



# Quy hoạch tuyến tính

Bởi:  
thang leduc

## Mở đầu

Quy hoạch nguyên (Integer Programming) , viết tắt là IP, là bài toán quy hoạch mà trong đó tất cả hoặc một phần các biến bị ràng buộc chỉ lấy giá trị nguyên. Trường hợp thứ nhất được gọi là quy hoạch nguyên hoàn toàn (Pure Integer Programming – PIP), trường hợp thứ hai được gọi là quy hoạch nguyên bộ phận (Mixed Integer Programming – MIP). Tuy vậy thuật ngữ ”quy hoạch nguyên” được dùng chung cho cả hai trường hợp.

Mảng các bài toán có vẻ đơn giản nhất mà cũng là quan trọng nhất trong lớp các bài toán quy hoạch nguyên là các bài toán chọn các quyết định (chọn/không chọn). Chẳng hạn như bài toán bổ nhiệm, biến quyết định việc bổ nhiệm nhận giá trị như sau :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu người } i \text{ nhận công việc } j \\ 0 & \text{nếu người } i \text{ không nhận công việc } j \end{cases}$$

Vì các biến quyết định thường chỉ nhận một trong hai giá trị nên bài toán này còn được gọi là bài toán quy hoạch nguyên nhị phân (Binary Integer Programming) .

Một ý tưởng tự nhiên để giải bài toán quy hoạch nguyên là cứ giải như một bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát tạm bỏ qua ràng buộc biến phải nguyên. Khi tìm được phương án tối ưu thì sẽ làm tròn nó để được phương án tối ưu nguyên gần đúng. Phương pháp này có thể áp dụng trong thực tế nhưng phải chú ý đến hai nguy cơ sau đây :

- Một là phương án tối ưu đã được làm tròn không chấp nhận được đối với bài toán quy hoạch nguyên.
- Hai là phương án tối ưu đã được làm tròn chấp nhận được nhưng có thể giá trị mục tiêu tương ứng là rất xa với mục tiêu tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên.

## Bài toán quy hoạch nguyên trong thực tế

a- Bài toán balô

Một nhà thám hiểm mang theo một balô chỉ chứa được một trọng lượng không quá  $b$ . Có  $n$  loại vật dụng phải mang theo. Mỗi vật loại vật  $i$  có trọng lượng là  $a_i$  và giá trị sử dụng là  $c_i$ . Hỏi ông ta phải chọn lựa các vật mang theo như thế nào để có giá trị sử dụng là lớn nhất ?

Gọi  $x_i$  ( $i=1 \rightarrow n$ ) là số lượng vật loại  $i$  mà ông ta mang theo thì mô hình toán của bài toán balô này là quy hoạch nguyên như sau :

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ x_i \geq 0 \text{ và nguyên } (i=1 \rightarrow n) \end{cases} \end{aligned}$$

Về mặt toán học thì nếu hàm mục tiêu là min  $z$  hoặc ràng buộc là đẳng thức thì bài toán cũng gọi là bài toán balô. Bài toán balô có dạng đặc biệt và đơn giản vì chỉ có một ràng buộc ngoài ràng buộc dấu và tính nguyên. Người ta nghiên cứu được nhiều cách giải riêng cho bài toán và đưa bài toán quy hoạch nguyên về bài toán balô để giải.

#### b- Bài toán sản xuất có lệ phí cố định

Giả sử một nhà máy có kế hoạch sẽ sản xuất  $n$  sản phẩm. Chi phí sản xuất sản phẩm  $j=1 \rightarrow n$  gồm lệ phí cố định  $k_j$ , không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm  $j$ , và cước phí  $c_j$  đối với mỗi đơn vị sản phẩm  $j$ .

Gọi  $x_j \geq 0$  là lượng sản phẩm  $j=1 \rightarrow n$  sẽ sản xuất thì chi phí sản xuất sản phẩm  $j$  sẽ là :

$$c_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & \text{nếu } x_j > 0 \\ 0 & \text{nếu } x_j = 0 \end{cases}$$

mục tiêu sản xuất với chi phí cực tiểu sẽ là :

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j(x_j)$$

Trong trường hợp này hàm mục tiêu  $z$  là hàm phi tuyến với các đối số là  $x_j$  ( $j=1 \rightarrow n$ ) mặc dù các ràng buộc thực tế như nguyên liệu, thị trường,... đều là tuyến tính nên bài toán rất khó giải. Người ta có thể đưa bài toán này về bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận bằng cách đưa vào các biến phụ nhị phân như sau :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x_j > 0 \\ 0 & \text{nếu } x_j = 0 \end{cases}$$

(1)

Để biểu thị  $y_j$  ( $j=1 \rightarrow n$ ) là biến nhị phân độc lập, không phụ thuộc vào  $x_j$  như trong (1) người ta đưa vào một ràng buộc tuyến tính như sau :

$$x_j \leq My_j \quad (j=1 \rightarrow n)$$

ở đây  $M > 0$  và rất lớn để ràng buộc  $x_j \leq \mu$  là thừa. Khi đó hàm mục tiêu và ràng buộc trên trở thành :

$$\min z = \sum_{j=1}^n (k_j y_j + c_j x_j)$$

$$\begin{cases} 0 \leq x_j \leq My_j \\ y_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

(2)

Thật vậy :

- Nếu  $x_j > 0$  thì  $y_j$  không thể bằng 0 nên  $y_j = 1$

- Nếu  $x_j = 0$  thì  $y_j = 0$  hoặc  $y_j = 1$

Nhưng vì  $k_j > 0$  ( nếu  $k_j = 0$  thì không cần đưa vào biến phụ  $y_j$ ) và hàm mục tiêu là min  $z$  nên ở thuật toán tìm phương án tối ưu luôn lấy  $y_j = 0$  vì phương án với  $x_j = 0$  và  $y_j = 1$  không thể là tối ưu. Khi viết đủ các ràng buộc tuyến tính khác vào ta được bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận.

## CÂU HỎI CHƯƠNG 4

1- Trình bày chiến lược bị trội hơn.

2- Trình bày chiến lược MaxiMin và MiniMax.

3- Xây dựng quy hoạch tuyến tính trong trường hợp không có nghiệm ổn định.

4- Trình bày các giai đoạn giải bài toán vận tải.

## BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1- Tìm phương án tối ưu cho bài toán lý thuyết trò chơi có ma trận điểm được cho như sau :

2	3	-2	-1
-1	5	4	-2
-2	-5	0	3

2- Giải bài toán vận tải có ma trận cước phí

	60	70	40	30
100	2	1	4	3
80	5	3	2	6
20	6	2	1	5