Logik Prof. Dr. H. Peter Gumm
Wintersemester 22/23

Übungszettel 06

Abgabetermin: 3. Dezember 2022, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

Aufgabe 1. (4 Pkte): Verwenden Sie jeweils (in geeigneter Weise) die Resolventenmethode, um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(a) $(X \lor \neg Z) \land (\neg X \lor Y) \land (X \lor V) \land (\neg Y \lor V) \land (\neg X \lor \neg V) \land (Z \lor \neg V)$ ist *unerfüllbar*

(b) $(X \lor Y) \land (\neg X \lor \neg Y) \land (\neg X \lor Y)$ ist *erfüllbar.*

¬ Taut-

(c) $X \lor (\neg X \land Z) \lor (\neg X \land Y \land Z) \lor (Y \land \neg Z) \lor (\neg X \land \neg Y \land \neg Z)$ ist eine *Tautologie.*

(d) Es gilt: $X \lor Y, \neg Z \lor X, \neg X \lor Z, \neg Y \lor Z \lor X, \neg Z \lor Y \models X \land Y \land Z$. (Für die Definition von '$\models$' siehe Zettel 05, Aufgabe 1.)

$(C \lor X) \land (C \land Y)$ Tautologie

Aufgabe 2. (4 Punkte): Sei κ eine Menge von Klauseln und V eine Variable, die in jeder Klausel aus κ nur positiv (bzw. nur negiert) vorkommt.

(a) Zeigen Sie, dass sich an der (Nicht-)erfüllbarkeit von κ nichts ändert, wenn man alle Klauseln, in denen V (bzw. $\neg V$) vorkommt, aus κ entfernt.

(b) Verwenden Sie diese Erkenntnis, um mit lediglich zwei Resolutionsschritten zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge widersprüchlich ist:

$X \land (A \lor B \lor C \lor D)$

$$\{\{\neg X, \neg Y, Z\}, \{\neg Z, A\}, \{X \lor \neg Y\}, \{\neg X, \neg Z, A\}, \{A, \neg Y, \neg Z\},$$
$$\{\neg Z, A, \neg X\}, \{\neg A\}, \{Z\}, \{\neg X, A, Z\}, \{A, \neg X, \neg Y\}, \{A, \neg X, \neg Y, Z\}, \{A, \neg X\}\}$$

Erklären Sie, was Sie machen!

Aufgabe 3. (2+2 Pkte)Laden Sie `2p-4.0.3.jar` von der Ilias-Seite und starten Sie es mit Ihrem Java-Laufzeitsystem: `java -jar 2p-4.0.3` oder einfach doppelklicken. Testen Sie auch die Beispielprogramme, die wir in der Vorlesung besprochen haben. Spielen Sie damit, verändern Sie diese, damit Sie sich an die Fehlermeldungen gewöhnen und diese einschätzen zu können. Anschließend sollen Sie die folgende Situation als Prolog-Programm modellieren:

essen:- mensa
essen:- Restaurant

- Ich esse in der Mensa oder im Restaurant.
- Das Restaurant hat nur Mittwochs und Donnerstags geöffnet.
- Nur wenn ich Vorlesung habe, kann ich in der mensa essen, allerdings muss dann auch das Menu ok sein.
- Vorlesung habe ich nur Dienstags und Donnerstags.
- Das Menu passt mir, wenn es Kartoffeln mit Sauce gibt, oder wenn es Spaghetti gibt.

R:- M
R:- D

essen:- vorlesung, ok_menu.

Vorlesung:- Di, Do

ok_menu:- KmS, Spa

Logik Prof. Dr. H. Peter Gumm
Wintersemester 22/23

Übungszettel 06

Abgabetermin: 3. Dezember 2022, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

Aufgabe 1. (4 Pkte): Verwenden Sie jeweils (in geeigneter Weise) die Resolventenmethode, um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(a) $(X \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee V) \wedge (\neg Y \vee V) \wedge (\neg X \vee \neg V) \wedge (Z \vee \neg V)$ ist *unerfüllbar*

(b) $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y)$ ist *erfüllbar.*

(c) $X \vee (\neg X \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$ ist eine *Tautologie.*

(d) Es gilt: $X \vee Y, \neg Z \vee X, \neg X \vee Z, \neg Y \vee Z \vee X, \neg Z \vee Y \models X \wedge Y \wedge Z$. (Für die Definition von '$\models$' siehe Zettel 05, Aufgabe 1.)

Aufgabe 2. (4 Punkte): Sei κ eine Menge von Klauseln und V eine Variable, die in jeder Klausel aus κ nur positiv (bzw. nur negiert) vorkommt.

(a) Zeigen Sie, dass sich an der (Nicht-)erfüllbarkeit von κ nichts ändert, wenn man alle Klauseln, in denen V (bzw. $\neg V$) vorkommt, aus κ entfernt.

(b) Verwenden Sie diese Erkenntnis, um mit lediglich zwei Resolutionsschritten zu zeigen, dass die folgende Klauselmenge widersprüchlich ist:

$$\{\{\neg X \vee \neg Y \vee Z\}, \{\neg Z, A\}, \{X \vee \neg Y\}, \{\neg X, \neg Z, A\}, \{A, \neg Y, \neg Z\},$$
$$\{\neg Z, A, \neg X\}, \{\neg A\}, \{Z\}, \{\neg X, A, Z\}, \{A, \neg X, \neg Y\}, \{A, \neg X, \neg Y, Z\}, \{A, \neg X\}\}$$

Erklären Sie, was Sie machen!

Aufgabe 3. (2+2 Pkte)Laden Sie `2p-4.0.3.jar` von der Ilias-Seite und starten Sie es mit Ihrem Java-Laufzeitsystem: `java -jar 2p-4.0.3` oder einfach doppelklicken. Testen Sie auch die Beispielprogramme, die wir in der Vorlesung besprochen haben. Spielen Sie damit, verändern Sie diese, damit Sie sich an die Fehlermeldungen gewöhnen und diese einschätzen zu können. Anschließend sollen Sie die folgende Situation als Prolog-Programm modellieren:

- Ich esse in der Mensa oder im Restaurant.
- Das Restaurant hat nur Mittwochs und Donnerstags geöffnet.
- Nur wenn ich Vorlesung habe, kann ich in der mensa essen, allerdings muss dann auch das Menu ok sein.
- Vorlesung habe ich nur Dienstags und Donnerstags.
- Das Menu passt mir, wenn es Kartoffeln mit Sauce gibt, oder wenn es Spaghetti gibt.

essen:

(a) Modellieren Sie diese Aussagen in Prolog mit Hilfe der folgenden Prädikate (atomare Formeln): *essen*, *mensa*, *restaurant*, *dienstag*, *mittwoch*, *donnerstag*, *menu*, *kartoffeln*, *sauce*, *spaghetti*, *vorlesung*.
Fügen Sie dann als Fakten hinzu:

- Es ist Dienstag und es gibt Kartoffeln und Spaghetti.

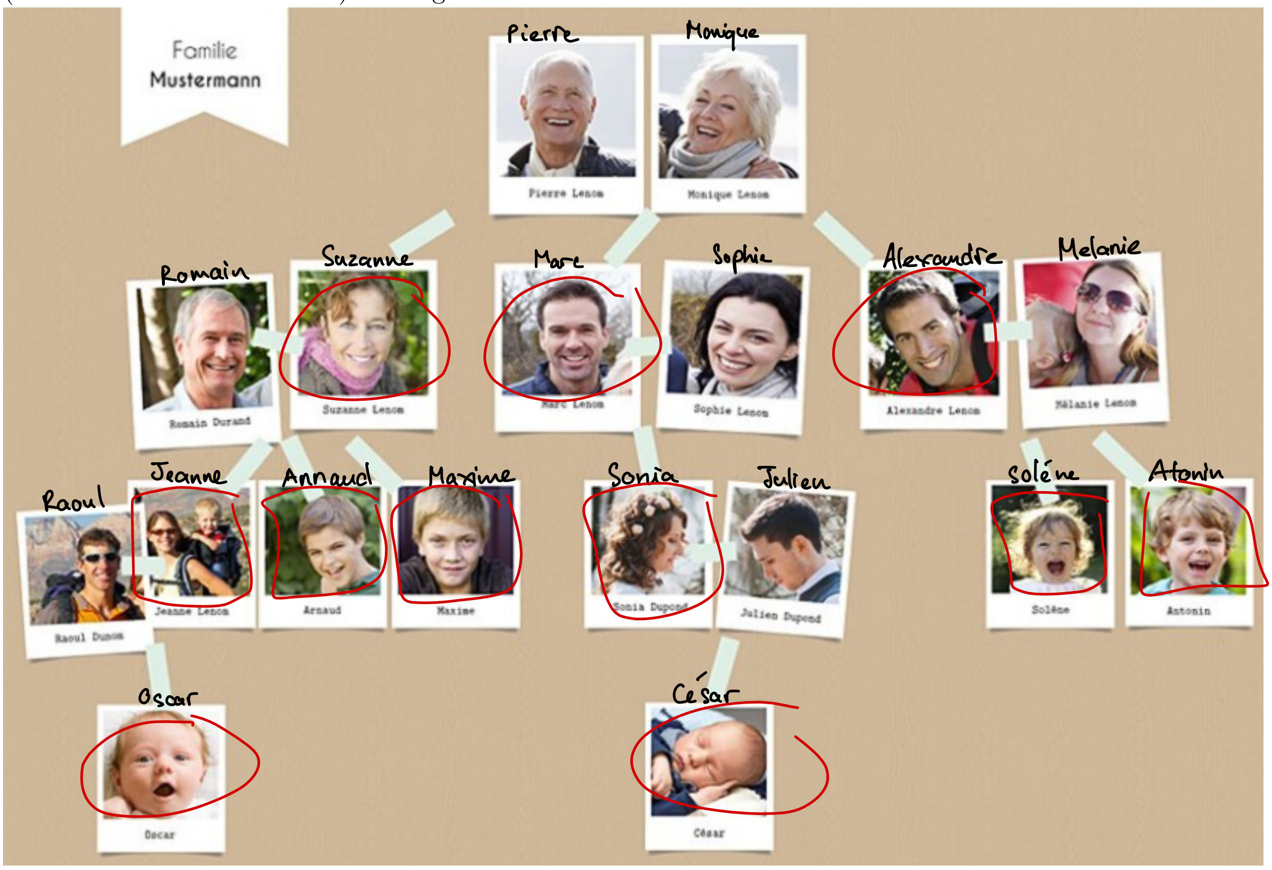
(a) Rufen Sie das Prolog Program mit dem Ziel „essen“ auf.

   i) Wieviele Lösungen gibt es? 2 Ja / Nein

   ii) Wie oft muss der Interpreter backtracken bevor er die erste Lösung findet?

   iii) Was ändert sich, wenn Sie Dienstag durch Donnerstag ersetzen?

Aufgabe 4. (4 Punkte): Erstellen Sie ein Prolog-Programm `familie.pl`, in dem Sie den Stammbaum (einen Teil des Stammbaums) der folgenden Familie beschreiben.



Benutzen Sie die folgenden Prädikate als Fakten:

```
kind(X,Y)      % X ist kind von Y
maennlich(P)   % Person P ist maennlich
weiblich(P)    % Person P ist weiblich
```

X – Y

Beispiel: `kind(oscar,raoul). maennlich(oscar).`
Definieren und testen Sie neue Praedikate:

```
opa(P,E)        % P ist Großvater von E
bruder(X,Y)     % X ist Bruder von Y
schwester(X,Y)  % X ist Schwester von Y
cousin(X,Y)     % X Ist Cousin von Y
```

Verwenden Sie möglichst auch das Infix-Praedikat „ \= “ für ”*ungleich*”, damit z.B. `schwester(sonia,sonia)` verhindert wird.

die – vorlesung - vorlesung

spagehttr menu

mensa – essen

:– diesntag

vorlesung

vorlesung

mensa :- vorlesung,
menu

menu:

:-

Aufgabe 1

(a) $(X \lor \neg Z) \land (\neg X \lor Y) \land (X \lor V) \land (\neg Y \lor V) \land (\neg X \lor \neg V) \land (Z \lor \neg V)$ ist *unerfüllbar*

$\{X, \neg Z\}$ $\{\neg X, Y\}$ $\{X, V\}$ $\{\neg Y, V\}$ $\{\neg X, \neg V\}$ $\{Z, \neg V\}$

$\neg X, V$

V

Z

$\neg X$

$\neg Z$

$\{\}$

(b) $(X \lor Y) \land (\neg X \lor \neg Y) \land (\neg X \lor Y)$ ist *erfüllbar.*

$\{X, Y\}$ $\{\neg X, \neg Y\}$ $\{\neg X, Y\}$

$\{Y\}$

$\{\neg X\}$ → die Klausel ist erfüllbar

(c) $X \lor (\neg X \land Z) \lor (\neg X \land Y \land Z) \lor (Y \land \neg Z) \lor (\neg X \land \neg Y \land \neg Z)$ ist eine *Tautologie.*

$\Leftrightarrow \neg X \land \neg(\neg X \land Z) \land \neg(\neg X \land Y \land Z) \land \neg(Y \land \neg Z) \land \neg(\neg X \land \neg Y \land \neg Z)$

$\Leftrightarrow \neg X \land (X \lor \neg Z) \land (X \lor \neg Y \lor \neg Z) \land (\neg Y \lor Z) \land (X \lor Y \lor Z)$

$\{\neg X\}$ $\{X, \neg Z\}$ $\{X, \neg Y, \neg Z\}$ $\{\neg Y, Z\}$ $\{X, Y, Z\}$

$\{X, Y\}$ $\{X, \neg Y\}$

$\{X\}$

$\{\}$ ⇒ unerfüllbar

⇒ deshalb ist die Negation Tautologie

(d) Es gilt: $X \vee Y, \neg Z \vee X, \neg X \vee Z, \neg Y \vee Z \vee X, \neg Z \vee Y \models X \wedge Y \wedge Z$. (Für die Definition von '$\models$' siehe Zettel 05, Aufgabe 1.)

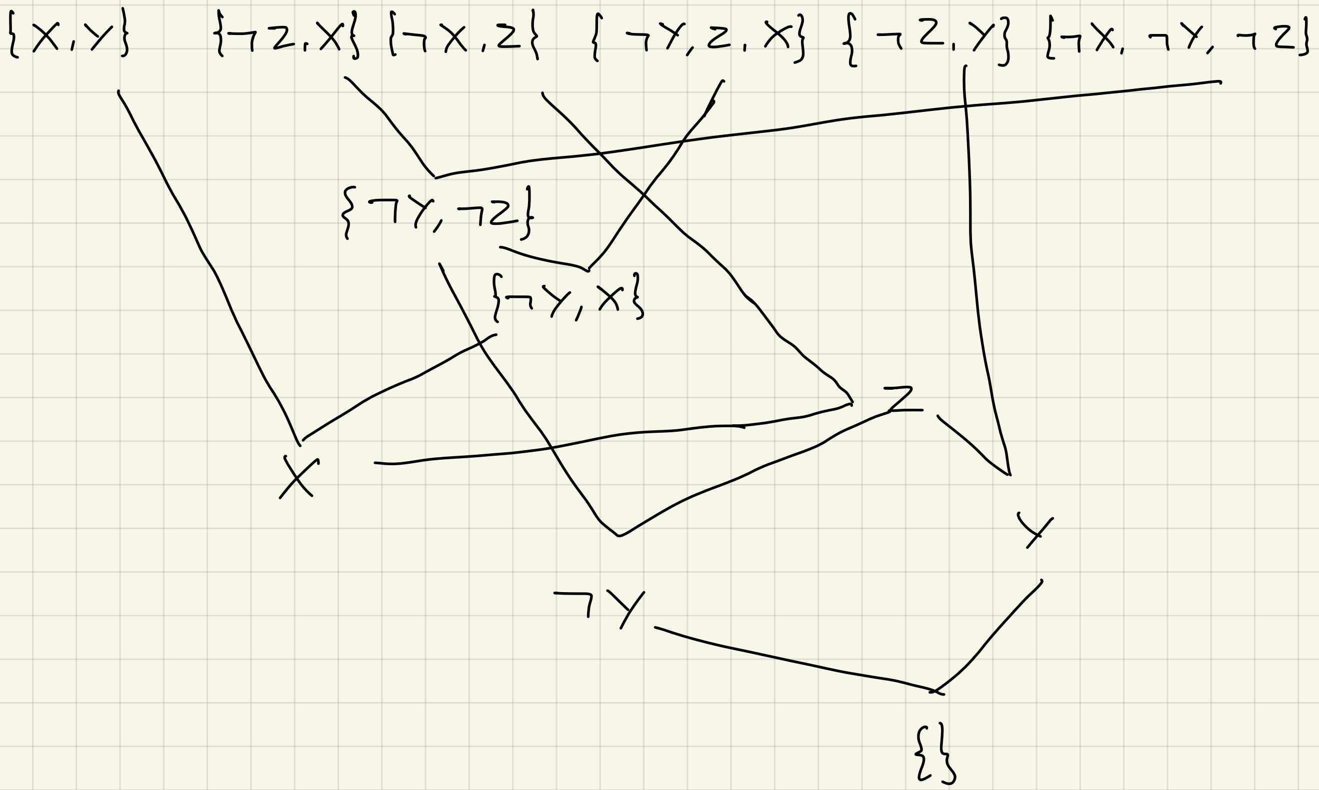
$$(X \vee Y) \wedge (\neg Z \vee X) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Z \vee Y) \rightarrow X \wedge Y \wedge Z$$

$$\Leftrightarrow \neg\big((X \vee Y) \wedge (\neg Z \vee X) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Z \vee Y)\big) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$$

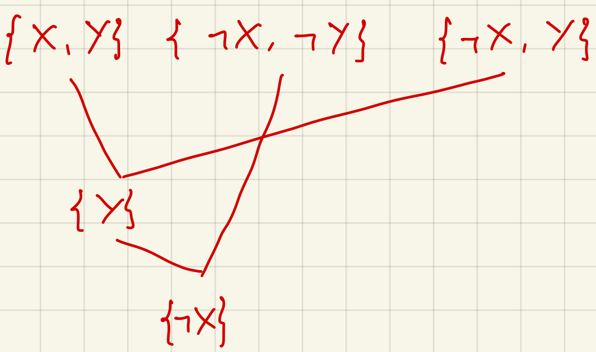
$\equiv$ Tautologie $\qquad \neg T$ = un

$$\Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (\neg Z \vee X) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Z \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$$

unerfüllbar



b.



c.

c. $\{X\}$ $\{\neg X, Z\}$ $\{\neg X, Y, Z\}$ $\{Y, \neg Z\}$ $\{\neg X, \neg Y, \neg Z\}$

$\neg X \wedge \neg(\neg X \wedge Z) \wedge \neg(\neg X \wedge Y \wedge Z) \wedge \neg(Y \wedge \neg Z) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$

$\neg X \wedge (X \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee Z)$

$\{\neg X\}$ $\{X, \neg Z\}$ $\{X, \neg Y, \neg Z\}$ $\{\neg Y, Z\}$ $\{X, Y, Z\}$

$\{X, Y\}$ $\{X, \neg Y\}$

$\{X\}$

$\{\}$

Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie, dass sich an der (Nicht-)erfüllbarkeit von κ nichts ändert, wenn man alle Klauseln, in denen V (bzw. $\neg V$) vorkommt, aus κ entfernt.

Seien $F_1, F_2, \ldots F_n$ Formel

Sei K Klausel, in denen kommt nur V

$\Rightarrow \quad (V \vee F_1) \wedge (V \vee F_2) \wedge \ldots \wedge (V \vee F_n)$

$= \quad V \vee (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_3)$

Wenn K nicht erfüllbar ist dann

$V \vee (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_3)$ falsch

$\exists \alpha . (\hat{\alpha}(V) = 0$ und $\hat{\alpha}(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) = 0)$

Sei V wahr $\Rightarrow \alpha(V) = 1$
wenn wir V aus K entfernt dann haben wir nur noch
$K = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$ und die Klausel ist offentsichlich falsch

---

K ist erfüllbar $\Rightarrow$ jede Klausel ist erfüllbar

Sei K ein Klausel, in denen kommt nur V bzw $\neg V$

$\Rightarrow (V \vee F_1) \wedge (V \vee F_2) \wedge \ldots \wedge (V \vee F_n)$ analog $\neg V$

Angenommen ein Klausel ist erfüllbar $\Rightarrow$ entweder V oder F_i $(i \in [1, n])$ ist richtig

$V \vee (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n)$

$\exists \alpha . (\hat{\alpha}(V) = 1 \mid \hat{\alpha}(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) = 1)$

Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie, dass sich an der (Nicht-)erfüllbarkeit von κ nichts ändert, wenn man alle Klauseln, in denen V (bzw. $\neg V$) vorkommt, aus κ entfernt.

$(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$

$\neg A \vee (B \wedge C)$

Seien $F_1, F_2, \ldots F_n$ Formel

Sei K Klausel, in denen kommt nur V

$\Rightarrow \quad (V \vee F_1) \wedge (V \vee F_2) \wedge \ldots \wedge (V \vee F_n)$

$= \quad V \vee (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n)$

Wenn K erfüllbar ist und V kommt nur negativ vor

$\exists \alpha . \ (\hat{\alpha}(V) = 1 \ \| \ \hat{\alpha}(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) = 1)$ sodass K erfüllbar

Sei $\alpha(V) = 0$ da V negativ $\Rightarrow \exists \alpha . (\hat{\alpha}(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) = 1)$

Wenn K nichterfüllbar ist und V kommt nur negativ vor

$\forall \alpha . \ (\alpha(V) = 0 \ \& \ \alpha(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots F_n) = 0)$ sodass $K \equiv \perp$

Wenn wir V entfernt dann bleibt $\forall \alpha (\hat{\alpha}(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) = 0)$

$K = \{\{\neg X, \neg Y, Z\}, \{\neg Z, A\}, \{X \vee \neg Y\}, \{\neg X, \neg Z, A\}, \{A, \neg Y, \neg Z\},$
$\{\neg Z, A, \neg X\}, \{\neg A\}, \{Z\}, \{\neg X, A, Z\}, \{A, \neg X, \neg Y\}, \{A, \neg X, \neg Y, Z\}, \{A, \neg X\}\}$

DPLL

nicht erfüllbar

Wähle $Z = 0$

$K_{Z=0} = \{\neg X, \neg Y\}, \{X, \neg Y\}, \{\neg A\}, \underline{\{\}}, \{\neg X, A\}, \{A, \neg X, \neg Y\}, \{A, \neg X\}$

$\Rightarrow$ Für $Z=0$ ist die Klausel nicht erfüllbar $\rightarrow$ Backtracking

Wähle $Z = 1$

$K_{Z=1} = \{A\}, \{X, \neg Y\}, \{\neg X, A\}, \{A, \neg Y\}, \{A, \neg X\}, \{\neg A\}$
$\{A, \neg X, \neg Y\}, \{A, \neg X\}$

wähle $A = 0$

$K_{Z=1, A=0} = \{\}, \{X, \neg Y\}, \{\}, \{\neg Y\}, \{\neg X\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{\neg X\}$

$\Rightarrow$ Für $z=1, A=0$ ist die Klausel nicht erfüllbar $\rightarrow$ Backtracking

wähle $A = 1$

$= \{X, \neg Y\}, \{\}$

$\Rightarrow$ Für $z=1, A=1$ ist die Klausel nicht erfüllbar

Aufgabe 3:

b, i)

- Es gibt ingesamt 2 Lösungen Ja und Nein

ii)

- Der Interprefer muss ingesamt 1 mal Backtracking bei „menu" bevor er die Lösung findet.

iii)

- Wenn wir Dienstag durch Donnerstag ersetzen dann haben wir nur eine Lösung bei dem Ziel „essen" : Nein – sondern 2
- Außerdem muss der Interprefer noch 1 mal backtracken bei dem Fakt Vorlesung.

Aufgabe 1

KNF max

(a) $(X \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee V) \wedge (\neg Y \vee V) \wedge (\neg X \vee \neg V) \wedge (Z \vee \neg V)$ ist *unerfüllbar*

$(X \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee V) \wedge (\neg Y \vee V) \wedge (\neg X \vee \neg V) \wedge (Z \vee \neg V)$

$\{X, \neg Z\}$ $\{\neg X, Y\}$ $\{X, V\}$ $\{\neg Y, V\}$ $\{\neg X, \neg V\}$ $\{Z, \neg V\}$

$\{Y, V\}$

$\{V\}$

$\{\neg X\}$

$\{Z\}$

$\{\neg Z\}$

$\{\}$

(b) $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y)$ ist *erfüllbar.*

Klausel Menge $K = \{\{X, Y\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{\neg X, Y\}\}$

<u>Wähle für $X = 0$</u>

$K_{X=0} = \{\{Y\}\}$

$\Rightarrow K_{X=0, A=1} = \{\}$ $\rightarrow$ erfüllbar

$\Rightarrow$ Für $X = 0$ $Y = 1$ ist die K. Menge erfüllbar

(c) $X \vee (\neg X \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$ ist eine *Tautologie.*

X	Y	Z	$\neg X \wedge Z$	$\neg X \wedge Y \wedge Z$	$Y \wedge \neg Z$	$\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$	K
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

(d) Es gilt: $X \vee Y, \neg Z \vee X, \neg X \vee Z, \neg Y \vee Z \vee X, \neg Z \vee Y \models X \wedge Y \wedge Z$. (Für die Definition von '$\models$' siehe Zettel 05, Aufgabe 1.)

Es gilt wenn $(X \vee Y) \wedge (\neg Z \vee X) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z \vee X) \wedge (\neg Z \vee Y)$

$\rightarrow (X \wedge Y \wedge Z)$

$(x \vee (Y \wedge \neg Z \wedge (\neg Y \vee Z))) \wedge (\neg Z \vee (X \wedge Y))$

$((Y \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge Z)) \wedge \neg Z$

$(Y \wedge Z) \wedge \neg Z$

$(X \vee \perp) \wedge (\neg Z \vee (X \wedge Y)) \wedge (\neg X \vee Z)$

$(X \wedge (\neg X \vee Z)) \wedge (\neg Z \vee (X \wedge Y))$

$((X \wedge \neg X) \vee (X \wedge Z)) \wedge (\neg Z \vee (X \wedge Y))$

$(X \wedge Z) \wedge (\neg Z \vee (X \wedge Y))$

$X \wedge Z \wedge (\neg Z \vee X) \wedge (\neg Z \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z)$

$X \wedge (\neg Z \vee X) \wedge ((Z \wedge \neg Z) \vee (Z \wedge Y)) \wedge (\neg X \vee Z)$

$\perp$

$X \wedge (\neg Z \vee X) \wedge (Z \wedge Y) \wedge (\neg X \vee Z)$

$(Z \wedge X) \wedge Y \wedge (X \wedge Z)$

$(X \wedge Y \wedge Z) \rightarrow (X \wedge Y \wedge Z)$

$\top$

$\Rightarrow \quad \alpha \models X \wedge Y \wedge Z$

$F_1 \wedge \ldots F_n \rightarrow G$

$\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \vee G$

$\neg(\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \vee G)$

$F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$

$F_1 \wedge \ldots$

$\alpha \rightarrow \alpha$

Aufgabe 2:

Sei K eine Menge von Klauseln und V Variable. die in jeder Klausel aus K nur positiv (oder negativ vorkommt)

a, z: die (Nicht) Erfüllbarkeit von K nicht ändert, wenn man alle Klauseln, in denen V bzw $\neg V$ vorkommt, entfernt

Sei $K = K_V \cup T$ wobei K_V die Menge aller Klauseln ist, in denen V positiv vorkommt und T die Menge aller Klauseln, in denen V weder positiv noch negativ vorkommt