## HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

**Bài tập 1.1**.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E \to \begin{bmatrix} 1 & -7 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

**Bài tập 1.2**.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-10}{11} & \frac{15}{11} & \frac{-5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} \end{bmatrix} \quad F \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Bài tập 1.3**.

$r(A) = 2 \quad r(B) = 2 \quad r(C) = 3 \quad r(D) = 1 \quad r(E) = 3 \quad r(F) = 3 \quad r(G) = 2 \quad r(H) = 3$

**Bài tập 1.4**.

a.Vì $r(A) = r(A^*) = 3 < n = 4$ nên hệ vô số nghiệm

b. Vì $r(A) = r(A^*) = 2 < n = 5$ nên hệ vô số nghiệm

c.Vì $r(A) = 3 < r(A^*) = 4$ nên hệ vô nghiệm

d. Vì $r(A) = r(A^*) = 4 < n = 5$ nên hệ vô số nghiệm

**Bài tập 1.5**.

a)

+ Nếu $a = 0$ và $b$ tùy ý thì $r(A) = r(A^*) = 2 < n = 3$ nên hệ vô số nghiệm

+ Nếu $a \neq 0$

- $b = 0$ thì $r(A) = 2 < r(A^*) = 3$ nên hệ vô nghiệm
- $b \neq 0$ thì $r(A) = r(A^*) = 3 = n$ nên hệ có nghiệm duy nhất

b)

+ Nếu $c = 0$ và $d$ tùy ý thì $r(A) = r(A^*) = 3 < n = 4$ nên hệ vô số nghiệm

+ Nếu $c \neq 0$

- $d = 0$ thì $r(A) = 3 < r(A^*) = 4$ nên hệ vô nghiệm
- $d \neq 0$ thì $r(A) = r(A^*) = 4 = n$ nên hệ có nghiệm duy nhất

**Bài tập 1.6**.

a. $\begin{cases} x_1 = & -1 - x_5 \\ x_2 = & 1 + 3x_5 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & -4 - 5x_5 \\ x_5 \in & \mathbb{R} \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1 = & 3 + 5x_3 \\ x_2 = & 6 - 4x_3 + x_4 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 \in & \mathbb{R} \\ x_5 = & 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x_1 = & 2x_3 \\ x_2 = & -8 - 6x_3 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & -5 \\ x_5 = & 0 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1 = & -3 + 8x_4 \\ x_2 = & -6 - 4x_4 \\ x_3 = & 5 + 7x_4 \\ x_4 \in & \mathbb{R} \end{cases}$

**Bài tập 1.7**.

a. Vô nghiệm b. $\begin{cases} x_1 = & \frac{-19}{16} - \frac{9}{8}x_3 \\ x_2 = & \frac{-5}{8} + \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & \frac{5}{2} \end{cases}$ c. $\begin{cases} x_1 = & 0 \\ x_2 = & 2 + x_3 \\ x_3 \in & \mathbb{R} \\ x_4 = & -2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1 = & -2 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & -3 \\ x_4 = & 3 \end{cases}$

e. Vô nghiệm f. $\begin{cases} x_1 = & -2 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & -3 \\ x_4 = & 3 \end{cases}$ g. $\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & 3 \end{cases}$ h. $\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 2 \\ x_3 = & -2 \end{cases}$

**Bài tập 1.8**.

a. $A^* = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 & b \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a & 1-ab+a-b \end{bmatrix}$

+ Nếu $2 - a - a^2 = 0 \Rightarrow a = 1$ hoặc $a = -2$

$\star$ $a = 1$

• $b = 1 \Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm

• $b \neq 1 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

$\star$ $a = -2 \Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm $\forall b$

+ Nếu $2 - a - a^2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq & 1 \\ a \neq & -2 \end{cases} \Rightarrow 1 - a \neq 0 \Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất.

b. $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 1 & -1 & c \\ 1 & -3 & 5 & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 5 & 3 & 2a-b \\ 0 & 0 & 4 & a+b-c \\ 0 & 0 & 0 & a+5b-3c-d \end{bmatrix}$

+ Nếu $a + 5b - 3c - d = 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất

+ Nếu $a + 5b - 3c - d \neq 0$ thì hệ vô nghiệm

**Bài tập 1.9**. Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m = -1$

**Bài tập 1.10**.

a. $\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x_1 &= 9x_3 \\ x_2 &= -4x_3 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1 &= -\frac{23}{16}x_4 \\ x_2 &= -\frac{5}{16}x_4 \\ x_3 &= \frac{15}{16}x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

**Bài tập 2.1**. Tự giải

**Bài tập 2.2**. $x = 2, y = 4, z = 1, w = 3$

**Bài tập 2.3**. $B = \begin{bmatrix} -2d & -2e & -2f \\ d & e & f \end{bmatrix}$ với $d, e, f \in \mathbb{R}$

**Bài tập 2.4**. a. $d_{11} = -14$ b. $d_{21} = 67$ c. $d_{32} = 6$

**Bài tập 2.5**. Tự giải

**Bài tập 2.6**.

a. $Ax = \begin{bmatrix} 26 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$; $Ay = \begin{bmatrix} -38 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$; $Az = \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \\ -78 \end{bmatrix}$ b. $A \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -38 & 9 \\ 5 & -4 & -12 \\ 14 & -4 & -78 \end{bmatrix}$

**Bài tập 2.7**.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{29}{2} & \frac{-17}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 10 & -4 & -1 \end{bmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 5 & -1 \\ \frac{-9}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -20 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Bài tập 2.8**. $A$ khả nghịch khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0$ và khi đó $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Ứng dụng: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

**Bài tập 2.9**. a. $c_3(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$ b. $[c_1(A^{-1}) \quad c_2(A^{-1})] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c. $h_2(A{-}1) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = -9$

**Bài tập 2.10**. a. $A$ khả nghịch $\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$ và

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7 + 2m^2 + 10m}{2 + m^2 + 3m} & \frac{4m + 3}{2 + m^2 + 3m} & -\frac{3m + 1}{2 + m^2 + 3m} \\ -\frac{5m + 3 + m^2}{2 + m^2 + 3m} & \frac{2m + 1}{2 + m^2 + 3m} & -\frac{m - 1}{2 + m^2 + 3m} \\ -\frac{m}{2 + m^2 + 3m} & \frac{m}{2 + m^2 + 3m} & \frac{2}{2 + m^2 + 3m} \end{bmatrix}$$

b. $A$ khả nghịch $\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow p \neq 1$ và

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{-1+p} & \dfrac{-p}{-1+p} & \dfrac{p}{-1+p} \\ \dfrac{1}{-1+p} & \dfrac{2p-1}{-1+p} & \dfrac{-p}{-1+p} \\ \dfrac{1}{-1+p} & \dfrac{1}{-1+p} & \dfrac{-1}{-1+p} \end{bmatrix}$$

**Bài tập 2.11**.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \dfrac{-1}{2} & \dfrac{3}{2} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Ta có $x = B^{-1}.d \Rightarrow i)\ x = \begin{bmatrix} 2 \\ \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}, ii)\ x = \begin{bmatrix} 6 \\ \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}, iii)\ x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**Bài tập 2.12**. Ta có $Ax = B \Rightarrow x = A^{-1}.B$

a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64 \\ 8 \\ -18 \end{bmatrix}$

b. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

c. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**Bài tập 2.13**.

a. $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b. $X. = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

c. $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

d. $X = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

e. $X. = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -103 & -110 & -117 \\ -100 & -107 & -114 \\ -45 & -48 & -51 \end{bmatrix}$

**Bài tập 3.1**. Tự giải

**Bài tập 3.2**. $D_1 = 15$ $\qquad D_2 = -30$ $\qquad D_3 = 6$ $\qquad D_4 = 9$

**Bài tập 3.3**. a. $\begin{bmatrix} 18 & -12 & -6 \\ -7 & 10 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$; b. $\begin{bmatrix} -57 & 51 & -3 \\ 33 & -30 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$; c. $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

**Bài tập 3.4**. Khai triển định thức theo hàng 1, sau đó tách ra thành 2 nhóm theo $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ và $a'_{11}, a'_{12}, ..., a'_{1n}$ ta sẽ được kết quả

**Bài tập 3.5**.

$$\begin{array}{llllll} a. & \det A = 160; & b. & \det B = 156; & c. & \det C = -5; \\ d. & \det D = -2(a^3 + b^3); & e. & \det E = 0; & f. & \det F = 0 \end{array}$$

**Bài tập 3.6**.
$a.(6 - \lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 7)$; $\quad b. - (\lambda + 3)(\lambda^2 - 6\lambda)$

$c.(2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$;

**Bài tập 3.7**. *Điều kiện để ma trận A khả nghịch là* $\det A \neq 0$

a. $\begin{cases} t \neq -2 \\ t \neq 3 \\ t \neq 4 \end{cases}$; $\quad$ b. $\begin{cases} t \neq -2 \\ t \neq 2 \\ t \neq 4 \end{cases}$; $\quad$ c. $\begin{cases} t \neq -3 \\ t \neq -1 \\ t \neq 4 \end{cases}$

**Bài tập 3.8**.

a. Thay $c_3 \to c_3 - xc_1 - yc_2$

b. Thay $c_1 \to c_1 + c_2$, tiếp theo $c_1 \to \frac{1}{2}c_1$, tiếp theo $c_2 \to c_2 - c_1$, cuối cùng $c_2 \to \frac{-1}{x}$

c. Thay $h_2 \to h_2 - h_1, h_3 \to h_3 - h_1$, tiếp theo $h_2 \to \dfrac{1}{b-a}h_2, h_3 \to \dfrac{1}{c-a}h_3$, cuối cùng thay $h_3 \to h_3 - h_2$

**Bài tập 3.9**.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1/3 & 2 & -4/3 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}; \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

**Bài tập 3.10**. a. $x_2 = 2$ b. $x_2 = 2$ c. $x_2 = 0$ d. $x_2 = -3$

**Bài tập 3.11**. Áp dụng công thức $x_j = \dfrac{D_j}{D}$

a. $D = 8; D_1 = -48; D_2 = -103; D_3 = -11$ b. $D = 21; D_1 = 8; D_2 = 67; D_3 = 56$

c. $D = 7; D_1 = -7; D_2 = 14; D_3 = 0$ d. $D = -73; D_1 = -146; D_2 = -73; D_3 = 73$

**Bài tập 3.12**.

a. $D = (a+2)(4-a)$; $D_1 = -(a+2)^2$; $D_2 = 3(a+2)$; $D_3 = 0$

- Nếu $\begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 4 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(a+2)}{4-a} \\ x_2 = \dfrac{3}{4-a} \\ x_3 = 0 \end{cases}$
- Nếu $a = 4$ thì $D = 0$ nhưng $D_1 = -36$. Khi đó, hệ vô nghiệm.
- Nếu $a = -2$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1}{3}x_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{6}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

b. $D = (a-1)(a-3)$; $D_1 = -4(a-3); D_2 = 0$; $D_3 = 2(a-3)$

- Nếu $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 3 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4}{a-1} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \dfrac{2}{a-1} \end{cases}$
- Nếu $a = 1$ thì $D = 0$ nhưng $D_2 = 8$. Khi đó, hệ vô nghiệm.
- Nếu $a = -3$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4}{5} - \dfrac{6}{5}x_3 \\ x_2 = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

c. $D = -a^2(a+3); D_1 = -a^2\,(a+3)\,(a^3 + 2\,a^2 - a - 1)\,;$

$D_2 = -a^2(a+3)(2a-1); D_3 = a^2(a+3)(a^2-2)$

• Nếu $\begin{cases} a & \neq & 0 \\ a & \neq & -3 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 & = & a^3 + 2\,a^2 - a - 1 \\ x_2 & = & 2a-1 \\ x_3 & = & 2-a^2 \end{cases}$

• Nếu $a = -3$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

• Nếu $a = 0$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & -x_2 - x_3 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

d. $D = a(a+2)(a-2); D_1 = a(a+2); D_2 = -a(a+2)(a+3); D_3 = a^2(a+2)$

• Nếu $\begin{cases} a & \neq & 0 \\ a & \neq & \pm 2 \end{cases}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{1)}{a-2} \\ x_2 & = & \dfrac{-(a+3)}{a-2} \\ x_3 & = & \dfrac{a}{a-2} \end{cases}$

• Nếu $a = 2$ thì $D = 0$ nhưng $D_1 = 8$. Khi đó, hệ vô nghiệm.

• Nếu $a = 0$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$

• Nếu $a = -2$ thì hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 & = & 1 - \dfrac{3}{2}x_3 \\ x_2 & = & 1 + \dfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

**Bài tập 3.13**. a. $(x_1; x_2; x_3) = (1; 2; 3)$ b. $\lambda \neq \dfrac{-4}{5}$

**Bài tập 3.14**. 1. $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (-2; 0; 1; -1)$ 2. $D = 6a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{-1}{3}$

**Bài tập 3.15**.

a. $D \neq 0 \Longleftrightarrow 3 - m \neq 0 \Longleftrightarrow m \neq 3$

b. Khi $m = 3$ hệ có thể vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Do đó, ta cần thử lại

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 4 \end{array}\right] \rightarrow .... \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Hệ vô số nghiệm.

Vậy không tìm được $m$ để hệ vô nghiệm

**Bài tập 3.16**. 1. $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (-2; 0; 1; -1)$ 2. $D = a^2 + 2a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

**Bài tập 3.17**. $D = (k+3)(2-k)$
a. $k \neq 2 \wedge k \neq -3$ b. $k = -3$ c. $k = 2$.

**Bài tập 3.18**. $D = (k+2)(k-1)^2$
a. $k \neq -2 \wedge k \neq 1$ b. $k = -2$ c. $k = 1$.

**Bài tập 3.19**. a. $X = \begin{bmatrix} \dfrac{-11}{3} \\ \dfrac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ b. $\lambda = 1$

**Bài tập 4.1**.
a. Không, sai ở tiên đề 5 b. Không, sai ở tiên đề 8
c. Không, sai ở tiên đề 8 d. Không, sai ở tiên đề 8 e. Phải

**Bài tập 4.2**. a. Phải b. Phải c. Không d. Phải e. Phải

**Bài tập 4.3**.

a. $\mathbf{W} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian con của

9Tf

**Bài tập 4.5**.

a. $Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right\}$; b. $Sp\left\{\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix},\right\}$; c. $Sp\{(1;2;1),(0;1;-1)\}$; d. $Sp\{1,x^2\}$

**Bài tập 4.6**.

a. Không phải vì $\theta = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \notin W$ b. Không phải vì $\theta = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \notin W$

c. $W = Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ d. $W = Sp\left\{\begin{bmatrix}4\\0\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

**Bài tập 4.7**. Ta có:

$+\theta \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$.

$+\forall f_1, f_2 \in E \Rightarrow \begin{cases} f_1(a) &= f_1(b)\\ f_2(a) &= f_2(b)\end{cases}$

Khi đó:

$$f_1(a) + f_2(a) = f_1(b) + f_2(b) \Rightarrow (f_1+f_2)(a) = (f_1+f_2)(b)$$

$\Rightarrow f_1 + f_2 \in E$.

$+\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in E \Rightarrow f(a) = f(b)$, ta có:

$$(\alpha f)(a) = \alpha f(a) = \alpha f(b) = (\alpha f)(b) \Rightarrow \alpha f \in E$$

Vậy E là một không gian con.

**Bài tập 4.8**.

a. $E = Sp\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

b. Không phải là không gian con của $\mathbb{M}(2,2)$ vì nó không khép kín đối với cả 2 phép toán

c. Không phải là không gian con của $\mathbb{M}(2,2)$ vì $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \notin \mathbb{M}(2,2)$

d. $E = Sp\left\{\begin{bmatrix}-2 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

**Bài tập 4.9**. $H$ là không gian con của $\mathbb{M}(2,4)$.

Thật vậy:

$+\ \theta = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \in H$ vì $F\theta = 0$ nên $H \neq \emptyset$

$+\ \forall A, B \in H \Rightarrow \begin{cases} FA &= 0 \\ FB &= 0 \end{cases} ; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có
$F(\alpha A + \beta B) = \alpha FA + \beta FB = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha A + \beta B \in H$

**Bài tập 4.10**. Giả sử $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, nếu $\exists \alpha_i$ thì $v \in Sp\{v_i\}$, ngược lại $\nexists \alpha_i$ thì $v \notin Sp\{v_i\}$

a. $v \in Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ b. $v \notin Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ c. $v \in Sp\{v_1, v_2\}$ d. $v \notin Sp\{v_1, v_2\}$

**Bài tập 4.11**. $w \in ColA$ vì hệ $Ax = w$ có nghiệm $w \notin NulA$ vì $Aw \neq \theta$

**Bài tập 4.12**.

a. $\mathbf{W}$ không phải là không gian con của không gian vectơ $[\mathbb{R}]^3$ vì $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbf{W}$.

b. $\mathbf{W} = NulA$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

c. $\mathbf{W}$ không phải là không gian con của không gian vectơ $[\mathbb{R}]^4$ vì $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbf{W}$.

d. $\mathbf{W} = NulA$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

e. $\mathbf{W} = NulA$ với $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

**Bài tập 4.13**. a. $\mathbf{W} = ColA$ với $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\mathbf{W} = ColA$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Bài tập 4.14**.

a. $\forall v_1, v_2 \in H \cap K, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} v_1, v_2 &\in H \\ v_1, v_2 &\in K \end{cases}$

Vì $H$ và $K$ là hai không gian con $\Rightarrow \begin{cases} \alpha v_1 + \beta v_2 &\in H \\ \alpha v_1 + \beta v_2 &\in K \end{cases} \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in H \cap K$

$\Rightarrow H \cap K$ là không gian con.

b. Ví dụ: Hai đường thẳng $(d_1) : x_1 + x_2 = 0$ và $(d_2) : x_1 - x_2 = 0$ là hai không gian con của $\mathbb{R}^2$ nhưng hợp của hai đường thẳng này không phải là không gian con của $\mathbb{R}^2$.

Thật vậy:

Lấy $u = (1; -1) \in d_1; v = (1; 1) \in d_2$ thì $u + v = (1; -1) + (1; 1) = (2; 0) \notin d_1$ và $\notin d_2$

**Bài tập 4.15**.

| | | |
|---|---|---|
| a. phụ thuộc tuyến tính | b. độc lập tuyến tính | c. độc lập tuyến tính |
| d. độc lập tuyến tính | e. phụ thuộc tuyến tính | f. độc lập tuyến tính |
| g. phụ thuộc tuyến tính | h. độc lập tuyến tính | i. phụ thuộc tuyến tính |

**Bài tập 4.16**.

a. $\{v_1 = (1; 0; 0), v_2 = (0; 1; -1), v_3 = (0; 4; -3)\}$

b. $\{p_0 = 2, p_1 = -4x, p_2 = x^2 + x + 1\}$

**Bài tập 4.17**.

a. Ta biết cơ sở của $\mathbb{R}^4$ gồm 4 vectơ độc lập tuyến tính. Ta có $\{v_1, v_2, v_3\}$ là 3 vectơ độc lập tuyến tính nên ta chỉ cần chọn thêm vectơ $v_4$ sao cho $v_4$ không là tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, v_3$. Ta chọn $v_4 = (1; 1; 1; 1)$. Khi đó cơ sở của $\mathbb{R}^4$ là $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

b. Ta biết cơ sở của $\mathbb{M}(2, 2)$ gồm 4 vectơ độc lập tuyến tính. Ta có $\{v_1, v_2\}$ là 2 vectơ độc lập tuyến tính nên ta chỉ cần chọn thêm vectơ $v_3, v_4$ sao cho $v_3, v_4$ sao cho $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ v

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{bmatrix} \to ... \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

+ Cơ sở của $ColA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ và $NulA$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

+ Cơ sở của $RowA$ là $\{(1;2;0;4;0), (0;0;5;-7;0), (0;0;0;0;1)\}$

$\dim ColA = \dim RowA = 3$ và $\dim NulA = 2$

**Bài tập 4.19**.

a. Lập ma trận cột

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cột chốt là cột 1, 2, 4.

Cơ sở của $Sp(S)$ là $\{(1;1;1;2;3), (1:2;-1;-2;1), (1;2;1;-1;4)\}$ và $\dim Sp(S) = 3$

b. Cơ sở của $Sp(S)$ là $S$ và $\dim Sp(S) = 4$

c. Cơ sở của $Sp(S)$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$ và $\dim Sp(S) = 3$

d. Cơ sở của $Sp(S)$ là $S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ và $\dim Sp(S) = 3$

e. Vậy cơ sở của $Sp(S)$ là $S$ và $\dim Sp(S) = 3$

**Bài tập 4.20**. a. $u \in Sp(S)$ b. $S$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

**Bài tập 4.21**. a. $p(x) = 4 + x - 3x^2 \in Sp(S)$ b. $S$ không phải là tập sinh của $P_2[x]$

**Bài tập 4.22**.

a. Cơ sở của $P$ là $\{(1;-3;0), (0;-5;1)\}$

b. Cơ sở của mặt phẳng là $\{(1;1;0), (-8;0;1)\}$..

**Bài tập 4.23**.
a. $\dim W = 3$ b. $\dim W = 2$ c. $\dim W = 0$ d. $\dim W = 2$ e. $\dim W = 2$ f. $\dim W = 3$

**Bài tập 4.24**. Giả sử $E$ là các không gian con của $\mathbb{M}(3,3)$ cần tìm số chiều
a. $\dim E = 3$ b. $\dim E = 6$ c. $\dim E = 6$

**Bài tập 4.25**. a. $\dim U = 4$ b. $\dim U = 2$

**Bài tập 4.26**.

a. + Ta có $U = Sp\{(1;0;0;0),(0;2;1;0);(0;-1;0;1)\}$ nên $U$ là không gian con của $\mathbb{R}^4$
+ Ta có $W = Sp\{(1;0;0;1),(0;2;1;0)\}$ nên $W$ là không gian con của $\mathbb{R}^4$

b. + Cơ sở của $U$ là $(1;0;0;0),(0;2;1;0),(0;-1;0;1)$ và $\dim U = 3$
+ Cơ sở của $W$ là $(1;0;0;1),(0;2;1;0)$ và $\dim W = 2$
+ Cơ sở của $U \cap W$
Ta có $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Vậy cơ sở của $U \cap W$ là $\{(0;2;1;0)\}$

**Bài tập 4.27**.

a. Đặt $P = \{(x_1;x_2;x_3) : x_1+3x_2+4x_3 = 0\} \Rightarrow$ Cơ sở của $P$ là $S = \{(-3;1;0);(-4;0;1)\}$
+ Chọn $(1;0;0) \in \mathbb{R}^3$ nhưng $\notin P$. Khi đó, $\{(-3;1;0);(-4;0;1),(1;0;0)\}$ sẽ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b. Đặt $P = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) : x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$
$\Rightarrow$ Cơ sở của $P$ là $S = \{(-1;1;0;0);(-2;0;1;0),(-1;0;0;1)\}$
+ Chọn $(1;0;0;0) \in \mathbb{R}^4$ nhưng $\notin P$. Khi đó, $\{(-1;1;0;0);(-2;0;1;0),(-1;0;0;1),(1;0;0;0)\}$ sẽ là cơ sở của $\mathbb{R}^4$

**Bài tập 4.28**.

a. $\mathbb{E} = Sp\{(x^2-4)(x^2+1);(x^2-4)x\}$ nên $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{P}_4[x]$.

b. Tìm $\dim \mathbb{E} = 2$

**Bài tập 4.29**.

a. $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} (0;0;0) & \in & \mathbb{E} \\ \forall u,v \in \mathbb{E} & \Rightarrow & u+v \in \mathbb{E} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{E} & \Rightarrow & \alpha u \in \mathbb{E} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

b. Tìm $\dim \mathbb{E} = 2$

**Bài tập 4.30**.

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0 = 0 \right\} \\ &= Sp\{(1;0;1), (0;1;0)\}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$
Cơ sở của $\mathbb{E}$ là $\{(1;0;1), (0;1;0)\}$ và $\dim \mathbb{E} = 2$

**Bài tập 4.31**. a. $\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$; b. $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$; c. $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$; d. $\begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{a-b}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$; e. $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

**Bài tập 4.32**. a. $x = (-1; -5; 9)$ b. $x = (0; 1; -5)$ c.$p(x) = 2 + 6x + 2x^2$

**Bài tập 4.33**.

a. Vì $\dim \mathbb{P}_2[x] = 3$ nên để $\{p_1, p_2, p_3\}$ trở thành cơ sở của $\mathbb{P}_2[x]$ ta chỉ cần điều kiện để $\{p_1, p_2.p_3\}$ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (1)

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -m \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & -2+2\,m \end{bmatrix}$

(1) xảy ra $\Leftrightarrow r(A) = 3 \Leftrightarrow -2 + 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

b. $p(x) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$

$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow p(x) = -p_1 + 3p_2 + p_3$

**Bài tập 4.34**.

1. $E = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

2. Cơ sở của $E$ là $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ và $\dim E = 2$

**Bài tập 4.35**.

a. Vì $\dim \mathbb{P}_3[x] = 4$ mà $\mathscr{B}$ có 4 véc tơ nên ta chỉ cần chứng minh $\mathscr{B}$ độc lập tuyến tính hoặc $\mathscr{B}$ là tập sinh

Ta chứng minh $\mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là tập sinh của $\mathbb{P}_3[x]$.

Lấy $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3[x]$, giả sử có

$\alpha_1.1 + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1-x)^2 + \alpha_4(1-x)^3 = a + bx + cx^2 + dx^3$

$\Leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+(-\alpha_2-2\alpha_3-3\alpha_4)x+(\alpha_3+3\alpha_4)x^2-\alpha_4x^3 = a+bx+cx^2+dx^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & = a \\ & -\alpha_2 & -2\alpha_3 & -3\alpha_4 & = b \\ & & \alpha_3 & +3\alpha_4 & = c \\ & & & -\alpha_4 & = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = & a+b+c+d \\ \alpha_2 & = & -b-2c-3d \\ \alpha_3 & = & c+3d \\ \alpha_4 & = & -d \end{cases}$$

$\Rightarrow a+bx+cx^2+dx^3 = (a+b+c+d).1+(-b-2c-3d)(1-x)+(c+3d)(1-x)^2-d(1-x)^3$

$\Rightarrow \mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là tập sinh của $\mathbb{P}_3[x]$.

Vậy $\mathscr{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ là cơ sở của $\mathbb{P}_3[x]$.

b. Áp dụng kết quả câu a ta suy ra $(u)_{\mathscr{B}} = (-4; 11; -7; 2)$

**Bài tập 4.36**. 1. Tự chứng minh 2. Tương tự bài 4.38

**Bài tập 4.37**.

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow [x]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Bài tập 4.38**. a. $P_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $P_{\mathscr{B},\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

**Bài tập 4.39**. a. $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Bài tập 5.1**.

a. $f$ là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

b. $f$ không là ánh xạ tuyến tính. Tự giải thích

c. $f$ là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

d. $f$ là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

e. $f$ không là ánh xạ tuyến tính. Tự giải thích

f. $f$ là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

g. $f$ là ánh xạ tuyến tính. Tự chứng minh

h. $f$ không là ánh xạ tuyến tính. Tự giải thích

**Bài tập 5.2**.

a. Tự chứng minh, $Ker f = \{0\}$ và $Im f = Sp\{x^2, x^2 + x, 2\}$

b. Tự chứng minh, $Ker f = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -2a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ và $Im f = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

c. Tự chứng minh, $Ker f = \{p(x) \in \mathbb{P}_n[x] | \frac{a_n}{n+1} + \cdots + \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0\}$ và $Im f = \mathbb{R}$

d. Tự chứng minh, $Ker f = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$ và $Im f = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

e. Tự chứng minh, $Ker T = \{0\}$ và $Im f = \mathbb{F}$

**Bài tập 5.3**.

a. Tự chứng minh

b. Giả sử:

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & y \\ b - y & \frac{c}{2} \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R}$$

c. Tự chứng minh

d. $Ker T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

**Bài tập 5.4**. $f(p) = \begin{bmatrix} a & - & b & + & c \\ a & + & b & + & c \end{bmatrix}$

**Bài tập 5.5**. a. Tự chứng minh b. Cơ sở của $Ker f$ là $\{(3; -1; 1)\}$ và $\dim Ker f = 1$

**Bài tập 5.6**.

a. Cơ sở của $Ker T$ là $\{(1; -2; 1; 0)^T, (-7; 3; 0; 1)^T\}$ và $\dim Ker T = 2$

b. Cơ sở của $Im T$ là $\{(1; 1; 3)^T, (2; 3; 8)^T\}$ và $\dim Im T = 2$.

**Bài tập 5.7**.

a. Cơ sở của $Ker T$ là $\{(1; 2; -1)\}$ và $\dim Ker T = 1$

b. Cơ sở của $Im T$ là $\{(1; 3; -2), (2; 5; -1)\}$ và $\dim Im T = 2$

**Bài tập 5.8**.

a. Tự chứng minh, $Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

b. Tự chứng minh, $Kerf = \{A \in \mathbb{M}(3,3) | a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$

c. Tự chứng minh,$Kerf = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$.

**Bài tập 5.9**. Tự chứng minh

**Bài tập 5.10**. a. $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

**Bài tập 5.11**. a. $(24; -26)$ b. $(-19; 4)$ c. $(-15; -5)$ d. $(802; -477; 398; 57)$

**Bài tập 5.12**. a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**Bài tập 5.13**. a. $A = \begin{bmatrix} 2t & -4t \\ 1t & 2t \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}$ b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3t & 3t \\ 5t & 5t \end{bmatrix}$ với $t \in \mathbb{R}$

**Bài tập 5.14**.

a. Tự chứng minh. Cơ sở của $f(\mathbb{E})$ là $\{(-1; 3; 2), (-1; 1; 1)\}, \dim f(\mathbb{E}) = 2$

b. Tự chứng minh. Cơ sở của $f(\mathbb{E})$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \dim f(\mathbb{E}) = 1$

c. Tự chứng minh. Cơ sở của $f(\mathbb{E})$ là $\{2x + 1, x^2 + x + 2\}, \dim f(\mathbb{E}) = 2$

**Bài tập 5.15**.

a. $f$ không phải là đơn ánh, nhưng $f$ là toàn ánh.

b. $f$ là song ánh

c. $f$ không phải là đơn ánh, cũng không phải là toàn ánh.

d. $f$ là đơn ánh, nhưng $f$ không phải là toàn ánh.

e. $f$ không phải là đơn ánh, nhưng $f$ là toàn ánh.

**Bài tập 5.16**.

a. Cơ sở của $Kerf$ là $\{(-1; 1; 0)\}$ và cơ sở của $Imf$ là $\{(1; 0), (0; 1)\}$

b. $Kerf = \{(0; 0; 0)\}$ nên $Kerf$ không có cơ sở và cơ sở của $Imf$ là $\{(0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0\}$

c. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ và cơ sở của $Imf$ là $\{1\}$

d. $Kerf = \{0\}$ nên $Kerf$ không có cơ sở và cơ sở của $Imf$ là $\{x, x^2\}$

e. Cơ sở của $Kerf$ là $\{(1;0;0), (0;0;1\}$ và cơ sở của $Imf$ là $\{(1;1;1)\}$

**Bài tập 5.17**.

a. $B = \{p_1 = 1 + 2x, p_2 = 3 - x, p_3 = -1 + 3x^2\}$
Gọi $\mathscr{E} = \{1, x, x^2\}$ là cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.
Ta xét ánh xạ tọa độ: $f : \mathbb{P}_2[x] \to [\mathbb{R}]^3$ được xác định như sau $p_i \mapsto [p_i]_{\mathscr{E}}$
Để xét tính độc lập tuyến tính của $\{p_1, p_2, p_3\}$ ta sẽ xét tính độc lập của $\{[p_1]_{\mathscr{E}}, [p_2]_{\mathscr{E}}, [p_3]_{\mathscr{E}}\}$
Ta có

$$[p_1]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, [p_2]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, [p_3]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lập ma trận có các cột là các vectơ $\mathscr{E}$-tọa độ của $p_1, p_2, p_3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta có $r(A) = 3$ nên ta suy ra $\{[p_1]_{\mathscr{E}}, [p_2]_{\mathscr{E}}, [p_3]_{\mathscr{E}}\}$ độc lập tuyến tính.
Vậy $B$ độc lập tuyến tính.

b. Tương tự, $B$ độc lập tuyến tính.

c. Tương tự, $B$ độc lập tuyến tính.

d. Tương tự, $B$ phụ thuộc tuyến tính.

**Bài tập 5.18**.

a. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ và $r(f) = r(A) = 2$

b. Cơ sở của $Kerf$ là $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ và $r(f) = r(A) = 3$

c. Cơ sở của $Ker f$ là

**Bài tập 5.27**.

1. Tự chứng minh  2. $Ker f = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$  3. $[f]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Bài tập 6.1**.

a. Tập các véc tơ riêng của $A$ ứng với $\lambda = 1$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ 2s+2t \\ t \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và

$\lambda = 3$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -2t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

b. Tập các véc tơ riêng của $A$ ứng với $\lambda = 1$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} -s+t \\ t \\ s \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và

$\lambda = 2$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

c. Tập các véc tơ riêng của $A$ ứng với $\lambda = 2$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \\ 2s+2t \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và

$\lambda = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ -3t \\ -3t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

d. Tập các véc tơ riêng của $A$ ứng với $\lambda = -1$ (bội 3) là $\left\{ \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

e. Tập các véc tơ riêng của $A$ ứng với $\lambda = 2$ (kép) là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \\ -3s+3t \end{bmatrix}, s^2+t^2 \neq 0 \right\}$ và

$\lambda = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

**Bài tập 6.2**. a,d không chéo hóa được  b,c chéo hóa được

**Bài tập 6.3**.

a. $\begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 5 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= -3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{cases} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{cases} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e. $\begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 3 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

f. $\begin{cases} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= -1 \end{cases}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

**Bài tập 6.4**.

a. Tập các véc tơ riêng của $f$ ứng với $\lambda_1 = 1$ là $\{(s-t, s, t), s^2 + t^2 \neq 0\}$ và $\lambda_2 = 3$ là $\{(t; t; 0), t \neq 0\}$

b. Tập các véc tơ riêng của $f$ ứng với $\lambda_1 = 1$ là $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, s \neq 0 \right\}$ và $\lambda_2 = 3$ là $\left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

c. Tập các véc tơ riêng của $f$ ứng với $\lambda_1 = 2$ là $\{ax^2 + bx + a, a^2 + b^2 \neq 0\}$ và $\lambda_2 = 1$ là $\{ax^2 - ax + 2a, a \neq 0\}$

**Bài tập 6.5**. $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 32 \\ -72 \end{bmatrix} \right\}$

**Bài tập 6.6**. $\mathscr{B} = \{(1; -1; 0), (-3; 0; 2); (1; 1; -1)\}$

**Bài tập 6.7**.

1. Tự chứng minh 2. $KerT = \{0\} \Rightarrow r(T) = 3$ 3. Tự chứng minh

4. $[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ 5. $\mathscr{C} = \{x^2 + 3x, x+1, x^2 - 4\}$

**Bài tập 6.8**.

1. Tự chứng minh 2. $KerT = \{0\} \Rightarrow r(T) = 3$ 3. Tự chứng minh

4. $[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ 5. $\left[\begin{array}{ll} \mathscr{C} & = \{-x^2 + x + 3, -x^2 + 1, 3x^2 + x\} \\ \mathscr{C} & = \{x^2 - x - 3, x + 3, x^2 + 2x + 5\} \end{array}\right.$

**Bài tập 6.9**. Ta có $A^k = PD^kP^{-1}$ với $P$ là ma trận chéo hóa được $A$ và $D$ là dạng chéo của $A$

a.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ -1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3/4 + 1/4\,.5^k & -1/2 + 1/2\,.5^k & 1/4 - 1/4\,.5^k \\ -1/4 + 1/4\,.5^k & 1/2 + 1/2\,.5^k & 1/4 - 1/4\,.5^k \\ 1/4 - 1/4\,.5^k & 1/2 - 1/2\,.5^k & 3/4 + 1/4\,.5^k \end{bmatrix}$$

b.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k \\ -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & 2/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k \\ -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & -1/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k & 2/3\,(-1)^k + 1/3\,.5^k \end{bmatrix}$$

c.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3\,.3^k - 2 & 2\,.3^k - 2 & 8\,.3^k - 8 \\ -1 + 3^k & -1 + 2\,.3^k & -4 + 4\,.3^k \\ -3^k + 1 & -3^k + 1 & -3\,.3^k + 4 \end{bmatrix}$$

**Bài tập 7.1.**

a. $5x'^2 + 2y'^2 - 2 = 0$ b. $4x'^2 - 1 = 0$ c. $4x'^2 - 8\sqrt{3}x' + 8y' = 0$

d. $y'^2 = 1$ e. $2\sqrt{2}x'^2 - y' = 0$.

**Bài tập 7.2.**

a. Dạng Ellip b. Dạng Ellip c.Dạng Hyperbol

d. Dạng Parabol e. Dạng Ellip f. Dạng Hyperbol

**Bài tập 7.3.**

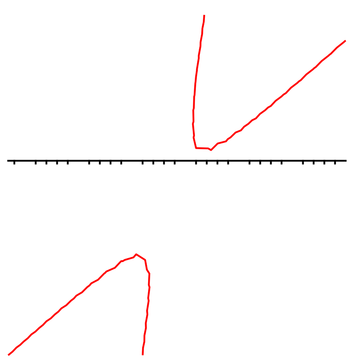
a. Ta có $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$

$\Rightarrow 9x'^2 - y'^2 + 6\sqrt{5}x' - 4\sqrt{5}y' + 20 = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' + \dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ Y = y' + 2\sqrt{5} \end{cases}$

$\Rightarrow 9X^2 - Y^2 = -5$

Đồ thị



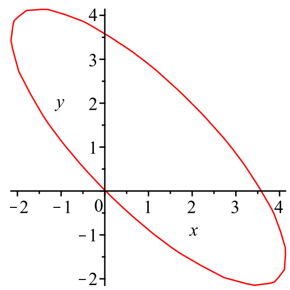
b. Ta có $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \\ y = \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \end{cases}$

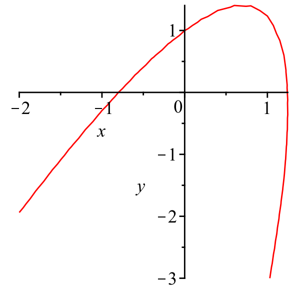
$\Rightarrow 2x'^2 + 8y'^2 - 16x' - 16 = 0$

Đặt $\begin{cases} X = x' - 4 \\ Y = y' \end{cases}$

$\Rightarrow X^2 + 4Y^2 = 24$

Đồ thị




**Bài tập 7.4.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a - hình 3 | b - hình 2 | c - hình 7 | d - hình 8 | e - hình 1 |
| f - hình 9 | g - hình 10 | h - hình 6 | i - hình 5 | j - hình 4 |

**Bài tập 7.5.**

a. Ellip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn 5, bán trục nhỏ 3, đỉnh $A_1(-5;0), A_2(5;0), B_1(0;-3), B_2(0;3)$, tiêu điểm $F_1(-4;0), F_2(4;0)$.

b. + $z=1$: Ellip có phương trình $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{\frac{15}{2}}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn $3\sqrt{5}$, bán trục nhỏ $\sqrt{\frac{15}{2}}$, đỉnh $A_1(-3\sqrt{5};0), A_2(3\sqrt{5};0), B_1(0;-\sqrt{\frac{15}{2}}), B_2(0;\sqrt{\frac{15}{2}})$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{\frac{75}{2}};0), F_2(\sqrt{\frac{75}{2}};0)$.

+$z=2$: Ellip có phương trình $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{3}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn $3\sqrt{2}$, bán trục nhỏ $\sqrt{3}$, đỉnh $A_1(-3\sqrt{2};0), A_2(3\sqrt{2};0), B_1(0;-\sqrt{3}), B_2(0;\sqrt{3})$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{15};0), F_2(\sqrt{15};0)$.

c. + $z=0$: Tập rỗng

+ $z=2$: Phương trình $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{6}=0 \Rightarrow O(0;0)$

+ $z=4$ Ellip có phương trình $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục lớn $2\sqrt{3}$, bán trục nhỏ $\sqrt{2}$, đỉnh $A_1(-2\sqrt{3};0), A_2(2\sqrt{3};0), B_1(0;-\sqrt{2}), B_2(0;\sqrt{2})$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{10};0), F_2(\sqrt{10};0)$.

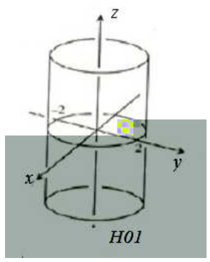
d. + $h<0$: Hyperbol có phương trình $\frac{x^2}{4h}-\frac{y^2}{h}=1$, tọa độ tâm $(0;0)$, bán trục thực $\sqrt{|h|}$, bán trục ảo $2\sqrt{|h|}$, đỉnh $A_1(0;-\sqrt{|h|}), A_2(0;\sqrt{|h|})$, tiêu điểm $F_1(0;-\sqrt{|5h|})$, $F_2(0;\sqrt{|5h|})$, tiệm cận $y=\pm 2x$

+ $h=0$: Hai đường thẳng cắtt nhau có phương trình là $y=\pm\frac{x}{2}$

$+h > 0$: Hyperbol có phương trình $\dfrac{x^2}{4h} - \dfrac{y^2}{h} = 1$, tọa độ tâm $(0; 0)$, bán trục thực $2\sqrt{h}$, bán trục ảo $\sqrt{h}$, đỉnh $A_1(-2\sqrt{h}; 0)$, $A_2(2\sqrt{h}; 0)$, tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5h}; 0)$, $F_2(\sqrt{5h}; 0)$, tiệm cận $y = \pm\dfrac{x}{2}$

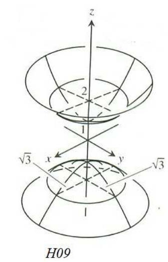
**Bài tập 7.6**.

a



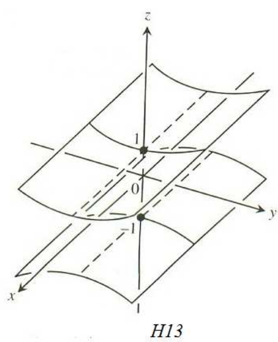

Hình 7.1: Mặt trụ tròn

b



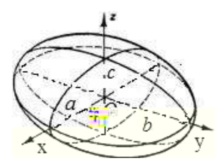

Hình 7.2: Mặt Hypeboloid 2 tầng

c



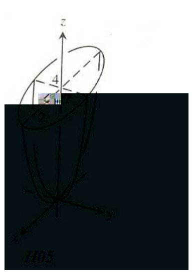

Hình 7.3: Mặt trụ hyperbol

d



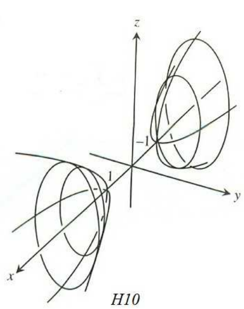
Hình 7.4: Mặt Ellipxoit

e



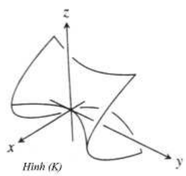
Hình 7.5: Mặt Paraboloit elliptic

f



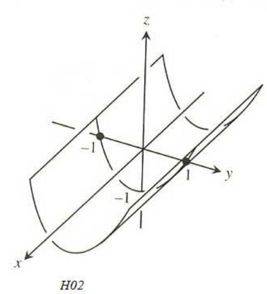

Hình 7.6: Mặt Hyperboloit 2 tầng

g



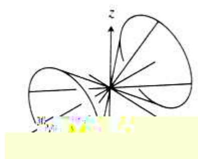

Hình 7.7: Mặt Paraboloit Hyperbolic

h



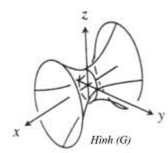

Hình 7.8: Mặt Trụ Parabol

i



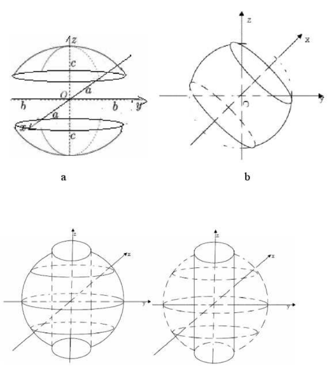

Hình 7.9: Mặt Nón Ellip

j




Hình 7.10: Mặt Hyperboloid 1 tầng

**Bài tập 7.7**.



# Tài liệu tham khảo

[1] Bùi Xuân Hải - Trần Nam Dũng - Trịnh Thanh Đèo - Thái Minh Đường - Trần Ngọc Hội , *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc Gia TPHCM, (2001).

[2] Hồ Hữu Lộc, *Bài tập Đại số tuyến tính*, Đại học Cần Thơ, (2005).

[3] Ngô Thu Lương - Nguyễn Minh Hằng, *Bài tập Toán cao cấp tập 2*, NXB Đại học Quốc Gia TPHCM, (2000).

[4] Nguyễn Viết Đông - Lê Thị Thiên Hương - Nguyễn Anh Tuấn - Lê Anh Vũ, *Bài tập Toán cao cấp tập 2*, NXB Giáo Dục, (2000).

[5] Tống Đình Quỳ - Nguyễn Cảnh Lương, *Giúp ôn tập tốt TOÁN CAO CẤP tập 4*, NXB Đại học Quốc Gia HÀ NỘI, (2000).

[6] *http://tutorial.math.lamar.edu/AllBrowsers/2318*