BÀI TẬP TUẦN 5

Bài 1. Trong vành đa thức $\mathbb{Z}_5[x]$ hãy thực hiện phép nhân:
a) $(2x^2 + 4x + 1)(3x^2 + 1x + 2)$,
b) $(-2x^2 + 4x + 3)^2$

a) $(2x^2 + 4x + 1)(3x^2 + 1x + 2) = 4x^2 + 8x + 2 + 2x^3 + 4x^2 + x + 6x^4 + 12x^3 + 3x^2$
$= 6x^4 + 14x^3 + 11x^2 + 9x + 2 \equiv 1x^4 + 4x^3 + 1x^2 + 4x + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$

b) $(-2x^2 + 4x + 3)^2 = 9 + 12x - 6x^2 + 12x + 16x^2 - 8x^3 - 6x^2 + -8x^3 + 4x^4$
$= 4x^4 - 16x^3 + 4x^2 + 24x + 9 \equiv 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$

Bài 2. Trên vành đa thức $\mathbb{Z}_6[x]$ hãy thực hiện phép nhân:

$$(2x^3 + 4x^2 + 1x)(3x^2 + 3x + 2).$$

Vành này có ước của không hay không?

Ta có: $(2x^3 + 4x^2 + 1x)(3x^2 + 3x + 2) = 2x + 9x^2 + 4x^3 + 3x^2 + 12x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 12x^4 + 3x^3$
$= 6x^5 + 18x^4 + 19x^3 + 11x^2 + 2x \equiv 1x^3 + 5x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_6[x]$
Vậy vành này không phải là ước của không.

Bài 3. Trên vành $\mathbb{Z}_5[x]$, hãy thực hiện phép chia

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

cho đa thức

$$g(x) = -2x^2 + 2x - 1.$$

$-x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \mid -2x^2 + 2x - 1$
$-x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x \mid \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
$x^2 + \frac{5}{2}x + 1$
$x^2 - x + \frac{1}{2}$
$\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}$

Vậy: $\dfrac{-x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{-2x^2 + 2x - 1} = \dfrac{1}{2}(x-1)$

ta có: $2^{-1} \pmod 5 \Leftrightarrow 2x + 5y = 1$
Áp dụng thuật toán bezout
$\Rightarrow 2^{-1} \equiv 3 \pmod 5$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x-1) \equiv 3(x-1) \equiv 3x - 3 \equiv 3x + 2$

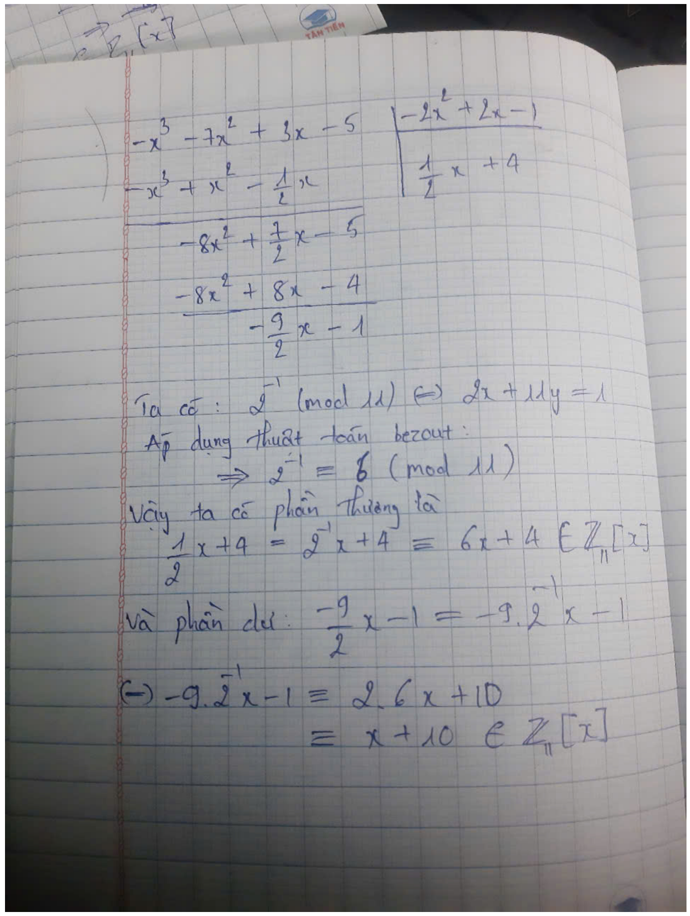
Vậy $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 3x + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$

Bài 4. Trên vành $\mathbb{Z}_{11}[x]$, hãy tìm thương và dư khi thực hiện phép chia

$$f(x) = -x^3 - 7x^2 + 3x - 5$$

cho đa thức

$$g(x) = -2x^2 + 2x - 1.$$



$$\begin{array}{l|l} -x^3 - 7x^2 + 3x - 5 & -2x^2 + 2x - 1 \\ \hline -x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x + 4 \\ \quad -8x^2 + \frac{7}{2}x - 5 & \\ \quad -8x^2 + 8x - 4 & \\ \quad\quad -\frac{9}{2}x - 1 & \end{array}$$

Ta có: $2^{-1} \pmod{11} \Leftrightarrow 2x + 11y = 1$

Áp dụng thuật toán bezout:

$\Rightarrow 2^{-1} \equiv 6 \pmod{11}$

Vậy ta có phần thương là

$\frac{1}{2}x + 4 = 2^{-1}x + 4 \equiv 6x + 4 \in \mathbb{Z}_{11}[x]$

và phần dư: $-\frac{9}{2}x - 1 = -9.2^{-1}x - 1$

$\Leftrightarrow -9.2^{-1}x - 1 \equiv 2.6x + 10$

$\equiv x + 10 \in \mathbb{Z}_{11}[x]$

Bài 5. Hãy áp dụng thuật toán Euclide để tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức sau trên vành $\mathbb{R}[x]$:

$$f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9 \text{ và } g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$$

ta có:

$$4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9 = 2x(2x^3 - x^2 - 5x + 4) + (-6x^2 - 3x + 9)$$

$$2x^3 - x^2 - 5x + 4 = (\frac{1}{3} - \frac{x}{3})(-6x^2 - 3x + 9) + (1 - x)$$

$$-6x^2 - 3x + 9 = (6x + 9)(1 - x) + 0$$

Vậy ước chung của $f(x)$ và $g(x)$ là $1 - x$

Bài 6. Hãy áp dụng thuật toán Bezout để tìm hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ thỏa

$$P(x)f(x) + Q(x)g(x) = gcd(f, g),$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức ở Bài 5.

Ta có:

$$(4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9)P(x) + (2x^3 - x^2 - 5x + 4)Q(x) = 1 - x$$

đặt $d = gcd(f, g)$
Áp dụng thuật toán Bezout:

$$(P_0(x), Q_0(x), d_0) = (1, 0, 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9)$$
$$(P_1(x), Q_1(x), d_1) = (0, 1, 2x^3 - x^2 - 5x + 4)$$
$$(P_2(x), Q_2(x), d_2) = (1, \frac{x}{3} - \frac{1}{3}, -6x^2 - 3x + 9)$$
$$(P_3(x), Q_3(x), d_3) = (\frac{x}{3} - \frac{1}{3}, -2x(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}) + 1, 1 - x)$$

Vậy $P(x)$ và $Q(x)$ là

$$P(x) = \tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{3} \text{ và } Q(x) = -2x(\tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{3}) + 1$$

Bài 7. Cho hai đa thức

$$f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 \text{ và } g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

a) Tìm ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$ trên vành $\mathbb{Q}[x]$ trong đó $\mathbb{Q}$ là trường các số hữu tỉ.
b) Tìm ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$ trên vành $\mathbb{Z}_3[x]$.

a) Áp dụng thuật toán Euclid:

$$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 - 2x + 4)(x^3 + 2x^2 + x + 1) + (-6x^2 - x - 3)$$
$$x^3 + 2x^2 + x + 1 = \left(\frac{-x}{6} - \frac{11}{36}\right)(-6x^2 - x - 3) + \left(\frac{7x}{36} + \frac{1}{12}\right)$$
$$-6x^2 - x - 3 = \left(\frac{396}{49} - \frac{216x}{7}\right)\left(\frac{7x}{36} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{-180}{49}\right)$$
$$\frac{7x}{36} + \frac{1}{12} = \left(\frac{-343x}{6480} - \frac{49}{2160}\right)\left(\frac{-180}{49}\right) + 0$$

Vậy ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$ trên vành $\mathbb{Q}[x]$ là $\frac{-180}{49}$

b) Áp dụng thuật toán Euclid:

$$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 + x + 1) + (-x)$$
$$x^3 + 2x^2 + x + 1 = (-x^2 + x - 1)(-x) + 1$$
$$-x = (-x).1 + 0$$

Vậy ước chung lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$ trên vành $\mathbb{Z}_3[x]$ là 1