11|20

$\lambda x + (1-\lambda) y \in M = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + (1-\lambda) y_n \end{pmatrix}$

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Hansen, D. Vogel

Wintersemester 2022/2023

$\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \geq \sqrt{1 + (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^2 + \dots}$

$(\lambda x_1)^2 + 2\lambda x_1 (1-\lambda) y_1 + (1-\lambda)^2 y_1^2$

Übungen zur Linearen Optimierung
3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgende Menge konvex ist: (4)

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq \sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

$x_n^2 \geq 1 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \Rightarrow x_n^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \geq 0$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie eine Approximation an den Minimierer x^* der Funktion (5)

$$f(x) = -3x + e^x.$$

Führen Sie dazu jeweils 3 Schritte des Newton-Verfahrens mit den Startwerten $x^{(0)} = 0.5$ und $y^{(0)} = -2$ durch. Analysieren Sie die Approximationen $x^{(3)}$ und $y^{(3)}$: Was fällt Ihnen auf?
Hinweis: Verwenden Sie bei Ihren Rechnungen 4 Nachkommastellen.

Aufgabe 3 Es wird die zulässige Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$ mit (6)

$Ax \geq b$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Zu den Punkten $\bar{x}^{(1)} = (10, 8, 19)^\mathsf{T}$, $\bar{x}^{(2)} = (-2, -1, 17)^\mathsf{T}$, $\bar{x}^{(3)} = (-1, 1, 20)^\mathsf{T}$ seien die zulässigen Richtungen $d^{(1)} = (-4, -5, -7)^\mathsf{T}$, $d^{(2)} = (3, 3, 4)^\mathsf{T}$, $d^{(3)} = (-5, -4, -2)^\mathsf{T}$ gegeben. Bestimmen Sie mittels des Quotiententests jeweils die maximale Schrittlänge $\bar{\alpha}_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, sodass $\bar{x}^{(i)} + \bar{\alpha}_i d^{(i)} \in M$ gilt (sofern ein solches $\bar{\alpha}_i$ existiert) und geben sie an, wie sich die aktiven Mengen ändern.

Aufgabe 4 Es seien $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Zu der Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(a)$ sei die Funktion (5)

$$f(x) := \frac{1}{2} x^\mathsf{T} A x - b^\mathsf{T} x + c$$

$\frac{1}{2} x^T A x - b^T x + c$

definiert. Außerdem sei ein Vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt. Bestimmen Sie die steilste Abstiegsrichtung d von f im Punkt $\bar{x}$ und zeigen Sie, dass

$\begin{pmatrix} x & & 0 \\ & x & \\ 0 & & x \\ & & & x \end{pmatrix}$

$$\bar{\alpha} := \arg\min_{\alpha > 0} f(\bar{x} + \alpha d) = \frac{d^\mathsf{T} A d}{\|Ad\|_2^2}$$

gilt.

Hinweis: Es ist $f'(x) = Ax - b$.

Abgabe: Dienstag, 15.11.22, vor der Vorlesung.

$$x_n \geq \sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2} \qquad x = (0\ 0\ 0\ 1)^T$$

$$y = (0\ 0\ 0\ 2)^T$$

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in M$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 \\ \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 \\ \ldots \\ \lambda x_n + (1-\lambda) y_n \end{pmatrix}$$

$\lambda x_n + (1-\lambda) y_n$ sei $x_n \geq \sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}$

$\Rightarrow \lambda x_n \geq \lambda \sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}$

$(1-\lambda) y_n \geq (1-\lambda) \sqrt{1 + y_1 + \ldots + y_{n-1}}$

$$\Rightarrow \lambda x_n + (1-\lambda) y_n \geq \lambda \sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2} + (1-\lambda) \sqrt{1 + y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2} \geq$$

$$2 \geq \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 x_1^2 + \ldots + \lambda^2 x_{n-1}^2} + \sqrt{(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 y_1^2 + \ldots + (1-\lambda)^2 y_{n-1}^2}$$

$$(\lambda x_n + (1-\lambda) y_n)^2 \geq 1 + (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^2 + \ldots + (\lambda x_{n-1} + (1-\lambda) y_{n-1})^2$$

$$\geq \lambda^2 (x_1 + \ldots x_{n-1}) + (1-\lambda)^2 (y_1 + \ldots y_{n-1})$$

$$+ 2\lambda (1-\lambda) x_1 y_1$$

$$\lambda(1-\lambda) \sqrt{(1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2)(1 + y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2)}$$

$$1 + y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2 + x_1^2 + x_1^2 y_1^2 + \ldots + x_1^2 y_{n-1}^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_{n-1}^2 y_1 + \ldots x_{n-1}^2 y_{n-1}^2)$$

$$\geq$$

$$\sqrt{1 + (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^2 + \ldots + (\lambda x_{n-1} + (1-\lambda) y_{n-1})^2}$$

$$\sqrt{1 + \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda) x_1 y_1 + (1-\lambda)^2 y_1^2}$$

$$\sqrt{1 + (x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_{n-1} + y_{n-1})^2}$$

$$\sqrt{1 + (x_1^2 + 2x_1 y_1 + y_1^2) + \ldots + (x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} y_{n-1} + y_{n-1}^2)}$$

$$x_n \geq \sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$$

$$y_n \geq \sqrt{1 + y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2}$$

$$\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \geq \sqrt{1 + (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^2 + \dots + (\lambda x_{n-1} + (1-y) y_{n-1})^2}$$

$$\geq \sqrt{1 + \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda) x_1 y_1 + (1-\lambda)^2 y_1^2 + \dots}$$

$$\geq \sqrt{1 + \lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) + 2\lambda(1-\lambda)(x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}) + (1-\lambda)^2 (y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2)}$$

$$\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \geq \lambda \sqrt{\underbrace{1 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}_{\geq 1}} + (\lambda - 1) \sqrt{\underbrace{1 + y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2}}$$

Aufgabe 2 Newton Verfahren

Ableitungen $f(x) = -3x + e^x \rightarrow f'(x) = -3 + e^x$

$\rightarrow f''(x) = e^x$

1) Für Startwert $x^0 = 0.5$

2) Test für Optimalität

$$x^1 = x^0 - \frac{f'(x^0)}{f''(x^0)} = 0{,}5 - \frac{-3 + e^{0.5}}{e^{0.5}} \approx 1{,}3196$$

$$x^2 = x^1 - \frac{f'(x^1)}{f''(x^1)} = 1{,}3196 - \frac{-3 + e^{1{,}3196}}{e^{1{,}3196}} \approx 1{,}1213$$

$$x^3 = x^2 - \frac{f'(x^2)}{f''(x^2)} = 1{,}1213 - \frac{-3 + e^{1{,}1213}}{e^{1{,}1213}} \approx 1{,}0988$$

$$f(1{,}0988) \approx -0{,}2958$$

$\Rightarrow$ Nach 3 Schritten des Newton Verfahren ist die Minimum von $f(x) = -3x + e^x$ mit $x^0 = 0.5$ liegt bei Punk $(1{,}0988 \,,\, -0{,}2958)$

1) Für Startwert $y^0 = -2$

2) Test für Optimalität

$$y^1 = y^0 - \frac{f'(y^0)}{f''(y^0)} = -2 - \frac{-3 + e^{-2}}{e^{-2}} \approx 19{,}1617$$

$$y^2 = y^1 - \frac{f'(y^1)}{f''(y^1)} = 19{,}1617 - \frac{-3 + e^{y^1}}{e^{y^1}} \approx 18{,}1617$$

$$y^3 = y^2 - \frac{f'(y^2)}{f''(y^2)} = 18{,}1617 - \frac{-3 + e^{y^2}}{e^{y^2}} \approx 17{,}1617$$

$$f(17{,}1617 \,,\, 28394277)$$

$\Rightarrow$ Nach 3 Schritten des Newton Verfahren ist die Minimum von $f(\;) = - \quad + e$ mit $y^0 = -2$ liegt bei Punk $(17{,}1617 \,,\, 28394277)$

Mit Startpoint $y^0 = -2$ kann Minimum nicht approximiert werden.

Aufgabe 3:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- für den zulässigen Punkt $\bar{x}^{(1)} = (10, 8, 19)^T$, bestimmen $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1 \ \ 2 \ \ 0)^T \\ a_2 &= (4 \ \ -4 \ \ 1)^T \\ a_3 &= (2 \ \ -3 \ \ 1)^T \\ a_4 &= (2 \ \ -1 \ \ 0)^T \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_1^T x &= 6 > -3 \\ a_2^T x &= 27 > 9 \\ a_3^T x &= 15 > 3 \\ a_4^T x &= 12 > -6 \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Alle Ungleichung sind unaktiv, ist $d^{(1)} = (-4, -5, -7)^T$ zulässige Richtung

$$\begin{aligned} a_1^T d^1 &= -6 < 0 \\ a_2^T d^1 &= -3 < 0 \\ a_3^T d^1 &= 0 = 0 \\ a_4^T d^1 &= -3 < 0 \end{aligned}$$

Quotientenkriterium ergibt sich: $\bar{\alpha} = \min \left\{ \frac{a_j^T \bar{x} - b_j}{-a_j^T d}, \ j \in \{1, 2, 4\} \wedge a_j^T d < 0 \right\}$

$$= \min \left\{ \frac{9}{6}, \frac{18}{3}, \frac{18}{3} \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{3}{2}, 6 \right\} = \frac{3}{2}$$

- für den zulässigen Punkt $\bar{x}^{(2)} = (-2, -1, 17)^T$, bestimmen $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1 \ \ 2 \ \ 0)^T \\ a_2 &= (4 \ \ -4 \ \ 1)^T \\ a_3 &= (2 \ \ -3 \ \ 1)^T \\ a_4 &= (2 \ \ -1 \ \ 0)^T \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_1^T x &= 0 > -3 \\ a_2^T x &= 13 > 9 \\ a_3^T x &= 16 > 3 \\ a_4^T x &= -3 > -6 \end{aligned} \Rightarrow \mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$$

die Ungleichung sind unaktiv, ist $d^{(2)} = (3, 3, 4)^T$ zulässige Richtung

$$\begin{aligned} a_1^T d^1 &= 3 > 0 \\ a_2^T d^1 &= 4 > 0 \\ a_3^T d^1 &= 4 > 0 \\ a_4^T d^1 &= 3 > 0 \end{aligned}$$

$a_i^T d^i$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sind unkritisch für die maximale Schrittweite.

• für den zulässigen Punkt $\overline{x}^{(3)} = (-1, 1, 20)^T$, bestimmen $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1 \;\; 2 \;\; 0)^T \\ a_2 &= (4 \;\; -4 \;\; 1)^T \\ a_3 &= (2 \;\; -3 \;\; 1)^T \\ a_4 &= (2 \;\; -1 \;\; 0)^T \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_1^T x &= 3 > -3 \\ a_2^T x &= 12 > 9 \\ a_3^T x &= 15 > 3 \\ a_4^T x &= -3 > -6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Alle Ungleichung sind unaktiv, ist $d^{(3)} = (-5, -4, -2)^T$ zulässige Richtung

$$\begin{aligned} a_1^T d^1 &= 13 > 0 \\ a_2^T d^1 &= -6 < 0 \\ a_3^T d^1 &= 0 = 0 \\ a_4^T d^1 &= -6 < 0 \end{aligned}$$

Quotientenkriterium ergibt sich: $\overline{\alpha} = \min \left\{ \frac{a_j^T \overline{x} - b_j}{-a_j^T d}, \; j \in \{2, 4\} \wedge a_j^T d < 0 \right\}$

$$= \min \left\{ \frac{12-9}{6}, \frac{-3+6}{6} \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4:

die steilste Abstiegrichtung d von f im Punkt $\bar{x}$

$$d = -f'(x) = -(A\bar{x} - b) = -A\bar{x} + b$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{x} = \frac{b-d}{A}$$

Wir bestimmen $\bar{\alpha}$: sei $\bar{\alpha} = \underset{\alpha > 0}{\operatorname{argmin}} f(\bar{x} + \alpha d)$

$$\Rightarrow \quad f'(\bar{x} + \alpha d) = 0$$

$$f'(\bar{x} + \alpha d) = A(\bar{x} + \bar{\alpha} d) - b$$

$$\Rightarrow \quad A\bar{x} + A\bar{\alpha} d) - b = 0$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot \frac{b-d}{A} - b + \bar{\alpha} Ad = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b - d - b + \bar{\alpha} Ad = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\alpha} = \frac{d}{Ad}$$

Wir prüfen : $\frac{d}{Ad} = \frac{\|d^2\|}{d^T A.d}$ gilt

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d.d^T. A.d}{A.d} = \|d\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (d^T.d)\, Ad = \|d\|^2 . A.d$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(d_1^2 + \dots + d_n^2)}_{\|d\|^2} . A.d = \|d\|^2 . A.d$$

Die Gleichung stimmen.

Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2022/2023**
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Hansen, D. Vogel

Übungen zur Linearen Optimierung
3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgende Menge konvex ist: (4)

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq \sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie eine Approximation an den Minimierer x^* der Funktion (5)

$$f(x) = -3x + e^x.$$

Führen Sie dazu jeweils 3 Schritte des Newton-Verfahrens mit den Startwerten $x^{(0)} = 0.5$ und $y^{(0)} = -2$ durch. Analysieren Sie die Approximationen $x^{(3)}$ und $y^{(3)}$: Was fällt Ihnen auf?
Hinweis: Verwenden Sie bei Ihren Rechnungen 4 Nachkommastellen.

Aufgabe 3 Es wird die zulässige Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$ mit (6)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Zu den Punkten $\bar{x}^{(1)} = (10, 8, 19)^\mathsf{T}$, $\bar{x}^{(2)} = (-2, -1, 17)^\mathsf{T}$, $\bar{x}^{(3)} = (-1, 1, 20)^\mathsf{T}$ seien die zulässigen Richtungen $d^{(1)} = (-4, -5, -7)^\mathsf{T}$, $d^{(2)} = (3, 3, 4)^\mathsf{T}$, $d^{(3)} = (-5, -4, -2)^\mathsf{T}$ gegeben. Bestimmen Sie mittels des Quotiententests jeweils die maximale Schrittlänge $\bar{\alpha}_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, sodass $\bar{x}^{(i)} + \bar{\alpha}_i d^{(i)} \in M$ gilt (sofern ein solches $\bar{\alpha}_i$ existiert) und geben sie an, wie sich die aktiven Mengen ändern.

Aufgabe 4 Es seien $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Zu der Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(a)$ sei die Funktion (5)

$$f(x) := \frac{1}{2} x^\mathsf{T} A x - b^\mathsf{T} x + c$$

definiert. Außerdem sei ein Vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt. Bestimmen Sie die steilste Abstiegsrichtung d von f im Punkt $\bar{x}$ und zeigen Sie, dass

$$\bar{\alpha} := \arg\min_{\alpha > 0} f(\bar{x} + \alpha d) = \frac{d^\mathsf{T} A d}{\|Ad\|_2^2}$$

gilt.

Hinweis: Es ist $f'(x) = Ax - b$.

Abgabe: Dienstag, 15.11.22, vor der Vorlesung.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 Es wird die zulässige Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Zu den Punkten $\bar{x}^{(1)} = (10, 8, 19)^\mathsf{T}$, $\bar{x}^{(2)} = (-2, -1, 17)^\mathsf{T}$, $\bar{x}^{(3)} = (-1, 1, 20)^\mathsf{T}$ seien die zulässigen Richtungen $d^{(1)} = (-4, -5, -7)^\mathsf{T}$, $d^{(2)} = (3, 3, 4)^\mathsf{T}$, $d^{(3)} = (-5, -4, -2)^\mathsf{T}$ gegeben. Bestimmen Sie mittels des Quotiententests jeweils die maximale Schrittlänge $\bar{\alpha}_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, sodass $\bar{x}^{(i)} + \bar{\alpha}_i d^{(i)} \in M$ gilt (sofern ein solches $\bar{\alpha}_i$ existiert) und geben sie an, wie sich die aktiven Mengen ändern.