Aufgabe 1

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{u.d.N} & Ax = c \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{l} c \in \mathbb{R}^n \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{symmetrie} \end{array}$$

- jede zulässige Vektor $(x \geq 0)$ eine Optimallösung ist wenn das Lineare Prgramm eine Lösung hat
- A sei symmetrie, ist A auch positiv definit $\Rightarrow$ es gibt eine eindeutige Lösung für das Gleichungssystem $Ax = c$. Da $x \geq 0$ eine zulässige Lösung ist, ist dies auch optimale Lösung.

Nicht jede symmetrische Matrix ist auch positiv definit
Argumentation über das duale LP bietet sich hier an

1/4

Aufgabe 2

(i)

(P_1)

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{u.d.N} & Ax \leq b \end{array}$$

Für die erste Problem : Maximierung

$\rightarrow$ in kanonische Form umformen

$$\begin{array}{ll} -\min & z' = -c^T x \\ \text{u.d.N} & -Ax \geq -b \end{array}$$

$\rightarrow$ dual Problem

$$\begin{array}{ll} -\max & w' = -b^T y \\ \text{u.d.N} & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$\rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \min & w = b^T y \\ \text{u.d.N} = & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(P_2)

$$\begin{array}{ll} \min & z = c^T x \\ \text{u.d.N} & Ax \leq b \end{array}$$

Das sind nicht die dualen Probleme
wir haben primal unrestring. Variablen
also Gleichungsnb.

Minimierung Problem

(P_2) ist schon in kanonische Form

$\longrightarrow$ dual Problem

$$\begin{array}{ll} \max & w = b^T y \\ \text{u.d.N} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

1/2

(ii) Es seien beide Probleme zulässig und eines der beiden besitze eine endliche optimale Lösung, dann besitzt das andere Problem auch eine endliche optimale Lösung.

Annahme: besitzt (P_1) eine endliche Optimallösung
Seien x_1 in (P_1) optimal
y_1 in (D_1) auch optimal

$\longrightarrow$ Wegen der starken Dualität besitzt in (D_1) auch eine endliche Opt. Lösung

D_1 ist zulässig. Die Nebenbedingungen von (D_1) und (D_2) sind äquivalent $\Rightarrow$ D_2 ist zulässig

gut, noch kurz erwähnen das man hier Korollar 6.9 nutzt

$\Rightarrow$ P_2 ist beschränkt und zulässig

$\Rightarrow$ P_2 besitzt eine endliche Optimallössung □

2/2

(iii) Es seien beide Probleme zulässig. Zeigen Sie das erste Problem ist nach oben unbeschränkt, genau dann wenn das zweite Problem nach unten unbeschränkt ist.

- (P_1) ist nach oben unbeschränkt $\overset{(6.9)}{\Rightarrow}$ D_1 ist unzulässig
- Die zulässigen Menge der dualen Probleme identisch sind, ist damit auch (D_2) unzulässig $\rightarrow$ P_2 ist unzulässig, unbeschränkt

genau und unzulässig haben wir nach Vor. ausgeschlossen

1,5/2

(iv) Angenommen beide Probleme hätten eine endliche optimale Lösung. Sei x zulässig für das erste Problem und $\hat{x}$ zulässig für das zweite. Zeigen Sie:

$$c^T x \leq c^T \hat{x}.$$

Nach der starken Dualität $\Rightarrow$ die dualen Probleme haben eine eine endliche optimale Lösung. Die dualen Probleme sind zulässig
y sei zulässige Punkt von (D_1) und (D_2) $\Rightarrow$ $c^T\hat{x} \geqslant b^T y$

$b^T y \geqslant c^T x$

kurz erwähnen das hier schwache Dualität angewendet wird

$\rightarrow$ $c^T x \leqslant c^T \hat{x}$

2/2

A3) fehlt

Aufgabe 4:

$$\max \ z = 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4$$
$$\text{U.d.N.} \ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 11$$
$$3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 \geq 23$$
$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0, \ x_3 \leq 0$$

→ in kanonische Form

$$
\begin{aligned}
-\min \ -z &= -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \\
\text{U.d.N} \quad & 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 \geqslant 11 \\
& 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 \leqslant 11 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 \geqslant 23 \\
& 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 12 \\
& x_{1,2} \geqslant 0, \ x_3 \leqslant 0 \quad x_4 \text{ frei}
\end{aligned}
$$

Sei $x_3 \leqslant 0 \Rightarrow x_3' = -x_3, \ x_3' \geqslant 0$

x_4 frei $\Rightarrow x_4 = x_4' - x_4'' \ ; \ x_4', x_4'' \geqslant 0$

Setzen in (P)

$$
\begin{aligned}
-\min \ -z &= -6x_1 + 3x_2 - 2x_3' - 5x_4' + 5x_4'' \\
\text{U.d.N} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 7x_4' - 7x_4'' \geqslant 11 \\
& -4x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 7x_4 + 7x_4'' \geqslant -11 \\
& 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 6x_4' - 6x_4'' \geqslant 23 \\
& -7x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4' + 2x_4'' \geqslant -12 \\
& x_{1,2} \geqslant 0, \quad x_3' \geqslant 0, \ x_4' \geqslant 0, \ x_4'' \geqslant 0
\end{aligned}
$$

→ Dualisieren (P) in (D):

$$
\begin{aligned}
-\max \ w &= 11y_1 - 11y_2 + 23y_3 - 12y_4 \\
& 4y_1 - 4y_2 + 3y_3 - 7y_4 \leqslant -6 \\
& 3y_1 - 3y_2 + 2y_3 - 4y_4 \leqslant 3 \\
& 8y_1 - 8y_2 - 7y_3 + 3y_4 \leqslant -2 \\
& 7y_1 - 7y_2 + 6y_3 + 2y_4 \leqslant -5 \\
& -7y_1 + 7y_2 - 6y_3 + 2y_4 \leqslant 5 \\
& y_{1,2,3,4} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

-2y_4 in Zeile 4

→ (D) in kanonische Form

$$
\begin{aligned}
\min \ w' &= -11y_1 + 11y_2 - 23y_3 + 12y_4 \\
& -4y_1 + 4y_2 - 3y_3 + 7y_4 \geqslant 6 \\
& -3y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 4y_4 \geqslant -3 \\
& -8y_1 + 8y_2 + 7y_3 - 3y_4 \geqslant 2 \\
& -7y_1 + 7y_2 - 6y_3 - 2y_4 \geqslant 5 \\
& 7y_1 - 7y_2 + 6y_3 - 2y_4 \geqslant -5 \\
& y_{1,2,3,4} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

+2y_4 in der 4. Zeile setzt sich fort

→ (D) in (P)

$$
\begin{aligned}
\max \ z' &= 6x_1 - 3x_2 + 2x_3' + 5x_4' - 5x_4'' \\
& -4x_1 - 3x_2 - 8x_3' - 7x_4' + 7x_4'' \leqslant -11 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 8x_3' + 7x_4' + 7x_4'' \leqslant 11 \\
& -3x_1 - 2x_2 + 7x_3' - 6x_4' + 6x_4'' \leqslant -23 \\
& 7x_1 + 4x_2 - 3x_3' - 2x_4' - 2x_4'' \leqslant 12 \\
& x_1, x_2, x_3', x_4', x_4'' \geqslant 0
\end{aligned}
$$

sonst alles richtig

$\longrightarrow \quad x_3' = -x_3 \quad x_3 \leq 0 \ , \ x_4 = x_4' - x_4''$

$$\max z' = 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4$$
$$4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x \geqslant 11$$
$$4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 \leqslant 11$$
$$-3x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 6x_4 \leqslant -23$$
$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 12$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0 \ , \ x_3 \leqslant 0 \ , \ x_4 \text{ frei}$$

$\longrightarrow$

$$\max z' = 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 7x = 11$$
$$3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 \geqslant 23$$
$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 12$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0 \ , \ x_3 \leqslant 0 \ , \ x_4 \text{ frei}$$

5/6