Định nghĩa tích phân bội ba

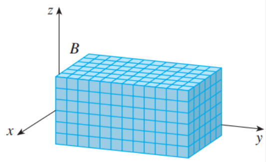
- Hàm số một biến $\Rightarrow$ Tích phân đơn.
- Hàm số hai biến $\Rightarrow$ Tích phân hai lớp (tích phân kép).
- Hàm số ba biến biến $\Rightarrow$ Tích phân ba lớp (tích phân bội ba).

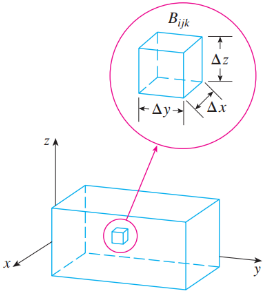
Khối lượng của vật thể

Cho vật thể Ω trong không gian có **phân bố khối lượng khối lượng không đồng đều** theo thể tích của nó. Sự phân bố này trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ được mô tả bởi hàm mật độ $f(x, y, z)$ (hay còn gọi là khối lượng riêng (kg/m^3)). Hãy tính khối lượng M của vật thể, biết vật thể Ω là hình chữ nhật:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, c \le y \le d, r \le z \le s\right\}.$$

Định nghĩa tích phân bội ba





Hình 10: Miền hình hộp chữ nhật Ω.

Chúng ta chia miền Ω thành những hộp hình chữ nhật nhỏ. Chúng ta chia

- Đoạn $[a, b]$ thành m đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ với độ dài $\Delta x = (b - a)/m$.
- Đoạn $[c, d]$ thành n đoạn nhỏ $[y_{j-1}, y_j]$ với độ dài $\Delta y = (d - c)/n$.
- Đoạn $[r, s]$ thành p đoạn nhỏ $[z_{k-1}, z_k]$ với độ dài $\Delta z = (s - r)/p$.

Định nghĩa tích phân bội ba

Các mặt phẳng đi qua các điểm đầu mút của những khoảng này song song với các mặt phẳng tọa độ chia hình hộp B thành $\ell \times m \times n$ hình hộp con

$$\Omega_{ijk} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\right\}.$$

Mỗi hình hộp chữ nhật con có thể tích $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.
Nếu chúng ta chọn một điểm tùy ý $\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)$ thì ta sẽ được tổng Riemann của tích phân bội ba. Như vậy, khối lượng của vật thể được tính gần đúng là

$$M \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Định nghĩa tích phân bội ba

Tương tự như tích phân kép chúng ta sẽ định nghĩa tích phân bội ba:

Định nghĩa

Tích phân bội ba của hàm số $f(x,y,z)$ trên miền Ω là

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,x)dV = \int\int\int_{\Omega} f(x,y,x)dx\,dy\,dz$$
$$= \lim_{m,n,p\to+\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f\left(x_{ijk}^{*}, y_{ijk}^{*}, z_{ijk}^{*}\right)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

nếu giới hạn này tồn tại.
Lúc này $f(x,y,z)$ được gọi là **hàm khả tích** trên Ω.

Định lí Fubini

Tương tự như tích phân kép, ta có định lí Fubini để tính tích phân bội ba như sau:

Định lí Fubini

Cho $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trên miền

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, c \le y \le d, r \le z \le s\right\}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Omega f(x, y, z) dV &= \int\int\int_\Omega f(x, y, z) dx\, dy\, dz \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z) dz\right) dy\right) dx.\end{aligned}$$

Định lí Fubini

Ví dụ: Tính $I = \int\int\int_{\Omega} xyz^2 dx\, dy\, dz$ với Ω là miền hình chữ nhật

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\right\}.$$

Giải: Chúng ta có thể chọn một trong sáu cách lấy tích phân theo thứ tự các biến. Nếu chúng ta chọn lấy tích phân đầu tiên theo x, sau đó theo y và cuối cùng theo z thì ta được

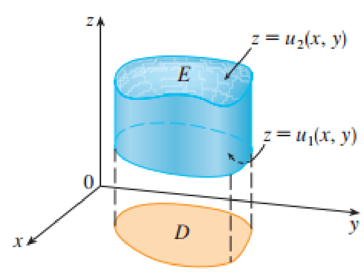
$$I = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left(yz^2 \times \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy\, dz$$
$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dy\, dz = \int_0^3 \left[\int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dy \right] dz = \int_0^3 \left(\frac{z^2 y^2}{4} \right)\Bigg|_{y=-1}^{y=2} dz$$
$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \frac{z^3}{4}\Bigg|_{z=0}^{z=3} = \frac{27}{4}.$$

Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω

Định lí

Cho miền $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$, trong đó D là hình chiếu của miền Ω xuống mặt phẳng Oxy. Khi đó

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dx\,dy. \quad (2.1)$$

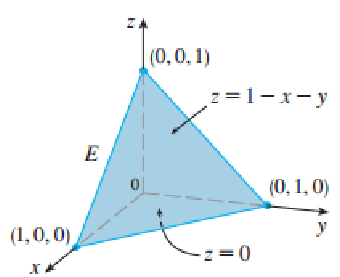


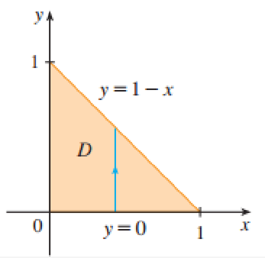
Hình 11: Miền Ω.

Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω

Ví dụ: Tính $I = \int\int\int_{\Omega} z dV$, trong đó Ω là khối tứ diện bị giới hạn bởi bốn mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z = 1$.

Giải:

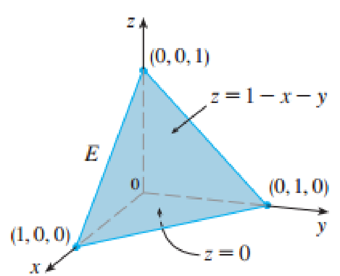


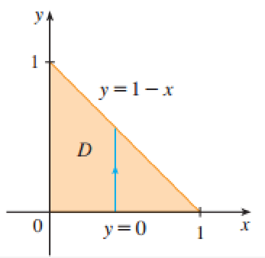


Hình 12: Miền Ω (trái) và hình chiếu D của nó lên mặt phẳng Oxy phải.

Giới hạn dưới của tứ diện là mặt phẳng $z = 0$ và giới hạn trên là mặt phẳng $x + y + z = 1$ (hoặc $z = 1 - x - y$). Vậy, chúng ta sử dụng $u_1(x, y) = 0$ và $u_2(x, y) = 1 - x - y$ trong công thức (2.1).

Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω





Hình 13: Miền Ω (trái) và hình chiếu D của nó lên mặt phẳng Oxy phải.

Các mặt phẳng $x + y + z = 1$ và $z = 0$ giao nhau ở đường thẳng $x + y = 1$ (hoặc $y = 1 - x$). Do đó, hình chiếu của Ω xuống mặt Oxy là miền tam giác D và ta có

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\right\}.$$

Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω

Với $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$, ta được:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx$$

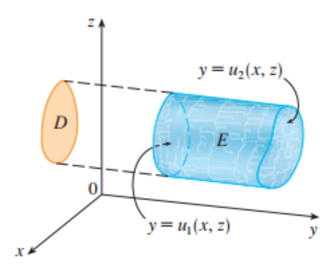
$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3 dx = \frac{1}{6} \left(-\frac{(1-x)^4}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{24}.$$

Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω

Định lí

Cho miền $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\right\}$, trong đó D là hình chiếu của miền Ω xuống mặt phẳng Oxz. Khi đó

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)dy\right) dx\,dz. \quad (2.2)$$

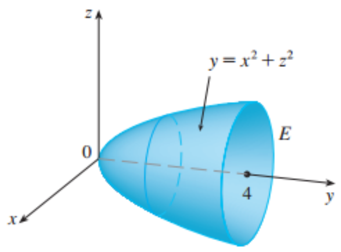


Hình 14: Miền Ω.

Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω

Ví dụ: Tính $I = \int\int\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dx\, dy\, dz$, trong đó Ω là miền bị giới hạn bởi paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$.

Giải:



Hình 15: Miền Ω.

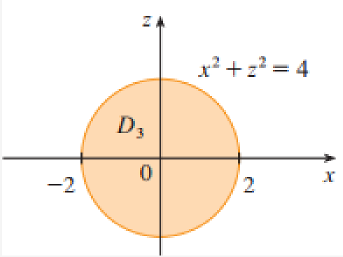
Vì Ω là miền bị giới hạn bởi paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$ nên chúng ta sử dụng $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ và $u_2(x, z) = 4$ trong công thức (2.2).

Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω

Để xác định hình chiếu của Ω, ta tìm giao tuyến của $y = x^2 + z^2, y = 4$

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của $y = x^2 + z^2, y = 4$ cũng là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + z^2 = 4$ và $y = 4$. Từ đó, ta có hình chiếu D của Ω xuống mặt phẳng Oxz là hình tròn $x^2 + z^2 \leq 4$.



Hình 16: Hình chiếu D.

Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω

Theo công thức (2.2), ta có

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int_D \left(\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2} dy \right) dz\, dx \\
&= \int\int_D \left(\sqrt{x^2+z^2} y \right) \Big|_{y=x^2+z^2}^{y=4} dz\, dx \\
&= \int\int_D (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2+z^2} dz\, dx
\end{aligned}
$$

với $D = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 4 \right\}$.
Đổi sang hệ tọa độ cực bằng cách đặt $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, ta được

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Áp dụng công thức tính tích phân kép trong tọa độ cực, ta có

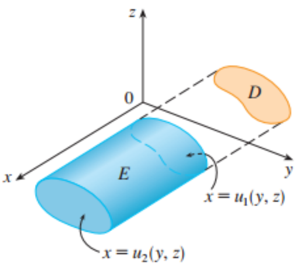
$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (4 - r^2) r \times r dr \right) d\theta = \frac{128\pi}{15}.$$

Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω

Định lí

Cho miền $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$, trong đó D là hình chiếu của miền Ω xuống mặt phẳng Oyz. Khi đó

$$\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \int\int_{D} \left(\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)dx\right) dy\,dz.$$

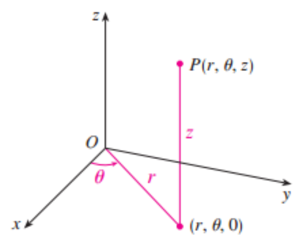


Hình 17: Miền Ω.

Định nghĩa

Trong **hệ tọa độ trụ**, một điểm P trong không gian ba chiều được biểu diễn bởi bộ ba có thứ tự (r, θ, z), trong đó

- r và θ là các tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng Oxy.
- z là khoảng cách trực tiếp từ mặt phẳng Oxy đến P.



Hình 18: Các tọa độ trụ của một điểm

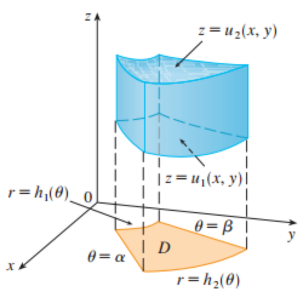
Đổi biến trong tích phân bội ba - Hệ tọa độ trụ

Công thức đổi biến từ tọa độ Decasters sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Cho miền $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\right\}$, trong đó D là hình chiếu của miền Ω xuống mặt phẳng Oxy và D xác định trong hệ tọa độ cực

$$D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}.$$



Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

Khi đó:

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int\int_{D}\left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dx\,dy$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\left(\int_{u_1(r\cos(\theta),r\sin(\theta))}^{u_2(r\cos(\theta),r\sin(\theta))} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\right) r dz\,dr\,d\theta.$$

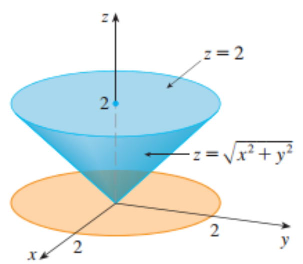
Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

Ví dụ: Tính $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dz\,dy\,dx.$

Giải: Tích phân lặp này là một tích phân bội ba trên một miền khối

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2\le x\le 2, -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\right\}$$

Miền Ω được giới hạn bởi mặt trên $z=2$, mặt dưới $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy là $x^2+y^2\le 4$.

Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

Các điều kiện ở miền Ω được viết lại như sau

$$\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 \end{cases}$$

Chúng ta chuyển miền Ω sang tọa độ trụ bởi phép đổi biến $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z$. Khi đó, hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ r \le z \le 2 \end{cases}$$

Vì vậy, ta có

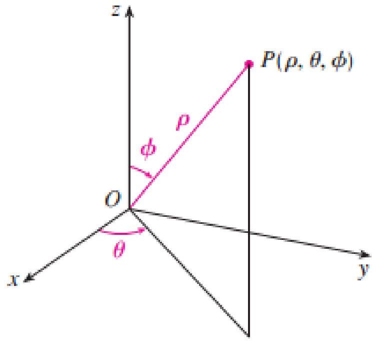
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2 r dz\,dr\,d\theta = \frac{16}{5}\pi.$$

Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Định nghĩa

Trong **hệ tọa độ cầu**, một điểm P trong không gian ba chiều được biểu diễn bởi bộ ba có thứ tự (ρ, θ, ϕ) trong đó

- $\rho = |OP|$ là khoảng cách từ góc tọa độ đến P.
- θ là góc tương tự như trong hệ tọa độ trụ.
- ϕ là góc giữa trục z dương và đoạn thẳng OP.



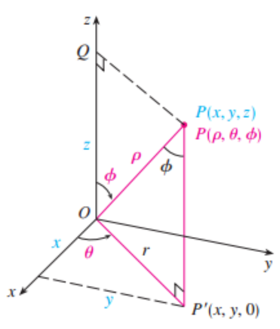
Hình 19: Tọa độ cầu của một điểm.

Chú ý: $\rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Công thức đổi biến từ tọa độ Decasters sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases} \tag{2.3}$$



Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Trong hệ tọa độ cầu, bản sao của một hình hộp chữ nhật là một **nêm cầu**

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \phi) : \rho_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq \rho_2(\theta, \phi), \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

trong đó: $\beta - \alpha \leq 2\pi$ và $d - c \leq \pi$.
Khi đổi biến từ hệ tọa độ Decasters sang hệ tọa độ cầu theo công thức (2.3) thì

$$\int\int\int_{\Omega} f(x, y, z) dx\, dy\, dz$$
$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta,\phi)}^{\rho_2(\theta,\phi)} f\left(\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi)\right) \rho^2 \sin(\phi) d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Ví dụ: Tính $\displaystyle\int\int\int_\Omega \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ trong đó Ω nằm trên mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và nằm dưới mặt cầu $x^2+y^2+z^2=z$.

Giải: Ta có

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\le z, x^2+y^2+z^2\le z\right\}.$$

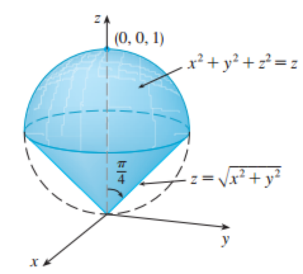
Đổi sang hệ tọa độ cầu bằng cách đặt

$$\begin{cases} x=\rho\sin(\phi)\cos(\theta)\\ y=\rho\sin(\phi)\sin(\theta)\\ z=\rho\cos(\phi)\end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le z\\ x^2+y^2+z^2\le z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le\phi\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0\le\rho\le\cos(\phi)\end{cases}$$

Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu



Mặt khác, hình chiếu của Ω xuống Oxy là hình tròn tâm O bán kính $1/2$ nên

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Vậy Ω được mô tả trong tọa độ cầu là

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos(\phi)\}.$$

Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Khi đó

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos(\phi)} \frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin(\phi)d\rho\,d\theta\,d\phi \\ &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \sin(\phi)\cos(\phi)d\theta\,d\phi \\ &= \pi\int_0^{\pi/4}\sin(2\phi)d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Ứng dụng của tích phân bội ba

Định nghĩa

Thể tích vật thể Ω được tính theo công thức

$$V = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz.$$

Ví dụ: Tính thể tích của vật thể được tạo bởi hình cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Giải: Ta có

$$V = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz$$

trong đó $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.

Ứng dụng của tích phân bội ba

Đổi sang hệ tọa độ cầu bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

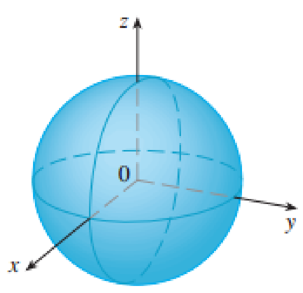
Khi đó:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq 1. \tag{2.4}$$

Ứng dụng của tích phân bội ba

Vậy Ω được mô tả trong tọa độ cầu là:

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$



Ứng dụng của tích phân bội ba

Khi đó

$$\begin{aligned}\int\int\int_{\Omega} dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\rho^2\sin(\phi)d\rho\,d\theta\,d\phi\\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\phi)d\theta\,d\phi\\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin(\phi)d\phi\\ &= \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$