Aufgabe 2 Neuton Verfahren A1) 0/4

11/20

Ableitungen $f(x) = -3x + e^{x} \rightarrow f'(x) = -3 + e^{x}$
$\rightarrow f''(x) = e^{x}$

1) Für Startwert $x^0 = 0.5$

2) Test für Optimalität

$$x^1 = x^0 - \frac{f'(x^0)}{f''(x^0)} = 0{,}5 - \frac{-3+e^{0.5}}{e^{0.5}} \approx 1{,}3196$$

$$x^2 = x^1 - \frac{f'(x^1)}{f''(x^1)} = 1{,}3196 - \frac{-3+e^{1{,}3196}}{e^{1{,}3196}} \approx 1{,}1213$$

$$x^3 = x^2 - \frac{f'(x^2)}{f''(x^2)} = 1{,}1213 - \frac{-3+e^{1{,}1213}}{e^{1{,}1213}} \approx 1{,}0988$$

$f(1{,}0988) \approx -0{,}2958$ $f'(x^{(3)}) = 0{,}00009$

$\Rightarrow$ Nach 3 Schritten des Newton Verfahren ist die Minimum von $f(x) = -3x + e^{x}$ mit $x^0 = 0.5$ liegt bei Punk $(1{,}0988 \ , \ -0{,}2958)$

1) Für Startwert $y^0 = -2$

2) Test für Optimalität

$$y^1 = y^0 - \frac{f'(y^0)}{f''(y^0)} = -2 - \frac{-3+e^{-2}}{e^{-2}} \approx 19{,}1617$$

$$y^2 = y^1 - \frac{f'(y^1)}{f''(y^1)} = 19{,}1617 - \frac{-3+e^{y^1}}{e^{y^1}} \approx 18{,}1617$$

$$y^3 = y^2 - \frac{f'(y^2)}{f''(y^2)} = 18{,}1617 - \frac{-3+e^{y^2}}{e^{y^2}} \approx 17{,}1617$$

$f(17{,}1617) \approx 28394277$ $f'(x^{(3)}) = 2{,}8551 \cdot 10^{7}$

$\Rightarrow$ Nach 3 Schritten des Newton Verfahren ist die Minimum von $f(\ ) = - \ + e$ mit $y^0 = -2$ liegt bei Punk $(17{,}1617 \ , \ 28394277)$

Mit Startpoint $y^0 = -2$ kann Minimum nicht approximiert werden.

ja dieser Startwert liefert keine gute Approximation, woran sieht man das?

4/5

$\Rightarrow$ New-Ton Verfahren hängt von Startwert ab

Aufgabe 01

$x, y \in \mathbb{R}^n$, z.z. $\lambda x + (1-\lambda) y = v \in M$ $\quad \tilde{x} = (x_1 \dots x_n)$

$\tilde{y} = (y_1 \dots y_n)$

$\Rightarrow v = (v_1, \dots v_n) = \lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \dots, \underbrace{\lambda x_n + (1-\lambda) y_n}_{v_n}$

$\tilde{v} = \lambda \tilde{x} + (1-\lambda) \tilde{y} = v_1, \dots, v_{n+1}, 1$

$\sqrt{v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 + 1^2} = \| \tilde{v}_2 \|_2 = \| \lambda \tilde{x} + (1-\lambda) \tilde{y} \|_2 \leq \lambda \| \tilde{x} \|_2 + (1-\lambda) \| \tilde{y} \|_2$

$= \lambda \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 1^2} + (1-\lambda) \sqrt{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 1^2}$

$\underset{x,y \in M}{\leq} \lambda x_1 + (1-\lambda) y_n = v_n \Rightarrow v \in M$

Aufgabe 3:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- für den zulässigen Punkt $\bar{x}^{(1)} = (10, 8, 19)^T$, bestimmen $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1 \; 2 \; 0)^T \\ a_2 &= (4 \; -4 \; 1)^T \\ a_3 &= (2 \; -3 \; 1)^T \\ a_4 &= (2 \; -1 \; 0)^T \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_1^T x &= 6 > -3 \\ a_2^T x &= 27 > 9 \\ a_3^T x &= 15 > 3 \\ a_4^T x &= 12 > -6 \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{T} = \{1,2,3,4\}$$

Alle Ungleichung sind unaktiv, ist $d^{(1)} = (-4, -5, -7)^T$ zulässige Richtung

$$\begin{aligned} a_1^T d^1 &= -6 < 0 \\ a_2^T d^1 &= -3 < 0 \\ a_3^T d^1 &= 0 = 0 \\ a_4^T d^1 &= -3 < 0 \end{aligned} \qquad A \cdot d^1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Quotientenkriterium ergibt sich: $\bar{\alpha} = \min \left\{ \dfrac{a_j^T \bar{x} - b_j}{-a_j^T d}, \; j \in \{1,2,4\} \wedge a_j^T d < 0 \right\}$

Änderung der aktiven Menge fehlt, -0.5P

$\bar{x}^{(1)} + \frac{3}{2} d^{(1)} = \left(4, \frac{1}{2}, \frac{17}{2}, \ldots\right) \quad \mathcal{A} = \{1\}, \mathcal{T} = \{2,3,4\}$

$A\left(\bar{x}^{(1)} + \frac{3}{2} d^{(1)}\right) \geq b$

$$= \min \left\{ \frac{9}{6}, \frac{18}{3}, \frac{18}{3} \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{3}{2}, 6 \right\} = \frac{3}{2}$$

- für den zulässigen Punkt $\bar{x}^{(2)} = (-2, -1, 17)^T$, bestimmen $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1 \; 2 \; 0)^T \\ a_2 &= (4 \; -4 \; 1)^T \\ a_3 &= (2 \; -3 \; 1)^T \\ a_4 &= (2 \; -1 \; 0)^T \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_1^T x &= 0 > -3 \\ a_2^T x &= 13 > 9 \\ a_3^T x &= 16 > 3 \\ a_4^T x &= -3 > -6 \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{T} = \{1,2,3,4\}$$

die Ungleichung sind unaktiv, ist $d^{(2)} = (3, 3, 4)^T$ zulässige Richtung

$$\begin{aligned} a_1^T d^1 &= 3 > 0 \\ a_2^T d^1 &= 4 > 0 \\ a_3^T d^1 &= 4 > 0 \\ a_4^T d^1 &= 3 > 0 \end{aligned}$$

$a_i^T d^i$ für $i \in \{1,2,3,4\}$ sind unkritisch für die maximale Schrittweite.

Dritte Teilaufgabe fehlt, -2P

3,5/6

Aufgabe 4:

die steilste Abstiegrichtung d von f im Punkt $\bar{x}$

$$d = -f'(x) = -(A\bar{x} - b) = -A\bar{x} + b$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{x} = \frac{b-d}{A}$$

Das kannst du so nicht aufschreiben, A ist eine Matrix

Wir bestimmen $\bar{\alpha}$: sei $\bar{\alpha} = \underset{\alpha > 0}{\operatorname{argmin}} f(\bar{x} + \alpha d)$

$$\Rightarrow \quad f'(\bar{x} + \alpha d) = 0$$

$$f'(\bar{x} + \alpha d) = A(\bar{x} + \bar{\alpha} d) - b$$

$$\Rightarrow \quad A\bar{x} + A\bar{\alpha} d) - b = 0$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot \frac{b-d}{A} - b + \bar{\alpha} Ad = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b - d - b + \bar{\alpha} Ad = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\alpha} = \frac{d}{Ad}$$

Ihr könnt nicht zwei Vektoren durcheinander teilen
Idee komplett richtig, aber Darstellung muss man anders machen

Wir prüfen : $\frac{d}{Ad} = \frac{\|d^2\|}{d^T A . d}$ gilt

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d.d^T. A.d}{A.d} = \|d\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (d^T.d)\, Ad = \|d\|^2 . A.d$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(d_1^2 + \ldots + d_n^2)}_{\|d\|^2} . A.d = \|d\|^2 . A.d$$

Die Gleichung stimmen.

3,5/5

• für den zulässigen Punkt $\bar{x}^{(3)} = (-1, 1, 20)^T$, bestimmen $\mathcal{I}$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (-1 \;\; 2 \;\; 0)^T \\
a_2 &= (4 \;\; -4 \;\; 1)^T \\
a_3 &= (2 \;\; -3 \;\; 1)^T \\
a_4 &= (2 \;\; -1 \;\; 0)^T
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
a_1^T x &= 3 > -3 \\
a_2^T x &= 12 > 9 \\
a_3^T x &= 15 > 3 \\
a_4^T x &= -3 > -6
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}
$$

Alle Ungleichung sind unaktiv, ist $d^{(3)} = (-5, -4, -2)^T$ zulässige Richtung

$$
\begin{aligned}
a_1^T d^1 &= \cancel{13}\ {-3} \ \cancel{>}\ 0 \\
a_2^T d^1 &= -6 < 0 \\
a_3^T d^1 &= 0 = 0 \\
a_4^T d^1 &= -6 < 0
\end{aligned}
$$

Quotientenkriterium ergibt sich: $\bar{\alpha} = \min \left\{ \frac{a_j^T \bar{x} - b_j}{-a_j^T d}, \ j \in \{2, 4\} \wedge a_j^T d < 0 \right\}$

$$= \min \left\{ \frac{12 - 9}{6}, \frac{-3 + 6}{6} \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \checkmark$$

2

$\mathcal{A} = \{2, 4\}$ $\qquad$ $\mathcal{I} = \{1, 3\}$

Aufgabe 4:

Da der Gardient f' die steilste Abstiegrichtung angibt, ist die steilste Abstiegrichtung

$$d = -f'(\bar{x}) = -(A\bar{x} - b) = b - A\bar{x}$$

$$A'(\bar{x} + \alpha d) = 0 \iff A(\bar{x} + \alpha d) - b = 0 \iff A\bar{x} + A\alpha d = b$$

$$\iff \alpha A d = b - A\bar{x} = d$$

Durch Multiplikation von Links mit $(AA)^T$ erhalten wir

$$\iff \bar{\alpha}(Ad)^T (Ad) = (Ad)^T d$$

$$\iff \bar{\alpha} \| Ad \|_2^2 = d^T . A^T . d$$

$$\iff \bar{\alpha} \| Ad \|_2^2 = d^T A . d$$

$$\iff \bar{\alpha} = \frac{d^T A d}{\| Ad \|_2^2} \qquad \square$$