

13.5

Übungen zur LINEAREN OPTIMIERUNG
 6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Gegeben sei das folgende LP:

A2 . B(5)

(4)

$$\begin{array}{ll} \min & z = -5x_1 - 7x_2 \\ \text{U.d.N.} & -3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

4/4

Zeichnen Sie die zulässige Menge und kennzeichnen Sie die **Extrempunkte**. Zeichnen Sie außerdem **zwei linear unabhängige Richtungen der Unbeschränktheit** ein.

Aufgabe 2

(3+2)

(i) Bestimmen Sie alle zulässigen Basislösungen der durch die Bedingungen

215/3

$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

gegebenen Menge. Welche der berechneten Basislösungen sind degeneriert?

(ii) Es wird nun die Menge $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

212
= 4.5/5

betrachtet. Ist $x = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T$ eine **zulässige Basislösung**?

Aufgabe 3 Die Menge S sei durch die Bedingungen

(5)

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array}$$

gegeben. Stellen Sie den Punkt $y = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{9}{4} \quad 1\right)^T$, als konvex Kombination der Extrempunkte von S plus, falls nötig, einer Richtung der Unbeschränktheit dar. Geben Sie zwei verschiedene Darstellungen an.

215

Aufgabe 4

(3+3)

- (i) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und die konvexe Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass sich der Rezessionskegel darstellen lässt durch

$$S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \geq 0\}.$$

3/
3+3

- (ii) Es wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und zu einem beliebigen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ die Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$ betrachtet. Stellen Sie den Rezessionskegel $S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \geq 0\}$ in der Form

$$S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^3 : d_3 \geq f(d_1, d_2)\}, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dar.

Abgabe: Dienstag, 06.12.22, vor der Vorlesung.

Richtung der Unbeschränktheit

$$x + \lambda d$$

immer zulässig
 $\lambda \geq 0$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$A(x + \lambda d) = b$$

$$\underline{x + \lambda d} \geq 0 \Rightarrow d \geq 0$$

$$\lambda \cdot Ad = 0$$

$$\Rightarrow Ad = 0$$

Aufgabe 1:

$$\min z = -5x_1 - 7x_2$$

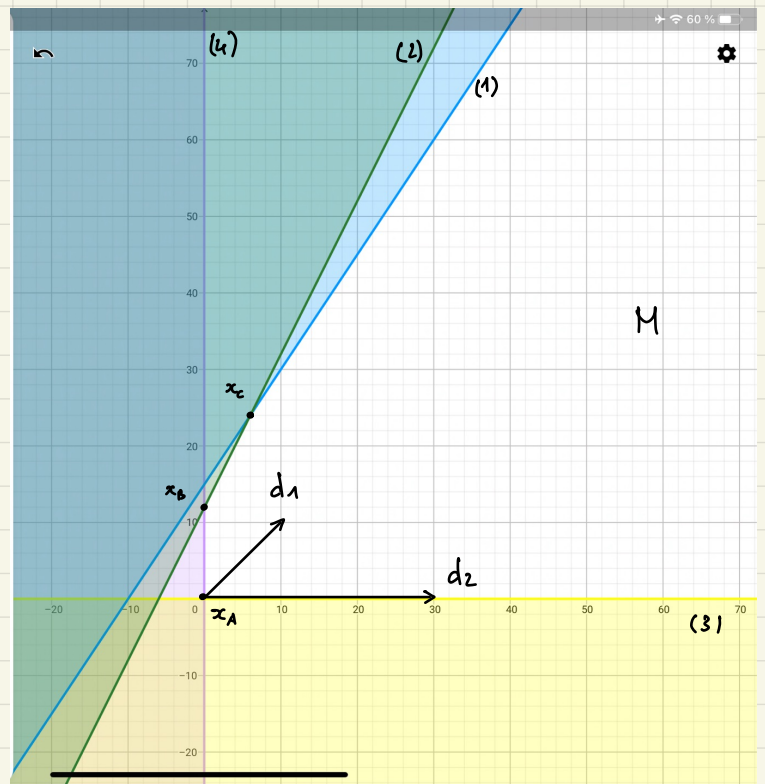
$$\begin{aligned} \text{u.d.N} \quad & -3x_1 + 2x_2 \leq 30 \quad (1) \\ & -2x_1 + x_2 \leq 12 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad (3,4) \end{aligned}$$

Die Extrempunkte sind

$$x_A = (0, 0)^T, \quad x_B = (0, 12)^T$$

$$x_C = (6, 24)^T$$

Es gibt keine Verbindung zwischen 2 zulässigen Punkten, sodass die Ecken auf diese Strecke liegen.



⇒ Die Extrempunkte sind genau die Ecken der zulässigen Mengen (weiße Bereich)

die Richtung der Unbeschränktheit:

$$\text{Sei } \alpha > 0 \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \end{pmatrix}$$

seien d_1, d_2 2 linear unabhängige Vektoren $d = \langle d_1, d_2 \rangle$

$$A(x + \alpha d) \leq b \quad \rightarrow \quad Ax + \alpha Ad \leq b$$

$$\text{Sei } x \in M, \quad x = x_A = (0, 0)^T \Rightarrow Ax = 0$$

$$\Rightarrow \alpha Ad \leq b$$

$$\Leftrightarrow Ad \leq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } d_1 &= (1, 1)^T \Rightarrow Ad = (-1, -1)^T \leq 0 \\ d_2 &= (1, 0)^T \Rightarrow Ad = (-3, -2)^T \leq 0 \end{aligned}$$

→ d_1 und d_2 sind Richtung der Unbeschränktheit

Aufgabe 2:

(i) Bestimmen Sie alle zulässigen Basislösungen der durch die Bedingungen

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

gegebenen Menge. Welche der berechneten Basislösungen sind degeneriert?

i) ZBL

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\text{Rang}(A) = 2$

zu den Basis $\{x_1, x_2\}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 6/17 & -1/17 \\ -1/17 & 3/17 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5/17 \\ 2/17 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 5/17 \\ 2/17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ZBL

f1) Basis $\{x_1, x_3\}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 1/7 & -3/7 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 0 \\ -2/7 \\ 0 \end{pmatrix}$ keine ZBL

f1) Basis $\{x_1, x_4\}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ZBL

f1) Basis $\{x_2, x_3\}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/8 \\ 3/4 & -1/8 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 7/24 \\ 5/8 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/24 \\ 5/8 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ZBL

f1) Basis $\{x_2, x_4\}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 6/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ZBL

$$t) \text{ Basis } \{x_3, x_4\} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist ZBL}$$

Die Basislösung $\{x_1, x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}$ sind degenerate

ii) Menge $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

(ii) Es wird nun die Menge $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Ist $x = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T$ eine zulässige Basislösung?

$$\Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} = b$$

$\Rightarrow x$ ist eine zulässige Lösung (ZL)

die Vektoren $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$ sind linear abhängig für

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 8 + 7 \\ 2 - 10 + 8 \\ 3 - 12 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x$ ist keine ZBL

Aufgabe 3:

Aufgabe 3 Die Menge S sei durch die Bedingungen

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

gegeben. Stellen Sie den Punkt $y = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{9}{4} \quad 1\right)^T$, als konvex Kombination der Extrempunkte von S plus, falls nötig, einer Richtung der Unbeschränktheit dar. Geben Sie zwei verschiedene Darstellungen an.

$$\text{Menge } S = \{x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

Die Basislösung lässt sich darstellen als $x_B = B^{-1}b$ mit invertierbare Untermatrix B von A

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(A) = 1$$

$$\text{zu Basis } \{x_1\} \quad B = (1) \Rightarrow B^{-1} = (1)$$

$$\Rightarrow B^{-1} \cdot b = 2 \Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ist eine ZBL, Extrempunkt}$$

$$\text{zu Basis } \{x_2\} \quad B = (2) \Rightarrow B^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} \cdot b = 1 \Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ist eine ZBL, Extrempunkt}$$

$$\text{zu Basis } \{x_3\} \quad B = (-3) \Rightarrow B^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} \cdot b = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{keine ZBL}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Sei $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ die Richtung der Unbeschränktheit.

$$\Rightarrow Ad = 0 \quad \text{und} \quad d > 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = d_1 + 2d_2 - 3d_3 = 0 \Rightarrow d_1 = 3d_3 - 2d_2$$

Sei $y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 9/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Konvexkombination der Extrempunkte

Sei $\alpha \in [0, 1]$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \alpha \cdot x_B^{(1)} + (1 - \alpha) x_B^{(2)} + d \\ = & \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3d_3 - 2d_2 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 9/4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Aufgabe 4

- (i) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und die konvexe Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass sich der Rezessionskegel darstellen lässt durch

$$S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \geq 0\}.$$

- (ii) Es wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und zu einem beliebigen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ die Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$ betrachtet. Stellen Sie den Rezessionskegel $S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \geq 0\}$ in der Form

$$S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^3 : d_3 \geq f(d_1, d_2)\}, \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dar.

$$\text{ii) Sei } d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$$

$$\begin{aligned} S^\infty &= \{d \in \mathbb{R}^3 : x + \lambda d \in S, \forall x \in S, \forall \lambda \geq 0\} \\ &= \{d \in \mathbb{R}^3 : Ad \geq 0\} \end{aligned}$$

$$Ad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 + d_3 \\ -d_1 + d_2 + d_3 \\ -d_1 - d_2 + d_3 \\ d_1 - d_2 + d_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 &\geq 0 \\ -d_1 + d_2 + d_3 &\geq 0 \\ -d_1 - d_2 + d_3 &\geq 0 \\ d_1 - d_2 + d_3 &\geq 0 \end{aligned} &\rightarrow \begin{aligned} d_3 &\geq -d_1 - d_2 & (1) \\ d_3 &\geq d_1 - d_2 & (2) \\ d_3 &\geq d_1 + d_2 & (3) \\ d_3 &\geq -d_1 + d_2 & (4) \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{Aus (1) (2)} \Rightarrow d_3 \geq |d_1| - d_2$$

$$(3) (4) \rightarrow d_3 \geq |d_1| + d_2$$

$$\Rightarrow d_3 \geq |d_1| + |d_2| = f: (d_1, d_2)$$