Aufgabe 1:

Aufgabe 1 Sei S eine konvexe Menge. Zeigen Sie: Ein Punkt $x \in S$ ist ein Extrempunkt von S, genau dann wenn die Implikation (4)

$$x = \frac{1}{2}(y+z),\ y, z \in S \quad \Rightarrow \quad x = y = z$$

gilt.

Sei S eine konvexe Menge und $x \in S$ nach Definition

$\Rightarrow$ Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$ sodass gilt:

$$x = \lambda a + (1-\lambda) b \quad \text{mit } a, b \in S,\ a, b \neq x$$

x sei ein Extrempunkt von S wenn $x = \frac{1}{2}(y+z)$

$\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z \quad (y, z \in S)$

Laut Def von Extrempunkt, es gibt kein $y, z \in S$, $y, z \neq x$

sodass $x = \lambda a + (1-\lambda) b$ gilt $\Rightarrow$ muss $y = z = x$ sein ✓

dann $x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x$ stimmt.

versuche das strukturierter Aufzuschreiben, welche Richtung zeigst du, was ist die Vor., was ist zu zeigen

Die Hinrichtung stimmt, die Rückrichtung fehlt

2/4

A2) fehlt

Aufgabe 3

$$\min\ 2x_1 - x_2 - 3x_3$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq -2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\geq -3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min\ -4x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &\geq -1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\geq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Weisen Sie nach, dass der zulässige Bereich X der Probleme nicht leer ist und leiten Sie daraus eine zulässige Startbasis für die Standardform ab. Lösen Sie die Probleme anschließend mit dem revidierten Simplex-Verfahren.

$\min\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \quad \xrightarrow{SF} \quad \min\ z = 2x_1 - x_2 - 3x_3$

u.d.N
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq -2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\geq -3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

u.d.N
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 - 3x_3 + s_1 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 &= 1 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + s_3 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c = (2, -1, -3, 0, 0, 0)^T$$

Wieso ist der zulässige Bereich nicht leer?

Nach der Simplex-Methode:

Basis $\{s_1, s_2, s_3\}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c_B^T = (0, 0, 0) \qquad c_N^T = (2, -1, -3)$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (0\ 0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - (c_B^T \cdot B^{-1} N) = c_N^T - y^T \cdot N = c_N^T = (2, -1, \underline{-3})$$

$$\hat{c}_t = \min_{\{1,2,3\}} \{ \hat{c}_j : c_j < 0 \} = -3$$

$\Rightarrow x_3$ tritt in die Basis ein

Um die austretende zu wählen:

$$\hat{A}_3 = B^{-1} \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Quotientekriterium $\min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{it}} : \hat{a}_{i,t} > 0 \right\}$ nur $\hat{a}_{2,3} > 0$

$\Rightarrow s_2$ verlösst Basis

Neue Basis $N = \{ x_1, x_2, s_2 \}$ $B = \{ s_1, x_3, s_3 \}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad c_N^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$\Rightarrow B \{ s_1, x_3, s_3)$ ist optimal

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad x_N = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$z = 2 \cdot 0 - 0 - 3 \cdot 1 = -3$$

nummerier die Variablen mit x_1 bis x_n ist etwas einfacher von der Notation würde ich sagen

4,5/5

$$\min \quad -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad \xrightarrow{SF} \quad \min \quad -4x_1 + 2x_2 - x_3$$

u.d.N

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &\geq -1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\geq -2 \\ x_1\ x_2\ x_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + s_1 &= 1 \\ -4x_1 - x_2 - 2x_3 + s_2 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 + s_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{matrix}}_{N} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{B} \right) \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c^T = (-4 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$B = \{ s_1, s_2, s_3 \} \qquad N = \{ x_1, x_2, x_3 \} \qquad c_B^T = (0\ 0\ 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (0, 0, 0)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = (-4 \quad 2 \quad 1) - (0 \quad 0 \quad 0) = (-4 \quad 2 \quad 1)$$

$$\hat{c}_t = \min_{\{1,2,3\}} (\hat{c}_i : i > 0) = -4$$

$\Rightarrow$ x_1 tritt in Basis ein

$$\hat{A}_1 = B^{-1} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Quotientkriterium $\min\limits_{\{1,2,3\}} \left\{ \frac{\hat{b_i}}{\hat{a}_{i,t}} : \hat{a}_{i,t} > 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 1$

$\Rightarrow$ s_1 verlässt die Basis $\to$ $N = \{ s_1, x_2, x_3 \}$ $B = \{ x_1, s_2, s_3 \}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (-4 \quad 0 \quad 0) \qquad c_N^T = (0 \quad 2 \quad -1)$$

$$y^T = c_B^T \ N^{-1} = (-4 \quad 0 \quad 0)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = (0 \quad 2 \quad -1) - (-4 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

$\hat{c}_3 = -5 < 0 \Rightarrow x_3$ trifft in Basis ein

$$\hat{A}_3 = B^{-1} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung

4,5/5

zulässige Bereich nicht leer?
gebe jeweils die erste ZBL konkret an
ansonsten top