# Tích phân đường

T.S. Nguyễn Thị Hoài Thương

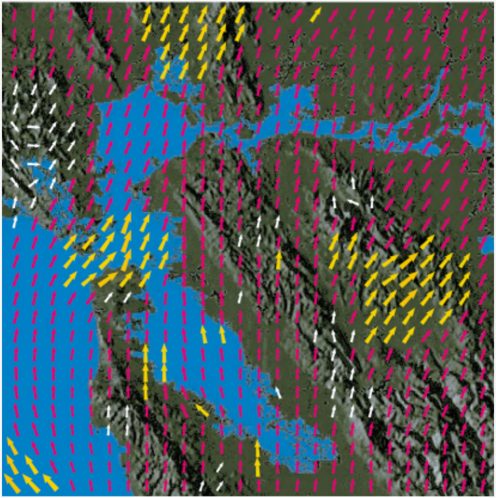
Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP.HCM
Khoa Toán Tin-học
Bộ môn Giải tích

*nghthuong@hcmus.edu.vn*

Ngày 28 tháng 5 năm 2023

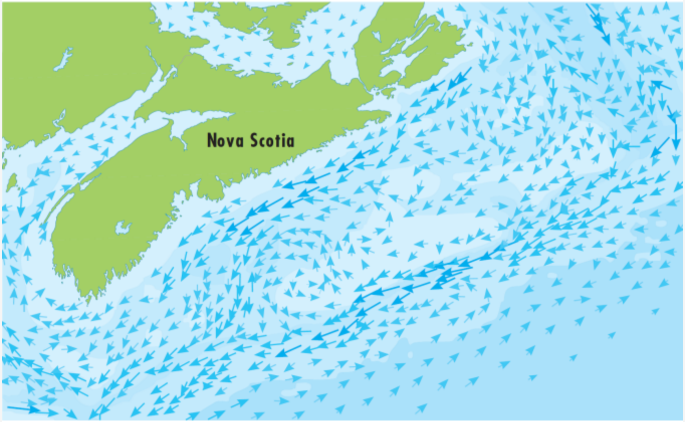
# Mục lục

# Trường vectơ



Trường vectơ vân tốc, biểu thị hướng và độ lớn của gió ở San Francisco Bay, 2:00, Feb, 21,2007

# Trường vectơ




Trường vectơ vân tốc, biểu thị các dòng hải lưu quanh bờ biển Nova Scotia.

# Trường vectơ

## Định nghĩa

- $D$ là một tập trong $\mathbb{R}^2$ (miền phẳng). Một trường vectơ trên $D$ là một hàm vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ gán mỗi điểm $(x, y) \in D$ với một vectơ hai chiều $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y)$.
- $E$ là một tập trong $\mathbb{R}^3$. Một trường vectơ trên $E$ là một hàm vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ gán mỗi điểm $(x, y, z) \in E$ với một vectơ 3 chiều $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z)$.

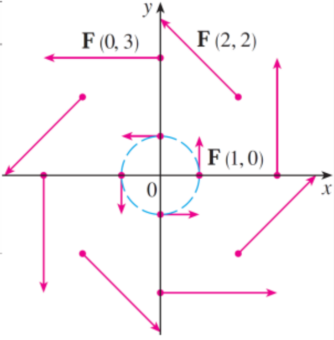
# Trường vectơ

## Ví dụ

Phác họa trường vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y) = -y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

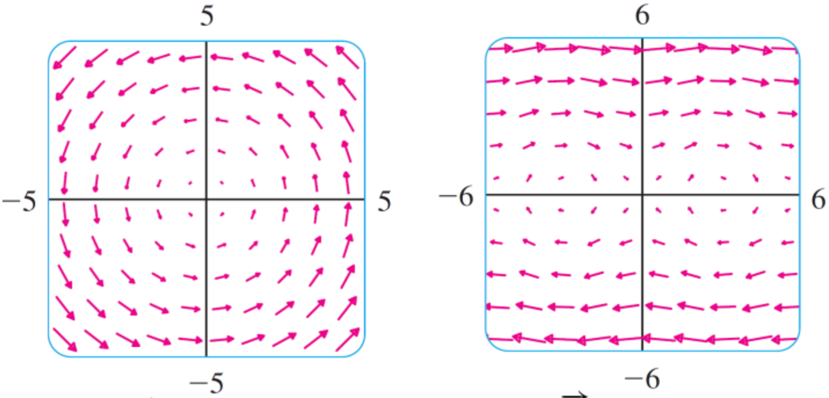
Giải: Ta lập bảng giá trị và vẽ vài vectơ

| $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ | $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $(1, 0)$ | $\langle 0, 1\rangle$ | $(-1, 0)$ | $\langle 0, -1\rangle$ |
| $(2, 2)$ | $\langle -2, 2\rangle$ | $(-2, -2)$ | $\langle 2, -2\rangle$ |
| $(3, 0)$ | $\langle 0, 3\rangle$ | $(-3, 0)$ | $\langle 0, -3\rangle$ |
| $(0, 1)$ | $\langle -1, 0\rangle$ | $(0, -1)$ | $\langle 1, 0\rangle$ |
| $(-2, 2)$ | $\langle -2, -2\rangle$ | $(2, -2)$ | $\langle 2, 2\rangle$ |
| $(0, 3)$ | $\langle -3, 0\rangle$ | $(0, -3)$ | $\langle 3, 0\rangle$ |



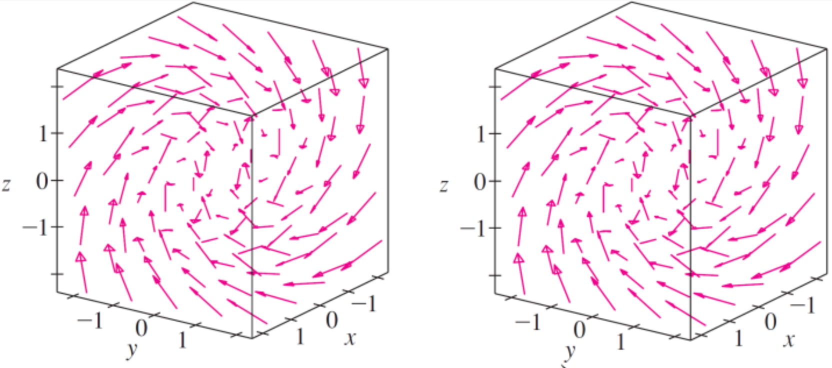
# Trường vectơ

Sau đây thêm vài ví dụ về trường vectơ




Trường $\vec{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$ Trường $\vec{F}(x, y) = \langle y, \sin x \rangle$

# Trường vectơ




Trường
$\overrightarrow{F}(x, y, z) = y\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{x}$

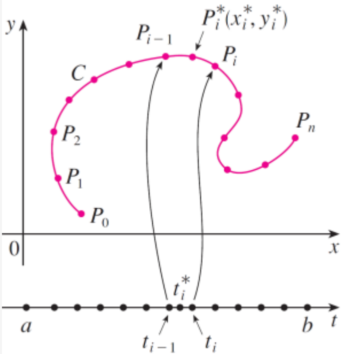
Trường $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \langle y, -2, x\rangle$

# Tích phân đường loại 1

Cho đường cong $C$ có phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b \quad (2.1)$$

hoặc phương trình vectơ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ và giả sử $C$ là trơn (nghĩa là $\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) = x'(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y'(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ liên tục và $\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$)




Nếu ta chia đoạn tham số $[a, b]$ thành $n$ đoạn con $[t_{i-1}, t_i]$ có độ dài bằng nhau và đặt $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i)$ thì các điểm $P(x_i, y_i)$ chia $C$ thành $n$ cung có độ dài $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$. Chọn điểm tùy ý $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ (tương ứng với tham số $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$). Giả sử một hàm số hai biến $f$ xác định trên $C$ thì tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$ tương tự tổng Riemann của hàm số một biến.

# Tích phân đường loại 1

## Định nghĩa

Giả sử $f$ là hàm số hai biến, xác định trên đường cong $C$ cho bởi (2.1). Ta định nghĩa tích phân đường của $f$ dọc theo $C$ là

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

miễn là giới hạn tồn tại.

Điều kiện đủ để giới hạn tồn tại là hàm $f$ liên tục. Khi đó, tích phân đường được tính theo công thức

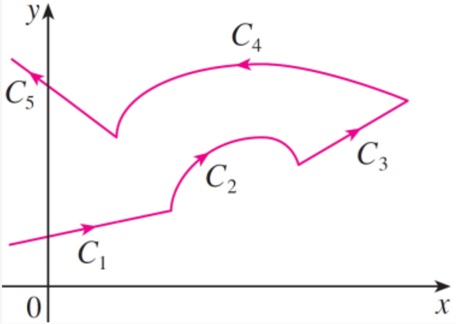
$$\begin{aligned}\int_C f(x,y)ds &= \int_a^b f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)\right| dt \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt.\end{aligned} \tag{2.2}$$

# Tích phân đường loại 1

Nếu $f$ là hàm số 3 biến xác định trên đường cong $C - 3-$chiều, trơn từng khúc, biểu diễn bởi $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}}$, $a \leq t \leq b$, thì tích phân đường của $f$ dọc theo $C$ cũng được định nghĩa tương tự.
Hơn nữa, nếu $f$ liên tục thì ta cũng có công thức

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)ds &= \int_a^b f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t))\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)\right| dt \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.\end{aligned} \tag{2.3}$$

# Tích phân đường loại 1




Nếu $C$ là đường cong trơn từng khúc, nghĩa là $C$ là hợp của hữu hạn đường cong trơn, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, trong đó điểm cuối của $C_{i-1}$ là điểm đầu của $C_i$, thì ta định nghĩa

$$\int_C f ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f ds.$$

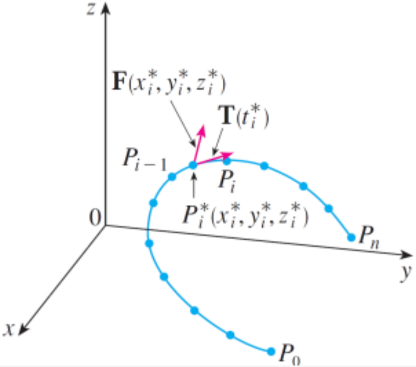
# Tích phân đường loại 1

## Ví dụ

Tính $\int_C 2x\,ds$, trong đó $C$ bao gồm cung $C_1$ của parabola $y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$, được nối tiếp sau đó đoạn thẳng $C_2$ từ $(1,1)$ đến $(1,2)$.

# Tích phân đường loại 2

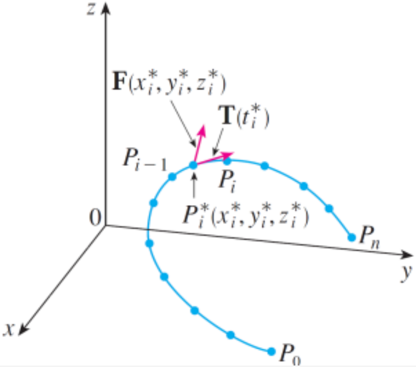
Nhắc lại, lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ tác động vào vật dịch chuyển từ $A$ đến $B$ thì công của lực trên đoạn đường đó là $W = \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{AB}$.




Giả sử, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q\overrightarrow{\mathbf{j}} + R\overrightarrow{\mathbf{k}}$ là một trường vectơ lực 3 chiều, ví dụ như trường hấp dẫn (2 chiều ứng với $R = 0$).

# Tích phân đường loại 2

Nhắc lại, lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ tác động vào vật dịch chuyển từ $A$ đến $B$ thì công của lực trên đoạn đường đó là $W = \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{AB}$.




Giả sử, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q\overrightarrow{\mathbf{j}} + R\overrightarrow{\mathbf{k}}$ là một trường vectơ lực 3 chiều, ví dụ như trường hấp dẫn (2 chiều ứng với $R = 0$). Để tính công của trường lực này tác động vào một chất điểm dịch chuyển trên đường cong trơn $C$, 3-chiều, ta chia $C$ thành nhiều cung nhỏ $P_{i-1}P_i$ có độ dài $\Delta s_i$, bằng cách chia đều đoạn tham số $[a, b]$ thành nhiều đoạn con.

Trên cung nhỏ thứ $i$, ta chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ tương ứng với giá trị $t_i^*$ của tham số. Lộ trình trên cung từ $P_{i-1}$ đến $P_i$ xấp xỉ với đoạn thẳng dài $\Delta s_i$, theo hướng của $\overrightarrow{\mathbf{T}}(t_i^*)$, vectơ tiếp tuyến đơn vị của $C$ tại điểm $P_i^*$.

# Tích phân đường loại 2

Do đó, công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ tác động vào chất điểm di chuyển trên cung $P_{i-1}P_i$ được xấp xỉ bằng

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \left[\Delta s_i \overrightarrow{\mathbf{T}}(t_i^*)\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{F}}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}}(t_i^*)\right] \Delta s_i$$

và công dịch chuyển trên toàn $C$ được xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\overrightarrow{\mathbf{F}}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}}(t_i^*)\right] \Delta s_i. \tag{3.1}$$

## Định nghĩa

Công của trường lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ được định nghĩa là giới hạn của tổng Riemann (3.1), khi $n \to \infty$, nghĩa là

$$W = \int_C \overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}}(x, y, z) ds = \int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}} ds. \tag{3.2}$$

# Tích phân đường loại 2

Trong công thức tính **Tích phân đường loại 2**, ta thay

$$ds = \left|\vec{\mathbf{r}}'(t)\right|, \vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{r}}'(t)/\left|\vec{\mathbf{r}}'(t)\right|$$

nên ta có thể viết

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{T}} ds = \left[\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(t)) \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}'(t)}{\left|\vec{\mathbf{r}}'(t)\right|}\right] \left|\vec{\mathbf{r}}'(t)\right| = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(t)) \cdot \vec{\mathbf{r}}'(t) dt = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}.$$

Và công thức (3.2) có thể được viết lại dưới dạng $W = \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$.

## Định nghĩa Tích phân đường loại 2

Cho trường vectơ $\vec{\mathbf{F}}$ liên tục, xác định trên đường cong trơn $C$ định bởi hàm vectơ $\vec{\mathbf{r}}(t), a \le t \le b$. Khi đó, tích phân đường của $\vec{\mathbf{F}}$ dọc theo $C$ được kí hiệu và định nghĩa như sau

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{T}} ds = \int_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(t)) \cdot \vec{\mathbf{r}}'(t) dt.$$

# Tích phân đường loại 2

Ghi chú 1. Giả sử đường cong $C$ có phương trình vectơ

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}} + z(t)\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad a \le t \le b$$

và trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, xác định trên $C$, được cho bởi

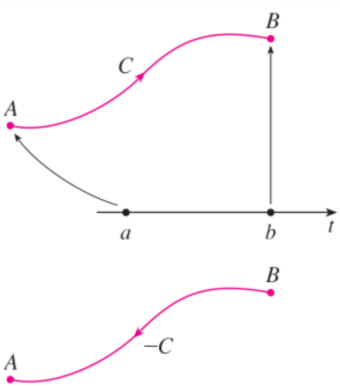
$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) = P(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t))\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t))\overrightarrow{\mathbf{j}} + R(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t))\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

(hoặc $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q\overrightarrow{\mathbf{j}}$, nếu xét 2 chiều). Khi đó, ta còn có ký hiệu khác cho tích phân đường loại 2

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)dt &= \int_a^b \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right] dt \\ &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz.\end{aligned}$$

# Tích phân đường loại 2

Ghi chú 2: Vì Tích phân loại 2 gắn liền với khái niệm công của trường lực tác động lên chất điểm trên đường cong $C$, do đó hướng di chuyển của $C$ ảnh hưởng đến giá trị của tích phân.




Cụ thể, nếu $C : \overrightarrow{\mathbf{r}}(t), a \leq t \leq b$ là đường cong định hướng từ điểm $A$ đến điểm $B$ khi $t$ tăng, thì đường cong $-C$ cho bởi $\overrightarrow{\mathbf{r}}(a+b-t), a \leq t \leq b$ định hướng từ $B$ đến $A$ khi $t$ tăng. Khi đó

$$\int_{-C} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = -\int_{C} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$$

Ngoài $\overrightarrow{\mathbf{r}}(a+b-t), a \leq t \leq b$, có thể có hàm vectơ khác nữa biểu diễn đường cong $-C$, ví dụ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(ta+(1-t)b), 0 \leq t \leq 1$.

# Tích phân đường loại 2

## Ví dụ

Tính công của trường lực $\overrightarrow{\mathbf{F}} = x^2\overrightarrow{\mathbf{i}} - xy\overrightarrow{\mathbf{j}}$ trong dịch một chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = \cos(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}, 0 \leq t \leq \pi/2.$

# Tích phân đường loại 2

## Ví dụ

Tính tích phân $I = \int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ với $C$ là đường cong có phương trình $y^2 = 1 - x$ nối từ điểm $A(0, -1)$ đến điểm $B(0, 1)$.

# Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Trong giải tích một biến, ta nhớ lại Định lí cơ bản của Giải tích phát biểu rằng

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

trong đó đạo hàm $F'$ liên tục trên $[a, b]$. Trong tích phân đường, ta cũng có một phát biểu tương tự. Hãy xem $\nabla f$ của một hàm số $f$, 2 hoặc 3 biến, như là đạo hàm của $f$. Khi đó, ta có

## Định lí cơ bản của tích phân đường (Định lí Newton-Leibnitz)

Cho $C$ là đường cong trơn cho bởi hàm vectơ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t), a \leq t \leq b$. Nếu $f$ là một hàm số nhiều biến khả vi sao cho vectơ gradient của nó, $\nabla f$, liên tục trên $C$, thì

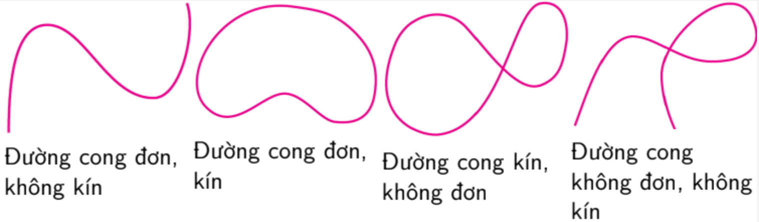
$$\int_C \nabla f \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(b)) - f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(a)) = f(B) - f(A)$$

trong đó điểm $A$ và $B$ là điểm đầu và điểm cuối của đường cong $C$.

# Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

## Định nghĩa

- Một đường cong $C$ được gọi là đường cong kín (closed curve) nếu điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, nghĩa là $\overrightarrow{\mathbf{r}}(a) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(b)$.
- Đường cong $C$ được gọi là đường cong đơn (simple curve) cho bởi $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t), a \leq t \leq b$, là đường cong không tự cắt nó tại điểm nào giữa điểm đầu và điểm cuối, nghĩa là, nếu $a < t_1 < t_2 < b$ thì $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t_1) \neq \overrightarrow{\mathbf{r}}(t_2)$. (Có thể xảy ra $\overrightarrow{\mathbf{r}}(a) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(b)$ nếu đường cong là kín).



# Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

## Định nghĩa

- Ta nói $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ có tích phân độc lập với đường đi trong $D$ nghĩa là giá trị $\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$ là như nhau với mọi đường cong $C$ nằm trong $D$ và có cùng điểm đầu, cùng điểm cuối. Điều này cũng đồng nghĩa với $\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = 0$ với mọi **đường cong kín** $C$ bên trong $D$.
- Trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ được gọi là trường bảo toàn trong $D$ nghĩa là trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ có nguyên hàm hay hàm thế xác định trên $D$, tức là hàm số nhiều biến $f$ thỏa

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(P) = \nabla f(P), \quad \forall P \in D.$$

## Định lí

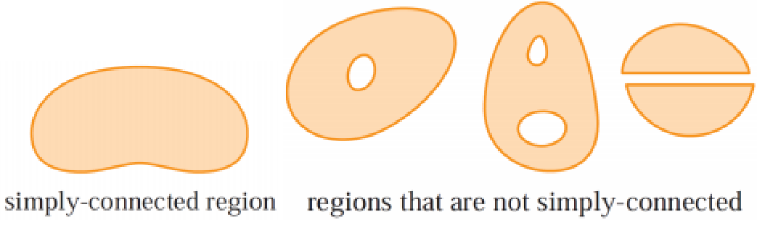
Cho $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là trường liên tục trên miền $D$. Nếu $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là trường bảo toàn thì $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ có tích phân độc lập với đường đi trong $D$.

# Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

## Định nghĩa

- Tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là mở (open) có nghĩa là mỗi điểm $P$ trong $D$, luôn có một đĩa tròn tâm $P$ nằm hoàn toàn trong $D$. Định nghĩa khái niệm mở cho $D \subset \mathbb{R}^3$ tương tự như trên, với đĩa tròn được thay bởi khối cầu.
- Tập hợp $D$ được gọi là tập liên thông có nghĩa là hai điểm bất kì thuộc $D$ luôn là điểm đầu và điểm cuối của một đường đi **liên tục** nằm trong $D$.
- Tập hợp $D$ trong $\mathbb{R}^2$ ($D$ là miền phẳng) được gọi là tập đơn liên khi nó là tập liên thông sao cho mọi đường cong đơn-kín bên trong $D$ sẽ bao quanh một miền hoàn toàn nằm trong $D$.

# Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều



# Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

### Định lí (Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều)

Cho $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q\overrightarrow{\mathbf{j}}$ là trường vectơ hai chiều sao cho các hàm số $P$ và $Q$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên tập xác định $D$, viết là $P, Q \in C^1(D)$. Khi đó

- Nếu $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là trường bảo toàn trên $D$ thì
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{trên tập } D.$$
- Nếu $D$ là **miền đơn liên, mở** và $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ trên tập $D$ thì $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là trường bảo toàn trên $D$.

# Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

## Ví dụ

Trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (x-y)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x-2)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ có bảo toàn hay không?

# Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

## Ví dụ

Trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (3+2xy)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x^2 - 3y^2)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ có bảo toàn hay không?

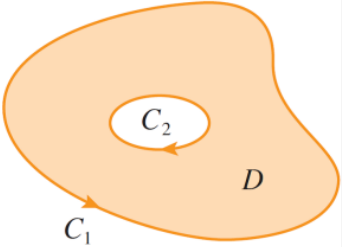
# Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

## Ví dụ

Trường $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \langle P, Q\rangle = \left\langle 3 + 2xy, x^2 - 3y^2\right\rangle$ trong ví dụ trước là trường bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$. Vậy hãy tìm thế $f$ thỏa $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \nabla f$.

# Định lí Green

Cho $D$ là miền phẳng bị chặn sao cho biên $\partial D$ của $D$ là hữu hạn các đường cong đơn kín, được định hướng dương, nghĩa là khi đi theo hướng đó, miền trong của $D$ luôn nằm bên tay trái. Hình bên cho thấy $\partial D = C_1 \cup C_2$ được định hướng dương.




Tích phân đường của trường $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \langle P, Q \rangle$ dọc theo $\partial D$ theo hướng dương được kí hiệu bởi

$$\oint_{\partial D} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \oint_{\partial D} P dx + Q dy.$$

# Định lí Green

Định lí Green sau đây cho mối liên hệ giữa tích phân kép trên miền phẳng $D$ với tích phân đường trên biên $\partial D$. Do đó, định lý Green cũng được xem như là Định lý cơ bản của tích phân kép.

## Định lí Green

Giả sử $D$ là miền phẳng bị chặn sao cho biên $\partial D$ là hữu hạn các đường cong đơn kín, trơn từng khúc. Giả sử $P, Q$ là các hàm số có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên một tập mở chứa $D$, viết là $P, Q \in C^1(D \cup \partial D)$. Khi đó

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy \tag{5.1}$$

# Định lí Green

## Ví dụ

Tính tích phân $\oint_C x^4 dx + xydy$ với $C$ là tam giác $ABC$, trong đó $A(0,0), B(1,0)$ và $C(0,1)$.

# Định lí Green

## Ví dụ

Tính tích phân $\oint_C \left(3y - e^{\sin(x)}\right) dx + \left(7x + \sqrt{1 + y^4}\right) dy$ với $C$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$.

# Ứng dụng định lí Green

## Ví dụ

Hãy tính diện tích của hình ê-lip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1.$