Aufgabe 1 Äquivalenzumformungen

$\Sigma = 15/16$

$$
\begin{aligned}
\neg F &= \neg(\forall x.\ (P \to Q(x)) \to P \to \forall y.\ Q(y)) \\
&= \neg(\qquad\qquad \neg P \lor \forall y. Q(y)) \\
&= \neg(\ \exists x.\ \neg(P \to Q(x)) \lor (\neg P \lor \forall y. Q(y))) \\
&= \forall x.\ (\neg P \lor Q(x)) \land \neg(\neg P \lor \forall y. Q(y)) \\
&= \forall x.\ (\neg P \lor Q(x)) \land (P \land \exists y.\ \neg Q(y)) \\
&= \forall x.\ (\neg P \lor Q(x)) \land \exists y'.\ (P_{\{y'/y\}} \land \neg Q(y')) \\
&= \forall x.\ \exists y' ((\neg P \lor Q(x)) \land (P_{\cancel{\{y'/y\}}} \land \neg Q(y'))) \\
&= \forall x.\ ((\neg P \lor Q(x)) \land (P_{\cancel{\{y'/y\}}} \land \neg Q(f(x))))
\end{aligned}
$$

Warum umbenennen?

$$\{ \{\neg P, Q(x)\}, \{P\}, \{\neg Q(f(x))\} \}$$

$$\{ \{\neg P, Q(x)\}, \{P\}, \{\neg Q(f(x_1))\} \}$$

$$\{ \{\neg P, Q(f(a))\}, \{P\}, \{\neg Q(f(a))\} \}$$

$Q(f(a))$

$\{\}$ → nicht gilt ✓

⇒ F gilt

4/4

Aufgabe 2: Pränexeform, Umwandlung in KM

Algorithmus von Martelli - Montanari

1. $\{P(\underline{g(a), x, f(h(y))}), P(\underline{y, f(z), f(z)})\}$

$$\begin{aligned} g(a) &= y \\ x &= f(z) \\ f(h(y)) &= f(z) \end{aligned}$$

Ersetzung durch erste Gleichung

$$\begin{aligned} y &= g(a) \\ x &= f(z) \\ h(y) &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= g(a) \\ x &= f(z) \\ z &= h(g(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= g(a) \\ x &= f(h(g(a))) \\ z &= h(g(a)) \end{aligned}$$

Ergebnis ist mgu mit

✓

$$\mu = \{ x \mapsto f(h(g(a))),\ y \mapsto g(a),\ z \mapsto h(g(a)) \}$$

2. $\{Q(\underline{x, f(g(a)), f(x)}), Q(\underline{f(a), y, y})\}$

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ f(g(a)) &= y \\ f(x) &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ y &= f(g(a)) \\ y &= f(f(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ y &= f(g(a)) \\ f(g(a)) &= f(f(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ y &= f(g(a)) \\ g(a) &= f(a) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ nicht unifizierbar ✓

3. $\{R(x, g(f(a)), f(x)), R(f(y), z, y)\}$

$$\begin{aligned} x &= f(y) \\ g(f(a)) &= z \\ f(x) &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f(f(x)) \\ z &= g(f(a)) \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

$\mapsto$ occure check

$\downarrow$

nicht unifizierbar ✓

4. $\{S(\underline{a, x, f(g(y))}), S(\underline{z, h(z,u), f(u)})\}$

$$\begin{aligned} a &= z \\ x &= h(z,u) \\ f(g(y)) &= f(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= a \\ x &= h(a,u) \\ g(y) &= u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= a \\ x &= h(a, g(y)) \\ u &= g(y) \end{aligned}$$

Ergebnis ist mgu mit

$$\mu = \{ z \mapsto a,\ x \mapsto h(a, g(y)),\ u \mapsto g(y) \}$$ ✓

4/4

Aufgabe 3 $\{\{l(e,o)\}, \{l(\underline{c(X,Y), s(N)}), \underline{\neg l(Y,N)}\}, \{\neg l(c(e,e),U)\}\}.$

$\{l(e,o)\}$

$\{l(c(X,Y), s(N)), \neg l(Y,N)\}$ $\{\neg l(c(e,e), U)\}$

$\boxed{\mu = \{ X \mapsto e, \; Y \mapsto e, \; U \mapsto s(N)}$

$\neg l(Y,N)\mu$
$= \neg l(e,N)$

$\{l(c(X_2,Y_2), s(N_2)), \neg l(Y_2,N_2)\}$

$\{l(e,0)\}$

$\boxed{\mu' = \{ N \mapsto 0\}}$

$\{\}$ $\neg l(e,N)\mu'$
$= \neg l(e,0)$

$\Rightarrow U = s(0)$ ✓

4/4

Aufgabe 4:

1. $\forall x.(S(x) \to (\neg P(x) \land \neg Q(x) \to R(x))) \vdash \forall x.(S(x) \land \neg R(x) \to P(x) \lor Q(x))$

$$\frac{\overline{\text{axiom}}}{S(a), \neg R(a), P(a) \vdash P(a), Q(a)} \qquad \frac{\overline{\text{axiom}}}{S(a), \neg R(a), Q(a) \vdash P(a), Q(a)}$$

$\neg\vdash$ $\qquad$ $\neg\vdash$

$$S(a), \neg R(a) \vdash \neg P(a), P(a), Q(a) \qquad S(a), \neg R(a) \vdash \neg Q(a), P(a), Q(a) \qquad \frac{\text{axiom}}{S(a), R(a) \vdash R(a), P(a), Q(a)}$$

$\vdash\land$ $\qquad$ $\neg\vdash$

$$S(a), \neg R(a) \vdash \neg P(a) \land \neg Q(a), P(a), Q(a) \qquad R(a), S(a), \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)$$

$$\frac{\overline{\text{axiom}}}{S(a), \neg R(a) \vdash S(a), P(a), Q(a)}$$

$\land\vdash$

$$\neg P(a) \land \neg Q(a) \to R(a), S(a), \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)$$

$\vdash\to$ $\qquad$ $\to\vdash$

$$S(a) \to (\neg P(a) \land \neg Q(a) \to R(a)), S(a), \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)$$

ersetze x durch a

$$\forall x\ (S(x) \to (\neg P(x) \land \neg Q(x) \to R(x))), S(a) \land \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)$$

$\vdash\lor$

$$\forall x\ (S(x) \to (\neg P(x) \land \neg Q(x) \to R(x))), S(a) \land \neg R(a) \vdash P(a) \lor Q(a)$$

$\vdash\to$

$$\forall x\ (S(x) \to (\neg P(x) \land \neg Q(x) \to R(x))) \vdash S(a) \land \neg R(a) \to P(a) \lor Q(a)$$

a frisch
$\vdash\forall$

$$\forall x.\ (S(x) \to (\neg P(x) \land \neg Q(x) \to R(x))) \vdash \forall x.\ (S(x) \land \neg R(x) \to P(x) \lor Q(x))$$

Für jeden Schritt muss man die benutzte Regel angeben!

a frisch $-0{,}5P$

$$\frac{\Delta, P(t) \vdash T}{\Delta, \forall x.\ P(x) \vdash T}\ \forall\vdash \quad t \text{ term} \qquad \frac{\Delta \vdash P(a), T}{\Delta \vdash \forall x.\ P(x), T}\ \vdash\forall \quad a \text{ frisch}$$

$$\frac{\Delta, P(a) \vdash T}{\Delta, \exists x.\ P(x) \vdash T}\ \exists\vdash \quad a \text{ frisch} \qquad \frac{\Delta \vdash P(t), T}{\Delta \vdash \exists x.\ P(x), T}\ \vdash\exists \quad t \text{ term}$$

2. $\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall x.\exists y.P(y,x)$.

$P(a,b) \vdash P(a,b)$ — wähle $y=a$ — $\exists$_R

$P(a,b) \vdash \exists y.\, P(y,b)$ — setze b für ein y — $\forall$_L — Regel ?

$\forall y.\, P(a,y) \vdash \exists y.\, P(y,b)$ — b frisch — $\exists$_L, $\forall$_R

a frisch

$\exists x.\, \forall y.\, P(x,y) \vdash \forall x.\, \exists y.\, P(y,x)$

3. Falls $x \notin Free(P)$ gilt: $\forall x.(P \to Q(x)) \vdash (P \to \forall y.Q(y))$.

axiom

$Q(a), P \vdash Q(a)$ — axiom

$\forall x.\, Q(x), P \vdash Q(a)$ — $P \vdash P, Q(a)$ — Regel ?

a frisch

$P \to \forall x.\, Q(x), P \vdash Q(a)$

$(P \to \forall x.Q(x)), P \vdash \forall y.Q(y)$

$P \to \forall x.\, Q(x) \vdash P \to \forall y.Q(y)$

Für welchen Schritt ist $x \notin Frei(P)$ nötig ?

−0,5 P

3/4