CHƯƠNG IV
BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

B – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

☆☆☆

1. Tính chất

Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	(2a)
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	(2b)
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	(3)
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	(4)
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	(5a)
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	(5b)
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	(6a)
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	(6b)

2. Một số bất đẳng thức thông dụng

a) $a^2 \geq 0, \forall a$.

$a^2 + b^2 \geq 2ab$.

b) Bất đẳng thức Cô–si:

+ Với *a, b* ≥ 0, ta có: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

+ Với *a, b, c* ≥ 0, ta có: $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Hệ quả: *– Nếu x, y > 0 có S = x + y không đổi thì P = xy lớn nhất* $\Leftrightarrow x = y$.

– Nếu x, y > 0 có P = x y không đổi thì S = x + y nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

c) Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Điều kiện	Nội dung
	$\lvert x\rvert \geq 0, \lvert x\rvert \geq x, \lvert x\rvert \geq -x$
$a > 0$	$\lvert x\rvert \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$\lvert x\rvert \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -a \\ x \geq a \end{array}\right.$
	$\big\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \big\rvert \leq \lvert a+b\rvert \geq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$

d) Bất đẳng thức về các cạnh của tam giác

Với *a, b, c* là độ dài các cạnh của một tam giác, ta có:

+ $a, b, c > 0$.

+ $\lvert a-b\rvert < c < a+b$; $\lvert b-c\rvert < a < b+c$; $\lvert c-a\rvert < b < c+a$.

I – Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

① Điều kiện của bất phương trình

Điều kiện của bất phương trình là điều kiện mà ẩn số phải thõa mãn để các biểu thức ở hai vế của bất phương trình có nghĩa. Cụ thể, ta có ba trường hợp:

\+ Dạng $\dfrac{1}{Q(x)} \longrightarrow$ Điều kiện có nghĩa: $Q(x) \neq 0$.

\+ Dạng $\sqrt{P(x)} \longrightarrow$ Điều kiện có nghĩa: $P(x) \geq 0$.

\+ Dạng $\dfrac{1}{\sqrt{Q(x)}} \longrightarrow$ Điều kiện có nghĩa: $Q(x) > 0$.

② Hai bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

③ Phương pháp giải bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

a/ Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

☞ Phương pháp:

— Bước 1. Đặt điều kiện cho bất phương trình có nghĩa (nếu có)
— Bước 2. Chuyển vế và giải.
— Bước 3. Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S.

b/ Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

☞ Phương pháp:

— Bước 1. Đặt điều kiện cho hệ bất phương trình có nghĩa (nếu có).
— Bước 2. Giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao các tập nghiệm thu được.
— Bước 3. Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S.

④ Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất dạng: $\boxed{ax + b < 0}$.

<table>
<tr><th colspan="2">Điều kiện</th><th>Kết quả tập nghiệm</th></tr>
<tr><td colspan="2">$a > 0$</td><td>$S = \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a < 0$</td><td>$S = \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a = 0$</td><td>$b \geq 0$</td><td>$S = \varnothing$</td></tr>
<tr><td>$b < 0$</td><td>$S = \mathbb{R}$</td></tr>
</table>

✍ Lưu ý: Ta có thể giải tương tự cho các trường hợp: $ax + b > 0 \ \vee \ \left[\begin{array}{l} ax + b \leq 0 \\ ax + b \geq 0 \end{array}\right.$

Dạng 1. Giải bất phương trình bậc nhất – Hai bất phương trình tương đương

☆☆☆

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm điều kiện có nghĩa của các phương trình sau

1/ $\dfrac{1}{x} < 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

2/ $2\left|x\right| - 1 + \sqrt[3]{x-1} \le \dfrac{2x}{x+1}$.

3/ $3x + \dfrac{3}{\sqrt{x-2}} > 2 + \dfrac{x}{x-3}$.

4/ $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\left|x\right| - \sqrt{x-3}} \ge \sqrt{16-2x}$.

5/ $\sqrt{\dfrac{x+1}{\left(x-2\right)^2}} < x+1$.

6/ $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{x^2-3x+2}} - 2x^2 \le 1$.

7/ $x + \sqrt{x-4} < 1 + \sqrt{x-4}$.

8/ $\sqrt{2-x} + x < 2 + \sqrt{x}$.

9/ $\dfrac{x+2}{1+x^2} \ge 1 + \dfrac{4}{\left(x-2\right)^2}$.

10/ $x + \dfrac{x-1}{\sqrt{x-3}} > 2 - \dfrac{2}{\sqrt{x-4}}$.

11/ $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{\left(x-3\right)\left(x+4\right)} \le \dfrac{3}{\sqrt{6-x}}$.

12/ $\dfrac{2x-3}{\left|x-1\right| - \sqrt{x+2}} \le \sqrt{3-4x} + \dfrac{1}{\sqrt{x+6}}$.

Bài 2. Chứng minh các phương trình sau vô nghiệm

1/ $x^2 + \sqrt{x+8} \le -3$.

2/ $\sqrt{x-6} + \sqrt{3-x} \ge -4$.

3/ $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} \ge -10$.

4/ $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2+x^2} > 1$.

5/ $\left(x-3\right)\sqrt{-x-10} > \left(x^4+1\right)\sqrt{x-5}$.

6/ $\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-10}\left(\sqrt{x}+2\right)} < \dfrac{4-x^2}{\left(x-4\right)\left(x+5\right)}$.

7/ $\sqrt{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} < 2$.

8/ $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4-x^2+1} < 2\sqrt[4]{x^6+1}$.

9/ $4x^6 + 3 > \left(x^4+2\right)^2$.

10/ $\sqrt{x^2+1} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}} < 4$.

11/ $\sqrt{4x^2+4x+2} + \sqrt{x^2-6x+10} < 2$.

12/ $x + 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+1} - 1 \le 0$.

Bài 3. Xét sự tương đương của các cặp bất phương trình sau

1/ $-4x + 1 > 0$ & $4x - 1 < 0$.

2/ $3x + \dfrac{1}{x-3} \ge 3 + \dfrac{1}{x-3}$. & $3x - 3 \ge 0$.

3/ $\sqrt{x-1} \geq x$. & $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$.

4/ $\dfrac{3x-5}{x^2+1} > 7$. & $3x-5 > 7(x^2+1)$.

5/ $2x-3-\dfrac{1}{x-5} < x-4$. & $2x-3 < x-4$.

6/ $x+3-\dfrac{1}{x+7} < 2-\dfrac{1}{x+7}$. & $x+3 < 2$.

7/ $4x+8 < 1-x$. & $(18+x-2x^2)(4x+8) < (18+x-2x^2)(1-x)$.

8/ $3x+1 < x+3$. & $(3x+1)^2 < (x+3)^2$.

9/ $\dfrac{x+5}{x-1} < 0$. & $(x+5)(x-1) < 0$.

10/ $x^2 \geq x$. & $x \geq 1$.

11/ $x^4 \geq x^2$. & $x^2 \geq 1$.

12/ $\dfrac{1}{x} \leq 1$. & $x \geq 1$.

13/ $\sqrt{1-x} \leq x$. & $1-x \leq x^2$.

14/ $\sqrt{(x+1)(x-2)} \geq x$. & $\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} \geq x$.

15/ $(2-x)^2(x+1) > 2(2-x)^2$. & $x+1 > 2$.

Bài 4. Giải các bất phương trình sau

1/ $-2x+\dfrac{3}{5} > \dfrac{3(2x-7)}{3}$.

2/ $3-\dfrac{2x+1}{5} > x+\dfrac{3}{4}$.

3/ $\dfrac{5(x-1)}{6}-1 < \dfrac{2(x+1)}{3}$.

4/ $2+\dfrac{3(x+1)}{8} < 3-\dfrac{x-1}{4}$.

5/ $\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{x-2}{3} < \dfrac{1-2x}{4}$.

6/ $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3} < 2+\dfrac{x}{6}$.

7/ $\dfrac{10-3x}{2}+9 > \dfrac{2x-7}{4}-2x$.

8/ $(x+2)^3 \geq (x-1)^2+4$.

9/ $x+\sqrt{x} < (2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)$.

10/ $(\sqrt{1-x}+3)(2\sqrt{1-x}-5) > \sqrt{1-x}-3$.

11/ $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0$.

12/ $\sqrt{(x+2)^2(x-3)} > 0$.

13/ $\sqrt{x-3} \geq \sqrt{3-x}$.

14/ $\sqrt{x-1} < 3+\sqrt{x-1}$.

15/ $\frac{x-2}{\sqrt{x-4}} \le \frac{4}{\sqrt{x-4}}$.

16/ $\frac{(10-x)\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}} > 4$.

17/ $(x-1)(x+1)^2 \ge 0$.

18/ $\frac{\sqrt{x-3}}{1-2x} \le 0$.

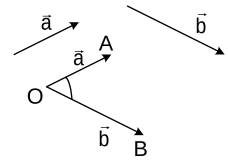
19/ $(x-3)\sqrt{x-2} \ge 0$.

20/ $(4-x)\sqrt{5-x} \le 0$.

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



Khi đó $\boxed{\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \widehat{AOB}}$ với $0^0 \leq \widehat{AOB} \leq 180^0$.

Chú ý:

+ $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^0$ ę $\vec{a} \perp \vec{b}$

+ $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^0$ ę $\vec{a}, \vec{b}$ *cùng hướng*

+ $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^0$ ę $\vec{a}, \vec{b}$ *ngược hướng*

+ $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$

2. Tích vô hướng của hai vectơ

- Định nghĩa: $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}$.

Đặc biệt: $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

- Tính chất: Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và ∀*k*Č*R*, ta có:

+ $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$; $\quad \vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$;

$\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$; $\quad \vec{a}^2 \geq 0;\ \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

+ $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$; $\quad \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;

$\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

+ $\vec{a}.\vec{b} > 0$ ę $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ nhọn $\quad$ + $\vec{a}.\vec{b} < 0$ ę $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ tù $\quad$ + $\vec{a}.\vec{b} = 0$ ę $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ vuông.

3. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

- Cho $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Khi đó: $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$.
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$; $\quad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$; $\quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$
- Cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Khi đó: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

4. Bài tập

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\quad$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ $\quad$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Bài 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\quad$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ $\quad$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

b) Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Bài 4. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh:

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0.$$

Bài 5. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R.

Bài 6. Cho tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, AC = 8.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.

b) Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

c) Gọi D là điểm trên CA sao cho CD = 3. Tính $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$ c) $(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$ e) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$

HD: a) a^2 *b)* a^2 *c)* $2a^2$ *d)* $-a^2$ *e) 0*