**Logik** Prof. Dr. H. Peter Gumm
**Wintersemester 22/23**

# Übungszettel 05

**Abgabetermin**: 26. November 2021, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

**Aufgabe 1.** (3 Pkte) Seien $F$ und $G$ aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definitionen:

(a) $F \to G$ ist *erfüllbar* gdw. $F$ *nicht tautologisch* oder $G$ *erfüllbar*.

(b) $F \equiv G$ gdw. $F \leftrightarrow G$ ist eine Tautologie.

(c) Seien $F_1, ..., F_n$ sowie $G$ Formeln. Bisher haben wir das Zeichen $'\models'$ als Beziehung zwischen einer Belegung $\alpha$ und einer Formel bzw. einer Menge von Formeln ($\alpha \models G$ bzw. $\alpha \models \{F_1, ..., F_n\}$) definiert. Jetzt definieren wir zusätzlich

$$F_1, ..., F_n \models G$$

als Relation zwischen einer Formelmenge $\{F_1, ..., F_n\}$ und einer Formel $G$ als

$$F_1, ..., F_n \models G \overset{def}{:\Leftrightarrow} \forall \alpha.(\alpha \models \{F_1, ..., F_n\} \implies \alpha \models G).$$

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definitionen:

$$F_1, ..., F_n \models G \quad \text{genau dann wenn} \quad \models F_1 \wedge ... \wedge F_n \to G.$$

$\models F_1 \wedge ... F_n \to$

**Aufgabe 2.** (6 Punkte): Lösen Sie die folgenden Aufgaben der Iltis-Webseite.

- Beachten Sie, dass *Iltis* keine Präzedenzen der zweistelligen Operatoren berücksichtigt. Daher muss immer geklammert werden. Beispielsweise muss $A \wedge \neg B \to C \vee \neg A \vee \neg D$ als $(A \wedge \neg B) \to (C \vee \neg A \vee \neg D)$ geklammert werden.
- Zur Eingabe der Operatoren $\vee, \wedge, \neg, \to$ können Sie entweder die dargestellten *buttons* anklicken, oder sie schreiben einfach `'&'`, `'|'`, `'!'`, `'->'` bzw. **and**, **or**, **not**, **impl** für $\wedge, \vee, \neg, \to$. Iltis wandelt diese Zeichen (Schlüsselworte) selber in die entsprechenden Operatorzeichen um.
- Nach jedem Umformungsschritt klicken Sie bitte auf „Check“. Zum Abschluss klicken Sie auf „Finish task“ und erstellen einen Screenshot Ihrer Lösung.

(a) Äquivalenzumformungen: Transformation into an equivalent formula(I)

- Jeder Umformungsschritt sollte nur beinhalten:
  - Anwendung der deMorganschen Gesetze
  - Anwendung eines Distributivgesetzes
  - Anwendung doppelter Verneinung bzw. Idempotenzgesetz.

(b) Umwandlung in KNF: Transformation into conjunctive normal form(I)

(c) Umwandlung in DNF: Transformation intodisjunctive normal form (I)

(d) Resolventenbildung (easy):Testing satisfiability with Propositional Resolution I

(e) Resolventenbildung : Testing satisfiability with Propositional Resolution II

(f) Umwandlung in KNF mit anschließender Resolventenbildung: Testing satisfiability with propositional resolution III

$(\neg x \wedge z) \vee y$

(6 Punkte)

**Aufgabe 3.** (1+2 Pkte) Betrachten Sie die Boolesche Funktion $d : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$, die folgendermaßen definiert ist: :

$$d(x, y, z) := \begin{cases} y & x = 1 \\ z & x = 0 \end{cases}.$$

$(x \wedge y) \vee z$

(a) Finden Sie eine (möglichst einfache) Formel $F$ in DNF, so dass $[\![F]\!] = d$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\{d, \bot\}$ eine minimale Menge von Junktoren darstellt. $\{d, \bot, \top\}$

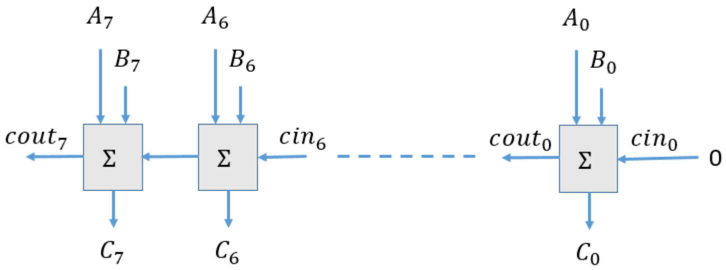
$\bot \; \top \quad x \; y \; z \; \bot$

**Aufgabe 4.** Schaltungsentwurf (2+2 Pkte)

Die folgende Rechnung zeigt die Addition zweier Binärzahlen; in rot der Übertrag (engl.: *carry*) der jeweils erzeugt wird:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ + & 0 & 0_1 & 1_1 & 0_1 & 1_1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Für die Addition zweier Binärzahlen $A$ und $B$ mit Binärzifferndarstellungen $A_7A_6A_5A_4A_3A_2A_1A_0$ und $B_7B_6B_5B_4B_3B_2B_1B_0$ verwendet man an jeder Ziffernposition einen sogenannten *Volladdierer*.




$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$

Jeder Volladdierer hat drei Inputs und zwei Outputs. Die Inputs $A_k$ und $B_k$ des $k$-ten Additionsgliedes $\Sigma_k$ sind die Binärziffern $A_k$ und $B_k$ sowie ein Übertrag $cin_k$ aus dem $k-1$-ten Addierer. Das Ergebnis des Volladdierers ist die binäre Summe von $A_k + B_k + cin_k$ auf Leitung $C_k$ sowie der Übertrag dieser Addition auf Leitung $cout_k$.

Jeder einzelne Volladdierer $\Sigma$ beschreibt also eine Funktion $\Sigma : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}^2$. Diese kann man in die Komponenten $sum : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ und $carry : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ zerlegen:

$$\cancel{\Sigma(a, b, c) =} \langle sum(a, b, c), carry(a, b, c) \rangle.$$

$\neg x \overset{?}{=} d(x, \bot, \top) = (x \wedge \bot) \vee (\neg x \wedge \top)$

$= \bot \vee \neg x = \neg x$

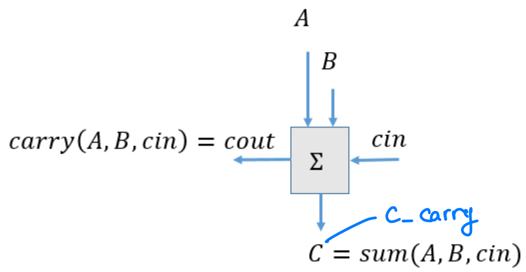
$x \wedge y$

$x \vee y$

$x \to y$

$x \leftrightarrow y$

| A | B | Cin | Cout | Carry |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |




Volladdierer

Ist beispielsweise $A = 1$, $B = 0$ und $cin = 1$, so ist $\Sigma(1, 0, 1) = \langle C, cout\rangle = \langle 0, 1\rangle$, denn $sum(1, 0, 1) = 1 + 0 + 1 = 0\,(mod\,2)$ und $carry(1, 0, 1) = 1$.

(a) Stellen Sie die Booleschen Funktionen *sum* und *carry* als boolesche Terme (=aussagenlogische Formeln) in disjunktiver Normalform dar. DNF $(\wedge \ldots \wedge) \vee (\wedge \ldots \wedge)$ $= 1$

(b) Stellen Sie die Boolesche Schaltung eines Volladdierers als Schaltnetz dar.

---

Tut

Aufgabe 3:

$$d(x, y, z) := \begin{cases} y & x = 1 \\ z & x = 0 \end{cases}.$$

$[\![F]\!]$ = DNF $\wedge$-Klause = d

$= (\ldots\wedge\ldots\wedge\ldots) \vee (\wedge\ldots\wedge\ldots) \vee (\ldots\wedge\ldots\wedge)$

$d(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (z \wedge x)$ $\boxed{\text{DNF}}$

a. $d(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$

b, $d(x, \bot, \top) = (x \wedge \bot) \vee (\top \wedge x)$

$d(x, \bot) = (x \wedge \bot) \vee$

# Aufgabe 1:

(a) $F \to G$ ist *erfüllbar* gdw. $F$ *nicht tautologisch* oder $G$ *erfüllbar*.

Sei $F \to G$ erfüllbar

$\Rightarrow \quad \exists\, \alpha.\ \hat{\alpha}(F \to G) = 1$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha.\ \hat{\alpha}(F) \Rightarrow \hat{\alpha}(G) = 1$ (Def. $\alpha$)

Fall 1: $\Leftrightarrow \exists\, \alpha.\ (\hat{\alpha}(F) = 0$ und $\hat{\alpha}(G) = 0) = 1$

$\Rightarrow \exists\, \alpha.\ \alpha(F) \neq 1 \Rightarrow F$ ist nicht Tautologie (Def. Tautologie)

oder

Fall 2: $\exists\, \alpha.\ (\hat{\alpha}(F) = 1 \wedge \hat{\alpha}(G) = 1) = 1$

$\Rightarrow \exists\, \alpha.\ \alpha(G) = 1 \Rightarrow G$ ist erfüllbar (Def. Erfüllbar)

$\Rightarrow \quad \exists\, \alpha.\ (\hat{\alpha}(F) = 0 \mid \hat{\alpha}(G) = 1)$

$\square$

(b) $F \equiv G$ gdw. $F \leftrightarrow G$ ist eine Tautologie.

Sei $F \equiv G \Rightarrow \forall \alpha.\ (\hat{\alpha}(F) = \hat{\alpha}(G))$

$\Leftrightarrow \forall\, \alpha.\ (\hat{\alpha}(F \leftrightarrow G) = 1)$ (Def. $\alpha$)

$\Rightarrow F \leftrightarrow G$ ist Tautologie

$\square$

c)

$F_1, \ldots, F_n \models G$ wenn

$\forall\, \alpha.\ (\hat{\alpha}(F_1) = 1\ \&\ \hat{\alpha}(F_2) = 1\ \&\ \ldots \&\ (F_n) = 1 \Rightarrow \alpha(G) = 1)$

$\forall\, \alpha\ (\hat{\alpha}(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) = 1 \Rightarrow \hat{\alpha}(G) = 1)$

$\forall\, \alpha\ (\hat{\alpha}((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \to G) = 1)$

$\Rightarrow \quad \forall\, \alpha.\ (\alpha \models (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \to G))$

$\square$

b)

$$\begin{aligned}
\neg x &= d(x, \bot, \top) = (x \wedge \bot) \vee (\neg x \wedge \top) \\
&= \bot \vee \neg x \\
&= \neg x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \wedge y = d(x, y, \bot) &= (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \bot) \\
&= (x \wedge y) \vee \bot \\
&= x \wedge y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \vee y = d(x, \bot, \neg y) &= (x \wedge \bot) \vee (\neg x \wedge \neg y) \\
&= \bot \vee x \vee y = x \vee y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \rightarrow y = d(x, y, \top) &= (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \top) \\
(\neg x \vee y) \quad &= (x \wedge y) \vee \neg x = (\neg x \vee x) \wedge (\neg x \vee y) \\
&= 1 \wedge \neg x \vee y \\
&= \neg x \vee y
\end{aligned}$$

$$x \leftrightarrow y = d(\neg x, y, \neg y) = (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$$

# Aufgabe 3:

$$d(x, y, z) := \begin{cases} y & x = 1 \\ z & x = 0 \end{cases}.$$

(a) Finden Sie eine (möglichst einfache) Formel $F$ in DNF, so dass $[\![F]\!] = d$ ist.

$$F = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$$

b)

# Aufgabe 4:

a) Tabelle

| A | B | C_in | C_out | Carry |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

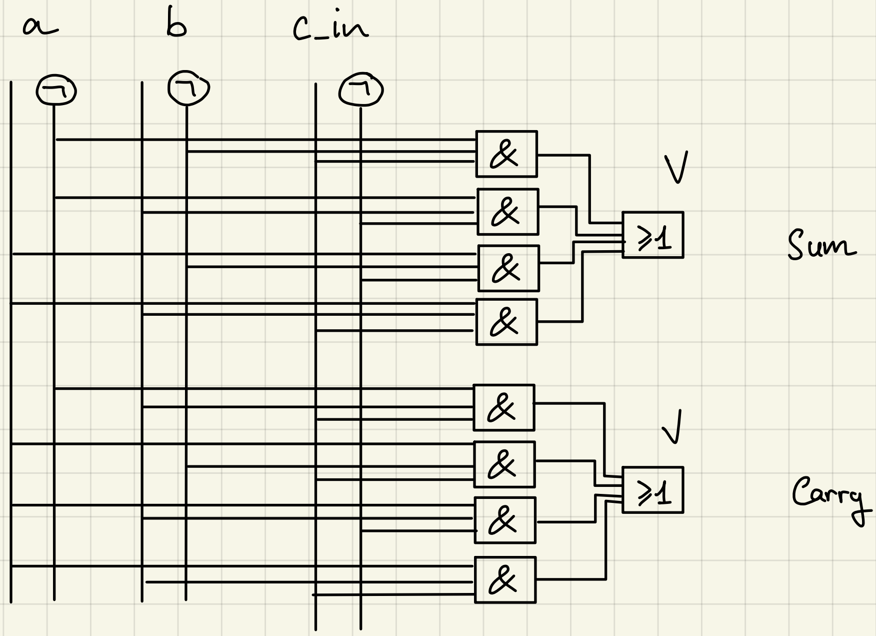
$$\text{Sum}(A, B, C\_in)_{DNF} = 1$$

$$= (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$\text{Carry}(A, B, C\_in)_{DNF} = 1$$

$$= (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

b)

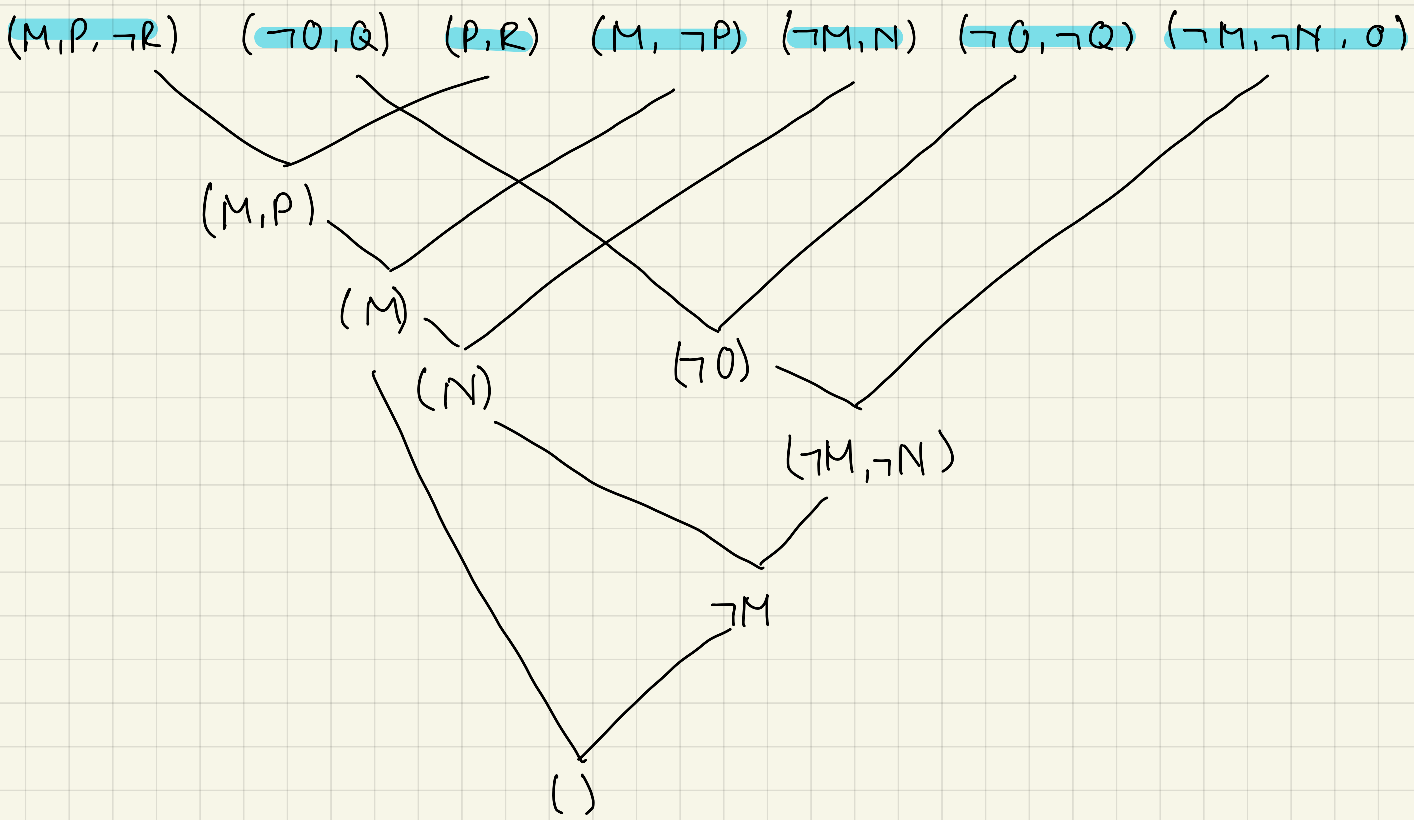


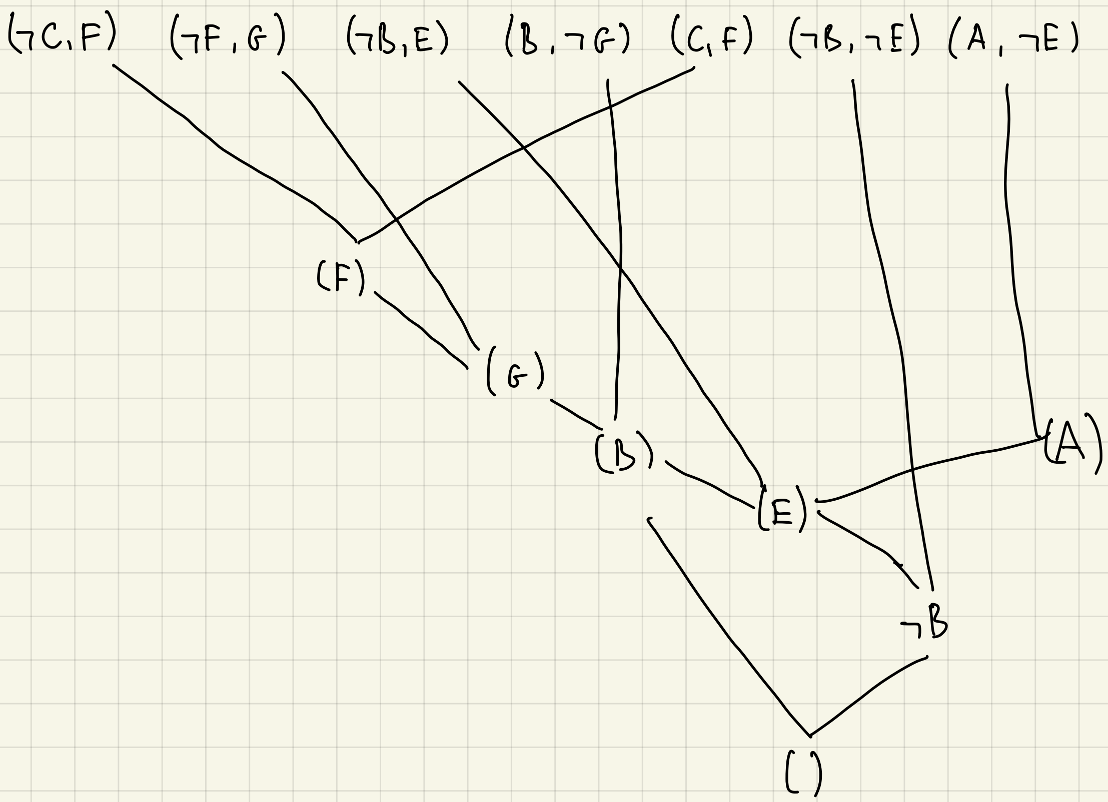
Aufgabe 2 :

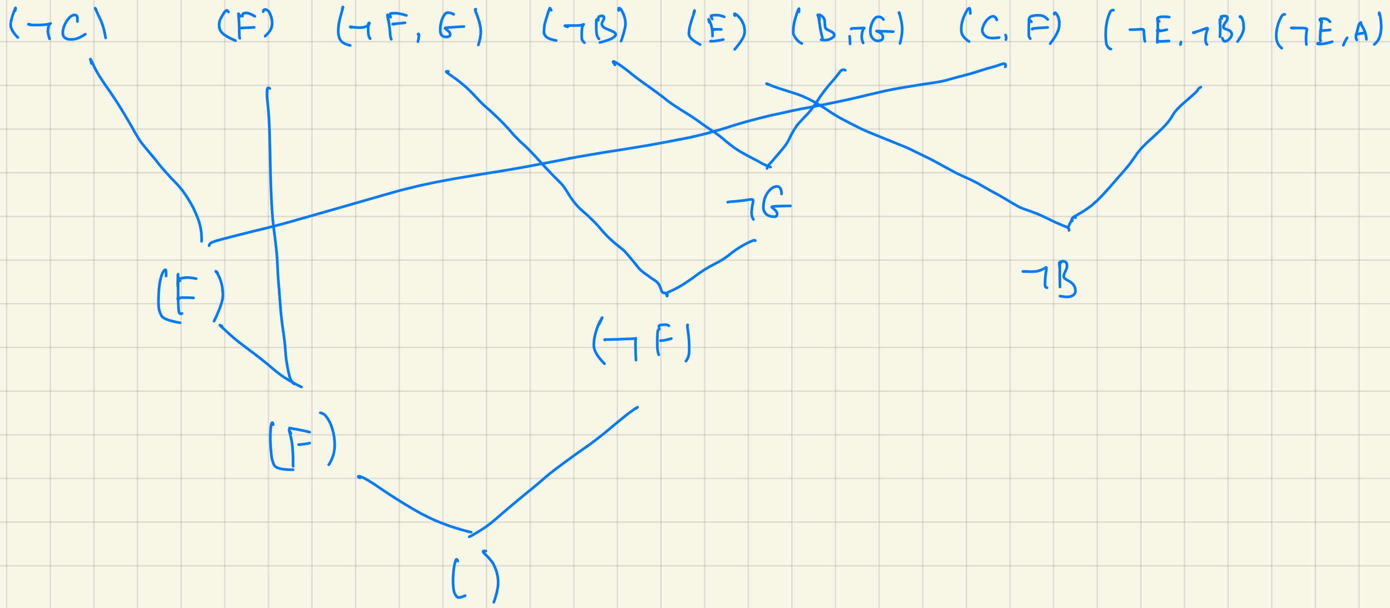
KNF

$(M \vee P \vee \neg R) \wedge (\neg O \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (M \vee \neg P) \wedge (\neg M \vee N) \wedge (\neg O \vee \neg Q)$
$\wedge (\neg M \vee \neg N \vee O)$

$(\neg P \vee N)$




(¬C)
(F)
(¬F, G)
(¬B)
(E)
(B, ¬G)
(C, F)
(¬E, ¬B)
(¬E, A)
(F)
¬G
¬B
(¬F)
(F)
( )

Tutorium :

$(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \underline{\vee} (\wedge \ldots \wedge \ldots)$

DNF = Disjunktiv Normale Form von $\wedge$ - Klausel

$[\![ F ]\!] = d = (\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \underline{\vee} (\wedge \ldots \wedge \ldots)$

$\{ d, \perp, \top \}$

$\neg C \lor (A \leftrightarrow B) \lor \neg(\neg A \lor \neg C)$

$\lfloor \lor(\land..\land..) \lor(\land..\rfloor$

$\neg C \lor [ (\neg A \lor B) \land (A \lor \neg B)] \lor (A \land C)$

$((\neg C \lor (\neg A \lor B)) \land (\neg C \lor (A \lor \neg B))) \lor (A \land C)$

$((\neg C \lor \neg A \lor B) \land (\neg C \lor A \lor \neg B)) \lor (A \land C)$

$((A \land C) \lor (\neg C \lor \neg A \lor B)) \land ((A \land C) \lor (\neg C \lor A \lor \neg B))$

---

$(A \land B) \lor C$

$(A \lor C) \land (B \lor \neg A \lor \neg B) \land (B \lor C)$

$((A \land B) \lor C) \land T$

$A \to B \equiv \neg A \lor B$

$\neg(\neg A \land C) \land (B \to T) \land (A \to C)$

$(A \lor \neg C) \land T \land (A \to C)$

$(\neg C \lor A) \land (A \to C)$

$(C \to A) \land (A \to C)$

$A \leftrightarrow C$

$(\ldots\lor\ldots)\land($

zu KNF

$\neg(A \land \neg B) \land \neg(B \land \neg(C \land A))$

$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor (C \land A))$

$(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C) \land (\neg B \lor A)$

$\neg(B \lor \neg C) \land \neg\neg(C \leftrightarrow \neg(A \to B))$

$(\neg B \land C) \land (C \leftrightarrow \neg(\neg A \lor B))$

$(\neg B \land C) \land (C \leftrightarrow (A \land \neg B))$

$(\neg B \land C) \land (\neg C \lor (A \land \neg B)) \land (C \lor \neg(A \land \neg B))$

$(\neg B \land C) \land (\neg C \lor A) \land (\neg C \lor \neg B) \land (C \lor (\neg A \lor B))$

$\neg B \land C \land (\neg C \lor A) \land (\neg C \lor \neg B) \land (C \lor \neg A \lor B)$

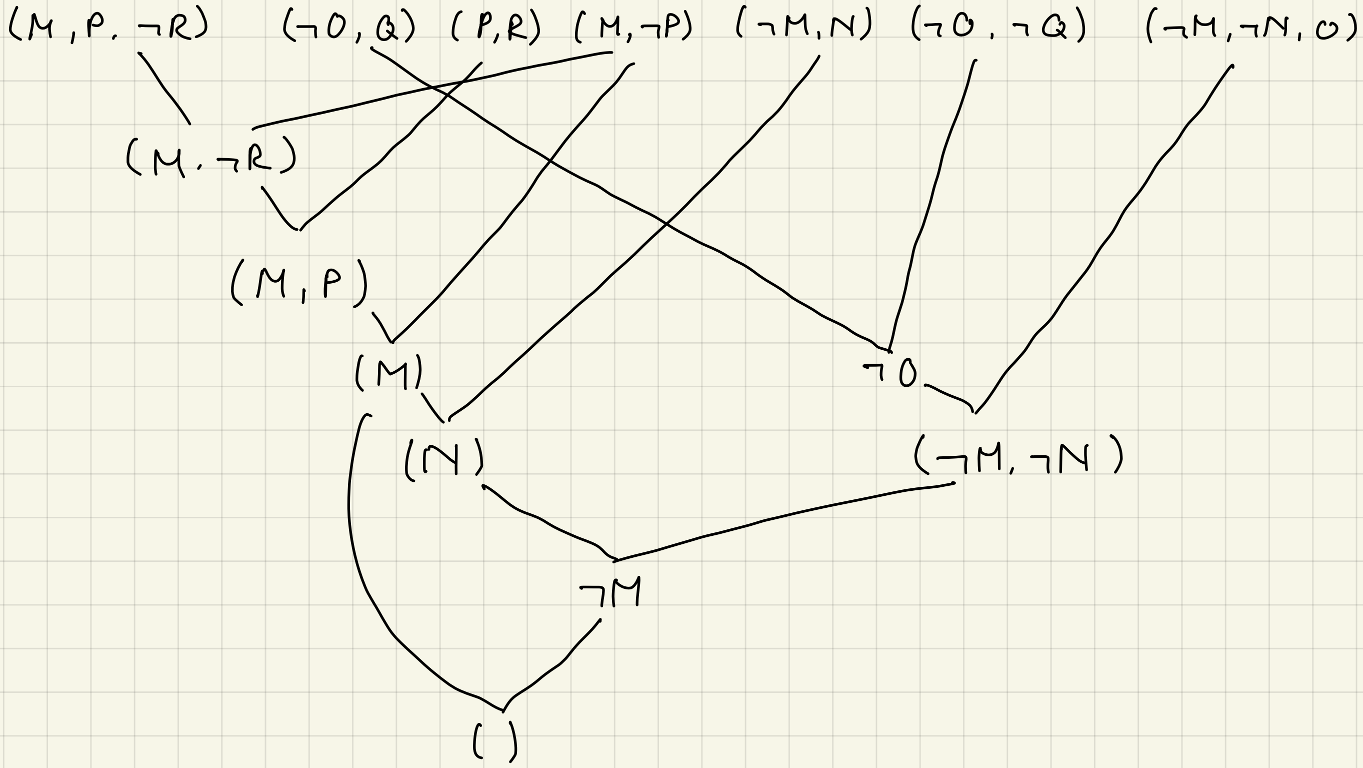
$$\neg(B \vee \neg C) \wedge \neg\neg(C \leftrightarrow (A \to B))$$

$$\neg B \wedge C \quad \wedge \quad (C \leftrightarrow (\neg A \vee B))$$

$$\neg B \wedge C \quad \wedge \quad (\neg C \vee (\neg A \vee B)) \vee (C \vee \neg(\neg A \vee B))$$

$$(\neg C \vee \neg A \vee B) \quad \vee \quad (C \vee (A \wedge \neg B))$$

$$\neg B \wedge C \quad \wedge \quad (\neg C \vee \neg A \vee B) \quad \vee \quad ((C \vee A) \wedge (C \vee \neg B))$$


(M, P, ¬R)
(¬O, Q)
(P, R)
(M, ¬P)
(¬M, N)
(¬O, ¬Q)
(¬M, ¬N, O)
(M, ¬R)
(M, P)
(M)
¬O
(N)
(¬M, ¬N)
¬M
( )