Phương trình vi phân

T.S. Nguyễn Thị Hoài Thương

Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP.HCM
Khoa Toán Tin-học
Bộ môn Giải tích

ngththuong@hcmus.edu.vn

Ngày 28 tháng 5 năm 2023

Mục lục

1. Lập mô hình toán học với phương trình vi phân
2. Phương trình vi phân dạng tách biến
3. Phương trình vi phân đẳng cấp
4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1
5. Phương trình vi phân Bernouli
6. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng

Mô hình tăng trưởng dân số

Giả sử ở thời điểm t, dân số của một quần thể (người, động vật, vi khuẩn,...) là $P(t)$. Tốc độ tăng dân số được đo bởi đại lượng $P'(t)$, là tốc độ biến thiên dân số theo thời gian. Nếu ta nghĩ tốc độ tăng dân số tương tự như năng suất lao động, nghĩa là công nhân càng đông thì năng suất lao động của xưởng càng lớn, thì đại lượng $P'(t)$ tỉ lệ thuận với $P(t)$. Do đó

$$P'(t) = kP(t) \quad \text{hay } \frac{dP}{dt} = kP \tag{1.1}$$

trong đó k là hằng số. Nếu $k > 0$ thì dân số tăng theo thời gian, nếu $k < 0$ thì dân số giảm theo thời gian. Mô hình (1.1) được gọi là luật tăng trưởng tự nhiên. Nếu tính đến yếu tố di trú, giả sử tốc độ di trú là một hằng số, thì mô hình trên được hiệu chỉnh thành

$$\frac{dP}{dt} = kP - m.$$

Mô hình tăng trưởng dân số

Thực tế, nguồn tài nguyên môi trường sống có hạn, nghĩa là giả sử môi trường sống chỉ đủ khả năng nuôi dưỡng được một quần thể có số dân tối đa là K, gọi là số bão hoà (carrying capacity). Khi dân số $P(t)$ rất ít, nguồn tài nguyên dư sức phát triển dân số thì ta xem tốc độ tăng dân $P'(t)$ gần như tỉ lệ với $P(t)$. Khi $P(t)$ càng gần tới K thì tốc độ tăng trưởng giảm dần, và khi $P(t)$ vượt qua K thì tốc độ $P'(t)$ sẽ âm, dân số giảm. Theo đó, người ta lập mô hình sau

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right). \tag{1.2}$$

Phương trình (1.2) được gọi là phương trình vi phân logistic, hay mô hình logistic.

Mô hình tăng trưởng dân số

Nếu xét thêm yếu tố di trú, hoặc bị đánh bắt (ví dụ như cá) với tốc độ hằng số c thì mô hình logistic được hiệu chỉnh thành

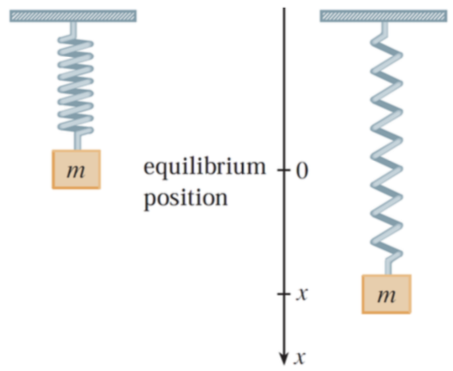
$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - c.$$

Đối với một số loài, có một mức dân tối thiểu m để duy trì nòi giống. Nếu tụt xuống mức này thì giống loài đó sẽ đến bờ diệt chủng, vì các cá thể trưởng thành không tìm được bạn phối giống phù hợp. Do đó, ta có mô hình sau

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right).$$

Mô hình chuyển động của lò xo

Xét một lò xo treo đứng, một đầu buộc cố định, đầu kia treo một vật khối lượng m, và đang ở vị trí cân bằng. Với giả thiết không có lực cản nào (của không khí hay lực ma sát), nếu ta kéo xuống hay nâng vật làm cho lò xo bị giãn hay nén vào một khoảng dịch chuyển x đơn vị, $x > 0$ hoặc $x \leq 0$, so với vị trí cân bằng, thì theo định luật Hook, vật m chịu một lực đàn hồi có cường độ tỉ lệ với x, bằng $-kx$, với $k > 0$ là hằng số đàn hồi.



Theo định luật II Newton, ta có phương trình

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{hay} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \tag{1.3}$$

Phương trình vi phân tổng quát

Định nghĩa

Cho F là hàm số $n+2$ biến. Giả sử y là hàm theo biến x, chưa biết, có đạo hàm đến bậc n và thoả phương trình

$$F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = k(\text{hằng số}) \tag{1.4}$$

thì (1.4) được gọi là phương trình vi phân cấp n.

Hai phương trình (1.1) và (1.2) là phương trình vi phân cấp 1. Phương trình (1.3) là phương trình vi phân cấp 2.

Phương trình vi phân tổng quát

Ghi chú 1: Không có phương pháp tổng quát để giải một phương trình vi phân. Thay vào đó, người ta chỉ nghiên cứu cách giải một phương trình vi phân là mô hình cho một hiện tượng thực tiễn nào đó đang được quan tâm. Các mục còn lại của chương sẽ bàn đến phương trình vi phân cấp 1 và cấp 2 tuyến tính.
Phương trình vi phân tuyến tính cấp n có dạng sau

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n y(x) = f(x). \tag{1.5}$$

Ghi chú 2: Khi tìm hàm số y thoả phương trình vi phân, người ta xét đến điều kiện $y(t_0) = y_0$ (đối với phương trình vi phân cấp 1), hoặc có thêm điều kiện $y'(t_0) = y_1$ (đối với phương trình vi phân cấp 2). Các bài toán này được gọi là bài toán điều kiện đầu (the initial value problem).

Phương trình vi phân dạng tách biến

Định nghĩa

Phương trình vi phân dạng tách biến (seperable equation) là phương trình vi phân cấp 1 có hình thức như sau

$$g(y)y' = f(x) \quad (y \text{ là hàm số chưa biết, ẩn } x) \tag{2.1}$$

Sở dĩ gọi là tách biến vì phương trình trên có dạng x và y ở từng vế riêng biệt.

Cách giải:

- Bởi vì hàm g chỉ phụ thuộc vào y và hàm f chỉ phụ thuộc vào x. Hơn thế nữa, ta có $y' = dy/dx$.
- Do đó, khi ta lấy tích phân 2 vế phương trình (2.1), ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình (2.1) có dạng

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c \quad \text{với } c \text{ là hằng số.}$$

Phương trình vi phân dạng tách biến

Ví dụ: Xét phương trình vi phân sau

$$y^2y' = x(1+x^2) \tag{2.2}$$

thoả điều kiện

$$y(0) = 1. \tag{2.3}$$

Phương trình vi phân đẳng cấp

Định nghĩa

Phương trình vi phân đẳng cấp là phương trình có dạng

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.1}$$

trong đó $x \neq 0$ và f là hàm cho trước.

Phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ: Xét phương trình vi phân sau

$$y - xy' = -y\ln\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), \quad (x \neq 0). \tag{3.2}$$

Chia 2 vế của phương trình (3.2) cho x, ta được

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x}\ln\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right). \tag{3.3}$$

Đặt

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = xu' + u. \tag{3.4}$$

Thay (3.4) vào (3.3), ta được

$$xu' + u = u + u\ \ln(|u|) \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = u\ \ln(|u|).$$

Phương trình vi phân đẳng cấp

- Nếu $u\,\text{ln}(|u|) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ hoặc $u = 1$ thì ta có thể kiểm tra được rằng $y = 0$ và $y = x$ cũng là nghiệm của phương trình vi phân đã cho.
- Nếu $u\,\text{ln}(|u|) \neq 0$, ta có

$$\frac{du}{u\,\text{ln}(|u|)} = \frac{dx}{x}.$$

Đây là phương trình vi phân tách biến. Tích phân 2 vế, ta được:

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\left|\ln\left(|u|\right)\right|\right) = \ln\left(|x|\right) + \ln\left(|c|\right), \quad c \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &\ln\left(\left|\frac{\ln(|u|)}{x}\right|\right) = \ln(|c|) \\
\Leftrightarrow &|\ln(|u|)| = c|x| \\
\Leftrightarrow &u = e^{c_1 x}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3.2) là: $y = xe^{c_1 x}$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4.1}$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm số chỉ phụ thuộc vào biến x.

- Nếu $q(x) \equiv 0$ thì (4.1) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 **thuần nhất**.
- Nếu $q(x) \neq 0$ thì (4.1) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 **không thuần nhất**.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Cách giải: Nhân hai vế của (4.1) với thừa số $e^{\int p(x)dx}$, ta được:

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được nghiệm tổng quát của (4.1) là:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + c\right)$$

với c là hằng số.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ: Xét phương trình vi phân sau:

$$y' + 2xy = 4x. \tag{4.2}$$

Phương trình vi phân Bernoulli

Định nghĩa

Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \tag{5.1}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm cho trước liên tục trong một khoảng nào đó và α là một hằng số thực cho trước.

- Nếu $\alpha = 0$ thì phương trình (5.1) trở thành phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất
$$y' + p(x)y = q(x).$$
- Nếu $\alpha = 1$ thì phương trình (5.1) trở thành phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất
$$y' + (p(x) - q(x))\, y = 0.$$

Ở đây, ta chỉ cần xét $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

Phương trình vi phân Bernoulli

Cách giải: Giả sử $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

- Nếu $\alpha > 0$, thì $y \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình vi phân (5.1). Ngược lại, nếu $\alpha \leq 0$, thì $y \equiv 0$ không là nghiệm.
- Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình (5.1) cho y^α, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ và phương trình trên được viết lại

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với ẩn hàm z. Sau khi giải tìm được nghiệm tổng quát của nó, ta trở về ẩn y bởi công thức $z = y^{1-\alpha}$, ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (5.1).

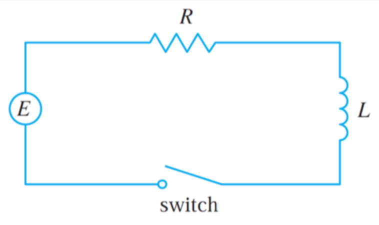
Phương trình vi phân Bernoulli

Ví dụ: Giải phương trình

$$y' - 2xy = 4x^3y^4. \tag{5.2}$$

Ứng dụng các mô hình phương trình vi phân cấp 1 - Ứng dụng trong mạch điện

Xét mạch điện đơn giản như hình bên. Suất điện động sinh bởi một nguồn là $E(t)$ volts (V) và sinh ra dòng điện $I(t)$ ampères (A) tại thời điểm t. Mạch có chứa một điện trở có trở kháng R ohms (Ω) và một cuộn cảm có độ tự cảm L henries (H).



Định luật Ohm cho biết hiệu điện thế do điện trở tạo ra là RI. Hiệu điện thế do cuộn cảm tạo ra là $L(dI/dt)$. Một trong các định luật Kirchhoff cho chúng ta phương trình

$$L\frac{dI}{dt} + RI(t) = E(t). \tag{5.3}$$

Ứng dụng các mô hình phương trình vi phân cấp 1 - Ứng dụng trong mạch điện

Ví dụ

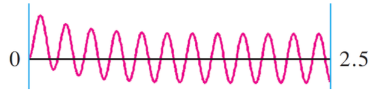
Giả sử $R = 12\Omega, L = 4H$, máy phát điện xoay chiều sinh ra suất điện động biến thiên theo qui luật $E(t) = 60\sin(30t)$. Thời điểm đóng mạch là $t = 0$, do đó $I(0) = 0$. Hãy tìm $I(t)$.

Giải: Dựa vào phương trình (5.3), ta có

$$4I'(t) + 12I(t) = 60\sin(30t) \text{ hay là } I'(t) + 3I(t) = 15\sin(30t)$$

với điều kiện đầu $I(0) = 0$. Ở trên là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, nếu giải theo phương pháp nói trên thì ta được

$$I(t) = \frac{5}{101}(\sin(30t) - 10\cos(30t)) + \frac{50}{101}e^{-3t}.$$



Đồ thị cường độ dòng điện biến đổi theo thời gian.

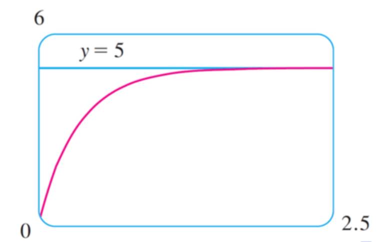
Ứng dụng các mô hình phương trình vi phân cấp 1 - Ứng dụng trong mạch điện

Ví dụ

Với bài toán trong ví dụ trước, nếu thay máy phát điện xoay chiều bởi ắc-qui có $E(t) = 60V$, không đổi. Tìm $I(t)$ và giới hạn cường độ dòng điện.

Giải: Trường hợp này là bài toán tìm $I(t)$ thoả $I'(t) + 3I(t) = 60$ và $I(0) = 0$. Theo cách giải bài toán giá trị đầu đã biết thì ta được $I(t) = 5\left(1 - e^{-3t}\right)$. Giới hạn cường độ dòng điện là

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5\left(1 - e^{-3t}\right) = 5 \text{ A} .$$



Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng là phương trình có dạng

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{6.1}$$

trong đó a, b, c là các hằng số, $a \neq 0$.

Phương trình đặc trưng tương ứng là phương trình đại số

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{6.2}$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng

Cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất như sau:

1. Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép r_0 thì phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát là
$$y_c = (c_1 + c_2 x)e^{r_0 x}, \quad \text{với } c_1, c_2 \text{ là hằng số tuỳ ý.}$$
2. Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt là r_1 và r_2 thì nghiệm tổng quát là
$$y_c = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$
3. Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp là $r_1 = \alpha + i\beta$ và $r_2 = \alpha - i\beta$ thì nghiệm tổng quát là
$$y_c = (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))e^{\alpha x}.$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng

Ví dụ

Xét phương trình vi phân cấp 2 có dạng sau:

$$y'' + y' - 2y = 0 \tag{6.3}$$

với điều kiện đầu

$$y(0) = 4, y'(0) = -5. \tag{6.4}$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng là phương trình có dạng

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{6.5}$$

trong đó a, b, c là các hằng số, $a \neq 0, G(x)$ là hàm số cho trước.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng tương ứng với (6.5) là

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{6.6}$$

Nếu không xét *điều kiện đầu* thì cả phương trình (6.5) và (6.6) có một họ (vô số) nghiệm có dạng tổng quát lần lượt kí hiệu là y và y_c

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

Cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình (6.5) như sau:

1. Tìm nghiệm tổng quát y_c của phương trình thuần nhất (6.5).
2. Tìm nghiệm riêng y_p của phương trình (6.6).
3. Nghiệm tổng quát của (6.5) là $y = y_p + y_c$.

Sau đây là cách tìm một nghiệm riêng y_p cho phương trình không thuần nhất (6.5):

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

- Nếu $G(x) = P_n(x)e^{rx}$, trong đó P_n là đa thức bậc n thì ta có ba trường hợp phụ
  - Trường hợp r là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (6.2) thì $y_p = x^2Q_n(x)e^{rx}, Q_n$ là đa thức bậc n được tìm theo phương pháp hệ số bất định khi thay $y = y_p$ vào (6.5).
  - Trường hợp r là một nghiệm đơn, thực của phương trình đặc trưng (6.2) thì $y_p = xQ_n(x)e^{rx}$.
  - Trường hợp r không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (6.2) thì $y_p = Q_n(x)e^{rx}$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

Ví dụ

Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 sau

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}. \tag{6.7}$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

- Nếu $G(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)]$ thì ta đặt $s = \max\{m, n\}$ và ta có hai trường hợp phụ
  - Trường hợp $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm phức của phương trình đặc trưng (6.2) thì $y_p = xe^{\alpha x}[R_s\cos(\beta x) + T_s\sin(\beta x)]$, trong đó R_s và T_s là hai đa thức bậc s, được tìm theo phương pháp hệ số bất định.
  - Trường hợp $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm phức của phương trình đặc trưng (6.2) thì $y_p = e^{\alpha x}[R_s(x)\cos(\beta x) + T_s(x)\sin(\beta x)]$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

Ví dụ

Giải phương trình $y'' - 4y = \cos(2x)$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

- Nếu $G = G_1 + G_2$, trong đó G_1 và G_2 có dạng đặc như hai dạng trên thì ta dùng nguyên lí chồng chất nghiệm để tìm y_p

Định lí: Nguyên lí chồng chất nghiệm

Giả sử y_{p_1} và y_{p_2} lần lượt là nghiệm của hai phương trình

$$ay'' + by' + cy = G_1(x)$$

và

$$ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

thì $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ là nghiệm của phương trình

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x).$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

Ví dụ

Giải phương trình $y'' - 4y = \cos(2x) + xe^x$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

- Nếu hàm G không có dạng đặc biệt thì dùng phương pháp biến thiên hằng số để tìm y_p.

Phương pháp biến thiên hằng số

Giả sử nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (6.6) có dạng $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ thì nghiệm riêng của (6.5) là

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

trong đó u_1 và u_2 tìm được bằng cách giải hệ

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G \end{cases}$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

Ví dụ

Giải phương trình

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}. \tag{6.8}$$