Chương 1: Hàm nhiều biến

TS. Nguyễn Thị Hoài Thương

Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP.HCM
Khoa Toán Tin học
Bộ môn Giải tích

ngththuong@hcmus.edu.vn

Ngày 28 tháng 5 năm 2023

Giới thiệu môn học

Mục tiêu môn học

- Môn học đóng vai trò cung cấp kiến thức căn bản về toán vi tích phân cho các ngành Công nghệ thông tin, Điện tử-Viễn thông, Vật lý, Hải Dương-Khí tượng và Thuỷ văn, Khoa học vật liệu,... giúp sinh viên có nền tảng toán phục vụ cho các môn học chuyên ngành.
- Dẫn nhập vào các khái niệm và kỹ thuật Giải tích Toán học, với hai nội dung chính là phép tính vi phân và phép tính tích phân của hàm nhiều biến.

Tài liệu môn học

- Calculus Early Transcendentals 7^{th} edition, James Stewart-THOMSON, 2008.
- Bộ môn Giải tích, Giáo trình Vi tích phân 2, Khoa Toán - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh.
- Dương Minh Đức, Giáo trình Toán Giải tích 1 (Toán vi tích phân A1), NXB Thống kê, Tp. Hồ Chí Minh, 2006.

Giới thiệu môn học

- Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đặng Đức Trọng, Giải tích hàm một biến, NXB Giáo dục, 2002.
- K.A. Stroud and D.J. Booth, Advanced engineering mathematics, 2001.

Đánh giá môn học

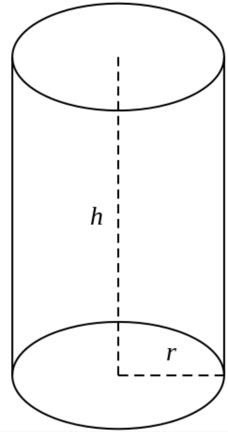
- Bài tập: 20%
- Giữa kì: 30%
- Cuối kì: 40%

Mục lục

Các khái niệm cơ bản hàm nhiều biến

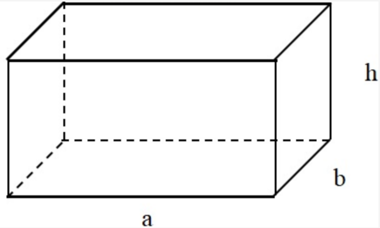
Bài toán thực tế

1. Thể tích V của hình trụ tròn phụ thuộc vào bán kính r và chiều cao h theo công thức $V = \pi r^2 h$. Như vậy, V là hàm phụ thuộc vào hai biến r và h, và ta viết $V(r, h) = \pi r^2 h$.



Bài toán thực tế

2. Thể tích V của hình hộp chữ nhật phụ thuộc vào độ dài hai cạnh đáy a, b và chiều cao h theo công thức $V = abh$. Như vậy, V là hàm phụ thuộc vào ba biến a, b và h, và ta viết $V(a, b, h) = abh$



Định nghĩa hàm hai biến

Định nghĩa

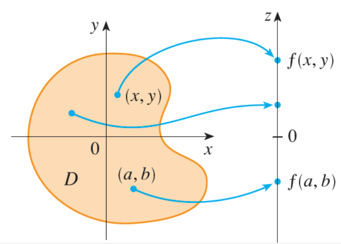
Hàm hai biến f là một quy luật ứng với mỗi cặp số thực được sắp xếp thứ tự $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ ta luôn xác định được duy nhất một số thực $z = f(x, y$. Kí hiệu:

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

- Tập hợp D được gọi là miền xác định của hàm số f và được kí hiệu là $D(f)$.
- Tập hợp $E = \{z, \exists (x, y) \in D : z = f(x, y)\}$ được gọi là miền giá trị của hàm số f và được kí hiệu $E(f)$.

Lưu ý: Nếu hàm f được xác định bởi biểu thức cụ thể thì miền xác định của f là tập hợp tất cả những điểm (x, y) sao cho biểu thức xác định hàm có nghĩa.

Miền xác định và miền giá trị



Hình 1: Miền xác định, miền giá trị của hàm hai biến

- Miền xác định D được biểu diễn như một tập con của mặt phẳng Oxy.
- Miền giá trị E là một tập hợp các số trên một đường thẳng thực, được biểu diễn như một trục z.

Ví dụ: Nếu $f(x, y)$ biểu diễn nhiệt độ tại một điểm (x, y) trong một đĩa kim loại phẳng có dạng D, ta có thể hình dung trục z là một nhiệt kế hiển thị nhiệt độ đo được.

Ví dụ: Tính $f(3,2)$, tìm và vẽ miền xác định của hàm số

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}.$$

Miền xác định và miền giá trị

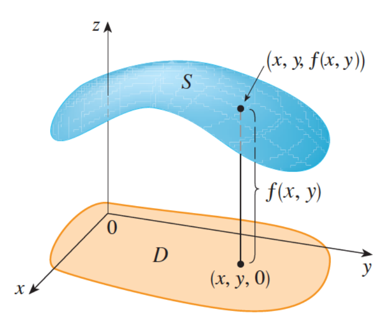
Ví dụ: Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Đồ thị của hàm số hai biến số

Định nghĩa

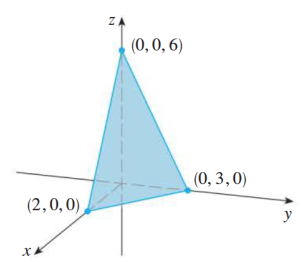
Nếu f là hàm hai biến với miền xác định D thì **đồ thị** của f là tập hợp tất cả các điểm (x, y, z) trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $z = f(x, y)$ và $(x, y) \in D$.



Đồ thị của hàm hai biến f là một mặt cong S với phương trình
$z = f(x, y)$.

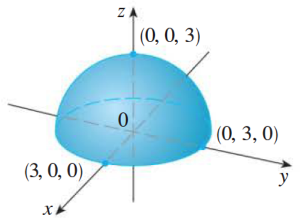
Đồ thị của hàm số hai biến số

Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.



Đồ thị của hàm số hai biến số

Ví dụ: Vẽ đồ thị $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



Đường mức/Đường đẳng trị

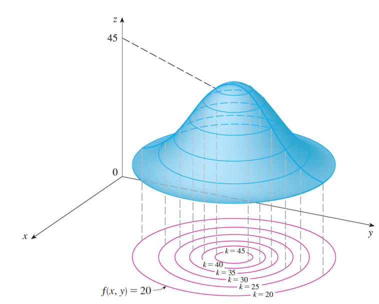
Định nghĩa

Đường mức/Đường đẳng trị của hàm hai biến f là các đường cong có phương trình $f(x, y) = k$, trong đó k là hằng số (trong miền giá trị của f).

Đường mức/đường đẳng trị $f(x, y) = k$ là tập hợp tất cả các điểm trong miền xác định của f mà tại đó f nhận giá trị k đã cho. Nói cách khác, nó biểu diễn những vị trí trên đồ thị f có chiều cao k.

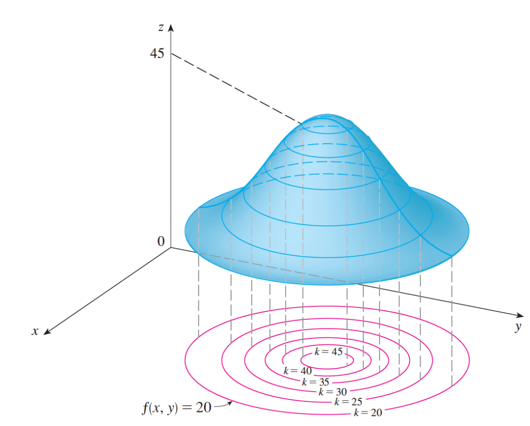
Đường mức/Đường đẳng trị

Mối liên hệ giữa đường mức và các mặt cắt ngang được thể hiện qua hình vẽ sau:



- Các đường mức $f(x, y) = k$ chính là mặt cắt của đồ thị f trong mặt ngang $z = k$ được chiếu xuống mặt phẳng Oxy.
- Vì vậy, nếu bạn vẽ các đường mức của một hàm số và hình dung chúng được nâng lên đến mặt tại chiều cao ấn định thì bạn có thể ráp lại với nhau thành hình ảnh của đồ thị.

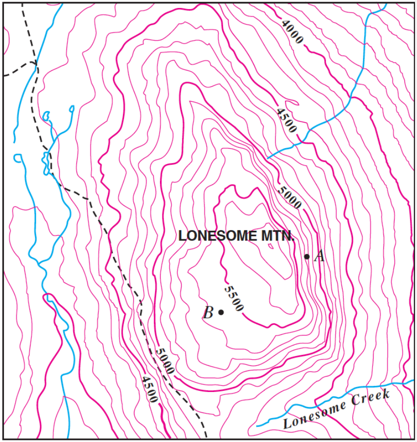
Đường mức/Đường đẳng trị



- Mặt dốc khi các đường đồng mức gần nhau. Nó phẳng hơn khi các đường đồng mức xa nhau hơn.

Đường mức/Đường đẳng trị

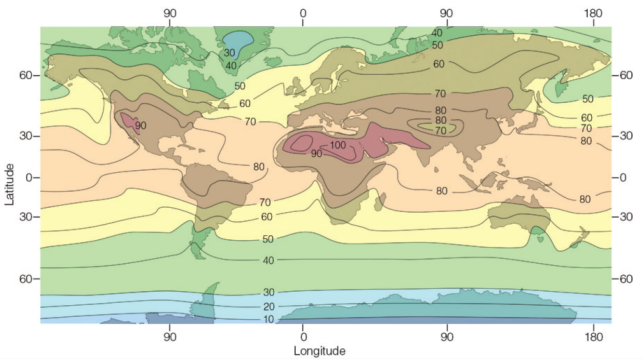
Đường đẳng trị được ứng dụng trong việc mô tả các đặc điểm trong bản đồ địa lí, ví dụ như độ cao, nhiệt độ,...



Hình 2: Bản đồ địa hình của vùng Lonesome MTN

- Các đường mức là các đường cong có độ cao không đổi so với mực nước biển.
- Nếu bạn đi dọc theo một trong số các đường này, bạn không đi lên cũng không đi xuống.

Đường mức/Đường đẳng trị

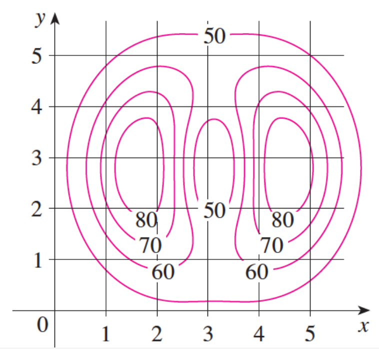


Hình 3: Nhiệt độ trung bình của mực nước biển trên thế giới vào tháng 7

- Các đường mức được gọi là đường đẳng nhiệt và nối các vị trí có cùng nhiệt độ.
- Đường đẳng nhiệt là các đường cong chia bản đồ thành các dải màu sắc.

Đường mức/Đường đẳng trị

Ví dụ: Đường mức của hàm f được cho như sau:



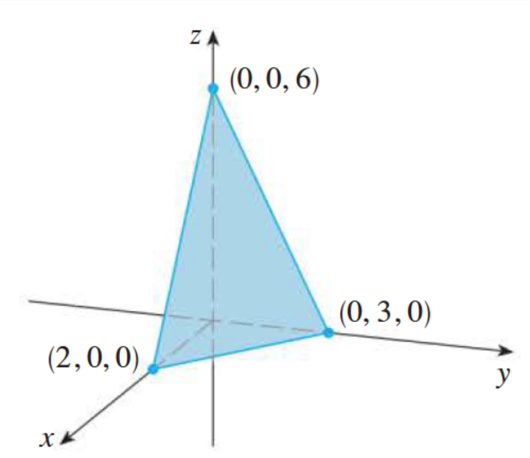
Tính các giá trị $f(1,3)$.

Đường mức/Đường đẳng trị

Ví dụ: Vẽ các đường mức của hàm số $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ với các giá trị $k = -6, 0, 6, 12$.

Đường mức/Đường đẳng trị

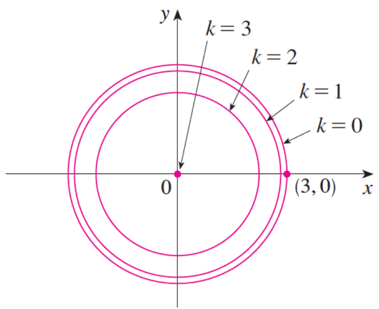
Các đường mức là các đường thẳng song song và cách đều nhau bởi vì đồ thị của f là một mặt phẳng.



Đường mức/Đường đẳng trị

Ví dụ: Vẽ các đường mức của hàm số sau với $k = 0, 1, 2, 3$

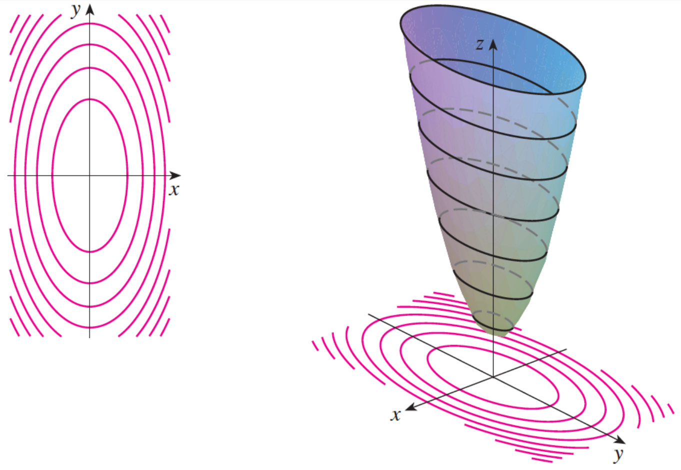
$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$



Đường mức/Đường đẳng trị

Ví dụ: Vẽ vài đường mức của hàm $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

Đường mức/Đường đẳng trị



Hình 4: Biểu đồ đường mức (hình trái) và các mặt cắt ngang là các đường mức được nâng lên (hình phải).

Định nghĩa hàm nhiều biến

Định nghĩa:

Hàm số n biến số f là một quy luật ứng với mỗi bộ n số thực được sắp xếp thứ tự $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, ta luôn xác định được duy nhất một số thực $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Kí hiệu:

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) &\mapsto u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

Miền xác định

Ví dụ: Tìm miền xác định của f nếu

$$f(x, y, z) = ln(z - y) + xy \sin(z).$$

Mặt mức

Rất khó để hình dung một hàm ba biến f bằng đồ thị của nó vì nó nằm trong không gian bốn chiều.
Ta có thể tìm hiểu hàm ba biến f bằng cách xem xét **các mặt mức** của nó

Định nghĩa

Mặt mức của hàm ba biến $f(x, y, z)$ là các mặt có phương trình $f(x, y, z) = k$ trong đó k là một hằng số.

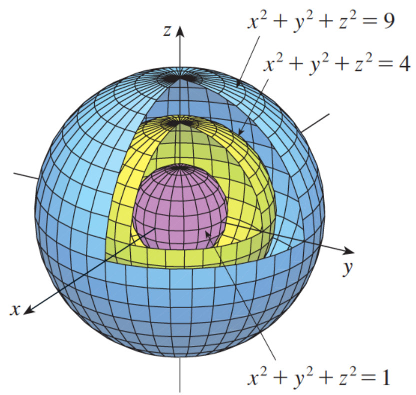
Nếu điểm (x, y, z) di chuyển dọc theo mặt mức thì giá trị của $f(x, y, z)$ không đổi.

Mặt mức

Ví dụ: Tìm các mặt mức của hàm số

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Giải:



Giới hạn của hàm nhiều biến

Định nghĩa

Cho f là hàm số hai biến xác định trên D và (a, b) là điểm tụ của D, nghĩa là, D luôn chứa những điểm có thể gần (a, b) tùy ý. **Giới hạn** của $f(x, y)$ khi (x, y) tiến về (a, b) bằng L nếu:
Với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, theo đó có một số $\delta > 0$ sao cho

$$\text{nếu } \begin{cases} (x, y) \in D \\ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \end{cases} \quad \text{thì } |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Kí hiệu:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L.$
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = L$
- $f(x, y) \to L$ khi $(x, y) \to (a, b)$.

Giới hạn của hàm nhiều biến

Lưu ý rằng

- $|f(x,y) - L|$ là sai số giữa $f(x,y)$ và L.
- $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ là khoảng cách giữa hai điểm (x,y) và (a,b) trên mặt phẳng Oxy.

Do đó, giới hạn trên được hiểu là sai số giữa $f(x,y)$ và L có thể nhỏ tùy ý, miễn là điểm (x,y) đủ gần (và không trùng) điểm (a,b).

Định lí: (Giới hạn kẹp)

Giả sử

- Tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$.
- Bất đẳng thức $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ đúng với mọi (x,y) trong một đĩa tròn nào đó có tâm (a,b).

Khi đó: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

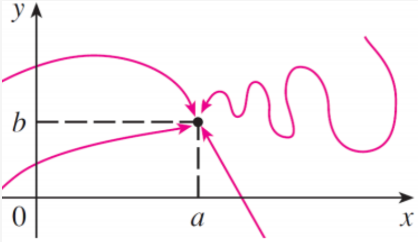
Giới hạn của hàm nhiều biến

Ví dụ

Khảo sát giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ với $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

Giới hạn của hàm nhiều biến - Dấu hiệu nhận biết không tồn tại giới hạn

- Trong giới hạn $\lim_{x \to a} f(x)$ của hàm một biến, x tiến về a theo hai hướng trái và phải. Giới hạn $\lim_{x \to a} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi tồn tại $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.
- Trong giới hạn $\lim_{(x,y) \to (a,b)}$ của hàm hai biến thì điểm (x, y) có thể tiến về (a, b) theo vô số hướng, miễn là (x, y) vẫn nằm trong miền xác định của f.



Giới hạn của hàm nhiều biến - Dấu hiệu nhận biết không tồn tại giới hạn

Định lí

Nếu $f(x,y) \to L_1$ khi $(x,y) \to (a,b)$ dọc theo đường C_1; $f(x,y) \to L_2$ khi $(x,y) \to (a,b)$ dọc theo đường C_2 và $L_1 \neq L_2$ thì không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Để chứng tỏ f không có giới hạn tại (a,b), ta cũng có thể chỉ ra hai dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ và $M'_n(x'_n, y'_n)$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = a$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y'_n = b$$

nhưng hai dãy số $f(x_n, y_n)$ và $f(x'_n, y'_n)$ hội tụ về hai giá trị L_1 và L_2 khác nhau.

Giới hạn của hàm nhiều biến - Dấu hiệu nhận biết không tồn tại giới hạn

Ví dụ

Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ với $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

Giới hạn của hàm nhiều biến - Dấu hiệu nhận biết không tồn tại giới hạn

Tính chất của giới hạn

Các tính chất bảo toàn phép tính của giới hạn của hàm một biến, ví dụ như giới hạn của tổng bằng tổng các giới hạn,..., cũng áp dụng được cho giới hạn của hàm số hai biến, miễn là tất cả các giới hạn tồn tại khi áp dụng tính chất này.

Sự liên tục

Định nghĩa

- Hàm số hai biến f xác định trên D được gọi là **liên tục tại điểm** $(a, b) \in D$ nếu

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

- Hàm số hai biến f **liên tục trên** D (hoặc nói vắn tắt là liên tục) nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Định lí

Hàm hằng cùng với hai hàm hình chiếu p_1 và p_2 định bởi

$$p_1(x, y) = x, \quad p_2(x, y) = y$$

là các hàm liên tục.

Sự liên tục

Định lí (Tính bảo toàn sự liên tục qua phép toán)

- Nếu các hàm số (hai biến) liên tục thì tổng, hiệu, tích và thương (nếu thương có nghĩa) của chúng cũng là một hàm số liên tục.
- Nếu f là hàm số hai biến liên tục (hoặc liên tục tại (a, b)) và g là hàm số hai biến liên tục (hoặc liên tục tại (a, b)) thì hàm hợp $g \circ f$ là hàm hai biến liên tục (hoặc liên tục tại (a, b)).

Sự liên tục

Ví dụ

Hãy giải thích sự liên tục của hàm số f định bởi $f(x, y) = \dfrac{x - y}{2x^2 + y^2}$.

Sự liên tục

Ví dụ

Khảo sát sự liên tục của hàm f và g định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sự liên tục

Định lí (Tính liên tục của hàm sơ cấp)

Các hàm sơ cấp một biến (sin, hàm mũ, logarit,... xem lại vi tích phân 1B) và các hàm hình chiếu tổ hợp với nhau thông qua các phép toán của định lí 1.4 sẽ tạo ra các hàm hai biến liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định, mà ta gọi là các hàm hai biến sơ cấp.

Ví dụ: hàm g cho bởi $g(x,y) = \ln\left(\dfrac{x-y}{2x^2+y^2}\right)$ là hàm sơ cấp liên tục, vì sao?

Đạo hàm riêng hàm nhiều biến

Định nghĩa đạo hàm riêng cấp 1

Định nghĩa

Cho f là một hàm theo hai biến x và y

- Nếu ta xem y như là hằng số và lấy đạo hàm theo x, ta được đạo hàm riêng của f theo x, kí hiệu bởi

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

- Tương tự, ta được đạo hàm riêng của f theo y, kí hiệu bởi

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Định nghĩa đạo hàm riêng cấp 1

Các kí hiệu của đạo hàm riêng

Nếu viết $z = f(x, y)$, người ta cũng có nhiều kí hiệu khác cho đạo hàm riêng như sau

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f.$$

Định nghĩa đạo hàm riêng cấp 1

Ví dụ: Cho $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, tìm $f_x(2, 1)$ và $f_y(2, 1)$

Định nghĩa đạo hàm riêng cấp 1

Ví dụ: Tìm f_x và f_y với f định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Định nghĩa đạo hàm riêng cấp 1

Vai trò của x và y giống nhau trong biểu thức f, ta đổi vai trò của x và y trong biểu thức f_x sẽ được

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2x}{(y^2+x^2)^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ý nghĩa của đạo hàm riêng

Ý nghĩa vật lý:

- $f_x(x_0, y_0)$ mô tả tốc độ biến thiên/thay đổi của f khi (x, y) thay đổi theo chiều dương của trục Ox đi qua (x_0, y_0).
- $f_y(x_0, y_0)$ mô tả tốc độ biến thiên/thay đổi của f khi (x, y) thay đổi theo chiều dương của trục Oy đi qua (x_0, y_0).

Ý nghĩa của đạo hàm riêng

Ví dụ:Chỉ số nhiệt I là nhiệt độ mà cơ thể cảm nhận được và được biểu diễn dưới dạng

$$I = f(T, h)$$

trong đó T là nhiệt độ không khí (^0C), h là độ ẩm không khí $(\%)$, I lấy đơn vị là ^0C. Hãy cho biết các giá trị $f'_T(40, 30) = 2$, $f'_h(40, 30) = 0.75$ nói lên điều gì?

Ý nghĩa của đạo hàm riêng

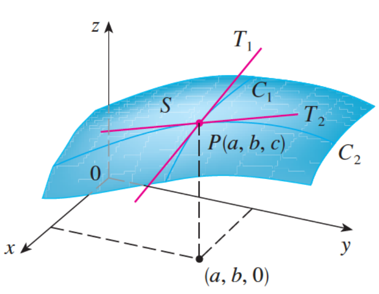
Ví dụ: Nhiệt độ ^0C tại một điểm (x, y) trên một tấm kim loại trong mặt phẳng Oxy là: $T(x, y) = x^3 + 2y^2 + x$. Giả sử rằng khoảng cách được đo bằng cm. Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ theo khoảng cách nếu chúng ta bắt đầu tại điểm $(1, 2)$ và di chuyển:

a. Sang bên phải và song song với trục Ox.

b. Hướng lên và song song với trục Oy.

Ý nghĩa của đạo hàm riêng

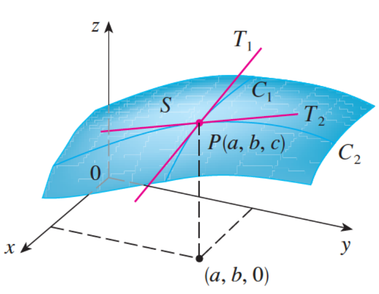
Ý nghĩa hình học:



Đồ thị của hàm $z = f(x, y)$ là mặt cong S. Nếu $f(a, b) = c$ thì điểm $P(a, b, c)$ nằm trên S.

- Khi cố định $y = b$, đường cong C_1 là giao của mặt phẳng đứng $y = b$ và S.
- Khi cố định $x = a$, đường cong C_2 là giao của mặt phẳng đứng $x = a$ và S.

Ý nghĩa của đạo hàm riêng



Lưu ý:

- Đường cong C_1 là đồ thị của hàm số $g(x) = f(x, b)$, vì vậy hệ số góc của tiếp tuyến T_1 tại P là $g'(a) = f_x(a, b)$.
- Đường cong C_2 là đồ thị của hàm số $h(y) = f(a, y)$, vì vậy hệ số góc của tiếp tuyến T_2 tại P là $h'(b) = f_y(a, b)$.

Ý nghĩa của đạo hàm riêng

Tóm lại, ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ tại điểm (a, b) là

- $f_x(a, b)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_1 với đường cong C_1 (trong đó C_1) là giao tuyến của mặt cong S với mặt phẳng $y = b$.
- $f_y(a, b)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_2 với đường cong C_2 (trong đó C_2) là giao tuyến của mặt cong S với mặt phẳng $x = a$.

Ý nghĩa của đạo hàm riêng

Ví dụ: Cho $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tìm $f_x(1, 1), f_y(1, 1)$ và nêu ý nghĩa hình học của chúng.

Ý nghĩa của đạo hàm riêng

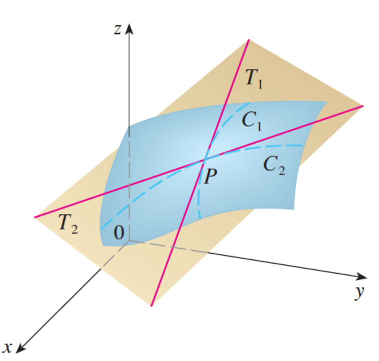
Ví dụ: Cho mặt cong S

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2y - 1.$$

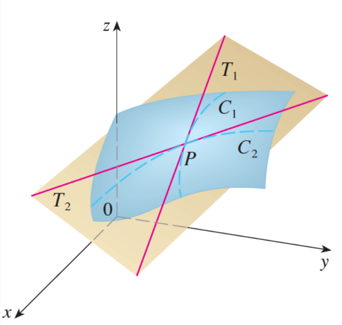
Tìm hệ số góc tiếp tuyến của giao tuyến giữa mặt cong S và mặt phẳng $y = 3$ tại điểm $P(-1, 3, 27)$. Hãy cho biết khi (x, y) đi qua $M(-1, 3)$ thoe hướng Ox thì độ cao của mặt cong đang tăng hay giảm?

Mặt phẳng tiếp xúc

Cho $z = f(x, y)$ có đồ thị là mặt cong S. Hàm số f có đạo hàm riêng cấp một liên tục và cho $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là một điểm trên mặt cong S.
C_1 và C_2 lần lượt là những đường cong giao tuyến của mặt phẳng $y = y_0$ và $x = x_0$ với đường cong S.
T_1 và T_2 lần lượt là những tiếp tuyến với đường cong C_1, C_2 tại điểm P.



Mặt phẳng tiếp xúc



Định nghĩa

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong S tại điểm $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là mặt phẳng chứa 2 tiếp tuyến T_1 và T_2 và có phương trình là

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Mặt phẳng tiếp xúc

Ví dụ: Tìm mặt phẳng tiếp xúc với paraboloid elliptic $z = 2x^2 + y^2$ tại điểm $(1, 1, 3)$.

Xấp xỉ tuyến tính

Từ ví dụ trên ta thấy rằng hàm tuyến tính $L(x, y) = 4x + 2y - 3$

- là một xấp xỉ tốt của hàm $f(x, y)$ khi (x, y) nằm gần $(1, 1)$.
- được gọi là **hàm tuyến tính hóa** của hàm f tại điểm $(1, 1)$ và xấp xỉ

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

được gọi là **xấp xỉ tuyến tính** của hàm f tại $(1, 1)$.

Xấp xỉ tuyến tính

Định nghĩa

Nếu phương trình mặt phẳng tiếp diện của $z = f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) là

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

thì hàm

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

được gọi là **hàm tuyến tính hóa** của hàm f tại (x_0, y_0) và sự xấp xỉ

$$z = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

được gọi là **xấp xỉ tuyến tính** của hàm f tại (x_0, y_0).

Xấp xỉ tuyến tính

Ví dụ: Tìm hàm số $z = f(x, y)$ để tính gần đúng giá trị của biểu thức $\sqrt[3]{1.02^2 + 0.05^2}$.

Đạo hàm cấp cao

Nếu $f(x,y)$ là hàm hai biến thì f_x và f_y cũng là các hàm hai biến.

Đạo hàm riêng cấp cao

Lấy các đạo hàm riêng của f_x và f_y, ta sẽ có bốn đạo hàm riêng $(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x, (f_y)_y$ được gọi là **các đạo hàm riêng cấp hai** của f. Ta có các kí hiệu sau

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Đạo hàm cấp cao

Ví dụ: Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

Đạo hàm cấp cao

Định lí Clairaut

Giả sử hàm số $f(x, y)$ xác định trên miền D. Khi đó, nếu f_{xy} và f_{yx} là các hàm liên tục trên D thì với mọi $(x_0, y_0) \in D$, ta có

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Ví dụ: Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số

$$f(x, y) = xye^y.$$

Đạo hàm cấp cao

Ta cũng có thể định nghĩa các đạo hàm riêng cấp ba hoặc cấp cao hơn. Ví dụ

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

và bằng cách sử dụng Định lí Clairaut, ta có thể chứng minh $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ nếu các hàm này liên tục.

Ví dụ: Cho hàm số $f(x, y) = \sin(xy)$. Tính $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ và $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

Hàm khả vi

Hàm khả vi

Hàm số $f(x,y)$ được gọi là **khả vi** tại điểm (x_0,y_0) nếu số gia toàn phần $\Delta f := f(x,y) - f(x_0,y_0)$ được biểu diễn dưới dạng

$$\Delta f = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1(x-x_0) + \varepsilon_2(y-y_0)$$

trong đó ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

Đôi khi rất khó sử dụng trực tiếp định nghĩa trên để kiểm tra tính khả vi của hàm số, định lí sau sẽ cho chúng ta điều kiện đủ để hàm số $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0)

Định lí

Nếu đạo hàm riêng f_x và f_y tồn tại trong lân cận điểm (x_0,y_0) và liên tục tại (x_0,y_0) thì f khả vi tại (x_0,y_0).

Chú ý: Nếu f_x, f_y **không** liên tục tại điểm (x_0,y_0) thì **chưa kết luận được** hàm $f(x,y)$ **không** khả vi tại (x_0,y_0).

Hàm khả vi

Ví dụ: Chứng minh rằng, hàm $f(x, y) = xe^{xy}$ khả vi tại $(1, 0)$ và tìm tuyến tính hóa của nó tại $(1, 0)$. Sau đó, sử dụng nó để tính xấp xỉ $f(1.1, -0.1)$.

Vi phân

Vi phân

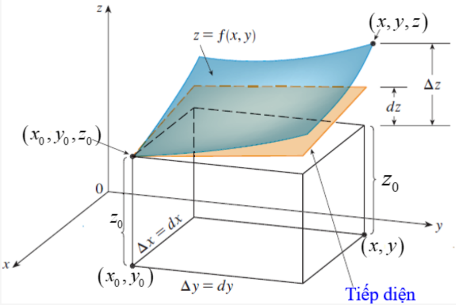
Nếu hàm số $z = f(x, y)$ **khả vi** tại điểm (x_0, y_0) thì **vi phân** của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) là

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy. \tag{4.1}$$

Nếu ta cho $dx = \Delta x = x - x_0$ và $dy = \Delta y = y - y_0$ khi đó vi phân của f ở phương trình (4.1) trở thành

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Vi phân



Ý nghĩa hình học:

- Vi phân df biểu diễn sự thay đổi độ cao của mặt phẳng tiếp diện so với mặt phẳng $z = f(x_0, y_0)$
- Số gia Δf biểu diễn sự thay đổi độ cao của mặt cong $z = f(x, y)$ so với mặt phẳng $z = f(x_0, y_0)$

khi cho (x, y) thay đổi từ (x_0, y_0) đến $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Vi phân

Ví dụ: Cho $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

a) Tìm df.

b) Cho x thay đổi từ 2 đến 2.05 và y thay đổi từ 3 đến 2.96. Hãy so sánh giá trị của $\Delta f(2,3)$ và $df(2,3)$.

Ví dụ: Tại nhà máy A, mặt hàng B được sản xuất mỗi ngày với số lượng

$$Q(x, y) = 0.08x^2 + 0.12xy + 0.03y^2 \quad \text{(đơn vị sản phẩm)}$$

trong đó x và y lần lượt là số giờ làm việc của công nhân lành nghề và chưa lành nghề. Hiện tại có 80 giờ làm việc của công nhân lành nghề và 200 giờ làm việc của công nhân chưa lành nghề mỗi ngày. Dùng vi phân ước tính sự thay đổi số lượng sản phẩm tạo trong ngày nếu tăng thêm 1/2 giờ làm việc cho công nhân lành nghề và 2 giờ làm việc cho công nhân chưa lành nghề.

Vi phân cấp cao

Vi phân cấp một của hàm $f(x,y)$ tại (x_0,y_0) là

$$df(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy.$$

Vi phân cấp hai của hàm $f(x,y)$ tại (x_0,y_0) là

$$\begin{aligned}
d^2 f(x_0,y_0) &= d\Big(df(x_0,y_0)\Big) = d\Big(f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy\Big)\\
&= \Big(f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy\Big)_x dx + \Big(f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy\Big)_y dy\\
&= f_{xx}(x_0,y_0)dx^2 + f_{yx}(x_0,y_0)dy\,dx + f_{xy}(x_0,y_0)dx\,dy + f_{yy}(x_0,y_0)dy^2\\
&= f_{xx}(x_0,y_0)dx^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)dx\,dy + f_{yy}(x_0,y_0)dy^2.
\end{aligned}$$

Định nghĩa

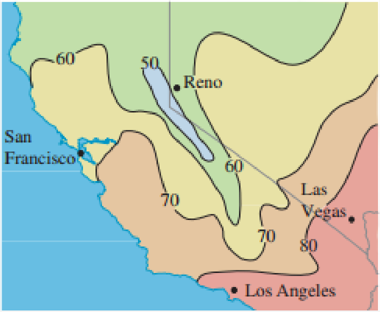
Vi phân cấp $n \in \mathbb{N}$ của hàm $f(x,y)$ tại (x_0,y_0) là

$$d^n f(x_0,y_0) = d\Big(d^{n-1} f(x_0,y_0)\Big) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k} dx^{n-k} dy^k.$$

Vi phân cấp cao

Ví dụ: Tìm vi phân cấp hai của $f(x, y) = x^2y + y^3 + x^3 + \dfrac{y}{x}$ tại $x = 1, y = 2$.

Đạo hàm theo hướng



Hình: Đường đẳng trị của hàm nhiệt độ $T(x, y)$ tại bang California.

- Đạo hàm riêng T_x tại thành phố Reno cho ta biết tốc độ thay đổi nhiệt độ khi chúng ta di chuyển theo phương ngang.
- Đạo hàm riêng T_y biểu diễn tốc độ thay đổ nhiệt độ theo hướng thẳng đứng.

Nếu chúng ta cần biết tốc độ thay đổi nhiệt độ khi chúng ta di chuyển từ Reno đến Las Vegas thì phải tính như thế nào?

Đạo hàm theo hướng

Đạo hàm theo hướng

Đạo hàm theo hướng của f tại (x_0, y_0) theo hướng của vectơ đơn vị $\overrightarrow{u} = (a, b), (a^2 + b^2 = 1)$ là

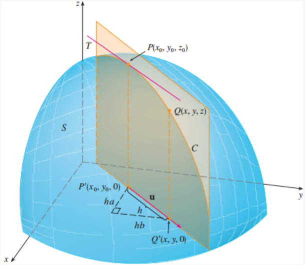
$$D_{\overrightarrow{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Lưu ý: Với hai hướng đặc biệt, $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ và $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ thì $D_{\overrightarrow{i}} f(x_0, y_0)$ trở thành đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$ và $D_{\overrightarrow{j}} f(x_0, y_0)$ trở thành đạo hàm riêng $f_y(x_0, y_0)$.

Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng

Giả sử chúng ta cần tìm tốc độ thay đổi của hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) theo hướng của vectơ đơn vị $\overrightarrow{u} = (a, b), (a^2 + b^2 = 1)$.



- Hàm số $z = f(x, y)$ có đồ thị là mặt cong S.
- Cho $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là một điểm nằm trên mặt cong S.
- Mặt phẳng thẳng đứng đi qua P theo hướng vectơ $\overrightarrow{u}$ sẽ cắt mặt cong S theo đường cong C.

$\Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến T với đường cong C tại điểm P chính là tốc độ thay đổi của hàm số $z = f(x, y)$ theo hướng của vectơ $\overrightarrow{u}$ (còn được gọi là đạo hàm theo hướng của f theo hướng của $\overrightarrow{u}$).

Đạo hàm theo hướng

Khi tính đạo hàm theo hướng của một hàm số, chúng ta sử dụng công thức trong định lí sau

Định lí

Nếu $f(x,y)$ là một hàm khả vi thì f có đạo hàm theo hướng của vectơ đơn vị $\overrightarrow{u} = (a,b), (a^2+b^2=1)$ và

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b. \tag{5.1}$$

Đạo hàm theo hướng

Ví dụ: Tìm đạo hàm theo hướng của vectơ $\overrightarrow{u}$ tạo với tia Ox góc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ tại điểm $(1, 2)$ của hàm số $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$.

Vectơ Gradient

Định nghĩa

Cho $z = f(x, y)$. Khi đó, **vectơ gradient** của hàm số f được định nghĩa như sau

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) .$$

Ví dụ: Cho $f(x, y) = \sin(x) + e^{xy}$. Tìm vectơ gradient $\nabla f(0, 1)$.

Vectơ Gradient

Theo công thức tính đạo hàm theo hướng (5.1), ta có định lí sau

Định lí

Cho $z = f(x,y), \overrightarrow{u} = (a,b), \left(a^2+b^2=1\right)$. Khi đó

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x,y) = \left\langle \nabla f(x,y), \overrightarrow{u} \right\rangle . \tag{6.1}$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm của hàm số $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ theo hướng vectơ $\overrightarrow{v} = (2,5)$ tại điểm $(2,-1)$.

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng

- Xét hàm 2 biến $f(x, y)$ và một điểm (x, y) thuộc miền xác định.
- Giả sử tồn tại $D_{\overrightarrow{u}} f(x, y)$ theo mọi hướng $\overrightarrow{u}$.

Câu hỏi đặt ra là

- Đi theo hướng nào, giá trị của $f(x, y)$ sẽ thay đổi nhanh nhất, tức là giá trị của $D_{\overrightarrow{u}} f(x, y)$ lớn nhất?
- Đi theo hướng nào, giá trị của $f(x, y)$ sẽ thay đổi chậm nhất, tức là giá trị của $D_{\overrightarrow{u}} f(x, y)$ nhỏ nhất?

Định lí (Cực trị hóa đạo hàm theo hướng)

Giả sử $f(x, y)$ là hàm khả vi. Khi đó

- Giá trị lớn nhất của $D_{\overrightarrow{u}} f(x, y)$ là $|\nabla f(x, y)|$ và đạt được khi $\overrightarrow{u}$ cùng hướng với vectơ $\nabla f(x, y)$.
- Giá trị nhỏ nhất của $D_{\overrightarrow{u}} f(x, y)$ là $-|\nabla f(x, y)|$ và đạt được khi $\overrightarrow{u}$ ngược hướng với vectơ $\nabla f(x, y)$.

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng

Ví dụ: Cho $f(x, y) = xe^y$

a) Tìm tốc độ biến thiên của f tại điểm $P(2, 0)$ theo hướng từ P đến $Q(1/2, 2)$.

b) f có tốc độ biến thiên cực đại theo hướng nào? Tốc độ biến thiên cực đại là bao nhiêu?

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng

Ví dụ: Cho $T(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ là nhiệt độ tại điểm (x, y) trên mặt phẳng. Một con kì nhông đang nằm ở điểm $(1, 3)$ muốn được ấm lên càng nhanh càng tốt. Nó nên bò theo hướng nào?

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng

Ví dụ: Giả sử ta đang đi trên một ngọn núi. Đặt hệ tọa độ mà

- hướng dương của trục Ox là hướng Đông
- hướng dương của trục Oy là hướng Bắc
- hướng dương của trục Oz là hướng vuông góc ra khỏi mặt đất.

Độ cao của ngọn núi được cho bởi

$$z = 1000 - 2x^2 + 3xy - 5y^2.$$

Ta đang ở tại điểm ứng với $x = 1, y = 0$ trên núi.

a) Nếu ta đi theo hướng Nam thì sẽ đi lên cao hơn hay xuống thấp hơn?

b) Nếu ta đi theo hướng Tây Bắc thì sẽ đi lên cao hơn hay xuống thấp hơn?

c) Muốn đi xuống nhanh nhất thì nên đi theo hướng nào?

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng

Ví dụ: Một dòng suối chảy từ trên núi xuống. Quả núi có phương trình

$$f(x, y) = \frac{3000}{x^2 + 2y^2 + 5}.$$

Tại điểm ứng với $x = 5, y = 4$ trên núi, dự đoán dòng suối sẽ chảy theo hướng nào?

Đạo hàm của hàm hợp

Trường hợp 1:

Cho hàm số $z = f(x, y)$, trong đó $x = g(t), y = h(t)$ với $t \in (a, b)$. Khi đó, đạo hàm của hàm số z theo t được tính theo công thức

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ý nghĩa thực tiễn: đạo hàm $z'(t)$ là tốc độ thay đổi của z theo biến t khi điểm (x, y) di chuyển theo đường cong C được xác định bởi phương trình tham số $x = g(t)$ và $y = h(t)$.

Đạo hàm của hàm hợp

Ví dụ: Cho $z = f(x, y) = x^2y + 3xy^4$ và $x = \sin(2t), y = \cos(t)$. Tính $\dfrac{dz}{dt}$ tại $t = 0$.

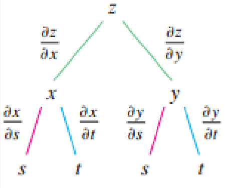
Đạo hàm của hàm hợp

Trường hợp 2:

Cho $z = f(x, y)$, trong đó $x = g(s,t), y = h(s,t)$. Khi đó, đạo hàm của z theo s, t được tính theo công thức

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



Đạo hàm của hàm hợp

Ví dụ: Cho $z = e^x \sin(y)$, trong đó $x = st^2$ và $y = s^2t$. Tìm $\partial z/\partial s$ và $\partial z/\partial t$.

Đạo hàm của hàm hợp

Ví dụ: Cho $z = f(x, y) = \arcsin(y - x)$

a) Tính $f_x(1/2, 1/2)$.

b) Giả sử $x = u^2 + v^2, y = 1 - 2uv$. Tính $\partial z/\partial u$ khi $u = v = 1/2$.

Đạo hàm của hàm hợp

Ví dụ: Một thiết bị dò tìm đang di chuyển trên con đường có dạng

$$x(t) = \sqrt{1+t}, y(t) = 2 + \frac{t}{3}$$

trong đó: x và y được tính theo đơn vị là cm, t được tính theo đơn vị giây. Nhiệt độ sinh ra trên con đường chuyển động của thiết bị là $T = T(x, y)$ (đơn vị: độ C). Biết $T_x(2,3) = 4, T_y(2,3) = 3$. Hỏi nhiệt độ thay đổi thế nào sau 3 giây trên đường thiết bị này di chuyển.

Đạo hàm của hàm ẩn

Giả sử hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Nếu F là **hàm khả vi** thì chúng ta có thể áp dụng Trường hợp 1 của quy tắc đạo hàm hàm hợp để vi phân cả hai vế của phương trình $F(x, y) = 0$ theo x.

- Vì x và y đều là các hàm theo x nên ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

- Vì $dx/dx = 1$ và giả sử $\partial F/\partial y \neq 0$, từ phương trình trên, ta được

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{8.1}$$

Đạo hàm của hàm ẩn

Ví dụ: Tìm đạo hàm tại $x = 1$ của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $y^3 + x^2y - x + 1 = 0$.

Đạo hàm của hàm ẩn

Giả sử hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $F(x, y, z) = 0$. Nếu F là **hàm khả vi** thì chúng ta có thể áp dụng Trường hợp 2 của quy tắc đạo hàm hàm hợp để vi phân cả hai vế của phương trình $F(x, y, z) = 0$ theo x, ta được

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0. \tag{8.2}$$

Vì x và z là các hàm theo x, y không phụ thuộc vào x nên

$$\frac{dx}{dx} = 1, \frac{dy}{dx} = 0.$$

Khi đó, phương trình (8.2) trở thành

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Giả sử $\partial F/\partial z \neq 0$, từ phương trình trên, ta được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z}. \tag{8.3}$$

Đạo hàm của hàm ẩn

Công thức $\partial z/\partial y$ cũng đạt được theo cách tương tự

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{8.4}$$

Đạo hàm của hàm ẩn

Ví dụ: Tìm các đạo hàm riêng tại $(x, y) = (0, 1)$ của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $z - ye^{x/z} = 0$.

Phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến với đường cong $y = y(x)$ được xác định bởi $F(x,y) = 0$

Định lí

Cho đường cong C được xác định bởi $F(x,y) = 0, P(x_0, y_0) \in C$. Khi đó,

- **Phương trình tiếp tuyến** với đường cong C tại điểm P là

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{8.5}$$

- **Pháp tuyến** với đường cong C tại điểm P là đường thẳng vuông góc với tiếp tuyến và được xác định như sau

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0)}. \tag{8.6}$$

Phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến với đường cong $y = y(x)$ được xác định bởi $F(x, y) = 0$

Ví dụ: Tìm phương trình tiếp tuyến, phương trình pháp tuyến tại điểm $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ với đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Mặt phẳng tiếp diện và phương trình pháp tuyến với mặt cong $z = z(x, y)$ được xác định bởi $F(x, y, z) = 0$

Định lí

Cho mặt cong S được xác định bởi $F(x, y, z) = 0, P(x_0, y_0, z_0) \in S$. Khi đó

- **Phương trình mặt phẳng tiếp diện (tiếp xúc)** với mặt cong S tại điểm P là

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{8.7}$$

- **Pháp tuyến** với mặt cong S tại điểm P là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tiếp diện (tiếp xúc) và được xác định như sau:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{8.8}$$

Ví dụ: Tìm phương trình mặt phẳng tiếp diện, phương trình pháp tuyến tại điểm $(-2, 1, -3)$ với ellipsoid

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3.$$

Cực trị tự do

Định nghĩa

- Hàm hai biến $f(x,y)$ đạt **cực đại địa phương** tại điểm (x_0,y_0) nếu
$$f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$
với mọi (x,y) nằm trong lân cận của (x_0,y_0). Giá trị $f(x_0,y_0)$ được gọi là **giá trị cực đại**.
- Hàm hai biến $f(x,y)$ đạt **cực tiểu địa phương** tại điểm (x_0,y_0) nếu
$$f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$$
với mọi (x,y) nằm trong lân cận của (x_0,y_0). Giá trị $f(x_0,y_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu**.

Chú ý: Nếu $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ với mọi $(x,y) \in D_f$ thì f đạt **GTLN (cực đại tuyệt đối)** tại (x_0,y_0). Nếu $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$ với mọi $(x,y) \in D_f$ thì f đạt **GTNN (cực tiểu tuyệt đối)** tại (x_0,y_0).
$\Rightarrow$ Cực đại hay cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

Điều kiện cần để hàm số $z = f(x, y)$ có cực trị tự do

Định lí

Nếu f đạt cực trị địa phương tại điểm (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng cấp một của f tại đó tồn tại thì (x_0, y_0) là **điểm dừng** của f, nghĩa là

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Điều kiện đủ để hàm số $z = f(x, y)$ có cực trị

Định lí

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong lân cận của **điểm dừng** (x_0, y_0). Đặt

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 .$$

- Nếu $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ thì $f(x_0, y_0)$ là cực tiểu địa phương.
- Nếu $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ thì $f(x_0, y_0)$ là cực đại địa phương.
- Nếu $D(x_0, y_0) < 0$ thì $f(x_0, y_0)$ **không phải** là cực đại hoặc cực tiểu địa phương và (x_0, y_0) được gọi là điểm yên ngựa của f.

Chú ý: Trong trường hợp $D(x_0, y_0) = 0$, chúng ta **chưa** thể đưa ra được kết luận. Vì lúc này (x_0, y_0) có thể là điểm cực đại hoặc điểm cực tiểu. Khi đó, ta sẽ dùng định nghĩa để chứng minh (x_0, y_0) là điểm cực đại hoặc điểm cực tiểu hoặc điểm yên ngựa.

Phương pháp tìm cực trị tự do

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên miền xác định $D(f)$. Các bước tìm cực trị tự do của hàm này như sau:

- Bước 1: Tìm điểm dừng và những điểm mà tại đó đạo hàm riêng cấp một không tồn tại

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow P_i(x_i,y_i), i = 1,2,\ldots$$

- Bước 2: Tại điểm $P_i(x_i,y_i)$, tính

$$D(x_i,y_i) = f_{xx}(x_i,y_i) f_{yy}(x_i,y_i) - \left(f_{xy}(x_i,y_i)\right)^2.$$

  - Nếu $D(x_i,y_i) > 0$ và $f_{xx}(x_i,y_i) > 0$ thì hàm đạt **cực tiểu** tại (x_i,y_i).
  - Nếu $D(x_i,y_i) > 0$ và $f_{xx}(x_i,y_i) < 0$ thì hàm đạt **cực đại** tại (x_i,y_i).
  - Nếu $D(x_i,y_i) < 0$ thì hàm **không đạt cực trị** tại (x_i,y_i), lúc này điểm (x_i,y_i) được gọi là điểm yên ngựa của f.
  - Nếu $D(x_i,y_i) = 0$ thì ta phải **xét bằng định nghĩa** $\Delta f = f(x,y) - f(x_i,y_i)$.

Phương pháp tìm cực trị tự do

Ví dụ: Tìm cực trị tự do của hàm số $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Phương pháp tìm cực trị tự do

Ví dụ: Một nghiên cứu về học tập cho biết, ở một người tham gia kiểm tra khả năng ghi nhớ, thông tin được cho như sau: trước hết người đó được cho x phút để đọc 1 danh sách các sự kiện. Sau đó danh sách được mang đi, và người này được cho y phút để ghi nhớ các sự kiện. Điểm số được cho ở dạng

$$f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 10x + y + 15.$$

a. Nếu không có thời gian xem trước và thời gian ghi nhớ, điểm người đó là bao nhiêu?
b. Cần bao nhiêu thời gian để đọc và ghi nhớ thì điểm số sẽ có điểm số cao nhất.

Phương pháp tìm cực trị tự do

Ví dụ: Một cửa hàng lương thực có bán 2 loại gạo A và B. Loại A có giá thu vào là 40 ngàn/túi, loại B có giá thu vào là 30 ngàn/túi. Nếu giá bán loại A là x ngàn/túi, loại B là y ngàn/túi thì số lượng bán ra mỗi ngày là

$$\begin{cases} M_A = 80 - 7x + 6y \\ M_B = 70 + 4x - 5y \end{cases}$$

Hỏi: cửa hàng phải bán các loại gạo với giá nào thì lợi nhuận mỗi ngày là cao nhất (bỏ qua các loại chi phí khác).