BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Lê Văn Thìa

PHƯƠNG PHÁP NHÁNH – CẬN CHO BÀI TOÁN QUY HOẠCH NGUYÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh – 2012

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Lê Văn Thìa

PHƯƠNG PHÁP NHÁNH – CẬN CHO BÀI TOÁN QUY HOẠCH NGUYÊN

Chuyên ngành: Toán Giải Tích
Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trịnh Công Diệu

Thành phố Hồ Chí Minh – 2012

LỜI CẢM ƠN

Tác giả luận văn xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến thầy TS.Trịnh Công Diệu, Trưởng bộ môn Toán ứng dụng Trường Đại học Sư phạm Tp.Hồ Chí Minh đã tận tâm hướng dẫn, chỉ bảo tận tình trong suốt quá trình hoàn thành đề tài nghiên cứu.

Xin chân thành cảm ơn các thầy, cô trong Ban giám hiệu trường, Phòng sau đại học, Khoa Toán – Tin Trường Đại học Sư phạm Tp.Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện thuận lợi trong việc học tập, trang bị kiến thức để có thể hoàn thành luận văn.

Bên cạnh đó, tôi xin cảm ơn các bạn bè, đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình và những người thân đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả luận văn

Lê Văn Thìa

LỜI MỞ ĐẦU

Quy hoạch nguyên (hay *quy hoạch rời rạc*) là một hướng quan trọng của quy hoạch toán học. Nó nghiên cứu lớp bài toán quy hoạch trong đó thêm điều kiện các biến chỉ nhận giá trị trên tập số nguyên. Lớp bài toán này rất phổ biến trong thực tế. Nó thu hút sự quan tâm của các nhà khoa học nghiên cứu trong các lĩnh vực: kinh tế, điều khiển, thiết kế, sinh học,… Chính trong các lĩnh vực đó các phương pháp liên tục tỏ ra kém hiệu quả khi nghiên cứu các đối tượng không thể chia nhỏ tùy ý, thì *quy hoạch nguyên* là công cụ chủ yếu nghiên cứu hiệu quả các lĩnh vực đó.

Có thể nói *quy hoạch nguyên* bắt đầu khai sinh lịch sử của mình từ năm 1958, khi công bố thuật toán nổi tiếng của Gomory về *phương pháp cắt*. Sau đó một thời gian dài, *phương pháp cắt* là công cụ duy nhất để giải các bài toán quy hoạch nguyên. Nhưng từ khi *phương pháp nhánh – cận* xuất hiện trong [Land – Doig 1960] và nhất là dạng hoàn thiện của nó trong [Dakin 1965], nó trở nên ưu thế rõ rệt. Hiện nay *phương pháp nhánh – cận* là một trong những phương pháp chủ yếu để giải bài toán quy hoạch nguyên. Do đó, việc tìm hiểu về *phương pháp nhánh – cận* là cần thiết.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu và trình bày lại một cách chi tiết phương pháp nhánh – cận. Các vấn đề được đề cập trong luận văn được trình bày một cách chặt chẽ về mặt toán học.

Nội dung luận văn gồm ba chương:

Chương 1 "**Một số kết quả của Quy hoạch tuyến tính và Giải tích lồi**" trình bày lại một số khái niệm và tính chất của Quy hoạch tuyến tính và Giải tích lồi. Các khái niệm đối ngẫu, định lý đối ngẫu, tập lồi, tập lồi đa diện, điểm cực biên, tia cực biên của tập lồi đa diện. Đặc biệt là các tính chất về sự biểu diễn của mỗi tập lồi đa diện hữu tỉ qua tia cực biên và điểm cực biên của nó, sẽ là cơ sở để chứng minh một số kết quả trong chương 2.

Chương 2 **"Thuật toán nhánh – cận giải bài toán Quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận"** trình bày một cách chặt chẽ và chi tiết cơ sở lý luận của thuật toán và thuật toán được minh họa bởi việc giải bài toán thực tế.

Chương 3 **"Giải bài toán Quy hoạch nguyên tuyến tính trên Matlab"** trình bày lại việc dùng phương pháp nhánh – cận giải bài toán Quy hoạch nguyên bằng ngôn ngữ Matlab. Giải một số bài toán Quy hoạch nguyên tuyến tính bằng chương trình Matlab R2009a.

Do thời gian có hạn nên luận văn này mới chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu tài liệu và sắp xếp trình bày lại các kết quả nghiên cứu theo một chủ đề đặt ra. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong quá trình xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

MỤC LỤC

Chương 1
Một số kết quả của Quy hoạch tuyến tính và Giải tích lồi

1.1. Quy hoạch tuyến tính

Ta nhắc lại một số kết quả của quy hoạch tuyến tính mà chúng sẽ được sử dụng để chứng minh các kết quả phía sau.

Định nghĩa 1.1.1. Bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát có dạng:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

thỏa hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\leq = \geq) b_i & , i = 1,...,m \\ x_j \geq 0 & , j = 1,...,n \end{cases}$$

trong đó, $c_j, a_{ij}, b_i, i = 1,...,m; j = 1,...,n$ là các hằng số cho trước.

Định nghĩa 1.1.2. Tập D các điểm $x = (x_1,...,x_n)$ thỏa hệ các ràng buộc gọi là tập phương án chấp nhận được của bài toán.

- Điểm $x^* \in D$ sao cho $f(x) \geq f(x^*)$, $\forall x \in D$ được gọi là phương án tối ưu của bài toán Quy hoạch tuyến tính.

Định nghĩa 1.1.3. Bài toán Quy hoạch tuyến tính có thể phát biểu dưới dạng ma trận như sau:

$$f(x) = < c, x > \to \min$$

thỏa hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} Ax (\leq = \geq) b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

trong đó, A là ma trận kích thước $m \times n$.

• Phương án $x = (x_1, ..., x_n)$ được gọi là phương án cơ sở nếu hệ các vectơ cột $\{A_j\}$ của ma trận A ứng với các thành phần $x_j > 0$ $(j = 1, ..., n)$ là độc lập tuyến tính.

⅄ Phương pháp đơn hình:

Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sau:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

thỏa hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & , i = 1, ..., m \\ x_j \geq 0 & , j = 1, ..., n \end{cases}$$

Giả sử đã biết một phương án cơ sở chấp nhận được náo đó:

$$X_0 = (x_{b1} = a_1, x_{b2} = a_2, ..., x_{bm} = a_m),$$

được xác định từ hệ vectơ cơ sở đơn vị m chiều $A_{b1}, A_{b2}, ..., A_{bm}$.

- Khai triển mọi vectơ điều kiện $A_j (j = 1, ..., n)$ theo hệ vec tơ cơ sở $A_{b1}, A_{b2}, ..., A_{bm}$ có nghĩa là tính các hệ số $x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{mj}$, $j = 1, ..., n$.

- Tính các hiệu $Z_j - c_j$, $j = 1, ..., n,$

trong đó $Z_j = C_b A_j = \sum_{i=1}^{m} c_{bi} x_{ij}$ $, j = 1, ..., n$.

Để tiện tính toán người ta trình bày theo bảng sau:

Cơ sở	C_b	A_0	c_1	$\cdots$	c_{b1}	$\cdots$	c_{b2}	$\cdots$	c_{bl}	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_{bm}	$\cdots$	c_n
			A_1	$\cdots$	A_{b1}	$\cdots$	A_{b2}	$\cdots$	A_{bl}	$\cdots$	A_k	$\cdots$	A_j	$\cdots$	A_{bm}	$\cdots$	A_n
A_{b1}	c_{b1}	x_{b1}	x_{11}	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{1n}
A_{b2}	c_{b2}	x_{b2}	x_{21}	$\cdots$	0	..	1	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{2k}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_{bl}	c_{bl}	x_{bl}	x_{b1}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	x_{lk}	$\cdots$	x_{lj}	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{ln}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_{bm}	c_{bm}	x_{bm}	x_{bm}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	x_{mk}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	1	$\cdots$	x_{mn}
$Z_j - c_j$		Z_0		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	

- Nếu $Z_j - c_j \le 0 \quad , \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ thì phương án cơ sở chấp nhận được là phương án tối ưu.
- Nếu có một chỉ số j nào đó mà $Z_j - c_j > 0$ và hệ số $x_{ij} \le 0 \ \ (\forall i = 1, ..., m)$ thì dạng tuyến tính Z không bị chặn trên tập phương án chấp nhận được.
- Nếu có một chỉ số j nào đó mà $Z_j - c_j > 0$, và A_j có ít nhất một hệ số $x_{ij} > 0$ thì phương án cơ sở chấp nhận được chưa tối ưu và có thể cải thiện được bằng cách đưa vào cơ sở vectơ có $(Z_j - c_j)\max > 0$. Giả sử $(Z_j - c_j)\max = Z_k - c_k > 0$, khi đó đưa vectơ A_k vào cơ sở và loại ra khỏi cơ sở vectơ ứng với:

$$t = \min_{x_{ik} > 0} \frac{x_{bi}}{x_{ik}}$$

Giả sử $t = \min\limits_{x_{ik}>0} \frac{x_{bi}}{x_{ik}} = \frac{x_{bl}}{x_{lk}}$, do đó A_{bl} bị loại ra khỏi cơ sở. Cơ sở mới gồm m vectơ: $(A_{b1},...,A_{bl-1},A_K,A_{bl+1},...,A_{bm})$. Phần tử x_{lk} được gọi là phần tử giải được.

Bằng phép biến đổi cơ bản và đơn giản biểu thức:

$$\begin{cases} x'_{bi} = x_{bi} - \dfrac{x_{bl}}{x_{lk}} x_{ik},\ (bi \neq bl, l = 1,...,m) \\ x'_k = \dfrac{x_{bl}}{x_{lk}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}\ , bi \neq bl \\ x'_{lj} = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} \end{cases}$$

Ta biến đổi vectơ A_k về vectơ đơn vị với $x_{lk} = 1$. Khi hoàn thành phép biến đổi ta được bảng đơn hình mới và được tính theo cơ sở mới.

Quá trình tính toán tương tự được tiếp tục cho đến khi tìm được phương án tối ưu.

Định nghĩa 1.1.4. Giả sử ma trận A có vectơ hàng là a_i và các vectơ cột là A_j. Giả sử bài toán gốc có cấu trúc ở bên trái trong bảng sau đây. Khi đó, bài toán đối ngẫu được định nghĩa với cấu trúc tương ứng bên phải

$Z = \langle c, x \rangle \to \min$,	$f = \langle b, y \rangle \to \max$
Với ràng buộc	Với ràng buộc
$\langle a_i, x \rangle = b_i, i \in M_1$	y_i tự do, $i \in M_1$
$\langle a_i, x \rangle \leq b_i, i \in M_2$	$y_i \leq 0, i \in M_2$
$\langle a_i, x \rangle \geq b_i, i \in M_2$	$y_i \geq 0, i \in M_3$
$x_j \geq 0,\ j \in N_1$	$\langle y, A_j \rangle \leq c_j, j \in N_1$
$x_j \leq 0,\ j \in N_2$	$\langle y, A_j \rangle \geq c_j, j \in N_2$
x_j tự do $\ j \in N_3$	$\langle y, A_j \rangle = c_j, j \in N_3$

Định nghĩa 1.1.5.

• Cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng là cặp bài toán đối ngẫu mà trong đó những ràng buộc trong bài toán gốc được cho bằng đẳng thức và những ràng buộc của bài toán đối ngẫu được cho bằng bất đẳng thức.

• Cặp bài toán đối ngẫu đối xứng là cặp bài toán đối ngẫu mà trong đó các biến của hai bài toán đều không âm và các ràng buộc đều là bất đẳng thức.

Định lý 1.1.6.*(Định lý đối ngẫu yếu) Cho* A *là ma trận cỡ* $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ *và* $c \in \mathbb{R}^n$. $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ *và* $Q = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y = c, y \le 0\}$. *Khi đó*

(i) Nếu $x \in P$ *và* $y \in Q$ *thì* $< c, x > \ge < b, y >$.

(ii) Nếu bài toán $\min\{< c, x >: x \in P\}$ *không bị chặn dưới, thì* $Q = \varnothing$.

(iii) Nếu bài toán $\max\{< b, y >: y \in Q\}$ *không bị chặn trên thì* $P = \varnothing$.

Chứng minh

Giả sử ma trận A có vectơ hàng là a_i $(i = 1,...,m)$ và các vectơ cột là A_j $(j = 1,...,n)$.

(i) Ta đặt

$$u_i = y_i(< a_i, x > - b_i),$$
$$v_j = (c_j - < y, A_j >)x_j.$$

Theo định nghĩa của bài toán đối ngẫu thì y_i và $< a_i, x > - b_i$ cùng dấu, còn $c_j - < y, A_j >$ và x_j cùng dấu. Do đó, $u_i \ge 0, \forall i$ và $v_j \ge 0, \forall j$.

Nhận xét rằng

$$\sum_i u_i = < y, Ax - b >,$$
$$\sum_j v_j = < c - yA, x >.$$

Do đó,

$$0 \le \sum_i u_i + \sum_j v_j = < c, x > - < b, y >.$$

(ii) Nếu bài toán $\min\{< c, x >: x \in P\}$ không bị chặn dưới thì tồn tại dãy $\{x^k\}$ các phương án chấp nhận được sao cho $< c, x^k > \to -\infty$ khi $k \to \infty$. Giả sử

$\exists y^0 \in Q$. Khi đó, theo (i) ta có $< c, x^k > \; \geq \; < b, y^0 >, \forall k$. Cho $k \to \infty$ ta được $< b, y^0 > \; \leq -\infty$ (vô lí). Do đó, $Q = \varnothing$.

(iii) Nếu bài toán $\max\{< b, y >: y \in Q\}$ không bị chặn trên thì thì tồn tại dãy $\{y^k\}$ các phương án chấp nhận được sao cho $< b, y^k > \to +\infty$ khi $k \to \infty$. Giả sử $\exists x^0 \in P$. Khi đó, theo (i) ta có $< c, x^0 > \; \geq \; < b, y^k >, \forall k$. Cho $k \to \infty$ ta được $< c, x^0 > \; \geq +\infty$ (vô lí). Do đó, $P = \varnothing$. □

Định lý 1.1.7.*(Định lý đối ngẫu mạnh) Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính gốc có nghiệm tối ưu thì bài toán quy hoạch đối ngẫu cũng có nghiệm tối ưu và giá trị mục tiêu tối ưu bằng nhau.*

Chứng minh

Ta có thể đưa cặp bài toán đối ngẫu đối xứng về cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng, do đó chỉ chứng minh cho cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng. Giả sử bài toán đối ngẫu không đối xứng có phương án tối ưu nhận được bằng *phương pháp đơn hình* (xem trong tài liệu tham khảo [Cảnh 2004], [Khánh – Nương 2000], [Khánh 2002]). Hệ vectơ cơ sở tương ứng với phương án tối ưu gồm các vectơ $A_{b1}, A_{b2}, ..., A_{bm}$. Đặt $A_b = (A_{b1}, ..., A_{bm})$ ma trận được thành lập từ hệ các vectơ cơ sở. Khi đó, $A_j = A_b X_j$. Biểu diễn $D = (X_1, ..., X_n)$ ma trận được thành lập từ những hệ số của bảng đơn hình cuối cùng. Ta có:

$$A = A_b D; \qquad D = A_b^{-1} A \qquad (1.1)$$

$$A_b X_{opt} = A_0; \qquad X_{opt} = A_b^{-1} A_0 \qquad (1.2)$$

$$Z_{\min} = C_b X_{opt} = C_b A_b^{-1} A_0, \qquad (1.3)$$

trong đó X_{opt} là phương án tối ưu của bài toán thuận. Xét vectơ $C_b D - C = (Z_1 - c_1, ..., Z_n - c_n)$ có các tọa độ là những hiệu $Z_j - c_j$. Vì là phương án tối ưu nên mọi hiệu $Z_j - c_j \leq 0, (j-1, ..., n)$, do đó:

$$C_b D - C \leq 0. \qquad (1.4)$$

Người ta chứng minh được rằng, phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu nhận được theo công thức:

$$Y_{opt} = C_b A_b^{-1}. \qquad (1.5)$$

Thật vậy,

Xét vectơ $Y_{opt} A - C$. Khi sử dụng liên tiếp các công thức (1.5), (1.1), (1.4) ta được

$$Y_{opt} A - C = C_b A_b^{-1} A - C = C_b D - C \le 0.$$

Do đó, $Y_{opt} A \le C$ có nghĩa là Y_{opt} là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu. Bây giờ tính giá trị của dạng tuyến tính f khi $Y = Y_{opt}$.

$$f(Y_{opt}) = Y_{opt} A_0 = C_b A_b^{-1} A_0 = C_b X_{opt} = \min Z \qquad (1.6)$$

ở đây các công thức (1.5), (1.2), (1.3) được dùng liên tiếp.

Biểu thức (1.6) chứng tỏ rằng: giá trị dạng tuyến tính của bài toán đối ngẫu (khi $Y = Y_{opt}$), $f(Y_{opt})$ trùng với giá trị tối ưu của bài toán gốc.

Bây giờ cần chứng minh rằng: Y_{opt} là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Ta có:

$$f(Y) = YA_0 = YAX.$$

Một phương án chấp nhận được bất kỳ Y của bài toán đối ngẫu phải thỏa mãn $YA \le C$, do đó:

$$f(Y) \le CX = Z(X).$$

Suy ra

$$\max f(Y) \le \min Z(X). \qquad (1.7)$$

Theo (1.6) với $Y = Y_{opt}$ thì bất đẳng thức (1.7) trở thành đẳng thức . Vì vậy Y_{opt} là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

Định lý 1.1.8.*(Điều kiện độ lệch bù) Cho x là nghiệm chấp nhận được của bài toán* $\min\{<c, x>: Ax \le b\}$ *và y là nghiệm chấp nhận được của bài toán*

$\max\{<b,y>: A^T y = c, y \le 0\}$. *Giả sử ma trận* A *có vectơ hàng là* a_i $(i=1,...,m)$ *và các vectơ cột là* A_j $(j=1,...,n)$. *Khi đó,* x, y *là nghiệm tối ưu nếu và chỉ nếu*

$$y_i(<a_i, x> - b_i) = 0 \ \forall i,$$

$$(c_j - <A_j, y>)x_j = 0 \ \forall j.$$

Chứng minh

Ở chứng minh định lý 1.1.6 ta đã đặt

$$u_i = y_i(<a_i, x> - b_i),$$
$$v_j = (c_j - <y, A_j>)x_j$$

Theo định nghĩa của bài toán đối ngẫu ta thấy rằng $u_i \ge 0,\ v_j \ge 0\ \forall i, \forall j$. Đồng thời ta cũng có

$$<c,x> - <b,y> = \sum_i u_i + \sum_j v_j.$$

Theo định lý đối ngẫu mạnh , nếu x và y là phương án tối ưu thì $<c,x> = <b,y>$. Do đó, $u_i = v_j = 0,\ \forall i, \forall j$. Ngược lại, nếu $u_i = v_j = 0,\ \forall i, \forall j$ thì $<c,x> = <b,y>$ suy ra x, y là phương án tối ưu. □

Định lý 1.1.9. *(Bổ đề Farkas) Tập hợp* $\{x : Ax = b, x \ge 0\}$ *là tập khác rỗng khi và chỉ khi không tồn tại vectơ* y *sao cho* $A^T y \ge 0$ *và* $<b,y> < 0$.

Chứng minh

Theo Quy hoạch tuyến tính đối ngẫu ta có

$\min\{<c,x>: Ax = b, x \ge 0\} \le 0$ khi và chỉ khi $\max\{<b,y>: A^T y \le c\} \le 0$.

Chọn $c = 0$, khi đó $\{x : Ax = b, x \ge 0\} \ne \emptyset$ khi và chỉ khi không tồn tại y sao cho $A^T y \ge 0$ và $<b,y> < 0$. □

⅄ Thuật toán đơn hình đối ngẫu:

Thuật toán đơn hình đối ngẫu bắt đầu từ một phương án sơ sở chấp nhận được của bài toán đối ngẫu nhưng không chấp nhận được của bài toán gốc (vì có biến cơ sở âm). Bằng thuật toán đơn hình chuyển dần đến phương án tối ưu.

Thuật toán đơn hình đối ngẫu có thể chia thành hai giai đoạn sau:

- Giai đoạn 1: Không quan tâm đến sự không âm của các biến cơ sở mà thuật toán đơn hình đưa bài toán đến một bảng đơn hình có $\forall(Z_j - c_j) \le 0$.

+ Nếu $\forall x_{bi} \ge 0$ thì ta có phương án ấy là phương án tối ưu và ngừng tính.

+ Thông thường thì phương án ấy không phải là phương án tối ưu, vì trong các biến cơ sở vẫn còn có biến âm, chuyển sang giai đoạn 2.

- Giai đoạn 2: Khi các biến cơ sở còn biến âm ta cần khử các biến âm mà vẫn giữ được $\forall(Z_j - c_j) \le 0$. Phương án là tối ưu khi mọi biến cơ sở đều không âm.

Giả sử $x_{bl} < 0$, khi đó ta loại vectơ A_l khỏi cơ sở. Nếu trong hàng l không có thành phần $x_{lj} < 0$ thì bài toán không có phương án chấp nhận được. Nếu có một vài $x_{lj} < 0$ thì phương án có thể cải thiện được và đưa vectơ A_k vào cơ sở với k được xác định bởi:

$$\min_{x_{lj}<0} \frac{Z_j - c_j}{x_{lj}} = \frac{Z_k - c_k}{x_{lk}}.$$

Việc chọn như vậy các hiệu $Z_j - c_j$ vẫn không dương. Quá trình tính toán tương tự được tiếp tục đến khi nhận được phương án tối ưu.

Trong trường hợp, nếu có vài biến cơ sở $x_{bl} < 0$ thì việc chọn phần tử giải được chọn theo công thức:

$$\min_{x_{ij}<0} \frac{Z_j - c_j}{x_{ij}}.$$

Phương pháp đơn hình đối ngẫu giảm nhẹ sự biến đổi các ràng buộc và do đó giảm kích thước bảng đơn hình, khối lượng tính toán được giảm một cách đáng kể.

1.2. Tập lồi - Tập lồi đa diện.

Định nghĩa 1.2.1.

• Cho tập $X \subset \mathbb{R}^n$, tập X được gọi là tập lồi nếu với mọi $x^1, x^2 \in X$ ta đều có $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$, $\forall \lambda \in (0,1)$.

• Tổ hợp tuyến tính $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$ với $\lambda_i \geq 0 \;\; \forall i = 1,..,m$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ được gọi là tổ hợp lồi của các vectơ $x^1,..., x^m$.

• Cho tập $X \subset \mathbb{R}^n$, bao lồi của X , được kí hiệu là $conv(X)$ là tập hợp tất cả tổ hợp lồi của các vectơ trong X . Tức là

$$conv(X) := \{x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, v_1,..., v_k \in X\}.$$

Nếu $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in conv(X)$ là tổ hợp lồi của các vectơ $v_i,..., v_k \in X$ thì

$$< c, x > = < c, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i > = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i < c, v_i > \geq \min\{< c, v_i >: i = 1,..., k\}.$$

Do đó, với bất kỳ tập $X \subset \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n$ ta luôn có

$$\min\{< c, x >: x \in X\} = \min\{< c, x >: x \in conv(X)\}. \qquad (1.8)$$

Định nghĩa 1.2.2. Một tập lồi đa diện là tập hợp con của $\mathbb{R}^n$ được xác định bởi hữu hạn bất phương trình tuyến tính, tức là một tập lồi đa diện có dạng

$$P(A,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \qquad (1.9)$$

trong đó A là ma trận cỡ $m \times n$ và $b \in \mathbb{R}^m$.Tập lồi đa diện P được gọi là tập lồi đa diện hữu tỉ nếu $A = (a_{ij}),\; a_{ij} \in \mathbb{Q},\; i = 1,..., m,\; j = 1,..., n;\; b \in \mathbb{Q}^m$.

Định nghĩa 1.2.3. Cho tập lồi đa diện $P \subset \mathbb{R}^n$. Tập hợp $F \subset P$ được gọi là diện của P nếu $F = \{x \in P :< w, x >= t\}$ và $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n :< w, x > \leq t\}$ trong đó $w \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Nếu $F \neq \emptyset$ và $F \neq P$ thì F được gọi là *diện không tầm thường*.

Ta thấy rằng mỗi diện F của đa diện $P = P(A,b)$ có dạng $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, < w, x > \leq t, - < w, x > \leq -t\}$, với một $t \in \mathbb{R}$ nào đó. Do đó F cũng là tập lồi đa diện.

Định nghĩa 1.2.4. Cho tập lồi đa diện $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ và M là tập chỉ số các dòng của A. Cho $I \subseteq M$ ta xét tập hợp

$$fa(I) := \{x \in P : A_I x = b_I\}, \qquad (1.10)$$

trong đó A_I là ma trận được thành lập từ các dòng thứ $i \in I$ của ma trận A.

Khi đó $fa(I)$ là diện của P và được gọi là diện cảm sinh bởi I.

Định lý 1.2.5. *Cho tập lồi đa diện khác rỗng $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ và M là tập chỉ số dòng của A. Tập $F \subseteq \mathbb{R}^n$ với $F \neq \varnothing$ là diện của P nếu và chỉ nếu $F = fa(I) = \{x \in P : A_I x = b_I\}$ với $I \subseteq M$.*

Chứng minh

Ta có $fa(I)$ là một diện của P với bất kỳ $I \subseteq M$. Ngược lại, nếu $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n :< c, x >= t\}$ là diện của P thì F là tập nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\{< c, x >: Ax \le b\} \qquad (1.11).$$

Theo định lý đối ngẫu mạnh, ta có bài toán quy hoạch đối ngẫu của (1.11) $\min\{< b, y >: A^T y = c, y \ge 0\}$ cũng có nghiệm tối ưu y^* và thỏa $< b, y^* >= t$. Đặt $I := \{i : y_i^* > 0\}$. Theo điều kiện độ lệch bù, những nghiệm tối ưu x^* của bài toán (1.11) thỏa $A_i x^* = b_i, \forall i \in I$. Vậy $F = fa(I)$. □

Định nghĩa 1.2.6. (tập tương đương) Cho tập lồi đa diện $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \subseteq P$. Khi đó ta gọi $eq(S) := \{i \in M : A_i x = b_i, \forall x \in S\}$ là tập tương đương của S.

Nhận xét: Cho S, S' là hai tập con của tập lồi đa diện P. Nếu $S \subseteq S'$ thì $eq(S) \supseteq eq(S')$. Như vậy, với S là tập con khác rỗng của tập lồi đa diện P, nếu F là diện của P chứa S thì $eq(F) \subseteq eq(S)$. Thêm nữa là $fa(eq(S))$ sẽ là diện của P và chứa S. Do đó, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.2.7. *Cho tập lồi đa diện $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ và S là tập con khác rỗng của P. Diện nhỏ nhất chứa S của P là $fa(eq(S))$.*

Hệ quả 1.2.8.

(i) Tập lồi đa diện $P = P(A,b)$ không có bất kỳ diện không tầm thường nào khi và chỉ khi $eq(P) = M$, trong đó M là tập chỉ số các dòng của A.

(ii) Nếu $A\overline{x} < b$ *thì* $\overline{x}$ *không chứa trong bất kỳ diện không tầm thường nào của* P.

Định nghĩa 1.2.9.

Tổ hợp affine của các vectơ $v_1,...,v_k \in \mathbb{R}^n$ là tổ hợp tuyến tính $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ sao cho $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Cho tập $X \subseteq \mathbb{R}^n$, bao affine của X được định nghĩa là

$$aff(X) := \{x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, v_1,...,v_k \in X\}.$$

Hệ vectơ $v_1,...,v_k \in \mathbb{R}^n$ được gọi là độc lập affine nếu $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$ và $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ thì ta suy ra $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.

Bổ đề 1.2.10. *Các mệnh đề sau tương đương*

(i) *Hệ vectơ* $v_1,...,v_k \in \mathbb{R}^n$ *là độc lập affine.*

(ii) *Hệ vectơ* $v_2 - v_1,...,v_k - v_1 \in \mathbb{R}^n$ *là độc lập tuyến tính.*

(iii) *Hệ vectơ* $\begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \end{pmatrix},...,\begin{pmatrix} v_k \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *là độc lập tuyến tính.*

Định nghĩa 1.2.11. Vectơ $\overline{x} \in P = P(A,b)$ được gọi là *điểm trong tương đối* của tập lồi đa diện nếu nó không thuộc bất kỳ diện không tầm thường nào của đa diện P.

Bổ đề 1.2.12. *Cho* F *là một diện của tập lồi đa diện* $P(A,b)$ *và* $\overline{x} \in F$. *Khi đó* $\overline{x}$ *là điểm trong tương đối của* F *khi và chỉ khi* $eq(\{\overline{x}\}) = eq(F)$.

Chứng minh

Gọi G là diện nhỏ nhất của F chứa $\overline{x}$. Khi đó, $\overline{x}$ là *điểm trong tương đối* của F khi và chỉ khi $F = G$. Theo mệnh đề 1.2.7 ta có $G = fa(eq(\{\overline{x}\}))$. Vậy $\overline{x}$ là *điểm trong tương đối* của F khi và chỉ khi $fa(eq(\{\overline{x}\})) = F$. Suy ra $\overline{x}$ là *điểm trong tương đối* của F khi và chỉ khi $eq(\{\overline{x}\}) = eq(F)$. □

Do đó, ta có định nghĩa tương đương với định nghĩa 1.2.11 là : $\overline{x} \in P = P(A,b)$ là *điểm trong tương đối* của P nếu $eq(\{\overline{x}\}) = eq(P)$.

Bổ đề 1.2.13. *Cho $P = P(A,b)$ là tập lồi đa diện khác rỗng. Khi đó, tập hợp các điểm trong tương đối của P cũng khác rỗng.*

Chứng minh

Đặt $M = \{1,...,m\}$ là tập chỉ số các dòng của A.

$I := eq(P)$ và $J := M \setminus I$.

Khi đó, nếu $J = \varnothing$ thì $I = M$. Theo hệ quả 1.2.8 (i) ta có tập lồi đa diện P không có bất kỳ diện không tầm thường nào. Do đó, bất kỳ điểm nào của P cũng là *điểm trong tương đối*.

Nếu $J \neq \varnothing$ thì với mỗi $j \in J$ ta tìm được $x^j \in P$ sao cho $Ax^j \le b$ và $A_j x^j < b_j$. Do P là tập lồi nên $y := \dfrac{1}{|J|}\sum_{j\in J} x^j$ (trong đó $|J|$ là số phần tử của J) cũng thuộc P. Do đó, $A_J y < b_J$ và $A_I y = b_I$ suy ra $eq(\{y\}) = eq(P)$. Ta được đpcm. □

Định nghĩa 1.2.14. Số chiều của tập lồi đa diện $P \subseteq \mathbb{R}^n$ (kí hiệu là $\dim P$) là số bé hơn một đơn vị so với số lớn nhất các vectơ độc lập affine trong P. Ta có $\dim\varnothing = -1$.

Định lý 1.2.15. *(Định lý về số chiều) Cho $F \neq \varnothing$ là một diện của tập lồi đa diện $P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$. Khi đó, ta có $\dim F = n - rankA_{eq(F)}$.*

Chứng minh

Theo kết quả của Đại số tuyến tính, ta có

$n = rankA_{eq(F)} + \dim\ker A_{eq(F)}$, trong đó $\ker A_{eq(F)}$ là không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất có ma trận hệ số là $A_{eq(F)}$.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh $\dim\ker A_{eq(F)} = \dim F$. Để cho gọn ta đặt $I := eq(F);\ r := \dim\ker A_I;\ s := \dim F$.

"$r \geq s$": Chọn $s+1$ vectơ độc lập affine $x^0, x^1, ..., x^s \in F$. Suy ra theo bổ đề 1.2.10 hệ vectơ $x^1 - x^0, ..., x^s - x^0$ là độc lập tuyến tính và $A_I(x^j - x^0) = b_I - b_I = 0$, $j = 1, ..., s$. Suy ra $r \geq s$.

"$r \leq s$": Vì $F \neq \varnothing$ nên $s \geq 0$. Do đó ta cũng giả thiết $r \geq 0$. Do $F \neq \varnothing$ Theo bổ đề 1.2.13 tồn tại một *điểm trong tương đối* $\overline{x} \in F$ mà theo bổ đề 1.2.12 ta có $eq(\{\overline{x}\}) = eq(F) = I$. Vậy với $J := M \setminus I$ ta có $A_I \overline{x} = b_I$ và $A_J \overline{x} < b_J$.

Đặt $\{x^1, ..., x^r\}$ là cơ sở của $\ker A_I$. Khi đó, do $A_J \overline{x} < b_J$ ta có thể tìm được $\varepsilon > 0$ sao cho $A_J(\overline{x} + \varepsilon x^k) < b_J$ và $A_I(\overline{x} + \varepsilon x^k) = b_I$ với $k = 1, ..., r$. Suy ra $\overline{x} + \varepsilon x^k \in F$ với $k = 1, ..., r$.

Các vectơ $\varepsilon x^1, ..., \varepsilon x^r$ là độc lập tuyến tính , theo bổ đề 1.2.10 $\overline{x}, \varepsilon x^1 + \overline{x}, ..., \varepsilon x^r + \overline{x}$ là những vectơ độc lập affine trong F. Suy ra $r \leq s$. □

Định lý 1.2.16. ***(Hoffman - Kruskal)*** *Cho $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện. Khi đó, tập khác rỗng $F \subseteq P$ là diện nhỏ nhất của P khi và chỉ khi $F = \{x : A_I x = b_I\}$ với $I \subseteq M$ (M là tập chỉ số các dòng của A) và $rank\, A_I = rank\, A$.*

Chứng minh

"⇒": Gọi F diện khác rỗng nhỏ nhất của P. Khi đó, theo định lý 1.2.5 và mệnh đề 1.2.7 ta có $F = fa(I)$, trong đó $I = eq(F)$. Đặt $J := M \setminus I$, ta có

$$F = \{x : A_I x = b_I, A_J x \leq b_J\} \qquad (1.12).$$

Ta cần chứng minh $F = G$, trong đó

$$G = \{x : A_I x = b_I\} \qquad (1.13).$$

Theo (1.12) ta có $F \subseteq G$. Giả sử tồn tại $y \in G \setminus F$. Khi đó, tồn tại $j \in J$ sao cho

$$A_I y = b_I, A_j y > b_j \qquad (1.14).$$

Do $F \neq \varnothing$ nên theo bổ đề 1.2.13 tồn tại *điểm trong tương đối* của F, ta gọi điểm đó là $\overline{x}$. Ta xét điểm $z(\tau) = \overline{x} + \tau(y - \overline{x}) = (1-\tau)\overline{x} + \tau y$.

Ta thấy rằng $A_I z(\tau) = (1-\tau)A_I\overline{x} + \tau A_I y = (1-\tau)b_I + \tau b_I = b_I$, vì $\overline{x} \in F$ và y thỏa (1.14). Hơn nữa, $A_J z(0) = A_J\overline{x} < b_J$, vì $J \subseteq M \setminus I$.

Vì $A_J.y > b_j$ nên ta có thể tìm được $\tau \in \mathbb{R}$ và $j_0 \in J$ sao cho $A_{j_0} z(\tau) = b_{j_0}$ và $A_J z(\tau) \le b_J$. Suy ra, $\tau \ne 0$ và $F' = \{x \in P : A_I x = b_I, A_{j_0} x = b_{j_0}\}$ là là một diện chứa trong F (vì $\overline{x} \in F \setminus F'$). Điều này mâu thuẫn với cách chọn F. Suy ra $F = G$.

Ta cần chứng minh thêm $rank\, A_I = rank\, A$. Thật vậy, nếu $rank\, A_I < rank\, A$, thì tồn tại $j \in J = M \setminus I$ sao cho A_j không là tổ hợp tuyến tính của các dòng trong A_I. Suy ra , ta có thể tìm được vectơ $w \ne 0$ sao cho $A_I w = 0$ và $A_j w > 0$. Với $\theta > 0$ thích hợp ta có $y := \overline{x} + \theta w$ thỏa (1.14) và theo như trên ta có thể xây dựng được $F' \subset F$ và $F' \ne F$. Điều này mâu thuẫn.

"$\Leftarrow$": Nếu $F = \{x : A_I x = b_I\}$ theo hệ quả 1.2.8 thì F không có bất kỳ diện không tầm thường nào. Và do $F \subseteq P$ nên $F = \{x : A_I x = b_I, A_J x \le b_j\}$ là diện nhỏ nhất của P. □

Hệ quả 1.2.17. *Tất cả các diện nhỏ nhất của tập lồi đa diện $P = P(A,b)$ đều có cùng số chiều là $n - rank\, A$.*

1.3.Điểm cực biên. Tia cực biên

Định nghĩa 1.3.1. Điểm $\overline{x} \in P = P(A,b)$ được gọi là điểm cực biên của P nếu $\overline{x} = \lambda x + (1-\lambda)y$ với $x, y \in P$ và $0 < \lambda < 1$ ta suy ra $x = y = \overline{x}$.

Định lý 1.3.2. *Cho $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện và $\overline{x} \in P$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) $\{\overline{x}\}$ là 0-diện của P (diện có số chiều là 0).

(ii) Tồn tại một vectơ $c \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\overline{x}$ là nghiệm tối ưu duy nhất của quy hoạch tuyến tính $\min\{< c, x >: x \in P\}$.

(iii) $\overline{x}$ là điểm cực biên của P.

(iv) $rank\, A_{eq(\{\overline{x}\})} = n$.

Chứng minh

"(i) $\Rightarrow$ (ii)": Vì $\overline{x}$ là diện của P nên tồn tại bất phương trình $< w, x > \geq t$ sao cho $P \subseteq \{x :< w, x > \geq t\}$ và $\{\overline{x}\} = P \cap \{x :< w, x > \geq t\} = \{x \in P :< w, x >= t\}$. Do đó, $\overline{x}$ là nghiệm duy nhất của quy hoạch tuyến tính $\min\{< c, x >: x \in P\}$ với $c := w$.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Cho $\overline{x}$ là nghiệm duy nhất của quy hoạch tuyến tính $\min\{< c, x >: x \in P\}$. Nếu $\overline{x} = \lambda x + (1-\lambda) y$ với $x, y \in P$ và $0 < \lambda < 1$ thì ta có

$$< c, \overline{x} >= \lambda < c, x > + (1-\lambda) < c, y > \geq \lambda < c, \overline{x} > + (1-\lambda) < c, \overline{x} >=< c, \overline{x} >.$$

Suy ra $< c, x >=< c, y >=< c, \overline{x} >$. Vì $\overline{x}$ là nghiệm duy nhất nên $x = y = \overline{x}$.

"(iii) $\Rightarrow$ (iv)": Đặt $I := eq(\{\overline{x}\})$. Nếu $rank\, A_I < n$ thì tồn tại $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $A_I y = 0$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta có $x := \overline{x} + \varepsilon y \in P$ và $y := \overline{x} - \varepsilon y \in P$ (vì $A_j \overline{x} < b_j \ , \forall j \notin I$). Nhưng $\overline{x} = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y$, điều này mâu thuẩn với giả thiết $\overline{x}$ là điểm cực biên của P.

"(iv) $\Rightarrow$ (i)": Đặt $I := eq(\{\overline{x}\})$. Theo (iv) ta có $A_I x = b_I$ phải có nghiệm duy nhất lá $\overline{x}$. Do đó, $\{\overline{x}\} = \{x : A_I x = b_I\} = \{x \in P : A_I x = b_I\}$. Theo định lý 1.2.5 ta có $\{\overline{x}\}$ là 0-diện của P. □

Hệ quả 1.3.3. *Tập lồi đa diện khác rỗng* $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ *có ít nhất một điểm cực biên khi và chỉ khi* $rank\, A = n$.

Chứng minh

Theo hệ quả 1.2.17 diện khác rỗng nhỏ nhất của P có số chiều là 0 khi và chỉ khi $rank\, A = n$. □

Định nghĩa 1.3.4. Cho P là tập lồi đa diện. Khi đó, nón lùi xa $char.cone(P)$ được định nghĩa là: $char.cone(P) := \{r : x + r \in P \ , \forall x \in P\}$.

Mỗi $r \in char.cone(P)$ được gọi là tia của P. Tia r của P được gọi là tia cực biên nếu không tồn tại tia r^1, r^2 của P sao cho $r^1 \neq \theta r^2 \ , \forall \theta \in \mathbb{R}_+$ $r = \lambda r^1 + (1-\lambda) r^2 \ \ , \lambda \in [0,1]$.

Nhận xét: ta thấy rằng nếu $P \neq \emptyset$ thì $0 \in char.cone(P)$, và nếu $P = \emptyset$ thì $char.cone(P) = \emptyset$. Vậy ta có $char.cone(P) = \emptyset$ khi và chỉ khi $P = \emptyset$.

Bổ đề 1.3.5. *Cho $P = P(A,b)$ là tập lồi đa diện khác rỗng. Khi đó,*

$$char.cone(P) = \{x : Ax \leq 0\}.$$

Chứng minh

Nếu $Ay \leq 0$ thì $\forall x \in P$, ta có $A(x+y) = Ax + Ay \leq Ax \leq b$. Do đó, $x + y \in P$. Vậy $y \in char.cone(P)$.

Đảo lại, với $y \in char.cone(P)$, ta có $A_i y \leq 0$ nếu tồn tại $x \in P$ sao cho $A_i x = b_i$. Đặt $J = \{j : A_j x < b_j \ , \forall x \in P\}$. Ta cần chỉ ra rằng $A_J y \leq 0_J$. Thật vậy, giả sử $A_j y > 0$, $j \in J$, lấy một *điểm trong tương đối* $\overline{x} \in P$ và ta xét $z = \overline{x} + \lambda y \ , \lambda \geq 0$. Khi đó, chọn $\lambda > 0$ một cách hợp lý ta có thể tìm được $j' \in P$ sao cho $A_{j'} z = b_{j'}$, $A_J z \leq b_J$ và $A_I z \leq b_I$. Điều này mâu thuẫn với $j' \in J$. □

Nhận xét: Ta thấy rằng nón lùi xa của P cũng là một tập lồi đa diện và nó có một điểm cực biên đó là vectơ 0. Thậy vậy, giả sử $r \neq 0$ là điểm cực biên của $char.cone(P)$. Khi đó, $A.r \leq 0$ và từ $r \neq 0$ ta có $r \neq \frac{1}{2} r \in char.cone(P)$ và $r \neq \frac{3}{2} r \in char.cone(P)$. Nhưng $r = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} r) + \frac{1}{2}(\frac{3}{2} r)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết r là điểm cực biên của $char.cone(P)$. Do đó, cùng với hệ quả 1.3.3 ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.3.6: *Cho tập lồi đa diện $P = P(A,b) \neq \emptyset$. Vectơ không là điểm cực biên của $char.cone(P)$ khi và chỉ khi $rank\, A = n$.*

Định lý 1.3.7: *Cho $P = P(A,b) \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi đa diện khác rỗng. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) r là tia cực biên của P.

(ii) $\{\theta r : \theta \in \mathbb{R}_+\}$ là 1-diện của $char.cone(P) = \{x : Ax \leq 0\}$.

(iii) $r \in char.cone(P) \setminus \{0\}$ và với $I := \{i : A_i r = 0\}$ ta có $rank\, A_I = n - 1$.

Chứng minh

Đặt $I := \{i : A_i r = 0\}$.

"(i)⇒(ii)": Gọi F là diện nhỏ nhất của $char.cone(P)$ chứa tập $\{\theta r : \theta \in \mathbb{R}_+\}$.

Theo mệnh đề 1.2.7 ta có

$F = \{x \in char.cone(P) : A_I x = 0_I\}$ và $eq(F) = I$. Nếu $\dim F > 1$, thì theo định lý về số chiều 1.2.15 ta có $rank\, A_I < n-1$. Do đó, Tập nghiệm của hệ $A_I x = 0_I$ chứa vectơ r^1 độc lập tuyến tính với r. Với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta có $r \pm \varepsilon r^1 \in char.cone(P)$, vì $A_I r = 0, A_I r^1 = 0$ và $A_{M\setminus I} r < 0$. Nhưng ta có $r = \frac{1}{2}(r + \varepsilon r^1) + \frac{1}{2}(r - \varepsilon r^1)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết r là tia cực biên.

Do đó, $\dim F = 1$. Vì $r \neq 0$, tập không bị chặn $\{\theta r : \theta \in \mathbb{R}_+\}$ chứa trong F cũng có số chiều bằng 1. Vậy $F = \{\theta r : \theta \in \mathbb{R}_+\}$ là 1-diện của $char.cone(P)$.

"(ii)⇒(iii)": Áp dụng định lý số chiều 1.2.15 cho $char.cone(P)$ ta suy ra $rank\, A_I = n-1$. Do $\{\theta r : \theta \in \mathbb{R}_+\}$ có số chiều là 1 nên $r \neq 0$.

"(iii)⇒(i)": Theo kết quả của đại số tuyến tính ta có tập nghiệm của hệ $A_I x = 0_I$ có số chiều bằng 1. Do $A_I r = 0$ và $r \neq 0$ nên với y thỏa $A_I y = 0$ ta có $y = \theta r \ ,\theta \in \mathbb{R}$.

Giả sử $r = \lambda r^1 + (1-\lambda) r^2$ với $r^1, r^2 \in char.cone(P)$. Khi đó,

$$0_I = A_I r = \lambda \underbrace{A_I r^1}_{\leq 0_I} + (1-\lambda) \underbrace{A_I r^2}_{\leq 0_I} \leq 0_I$$

Suy ra $A_I r^j = 0 \ , j = 1,2$. Do đó $r^1 = \theta r^2$. Vậy r là tia cực biên.□

Định lý 1.3.8. *Cho $P = P(A,b)$ là một tập lồi đa diện khác rỗng có ít nhất một điểm cực biên. Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính $\min\{< c, x >: x \in P\}$ có hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên P thì tồn tại một tia cực biên r của P sao cho $< c, r > \ < 0$.*

Chứng minh

Xét bài toán $\max\{- < c, x >: x \in P\}$.

Theo định lý đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính thì tập hợp $\{y : A^T y = -c, y \geq 0\}$ phải là tập rỗng. Theo bổ đề Farkas, tồn tại r sao cho $Ar \geq 0$ và $-< c, r > < 0$.

Đặt $r' := -r$ suy ra $Ar' \leq 0$ và $< c, r' > < 0$

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\{-< c, x >: Ax \leq 0, -< c, x > \leq 1\} = \max\{-< c, x >: x \in P'\} \qquad (1.15).$$

Vì $rank\, A = n$ nên P' cũng là tập lồi đa diện có ít nhất một điểm cực biên. Thêm nữa là $P' \neq \varnothing$ vì $\dfrac{r'}{-< c, r' >} \in P'$. Do ràng buộc $-< c, x > \leq 1$ suy ra (1.15) có nghiệm tối ưu. Dễ dàng suy ra được giá trị tối ưu của (1.15) là 1 đạt được tại $x = \dfrac{r'}{-< c, r' >}$.

Do nghiệm tối ưu của bài toán (1.15) đạt được tại điểm cực biên của $P' \subseteq char.cone(P)$ nên $r^* := \dfrac{r'}{-< c, r' >} \in char.cone(P)$.

Suy ra $$< c, r^* > = -1 \qquad (1.16).$$

Đặt $I = \{i : A_i r^* = 0\}$. Theo định lý số chiều 1.2.15 ta có $rank\begin{pmatrix} A_I \\ c \end{pmatrix} = n$ (vì theo định lý 1.3.2 $\{r^*\}$ là 0-diện của tập lồi đa diện P').

Nếu $rank\, A_I = n-1$, thì theo định lý 1.3.7 ta có r^* là tia cực biên của P. Nếu $rank\, A_I = n$, thì theo định lý 1.3.2 ta có r^* là điểm cực biên của $char.cone(P)$, mâu thuẫn với mệnh đề 1.3.6. □

Định lý 1.3.9. *Cho $P = P(A, b)$ là tập lồi đa diện khác rỗng và $rank\, A = n$ (tức là P có ít nhất một điểm cực biên). Khi đó,*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k \in K} \lambda_k x^k + \sum_{j \in J} \mu_j r^j, \sum_{k \in K} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, \mu_j \geq 0\} \qquad (1.17)$$

trong đó, $x^k, k \in K$ là các điểm cực biên của P và $r^j, j \in J$ là các tia cực biên của P.

Chứng minh

Đặt Q là tập hợp bên vế phải của (1.17). Vì $x^k \in P$ với $k \in K$ và P là tập lồi, nên ta có bao lồi $\sum_{k\in K}\lambda_k x^k$ cũng thuộc P. Hơn nữa, do r^j là tia của P nên ta có $x+\sum_{j\in J}\mu_j r^j \in P$ với $\mu_j \geq 0$. Suy ra $Q \subseteq P$.

Giả sử $Q \neq P$. Khi đó, tồn tại $v \in P \setminus Q$, tức là không tồn tại nghiệm λ, μ của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sum_{k\in K}\lambda_k x^k + \sum_{j\in J}\mu_j r^j = v & (1.18a) \\ -\sum_{k\in K}\lambda_k = -1 & (1.18b) \\ \lambda, \mu \geq 0 & (1.18c) \end{cases}$$

Ta có thể viết tập nghiệm của hệ (1.18) dưới dạng $\left\{x : \overline{A}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \overline{b}, \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \geq 0\right\}$,

trong đó $\overline{A} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & ... & r^1 & r^2 & ... \\ -1 & -1 & ... & 0 & 0 & ... \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} v \\ -1 \end{pmatrix}$.

Theo bổ đề Farkas, tồn tại $(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sao cho $\overline{A}^T\begin{pmatrix}y\\ t\end{pmatrix} \leq 0$ và $\overline{b}^T\begin{pmatrix}y\\ t\end{pmatrix} > 0$.

Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} < y, x^k > -t \leq 0 \quad , \forall k \in K & (1.19a) \\ < y, r^j > \quad \leq 0 \quad , \forall j \in J & (1.19b) \\ < y, v > -t \ > 0 & (1.19c) \end{cases}.$$

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\{< y, x >: x \in P\} \qquad (1.20).$$

Do $rank\, A = n$ nên P là tập lồi đa diện có ít nhất một điểm cực biên.

Khi đó, nếu (1.20) có nghiệm tối ưu, thì tồn tại nghiệm tối ưu của (1.20) cũng là điểm cực biên của P. Nhưng $< y, x^k > \leq t$ và $< y, v > > t$ với $v \in P \setminus Q$, mâu thuẫn.

Nếu (1.20) không bị chặn, thì theo định lý 1.3.8, tồn tại tia cực biên r^j sao cho $< y, r^j > > 0$, mâu thuẫn với (1.19b). □

Nhận xét: Ta có thể biểu diễn một tập lồi đa diện theo các điểm cực biên và tia cực biên của nó.

Nếu tập lồi đa diện P có ít nhất một điểm cực biên là tập lồi đa diện hữu tỉ. Theo định lý 1.3.2 mỗi điểm cực biên của P là 0-diện của P. Theo định lý Hoffmann – Kruskal, mỗi điểm cực biên $\{\overline{x}\}$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình $A_I x = b_I$. Vì các số hạng trong ma trận A và các thành phần của vectơ b đều là số hữu tỉ nên mỗi điểm cực biên cũng có thành phần là hữu tỉ (vì áp dụng phép biến đổi Gaussian để giải hệ phương trình $A_I x = b_I$ cho ta nghiệm hữu tỉ). Tương tự, theo định lý 1.3.7 một tia cực biên được xác định bởi hệ phương trình $A_I r = 0$, trong đó $rank\, A = n - 1$. Do đó, r cũng có thành phần là hữu tỉ. Do đó, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.3.10. *Điểm cực biên và tia cực biên của tập lồi đa diện hữu tỉ là những vectơ có các thành phần là các số hữu tỉ.*

Chương 2

Thuật toán nhánh – cận giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận

2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận (Mixed Integer Linear Programming).

Định nghĩa 2.1.1. Một bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên được viết dưới dạng:

$$(MIP) \qquad Z(X) = \min_{(x,y)}\{< c, x > + < d, y >: (x, y) \in X\}$$

với

$$c \in \mathbb{R}^n, \quad d \in \mathbb{R}^p,$$

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{Z}_+^p : Ax + By \le b\}$$

trong đó,

A là ma trận cấp $(m \times n)$.

B là ma trận cấp $(m \times p)$.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$.

$\mathbb{Z}_+ = \{y \in \mathbb{Z} : y \ge 0\}$.

$b \in \mathbb{R}^m$.

Nhận xét: Trong bài toán trên ta thấy có biến lấy giá trị là số thực tùy ý, có biến lấy giá trị trong tập số nguyên. Đôi khi người ta còn gọi bài toán (MIP) là bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận. Một trường hợp đặc biệt là: $c = 0$, $A = 0$ nghĩa là bài toán có dạng:

$$Z(X) = \min\{< d, y >: x \in X\}$$

với

$$X = \{y \in \mathbb{Z}_+^p : By \le b\}.$$

Ta gọi bài toán Quy hoạch nguyên trong trường hợp này là Quy hoạch nguyên toàn phần.

Định nghĩa 2.1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận được định nghĩa như định nghĩa 2.1.1 nhưng trong đó y chỉ nhận hai giá trị $0;1$ được gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên nhị phân bộ phận (MBP).

Điều này có nghĩa là tập nghiệm chấp nhận được của MBP được định nghĩa:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^n \times \{0,1\}^p : Ax + By \le b\}.$$

Định nghĩa 2.1.3. Bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng (LR) của (MIP) $\quad Z(X) = \min\limits_{(x,y)}\{<c,x> + <d,y>: (x,y) \in X\}$ là bài toán quy hoạch tuyến tính được định nghĩa:

$$(LR) \qquad Z(P_X) = \min_{(x,y)}\{<c,x> + <d,y>: (x,y) \in P_X\}$$

trong đó, $P_X = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : Ax + By \le b\}$.

Rõ ràng, $X = P_X \cap (\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^p)$ (tức là $P_X \supseteq X$)

Do đó, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1.4. *Cho bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận MIP với hàm mục tiêu* $\min$. *Khi đó, Bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng xác định cho ta cận dưới của giá trị tối ưu (* $Z(P_X) \le Z(X)$ *).*

Cận trên của giá trị mục tiêu tối ưu là giá trị mục tiêu của một nghiệm chấp nhận được . Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1.5. *Bài toán MIP với hàm mục tiêu min*

$$(MIP) \qquad Z(X) = \min_{(x,y)}\{<c,x> + <d,y>: (x,y) \in X\}.$$

Khi đó, $Z(X) \le \overline{Z}$ *trong đó* $\overline{Z}$ *là giá trị mục tiêu của một nghiệm chấp nhận được.*

Những cận trên, cận dưới này góp phần quan trọng trong việc giải bài toán MIP bằng phương pháp nhánh cận. Điều này sẽ được thấy rõ ở mục 2.2.

Để minh họa cho bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận ta xét ví dụ sau:

$$Z(X) = \min_{y}\{-y_1 - 2y_2 : y = (y_1, y_2) \in X\} \qquad (2.1)$$

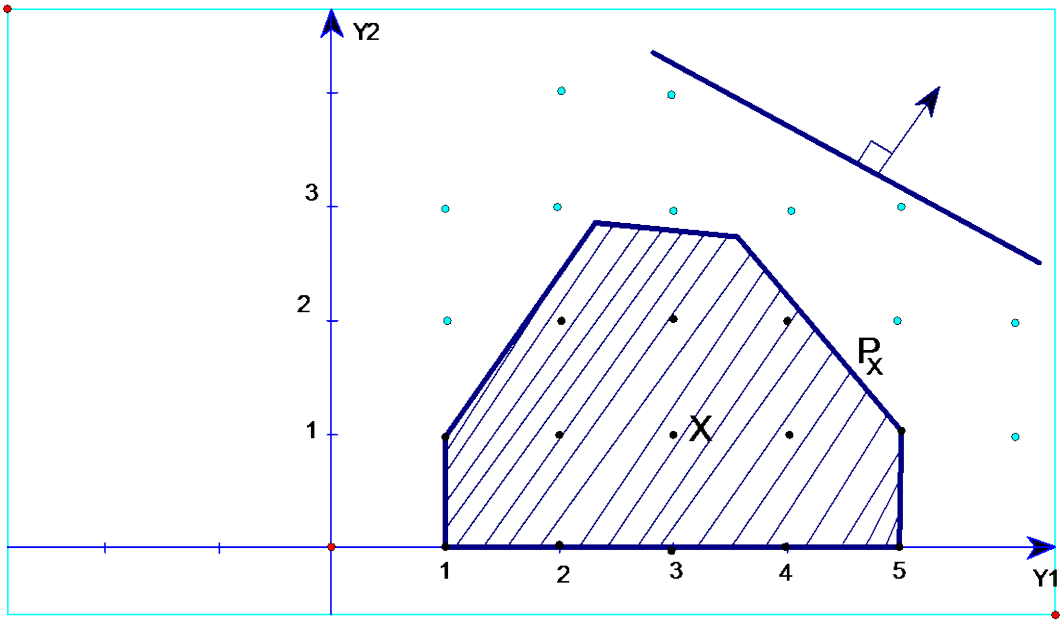
trong đó,

$$X = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : By \geq b\}$$

với

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & -0.8 \\ 1 & -0.8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \text{ và } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5.8 \\ 0.2 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

Theo định nghĩa 1.1, ta có $n = A = c = 0,\ m = 5,\ p = 2, d = (-1, -2)$.



Hình 1. Miền nghiệm chấp nhận X được của bài toán (2.1) và miền nghiệm chấp nhận được P_X của bài toán nới lỏng của nó.

⅄ Bài toán thực tế dẫn đến Quy hoạch nguyên bộ phận:

Vấn đề thực tiễn dẫn đến quy hoạch tuyến tính nguyên:

Bài toán (Bài toán xếp hàng lên tàu):

Một tàu chở hàng có trọng tải T và thể tích K, tàu chở n loại hàng, hàng loai j có số lượng s_j. Mỗi đơn vị hàng loại j có trọng lượng là a_j, thể tích b_j và giá trị sử dụng là c_j.

Bài toán đặt ra là cần xác định x_j (j=1,…,n) là số lượng hàng loại j cần xếp lên tàu sao cho tổng giá trị hàng hóa trên tàu là lớn nhất.

Dạng toán học của bài toán:

$$\sum_{j=1}^{n} < c_j, x_j > \to \max,$$

với hệ ràng buộc là:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le T \\ \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \le K \\ x_j \in \{0,1,2,...,s_j\},\ j = 1,2,...,n \end{cases}$$

2.2. Thuật toán nhánh – cận giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận

2.2.1. Cơ sở lý luận của thuật toán

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận

$$(MIP) \qquad Z(X) = \min_{(x,y)}\{< c, x > + < d, y >: (x,y) \in X\}$$

trong đó

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{Z}_+^p : Ax + By \le b\}$$

với

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}}\ , a_{ij} \in \mathbb{Z}\ , \forall i, \forall j.$$

$$B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,p}}\ , b_{ij} \in \mathbb{Z}\ , \forall i, \forall j.$$

$$b = (b_1,...,b_m)\quad , b_i \in \mathbb{Z}\ , i = 1,...,m.$$

Ta có bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng tương ứng là

$$(LR) \qquad Z(P_X) = \min_{(x,y)}\{<c,x> + <d,y>: (x,y) \in P_X\}$$

trong đó

$$P_X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^p_+ : Ax + By \le b\}.$$

Ta nhắc lại mệnh đề cơ bản về cận dưới và cận trên là:

$$Z(P_X) \le Z(X) \le \overline{Z}$$

trong đó $\overline{Z}$ là giá trị mục tiêu tại phương án chấp nhận được đã biết.

Địnhl lý 2.2.1. *Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng (LR) không có nghiệm thì bài toán (MIP) hoặc là có hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên tập các phương án chấp nhận được hoặc là không có phương án chấp nhận được.*

Chứng minh

TH1: Nếu $P_X = \varnothing$ thì $X = P_X \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^p = \varnothing$. Suy ra bài toán (MIP) không có phương án chấp nhận được.

TH2: Nếu $P_X \ne \varnothing$

Do bài toán nới lỏng (LR) có hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên tập phương án chấp nhận được P_X nên theo định lý 1.3.8 tồn tại tia cực biên (r_x, r_y) của P_X sao cho $<c,r_x> + <d,r_y> \ < 0$. Do P_X là tập lồi đa diện hữu tỉ nên không mất tính tổng quát ta giả sử (r_x, r_y) có thành phần đều là số nguyên.

Ta xét các trường hợp sau:

• Nếu $X = P_X \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^p = \varnothing$ thì bài toán (MIP) không có phương án chấp nhận được.

• Nếu $X = P_X \cap \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^p \ne \varnothing$. Ta có (r_x, r_y) là tia cực biên của P_X. Khi đó, với mỗi $(x_0, y_0) \in X$ ta có $(x_0, y_0) + \mu(r_x, r_y) \in P_X \ ,\forall \mu \ge 0$, suy ra $(x_0, y_0) + \mu(r_x, r_y) \in X \ ,\forall \mu \in \mathbb{N}$. Và ta có

$$\begin{aligned} &<c, x_0 + \mu r_x> + <d, y_0 + \mu r_y> = \\ &\qquad = (<c,x_0> + <d,y_0>) + \mu(\underbrace{<c,r_x> + <d,r_y>}_{<0}) \\ &\qquad < \ <c,x_0> + <d,y_0>. \end{aligned}$$

Do đó, bài toán (MIP) có hàm mục tiêu không bị chặn dưới. □

Nhận xét: Từ định lý 2.2.1 ta chỉ cần giả thiết bài toán LR là có hàm mục tiêu là bị chặn dưới trên tập phương án chấp nhận được P_X (tức là $Z(P_X) > -\infty$). Ngược lại, nếu bài toán LR không có nghiệm thì bài toán MIP có hàm mục tiêu không bị chặn trên tập phương án hoặc không có phương án chấp nhận được. Để phân biệt hai trường hợp này , ta cho các biến những biên đủ lớn để đạt được bài toán MIP và chạy thuật toán nhánh – cận trên bài toán cải biên này. Nếu nó có nghiệm tối ưu thì bài toán ban đầu có hàm mục tiêu không bị chặn dưới, ngược lại là không có phương án chấp nhận được.

Phương pháp nhánh – cận được trình bày từ (i) đến (v) như sau:

(i) Cận dưới lúc đầu của $Z(X)$ là giá trị tối ưu $Z(P_X)$ của bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng LR.

Đặt (x^*, y^*) là nghiệm tối ưu của LR.

- Nhận xét: Giải bài toán MIP có thể xem như tìm nghiệm tốt nhất (x, y) trên P_X với $y \in \mathbb{Z}^p$.

✶ **Quy tắc:** Ta giải bài toán MIP bằng cách giải một dãy các bài toán quy hoạch tuyến tính.

(ii) Nếu $y^* \in \mathbb{Z}^p$ thì $(x^*, y^*) \in X$ là nghiệm chấp nhận được của MIP và nó cũng là cận dưới của $Z(X)$. Do đó (x^*, y^*) là một nghiệm tối ưu của bài toán MIP.

Vì $< c, x^* > + < d, y^* > = Z(P_X) \leq Z(X) \leq \overline{Z} = < c, x^* > + < d, y^* >$.

(iii) Ngược lại, $y^* \notin \mathbb{Z}^p$ và (x^*, y^*) không là nghiệm chấp nhận được của MIP. Ta cố gắng loại bỏ nghiệm này ra khỏi P_X bằng cách thêm vào những ràng buộc tuyến tính. Ta được các bài toán quy hoạch tuyến tính mới.

Đặt y_j với $j \in \{1, ..., p\}$ là biến ứng với thành phần không nguyên y_j^* của nghiệm (x^*, y^*) của LR.

- **Nhận xét:** $(x, y) \in X$ tùy ý, ta có $y_j \le \left[y_j^*\right]$ hoặc $y_j \ge \left[y_j^*\right] + 1$ trong đó $\left[y_j^*\right]$ là phần nguyên của y_j^*.

✶ **Bước phân nhánh:** Để loại bỏ nghiệm (x^*, y^*) cùng với những nghiệm thỏa $\left[y_j^*\right] < y_j < \left[y_j^*\right] + 1$, ta thay thế tập P_X bởi hai tập rời nhau P_X^0 và P_X^1 trong đó

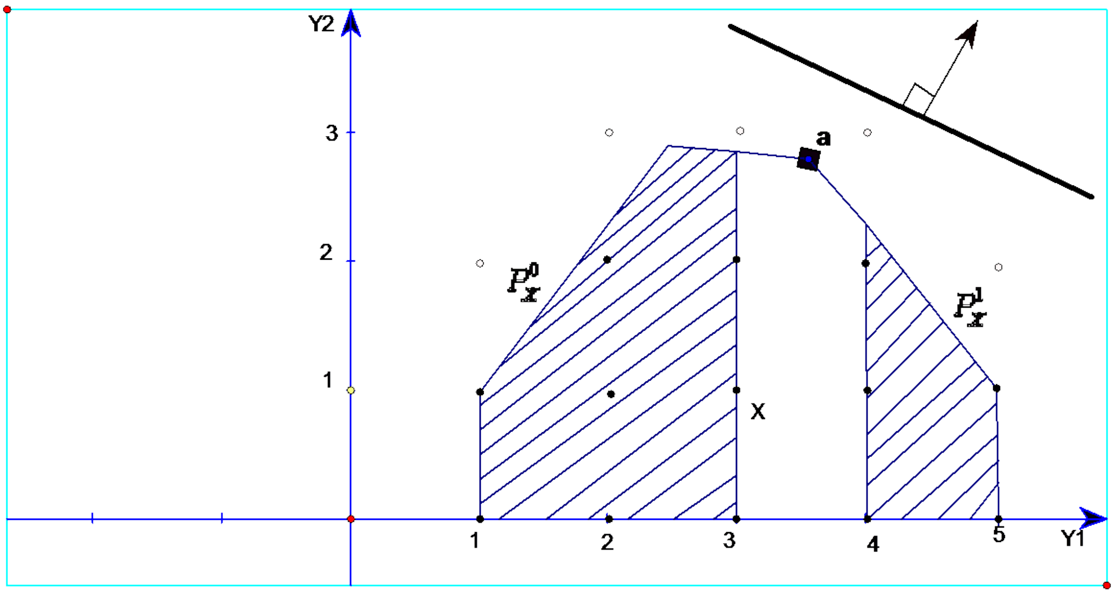
$$P_X^0 = P_X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : y_j \le \left[y_j^*\right]\}$$

$$P_X^1 = P_X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : y_j \ge \left[y_j^*\right] + 1\}$$

- **Nhận xét:** Bây giờ ta có thể thay việc tìm nghiệm tốt nhất trên P_X bằng việc tìm nghiệm tốt nhất trên $P_X^0 \cup P_X^1$. Khó khăn ở chỗ là tăng số lượng bài toán lên từ 1 bài toán thành 2 bài toán quy hoạch tuyến tính lần lượt được xác định trên P_X^0 và P_X^1.

Ví dụ: Theo bài toán (2.1) trong ví dụ ở trên, ta có $a = \left(\frac{32}{9}, \frac{101}{36}\right)$ là nghiệm tối ưu (x^*, y^*) của bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng (LR), và hai miền phân hoạch P_X^0 và P_X^1 được thể hiện trong hình vẽ sau:

(iv) Bây giờ ta tìm nghiệm nguyên tốt nhất nằm trong một trong những tập



Hình 2. Miền phân hoạch của bài toán quy hoạch (2.1) trong thuật toán nhánh – cận.

lồi đa diện $L = \{P_X^0, P_X^1\}$ bằng cách tương tự như trên P_X .

✶ **Bước lặp:** Ta tìm được danh sách L các tập lồi đa diện và giá trị mục tiêu $\overline{Z}$ của phương án tốt nhất tìm được. $\overline{Z}$ được gọi là *giá trị kỉ lục* và phương án tốt nhất tìm được gọi là một *kỉ lục*. Nếu không có phương án chấp nhận được nào được biết thì $\overline{Z} := +\infty$.

- Chọn và giải nghiệm: Ta lấy một tập lồi đa diện V bất kỳ từ danh sách L và giải bài toán quy hoạch tuyến tính tương ứng tìm được nghiệm tối ưu (x^V, y^V) và giá trị tối ưu $Z(V)$.

- Cắt giảm: Một số khả năng có thể xảy ra sau:

a) Nếu $Z(V) \geq \overline{Z}$ thì nghiệm nguyên tốt nhất không thể nhỏ hơn $\overline{Z}$, vì $Z(V)$ là cận dưới của tập giá trị mục tiêu của những nghiệm nguyên trong V . Do đó ta không cần quan tâm đến những nghiệm nguyên trong V nữa và loại V ra khỏi danh sách L . Đây gọi là *cắt giảm bởi cận* .

b) $V = \varnothing$, ta có $Z(V) = +\infty \geq \overline{Z}$ và ta loại V ra khỏi danh sách L . Đây gọi là *cắt giảm bởi sự không chấp nhận được.*

c) Nếu $Z(V) < \overline{Z}$ và $y^V \in \mathbb{Z}^p$, thì (x^V, y^V) là nghiệm nguyên tốt nhất trong V . Ta lưu lại giá trị kỉ lục $\overline{Z} = Z(V)$ và loại V ra khỏi danh sách L . Đây gọi là *cắt giảm bởi sự nguyên hóa*.

d) Nếu $Z(V) < \overline{Z}$ và $y^V \notin \mathbb{Z}^p$ thì giá trị mục tiêu của nghiệm nguyên tốt nhất trong V vẫn có thể tốt hơn $\overline{Z}$. Ta loại V ra khỏi danh sách L và thêm vào V hai tập V^0 và V^1 đạt được bằng cách phân nhánh được miêu tả ở trên. Đây gọi là *sự phân nhánh.*

(v) Kết thúc: Thuật toán kết thúc khi danh sách $L = \varnothing$. Điều này được đảm bảo xảy ra sau hữu hạn bước, nếu những biến nguyên y là bị chặn. Điều này được thể hiện rõ qua định lý sau.

Định lí 2.2.2. *Nếu mọi điểm của tập phương án chấp nhận được* P_X *của bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng có thành phần biến nguyên* y *bị chặn thì thuật toán sẽ kết thúc sau một số hữu hạn các bước.*

Chứng minh. Giả sử thuật toán có vô hạn bước . Vậy trong thuật toán sẽ tồn tại dãy vô hạn các tập $\{P_X^r\}_{r\ge 1}$ bị tách sao cho P_X^{r+1} nhận được từ P_X^r sau một số bước lặp nào đó.

Vì một điểm của tập phương án chấp nhận được P_X chỉ có hữu hạn thành phần biến nguyên nên không giảm tính tổng quát ta giả sử P_X^r bị chia tách do thành phần thứ nhất không nguyên với mọi $r \ge 1$.

Đặt $(x,y)^{P_X^r} = (x_1^{P_X^r},...,x_n^{P_X^r}, y_1^{P_X^r},...,y_p^{P_X^r})$ là phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng trên P_X^r. Do các điểm của P_X có thành phần nguyên y bị chặn nên tồn tại $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ sao cho $y_1 \in A_1 = [a_1, b_1]$ với mọi $(x_1,...,x_n, y_1,...,y_p) \in P_X^1$. Giả sử $y_1 \in A_r$ với mọi $(x_1,...,x_n, y_1,...,y_p) \in P_X^r$. Do P_X^{r+1} nhận được từ P_X^r sau một số bước phân nhánh nào đó nên $y_1 \le [y_1^{P_X^r}]$ hoặc $y_1 \ge [y_1^{P_X^r}]+1$ với mọi $(x_1,...,x_n, y_1,...,y_p) \in P_X^{r+1}$ và $P_X^{r+1} \subset P_X^r$. Suy ra $y_1 \in A_{r+1} = A_r \setminus ([y_1^{P_X^r}],[y_1^{P_X^r}]+1)$ với mọi $(x_1,...,x_n, y_1,...,y_p) \in P_X^{r+1}$. Như vậy ta đã xây dựng được dãy vô hạn các tập hợp $\{A_r\}_{r\ge 1}$. Do $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ nên với cách xây dựng các tập hợp A_r như vậy ta thấy A_r có các điểm biên đều là các số nguyên. Vậy từ $y_1^{P_X^r} \in A_r$ và $y_1^{P_X^r} \notin \mathbb{Z}$ ta có $([y_1^{P_X^r}],[y_1^{P_X^r}]+1) \subset A_r$.

Vậy, ta có

$\mu(A_{r+1}) = \mu(A_r) - \mu(([y_1^{P_X^r}],[y_1^{P_X^r}]+1)) = \mu(A_r) - 1 \; ,\forall r \ge 1$, trong đó $\mu(A)$ là độ đo Lebesgue của A.

Điều này dẫn đến $\mu(A_r) = \mu(A_1) - r + 1 = b_1 - a_1 + 1 - r \quad ,\forall r \ge 1$

Do đó $\lim\limits_{r\to+\infty} \mu(A_r) = -\infty$ (vô lý vì độ đo Lebesgue là độ đo dương)

Vậy thuật toán nhánh – cận sẽ kết thúc sau hữu hạn bước. □

2.2.2. Thuật toán nhánh – cận

- Bước 0: (bước khởi tạo)

$L = \{P_X\}$

$\overline{Z} := +\infty$

Giả thiết rằng LR là bị chặn ($Z(P_X) > -\infty$).

- Bước 1: (điều kiện kết thúc)

Nếu $L = \varnothing$ ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu $\overline{Z} = +\infty$ thì $X = \varnothing$ (bài toán không chấp nhận được).
- Nếu $\overline{Z} < +\infty$ thì kỉ lục tìm được (tức là $(x^*, y^*) \in X$ với $\overline{Z} = < c, x^* > + < d, y^* >$) là nghiệm tối ưu.

Thuật toán kết thúc.

- Bước 2: $L \neq \varnothing$

Lấy $V \in L$. Giải tìm giá trị tối ưu $Z(V)$ và nghiệm $(x^V, y^V) \in V$.

- Bước 3: (bước cắt giảm)

Nếu $Z(V) \geq \overline{Z}$ thì loại V khỏi danh sách L . Quay lại bước 1.

Nếu $Z(V) < \overline{Z}$ và $y_j^V \in \mathbb{Z}$ $, \forall j = 1, ..., p$ thì một nghiệm chấp nhận được tốt hơn được tìm thấy và lưu lại giá trị kỉ lục $\overline{Z} := Z(V)$. Quay lại bước 1.

- Bước 4: (phân nhánh)

Nếu $Z(V) < \overline{Z}$ và $y_j^V \notin \mathbb{Z}$ $, j \in \{1, ..., p\}$ thì chọn j mà $y_j^V \notin \mathbb{Z}$ (y_j là biến phân nhánh). Thêm vào danh sách các tập lồi đa diện cần xét L hai tập lồi đa diện sau:

$$V^0 = V \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : y_j \leq \left[y_j^V \right]\}$$

$$V^1 = V \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : y_j \geq \left[y_j^V \right] + 1\}$$

Quay lại bước 1.

2.3. Một số kĩ thuật được sử dụng trong thuật toán nhánh- cận

2.3.1. Kĩ thuật Hậu tối ưu **(*Reoptimization*)**

Trong thuật toán nhánh - cận, khi bài toán nới lỏng (LR) bị phân tách thành hai bài toán (LR1) và (LR2) bằng cách thêm vào bài toán (LR) một ràng buộc tuyến tính. Ta tiếp tục giải các bài toán (LR1) và (LR2) bằng thuật toán đơn hình.

Câu hỏi đặt ra là: Ta có thể dựa vào thuật toán đơn hình của bài toán (LR) để giải bài toán (LR1), (LR2) không?

Xét bài toán nới lỏng (LR) dạng $\min\{<c,x>: Ax=b, x\geq 0\}$. Gọi B là tập chỉ số các biến cơ sở, N là tập chỉ số các biến không cơ sở. Khi đó, với nghiệm $x=(x_B,x_N)$ tùy ý của bài toán (LR) ta có:

$$x_B := A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N = x_B^* - A_B^{-1}A_N x_N$$

Đặt $\overline{A}_N := A_B^{-1}A_N$,$\overline{c}_N := c_B A_B^{-1}A_N - c_N$ và $\overline{b} := A_B^{-1}b$

Khi đó, bài toán nới lỏng (LR) trở thành:

$$\begin{cases} \min\{<c_B, x_B^*> - <\overline{c}_N, x_N>\} & (2.6a) \\ x_B + \overline{A}_N x_N = b & (2.6b) \\ x \geq 0 & (2.6c) \end{cases}$$

Và bài toán (LR1) được thành lập bằng cách thêm vào ràng buộc $x_i \leq t \quad , x_i \in B$.

Ta có thể viết lại ràng buộc này dạng đẳng thức sau: $x_i + s = t$ với $s \geq 0$. Theo (2.6b) ta có $x_i = (\overline{b} - \overline{A}_N x_N)_i$,suy ra

$$x_i + s = t \Leftrightarrow (-A_N x_N)_i + s = t - \overline{b}_i$$

Thêm ràng buộc này vào (2.6) ta có bài toán (LR1) là:

$$\begin{cases} \min\{<c_B, x_B^*> - <\overline{c}_N, x_N>\} & (2.7a) \\ x_B + \overline{A}_N x_N = b & (2.7b) \\ (-\overline{A}_N x_N)_i + s = t - \overline{b}_i & (2.7c) \\ x \geq 0,\ s \geq 0 & (2.7d) \end{cases}$$

Ta có thể dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu giải bài toán (2.7) với các biến cơ sở là $x_B \cup \{s\}$.

Để minh họa ta xét bài toán quy hoạch nguyên

$$\begin{cases} \min\{4x_1 - x_2\} \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14 \\ \qquad x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Ta có

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Từ (2.6) ta được

$$\begin{cases} \min\{15 - 3x_4 - 2x_5\} \\ x_1 \qquad + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{9}{2} \\ \quad x_2 \quad + x_4 \qquad = 3 \\ \qquad x_3 - x_4 - \frac{3}{2}x_5 = \frac{13}{2} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Nếu ta thêm vào biến bù s thì ràng buộc mới $x_1 \le 4$ trở thành $x_1 + s = 4$ $, s \ge 0$. Do $x_1 = \frac{9}{2} - x_4 - \frac{1}{2}x_5$ nên ta ràng buộc mới được viết lại là : $-x_4 - \frac{1}{2}x_5 + s = -\frac{1}{2}$

Do đó, ta sẽ có được nghiệm chấp nhận được đối ngẫu của bài toán (LR1):

$$\begin{cases} \min\{15 - 3x_4 - 2x_5\} \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{9}{2} \\ \quad x_2 \qquad + x_4 \qquad\quad = 3 \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 - \frac{3}{2}x_5 = \frac{13}{2} \\ \qquad\qquad\quad - x_4 - \frac{1}{2}x_5 + s = -\frac{1}{2} \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Bây giờ ta có thể dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu để giải tìm nghiệm tối ưu của bài toán (LR1).

2.3.2. Quy tắc chọn bài toán phân nhánh và quy tắc phân nhánh

Khi giải bài toán bằng thuật toán nhánh – cận ta sẽ gặp phải cùng lúc nhiều bài toán cần phân nhánh và có nhiều cách để chọn biến phân nhánh. Ta cần chỉ rõ quy tắc chọn bài toán phân nhánh và quy tắc phân nhánh.

✶ Một số quy tắc chọn bài toán phân nhánh:

- Quy tắc 1: Chọn một tập lồi đa diện tùy ý thuộc L thực hiện phân nhánh cho tới khi tìm được nghiệm nguyên chấp nhận được. Quy tắc này có độ mạo hiểm là chất lượng nghiệm tìm được (tức là giá trị hàm mục tiêu tại nghiệm tìm được).
- Quy tắc 2: Các tập lồi đa diện trong L được phân nhánh song song. Quy tắc này hạn chế được độ mạo hiểm của quy tắc 1 nhưng chậm được nghiệm tối ưu.
- Quy tắc 3: Chọn tập lồi đa diện trong L mà giải bài toán trên tập đó ta có có giá trị tối ưu nhỏ nhất.
- Quy tắc 4: Kết hợp các quy tắc trên.

✶ Quy tắc phân nhánh:

- Quy tắc chọn biến phân nhánh thường dùng là chọn biến có phần thập phân gần với 0.5 nhất.

2.4. Ví Dụ.

Ví dụ: Dùng thuật toán nhánh cận giải bài toán *"xếp hàng lên tàu"* với $n = 6, T = 20,\ K = 100$ với số liệu được cho trong bảng sau:

Loại	1	2	3
Số lượng	12	5	8
Trọng lượng	1	0.5	2
Thể tích	1	2	4
Giá trị	1	2	3

Dạng toán học của bài toán:

$$\max \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

Với hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 \le 20 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 0 \le x_1 \le 12 \\ 0 \le x_2 \le 5 \\ 0 \le x_3 \le 8 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính nới nỏng:

$$\min \quad -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

Với hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 \le 20 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 0 \le x_1 \le 12 \\ 0 \le x_2 \le 5 \\ 0 \le x_3 \le 8 \end{cases}$$

Ta đưa biến phụ x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 ta được bài toán dạng chính tắc sau:

$$\min \quad -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

Với hệ ràng buộc:

$$
\begin{cases}
x_1 + 0.5x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad\qquad + x_5 = 100 \\
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 = 12 \\
\qquad x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x_7 = 5 \\
\qquad\qquad x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x_8 = 8 \\
x_1, \dots, x_8 \geq 0
\end{cases}
$$

Dùng thuật toán đơn hình ta có bảng đơn hình sau:

I	Cơ sở	C_b	A_0	-1	-2	-3	0	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	A_4	0	20	1	0.5	2	1	0	0	0	0
2	A_5	0	100	1	2	4	0	1	0	0	0
3	A_6	0	12	1	0	0	0	0	1	0	0
4	A_7	0	5	0	1	0	0	0	0	1	0
5	A_8	0	8	0	0	1	0	0	0	0	1
6	$Z_j - c_j$		0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	A_4	0	4	1	0.5	0	1	0	0	0	-2
2	A_5	0	68	1	2	0	0	1	0	0	-4
3	A_6	0	12	1	0	0	0	0	1	0	0
4	A_7	0	5	0	1	0	0	0	0	1	0
5	A_3	-3	8	0	0	1	0	0	0	0	1
6	$Z_j - c_j$		1	2	0	0	0	0	0	0	-3
1	A_4	0	3/2	1	0	0	1	0	0	-1/2	-2
2	A_5	0	58	1	0	0	0	1	0	-2	-4
3	A_6	0	12	1	0	0	0	0	1	0	0
4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0

5	A_3	-3	8	0	0	1	0	0	0	0	1
6	$Z_j - c_j$			1	0	0	0	0	0	-2	-3
1	A_1	-1	3/2	1	0	0	1	0	0	-1/2	-2
2	A_5	0	113/2	0	0	0	-1	1	0	-3/2	-2
3	A_6	0	21/2	0	0	0	-1	0	1	1/2	2
4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0
5	A_3	-3	8	0	0	1	0	0	0	0	1
6	$Z_j - c_j$			0	0	0	-1	0	0	-3/2	-1

Ta được nghiệm tối ưu là $x_1 = \frac{3}{2}; \;\; x_2 = 5; \;\; x_3 = 8$ với giá trị mục tiêu tối ưu là $Z_0 = \frac{-71}{2}$.

Do nghiệm tối ưu có thành phần x_1 chưa nguyên nên ta đưa vào bài toán mỗi ràng buộc sau:

$$x_1 \le \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$

$$x_1 \ge \left[\frac{3}{2}\right] + 1 = 2$$

Ta thêm vào mỗi ràng buộc biến phụ x_9 và từ bảng đơn hình cuối cùng ta thấy $x_1 = \frac{3}{2} - x_4 + \frac{1}{2}x_7 + 2x_8$. Do đó hai ràng buộc trở thành:

$$-x_4 + \frac{1}{2}x_7 + 2x_8 + x_9 = -\frac{1}{2}$$

$$x_4 - \frac{1}{2}x_7 - 2x_8 + x_9 = -\frac{1}{2}$$

Ta được hai bài toán (LR1) và (LR2):

$$(LR1)\quad \begin{cases} \min \quad -x_1-2x_2-3x_3 \\ x_1 + x_4 - \frac{1}{2}x_7 - 2x_8 = \frac{3}{2} \\ -x_4 + x_5 - \frac{3}{2}x_7 - 2x_8 = \frac{113}{2} \\ -x_4 + x_6 + \frac{1}{2}x_7 + 2x_8 = \frac{21}{2} \\ x_2 + x_7 = 5 \\ x_3 + x_8 = 8 \\ -x_4 + \frac{1}{2}x_7 + 2x_8 + x_9 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(LR2)\quad \begin{cases} \min \quad -x_1-2x_2-3x_3 \\ x_1 + x_4 - \frac{1}{2}x_7 - 2x_8 = \frac{3}{2} \\ -x_4 + x_5 - \frac{3}{2}x_7 - 2x_8 = \frac{113}{2} \\ -x_4 + x_6 + \frac{1}{2}x_7 + 2x_8 = \frac{21}{2} \\ x_2 + x_7 = 5 \\ x_3 + x_8 = 8 \\ x_4 - \frac{1}{2}x_7 - 2x_8 + x_9 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải bài toán (LR1): Dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu ta được bảng đơn hình sau:

I	Cơ sở	C_b	A_0	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	-1	3/2	1	0	0	1	0	0	-1/2	-2	0
2	A_5	0	113/2	0	0	0	-1	1	0	-3/2	-2	0
3	A_6	0	21/2	0	0	0	-1	0	1	½	2	0

4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0	0
5	A_3	-3	8	0	0	1	0	0	0	0	1	0
6	A_9	0	-1/2	0	0	0	-1	0	0	½	2	1
7	$Z_j - c_j$			0	0	0	-1	0	0	-3/2	-1	0
1	A_1	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	A_5	0	57	0	0	0	0	1	0	-2	-4	-1
3	A_6	0	11	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0	0
5	A_3	-3	8	0	0	1	0	0	0	0	1	0
6	A_4	0	½	0	0	0	1	0	0	-1/2	-2	-1
7	$Z_j - c_j$			0	0	0	0	0	0	-2	-3	-1

Ta được nghiệm tối ưu của bài toán là $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = 8$ với giá trị mục tiêu tối ưu là $Z_0 = -35$.

Do nghiệm tối ưu có các thành phần x_1, x_2, x_3 đều nguyên nên ta lưu lại kỷ lục $\overline{X} = (1;5;8)$ và giá trị kỷ lục $\overline{Z} = -35$.

Giải bài toán (LR2): Dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu ta có bảng đơn hình sau:

I	Cơ sở	C_b	A_0	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	-1	3/2	1	0	0	1	0	0	-1/2	-2	0
2	A_5	0	113/2	0	0	0	-1	1	0	-3/2	-2	0
3	A_6	0	21/2	0	0	0	-1	0	1	½	2	0
4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0	0
5	A_3	-3	8	0	0	1	0	0	0	0	1	0
6	A_9	0	-1/2	0	0	0	1	0	0	-1/2	-2	1
7	$Z_j - c_j$			0	0	0	-1	0	0	-3/2	-1	0

1	A_1	-1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	-1
2	A_5	0	57	0	0	0	-2	1	0	-1	0	-1
3	A_6	0	10	0	0	0	0	0	1	0	0	1
4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0	0
5	A_3	-3	31/4	0	0	1	1/2	0	0	-1/4	0	½
6	A_8	0	¼	0	0	0	-1/2	0	0	¼	1	-1/2
7	$Z_j - c_j$			0	0	0	-3/2	0	0	-5/4	0	-1/2

Ta được nghiệm tối ưu $x_1 = 2;\ x_2 = 5;\ x_3 = \frac{31}{4}$ có thành phần $x_3 = \frac{31}{4}$ không nguyên. Do đó ta thêm vào bài toán (LR2) mỗi ràng buộc sau:

$$x_3 \le \left[\frac{31}{4}\right] = 7$$

$$x_3 \ge \left[\frac{31}{4}\right] + 1 = 8$$

Ta thêm vào mỗi ràng buộc biến phụ x_{10} và từ bảng đơn hình cuối cùng ta thấy $x_3 = \frac{31}{4} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_7 + \frac{1}{2}x_9$. Do đó hai ràng buộc trở thành:

$$-\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_7 + \frac{1}{2}x_9 + x_{10} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_7 - \frac{1}{2}x_9 + x_{10} = -\frac{3}{4}$$

Ta được 2 bài toán (LR3) và (LR4):

$(LR3)$

$$\begin{cases}
\min \quad -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
x_1 - x_9 = 2 \\
-2x_4 + x_5 - x_7 - x_9 = 57 \\
+x_6 + x_9 = 10 \\
x_2 + x_7 = 5 \\
x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_7 + \frac{1}{2}x_9 = \frac{31}{4} \\
-\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_7 + x_8 - \frac{1}{2}x_9 = \frac{1}{4} \\
-\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_7 + \frac{1}{2}x_9 + x_{10} = -\frac{3}{4}
\end{cases}$$

$(LR4)$

$$\begin{cases}
\min \quad -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
x_1 - x_9 = 2 \\
-2x_4 + x_5 - x_7 - x_9 = 57 \\
+x_6 + x_9 = 10 \\
x_2 + x_7 = 5 \\
x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_7 + \frac{1}{2}x_9 = \frac{31}{4} \\
-\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_7 + x_8 - \frac{1}{2}x_9 = \frac{1}{4} \\
\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_7 - \frac{1}{2}x_9 + x_{10} = -\frac{3}{4}
\end{cases}$$

Giải bài toán (LR3)

Dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu ta có bảng đơn hình sau:

I	Cơ sở	C_b	A_0	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
1	A_1	-1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
2	A_5	0	57	0	0	0	-2	1	0	-1	0	-1	0
3	A_6	0	10	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5	A_3	-3	31/4	0	0	1	1/2	0	0	-1/4	0	1/2	0
6	A_8	0	1/4	0	0	0	-1/2	0	0	1/4	1	-1/2	0
7	A_{10}	0	-3/4	0	0	0	-1/2	0	0	1/4	0	1/2	1
8	$Z_j - c_j$			0	0	0	-3/2	0	0	-5/4	0	-1/2	0
1	A_1	-1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
2	A_5	0	60	0	0	0	0	1	0	-2	0	-3	-4
3	A_6	0	10	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5	A_3	-3	7	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
6	A_8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1
7	A_4	0	3/2	0	0	0	1	0	0	-1/2	0	-1	-2
8	$Z_j - c_j$			0	0	0	0	0	0	-2	0	-2	-3

Nghiệm tối ưu của bài toán là $x_1 = 2;$ $x_2 = 5;$ $x_3 = 7$ và giá trị tối ưu là $Z_0 = -33 > \overline{Z}$. Do đó, bài toán bị cắt giảm.

Giải bài toán (LR4): Dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu ta có bảng đơn hình sau:

I	Cơ sở	C_b	A_0	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
1	A_1	-1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
2	A_5	0	57	0	0	0	-2	1	0	-1	0	-1	0
3	A_6	0	10	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5	A_3	-3	31/4	0	0	1	1/2	0	0	-1/4	0	1/2	0
6	A_8	0	1/4	0	0	0	-1/2	0	0	1/4	1	-1/2	0
7	A_{10}	0	-3/4	0	0	0	1/2	0	0	-1/4	0	-1/2	1

8	$Z_j - c_j$			0	0	0	-3/2	0	0	-5/4	0	-1/2	0
1	A_1	-1	7/2	1	0	0	-1	0	0	1/2	0	0	-2
2	A_5	0	117/2	0	0	0	-3	1	0	-1/2	0	0	-2
3	A_6	0	17/2	0	0	0	1	0	1	-1/2	0	0	2
4	A_2	-2	5	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5	A_3	-3	7	0	0	1	1	0	0	-1/2	0	0	1
6	A_8	0	1	0	0	0	-1	0	0	1/2	1	0	-1
7	A_9	0	3/2	0	0	0	-1	0	0	1/2	0	1	-2
8	$Z_j - c_j$			0	0	0	-2	0	0	-1	0	0	-1

Nghiệm tối ưu của bài toán là $x_1 = \frac{7}{2}$; $x_2 = 5$; $x_3 = 7$ và giá trị mục tiêu tối ưu là $Z_0 = -\frac{69}{2} > \overline{Z}$. Do đó, bài toán bị cắt giảm.

Vậy nghiệm tối ưu của bài toán Quy hoạch nguyên đã cho là $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = 8$ với giá trị mục tiêu tối ưu là $Z_0 = -35$.

Chương 3

Giải bài toán Quy hoạch nguyên tuyến tính trên Matlab

3.1. Bài toán Quy hoạch tuyến tính với Matlab

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$< c, x > \rightarrow \min$$

Sao cho

$$\begin{cases} A.x \le b \\ Aeq.x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

MATLAB: Sử dụng chương trình $linprog.m$ để giải bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng $\min$.

Trước tiên, ta xác định các ma trận A, Aeq và các vectơ b, beq, c, lb, ub. Khi đó dạng tổng quát của $linprog.m$ là:

$$[x, fval, exitflag, output, lambda] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x_0, options)$$

INPUT:

c	Vectơ hệ số của hàm mục tiêu
A	Ma trận của ràng buộc bất đẳng thức
b	Vectơ bên phải của ràng buộc bất đẳng thức
Aeq	Ma trận của ràng buộc đẳng thức
beq	Vectơ bên phải của ràng buộc đẳng thức
lb, []	Cận dưới của x, không có cận dưới
ub, []	Cận trên của x, không có cận trên

x_0	Nghiệm xuất phát, nếu không có thì để trống []
options	Dùng hàm optimset , chỉ ra thuật toán nào được sử dụng,….

OUTPUT:

x	Nghiệm tối ưu
fval	Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu
exitflag	Thuật toán có hội tụ hay không, $exitflag > 0$ thì thuật toán hội tụ.
output	Cấu trúc bao gồm: Số bước lập, thuật toán được sử dụng
lambda	Cấu trúc chứa các nhân tử lagrange tương ứng với những ràng buộc

Thiết lập options:

Thông thường thì sử dụng hàm optimset và có dạng như sau:

$$options = optimset('parameterName1', value, 'parameterName2', value, ...)$$

Một số *parameter* thường được sử dụng trong *linprog.m* :

Parameters	**Value**
‘LagreScale’	‘on’, ‘off’
‘Simplex’	‘on’, ‘off’
‘Display’	‘iter’, ‘final’, ‘off’

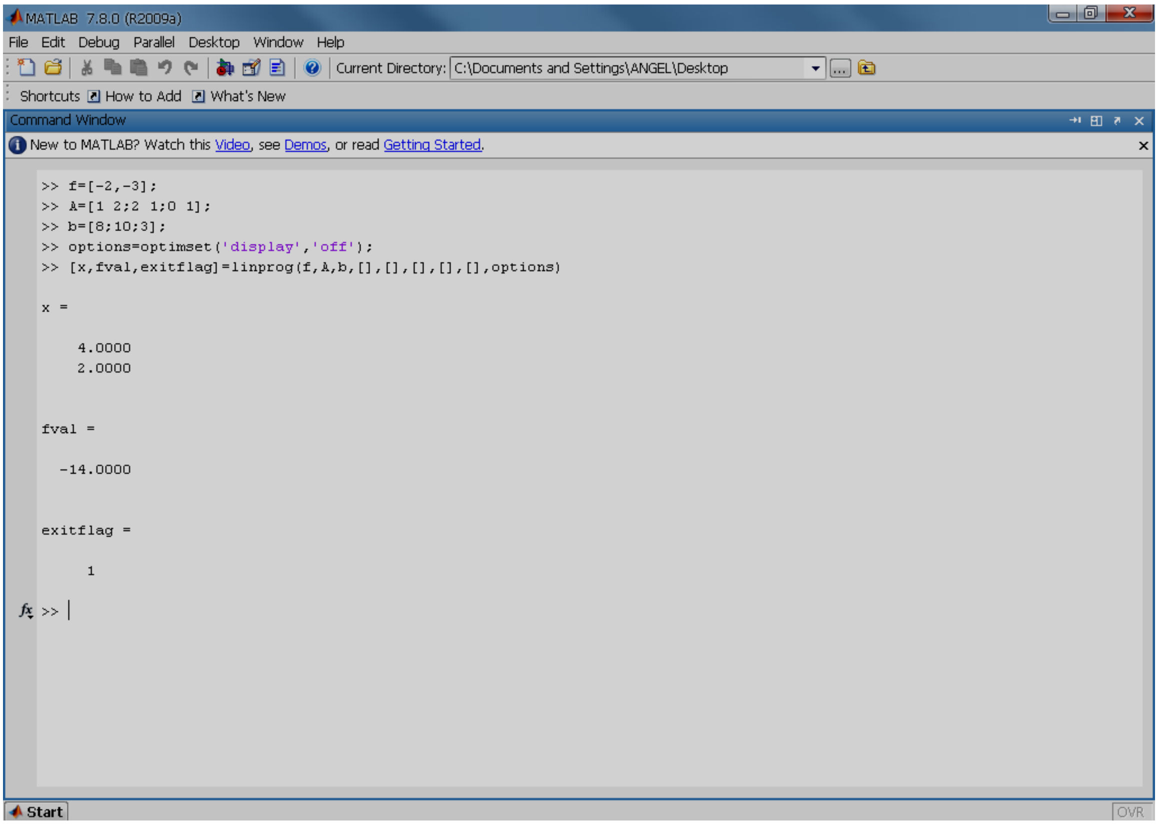
Ví dụ 1 : sử dụng *linprog.m* giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ \qquad\quad x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ta có: $lb = [],\ ub = [],\ Aeq = [],\ beq = []$

Do đó, ta giải bài toán như sau:

$$>> f = [-2, -3]';$$
$$>> A = [1 \;\; 2; 2 \;\; 1; 0 \;\; 1];$$
$$>> b = [8 \; ; 10 \; ; \; 3];$$
$$>> options = optimset('display', 'off');$$
$$>> [x, fval, exitflag, output, lambda] = linprog(f, A, b, [], [], [], [], [], options);$$



Ví dụ 2: Sử dụng *linprog.m* giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 \to \max$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 = 7$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 0.5x_6 + x_6 + 2x_7 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 2x_7 = 7$$
$$x_j \geq 0; \quad j = 1, \ldots, 7$$

Chuyển qua ngôn ngữ Matlab ta có:

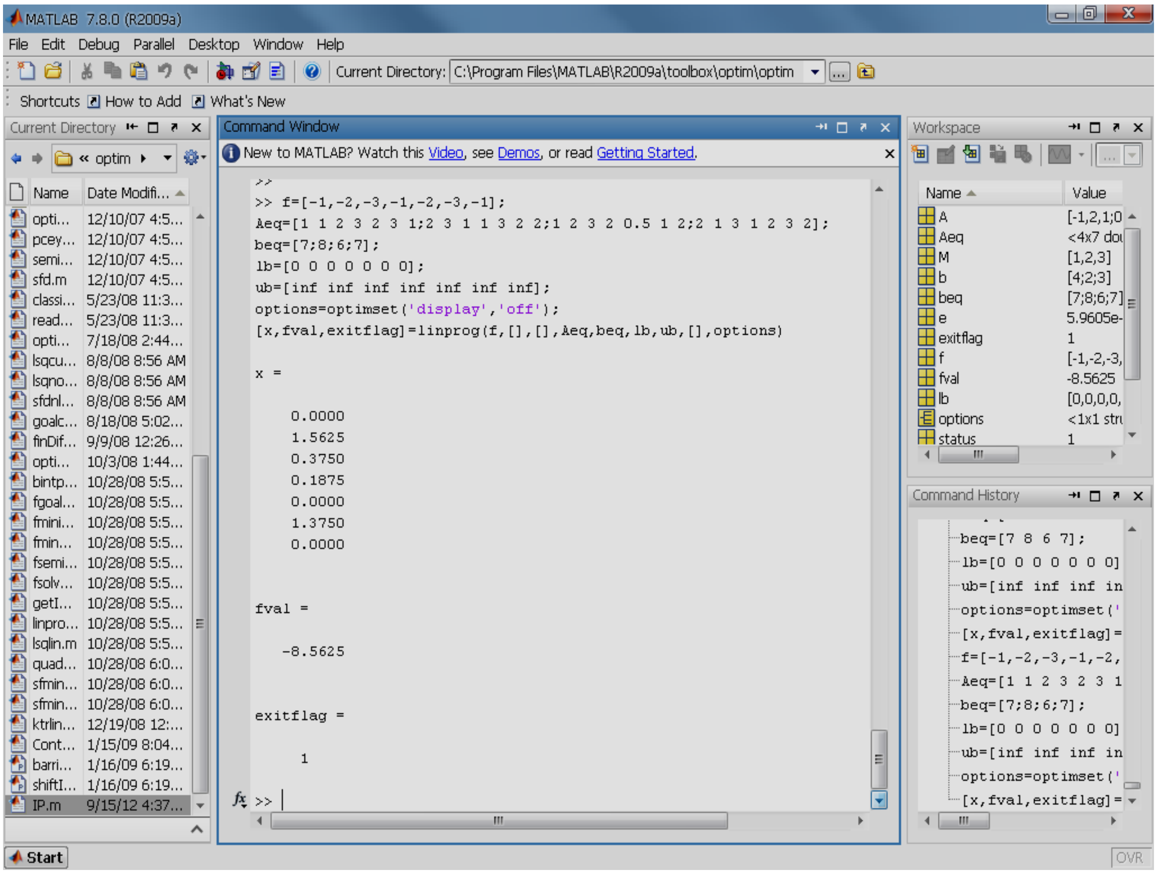
$f = [-1, -2, -3, -1, -2, -3, -1];$

$Aeq = [1\ 1\ 2\ 3\ 2\ 3\ 1; 2\ 3\ 1\ 1\ 3\ 2\ 2; 1\ 2\ 3\ 2\ 0.5\ 1\ 2; 2\ 1\ 3\ 1\ 2\ 3\ 2];$

$beq = [7; 8; 6; 7];$

$lb = [0\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$

$ub = [inf\ \ inf\ \ inf\ \ inf\ \ inf\ \ inf\ \ inf];$



3.2. Lập trình thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận trên Matlab

Thuật toán được áp dụng cùng với thuật toán đơn hình gốc (*linprog.m*) trong Optimization toolbox trong Matlab.

$function[x, val, status] = IP(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, M, e)$
$options = optimset('display', 'off');$
$bound = \inf;$

Khởi tạo kỉ lục và giá trị kỉ lục

$[x0, val0] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, [], options);$
$[x, val, status, b] = rec(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x0, val0, M, e, bound);$

Hàm đệ quy truy xuất cây nhánh cận

$function[xx, val, status, bb] = rec(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, x, v, M, e, bound)$
$options = optimset('display', 'off');$

x là kỉ lục đã biết, v là giá trị kỉ lục tương ứng

Giải bài toán nới lỏng LP sau khi bỏ ràng buộc nguyên

$[x0, val0, status0] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, [], options);$

Nếu LP không có phương án tối ưu hay giá trị mục tiêu lớn hơn giá trị kỉ lục, thì ta trả lại kỉ lục và giá trị kỉ lục đã biết

$if\ status0 <= 0 || val0 > bound$
$xx = x; val = v; status = status0; bb = bound;$
$return$
end

Nếu LP có phương án tối ưu và các thành phần của phương án này ứng với các biến nguyên là nguyên

$ind = find(abs(x0(M) - round(x0(M))) > e);$
$if\ isempty(ind)$
$status = 1;$
$if\ val0 < bound$

Phương án này tốt hơn thì ta thay thế

$x0(M) = round(x0(M));$
$xx = x0;$
$val = val0;$
$bb = val0;$
$else$

,ngược lại thì ta trả lại kỉ lục và giá trị kỉ lục đã biết

$xx = x;$
$val = v;$
$bb = bound;$
end
$return$
end

Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng LP có phương án phương án tối ưu và giá trị tối ưu tương ứng nhỏ hơn giá trị kỉ lục nhưng các thành phần ứng với các biến nguyên là không nguyên. Ta sẽ lọc biến nguyên được hai bài toán LP1, LP2 và giải chúng đệ quy bằng cách gọi hàm tương tự (hàm đệ quy truy xuất cây nhánh cận)

Bài toán LP1 với ràng buộc $xi <= floor(xi), i = ind(1)$

$br\text{var} = M(ind(1));$
$brvalue = x(br\text{var});$
$if\ \ isempty(A)$
$[r\ \ c] = size(Aeq);$
$else$
$[r\ \ c] = size(A);$
end
$\text{A1} = [A; zeros(1, c)];$
$\text{A1}(end, br\text{var}) = 1;$
$b1 = [b;\ floor(brvalue)];$

Bài toán LP2 với ràng buộc $xi >= ceil(xi),\ i = ind(1)$

$A2 = [A; zeros(1, c)];$
$\text{A2}(end, br\text{var}) = -1;$
$b2 = [b; -ceil(brvalue)];$

Giải LP1

$[x1, val1, status1, bound1] = rec(f, \text{A1}, b1, Aeq, beq, lb, ub, x0, val0, M, e, bound);$
$status = status1;$
$if\ \ status1 > 0\ \&\&\ bound1 < bound$

Nếu phương án tốt hơn thì ta thay thế

$xx = x1;$

$val = val1;$

$bound = bound1;$

$bb = bound1;$

$else$

$xx = x0;$

$val = val0;$

$bb = bound;$

end

Giải LP2

$[x2, val2, status2, bound2] = rec(f, \mathrm{A}2, b2, Aeq, beq, lb, ub, x0, val0, M, e, bound);$

$if \;\; status2 > 0 \;\&\& \;\; bound2 < bound$

Nếu phương án tối ưu tốt hơn thì ta thay thế

$status = status2;$

$xx = x2;$

$val = val2;$

$bb = bound2;$

end

3.3. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận trên Matlab

Ví dụ 3.3.1: Dùng Matlab giải bài toán sau:

$$\max Z = 3x_1 + x_2 + 3x_3,$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4,$$
$$4x_2 - 3x_3 \le 2,$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 3,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0, x_1, x_3 \in \mathbb{Z}$$

Chuyển qua ngôn ngữ Matlab, ta có:

$f = [-3, -1, -3];$

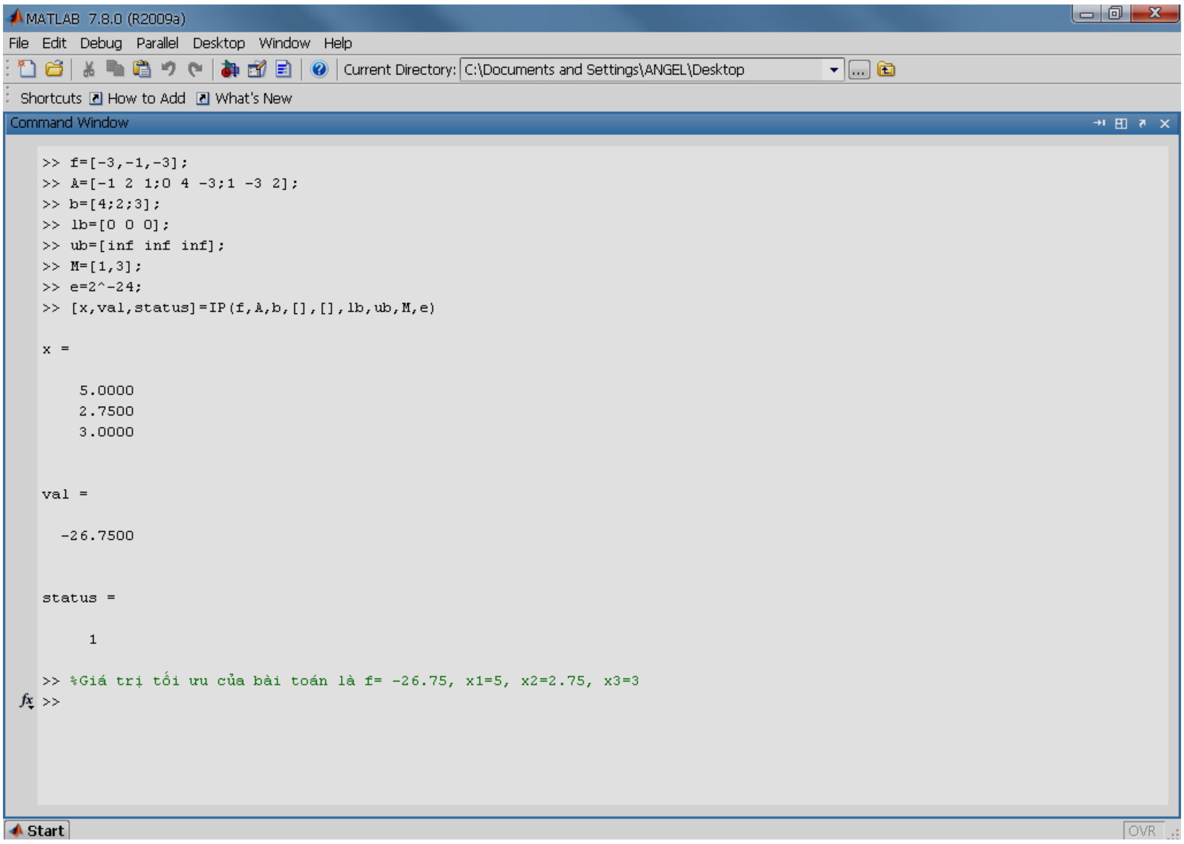
$A = [-1 \;\; 2 \;\; 1; 0 \;\; 4 \;\; -3; 1 \;\; -3 \;\; 2];$

$b = [4 \,;\, 2 \,;\, 3];$

$lb = [0 \;\; 0 \;\; 0];$

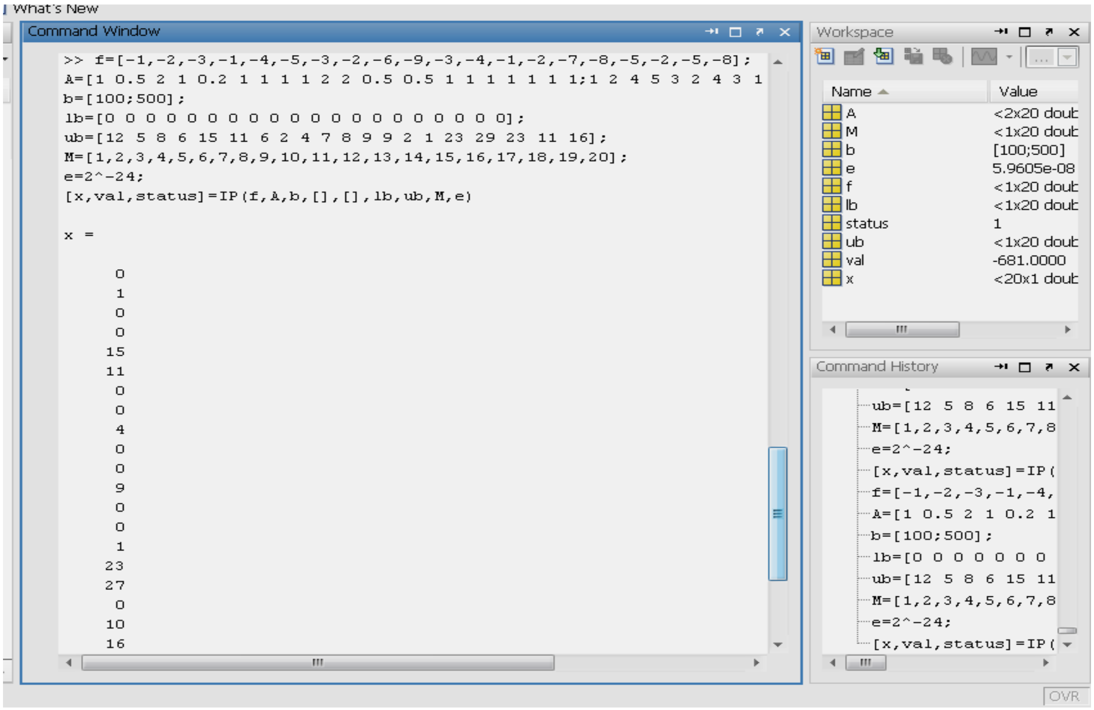
$ub = [\inf \;\; \inf \;\; \inf];$

$M = [1, 3];$



Ví dụ 3.3.2. Dùng Matlab giải bài toán “xếp hàng lên tàu”, ứng với *n=20*, T=100, K=500 . Ta xét các số liệu cụ thể sau:

Loại	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
SL	12	5	8	6	15	11	6	2	4	7	8	9	9	2	1	23	29	23	11	16
TL	1	0.5	2	1	0.2	1	1	1	1	2	2	0.5	0.5	1	1	1	1	1	1	1
TT	1	2	4	5	3	2	4	3	1	2	3	4	1	3	5	2	7	3	1	2
GT	1	2	3	1	4	5	3	2	6	9	3	4	1	2	7	8	5	2	5	8


What's New
Command Window
>> f=[-1,-2,-3,-1,-4,-5,-3,-2,-6,-9,-3,-4,-1,-2,-7,-8,-5,-2,-5,-8];
A=[1 0.5 2 1 0.2 1 1 1 1 2 2 0.5 0.5 1 1 1 1 1 1 1;1 2 4 5 3 2 4 3 1
b=[100;500];
lb=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
ub=[12 5 8 6 15 11 6 2 4 7 8 9 9 2 1 23 29 23 11 16];
M=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20];
e=2^-24;
[x,val,status]=IP(f,A,b,[],[],lb,ub,M,e)
x =
0
1
0
0
15
11
0
0
4
0
0
9
0
0
1
23
27
0
10
16
Workspace
Name
Value
A
<2x20 doub
M
<1x20 doub
b
[100;500]
e
5.9605e-08
f
<1x20 doub
lb
<1x20 doub
status
1
ub
<1x20 doub
val
-681.0000
x
<20x1 doub
Command History
ub=[12 5 8 6 15 11
M=[1,2,3,4,5,6,7,8
e=2^-24;
[x,val,status]=IP(
f=[-1,-2,-3,-1,-4,
A=[1 0.5 2 1 0.2 1
b=[100;500];
lb=[0 0 0 0 0 0 0
ub=[12 5 8 6 15 11
M=[1,2,3,4,5,6,7,8
e=2^-24;
[x,val,status]=IP(
OVR

KẾT LUẬN

Luận văn tập trung tìm hiểu *thuật toán nhánh – cận* trên lớp bài toán Quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận

$$(MIP) \qquad Z(X) = \min_{(x,y)}\{< c, x > + < d, y >: (x, y) \in X\}$$

với

$$c \in \mathbb{R}^n, \quad d \in \mathbb{R}^p,$$

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{Z}^p_+ : Ax + By \le b\},$$

trong đó các số hạng trong các ma trận A, B và các thành phần của véctơ b đều là số hữu tỉ. Khi đó, *thuật toán nhánh – cận* được áp dụng mà không cần quan tâm đến bài toán Quy hoạch tuyến tính nới lỏng của bài toán Quy hoạch nguyên cần giải có hàm mục tiêu bị chặn trên tập phương án chấp nhận được hay không. Tác giả có dùng thuật toán nhánh - cận để giải bài toán "xếp hàng lên tàu".

Luận văn cũng trình bày thuật toán nhánh – cận được chạy trên phần mềm Matlab và dùng Matlab giải bài toán "xếp hàng lên tàu".

Tác giả đã cố gắng sắp xếp và trình bày vấn đề theo cách hiểu rõ ràng và trực quan nhất có thể, đưa ra các hình vẽ để minh họa cho các khái niệm và các sự kiện được đề cặp trong luận văn.

Hy vọng tác giả luận văn sẽ có dịp nghiên cứu và tìm hiểu thêm về thuật toán nhánh – cận để ngày càng hoàn thiện thuật toán này hơn nữa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. [Cảnh 2004](Nguyễn Cảnh), *Quy hoạch tuyến tính*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP.Hồ Chí Minh.
2. [Dakin 1965], *A Tree Search Algorithm for Mixed-Integer Programming Problems*, Computer Journal, 8, 250-255, 1965.
3. [Khánh – Nương 2000](P.Q.Khánh, T.H.Nương),*Quy hoạch tuyến tính*, Nhà xuất bản giáo dục, Hà Nội.
4. [Khánh 2002](P.Q.Khánh), *Vận trù học*, Nhà xuất bản giáo dục, Hà Nội.
5. [Krumke](Sven O.Krumke), *Integer Programming*, Technische Universităt, KAISERSLAUTERN.
6. [Land – Doig 1960](A.H.Land, A.G.Doig), *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*, Econometrica, 28, 497-520, 1960.
7. [Pochet - Wolsey](Yves Pochet, Laurence A. Wolsey), *Production Planning by mixed Integer Programming*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering.