

## Übungszettel 13

**Abgabetermin:** 4. Februar 2023, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

**Aufgabe 1** (Äquivalenzumformungen). Zeigen Sie mit Hilfe der Resolventenmethode, dass

$$\forall x.(P \rightarrow Q(x)) \rightarrow P \rightarrow \forall y.Q(y)$$

gilt, falls  $x \notin \text{Free}(P)$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 2** (Pränexe Normalform, Umwandlung in Klauselmengen). Wenden Sie den Algorithmus von Martelli-Montanari schrittweise auf die folgenden Mengen von Atomen an und finden sie jeweils den *mgu* oder begründen Sie, warum ein *mgu* nicht existiert:

1.  $\{P(g(a), x, f(h(y))), P(y, f(z), f(z))\}$
2.  $\{Q(x, f(g(a)), f(x)), Q(f(a), y, y)\}$
3.  $\{R(x, g(f(a)), f(x)), R(f(y), z, y)\}$
4.  $\{S(a, x, f(g(y))), S(z, h(z, u), f(u))\}$

(4 Punkte)

**Aufgabe 3** (Sichere Substitution). Ein Prolog Programm bestehe aus den Klauseln

$$\{\{l(e, o), \{l(c(X, Y), s(N)) \vee \neg l(Y, N)\}, \{ \neg l(c(e, e), U) \}\}.$$

zk

Zeigen Sie wie mit Hilfe der Resolventenmethode die Variable  $U$  in der Zielklausel bestimmt wird. Wie in Prolog üblich, sind  $X, Y, N$  und  $U$  Variablen,  $e$  und  $o$  Konstanten und  $l$  ein Prädikatsname.

(4 Punkte)

**Aufgabe 4** (Semantik). Zeigen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die folgenden prädikatenlogischen Sequenzen:

1.  $\forall x.(S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \vdash \forall x.(S(x) \wedge \neg R(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x))$
2.  $\exists x.\forall y.P(x, y) \vdash \forall x.\exists y.P(y, x).$
3. Falls  $x \notin \text{Free}(P)$  gilt:  $\forall x.(P \rightarrow Q(x)) \vdash (P \rightarrow \forall y.Q(y)).$

(4 Punkte)

$$\{R(x, f(a), g(f(y))), R(f(y), z, g(f(z)))\} \quad \begin{matrix} f(y) = f(x) \\ \Rightarrow y = x \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc} x = f(y) & & x = f(y) \\ f(a) = z & \rightarrow & z = f(a) \\ g(f(y)) = g(f(z)) & \rightarrow & f(y) = f(z) \end{array} \quad \begin{array}{c} x = f(y) \\ z = f(a) \\ y = \underbrace{z}_{f(a)} \end{array}$$

⚠  $g(\underline{x}) = f(\underline{x}) \rightarrow$  nicht unifizierbar  
 $x = f(g(x)) \rightarrow$  occur check  
 $x = f(x) \rightarrow$   ~~$y = x$~~

$$\{\{l(e, o)\}, \{l(c(X, Y), s(N)) \vee \neg l(Y, N)\}, \{\neg l(c(e, e), U)\}\}.$$

$$l(e, o)$$

$$\begin{array}{cc} \{A, B\} & \{\neg A, B\} \\ & \searrow \swarrow \\ & \{B\} \end{array}$$

t term

$$\frac{\Delta, P(t) \vdash T}{\Delta, \forall x. P \vdash T} \quad \forall - L$$

a frist

$$\frac{\Delta \vdash P(a), T}{\forall R. \Delta \vdash \forall x. P, T}$$

a frist

$$\frac{\Delta, P(a) \vdash T}{\exists t. \Delta, \exists x. P \vdash T}$$

t term

$$\frac{\Delta \vdash P(t), T}{\exists R. \Delta \vdash \exists x. P, T}$$

$B = B_i$  Axiom

---

 $A(B) \vdash A(B_i), B(a)$ 

---

 $A(B), A(B_i) \vdash B(a)$ 

$b_i = a$  Axiom

---

 $A(B), B(B_i) \vdash B(a)$ 

---

 $A(B), A(B_i) \rightarrow B(B_i) \vdash B(a)$  $\forall x. (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x. A(x), \vdash B(a)$ 

---

 $\forall x. (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x. A(x) \vdash \forall x. B(x)$ 

$\neg_R$

---

 $\forall x. (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash \neg \forall x. A(x), \forall x. B(x)$ 

$\vee_R$

---

 $\forall x. (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash (\neg \forall x. A(x) \vee \forall x. B(x))$ 

$\rightarrow_R$

---

 $\vdash \forall x. (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\neg \forall x. A(x) \vee \forall x. B(x))$

# Aufgabe 1

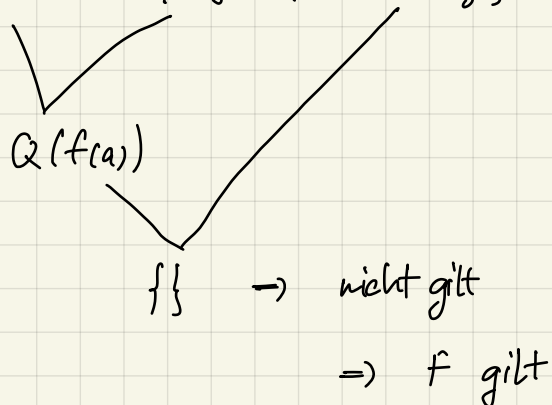
## Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned}
 \neg F &= \neg (\forall x. (P \rightarrow Q(x)) \rightarrow P \rightarrow \forall y. Q(y)) \\
 &= \neg (\neg (\exists x. \neg (P \rightarrow Q(x)) \vee (\neg P \vee \forall y. Q(y))) \\
 &= \neg (\exists x. \neg (P \rightarrow Q(x)) \vee (\neg P \vee \forall y. Q(y))) \\
 &= \forall x. (\neg P \vee Q(x)) \wedge \neg (\neg P \vee \forall y. Q(y)) \\
 &= \forall x. (\neg P \vee Q(x)) \wedge (P \wedge \exists y. \neg Q(y)) \\
 &= \forall x. (\neg P \vee Q(x)) \wedge \exists y'. (P_{\{y'/y\}} \wedge \neg Q(y')) \\
 &= \forall x. \exists y' ((\neg P \vee Q(x)) \wedge (P_{\{y'/y\}} \wedge \neg Q(y'))) \\
 &= \forall x. ((\neg P \vee Q(x)) \wedge (P_{\{y'/y\}} \wedge \neg Q(f(x))))
 \end{aligned}$$

$$\{ \{ \neg P, Q(x) \}, \{ P \}, \{ \neg Q(f(x)) \} \}$$

$$\{ \{ \neg P, Q(x) \}, \{ P \}, \{ \neg Q(f(x_1)) \} \}$$

$$\{ \{ \neg P, Q(f(a)), \{ P \}, \{ \neg Q(f(a)) \} \}$$



## Aufgabe 2: Pränexenform, Umwandlung in KM

Algorithmus von Martelli-Montanari

1.  $\{P(\underline{g(a)}, x, \underline{f(h(y))}), P(\underline{y}, \underline{f(z)}, \underline{f(z)})\}$

$$\begin{aligned} g(a) &= y \\ x &= f(z) \\ f(h(y)) &= f(z) \end{aligned}$$

Ersetzung durch erste Gleichung

$$\begin{aligned} y &= g(a) \\ x &= f(z) \\ h(y) &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= g(a) \\ x &= f(z) \\ z &= h(g(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= g(a) \\ x &= f(h(g(a))) \\ z &= h(g(a)) \end{aligned}$$

Ergebnis ist mgu mit

$$\mu = \{ \begin{aligned} x &\mapsto f(h(g(a))) \\ y &\mapsto g(a) \\ z &\mapsto h(g(a)) \end{aligned} \}$$

2.  $\{Q(\underline{x}, \underline{f(g(a))}, \underline{f(x)}), Q(\underline{f(a)}, \underline{y}, \underline{y})\}$

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ f(g(a)) &= y \\ f(x) &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ y &= f(g(a)) \\ y &= f(f(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ y &= f(g(a)) \\ f(g(a)) &= f(f(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ y &= f(g(a)) \\ g(a) &= f(a) \rightarrow \text{nicht} \\ &\quad \text{unifizierbar} \end{aligned}$$

3.  $\{R(\underline{x}, \underline{g(f(a))}, \underline{f(x)}), R(\underline{f(y)}, \underline{z}, \underline{y})\}$

$$\begin{aligned} x &= f(y) \\ g(f(a)) &= z \\ f(x) &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= f(f(x)) \quad \mapsto \text{occure check} \\ z &= g(f(a)) \quad \downarrow \\ y &= f(x) \quad \text{nicht unifizierbar} \end{aligned}$$

4.  $\{S(\underline{a}, \underline{x}, \underline{f(g(y))}), S(\underline{z}, \underline{h(z,u)}, \underline{f(u)})\}$

$$\begin{aligned} a &= z \\ x &= h(z, u) \\ f(g(y)) &= f(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= a \\ x &= h(a, u) \\ g(y) &= u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= a \\ x &= h(a, g(y)) \\ u &= g(y) \end{aligned}$$

Ergebnis ist mgu mit

$$\mu = \{ \begin{aligned} z &\mapsto a, \\ x &\mapsto h(a, g(y)) \\ u &\mapsto g(y) \end{aligned} \}$$

# Aufgabe 3

$\{\{l(e, o), \{l(c(X, Y), s(N)) \text{  ~~, } \neg l(Y, N)\}~~, \{ \neg l(c(e, e), U) \}\}$ .

$$\{l(e, o)\}$$

$$\{l(c(X, Y), s(N)), \neg l(Y, N)\}$$

$$\{\neg l(c(e, e), U)\}$$

$$\mu = \{ \begin{array}{l} X = e, Y = e \\ U = s(N) \end{array}$$

$$\neg l(Y, N) \mu = \neg l(e, N)$$

$$\{l(c(X_2, Y_2), s(N_2)), \neg l(Y_2, N_2)\}$$

$$\{l(e, o)\}$$

$$\mu' = \{ N = o \}$$

$$\{\} \quad \neg l(e, N) \mu' = \neg l(e, o)$$

$$\Rightarrow U = s(o)$$

$p(a, a, a)$   
 $p(f(u), g(f(u)), v) :- p(u, g(u), v)$   
 $p(a, g(y), x) :- p(y, a, x)$

$:- p(f(f(a)), g(x), z) \quad // \text{Goal}$

$p(f(u), g(f(u)), v) :- p(u, g(u), v)$

$:- p(f(f(a)), g(x), z)$

$\mu = \{$   
 $u \rightarrow f(a)$   
 $x \rightarrow f(u)$   
 $z \rightarrow v \}$

$p(f(a), g(f(a)), v)$

$\mu' = \{ u = a, z = v \}$

$p(a, g(y), x) :- p(y, a, x)$

$p(a, g(a), z)$

$\mu'' = \{$   
 $y \rightarrow a,$   
 $z \rightarrow x \}$

$p(a, a, x)$

$p(a, a, a)$

$\{\}$

$\mu''' = \{ x \rightarrow a \}$

## Aufgabe 4:

$$1. \forall x. (S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \vdash \forall x. (S(x) \wedge \neg R(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x))$$

axiom

$$\frac{S(a), \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)}{\neg \vdash}$$

axiom

$$\frac{S(a), \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)}{\neg \vdash}$$

$$\frac{S(a) \vdash \neg P(a) \quad S(a) \vdash \neg Q(a)}{S(a) \vdash \neg P(a) \wedge \neg Q(a)}$$

$\vdash \wedge$

axiom

$$\frac{S(a), R(a) \vdash R(a), P(a), Q(a)}{\neg \vdash}$$

$$\frac{S(a), \neg R(a) \vdash \neg P(a) \wedge \neg Q(a) \quad R(a) \vdash P(a), Q(a)}{S(a), \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)}$$

axiom

$$\frac{S(a), \neg R(a) \vdash S(a), P(a), Q(a)}{\neg \vdash}$$

$$\frac{\neg P(a) \wedge \neg Q(a) \rightarrow R(a) \vdash P(a), Q(a)}{S(a), \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)}$$

$\rightarrow L$

$$\frac{S(a) \rightarrow (\neg P(a) \wedge \neg Q(a) \rightarrow R(a)) \vdash P(a), Q(a)}{S(a), \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)}$$

$$\frac{\forall x (S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \vdash P(a), Q(a)}{S(a) \wedge \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)}$$

$$\frac{\forall x (S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \vdash P(a) \vee Q(a)}{S(a) \wedge \neg R(a) \vdash P(a) \vee Q(a)}$$

$$\frac{\forall x (S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \vdash S(a) \wedge \neg R(a) \rightarrow P(a) \vee Q(a)}{\neg \vdash}$$

a frisch

$$\frac{\forall x. (S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \vdash \forall x. (S(x) \wedge \neg R(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x))}{\neg \vdash}$$

$$2. \exists x. \forall y. P(x, y) \vdash \forall x. \exists y. P(y, x).$$

$$\underline{P(a, b) \vdash P(a, b)}$$

wähle  $y=a$   $\exists$ -R

$$\underline{P(a, b) \vdash \exists y. P(y, b)}$$

setze  $b$  für ein  $y$   $\forall$ -L

$$\text{a frisch} \quad \underline{\forall y. P(a, y) \vdash \exists y. P(y, b)}$$

b frisch  $\exists$ -L  
 $\forall$ -R

$$\underline{\exists x. \forall y. P(x, y) \vdash \forall x. \exists y. P(y, x)}$$

$$3. \text{ Falls } x \notin \text{Free}(P) \text{ gilt: } \forall x. (P \rightarrow Q(x)) \vdash (P \rightarrow \forall y. Q(y)).$$

axiom

$$\underline{Q(a), P \vdash Q(a)}$$

axiom

$$\underline{\forall x. Q(x) \vdash Q(a)}$$

$$\underline{P \vdash P, Q(a)}$$

$$\underline{P \rightarrow \forall x. Q(x), P \vdash Q(a)}$$

a frisch

$$\underline{(P \rightarrow \forall x. Q(x)), P \vdash \forall y. Q(y)}$$

$$\underline{P \rightarrow \forall x. Q(x) \vdash P \rightarrow \forall y. Q(y)}$$