Biến ngẫu nhiên

Nguyễn Thị Hồng Nhung
Email: nthnhung@hcmus.edu.vn

Ngày 5 tháng 3 năm 2024

Nội dung

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 1

Thực hiện phép thử tung hai đồng xu cân đối đồng chất.

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 1

Thực hiện phép thử tung hai đồng xu cân đối đồng chất. Không gian mẫu của phép thử này như sau

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 1

Thực hiện phép thử tung hai đồng xu cân đối đồng chất. Không gian mẫu của phép thử này như sau

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$$

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 1

Thực hiện phép thử tung hai đồng xu cân đối đồng chất. Không gian mẫu của phép thử này như sau

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$$

Gọi X là số mặt ngửa xuất hiện. Khi đó, X sẽ nhận các giá trị sau $X(\{SS\}) = 0, X(\{SN\}) = X(\{NS\}) = 1, X(\{NN\}) = 2.$

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 1

Thực hiện phép thử tung hai đồng xu cân đối đồng chất. Không gian mẫu của phép thử này như sau

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$$

Gọi X là số mặt ngửa xuất hiện. Khi đó, X sẽ nhận các giá trị sau $X(\{SS\}) = 0, X(\{SN\}) = X(\{NS\}) = 1, X(\{NN\}) = 2.$

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 2

Gieo một con xúc xắc.
Gọi u_i là sự kiện mặt nhận được có i chấm.

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 2

Gieo một con xúc xắc.
Gọi u_i là sự kiện mặt nhận được có i chấm.

$$\Omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

.

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 2

Gieo một con xúc xắc.
Gọi u_i là sự kiện mặt nhận được có i chấm.

$$\Omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

. Người chơi sẽ nhận được 1\$ *nếu gieo được mặt có 1 chấm, nhận được* 2\$ *nếu gieo được mặt có 2 hoặc 3 chấm và nhận được* 4\$ *nếu gieo được mặt có 4 hoặc 5 hoặc 6 chấm.*

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 2

Gieo một con xúc xắc.
Gọi u_i là sự kiện mặt nhận được có i chấm.

$$\Omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

. Người chơi sẽ nhận được 1\$ *nếu gieo được mặt có 1 chấm, nhận được* 2\$ *nếu gieo được mặt có 2 hoặc 3 chấm và nhận được* 4\$ *nếu gieo được mặt có 4 hoặc 5 hoặc 6 chấm.*
Gọi $X(\$)$ *là số tiền người chơi nhận được sau một lần gieo xúc xắc.*

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 2

Gieo một con xúc xắc.
Gọi u_i là sự kiện mặt nhận được có i chấm.

$$\Omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

. Người chơi sẽ nhận được 1$ *nếu gieo được mặt có 1 chấm, nhận được* 2$ *nếu gieo được mặt có 2 hoặc 3 chấm và nhận được* 4$ *nếu gieo được mặt có 4 hoặc 5 hoặc 6 chấm.*
Gọi X($) là số tiền người chơi nhận được sau một lần gieo xúc xắc.
Khi đó, X sẽ nhận các giá trị sau $\{1, 2, 4\}$.

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 2

Gieo một con xúc xắc.
Gọi u_i là sự kiện mặt nhận được có i chấm.

$$\Omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

. *Người chơi sẽ nhận được* 1$ *nếu gieo được mặt có 1 chấm, nhận được* 2$ *nếu gieo được mặt có 2 hoặc 3 chấm và nhận được* 4$ *nếu gieo được mặt có 4 hoặc 5 hoặc 6 chấm.*
Gọi $X(\$)$ là số tiền người chơi nhận được sau một lần gieo xúc xắc.
Khi đó, X sẽ nhận các giá trị sau $\{1, 2, 4\}$.

$$u_1 \to 1, \quad u_2 \to 2, \quad u_3 \to 2, \quad u_4 \to 4, \quad u_5 \to 4, \quad u_6 \to 4.$$

Hình: *1*

Biến ngẫu nhiên

Ví dụ 2

Gieo một con xúc xắc.
Gọi u_i là sự kiện mặt nhận được có i chấm.

$$\Omega = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

. Người chơi sẽ nhận được 1$ *nếu gieo được mặt có 1 chấm, nhận được* 2$ *nếu gieo được mặt có 2 hoặc 3 chấm và nhận được* 4$ *nếu gieo được mặt có 4 hoặc 5 hoặc 6 chấm.*
Gọi $X(\$)$ là số tiền người chơi nhận được sau một lần gieo xúc xắc.
Khi đó, X sẽ nhận các giá trị sau $\{1, 2, 4\}$.

$$u_1 \to 1, \quad u_2 \to 2, \quad u_3 \to 2, \quad u_4 \to 4, \quad u_5 \to 4, \quad u_6 \to 4.$$

Hình: *1*

Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 1

Biến ngẫu nhiên X *là một ánh xạ từ không gian các biến cố sơ cấp vào* $\mathbb{R}$

Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 1

Biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ không gian các biến cố sơ cấp vào $\mathbb{R}$

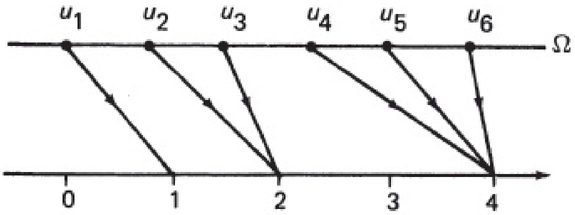
$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 1

Biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ không gian các biến cố sơ cấp vào $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\to X(\omega) \end{aligned}$$

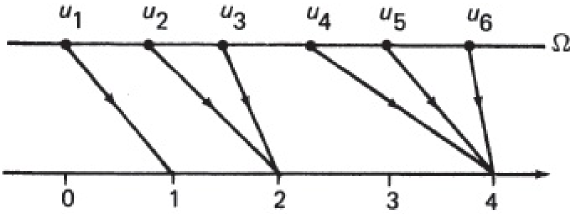


Biến ngẫu nhiên

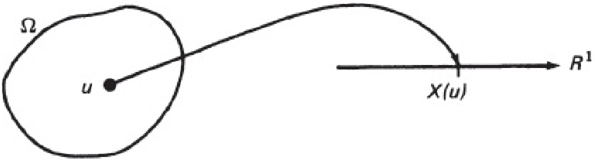
Định nghĩa 1

Biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ không gian các biến cố sơ cấp vào $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\to X(\omega) \end{aligned}$$

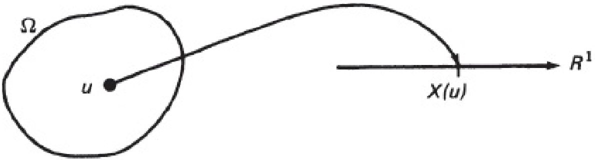


Biến ngẫu nhiên



Hình: 3

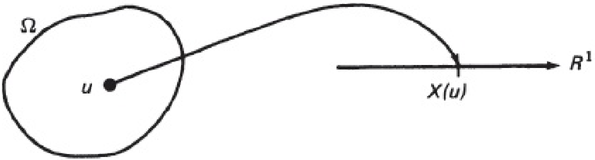
Biến ngẫu nhiên



Hình: 3

Người ta thường dùng các chữ cái in hoa $X, Y, Z,\ldots$ để ký hiệu các biến ngẫu nhiên và các chữ thường $x, y, z,\ldots$ để chỉ các giá trị của biến ngẫu nhiên.

Biến ngẫu nhiên

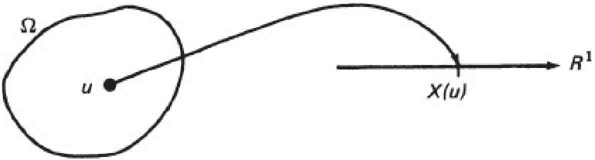


Hình: 3

Người ta thường dùng các chữ cái in hoa $X, Y, Z, \ldots$ để ký hiệu các biến ngẫu nhiên và các chữ thường $x, y, z, \ldots$ để chỉ các giá trị của biến ngẫu nhiên.

Nếu một biến số ngẫu nhiên có tập giá trị hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau, biến số ngẫu nhiên được gọi là rời rạc (Xem ví dụ 2)

Biến ngẫu nhiên

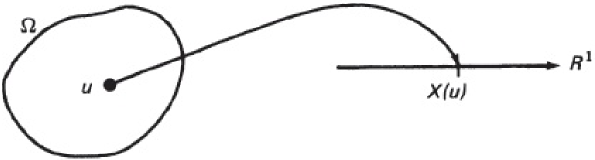


Hình: 3

Người ta thường dùng các chữ cái in hoa X, Y, Z,... để ký hiệu các biến ngẫu nhiên và các chữ thường x, y, z,... để chỉ các giá trị của biến ngẫu nhiên.

Nếu một biến số ngẫu nhiên có tập giá trị hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau, biến số ngẫu nhiên được gọi là rời rạc (Xem ví dụ 2) . Ngược lại nếu tập giá trị của biến số ngẫu nhiên là vô hạn thì biến số ngẫu nhiên đó được gọi là biến số ngẫu nhiên liên tục.

Biến ngẫu nhiên



Hình: 3

Người ta thường dùng các chữ cái in hoa X, Y, Z,... để ký hiệu các biến ngẫu nhiên và các chữ thường x, y, z,... để chỉ các giá trị của biến ngẫu nhiên.

Nếu một biến số ngẫu nhiên có tập giá trị hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau, biến số ngẫu nhiên được gọi là rời rạc (Xem ví dụ 2) . Ngược lại nếu tập giá trị của biến số ngẫu nhiên là vô hạn thì biến số ngẫu nhiên đó được gọi là biến số ngẫu nhiên liên tục.

Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

Kí hiệu

Cho $\mathrm{X} \subset \mathcal{X}$. Ta kí hiệu

$$(\mathrm{X} \subset \mathcal{X}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathcal{X}\}.$$

Chẳng hạn, ta viết

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}.$$

$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}.$$

Quy luật phân phối xác suất

Định nghĩa 2

Một hệ thức cho phép biểu diễn mối quan hệ giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên với xác suất nhận các giá trị tương ứng gọi là luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.

Quy luật phân phối xác suất

Định nghĩa 2

Một hệ thức cho phép biểu diễn mối quan hệ giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên với xác suất nhận các giá trị tương ứng gọi là luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 3 (Hàm phân phối)

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X(xác định trên không gian các biến cố sơ cấp Ω) là hàm $F(x)$ được định nghĩa

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

Quy luật phân phối xác suất

Định nghĩa 2

Một hệ thức cho phép biểu diễn mối quan hệ giữa các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên với xác suất nhận các giá trị tương ứng gọi là luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.

Định nghĩa 3 (Hàm phân phối)

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X(xác định trên không gian các biến cố sơ cấp Ω) là hàm $F(x)$ được định nghĩa

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

Quy luật phân phối xác suất

Định lý 1

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X, $F_X(x)$, có các tính chất

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$,

Quy luật phân phối xác suất

Định lý 1

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X, $F_X(x)$, có các tính chất

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1,$
- $F_X(x)$ *là một hàm không giảm,*

Quy luật phân phối xác suất

Định lý 1

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X, $F_X(x)$*, có các tính chất*

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1,$
- $F_X(x)$ *là một hàm không giảm,*
- $F_X(x)$ *là một hàm liên tục phải tại một giá trị x bất kỳ,*

Quy luật phân phối xác suất

Định lý 1

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X, $F_X(x)$, có các tính chất

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1,$
- *$F_X(x)$ là một hàm không giảm,*
- *$F_X(x)$ là một hàm liên tục phải tại một giá trị x bất kỳ,*
- *Nếu $a \leq b$ thì $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.*

Quy luật phân phối xác suất

Định lý 1

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X, $F_X(x)$, có các tính chất

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1,$
- *$F_X(x)$ là một hàm không giảm,*
- *$F_X(x)$ là một hàm liên tục phải tại một giá trị x bất kỳ,*
- *Nếu $a \leq b$ thì $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.*

Định nghĩa

Định nghĩa 4 (Biến ngẫu nhiên rời rạc)

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau.

Định nghĩa

Định nghĩa 4 (Biến ngẫu nhiên rời rạc)

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau.

Định nghĩa 5 (Hàm xác suất)

Xác suất để biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị $k \in \mathbb{R}$, ký hiệu $p_X(k)$ được xác định như sau

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\})$$

Định nghĩa

Định nghĩa 4 (Biến ngẫu nhiên rời rạc)

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau.

Định nghĩa 5 (Hàm xác suất)

Xác suất để biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị $k \in \mathbb{R}$, ký hiệu $p_X(k)$ được xác định như sau

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\})$$

$p_X(k)$ được gọi là hàm xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

Định nghĩa

Định nghĩa 4 (Biến ngẫu nhiên rời rạc)

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau.

Định nghĩa 5 (Hàm xác suất)

Xác suất để biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị $k \in \mathbb{R}$, ký hiệu $p_X(k)$ được xác định như sau

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\})$$

$p_X(k)$ được gọi là hàm xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

Ví dụ 3

- *Biến ngẫu nhiên trong phép thử tung hai đồng xu ở ví dụ trên là một biến ngẫu nhiên rời rạc.*

Định nghĩa

Định nghĩa 4 (Biến ngẫu nhiên rời rạc)

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau.

Định nghĩa 5 (Hàm xác suất)

Xác suất để biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị $k \in \mathbb{R}$, ký hiệu $p_X(k)$ được xác định như sau

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\})$$

$p_X(k)$ được gọi là hàm xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

Ví dụ 3

- *Biến ngẫu nhiên trong phép thử tung hai đồng xu ở ví dụ trên là một biến ngẫu nhiên rời rạc.*

Định nghĩa

Định nghĩa 4 (Biến ngẫu nhiên rời rạc)

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau.

Định nghĩa 5 (Hàm xác suất)

Xác suất để biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị $k \in \mathbb{R}$, ký hiệu $p_X(k)$ được xác định như sau

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\})$$

$p_X(k)$ được gọi là hàm xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

Ví dụ 3

- *Biến ngẫu nhiên trong phép thử tung hai đồng xu ở ví dụ trên là một biến ngẫu nhiên rời rạc.*

Định nghĩa

Định nghĩa 4 (Biến ngẫu nhiên rời rạc)

Biến ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được của các giá trị khác nhau.

Định nghĩa 5 (Hàm xác suất)

Xác suất để biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị $k \in \mathbb{R}$, ký hiệu $p_X(k)$ được xác định như sau

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\})$$

$p_X(k)$ được gọi là hàm xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

Ví dụ 3

- *Biến ngẫu nhiên trong phép thử tung hai đồng xu ở ví dụ trên là một biến ngẫu nhiên rời rạc.*

Hàm xác suất

Tính chất 1 (Hàm xác suất)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Một hàm giá trị xác suất(gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

Hàm xác suất

Tính chất 1 (Hàm xác suất)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Một hàm giá trị xác suất(gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

(1) $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$

Hàm xác suất

Tính chất 1 (Hàm xác suất)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Một hàm giá trị xác suất(gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

(1) $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$

(2) $p_X(x_i) \geq 0$

Hàm xác suất

Tính chất 1 (Hàm xác suất)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Một hàm giá trị xác suất(gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

(1) $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$

(2) $p_X(x_i) \geq 0$

(3) $\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) = 1$

Hàm xác suất

Tính chất 1 (Hàm xác suất)

Xét một biến ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Một hàm giá trị xác suất(gọi tắt là hàm xác suất) là hàm thỏa

(1) $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$

(2) $p_X(x_i) \geq 0$

(3) $\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) = 1$

Bảng phân phối xác suất

Để mô tả biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì người ta dùng bảng phân phối xác suất. Bảng này có hai dòng.

Bảng phân phối xác suất

Để mô tả biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì người ta dùng bảng phân phối xác suất. Bảng này có hai dòng.

- Dòng thứ nhất là các giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận được.

Bảng phân phối xác suất

Để mô tả biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì người ta dùng bảng phân phối xác suất. Bảng này có hai dòng.

- Dòng thứ nhất là các giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận được.
- Dòng thứ hai là xác suất biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị tương ứng.

Bảng phân phối xác suất

Để mô tả biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì người ta dùng bảng phân phối xác suất. Bảng này có hai dòng.

- Dòng thứ nhất là các giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận được.
- Dòng thứ hai là xác suất biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị tương ứng.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\dots$	$p(x_n)$	$\dots$

Bảng phân phối xác suất

Để mô tả biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị nào đó với xác suất tương ứng là bao nhiêu thì người ta dùng bảng phân phối xác suất. Bảng này có hai dòng.

- Dòng thứ nhất là các giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận được.
- Dòng thứ hai là xác suất biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị tương ứng.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\dots$	$p(x_n)$	$\dots$

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 6 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n rời rạc)

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 6 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n rời rạc)

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu $F(x)$ được xác định như sau

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 6 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n rời rạc)

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu $F(x)$ được xác định như sau

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{j \leq x} p_X(j).$$

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 6 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n rời rạc)

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu $F(x)$ được xác định như sau

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{j \leq x} p_X(j). \tag{1}$$

Cụ thể

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 6 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n rời rạc)

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu $F(x)$ được xác định như sau

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{j \leq x} p_X(j). \tag{1}$$

Cụ thể

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ p(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ p(x_1) + \ldots + p(x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 6 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n rời rạc)

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu $F(x)$ được xác định như sau

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{j \leq x} p_X(j). \tag{1}$$

Cụ thể

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ p(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ p(x_1) + \ldots + p(x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

Bảng phân phối xác suất-Hàm phân phối xác suất

Ví dụ 4

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có hàm xác suất

$$p_X(x) = \frac{2x+1}{25}, x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(a) *Lập bảng phân phối xác suất.*

(b) *Tính* $\mathbb{P}(X \leq 1)$*và* $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$

Bảng phân phối xác suất-Hàm phân phối xác suất

Ví dụ 4

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có hàm xác suất

$$p_X(x) = \frac{2x+1}{25}, x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(a) *Lập bảng phân phối xác suất.*

(b) *Tính* $\mathbb{P}(X \leq 1)$*và* $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$

Ví dụ 5

Một lô hàng có 850 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm kém chất lượng. Chọn ngẫu nhiên lần lượt 2 sản phẩm không hoàn lại. Gọi X là số sản phẩm không đạt chất lượng trong 2 sản phẩm được chọn.

(a) *Lập bảng phân phối xác suất cho X.*

(b) *Viết hàm phân phối xác suất.*

Bảng phân phối xác suất-Hàm phân phối xác suất

Ví dụ 4

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có hàm xác suất

$$p_X(x) = \frac{2x+1}{25}, x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

(a) *Lập bảng phân phối xác suất.*

(b) *Tính* $\mathbb{P}(X \leq 1)$*và* $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$

Ví dụ 5

Một lô hàng có 850 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm kém chất lượng. Chọn ngẫu nhiên lần lượt 2 sản phẩm không hoàn lại. Gọi X là số sản phẩm không đạt chất lượng trong 2 sản phẩm được chọn.

(a) *Lập bảng phân phối xác suất cho X.*

(b) *Viết hàm phân phối xác suất.*

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận được là một khoảng dạng (a, b)(hoặc$(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận được là một khoảng dạng (a, b)(hoặc$(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ 6

Trọng lượng của trái cây.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận được là một khoảng dạng (a, b)(hoặc$(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ 6

Trọng lượng của trái cây.
Chiều cao của thanh niên

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên được gọi là liên tục nếu tập hợp các giá trị mà nó có thể nhận được là một khoảng dạng (a, b)(hoặc$(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, hoặc toàn bộ $\mathbb{R}$.

Ví dụ 6

Trọng lượng của trái cây.
Chiều cao của thanh niên ...

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 7 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n liên tục)

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 7 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n liên tục)

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, *ký hiệu* $F_X(x)$ *được xác định như sau*

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 7 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n liên tục)

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu $F_X(x)$ được xác định như sau

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 7 (Hàm phân phối xác suất của b.n.n liên tục)

Hàm phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc X, ký hiệu $F_X(x)$ được xác định như sau

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt. \tag{2}$$

Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa 8 (Hàm mật độ xác suất)

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X, hàm số $f_X(x)$ không âm, xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa các tính chất

(i)

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f_X(x)dx, \ \forall I \subset \mathbb{R}.$$

Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa 8 (Hàm mật độ xác suất)

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X, hàm số $f_X(x)$ không âm, xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa các tính chất

(i)

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f_X(x)dx, \ \forall I \subset \mathbb{R}.$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa 8 (Hàm mật độ xác suất)

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X, hàm số $f_X(x)$ không âm, xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa các tính chất

(i)

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f_X(x)dx, \ \forall I \subset \mathbb{R}.$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

hàm số $f_X(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa 8 (Hàm mật độ xác suất)

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X, hàm số $f_X(x)$ không âm, xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa các tính chất

(i)

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f_X(x)dx, \ \forall I \subset \mathbb{R}.$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

hàm số $f_X(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Hàm mật độ xác suất

Nhận xét 1

(1) *Mọi hàm $f_X(x)$ không âm và thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên X nào đó.*

Hàm mật độ xác suất

Nhận xét 1

(1) *Mọi hàm* $f_X(x)$ *không âm và thỏa điều kiện* $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ *đều là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên* X *nào đó.*

(2) *Từ định nghĩa về hàm mật độ ta có hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên* X *có hàm mật độ* $f(x)$ *là*
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$

Hàm mật độ xác suất

Nhận xét 1

(1) *Mọi hàm $f_X(x)$ không âm và thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên X nào đó.*

(2) *Từ định nghĩa về hàm mật độ ta có hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x)$ là*
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$

(3) $F^{'}(x) = f_X(x).$

Hàm mật độ xác suất

Nhận xét 1

(1) *Mọi hàm $f_X(x)$ không âm và thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên X nào đó.*

(2) *Từ định nghĩa về hàm mật độ ta có hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x)$ là*
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$

(3) $F'(x) = f_X(x).$

(4) *Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục, với x_1, x_2 bất kỳ, ta có*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) &= \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2)\\ &= \mathbb{P}(x_1 < X < x_2)\\ &= \mathbb{P}(x_1 \leq X < x_2).\end{aligned}$$

Hàm mật độ xác suất

Nhận xét 1

(1) *Mọi hàm $f_X(x)$ không âm và thỏa điều kiện $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên X nào đó.*

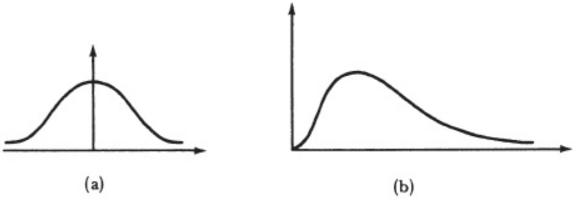
(2) *Từ định nghĩa về hàm mật độ ta có hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ $f(x)$ là*
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$

(3) $F'(x) = f_X(x)$.

(4) *Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục, với x_1, x_2 bất kỳ, ta có*

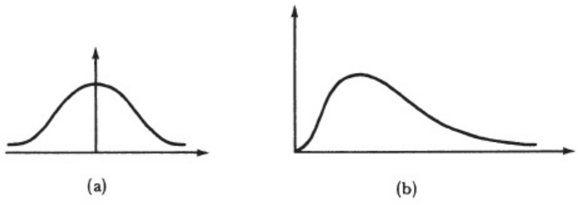
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) &= \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) \\
&= \mathbb{P}(x_1 < X < x_2) \\
&= \mathbb{P}(x_1 \leq X < x_2).
\end{aligned}$$

Hàm mật độ xác suất



Hình: 5

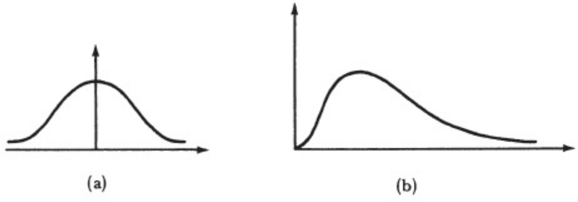
Hàm mật độ xác suất



Hình: 5

Ví dụ về hàm mật độ xác suất được cho trong hình 4; trong (a) hàm mật độ xác suất đối xứng, trong (b) hàm mật độ xác suất lệch.

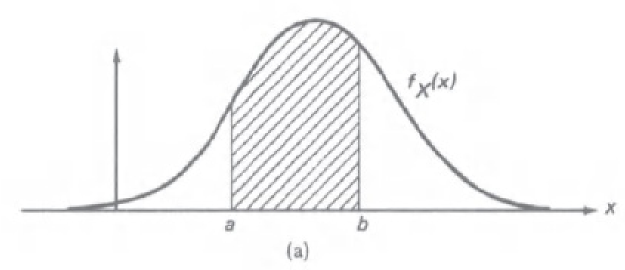
Hàm mật độ xác suất



Hình: 5

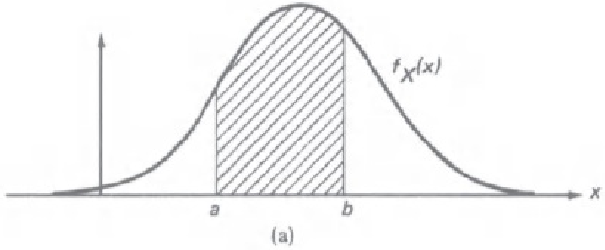
Ví dụ về hàm mật độ xác suất được cho trong hình 4; trong (a) hàm mật độ xác suất đối xứng, trong (b) hàm mật độ xác suất lệch.

Hàm mật độ xác suất



Hình: 6a

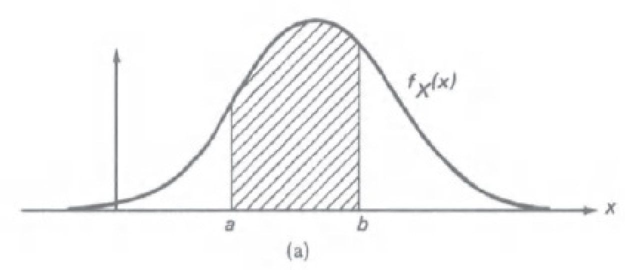
Hàm mật độ xác suất



Hình: 6a

Trong hình 6 (a), xác suất $a < X \leq b$ bằng với diện tích của miền nằm bên dưới hàm mật độ xác suất và nằm giữa a và b.

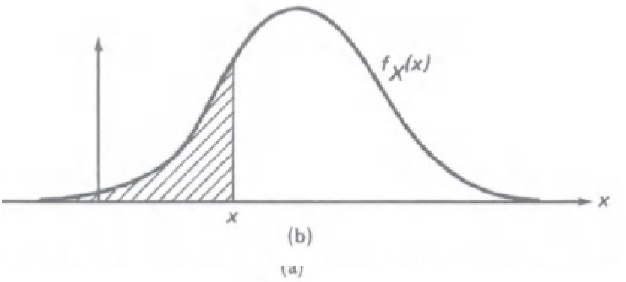
Hàm mật độ xác suất



Hình: 6a

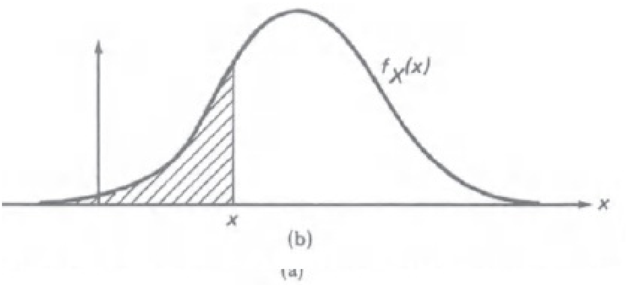
Trong hình 6 (a), xác suất $a < X \leq b$ bằng với diện tích của miền nằm bên dưới hàm mật độ xác suất và nằm giữa a và b.

Hàm mật độ xác suất



Hình: 6b

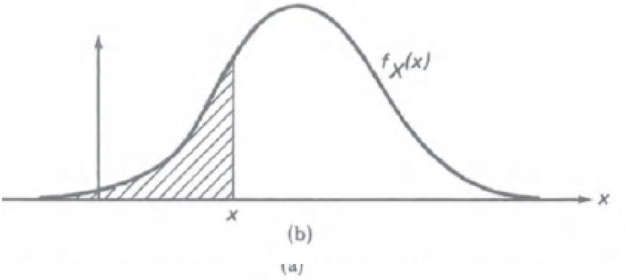
Hàm mật độ xác suất



Hình: 6b

Trong hình 6 (b) biểu diễn hàm phân phối tại điểm x bằng phần diện tích của miền nằm bên dưới hàm mật độ nằm bên trái của x.

Hàm mật độ xác suất



Hình: 6b

Trong hình 6 (b) biểu diễn hàm phân phối tại điểm x bằng phần diện tích của miền nằm bên dưới hàm mật độ nằm bên trái của x.

Phân vị

Định nghĩa 9

Nghiệm $x = x_\alpha$ *của phương trình*

$$F_X(x) = 1 - \alpha$$

được gọi là phân vị α *của biến ngẫu nhiên* X .

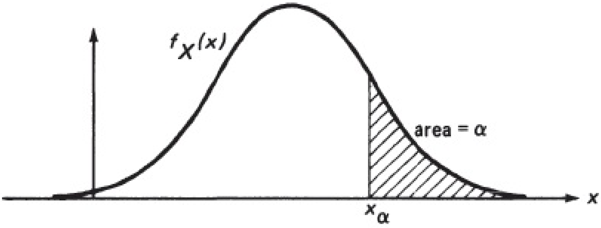
Phân vị

Định nghĩa 9

Nghiệm $x = x_\alpha$ *của phương trình*

$$F_X(x) = 1 - \alpha$$

được gọi là phân vị α *của biến ngẫu nhiên* X *.*



Hình: 7-Phân vị

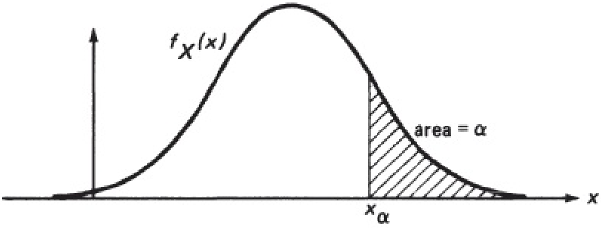
Phân vị

Định nghĩa 9

Nghiệm $x = x_\alpha$ *của phương trình*

$$F_X(x) = 1 - \alpha$$

được gọi là phân vị α *của biến ngẫu nhiên* X *.*



Hình: 7-Phân vị

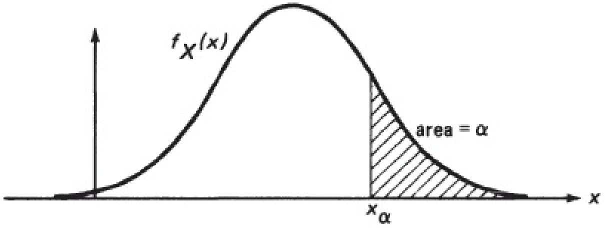
Phân vị

Định nghĩa 9

Nghiệm $x = x_\alpha$ *của phương trình*

$$F_X(x) = 1 - \alpha$$

được gọi là phân vị α *của biến ngẫu nhiên* X *.*



Hình: 7-Phân vị

Phân vị

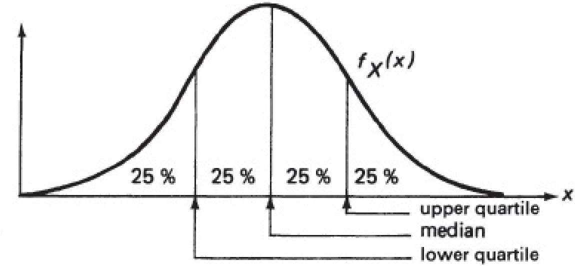
Các phân vị $x_{0.25}, x_{0.50}, x_{0.75}$ được gọi là upper quartile, trung vị (median), lower quartile.

Phân vị

Các phân vị $x_{0.25}, x_{0.50}, x_{0.75}$ được gọi là upper quartile, trung vị (median), lower quartile. Trung vị chia diện tích của miền bên dưới hàm mật độ xác suất thành hai phần diện tích bằng nhau.

Phân vị

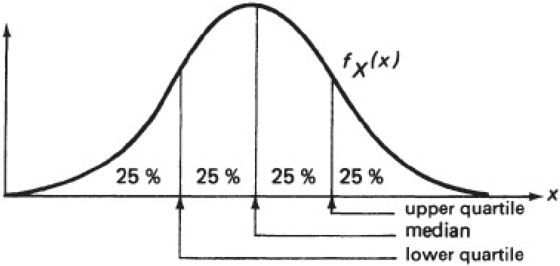
Các phân vị $x_{0.25}, x_{0.50}, x_{0.75}$ được gọi là upper quartile, trung vị (median), lower quartile. Trung vị chia diện tích của miền bên dưới hàm mật độ xác suất thành hai phần diện tích bằng nhau.



Hình: 8-Các phân vị và trung vị.

Phân vị

Các phân vị $x_{0.25}, x_{0.50}, x_{0.75}$ được gọi là upper quartile, trung vị (median), lower quartile. Trung vị chia diện tích của miền bên dưới hàm mật độ xác suất thành hai phần diện tích bằng nhau.



Hình: 8-Các phân vị và trung vị.

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 10 (Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc)

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$\mathbb{P}$	$p_X(x_1)$	$p_X(x_2)$	$\cdots$	$p_X(x_n)$	$\cdots$

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 10 (Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc)

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$\mathbb{P}$	$p_X(x_1)$	$p_X(x_2)$	$\cdots$	$p_X(x_n)$	$\cdots$

Kỳ vọng của X, ký hiệu $\mathbb{E}(X)$ được định nghĩa như sau

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_X(x_i)$$

Ví dụ 7

Một hộp chứa 10 viên bi, trong đó có 3 viên bi nặng 10g, 5 viên bi nặng 50g, 2 viên bi nặng 20g. Chọn ngẫu nhiên ra một viên bi và gọi X là khối lượng của viên bi đó. Tính Khối lượng trung bình của viên bi đó, $\mathbb{E}(X)$.

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 10 (Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc)

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$\mathbb{P}$	$p_X(x_1)$	$p_X(x_2)$	$\cdots$	$p_X(x_n)$	$\cdots$

Kỳ vọng của X, ký hiệu $\mathbb{E}(X)$ được định nghĩa như sau

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_X(x_i)$$

Ví dụ 7

Một hộp chứa 10 viên bi, trong đó có 3 viên bi nặng 10g, 5 viên bi nặng 50g, 2 viên bi nặng 20g. Chọn ngẫu nhiên ra một viên bi và gọi X là khối lượng của viên bi đó. Tính Khối lượng trung bình của viên bi đó, $\mathbb{E}(X)$.

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 11 (Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục)

Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất $f(x)$, kỳ vọng của X là

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{3}$$

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 11 (Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục)

Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất $f(x)$, kỳ vọng của X là

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{3}$$

Ví dụ 8

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 20e^{-20(x-12.5)} & x \geq 12.5 \\ 0 & \textit{nơi khác} \end{cases}$$

(a) *Tính* $\mathbb{P}(X > 12,60)$.

(b) *Tính kỳ vọng của* X.

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 11 (Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên liên tục)

Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất $f(x)$, kỳ vọng của X là

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{3}$$

Ví dụ 8

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 20e^{-20(x-12.5)} & x \geq 12.5 \\ 0 & \textit{nơi khác} \end{cases}$$

(a) *Tính* $\mathbb{P}(X > 12,60)$.

(b) *Tính kỳ vọng của* X.

Ý nghĩa của kỳ vọng

(i) Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên.

Ý nghĩa của kỳ vọng

(i) Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên.

(ii) Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

Ý nghĩa của kỳ vọng

(i) Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên.

(ii) Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

Mệnh đề 1 (Tính chất của kỳ vọng)

Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau

Ý nghĩa của kỳ vọng

(i) Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên.

(ii) Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

Mệnh đề 1 (Tính chất của kỳ vọng)

Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau

(i) $\mathbb{E}(c) = c$.

Ý nghĩa của kỳ vọng

(i) Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên.

(ii) Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

Mệnh đề 1 (Tính chất của kỳ vọng)

Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau

(i) $\mathbb{E}(c) = c$.

(ii) $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$

Ý nghĩa của kỳ vọng

(i) Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên.

(ii) Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

Mệnh đề 1 (Tính chất của kỳ vọng)

Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau

(i) $\mathbb{E}(c) = c$.

(ii) $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$

(iii) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Ý nghĩa của kỳ vọng

(i) Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên.

(ii) Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

Mệnh đề 1 (Tính chất của kỳ vọng)

Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau

(i) $\mathbb{E}(c) = c$.

(ii) $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$

(iii) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

(iv) *Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập thì* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Ý nghĩa của kỳ vọng

(i) Là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên.

(ii) Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất.

Mệnh đề 1 (Tính chất của kỳ vọng)

Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên bất kỳ và $c \in \mathbb{R}$ thì kỳ vọng của biến ngẫu nhiên có các tính chất sau

(i) $\mathbb{E}(c) = c$.

(ii) $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$

(iii) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

(iv) *Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập thì* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

Ví dụ 9

Tung đồng thời 2 cặp đồng xu. Gọi X là số mặt sấp xuất hiện ở cặp thứ nhất, Y là số mặt ngửa xuất hiện ở cặp thứ hai. Tính $E(X^2), E(Y^2), E(XY)$.

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

Ví dụ 9

Tung đồng thời 2 cặp đồng xu. Gọi X là số mặt sấp xuất hiện ở cặp thứ nhất, Y là số mặt ngửa xuất hiện ở cặp thứ hai. Tính $E(X^2), E(Y^2), E(XY)$.

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 12 (Phương sai)

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ thì phương sai, ký hiệu $\mathbb{V}ar(X)$, được định nghĩa

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2. \tag{4}$$

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 12 (Phương sai)

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ thì phương sai, ký hiệu $\mathbb{V}ar(X)$, được định nghĩa

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2. \tag{4}$$

1. *Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, thì công thức tính phương sai là*

$$\mathbb{V}ar(X) = \sum_x (x-\mu)^2 p(x) = \sum_x x^2 p(x) - \mu^2.$$

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 12 (Phương sai)

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ thì phương sai, ký hiệu $\mathbb{V}ar(X)$, được định nghĩa

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 . \tag{4}$$

1. *Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, thì công thức tính phương sai là*

$$\mathbb{V}ar(X) = \sum_x (x - \mu)^2 p(x) = \sum_x x^2 p(x) - \mu^2.$$

2. *Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, thì công thức tính phương sai là*

$$\mathbb{V}ar(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2.$$

Phương sai của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 12 (Phương sai)

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ thì phương sai, ký hiệu $\mathbb{V}ar(X)$, được định nghĩa

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 . \tag{4}$$

1. *Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm xác suất $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, thì công thức tính phương sai là*

$$\mathbb{V}ar(X) = \sum_x (x-\mu)^2 p(x) = \sum_x x^2 p(x) - \mu^2.$$

2. *Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$, ký hiệu $\mu = \mathbb{E}(X)$, thì công thức tính phương sai là*

$$\mathbb{V}ar(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2.$$

Ý nghĩa của phương sai

- Phương sai là kỳ vọng của bình phương các sai lệch giữa X và $\mathbb{E}(X)$, nói cách khác phương sai là trung bình phương sai lệch, nó phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.

Ý nghĩa của phương sai

- Phương sai là kỳ vọng của bình phương các sai lệch giữa X và $\mathbb{E}(X)$, nói cách khác phương sai là trung bình phương sai lệch, nó phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.
- Trong công nghiệp phương sai biểu thị độ chính xác trong sản xuất. Trong canh tác, phương sai biểu thị mức độ ổn định của năng suất,...

Ý nghĩa của phương sai

- Phương sai là kỳ vọng của bình phương các sai lệch giữa X và $\mathbb{E}(X)$, nói cách khác phương sai là trung bình phương sai lệch, nó phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.
- Trong công nghiệp phương sai biểu thị độ chính xác trong sản xuất. Trong canh tác, phương sai biểu thị mức độ ổn định của năng suất,...

Tính chất phương sai

Cho hai biến ngẫu nhiên X, Y và hằng số thực $C \in \mathbb{R}$, phương sai có các tính chất sau

Tính chất phương sai

Cho hai biến ngẫu nhiên X, Y và hằng số thực $C \in \mathbb{R}$, phương sai có các tính chất sau

(i) $\mathbb{V}ar(C) = 0$.

Tính chất phương sai

Cho hai biến ngẫu nhiên X, Y và hằng số thực $C \in \mathbb{R}$, phương sai có các tính chất sau

(i) $\mathbb{V}ar(C) = 0$.

(ii) $\mathbb{V}ar(CX) = C^2\mathbb{V}ar(X)$

Tính chất phương sai

Cho hai biến ngẫu nhiên X, Y và hằng số thực $C \in \mathbb{R}$, phương sai có các tính chất sau

(i) $\mathbb{V}ar(C) = 0$.

(ii) $\mathbb{V}ar(CX) = C^2\mathbb{V}ar(X)$

(iii) Nếu X, Y độc lập thì $\mathbb{V}ar(X+Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y)$.

Tính chất phương sai

Cho hai biến ngẫu nhiên X, Y và hằng số thực $C \in \mathbb{R}$, phương sai có các tính chất sau

(i) $\mathbb{V}ar(C) = 0$.

(ii) $\mathbb{V}ar(CX) = C^2\mathbb{V}ar(X)$

(iii) Nếu X, Y độc lập thì $\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y)$.

Độ lệch chuẩn

Định nghĩa 13 (Độ lệch chuẩn)

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X, *ký hiệu* $\sigma(X)$, *là căn bậc hai của* $\mathbb{V}ar(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}.$$

Độ lệch chuẩn

Định nghĩa 13 (Độ lệch chuẩn)

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu $\sigma(X)$, là căn bậc hai của $\mathbb{V}ar(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}.$$

Ví dụ 10

Cho biến ngẫu nhiên Y có hàm mật độ xác suất

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^2} & \text{nếu } y \in [1,2] \\ 0 & \text{nếu } y \notin [1,2]. \end{cases}$$

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên Y .

Độ lệch chuẩn

Định nghĩa 13 (Độ lệch chuẩn)

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu $\sigma(X)$, là căn bậc hai của $\mathbb{V}ar(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}.$$

Ví dụ 10

Cho biến ngẫu nhiên Y có hàm mật độ xác suất

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^2} & \text{nếu } y \in [1,2] \\ 0 & \text{nếu } y \notin [1,2]. \end{cases}$$

Tính phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên Y .

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 14 (Two-point Distribution)

Nếu biến ngẫu nhiên X chỉ có hai giá trị a và b với xác suất tương ứng là p và q, thì X được gọi là có phân phối hai điểm (two-point).

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 14 (Two-point Distribution)

Nếu biến ngẫu nhiên X chỉ có hai giá trị a và b với xác suất tương ứng là p và q, thì X được gọi là có phân phối hai điểm (two-point).

Định lý 2

Biến ngẫu nhiên X có phân phối "hai điểm" (two-point)

- $\mathbb{E}(X) = ap + bq$,
- $\mathbb{V}(X) = (a-b)^2 pq$

Hàm xác suất là

$$p_X(a) = p, \quad p_X(b) = q$$

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 14 (Two-point Distribution)

Nếu biến ngẫu nhiên X chỉ có hai giá trị a và b với xác suất tương ứng là p và q, thì X được gọi là có phân phối hai điểm (two-point).

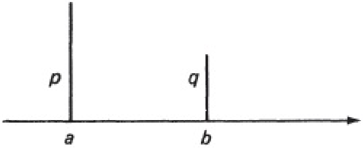
Định lý 2

Biến ngẫu nhiên X có phân phối "hai điểm" (two-point)

- $\mathbb{E}(X) = ap + bq$,
- $\mathbb{V}(X) = (a-b)^2 pq$

Hàm xác suất là

$$p_X(a) = p, \quad p_X(b) = q$$



Biến ngẫu nhiên Bernoulli

Định nghĩa 15 (Biến ngẫu nhiên Bernoulli)

Thực hiện một phép thử, ta quan tâm đến biến cố A. Nếu biến cố A xảy ra (thành công) thì X nhận giá trị là 1 ($X = 1$), *ngược lại biến ngẫu nhiên X nhận giá trị 0. Phép thử này gọi là phép thử Bernoulli. Giả sử xác suất xảy ra biến cố A là p,* $0 < p < 1$

Biến ngẫu nhiên Bernoulli

Định nghĩa 15 (Biến ngẫu nhiên Bernoulli)

Thực hiện một phép thử, ta quan tâm đến biến cố A. Nếu biến cố A xảy ra (thành công) thì X nhận giá trị là 1 ($X = 1$)*, ngược lại biến ngẫu nhiên X nhận giá trị 0. Phép thử này gọi là phép thử Bernoulli. Giả sử xác suất xảy ra biến cố A là p,* $0 < p < 1$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

Biến ngẫu nhiên Bernoulli

Định nghĩa 15 (Biến ngẫu nhiên Bernoulli)

Thực hiện một phép thử, ta quan tâm đến biến cố A. Nếu biến cố A xảy ra (thành công) thì X nhận giá trị là 1 ($X = 1$), *ngược lại biến ngẫu nhiên X nhận giá trị 0. Phép thử này gọi là phép thử Bernoulli. Giả sử xác suất xảy ra biến cố A là p,* $0 < p < 1$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

và

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q.$$

Biến ngẫu nhiên Bernoulli

Định nghĩa 15 (Biến ngẫu nhiên Bernoulli)

Thực hiện một phép thử, ta quan tâm đến biến cố A. Nếu biến cố A xảy ra (thành công) thì X nhận giá trị là 1 $(X = 1)$*, ngược lại biến ngẫu nhiên X nhận giá trị 0. Phép thử này gọi là phép thử Bernoulli. Giả sử xác suất xảy ra biến cố A là p,* $0 < p < 1$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

và

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q.$$

Khi đó, biến ngẫu nhiên X được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với tham số p, ký hiệu $X \sim B(1; p)$.

Biến ngẫu nhiên Bernoulli

Định nghĩa 15 (Biến ngẫu nhiên Bernoulli)

Thực hiện một phép thử, ta quan tâm đến biến cố A. Nếu biến cố A xảy ra (thành công) thì X nhận giá trị là 1 ($X = 1$), *ngược lại biến ngẫu nhiên X nhận giá trị 0. Phép thử này gọi là phép thử Bernoulli. Giả sử xác suất xảy ra biến cố A là p*, $0 < p < 1$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

và

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q.$$

Khi đó, biến ngẫu nhiên X được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với tham số p, ký hiệu $X \sim B(1; p)$.

Phân phối Bernoulli

Bảng phân phối xác suất

Phân phối Bernoulli

Bảng phân phối xác suất

Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X \sim B(1; p)$ có dạng

Phân phối Bernoulli

Bảng phân phối xác suất

Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X \sim B(1; p)$ có dạng

X	1	0
$\mathbb{P}$	p	q

với $q = 1 - p$.

Phân phối Bernoulli

Bảng phân phối xác suất

Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X \sim B(1; p)$ có dạng

X	1	0
$\mathbb{P}$	p	q

với $q = 1 - p$.

Dựa vào bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X, ta có

Phân phối Bernoulli

Bảng phân phối xác suất

Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X \sim B(1; p)$ có dạng

X	1	0
$\mathbb{P}$	p	q

với $q = 1 - p$.

Dựa vào bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X, ta có

$$\mathbb{E}(X) = 1.p + 0.q = p$$

$$\mathbb{V}ar(X) = 0^2 \times q + 1^2 \times p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Mô hình có phân phối Bernoulli

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$, trong đó $P(\omega) = p$.

Mô hình có phân phối Bernoulli

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$, trong đó $P(\omega) = p$. Gọi X là số lần ω xuất hiện

Mô hình có phân phối Bernoulli

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$, trong đó $P(\omega) = p$. Gọi X là số lần ω xuất hiện

$$X : \Omega \quad \to \quad \mathbb{R}$$

Mô hình có phân phối Bernoulli

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$, trong đó $P(\omega) = p$. Gọi X là số lần ω xuất hiện

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = 1 \end{aligned}$$

Mô hình có phân phối Bernoulli

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$, trong đó $P(\omega) = p$. Gọi X là số lần ω xuất hiện

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = 1 \\ \bar{\omega} &\mapsto X(\bar{\omega}) = 0 \end{aligned}$$

Mô hình có phân phối Bernoulli

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$, trong đó $P(\omega) = p$. Gọi X là số lần ω xuất hiện

$$
\begin{aligned}
X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\
\omega &\mapsto X(\omega) = 1 \\
\bar{\omega} &\mapsto X(\bar{\omega}) = 0
\end{aligned}
$$

Ta có

Mô hình có phân phối Bernoulli

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$, trong đó $P(\omega) = p$. Gọi X là số lần ω xuất hiện

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = 1 \\ \bar{\omega} &\mapsto X(\bar{\omega}) = 0 \end{aligned}$$

Ta có

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\omega) = p \qquad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{\omega}) = 1 - p = q$$

Vậy X có hàm mật độ

Mô hình có phân phối Bernoulli

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$, trong đó $P(\omega) = p$. Gọi X là số lần ω xuất hiện

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) = 1 \\ \bar{\omega} &\mapsto X(\bar{\omega}) = 0 \end{aligned}$$

Ta có

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\omega) = p \qquad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{\omega}) = 1 - p = q$$

Vậy X có hàm mật độ

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 - p & \text{khi } x = 0 \\ p & \text{khi } x = 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

nghĩa là X có phân phối Bernoulli.

Phân phối Bernoulli

Ví dụ 11

Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

Phân phối Bernoulli

Ví dụ 11

Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

- *Tung ngẫu nhiên một đồng xu:* $X = 1$ *nếu xuất hiện mặt sấp,* $X = 0$ *nếu xuất hiện mặt ngửa,* $X \sim B(1, 1/2)$.

Phân phối Bernoulli

Ví dụ 11

Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

- *Tung ngẫu nhiên một đồng xu:* $X = 1$ *nếu xuất hiện mặt sấp,* $X = 0$ *nếu xuất hiện mặt ngửa,* $X \sim B(1, 1/2)$.
- *Mua vé số:* $X = 0$ *nếu không trúng số,* $X = 1$ *nếu trúng số.*

Phân phối Bernoulli

Ví dụ 11

Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

- *Tung ngẫu nhiên một đồng xu:* $X = 1$ *nếu xuất hiện mặt sấp,* $X = 0$ *nếu xuất hiện mặt ngửa,* $X \sim B(1, 1/2)$.
- *Mua vé số:* $X = 0$ *nếu không trúng số,* $X = 1$ *nếu trúng số.*
- *Trả lời ngẫu nhiên một câu trắc nghiệm :* $X = 0$ *nếu trả lời đúng,* $X = 1$ *nếu trả lời sai.*

Phân phối Bernoulli

Ví dụ 11

Các phép thử sau đây cho kết quả là một biến ngẫu nhiên Bernoulli

- *Tung ngẫu nhiên một đồng xu:* $X = 1$ *nếu xuất hiện mặt sấp,* $X = 0$ *nếu xuất hiện mặt ngửa,* $X \sim B(1, 1/2)$.
- *Mua vé số:* $X = 0$ *nếu không trúng số,* $X = 1$ *nếu trúng số.*
- *Trả lời ngẫu nhiên một câu trắc nghiệm :* $X = 0$ *nếu trả lời đúng,* $X = 1$ *nếu trả lời sai.*

Nhận xét: *Mọi thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả đều có phân phối Bernoulli.*

Phân phối nhị thức

Định nghĩa 16 (Binomial distribution)

Phân phối nhị thức

Định nghĩa 16 (Binomial distribution)

Thực hiện n phép thử Bernoulli độc lập, với xác suất thành công trong mỗi phép thử là p. Gọi X là số lần thành công (biến cố A xảy ra) trong n phép thử thì

Phân phối nhị thức

Định nghĩa 16 (Binomial distribution)

Thực hiện n phép thử Bernoulli độc lập, với xác suất thành công trong mỗi phép thử là p. Gọi X là số lần thành công (biến cố A xảy ra) trong n phép thử thì

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

với X_i là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với cùng tham số p, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Phân phối nhị thức

Định nghĩa 16 (Binomial distribution)

Thực hiện n phép thử Bernoulli độc lập, với xác suất thành công trong mỗi phép thử là p. Gọi X là số lần thành công (biến cố A xảy ra) trong n phép thử thì

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

với X_i là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với cùng tham số p, $(i = 1, 2, ..., n)$.Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc với miền giá trị $S = \{0, 1, ..., n\}$

Phân phối nhị thức

Định nghĩa 16 (Binomial distribution)

Thực hiện n phép thử Bernoulli độc lập, với xác suất thành công trong mỗi phép thử là p. Gọi X là số lần thành công (biến cố A xảy ra) trong n phép thử thì

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

với X_i là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với cùng tham số p, $(i = 1, 2, ..., n)$.Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc với miền giá trị $S = \{0, 1, ..., n\}$và hàm xác suất có dạng

Phân phối nhị thức

Định nghĩa 16 (Binomial distribution)

Thực hiện n phép thử Bernoulli độc lập, với xác suất thành công trong mỗi phép thử là p. Gọi X là số lần thành công (biến cố A xảy ra) trong n phép thử thì

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

với X_i là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với cùng tham số p, $(i = 1, 2, ..., n)$.Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc với miền giá trị $S = \{0, 1, ..., n\}$và hàm xác suất có dạng

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{với } k = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

trong đó, $p \in [0, 1]$. X được gọi là có phân phối nhị thức với tham số n, p ký hiệu $X \sim B(n, p)$.

Phân phối nhị thức

Định nghĩa 16 (Binomial distribution)

Thực hiện n phép thử Bernoulli độc lập, với xác suất thành công trong mỗi phép thử là p. Gọi X là số lần thành công (biến cố A xảy ra) trong n phép thử thì

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

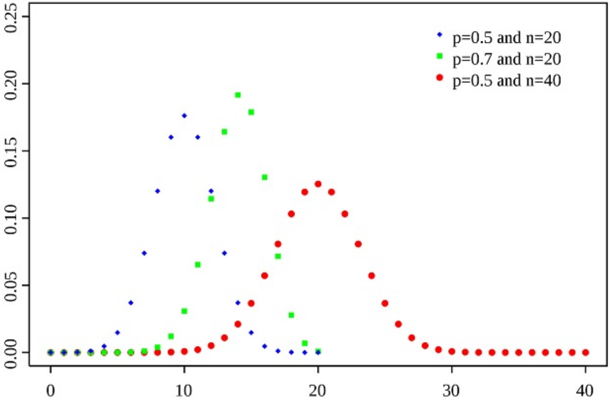
với X_i là biến ngẫu nhiên có phân phối Bernoulli với cùng tham số p, $(i = 1, 2, ..., n)$.Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc với miền giá trị $S = \{0, 1, ..., n\}$và hàm xác suất có dạng

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{với } k = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

trong đó, $p \in [0, 1]$. X được gọi là có phân phối nhị thức với tham số n, p ký hiệu $X \sim B(n, p)$.

Phân phối nhị thức

Hình: Hàm xác suất - Phân phối nhị thức



Mô hình nhị thức

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega_* = \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}$ với $P(\omega_*) = p$. Ta lập lại thí nghiệm này n lần độc lập với nhau và quan tâm đến số lần xuất hiện ω_* trong n lần quan sát đó.

Mô hình nhị thức

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega_* = \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}$ với $P(\omega_*) = p$. Ta lập lại thí nghiệm này n lần độc lập với nhau và quan tâm đến số lần xuất hiện ω_* trong n lần quan sát đó.

Không gian mẫu của n lần thí nghiệm là

$$\Omega = \{\omega = (\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(n)}) : \omega_{(i)} \in \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}, i = 1, 2, ..., n\}$$

Đặt X_i là kết quả lần quan sát thứ i

$$X_i : \Omega_* \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$$

Mô hình nhị thức

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega_* = \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}$ với $P(\omega_*) = p$. Ta lập lại thí nghiệm này n lần độc lập với nhau và quan tâm đến số lần xuất hiện ω_* trong n lần quan sát đó.

Không gian mẫu của n lần thí nghiệm là

$$\Omega = \{\omega = (\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(n)}) : \omega_{(i)} \in \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}, i = 1, 2, ..., n\}$$

Đặt X_i là kết quả lần quan sát thứ i

$$\begin{aligned} X_i : \Omega_* &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_* &\mapsto X_i(\omega_*) = 1 \end{aligned}$$

Mô hình nhị thức

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega_* = \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}$ với $P(\omega_*) = p$. Ta lập lại thí nghiệm này n lần độc lập với nhau và quan tâm đến số lần xuất hiện ω_* trong n lần quan sát đó.

Không gian mẫu của n lần thí nghiệm là

$$\Omega = \{\omega = (\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(n)}) : \omega_{(i)} \in \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}, i = 1, 2, ..., n\}$$

Đặt X_i là kết quả lần quan sát thứ i

$$\begin{aligned} X_i : \Omega_* &\to \mathbb{R} \\ \omega_* &\mapsto X_i(\omega_*) = 1 \\ \bar{\omega_*} &\mapsto X_i(\bar{\omega_*}) = 0 \end{aligned}$$

Mô hình nhị thức

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega_* = \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}$ với $P(\omega_*) = p$. Ta lập lại thí nghiệm này n lần độc lập với nhau và quan tâm đến số lần xuất hiện ω_* trong n lần quan sát đó.

Không gian mẫu của n lần thí nghiệm là

$$\Omega = \{\omega = (\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(n)}) : \omega_{(i)} \in \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}, i = 1, 2, ..., n\}$$

Đặt X_i là kết quả lần quan sát thứ i

$$\begin{aligned} X_i : \Omega_* &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_* &\mapsto X_i(\omega_*) = 1 \\ \bar{\omega_*} &\mapsto X_i(\bar{\omega_*}) = 0 \end{aligned}$$

Gọi X là số lần suất hiện ω_* trong n lần quan sát.

Mô hình nhị thức

Xem xét một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega_* = \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}$ với $P(\omega_*) = p$. Ta lập lại thí nghiệm này n lần độc lập với nhau và quan tâm đến số lần xuất hiện ω_* trong n lần quan sát đó.

Không gian mẫu của n lần thí nghiệm là

$$\Omega = \{\omega = (\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(n)}) : \omega_{(i)} \in \{\omega_*, \bar{\omega_*}\}, i = 1, 2, ..., n\}$$

Đặt X_i là kết quả lần quan sát thứ i

$$\begin{aligned} X_i : \Omega_* &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_* &\mapsto X_i(\omega_*) = 1 \\ \bar{\omega_*} &\mapsto X_i(\bar{\omega_*}) = 0 \end{aligned}$$

Gọi X là số lần suất hiện ω_* trong n lần quan sát.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega = (\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, ..., \omega_{(n)}) &\mapsto X(\omega) = X_{(1)}(\omega_{(1)}) + ... + X_{(n)}(\omega_{(n)}) \end{aligned}$$

Mô hình nhị thức (tt)

Với $x \in \{0, 1, 2, ..., n\}$,

nghĩa là nó chứa các kết quả của n lần thí nghiệm mà trong đó có x lần xuất hiện ω_* và $n - x$ lần xuất hiện $\bar{\omega}_*$.

Mô hình nhị thức (tt)

Với $x \in \{0, 1, 2, ..., n\}$,

nghĩa là nó chứa các kết quả của n lần thí nghiệm mà trong đó có x lần xuất hiện ω_* và $n - x$ lần xuất hiện $\bar{\omega}_*$.

Vì mỗi phép thử Bernoulli là độc lập nên với mỗi $\omega \in (X = k)$ thì

$$\mathbb{P}(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Số biến sơ cấp của $(X = x)$ là C_n^x. Do đó,

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \sum_{\omega \in (X=x)} \mathbb{P}(\omega) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Vậy X có phân phối nhị thức.

Mô hình nhị thức (tt)

Với $x \in \{0, 1, 2, ..., n\}$,

nghĩa là nó chứa các kết quả của n lần thí nghiệm mà trong đó có x lần xuất hiện ω_* và $n - x$ lần xuất hiện $\bar{\omega}_*$.

Vì mỗi phép thử Bernoulli là độc lập nên với mỗi $\omega \in (X = k)$ thì

$$\mathbb{P}(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Số biến sơ cấp của $(X = x)$ là C_n^x. Do đó,

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \sum_{\omega \in (X=x)} \mathbb{P}(\omega) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Vậy X có phân phối nhị thức.

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 12

Một lô thuốc, có tỉ lệ hỏng $p = 0.2$. *Ta lấy ngẫu nhiên 5 lọ. Gọi* X *là số lọ hỏng trong số lọ lấy ra. Tìm hàm xác suất của* X.

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 12

Một lô thuốc, có tỉ lệ hỏng $p = 0.2$ *. Ta lấy ngẫu nhiên 5 lọ. Gọi* X *là số lọ hỏng trong số lọ lấy ra. Tìm hàm xác suất của* X*.*

Bài giải 1

Quan sát lọ thuốc trong 5 lần độc lập.

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 12

Một lô thuốc, có tỉ lệ hỏng $p = 0.2$. Ta lấy ngẫu nhiên 5 lọ. Gọi X là số lọ hỏng trong số lọ lấy ra. Tìm hàm xác suất của X.

Bài giải 1

Quan sát lọ thuốc trong 5 lần độc lập.
Gọi X là số lọ bị hỏng trong 5 lọ lấy ra.

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 12

Một lô thuốc, có tỉ lệ hỏng $p = 0.2$ *. Ta lấy ngẫu nhiên 5 lọ. Gọi* X *là số lọ hỏng trong số lọ lấy ra. Tìm hàm xác suất của* X*.*

Bài giải 1

Quan sát lọ thuốc trong 5 lần độc lập.
Gọi X *là số lọ bị hỏng trong 5 lọ lấy ra.*
Vậy $X \in \{0, 1, 2, .., 5\}$ *và* $X \sim B(5; 0.2)$ *với hàm xác suất*

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 12

Một lô thuốc, có tỉ lệ hỏng $p = 0.2$. Ta lấy ngẫu nhiên 5 lọ. Gọi X là số lọ hỏng trong số lọ lấy ra. Tìm hàm xác suất của X.

Bài giải 1

Quan sát lọ thuốc trong 5 lần độc lập.
Gọi X là số lọ bị hỏng trong 5 lọ lấy ra.
Vậy $X \in \{0, 1, 2, .., 5\}$ và $X \sim B(5; 0.2)$ với hàm xác suất

$$p_x(h) = \mathbb{P}(X = h) = \begin{cases} C_5^h (0.2)^h (1 - 0.2)^{5-h}, & h = 0, 1, ..., 5 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 12

Một lô thuốc, có tỉ lệ hỏng $p = 0.2$. Ta lấy ngẫu nhiên 5 lọ. Gọi X là số lọ hỏng trong số lọ lấy ra. Tìm hàm xác suất của X.

Bài giải 1

Quan sát lọ thuốc trong 5 lần độc lập.
Gọi X là số lọ bị hỏng trong 5 lọ lấy ra.
Vậy $X \in \{0, 1, 2, .., 5\}$ và $X \sim B(5; 0.2)$ với hàm xác suất

$$p_x(h) = \mathbb{P}(X = h) = \begin{cases} C_5^h (0.2)^h (1-0.2)^{5-h}, & h = 0, 1, ..., 5 \\ 0 & \textit{nơi khác} \end{cases}$$

Ta có bảng phân phối xác suất

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 12

Một lô thuốc, có tỉ lệ hỏng $p = 0.2$. Ta lấy ngẫu nhiên 5 lọ. Gọi X là số lọ hỏng trong số lọ lấy ra. Tìm hàm xác suất của X.

Bài giải 1

Quan sát lọ thuốc trong 5 lần độc lập.
Gọi X là số lọ bị hỏng trong 5 lọ lấy ra.
Vậy $X \in \{0, 1, 2, .., 5\}$ và $X \sim B(5; 0.2)$ với hàm xác suất

$$p_x(h) = \mathbb{P}(X = h) = \begin{cases} C_5^h(0.2)^h(1-0.2)^{5-h}, & h = 0, 1, ..., 5 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Ta có bảng phân phối xác suất

H	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(H = h)$	0.32768	.4096	.2048	0.0512	.0064	0.0032

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 12

Một lô thuốc, có tỉ lệ hỏng $p = 0.2$. Ta lấy ngẫu nhiên 5 lọ. Gọi X là số lọ hỏng trong số lọ lấy ra. Tìm hàm xác suất của X.

Bài giải 1

Quan sát lọ thuốc trong 5 lần độc lập.
Gọi X là số lọ bị hỏng trong 5 lọ lấy ra.
Vậy $X \in \{0, 1, 2, .., 5\}$ và $X \sim B(5; 0.2)$ với hàm xác suất

$$p_x(h) = \mathbb{P}(X = h) = \begin{cases} C_5^h (0.2)^h (1 - 0.2)^{5-h}, & h = 0, 1, ..., 5 \\ 0 & \textit{nơi khác} \end{cases}$$

Ta có bảng phân phối xác suất

H	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(H = h)$	0.32768	.4096	.2048	0.0512	.0064	0.0032

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 13

Trong một nhà máy sản xuất vi mạch điện tử, biết rằng tỷ lệ vi mạch không đạt chất lượng là 5%*. Kiểm tra ngẫu nhiên 15 vi mạch. Tính xác suất*

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 13

Trong một nhà máy sản xuất vi mạch điện tử, biết rằng tỷ lệ vi mạch không đạt chất lượng là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 15 vi mạch. Tính xác suất

a *Có đúng 7 vi mạch không đạt chất lượng*

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 13

Trong một nhà máy sản xuất vi mạch điện tử, biết rằng tỷ lệ vi mạch không đạt chất lượng là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 15 vi mạch. Tính xác suất

a *Có đúng 7 vi mạch không đạt chất lượng*

b *Có ít nhất 1 vi mạch không đạt chất lượng*

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 13

Trong một nhà máy sản xuất vi mạch điện tử, biết rằng tỷ lệ vi mạch không đạt chất lượng là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 15 vi mạch. Tính xác suất

a *Có đúng 7 vi mạch không đạt chất lượng*

b *Có ít nhất 1 vi mạch không đạt chất lượng*

Bài giải 2

GỌi X: là số vi mạch không đạt chất lượng trong 15 vi mạch.

$X \sim B(15, 0.05)$

i $P(X = 7) = C_{15}^{7} 0.05^{7} \times (1 - 0.05)^{15-7} \approx 3.335 \times 10^{-6}$

ii $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{15}^{0} 0.05^{0} \times (1 - 0.05)^{15-0} \approx 0.5367$

Phân phối nhị thức- Ví dụ

Ví dụ 13

Trong một nhà máy sản xuất vi mạch điện tử, biết rằng tỷ lệ vi mạch không đạt chất lượng là 5%. Kiểm tra ngẫu nhiên 15 vi mạch. Tính xác suất

a *Có đúng 7 vi mạch không đạt chất lượng*

b *Có ít nhất 1 vi mạch không đạt chất lượng*

Bài giải 2

GỌi X: là số vi mạch không đạt chất lượng trong 15 vi mạch.

$X \sim B(15, 0.05)$

i $P(X = 7) = C_{15}^{7} 0.05^7 \times (1 - 0.05)^{15-7} \approx 3.335 \times 10^{-6}$

ii $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{15}^{0} 0.05^0 \times (1 - 0.05)^{15-0} \approx 0.5367$

Phân phối nhị thức

Định lý 3 (Các đặc trưng của BNN có phân phối nhị thức)

Nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức $B(n; p)$ thì

1. $\mathbb{E}(X) = np$.

Phân phối nhị thức

Định lý 3 (Các đặc trưng của BNN có phân phối nhị thức)

Nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức $B(n;p)$ thì

1. $\mathbb{E}(X) = np$.
2. $\mathbb{V}ar(X) = npq$.

Phân phối nhị thức

Định lý 3 (Các đặc trưng của BNN có phân phối nhị thức)

Nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức $B(n; p)$ thì

1. $\mathbb{E}(X) = np.$
2. $\mathbb{V}ar(X) = npq.$
3. *Với* x, h *là hai số nguyên dương thì*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x \leq X \leq x+h) &= \mathbb{P}(X=x) + \mathbb{P}(X=x+1) + \ldots \\ \ldots &\quad +\mathbb{P}(X=x+h)\end{aligned}$$

Phân phối nhị thức

Định lý 3 (Các đặc trưng của BNN có phân phối nhị thức)

Nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức $B(n; p)$ thì

1. $\mathbb{E}(X) = np.$
2. $\mathbb{V}ar(X) = npq.$
3. *Với x, h là hai số nguyên dương thì*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x \leq X \leq x+h) &= \mathbb{P}(X = x) + \mathbb{P}(X = x+1) + \ldots \\ \ldots &\quad + \mathbb{P}(X = x+h)\end{aligned}$$

Định lý 4

Nếu $X \sim B(n_1, p)$ và $Y \sim B(n_2, p)$, giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập, thì $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Phân phối nhị thức

Định lý 3 (Các đặc trưng của BNN có phân phối nhị thức)

Nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức $B(n; p)$ thì

1. $\mathbb{E}(X) = np$.
2. $\mathbb{V}ar(X) = npq$.
3. *Với x, h là hai số nguyên dương thì*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x \leq X \leq x+h) &= \mathbb{P}(X = x) + \mathbb{P}(X = x+1) + \ldots \\ \ldots &\quad + \mathbb{P}(X = x+h) \end{aligned}$$

Định lý 4

Nếu $X \sim B(n_1, p)$ và $Y \sim B(n_2, p)$, giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập, thì $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 17 (Phân phối Poisson)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm xác suất

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

thì X được gọi là có phân phối Poison.

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 17 (Phân phối Poisson)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm xác suất

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

thì X được gọi là có phân phối Poison.
Ký hiệu: $X \sim P(\lambda)$.

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 17 (Phân phối Poisson)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm xác suất

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

thì X được gọi là có phân phối Poison.
Ký hiệu: $X \sim P(\lambda)$.

Nhận xét 2

$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$.

Mô hình Poisson

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

Mô hình Poisson

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

- Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.

Mô hình Poisson

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

i Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.

ii Số người sống lâu trên 100 tuổi trong một cộng đồng dân cư.

Mô hình Poisson

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

i Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.

ii Số người sống lâu trên 100 tuổi trong một cộng đồng dân cư.

iii Số người đến một bưu điện nào đó trong một ngày.

Mô hình Poisson

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

i. Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.
ii. Số người sống lâu trên 100 tuổi trong một cộng đồng dân cư.
iii. Số người đến một bưu điện nào đó trong một ngày.
iv. Số tai nạn hoặc sự cố giao thông xảy ra tại một điểm giao thông trong một ngày....

Mô hình Poisson

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

i Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.
ii Số người sống lâu trên 100 tuổi trong một cộng đồng dân cư.
iii Số người đến một bưu điện nào đó trong một ngày.
iv Số tai nạn hoặc sự cố giao thông xảy ra tại một điểm giao thông trong một ngày....

Các biến ngẫu nhiên được sử dụng để mô tả, "đếm"số lần xảy ra của một biến cố, sự kiện nào đó xảy ra trong một khoảng thời gian và thỏa một số điều kiện (các điều kiện này thường thỏa trong thực tế) thường được mô tả bằng phân phối Poisson.

Mô hình Poisson

Một số biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là tuân theo phân phối Poisson

- i Số lỗi in trong một (hoặc một số) trang sách.
- ii Số người sống lâu trên 100 tuổi trong một cộng đồng dân cư.
- iii Số người đến một bưu điện nào đó trong một ngày.
- iv Số tai nạn hoặc sự cố giao thông xảy ra tại một điểm giao thông trong một ngày....

Các biến ngẫu nhiên được sử dụng để mô tả, ''đếm''số lần xảy ra của một biến cố, sự kiện nào đó xảy ra trong một khoảng thời gian và thỏa một số điều kiện (các điều kiện này thường thỏa trong thực tế) thường được mô tả bằng phân phối Poisson.

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson

Định lý 5

Nếu biến ngẫu nhiên X có phân phối Poisson với tham số λ, $X \sim P(\lambda)$ thì kỳ vọng và phương sai của X lần lượt bằng

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \mathbb{V}ar(X) = \lambda.$$

Định lý 6

Nếu $X \sim P(m_1)$ và $Y \sim P(m_2)$, trong đó X, Y là độc lập, chúng ta có $X + Y \sim P(m_1 + m_2)$.

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson

Định lý 5

Nếu biến ngẫu nhiên X có phân phối Poisson với tham số λ, $X \sim P(\lambda)$ thì kỳ vọng và phương sai của X lần lượt bằng

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \mathbb{V}ar(X) = \lambda.$$

Định lý 6

Nếu $X \sim P(m_1)$ và $Y \sim P(m_2)$, trong đó X, Y là độc lập, chúng ta có $X + Y \sim P(m_1 + m_2)$.

Ví dụ 14

Giả sử số lỗi in trong một trang sách nào đó của quyển sách có phân phối Poisson với tham số $\lambda = \frac{1}{2}$. Tính xác suất có ít nhất một lỗi in trong trang này.

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson

Định lý 5

Nếu biến ngẫu nhiên X có phân phối Poisson với tham số λ, $X \sim P(\lambda)$ thì kỳ vọng và phương sai của X lần lượt bằng

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \mathbb{V}ar(X) = \lambda.$$

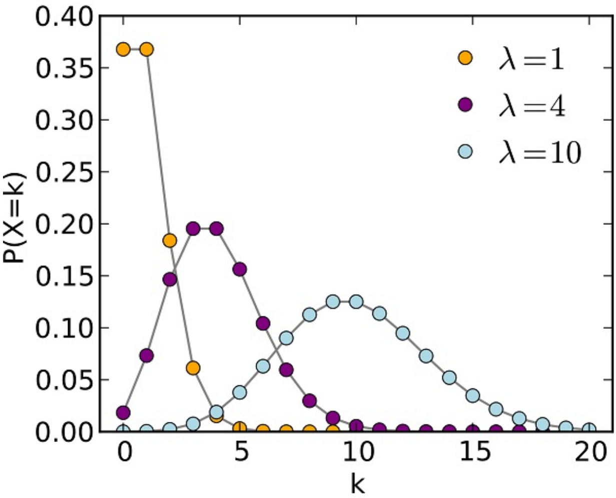
Định lý 6

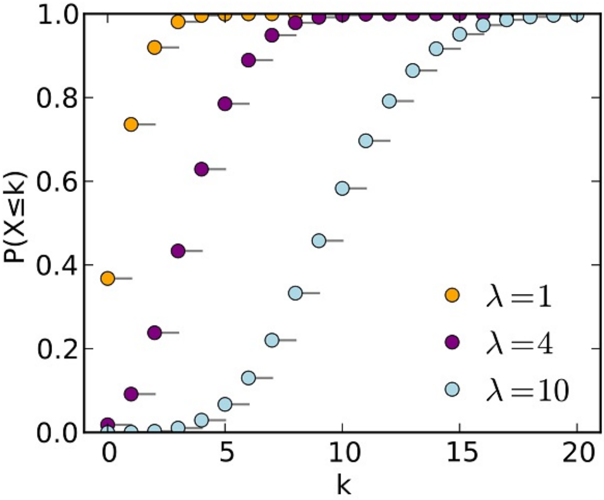
Nếu $X \sim P(m_1)$ và $Y \sim P(m_2)$, trong đó X, Y là độc lập, chúng ta có $X + Y \sim P(m_1 + m_2)$.

Ví dụ 14

Giả sử số lỗi in trong một trang sách nào đó của quyển sách có phân phối Poisson với tham số $\lambda = \frac{1}{2}$. Tính xác suất có ít nhất một lỗi in trong trang này.

Hình: Hàm xác suất-Phân phối Poisson





Hình: Hàm phân phối-Phân phối Poisson

Phân phối Poisson- Ví dụ

Ví dụ 15

Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài điện thoại trong một giờ có phân phối Poisson với $\lambda = 10$. *Tính xác suất*

Phân phối Poisson- Ví dụ

Ví dụ 15

Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài điện thoại trong một giờ có phân phối Poisson với $\lambda = 10$. *Tính xác suất*

i *có 5 cuộc điện thoại gọi đến trong một giờ.*

Phân phối Poisson- Ví dụ

Ví dụ 15

Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài điện thoại trong một giờ có phân phối Poisson với $\lambda = 10$. *Tính xác suất*

- i *có 5 cuộc điện thoại gọi đến trong một giờ.*
- ii *Có nhiều nhất 3 cuộc điện thoại gọi đến trong một giờ.*

Phân phối Poisson- Ví dụ

Ví dụ 15

Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài điện thoại trong một giờ có phân phối Poisson với $\lambda = 10$. *Tính xác suất*

i *có 5 cuộc điện thoại gọi đến trong một giờ.*

ii *Có nhiều nhất 3 cuộc điện thoại gọi đến trong một giờ.*

iii *Có 15 cuộc gọi đến trong hai giờ.*

Phân phối Poisson- Ví dụ

Ví dụ 15

Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài điện thoại trong một giờ có phân phối Poisson với $\lambda = 10$. *Tính xác suất*

i *có 5 cuộc điện thoại gọi đến trong một giờ.*

ii *Có nhiều nhất 3 cuộc điện thoại gọi đến trong một giờ.*

iii *Có 15 cuộc gọi đến trong hai giờ.*

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson

Định lý 7

Cho $X \sim B(n, p)$, *nếu* $n \to \infty$ *và* $p \to 0$ *sao cho* $np \to \lambda$ *thì*

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson

Định lý 7

Cho $X \sim B(n, p)$*, nếu* $n \to \infty$ *và* $p \to 0$ *sao cho* $np \to \lambda$ *thì*

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Trong thực tế, phân phối Poisson sẽ xấp xỉ tốt cho phân phối nhị thức khi $n \geq 100$ và $np \leq 20, p \leq 0.01$.

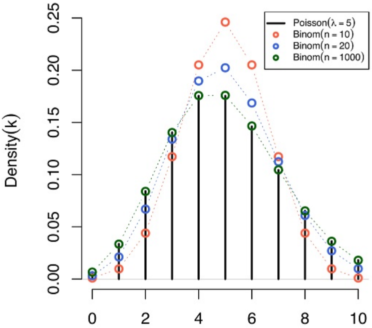
Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson

Định lý 7

Cho $X \sim B(n, p)$, nếu $n \to \infty$ và $p \to 0$ sao cho $np \to \lambda$ thì

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Trong thực tế, phân phối Poisson sẽ xấp xỉ tốt cho phân phối nhị thức khi $n \geq 100$ và $np \leq 20$, $p \leq 0.01$.



Phân phối Poisson

Ví dụ 16

Trong một đợt tiêm chủng cho trẻ em ở một khu vực, biết xác suất một trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm là $0,001$. *Thực hiện tiêm cho* 2000 *trẻ. Tính xác suất có nhiều nhất 1 trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm.*

Phân phối Poisson

Ví dụ 16

Trong một đợt tiêm chủng cho trẻ em ở một khu vực, biết xác suất một trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm là $0,001$*. Thực hiện tiêm cho* 2000 *trẻ. Tính xác suất có nhiều nhất 1 trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm.*

Bài giải 3

Gọi X *là số trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm trong* 2000 *trẻ.* X $B(2000, 0.001)$.
Xác suất có nhiều nhất một trẻ bị phản ứng với thuốc sau khi tiêm

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \sum_{x=0}^{1} C_{2000}^{x} 0.001^{x} (1 - 0.001)^{2000-x} \approx 0.40587$$

Cách 2: $n = 2000 > 100, p = 0.001 \leq 0.01, \mathbb{E}(X) = np = 2 < 20$. *Sử dụng xấp xỉ nhị thức bằng phân phối Poisson với* $\lambda = 2$. *Khi đó,*

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \sum_{x=0}^{1} e^{-2} \frac{2^x}{x!} \approx 0.406$$

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 18 (Phân phối đều)

Nếu biến ngẫu nhiên X có giá trị $1, 2, \ldots, m$ với xác suất bằng nhau, bằng $\frac{1}{m}$, thì X được gọi là có phân phối đều.

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 18 (Phân phối đều)

Nếu biến ngẫu nhiên X có giá trị $1, 2, \ldots, m$ với xác suất bằng nhau, bằng $\frac{1}{m}$, thì X được gọi là có phân phối đều.

Hàm xác suất

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{m}, \ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 18 (Phân phối đều)

Nếu biến ngẫu nhiên X có giá trị $1, 2, \ldots, m$ với xác suất bằng nhau, bằng $\frac{1}{m}$, thì X được gọi là có phân phối đều.

Hàm xác suất

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{m}, \ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Định lý 8

Nếu biến ngẫu nhiên X có phân phối đều rời rạc thì

- $\mathbb{E}(X) = \frac{m+1}{2}$
- $\mathbb{V}(X) = \frac{m^2-1}{12}$

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 19 (Phân phối hình học)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm xác suất

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = q^k p \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

trong đó $q = 1 - p$, thì X được gọi là có một phân phối hình học.

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 19 (Phân phối hình học)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm xác suất

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = q^k p \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

trong đó $q = 1 - p$, thì X được gọi là có một phân phối hình học.

Định nghĩa 20 (Phân phối *fft − Distribution*)

Nếu một biến ngẫu nhiên X có hàm xác suất

$$p_X(k) = q^{k-1} p \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

trong đó $1 = 1 - p$, thì X được goi là có phân phối $fft - Distribution$.

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 19 (Phân phối hình học)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm xác suất

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = q^k p \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

trong đó $q = 1 - p$, thì X được gọi là có một phân phối hình học.

Định nghĩa 20 (Phân phối $fft - Distribution$)

Nếu một biến ngẫu nhiên X có hàm xác suất

$$p_X(k) = q^{k-1} p \quad (k = 1, 2, \dots)$$

trong đó $1 = 1 - p$, thì X được goi là có phân phối $fft - Distribution$.

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 21 (Phân phối siêu bội)

Nếu X là biến ngẫu nhiên có hàm xác suất

$$p_X(k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

trong đó k là số nguyên sao cho $0 \leq k \leq a$, $0 \leq n-k \leq b$, thì X được gọi là có phân phối siêu bội.

Một vài phân phối rời rạc

Định nghĩa 21 (Phân phối siêu bội)

Nếu X là biến ngẫu nhiên có hàm xác suất

$$p_X(k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

trong đó k là số nguyên sao cho $0 \leq k \leq a$, $0 \leq n-k \leq b$, thì X được gọi là có phân phối siêu bội.

Phân phối đều

Định nghĩa 22 (Phân phối đều)

Phân phối đều

Định nghĩa 22 (Phân phối đều)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{nếu } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{ngược lại}, \end{cases}$$

thì X được gọi là có phân phối đều.

Phân phối đều

Định nghĩa 22 (Phân phối đều)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{nếu } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

thì X được gọi là có phân phối đều.

Chú ý 1

Để tránh nhầm lẫn với trường hợp biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối đều, chúng ta gọi biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên (a, b) cho trường hợp biến ngẫu nhiêu liên tục có phân phối đều.

Phân phối đều

Định nghĩa 22 (Phân phối đều)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{nếu } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

thì X được gọi là có phân phối đều.

Chú ý 1

Để tránh nhầm lẫn với trường hợp biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối đều, chúng ta gọi biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên (a, b) cho trường hợp biến ngẫu nhiêu liên tục có phân phối đều.

Phân phối đều

Với hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên (a, b) được định nghĩa như trên, ta có được hàm phân phối như bên dưới

Phân phối đều

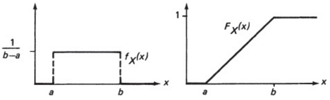
Với hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên (a, b) được định nghĩa như trên, ta có được hàm phân phối như bên dưới

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{khi } x \in [a, b]] \\ 1, & \text{khi } x > b. \end{cases}$$

Phân phối đều

Với hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên (a, b) được định nghĩa như trên, ta có được hàm phân phối như bên dưới

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{khi } x \in [a, b]] \\ 1, & \text{khi } x > b. \end{cases}$$

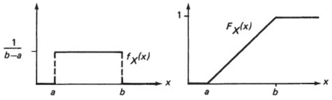


Hình: 9-Hàm mật độ và hàm phân phối của một biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên (a,b).

Phân phối đều

Với hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên (a, b) được định nghĩa như trên, ta có được hàm phân phối như bên dưới

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{khi } x \in [a, b]] \\ 1, & \text{khi } x > b. \end{cases}$$



Hình: 9-Hàm mật độ và hàm phân phối của một biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên (a,b).

Kỳ vọng và phương sai của phân phối đều

Định lý 9 (Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên có phân phối đều)

Cho X *là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên* $[a, b]$ *(nghĩa là* $X \sim U([a, b])$*) thì*

Kỳ vọng và phương sai của phân phối đều

Định lý 9 (Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên có phân phối đều)

Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên $[a, b]$ (nghĩa là $X \sim U([a, b])$) thì

i *Kỳ vọng* $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

Kỳ vọng và phương sai của phân phối đều

Định lý 9 (Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên có phân phối đều)

Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên $[a, b]$ (nghĩa là $X \sim U([a, b])$) thì

i *Kỳ vọng* $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

ii *Phương sai* $\mathbb{V}ar(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Kỳ vọng và phương sai của phân phối đều

Định lý 9 (Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên có phân phối đều)

Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên $[a, b]$ (nghĩa là $X \sim U([a, b])$) thì

i *Kỳ vọng* $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

ii *Phương sai* $\mathbb{V}ar(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Phân phối mũ

- Phân phối mũ được dùng để mô hình các quá trình Poisson, các tình huống mà khi đó một đối tượng đang ở trạng thái A có thể chuyển sang trạng thái B với xác suất không đổi λ trong mỗi đơn vị thời gian.
- Thời điểm thay đổi trạng thái được mô tả bằng biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ.
  1. Gọi X: là số lần xảy ra một loại biến cố nào đó trong một đơn vị thời gian $X \sim P(\lambda)$.
  2. X_t là số lần biến cố đó xảy ra trong t đơn vị thời gian $(t > 0)$. Ta có: $X_t \sim P(\lambda t)$.
  3. Gọi T là khoảng thời gian giữa hai lần liên tiếp biến cố xảy ra. ta có
  $$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X_t = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}.$$
  4. Suy ra $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow F^{'}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Phân phối mũ

Định nghĩa 23 (Hàm phân phối mũ)

Nếu T là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } t < 0, \end{cases}$$

Phân phối mũ

Định nghĩa 23 (Hàm phân phối mũ)

Nếu T là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } t < 0, \end{cases}$$

trong đó $\lambda > 0$, thì X được gọi là có phân phối mũ (Exponential distribution).

Phân phối mũ

Định nghĩa 23 (Hàm phân phối mũ)

Nếu T là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } t < 0, \end{cases}$$

trong đó $\lambda > 0$, thì X được gọi là có phân phối mũ (Exponential distribution).

Ký hiệu : $T \sim Exp(\lambda)$.

Phân phối mũ

Định nghĩa 23 (Hàm phân phối mũ)

Nếu T là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } t < 0, \end{cases}$$

trong đó $\lambda > 0$, thì X được gọi là có phân phối mũ (Exponential distribution).

Ký hiệu : $T \sim Exp(\lambda)$.
Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{khi } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{khi } t \geq 0 \end{cases}$$

Phân phối mũ

Định nghĩa 23 (Hàm phân phối mũ)

Nếu T là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } t < 0, \end{cases}$$

trong đó $\lambda > 0$, thì X được gọi là có phân phối mũ (Exponential distribution).

Ký hiệu : $T \sim Exp(\lambda)$.
Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{khi } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{khi } t \geq 0 \end{cases}$$

Các đặc trưng của phân phối mũ

Định lý 10

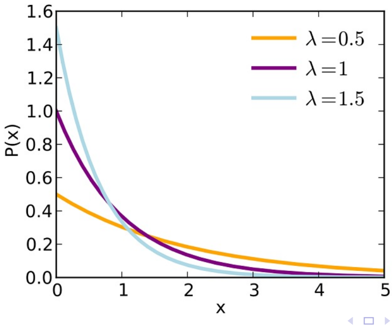
Nếu $T \sim Exp(\lambda)$ *thì kỳ vọng và phương sai của* T *lần lượt là* $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbb{V}ar(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

Các đặc trưng của phân phối mũ

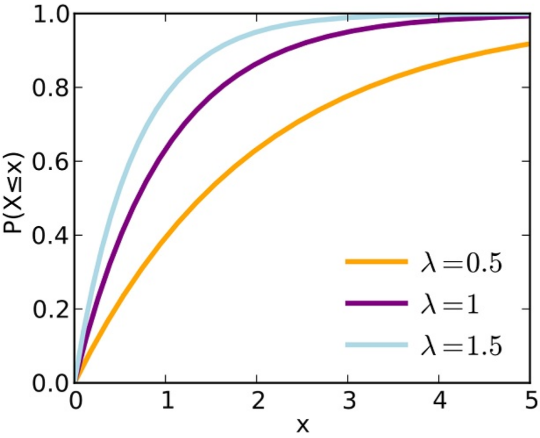
Định lý 10

Nếu $T \sim Exp(\lambda)$ *thì kỳ vọng và phương sai của* T *lần lượt là* $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbb{V}ar(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

Hình: Hàm mật độ xác suất-Phân phối mũ



Phân phối mũ



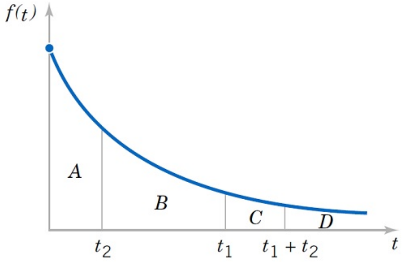
Hình: Hàm phân phối-Phân phối mũ

Phân phối mũ-Tính không nhớ

Định lý 11

Cho biến ngẫu nhiên $X \sim Exp(\lambda)$, khi đó

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \text{ với mọi } s, t \geq 0$$



Hình: Hàm phân phối-Phân phối mũ

Ví dụ

Ví dụ 17

Tuổi thọ (đv: giờ) của một trò chơi điện tử là một B.N.Ncó hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{100}}, & khi\ x \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0. \end{cases}$$

- *Tìm hằng số k.*
- *Tính xác suất tuổi thọ của trò chơi này nằm trong khoảng 50 đến 150 giờ.*
- *Tính xác suất tuổi thọ của trò chơi này ít hơn 100 giờ.*

Ví dụ

Ví dụ 18

Tuổi thọ X (đơn vị: năm) của sản phẩm do nhà máy M sản xuất là B.N.N có phân phối mũ với tham số $\lambda = 0,1$.

- *Mua sản phẩm của nhà máy M và đã sử dụng rồi. Tính xác suất sản phẩm này sử dụng thêm được ít nhất 10 năm nữa.*
- *Tính tuổi thọ trung bình của sản phẩm và tính xác suất sản phẩm này có tuổi thọ lớn hơn tuổi thọ trung bình.*
- *Giả sử kiểm tra 20 sản phẩm, tính xác suất có ít nhất 10 sản phẩm có tuổi thọ lớn hơn tuổi thọ trung bình.*
- *Cần đặt ra thời hạn bảo hành sản phẩm là bao lâu để tỉ lệ sản phẩm phải bảo hành không quá* 20%.

Phân phối chuẩn tắc (Standard Normal Distribution)

Nếu $\mu = 0$, $\sigma = 1$ chúng ta có được $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Khi đó, chúng ta gọi biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn tắc.

Phân phối chuẩn tắc (Standard Normal Distribution)

Nếu $\mu = 0,\ \sigma = 1$ chúng ta có được $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Khi đó, chúng ta gọi biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn tắc.

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên này

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Phân phối chuẩn tắc (Standard Normal Distribution)

Nếu $\mu = 0$, $\sigma = 1$ chúng ta có được $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Khi đó, chúng ta gọi biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn tắc.

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên này

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Hàm phân phối của B.N.N có phân phối chuẩn tắc thường được ký hiệu $\Phi(x)$ và được xác định như sau

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Phân phối chuẩn tắc (Standard Normal Distribution)

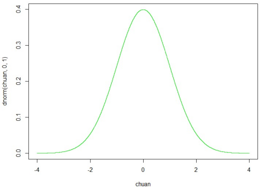
Nếu $\mu = 0$, $\sigma = 1$ chúng ta có được $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Khi đó, chúng ta gọi biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn tắc.

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên này

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Hàm phân phối của B.N.N có phân phối chuẩn tắc thường được ký hiệu $\Phi(x)$ và được xác định như sau

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$



Hình: 1- Phân phối chuẩn tắc. Hàm mật độ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

Phân phối chuẩn tắc (Standard Normal Distribution)

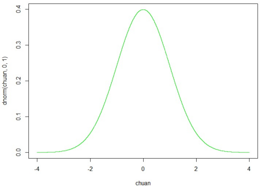
Nếu $\mu = 0$, $\sigma = 1$ chúng ta có được $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Khi đó, chúng ta gọi biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn tắc.

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên này

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

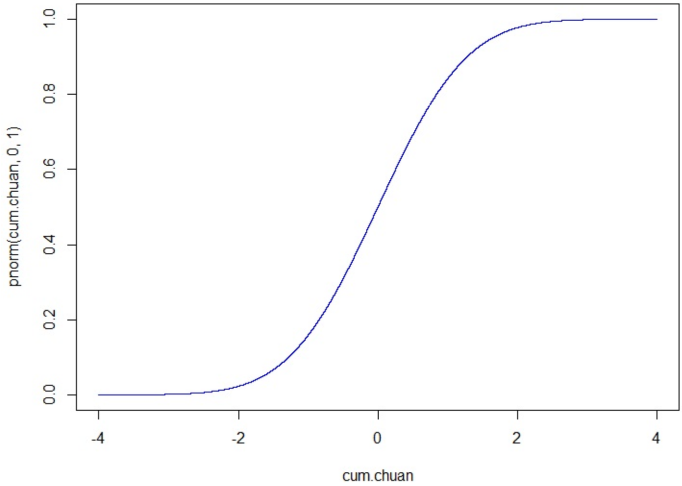
Hàm phân phối của B.N.N có phân phối chuẩn tắc thường được ký hiệu $\Phi(x)$ và được xác định như sau

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

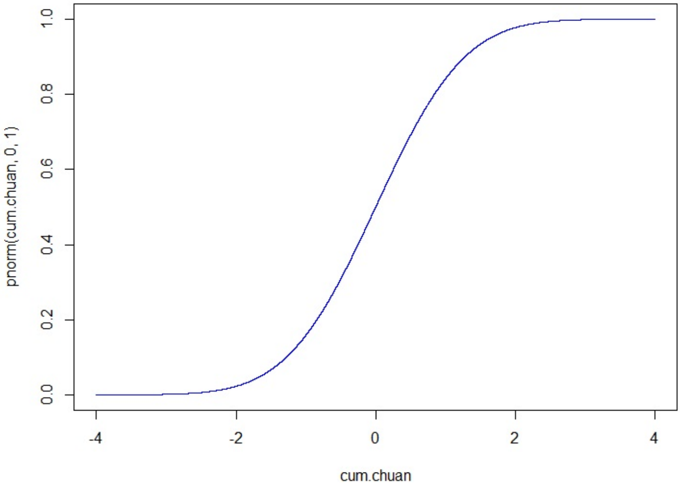


Hình: 1- Phân phối chuẩn tắc. Hàm mật độ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

Phân phối chuẩn- Hàm phân phối



Phân phối chuẩn- Hàm phân phối



Phân phối chuẩn- Tính chất

* Đồ thị có dạng hình chuông
* Phân phối đối xứng
* Trung bình $=$ trung vị (median)$=$ Mode
* Vị trí của phân phối được xác định bởi kỳ vọng μ
* Độ phân tán được xác định bởi độ lệch tiêu chuẩn σ
* Xác định trên $\mathbb{R}$.

Phân phối chuẩn tắc (Standard Normal Distribution)

Tính chất 2

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Phân phối chuẩn tắc (Standard Normal Distribution)

Tính chất 2

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Phân phối chuẩn tắc (Standard Normal Distribution)

Tính chất 2

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Với giá trị cụ thể của x, ta tra bảng để tìm giá trị $\phi(x)$.

Ví dụ 19

Cho biến ngẫu nhiên $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Tính các xác suất sau

- $\mathbb{P}(X < 1.55)$
- $\mathbb{P}(X < -1.45)$
- $\mathbb{P}(-1 \leq X < 1.5)$

Phân phối chuẩn tắc (Standard Normal Distribution)

Tính chất 2

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Với giá trị cụ thể của x, ta tra bảng để tìm giá trị $\phi(x)$.

Ví dụ 19

Cho biến ngẫu nhiên $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. *Tính các xác suất sau*

- $\mathbb{P}(X < 1.55)$
- $\mathbb{P}(X < -1.45)$
- $\mathbb{P}(-1 \leq X < 1.5)$

Phân phối chuẩn tổng quát(General Normal Distribution)

Định lý 12

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *và* $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *thì* $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Phân phối chuẩn tổng quát(General Normal Distribution)

Định lý 12

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *và* $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *thì* $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Định lý 13

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì*

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathbb{V}ar(X) = \sigma^2.$$

Phân phối chuẩn tổng quát(General Normal Distribution)

Định lý 12

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *và* $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *thì* $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

Định lý 13

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì*

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathbb{V}ar(X) = \sigma^2.$$

Phân phối chuẩn tổng quát(General Normal Distribution)

Định lý 14

Nếu $Y = aX + b$, *trong đó* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì*

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Phân phối chuẩn tổng quát(General Normal Distribution)

Định lý 14

Nếu $Y = aX + b$, *trong đó* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì*

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Hệ quả 1

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì* $\mathbb{P}(X < a) = \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Phân phối chuẩn tổng quát(General Normal Distribution)

Định lý 14

Nếu $Y = aX + b$, *trong đó* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì*

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Hệ quả 1

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì* $\mathbb{P}(X < a) = \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Hệ quả 2

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì* $\mathbb{P}(a \leq X < b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Phân phối chuẩn tổng quát(General Normal Distribution)

Định lý 14

Nếu $Y = aX + b$, *trong đó* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì*

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Hệ quả 1

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì* $\mathbb{P}(X < a) = \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Hệ quả 2

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *thì* $\mathbb{P}(a \le X < b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Với n đủ lớn, phân phối nhị thức có thể xấp xỉ bới phân phối chuẩn. Khi đó $X \sim \mathcal{N}(np, npq)$.

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Với n đủ lớn, phân phối nhị thức có thể xấp xỉ bởi phân phối chuẩn. Khi đó $X \sim \mathcal{N}(np, npq)$. Ta có

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \tag{5}$$

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Với n đủ lớn, phân phối nhị thức có thể xấp xỉ bởi phân phối chuẩn. Khi đó $X \sim \mathcal{N}(np, npq)$. Ta có

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \tag{5}$$

Độ chính xác nói chung có phần cải thiện nếu, b được thay bởi $b + \frac{1}{2}$ và a được thay bởi $a + \frac{1}{2}$, khi đó

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) \tag{6}$$

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Với n đủ lớn, phân phối nhị thức có thể xấp xỉ bởi phân phối chuẩn. Khi đó $X \sim \mathcal{N}(np, npq)$. Ta có

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \tag{5}$$

Độ chính xác nói chung có phần cải thiện nếu, b được thay bởi $b + \frac{1}{2}$ và a được thay bởi $a + \frac{1}{2}$, khi đó

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) \tag{6}$$

Chúng ta nói rằng chúng ta có một sự "hiệu chỉnh liên tục".

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Với n đủ lớn, phân phối nhị thức có thể xấp xỉ bởi phân phối chuẩn. Khi đó $X \sim \mathcal{N}(np, npq)$. Ta có

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad (5)$$

Độ chính xác nói chung có phần cải thiện nếu, b được thay bởi $b + \frac{1}{2}$ và a được thay bởi $a + \frac{1}{2}$, khi đó

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad (6)$$

Chúng ta nói rằng chúng ta có một sự "hiệu chỉnh liên tục".

Chú ý 2

$npq \geq 10$.

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Với n đủ lớn, phân phối nhị thức có thể xấp xỉ bởi phân phối chuẩn. Khi đó $X \sim \mathcal{N}(np, npq)$. Ta có

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \tag{5}$$

Độ chính xác nói chung có phần cải thiện nếu, b được thay bởi $b + \frac{1}{2}$ và a được thay bởi $a + \frac{1}{2}$, khi đó

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) \tag{6}$$

Chúng ta nói rằng chúng ta có một sự "hiệu chỉnh liên tục".

Chú ý 2

$npq \geq 10$.

Phân phối Weibull

Định nghĩa 24 (Phân phối Weibull)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{a}\left(\frac{x}{x}\right)^{c-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^c\right), & khi \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0 \end{cases}$$

Phân phối Weibull

Định nghĩa 24 (Phân phối Weibull)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{a}\left(\frac{x}{x}\right)^{c-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^{c}\right), & khi \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0 \end{cases}$$

trong đó a và c là những số dương, thì X được gọi là có phân phối Weibull.

Phân phối Weibull

Định nghĩa 24 (Phân phối Weibull)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{a}\left(\frac{x}{x}\right)^{c-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^{c}\right), & khi \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0 \end{cases}$$

trong đó a và c là những số dương, thì X được gọi là có phân phối Weibull.

Hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\left[\frac{x}{a}\right]^{c}\right), & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

Phân phối Weibull

Định nghĩa 24 (Phân phối Weibull)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

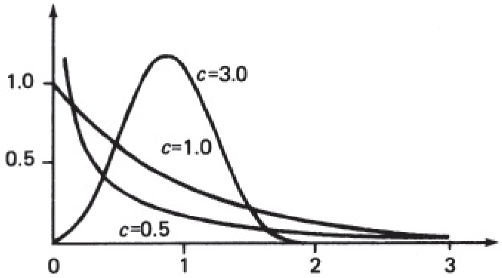
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{a}\left(\frac{x}{x}\right)^{c-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^{c}\right), & khi \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0 \end{cases}$$

trong đó a và c là những số dương, thì X được gọi là có phân phối Weibull.

Hàm phân phối

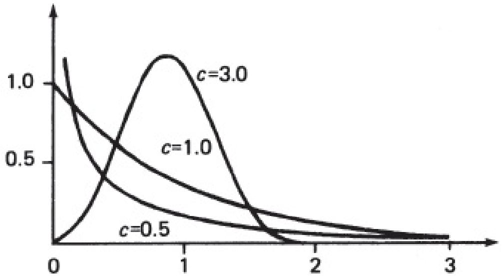
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\left[\frac{x}{a}\right]^{c}\right), & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

Một vài phân phối liên tục



Hình: 11- Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân phối Weibull (z=1; c=0.5, 1.0, 3.0).

Một vài phân phối liên tục



Hình: 11- Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân phối Weibull (z=1; c=0.5, 1.0, 3.0).

Một vài phân phối liên tục

Định nghĩa 25 (Phân phối Gamma)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^p\Gamma(p)} x^{p-1} \exp\left(-\frac{x}{a}\right), & khi \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0 \end{cases}$$

Một vài phân phối liên tục

Định nghĩa 25 (Phân phối Gamma)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^p\Gamma(p)} x^{p-1} \exp\left(-\frac{x}{a}\right), & khi \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0 \end{cases}$$

trong đó $p > 0$ và $a > 0$, thì X được gọi là có phân phối Gamma.

Một vài phân phối liên tục

Định nghĩa 25 (Phân phối Gamma)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^p\Gamma(p)} x^{p-1} \exp\left(-\frac{x}{a}\right), & khi \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0 \end{cases}$$

trong đó $p > 0$ và $a > 0$, thì X được gọi là có phân phối Gamma.

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (p > 0).$$

Một vài phân phối liên tục

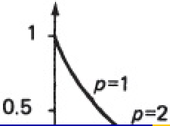
Định nghĩa 25 (Phân phối Gamma)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^p\Gamma(p)} x^{p-1} \exp\left(-\frac{x}{a}\right), & khi \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0 \end{cases}$$

trong đó $p > 0$ và $a > 0$, thì X được gọi là có phân phối Gamma.

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (p > 0).$$



Một vài phân phối liên tục

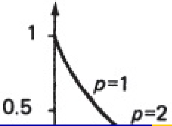
Định nghĩa 25 (Phân phối Gamma)

Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^p \Gamma(p)} x^{p-1} \exp\left(-\frac{x}{a}\right), & khi \geq 0, \\ 0, & khi\ x < 0 \end{cases}$$

trong đó $p > 0$ và $a > 0$, thì X được gọi là có phân phối Gamma.

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (p > 0).$$



Định lý giới hạn trung tâm

Định lý 15

Cho $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối* $F(x;\theta)$*, có giá trị kỳ vọng* μ *và độ lệch chuẩn* $\sigma > 0$.

Định lý giới hạn trung tâm

Định lý 15

Cho $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối $F(x;\theta)$, có giá trị kỳ vọng μ và độ lệch chuẩn $\sigma > 0$.
Xét tổng $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Ta có $\mathbb{E}(S_n) = n\mu; \mathbb{V}ar(S_n) = n\sigma^2$. Khi đó, phân phối của S_n hội tụ về phân phối chuẩn $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.
Và

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1), \ \ khi\ n \to \infty$$

Véc-tơ ngẫu nhiên 2 chiều rời rạc

Định nghĩa 26

Cho $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, *và* $Y \in \{y_1, y_2, y_n\}$ *là các B.N.N rời rạc thì để mô tả phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên rời rạc này ta có thể sử dụng hàm khối xác suất đồng thời* $p_{X,Y}(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

- $p_{X,Y}(x_i, y_j) \geq 0, \forall x_i, y_j,$
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{X,Y}(x_i, y_j) = 1,$

X \ Y	y_1	y_2	...	Y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2n}
...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Véc-tơ ngẫu nhiên 2 chiều rời rạc

Định nghĩa 26

Cho $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, *và* $Y \in \{y_1, y_2, y_n\}$ *là các B.N.N rời rạc thì để mô tả phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên rời rạc này ta có thể sử dụng hàm khối xác suất đồng thời*
$p_{X,Y}(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

- $p_{X,Y}(x_i, y_j) \geq 0, \forall x_i, y_j$,
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{X,Y}(x_i, y_j) = 1$,

X \ Y	y_1	y_2	...	Y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2n}
...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Véc-tơ ngẫu nhiên 2 chiều rời rạc

Ví dụ 20

Một cửa hàng tiện lợi có ba quầy tính tiền là a, b, c. Có hai khách hàng đến quầy vào các thời điểm khác nhau khi cả ba quầy đều trống. Mỗi khách hàng chọn một quầy ngẫu nhiên và độc lập với nhau. Gọi X, Y lần lượt là số khách hàng chọn quầy a và quầy b. Tìm hàm khối xác suất đồng thời và lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y).

Định nghĩa 27

Nếu hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y) là $p(x, y)$ thì hàm khối xác suất lề của X và Y lần lượt là

$$p_X(x) = \sum_{j=1}^{n} p(x, y_j) \quad p_Y(y) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i, y).$$

Véc-tơ ngẫu nhiên 2 chiều rời rạc

Định nghĩa 28

Hàm khối xác suất có điều kiện $p_{Y|x}(y) = \mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}$

Định nghĩa 29

Kỳ vọng của hàm hai biến ngẫu nhiên

$$\mathbb{E}(h(X, Y)) = \sum_x \sum_y h(x, y) p_{X,Y}(x, y).$$

Định nghĩa 30

Hiệp phương sai của hai biến ngẫu nhiên X, Y, *ký hiệu* $cov(X, Y)$,

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \mathbb{E}(XY) - \mu_X \mu_Y.$$

Véc-tơ ngẫu nhiên 2 chiều rời rạc

Định nghĩa 31

Hệ số tường quan của hai biến ngẫu nhiên X, Y *ký hiệu* $\rho_{X,Y}$,

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$