Chương 2: Tích phân kép

TS. Nguyễn Thị Hoài Thương

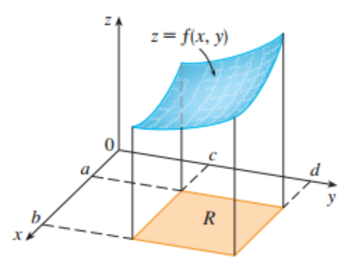
Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP.HCM
Khoa Toán-tin học
Bộ môn Giải tích

ngththuong@hcmus.edu.vn

Ngày 28 tháng 5 năm 2023

Mục lục

Định nghĩa tích phân kép



Hình 1: Đồ thị mặt cong của phương trình $z = f(x, y)$.

Hình trên là đồ thị của một hàm số f dương, xác định trên hình chữ nhật

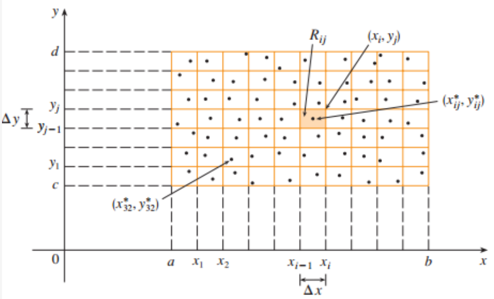
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}.$$

Gọi Ω là khối nằm dưới đồ thị của f và nằm trên hình chữ nhật D

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y, z), (x, y) \in D\right\}.$$

Tính thể tích V của vật thể Ω.

Định nghĩa tích phân kép



Hình 2: Chia miền D thành những hình chữ nhật nhỏ D_{ij}.

Chúng ta chia miền D thành những hình chữ nhật nhỏ. Chúng ta chia

- Đoạn $[a, b]$ thành m đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ với độ dài $\Delta x = (b - a)/m$.
- Đoạn $[c, d]$ thành n đoạn nhỏ $[y_{j-1}, y_j]$ với độ dài $\Delta y = (d - c)/n$.

Như vậy, ta có $m \times n$ hình chữ nhật con có dạng

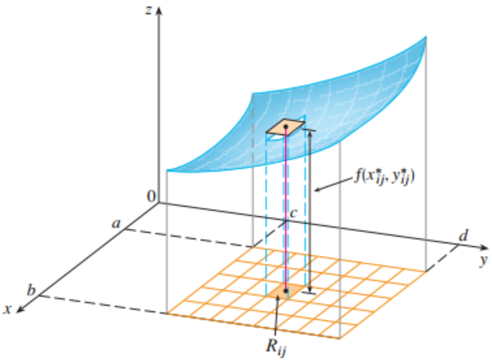
$$D_{ij} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j\right\}$$

với diện tích $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Định nghĩa tích phân kép

Trên mỗi ô con D_{ij} chọn một điểm mẫu $\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)$ ngẫu nhiên. Ta có thể xấp xỉ một phần thể tích của khối Ω nằm phía trên ô con D_{ij} bằng thể tích cột dạng hộp có đáy D_{ij} và chiều cao bằng $f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)$. Thể tích này bằng

$$f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta A.$$



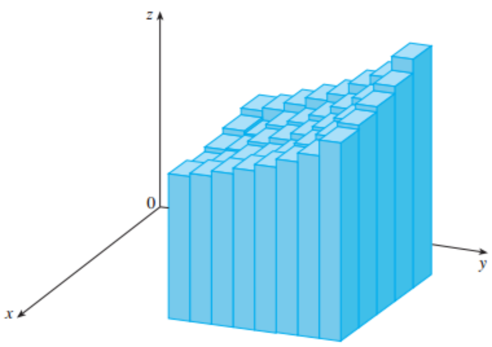
Hình 3: Thể tích của hình hộp chữ nhật nhỏ.

Định nghĩa tích phân kép

Khi đó, thể tích toàn khối Ω được xấp xỉ bởi

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta A$$

và được gọi là tổng Riemann của f trên hình chữ nhật D.



Hình 4: Thể tích gần đúng của vật thể Ω.

Định nghĩa tích phân kép

Khi cho $m, n \to +\infty$, chúng ta sẽ thu được

$$V = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta A.$$

Định nghĩa

Tích phân kép của hàm số $f(x, y)$ trên miền D là

$$\int\int_D f(x,y)dx\,dy = \int\int_D f(x,y)dA = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta x \Delta y$$

nếu giới hạn này tồn tại. Lúc này, $f(x, y)$ được gọi là **hàm khả tích** trên D.

Giá trị trung bình

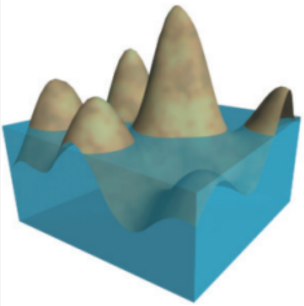
Định nghĩa

Giá trị trung bình của hàm f hai biến được định nghĩa là

$$f_{ave} = \frac{1}{A(D)} \int\int_D f(x, y) dA$$

trong đó $A(D)$ là diện tích của D.

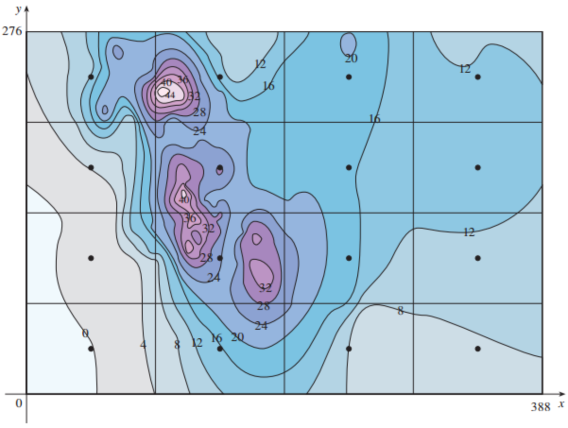
Giá trị trung bình



Hình trên nói rằng nếu $z = f(x, y) \geq 0$ mô tả bề mặt địa hình thì ta có thể cắt bỏ các chỏm đồi tại độ cao f_{ave} và dùng đất dư để lấp các thung lũng thì ta được một vùng an toàn bằng phẳng có độ cao f_{ave}.

Giá trị trung bình

Ví dụ: Cho một contour map biểu thị độ dày (đơn vị inch) của tuyết phủ ở bang Colorado trong hai ngày 20 và 21 tháng 12 năm 2006 như sau



Bang này có hình chữ nhật, từ Tây sang Đông là 388 dặm, từ Nam lên Bắc là 276 dặm. Hãy ước tính độ dày trung bình của tuyết phủ trên toàn bang.

Tính chất của tích phân kép

1. Nếu $D = D_1 \cup D_2$ và $f(x, y)$ khả tích trên D thì
$$\int\int_D f(x,y)dx\,dy = \int\int_{D_1} f(x,y)dx\,dy + \int\int_{D_2} f(x,y)dx\,dy.$$
2. Nếu $f(x, y)$ và $|f(x, y)|$ là những hàm khả tích trên D thì
$$\left|\int\int_D f(x,y)dx\,dy\right| \leq \int\int_D |f(x,y)|\,dx\,dy.$$
3. Nếu $f(x, y)$ và $g(x, y)$ là những hàm khả tích trên D thì
$$\int\int_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dx\,dy = \int\int_D f(x,y)dx\,dy \pm \int\int_D g(x,y)dx\,dy.$$

Tính chất của tích phân kép

4. Nếu $f(x,y)$ là hàm khả tích trên D thì

$$\int\int_D [\alpha f(x,y)]dx\,dy = \alpha \int\int_D f(x,y)dx\,dy, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

5. Nếu $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là những hàm khả tích trên D và $f(x,y) \leq g(x,y), \forall (x,y) \in D$ thì

$$\int\int_D f(x,y)dx\,dy \leq \int\int_D g(x,y)dx\,dy.$$

Cách tính tích phân kép

Định lí Fubini

Giả sử f là hàm số liên tục trên hình chữ nhật

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\right\}.$$

Khi đó

$$\int\int_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy.$$

Lưu ý: Các tích phân

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

được gọi là **tích phân lặp**.

Cách tính tích phân kép

Ví dụ: Tính tích phân kép $\int\int_D (x - 3y^2)\, dA$ với $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\right\}$.

Tích phân kép trên miền bất kì tổng quát

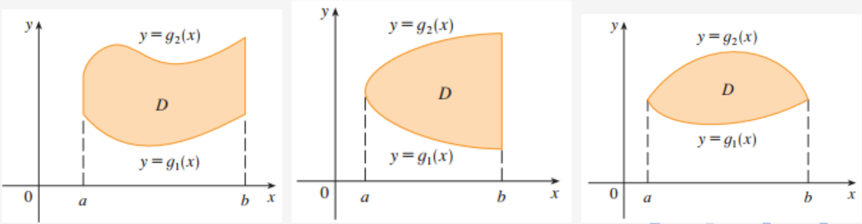
Định lí

Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền D. Nếu

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

với $g_1(x)$ và $g_2(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx.$$



Tích phân kép trên miền bất kì tổng quát

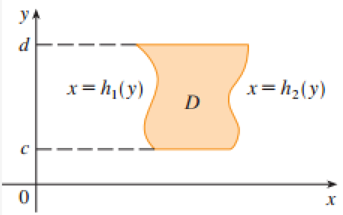
Định lí

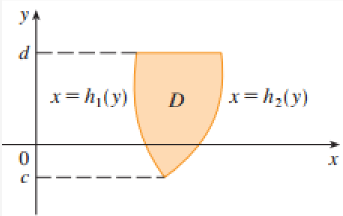
Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền D. Nếu

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

với $h_1(y)$ và $h_2(y)$ liên tục trên $[c,d]$ thì

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy.$$



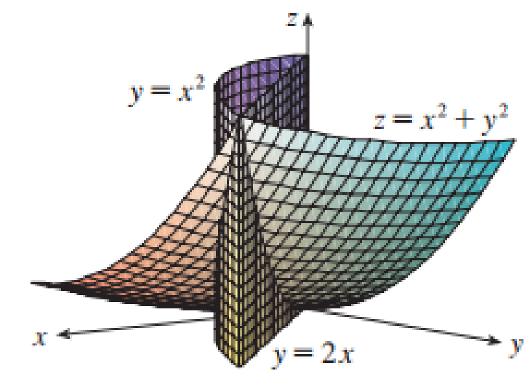


Tích phân kép trên miền bất kì tổng quát

Ví dụ: Tính $\int\int_D (x+2y)dA$, trong đó D bị bao bởi hai parabol: $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

Tích phân kép trên miền bất kì tổng quát

Ví dụ: Tìm thể tích của miền nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và nằm trên miền D trong mặt phẳng xy bị bao bởi hai đường $y = 2x$ và $y = x^2$.



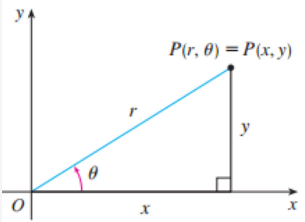
Tích phân kép trên miền bất kì tổng quát

Ví dụ: Tính tích phân lặp $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy\, dx$

Với mỗi điểm $P(x, y)$ trong mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy, ta đặt

$$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \measuredangle\left(\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{OP}\right)$$

thì $x = r\cos(\theta)$ và $y = r\sin(\theta)$. Cặp số (r, θ) được gọi là tọa độ cực của điểm P.



Tích phân kép trong tọa độ cực

Vậy một tập hợp D trong mặt phẳng Descartes có dạng

$$D = \left\{(x,y) | x \text{ và } y \text{ thỏa tính chất (T) nào đó}\right\}$$

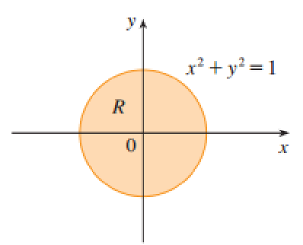
có thể được viết dưới dạng tọa độ cực như sau

$$D = \left\{(r,\theta) | r \text{ và } \theta \text{ thỏa tính chất “tương đồng” với (T)}\right\}.$$

Ví dụ về tọa độ cực

- Miền D trong hình ở bên dưới có thể viết theo ba dạng sau

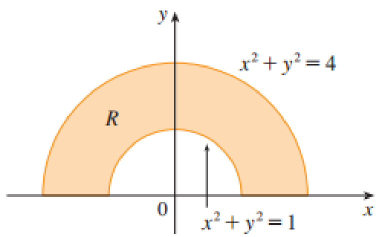
$$D = \left\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
$$D = \{(x, y) | x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]\}$$
$$D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



Ví dụ về tọa độ cực

- Trong hình bên dưới, miền D được viết dưới dạng

$$D = \left\{(x, y)|1 \le x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\right\}$$
$$D = \{(x, y)|x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), (r, \theta) \in [1, 2] \times [0, \pi]\}$$
$$D = \{(r, \theta)|1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}$$



Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

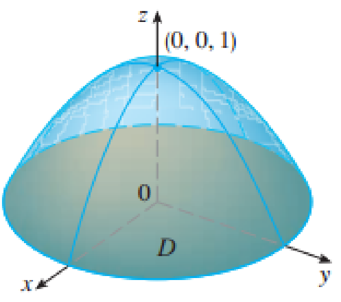
Ví dụ: Tính tích phân $\int\int_D (3x + 4y^2)dx\,dy$ với

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\right\}.$$

Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Ví dụ: Tìm thể tích của khối bị bao bởi mặt $z = 0$ và paraboloid

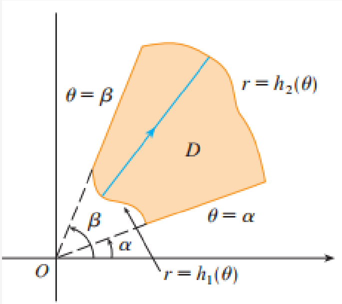
$z = 1 - x^2 - y^2$.



Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình quạt

$$D = \{(r,\theta) | \theta \in [\alpha, \beta], h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\} \tag{1.1}$$



Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Nếu hàm số hai biến f liên tục trên một miền D được biểu diễn theo dạng tọa độ cực như (1.1) thì

$$\iint_D f(x,y)dA$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r dr\, d\theta.$$

Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Ví dụ: Tính tích phân $\int\int_D 2x\, dx\, dy$ với

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x, y \leq x\right\}.$$

Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Miền D là hình tròn bán kính R tâm (x_0, y_0)

Nếu miền D là hình tròn $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2, R > 0$ thì ta dùng phép đổi biến

$$x = x_0 + r\cos(\theta), y = y_0 + r\sin(\theta), \tan(\theta) = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Khi đó, miền $D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ và

$$\int\int_D f(x, y)dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_a^b f\left(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r\sin(\theta)\right) rdr\,d\theta.$$

Lưu ý: Khi lấy cận của r, θ, ta coi gốc tọa độ dời về tâm đường tròn (x_0, y_0).

Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Ví dụ: Tính $\int\int_D (2x+y)dx\,dy$ với

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4, x \geq 1\right\}.$$

Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Miền D là ellipse

Nếu miền D là ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ thì ta dùng phép biến đổi

$$\frac{x}{a} = r\cos(\theta), \frac{y}{b} = r\sin(\theta), \tan(\theta) = \frac{y}{x} \times \frac{a}{b}.$$

Khi đó, miền $D = \{(r, \theta) : r_1 \leq r \leq r_2, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ và

$$\int\int_D f(x,y)dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1}^{r_2} f(ar\cos(\theta), br\sin(\theta))abrdr\,d\theta.$$

Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Ví dụ: Tính $\displaystyle\int\int_D (x+1)dx\,dy$ với

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Ứng dụng hình học của tích phân kép - Tính diện tích miền D

Định lí

Diện tích miền D được tính theo công thức $S_D = \int\int_D 1dx\,dy$.

Ví dụ: Tính diện tích miền D giới hạn bởi

$$y = (x+1)^2, x = y - y^3, x = -1, y = -1.$$

Ứng dụng hình học của tích phân kép - Tính diện tích miền D

Ví dụ: Tìm diện tích một cánh hoa bởi đường cong hình hoa 4 cánh có phương trình $r = \cos(2\theta)$.

Ứng dụng hình học của tích phân kép - Khối lượng riêng và khối lượng

- Giả sử một bản kim loại mỏng chiếm một miền D của mặt phẳng Oxy và khối lượng riêng của nó (đơn vị khối lượng trên mỗi đơn vị diện tích) tại điểm (x, y) thuộc D được cho bởi một hàm liên tục $\rho(x, y)$. Khi đó **tổng khối lượng** m của bản kim loại là

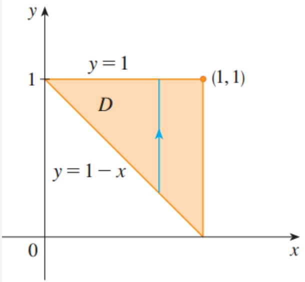
$$m = \int\int_D \rho(x, y)dA.$$

- Các nhà vật lí cũng xem xét các loại **khối lượng riêng khác** theo cũng cách thức. Ví dụ, nếu một điện tích được phân bố trên một miền D và mật độ điện tích (đơn vị điện tích trên mỗi đơn vị diện tích) được cho bởi $\sigma(x, y)$ tại một điểm (x, y) thuộc D thì **tổng điện tích** Q là

$$Q = \int\int_D \sigma(x, y)dA.$$

Ứng dụng hình học của tích phân kép - Khối lượng riêng và khối lượng

Ví dụ: Điện tích được phân bổ trên một miền D có dạng



Mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = xy$, được đo bằng đơn vị cu-lông trên mỗi mét vuông (C/m^2). Tìm tổng điện tích.

Giải: Ta có

$$Q = \int\int_D \sigma(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(2x^2 - x^3\right) dx = \frac{5}{24}.$$

Ứng dụng hình học của tích phân kép - Mô-men và Khối tâm (SV tự tìm hiểu)

Giả sử một bản kim loại mỏng chiếm một diện tích D và có hàm mật độ $\rho(x, y)$. Khi đó:

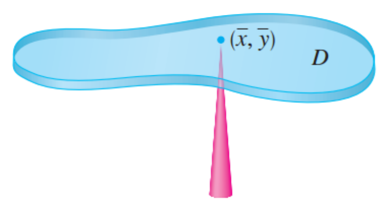
- Mô-men của toàn bộ bản kim loại mỏng **quay quanh trục** x:

$$M_x = \int\int_D y\rho(x, y)dA.$$

- Mô-men của toàn bộ bản kim loại mỏng **quay quanh trục** y:

$$M_x = \int\int_D x\rho(x, y)dA.$$

Ứng dụng hình học của tích phân kép - Mô-men và Khối tâm (SV tự tìm hiểu)



- Tọa độ khối tâm $(\overline{x}, \overline{y})$:

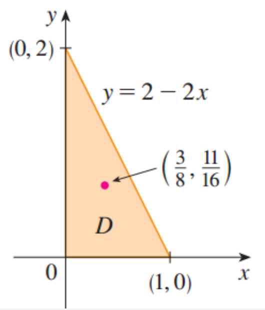
$$\overline{x} = \frac{M_y}{m}, \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$

trong đó $m = \displaystyle\int\int_D \rho(x, y) dA$.

Ứng dụng hình học của tích phân kép - Mô-men và Khối tâm (SV tự tìm hiểu)

Ví dụ: Tìm khối lượng và tọa độ khối tâm của một bản kim loại mỏng hình tam giá có các đỉnh là $(0,0),(1,0)$ và $(0,2)$ nếu hàm mật độ là $\rho(x,y)=1+3x+y$.

Giải: Miền tam giác được biểu diễn như sau:



Chú ý rằng phương trình đường giới hạn trên là $y=2-2x$.

Ứng dụng hình học của tích phân kép - Mô-men và Khối tâm (SV tự tìm hiểu)

Khối lượng của bản kim loại mỏng là

$$m = \int\int_D \rho(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1+3x+y)dy\,dx$$
$$= 4\int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{8}{3}.$$

Khi đó, ta có

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x,y)dA = \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x} \left(x+3x^2+xy\right)dy\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (x-x^3)dx = \frac{3}{8}$$
$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x,y)dA = \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x} \left(y+3xy+y^2\right)dy\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(7-9x-3x^2+5x^3\right)dx = \frac{11}{16}.$$