

Chương 6. QUAN HỆ

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để giải phương trình hay hệ phương trình trong \mathbb{Z}_n ta sử dụng `msolve(eqns, n)`, trong đó `eqns` là phương trình hoặc tập hợp các phương trình.

Ví dụ. Giải phương trình $2\bar{x} + \bar{3} = \bar{5}$ trong \mathbb{Z}_7 .

```
> msolve(2*x+3=5, 7);  
  
{x = 1}
```

Ví dụ. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\bar{x} + 3\bar{y} = \bar{5}, \\ \bar{x} - 2\bar{y} = \bar{4} \end{cases}$ trong \mathbb{Z}_{11} .

```
> msolve({2*x+3*y=5, x-2*y=4}, 11);  
  
{x = 0, y = 9}
```

Phần II. Bài tập

Bài 6.1 Cho \mathcal{R} là quan hệ trên $\{1, 2, 3, 4\}$. Hãy xét \mathcal{R} có những tính chất nào?

- a) $\mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
- b) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- c) $\mathcal{R} = \{(2, 4), (4, 2)\}$
- d) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- e) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- f) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

Bài 6.2 Cho \mathcal{R} là một quan hệ trên S . Hãy viết tập hợp \mathcal{R} , ma trận biểu diễn và xét các tính chất của \mathcal{R} nếu

- a) $S = \{0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \leq 1$.
- b) $S = \{0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2$.
- c) $S = \{0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3x + y \leq 5$.
- d) $S = \{0, 1, 2, 3\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \geq 4$.
- e) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x = y \text{ hay } x + 2y = 4)$.
- f) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x + 2) \mid y$.

Bài 6.3 Xét các tính chất của quan hệ \mathcal{R} trên S nếu

- a) $S = \mathbb{Z}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y^2$.

- b) $S = \mathbb{Z}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y$ không chia hết x^2 .
- c) $S = \mathbb{Q}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = |y|$.
- d) $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \forall (x, u), (y, v) \in S : (x, u)\mathcal{R}(y, v) \Leftrightarrow x \leq y$.
- e) $S = \mathbb{R}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \neq y$.
- f) $S = \mathbb{R}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = 2^y$ (để ý $2^t > t, \forall t \in \mathbb{R}$).

Bài 6.4 Kiểm chứng \mathcal{R} là một quan hệ tương đương trên S rồi viết các lớp tương đương và tập thương tương ứng:

- a) $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + 5x = y^2 + 5y$.
- b) $S = \{-4, -2, -\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}, 2, 3\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 + 3y = y^3 + 3x$.
- c) $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 21, 24, 25, 35, 42, 48\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2^k y$ (k phụ thuộc x và y).
- d) $S = \{-11\pi/6, -\pi, -4\pi/5, -\pi/4, -\pi/5, -\pi/7, 0, \pi/6, \pi/3, 5\pi/6, \pi, 5\pi/4, 3\pi\},$

$$\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin x = \cos(y + 2 - 1.7\pi).$$

- e) $S = P(E)$ với $E = \{1, 2, 3\}, \forall X, Y \in S : X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$ trong đó $A = \{1, 2\}$.

Bài 6.5 Kiểm chứng \mathcal{R} là một quan hệ tương đương trên $S = \mathbb{R}$ và xác định lớp tương đương $[a]$ của $a \in \mathbb{R}$ tương ứng (biện luận theo tham số thực a)

- a) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + 3x = y^2 + 3y$
- b) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(x - y)$
- c) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 \pm 12y = y^3 \pm 12x$ (xét riêng hai trường hợp $+$ và $-$)
- d) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2y + 7x = xy^2 + 7y$
- e) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 4x + xy^2 = x^2y + 4y$
- f) $\forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \sin(xy)\cos^2 y = 2\cos^2 y - \sin(xy)\cos^2 x$

Bài 6.6 Cho $S = \{a, b, c, d, e, f\}$.

- a) Viết tập hợp \mathcal{R} nếu \mathcal{R} là quan hệ tương đương trên S có 3 lớp tương đương là $\{a, d, f\}, \{c, e\}$ và $\{b\}$.
- b) Trên S có bao nhiêu quan hệ tương đương chia S thành 3 lớp tương đương có số phần tử của các lớp lần lượt là 3, 2, 1 (tương tự như quan hệ tương đương \mathcal{R})?
- c) Trên S có bao nhiêu quan hệ tương đương chia S thành 3 lớp tương đương?

Bài 6.7 Kiểm chứng \mathcal{R} là một quan hệ thứ tự trên S . Hỏi \mathcal{R} là thứ tự toàn phần hay bán phần? Tại sao? Vẽ sơ đồ Hasse cho (S, \mathcal{R}) và tìm min, max và các phần tử tối tiểu và tối đại (nếu có):

- a) $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$
- b) $S = \{2, 3, 4, 6, 8, 16, 24, 32, 48, 96\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y$

- c) $S = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \dot{\vdash} y$
- d) $S = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 24, 48, 96\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \dot{\vdash} y$
- e) $S = \{96, 768, 6, 48, 384, 3, 24\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = 2^k x$ (k phụ thuộc theo x và y)
- f) $S = \{2, 3, \dots, 11, 12\}, \forall x, y \in S : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [(x \text{ lẻ và } y \text{ chẵn}) \text{ hay } (x - y \text{ chẵn và } x \leq y)]$

Bài 6.8 Cho $S = \{a = 2^m 3^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m \leq 3 \text{ và } n \leq 2\}$ với các quan hệ thứ tự $|$ và $\dot{\vdash}$.

- a) Vẽ sơ đồ Hasse và tìm min, max cho $(S, |)$ và $(S, \dot{\vdash})$.
- b) Đặt $T = S \setminus \{1, 2, 72\}$. Vẽ sơ đồ Hasse rồi tìm các phần tử tối tiểu và tối đại của $(T, |)$ và $(T, \dot{\vdash})$.

Bài 6.9 Cho $S = \{a, b, c\}$ với quan hệ thứ tự \prec . Giả sử a là một phần tử tối tiểu và c là một phần tử tối đại của (S, \prec)

- a) Vẽ tất cả các trường hợp khác nhau có thể xảy ra cho sơ đồ Hasse của (S, \prec) .
- b) Yêu cầu như a) nhưng có thêm điều kiện " b cũng là một phần tử tối đại của (S, \prec) "

Bài 6.10 Vẽ sơ đồ Hasse cho (S, \prec) rồi toàn phần hóa (sắp xếp topo) các thứ tự bán phần \prec sau:

- a) $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ với $d \prec a, b \prec e, g \prec e, h \prec f, i \prec e$ và $h \prec d$.
- b) $S = \{1, 2, 4, 5, 12, 15, 20\}$ với \prec là quan hệ $|$.
- c) $S = \{2, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 16\}$ với \prec là quan hệ $\dot{\vdash}$.
- d) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ với \prec là quan hệ $|$.

Bài 6.11 Viết các phần tử sau dưới dạng chuẩn trong \mathbb{Z}_n ($n = 25$ và 38):

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|------------------------------|
| a) $\overline{\pm 95}$ | c) $\overline{\pm 5124}$ | e) $\overline{\pm 815691}$ |
| b) $\overline{\pm 378}$ | d) $\overline{\pm 68047}$ | f) $\overline{\pm 23242423}$ |

Bài 6.12 Làm các phép tính sau rồi viết kết quả dưới dạng chuẩn trong \mathbb{Z}_n ($n = 28$ và 43):

- | | | | |
|---|---|--|------------------------------|
| a) $\overline{52} \pm \overline{-94}$ | c) $\overline{-341} \pm \overline{926}$ | e) $\overline{-7083} \pm \overline{-8646}$ | g) $7 \cdot \overline{9245}$ |
| b) $\overline{52} \cdot \overline{-94}$ | d) $\overline{-341} \cdot \overline{926}$ | f) $\overline{7083} \cdot \overline{8646}$ | h) $\overline{9245}^2$ |

Bài 6.13 Trong \mathbb{Z}_{26} và \mathbb{Z}_{60} , hãy xác định tất cả các phần tử khả nghịch và tìm nghịch đảo của chúng.

Bài 6.14 Giải các phương trình sau trong \mathbb{Z}_n tương ứng:

- | | |
|---|--|
| a) $\overline{3x} = \overline{7} \ (n = 16)$ | d) $\overline{3x} + \overline{9} = \overline{8x} + \overline{61} \ (n = 64)$ |
| b) $\overline{41x} - \overline{51} = \overline{-19x} + \overline{24} \ (n = 105)$ | e) $\overline{21x} + \overline{24} = \overline{108} \ (n = 63)$ |
| c) $\overline{78x} - \overline{13} = \overline{35} \ (n = 666)$ | f) $\overline{5x} + \overline{7} = \overline{6} \ (n = 23)$ |

$$\text{g) } \overline{68}(\overline{x} + \overline{24}) = \overline{102} \ (n = 492)$$

$$\text{h) } \overline{4x} + \overline{3} = \overline{7x} + \overline{12} \ (n = 11)$$

Bài 6.15 Giải các hệ phương trình sau trong \mathbb{Z}_n tương ứng :

$$\text{a) } \begin{cases} \overline{3x} + \overline{2y} = \overline{1} \\ \overline{2x} - \overline{5y} = \overline{-3} \end{cases} \ (n = 7)$$

$$\text{c) } \begin{cases} \overline{5x} - \overline{3y} = \overline{3} \\ \overline{-4x} + \overline{5y} = \overline{-4} \end{cases} \ (n = 6)$$

$$\text{b) } \begin{cases} \overline{4x} + \overline{y} = \overline{-2} \\ \overline{7x} + \overline{3y} = \overline{7} \end{cases} \ (n = 8)$$

$$\text{d) } \begin{cases} \overline{x} + \overline{2z} = \overline{1} \\ \overline{y} + \overline{2z} = \overline{2} \\ \overline{z} + \overline{2x} = \overline{1} \end{cases} \ (n = 3 \text{ và } 5)$$