0) - a(1))3^n$$

Như vậy chỉ cần biết thêm giá trị của  $a_0$  và  $a_1$  thì ta biết được công thức của  $a_n$ .

**Ví dụ 2.** Tìm nghiệm của  $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n; \\ x_0 = 2; x_1 = 0. \end{cases}$

**> f := rsolve({x(n+1)-6\*x(n)+9\*x(n-1) = (18\*n+12)\*3^n, x(0) = 2, x(1) = 0}, x(n));**

$$83^n + 2(-2n - 2)3^n - 8(n + 1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right)3^n + 6(n + 1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right)\left(\frac{1}{3}n + 1\right)3^n$$

**> simplify(f);**

$$3^n(2 - 5n + 2n^2 + n^3)$$

Như vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là  $x_n = (n^3 + 2n^2 - 5n + 2)3^n$ .

**Ví dụ 3.** Tìm nghiệm của  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n; \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n; \\ a_0 = 2; b_0 = 1. \end{cases}$

**> rsolve({a(n+1) = a(n)-b(n), b(n+1) = 2\*a(n)+4\*b(n), a(0) = 2, b(0) = 1}, {a(n), b(n)});**

$$\{a(n) = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n, b(n) = -5 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n\}$$

Như vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là  $\begin{cases} a_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n; \\ b_n = -5 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n. \end{cases}$

## Phần II. Bài tập

**Bài 4.1** Một cầu thang gồm  $n$  bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2, hoặc 3 bậc. Gọi  $x_n$  là số cách đi hết cầu thang, hãy tìm hệ thức đệ quy của  $x_n$ ?

**Bài 4.2** Cho  $n$  là số nguyên dương. Hãy tìm hệ thức đệ quy của  $a_n$  với  $a_n$  là số chuỗi bit có độ dài  $n$  mà

- a) chứa 2 bit 0 liên tiếp
- b) không chứa 2 bit 0 liên tiếp
- c) chứa 3 bit 0 liên tiếp
- d) không chứa 3 bit 0 liên tiếp
- e) số lượng bit 0 là số chẵn
- f)\* chứa 01

Đối với mỗi trường hợp hãy tính  $a_6$ .

**Bài 4.3** Một chuỗi số chỉ chứa 0, 1 hoặc 2 được gọi là chuỗi tam phân. Hãy tìm hệ thức đệ quy của  $x_n$  với  $x_n$  là chuỗi tam phân có độ dài  $n$  mà

- a) không chứa 2 chữ số 0 liên tiếp
- b) chứa 2 chữ số 0 liên tiếp
- c) không chứa 012
- d)\* không chứa 2 chữ số 0 liên tiếp hoặc 2 chữ số 1 liên tiếp
- e)\* chứa 2 chữ số liên tiếp giống nhau

Đối với mỗi trường hợp hãy tính  $x_6$ .

**Bài 4.4** Giải các hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất sau

- a)  $a_0 = 2$  và  $a_{n+1} = -3a_n, \forall n \geq 0$
- b)  $a_1 = -5$  và  $a_n = 8a_{n-1}, \forall n \geq 2$
- c)  $a_2 = 28, a_3 = -8$  và  $a_n = 4a_{n-2}, \forall n \geq 4$
- d)  $a_0 = 1, a_1 = 0$  và  $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \forall n \geq 1$
- e)  $a_1 = 6, a_2 = 8$  và  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \forall n \geq 1$

**Bài 4.5** Giải các hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất sau

- a)  $a_0 = -3$  và  $a_n = a_{n-1} + 9, \forall n \geq 1$
- b)  $a_1 = 13$  và  $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 5 \cdot 3^{n+1}, \forall n \geq 0$
- c)  $a_2 = 61$  và  $a_{n+1} = 3a_n + 4n - 6, \forall n \geq 2$
- d)  $a_0 = -7$  và  $a_{n+1} = -4a_n - 2(-4)^{n+1}(n-2), \forall n \geq 0$
- e)  $a_3 = 128$  và  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 12, \forall n \geq 2$

**Bài 4.6** Giải các hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất sau

- a)  $a_0 = 1, a_1 = 2$  và  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 4, \forall n \geq 0$   
b)  $a_1 = -4, a_2 = 19$  và  $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1} + 3, \forall n \geq 2$   
c)  $a_2 = -5, a_3 = -26$  và  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} - 10, \forall n \geq 4$   
d)  $a_0 = 3, a_1 = -5$  và  $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8(-1)^{n+1}, \forall n \geq 2$   
e)  $a_1 = -13, a_2 = 50$  và  $a_{n+2} = -7a_{n+1} - 10a_n + (40n - 1)3^n, \forall n \geq 1$   
f)  $a_2 = -28, a_3 = -149$  và  $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} - 12n^2 - 24n + 4, \forall n \geq 3$

**Bài 4.7** Giải các hệ thức đệ quy sau

- a)  $\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$  d)  $\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$   
b)  $\begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$  e)  $\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128 \cdot 8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$   
c)  $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$  f)  $\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2 \cdot 5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$

**Bài 4.8** Tính các tổng số sau theo  $n$  nguyên :

- a)  $S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \quad (n \geq 1)$  d)  $S_n = \sum_{k=0}^n (k+1)(k+2)2^k \quad (n \geq 0)$   
b)  $S_n = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 \quad (n \geq 1)$  e)  $S_n = \sum_{k=0}^n (2k-1)(-3)^k \quad (n \geq 0)$   
c)  $S_n = -1^4 + 2^4 + \dots + (-1)^n n^4 \quad (n \geq 1)$  f)  $S_n = \sum_{k=1}^n (k^3 - 2k^2 + 4k)(-1)^k \quad (n \geq 1)$

**Bài 4.9** Cho  $n \geq 1$ . Vẽ  $n$  đường thẳng trong mặt phẳng cắt nhau từng đôi một nhưng trong đó không có 3 đường thẳng nào đồng qui. Hỏi các đường thẳng này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

**Bài 4.10** Giả sử dân số thế giới năm 2000 là 7 tỉ người và tốc độ tăng dân số thế giới là 3% mỗi năm. Cho số nguyên  $n \geq 2000$ . Tính dân số thế giới vào năm  $n$ .

**Bài 4.11** Cho số nguyên  $n \geq 1$ . Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm  $n$  ký tự ( $n$  ký tự này được lấy tùy ý từ các ký tự a, b, c) sao cho trong chuỗi ký tự không có 2 ký tự a đứng gần nhau?

**Bài 4.12** Cho số nguyên  $n \geq 1$ . Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm  $n$  ký tự ( $n$  ký tự này được lấy tùy ý từ các ký tự 1, 2) sao cho trong chuỗi ký tự ít nhất 2 ký tự 1 đứng gần nhau?

**Bài 4.13** Cho  $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$  và  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 0$ . Chứng minh rằng  $a_n = \beta f_n + \alpha f_{n-1}, \forall n \geq 1$  trong đó  $f_m$  là số hạng thứ  $m$  ( $m \geq 0$ ) của dãy số Fibonacci ( $f_0 = 0, f_1 = 1$  và  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \geq 0$ ).

**Bài 4.14** Tính  $a_n$  và  $b_n, \forall n \geq 0$  biết rằng  $a_0 = 1, b_0 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2b_n$  và  $b_{n+1} = a_n + 2b_n, \forall n \geq 0$ . (Hướng dẫn: Tìm  $\lambda, \mu$  thỏa  $a_{n+1} + \lambda b_{n+1} = \mu(a_n + \lambda b_n)$  và tính  $u_n = a_n + \lambda b_n, \forall n \geq 0$ ).