Logik Prof. Dr. H. Peter Gumm
Wintersemester 22/23

Übungszettel 14 - Bonuszettel

Abgabetermin: 11. Februar 2023, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

Aufgabe 1. Der Sequenzenkalkül mit den einfachen Regeln $\forall$-L und $\exists$-R ist nicht vollständig. Um die Vollständigkeit zu erreichen, kann man $\forall$-L und $\exists$-R durch die ihre copy-Varianten (die quantifizierte Formel wird vor der Instanziierung kopiert) ersetzen.
Zeigen Sie, dass man auch ohne diese copy-Varianten auskommen könnte, wenn man alternativ

- die Regel contract-L,
- oder die cut-Regel

benutzen darf. Die Behauptung ist also, dass der Sequenzenkalkül mit den einfachen $\forall$-L und $\exists$R-Regeln vollständig wird, wenn man *contract-L* oder *cut* benutzen darf.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man ein Dominoproblem in eine Menge von Axiomen A_1, A_2, A_3 übersetzen kann, so dass das Dominoproblem genau dann lösbar ist, wenn aus A_1 und A_2 die Aussage A_3 folgt. Betrachten Sie nun das konkrete Dominoproblem $D = \{\langle 1, 01\rangle, \langle 0, 01\rangle, \langle 010, \varepsilon\rangle\}$.

(a) Geben Sie für dieses Problem eine Lösung an (1 Pkt)

(b) Modellieren Sie das Problem durch eine Menge von prädikatenlogische Formeln, die genau dann widersprüchlich sind, wenn D eine Lösung hat. (2 Pkt)

(c) Demonstrieren Sie die Lösbarkeit durch einen Resolutionsbeweis. (3 Pkt)

Aufgabe 3. Graphen modellieren wir durch eine zweistellige Relation $E(x, y)$, die ausdrücken soll, dass es eine Kante (engl.: *edge*) von x zu y gibt. Falls $E(x, y)$, sagt man auch, dass y ein Nachbar von x ist. Zeigen Sie, dass die Eigenschaft „*Jeder Knoten hat nur endlich viele Nachbarn*“ nicht in der Prädikatenlogik ausdrückbar ist.

(4 Punkte)

Für jedes n gibt es eine Formel Fn(x)
"Knoten x hat mind. n Nachbarn"

ZB x sei Knoten

F3(x) sei 3 die Anzahl der Nachbarn

$$F3(x) = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (E(x, x_1) \wedge E(x, x_2) \wedge E(x, x_3) \wedge \neg(x = x_1) \wedge \neg(x = x_2) \wedge \neg(x = x_3))$$

$\Rightarrow$ Fn(x) = ...

Aufgabe 1. Der Sequenzenkalkül mit den einfachen Regeln ∀-L und ∃-R ist nicht vollständig. Um die Vollständigkeit zu erreichen, kann man ∀-L und ∃-R durch die ihre copy-Varianten (die quantifizierte Formel wird vor der Instanziierung kopiert) ersetzen.
Zeigen Sie, dass man auch ohne diese copy-Varianten auskommen könnte, wenn man alternativ

- die Regel contract-L,
- oder die cut-Regel

benutzen darf. Die Behauptung ist also, dass der Sequenzenkalkül mit den einfachen ∀-L und ∃R-Regeln vollständig wird, wenn man *contract-L* oder *cut* benutzen darf.

contract L: $\dfrac{\Delta,\ \forall x.F,\ F\{t/x\} \vdash T}{\Delta,\ \forall x.F \vdash T}$ contract $\dfrac{\Delta \vdash \exists x.F,\ F\{t/x\},\ T}{\Delta \vdash \exists x.F,\ T}$

contract_R aus contract_L

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta \vdash G, G, T}{\Delta, \neg G \vdash G, T}}{\Delta, \neg G, \neg G \vdash T}}{\Delta, \neg G \vdash T}}{\Delta \vdash G, T}$$

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man ein Dominoproblem in eine Menge von Axiomen A_1, A_2, A_3 übersetzen kann, so dass das Dominoproblem genau dann lösbar ist, wenn aus A_1 und A_2 die Aussage A_3 folgt. Betrachten Sie nun das konkrete Dominoproblem $D = \{\langle 1, 01\rangle, \langle 0, 01\rangle, \langle 010, \varepsilon\rangle\}$.

(a) Geben Sie für dieses Problem eine Lösung an (1 Pkt)

(b) Modellieren Sie das Problem durch eine Menge von prädikatenlogische Formeln, die genau dann widersprüchlich sind, wenn D eine Lösung hat. (2 Pkt)

(c) Demonstrieren Sie die Lösbarkeit durch einen Resolutionsbeweis. (3 Pkt)

a, Lösung für das Problem

$D = \{ \langle 1, 01\rangle, \langle 0, 01\rangle, \langle 010, \varepsilon\rangle \}$

1	0	010
01	01	ε

0	1	010	1
01	01	ε	01