Aufgabe 1: 4/6 $\Sigma = 9/16$

1. Alle Vögel legen Eier. Kein Tier, das Eier legt, isst gern Körner

$$\varphi_1 = \forall x.(\text{Vogel}(x) \rightarrow \text{LegtEier}(x)) \land \neg\exists x(\text{LegtEier}(x) \xrightarrow{\land} \text{IsstKörner}(x))$$

$\forall x\,(\text{LegtEier}(x) \rightarrow \neg\,\text{IsstKörner}(x))$

$-0{,}5P$

a) $\exists x.(\text{Vogel}(x) \land \text{IsstKörner}(x))$
b) $\forall x.(\text{Vogel}(x) \rightarrow \text{IsstKörner}(x))$
c) $\neg\exists x.(\text{Vogel}(x) \land \text{IsstKörner}(x))$

Gegenbeispiel:
a) Tiere = {a, b, c}, Vogel = {b, c}, legtEier = {b, c}, Isstkörner = {a}

b) Tiere = {a, b, c, d, e}, Vogel = {a, b, c}, LegtEier = {a, b, c, e}, Isstkörner = {d} ✓

c) kein Gegenbeispiel

2. Kein Vogel ist ein Fisch. Kein Fisch ist eine Pflanze

$$\varphi_2 = \neg\exists x(\text{Vogel}(x) \land \text{Fisch}(x)) \land \neg\exists x.(\text{Fisch}(x) \land \text{Pflanze}(x))$$ ✓

a) $\forall x.(\text{Pflanze}(x) \longrightarrow \text{Vogel}(x))$
b) $\neg\exists x(\text{Pflanze}(x) \xrightarrow{\land} \text{Vogel}(x))$ $-0{,}5P$
c) $\exists x.(\text{Vogel}(x) \land \neg\,\text{Pflanze}(x))$

a) Vogel = {a, b} Fisch = {c, d} Pflanze = {e, f}
b) Vogel = {a, b} Fisch = {c, d} Pflanze = {a, b} → falsch $-0{,}5P$: Alle Pflanzen sind doch Vogel.
c) Vogel = {a, b} Fisch = {c, d} Pflanze = {a, f} → falsch $-0{,}5P$.
x = b erfüllt Vogel(b) ∧ ¬ Pflanze(b). Pflanze = {a, b} sollte richtiges GB sein.

Aufgabe 2: Gültigkeit in einer Struktur 1,5/2 $\Sigma = \{F, P\}$

$\circ$ sei " Funktionssymbol $\circ \in F$
R sei zweistelliges Relationssymbol $R \in P$

$\mathfrak{A}$

$F = \exists x.\forall y.R(x \circ x, y)$ $G = \forall y.\exists x.R(x \circ x, y)$

1. Passende Struktur $\mathfrak{A}$

auch nicht für F

$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \overbrace{\{+^{\mathbb{N}}\}}^{F}; \overbrace{\{=^{\mathbb{N}}\}}^{P})$ gilt für F nicht für G

- Es existiert natürliche Zahl x, sodass natürliche Zahl y gilt (F) aber nicht jede natürliche Zahl y, existiert eine natürliche Zahl x
Bsp: $x + x = y$

$F = \exists x.\forall y.\cancel{R}(x + x = y)$ → gilt
$G = \forall y.\exists x.\cancel{R}(x + x = y)$ → nicht gilt, sei $\cancel{x}^{y} = 3$ ⇒ kein natürliche Zahl $\cancel{y}^{x}$ gilt.

↳ Es gibt kein x, sodass ∀y x + x = y gilt. $-0{,}5P$
Die Grundmenge R sollte passen.

2. Interpretation in beiden Formeln

$\mathcal{A} = (\{0, 1\} \quad , \{+^{\mathbb{N}}\}, \{\leq^{\mathbb{N}}\})$ ✓

- Es existiert immer eine natürliche Zahl x sodass für alle y gilten F und G
  Bsp F : für $\mathcal{A}$ und $\alpha: x = 0_B , y = 0_B \Rightarrow 0 + 0 \leq 0$
  $\alpha: x = 1 , y = 0 \Rightarrow 1 + 1 \leq 0$
  ...

Aufgabe 3 : Semantik 3/4

1). $\models \forall x. F \rightarrow F\{t/x\}$

- wir müssen zeigen, dass für jede Struktur $\mathcal{A}$ und jede Belegung α gilt.
  aus $\alpha(\forall x. F) = 1$ folgt $\alpha(F\{t/x\}) = \alpha_{[x \mapsto \alpha(t)]}(F)$

✓ nein −0,5P

−0,5P $\alpha_{[x \mapsto a]}(F) = 1 \ \forall a \in A$

Sei $\alpha(t) = a$

$\Rightarrow \alpha(F\{t/x\}) = \alpha_{[x \mapsto a]}(F) = 1$

$= \min_{a \in A} \alpha_{[t \rightarrow a]}(F\{t/x\})$

$= \min_{a \in A} \alpha_{[t \rightarrow a]} F \Rightarrow \alpha_{[t \rightarrow a]} F = 1$

$\Rightarrow$ sei $\alpha(\forall x. F) = 1$ und $\alpha(F_{\{t/x\}}) = 1$

$\Rightarrow \models \forall x. F \rightarrow F\{t/x\}$ ✓

2) $x \notin \text{Frei}(F) \land \models F \rightarrow G$ dann gilt $\models F \rightarrow \forall x. G$

- Beweisen wir wie a

Wir zeigen, dass für jede Struktur $\mathcal{A}$ und jede Belegung α gilt.

aus $\alpha(F) = 1$ und sei $x \notin \text{Frei}(F) \Rightarrow \alpha_{[x \rightarrow a]}(F) = 1 = \alpha(F)$

aus der Aufgabestellung gilt $\models F \rightarrow G$, da $\alpha_{[x \rightarrow a]}(F) = 1$

dann muss auch gelten $\alpha_{[x \rightarrow a]} G = 1 \Rightarrow \alpha(\forall x. G) = 1$

$\Rightarrow \models F \rightarrow \forall x. G$ ✓

Aufgabe 4: Semantik 0,5 | 4

Var x , Term t (in dem y nicht vorkommt)

$$\alpha_{[y \to a]} (t \{ y / x \}) = \alpha_{[x \to a]} (t)$$

1) $t = v$ ist eine Variable

i. $v = x$

$$\begin{aligned}\alpha_{[y\mapsto a]}(t\{y/x\}) &= \alpha_{[y\mapsto a]}(v\{y/x\}) \\ &= \alpha_{[y\mapsto a]}(y) \\ &= a \\ &= \alpha_{[x\mapsto a]}\{v\}\end{aligned}$$

(Sei $t = v$) ✓