Aufgabe 1 2/2 $\Sigma = 14{,}5/16$

$$F = \forall x.R(x, f(x)) \land R(a, a) \land \exists y.\neg R(f(y), y).$$

$\forall x.\ R(x, f(x)) \land R(a,a) \land \neg \forall y.\ R(f(y), y)$

$\mathcal{U} = (A, \underbrace{F, R}_{\Sigma})$ sei $A = \{0, 1\}$

$a^{\mathcal{U}} = 0 \rightarrow R(a,a) = R(0,0)$ in $R^{\mathcal{U}}$

sei $f^{\mathcal{U}}(0) = f^{\mathcal{U}}(1) = 1 \rightarrow \begin{cases} R(x, f(x)) = R(x, 1) \\ R(f(y), y) = R(1, y) \end{cases}$

aber $R^{\mathcal{U}} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$

Für $R(x, 1) \rightarrow x = \{0, 1\} \Rightarrow \forall x$
Für $R(1, y) \rightarrow y = \{1\} \rightarrow \neg \forall y$

$\rightarrow$ F gilt in der Struktur ✓

Ja aber man sollte das durch Semantik von $\mathcal{U}$ F F zeigen.

F heißt allgemeingültig

$\Rightarrow \mathcal{U} \models F$

$\alpha : Var \mapsto A$ irgendeine Belegung

$\alpha_{[a \to 0]}(F) = \forall x.\ R(x, f(x)) \land R(0,0) \land \exists y.\ \neg R(f(y), y)$

$\alpha_{[a \to 0,\ x \to 0,\ y \to 1]}(F) = R(0, f(0)) \land R(0,0) \land \neg R(f(1), 1)$
$= R(0, 1) \land R(0,0) \land \neg R(1,1) \Rightarrow$ gilt

$\alpha_{[a \to 0,\ x \to 0,\ y \to 0]} = R(0, f(0)) \land R(0,0) \land \neg R(f(0), 0)$
$= R(0,1) \land R(0,0) \land \neg R(1,0) \rightarrow$ nicht gilt

$\alpha_{[a \to 0,\ x \to 1,\ y \to 1]} = R(1, f(1)) \land R(0,0) \land \neg R(f(1), 1)$
$= R(1,1) \land R(0,0) \land \neg R(1,1) \rightarrow$ gilt

F gilt für $\alpha[a \to 0,\ x \to \{0, 1\},\ y\ \{1\}]$

Aufgabe 2: (Sichere Substitution) 2/2

$F\{t/x\}$, $G\{t/x\}$ $t = s(y)$ in F, G

1. $F = \forall y.\ P(x, y)$

$$F\{t/x\} = \forall y.\ P(x, y)\{t/x\}$$
$$= \forall y.\ P(t, y) \qquad \text{sei } t = s(y)$$
$$= \forall y'.\ P(t, y')$$
$$= \forall y'.\ P(s(y), y') \qquad ✓$$

2. $G = P(x, y) \rightarrow \exists y.\ P(y, x)$

$$G\{t/x\} = P(x, y)\{t/x\} \rightarrow \exists y.\ P(y, x)\{t/x\}$$
$$= P(t, y) \rightarrow \exists y.\ P(y, t)$$
$$= P(t, y') \rightarrow \exists y''.\ P(y'', t)$$
$$= P(s(y), y') \rightarrow \exists y''.\ P(y'', s(y))$$

y kommt frei in P vor → muss nicht umbenennen

Aufgabe 3 Äquivalentumformungen 1,5/2

$A \to B \equiv \neg A \vee B$

Falls $u \notin Frei(G)$ gilt

$$(\forall u.F) \leftrightarrow G \equiv ((\forall u.F) \to G) \wedge (G \to (\forall u.F))$$ // Auflösen der Äqivalent

$$\equiv \exists u.(F \to G) \wedge (\neg G \vee (\forall u.F))$$ // Auflösen $\to$

$$\equiv \exists u\, (F \to G) \wedge \forall u' (\neg G \vee F)\{u'/u\}$$ // Sei $u \notin Frei(G)$ $t\{u'/u\}$

$$\equiv \exists u\; \forall u'.\, (F \to G) \wedge (\neg G \vee F)\{u'/u\}$$ // → wenn man umbenent, muss dann substituieren

$$\equiv \exists u.\, \forall u'.\, ((F \to G) \wedge (G \to F))\{u'/u\}$$

Free(X): komt vor ∧ nicht geb

$$\equiv \exists u.\forall u' (F \leftrightarrow G)\{u'/u\}$$ −0,5P

~~Free~~ (X): nicht vorkommt / gebunden

Aufgabe 4: Pränexe Normalform → Klauselmenge 2/2

$$F := \forall x.\exists y \left(\forall z.(P(y) \to Q(x,z) \wedge Q(y,x)) \vee \exists z.\forall x.(Q(z,y) \to P(x)) \right)$$

$$F = \forall x.\exists y \left(\forall z.(P(y) \to Q(x,z) \wedge Q(y,x)) \vee \exists z'.\forall x' (Q(z',y) \to P(x')) \right)$$

$$F = \forall x.\exists y.\left(\forall z.\exists z'.\forall x' ((P(y) \to Q(x,z) \wedge Q(y,x)) \vee (Q(z',y) \to P(x'))) \right)$$

$$F = \forall x.\exists y.\forall z.\exists z'.\forall x'.((P(y) \to Q(x,z) \wedge Q(y,x)) \vee (Q(z',y) \to P(x')))$$ ✓

Aufgabe 5 Erfüllungsäquivalent Klauselmenge 4/4

$$G := \forall x.\exists y.\exists z.\forall v.\left((P(\underline{y},v) \vee Q(x) \to Q(\underline{y})) \wedge \underline{(Q(z) \to P(x,\underline{y}))} \right)$$

$\forall x.\exists y \Rightarrow$ y hängt von x $\Rightarrow y = f(x)$

$$G = \forall x.\exists z.\forall v \left((P(f(x),v) \vee Q(x) \to Q(f(x))) \wedge (Q(z) \to P(x,f(x))) \right)$$

$\forall x.\exists z \Rightarrow$ z hängt von x $\Rightarrow z = g(x)$ ✓

$$G = \forall x.\forall v \left((P(f(x),v) \vee Q(x) \to Q(f(x))) \wedge (Q(g(x)) \to P(x,f(x))) \right)$$

→ in KNF

$$G = \forall x.\forall v \left((\neg(P(f(x),v) \vee Q(x)) \vee Q(f(x))) \wedge (\neg Q(g(x)) \vee P(x,f(x))) \right)$$

$$= \forall x.\forall v \left(((\neg P(f(x),v) \wedge \neg Q(x)) \vee Q(f(x))) \wedge (\neg Q(g(x)) \vee P(x,f(x))) \right)$$

$$= \forall x.\forall \cancel{y}\, v \left((\neg P(f(x),v) \vee Q(f(x))) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x))) \wedge (\neg Q(g(x)) \vee P(x,f(x))) \right)$$

$$KM = \{ \{\neg P(f(x),v), Q(x)\}, \{\neg Q(x), Q(f(x))\}, \{\neg Q(g(x)), P(x,f(x))\} \}$$ ✓

Aufgabe 6   Gültigkeit mit Resolventenmethode   3/4

$H := \forall z. \exists x. \forall j. \exists y. \Big(\big((\underline{P(x) \vee R(y)}) \rightarrow R(j) \big) \vee (P(z) \wedge \neg R(y)) \Big)$

$A \vee B$

$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Strategie: Zeigen dass $\neg H$ ist nicht erfüllbar

$\neg H := \exists z. \forall x. \exists j. \forall y \Big(\neg\big((P(x) \vee R(y)) \rightarrow R(j) \big) \wedge \neg \big(P(z) \wedge \neg R(y) \big) \Big)$

$= \exists z. \forall x. \exists j. \forall y \Big(\big((P(x) \vee R(y)) \wedge \neg R(j) \big) \wedge \big(\neg P(z) \vee R(y) \big) \Big)$

Jetzt ist $\neg H$ in Pränexe Form $\rightarrow$ <u>skolemisieren</u>

Für $z = a$

$\cancel{=} \ \forall x. \exists j. \forall y \Big(\big((P(x) \vee R(y)) \wedge \neg R(j) \big) \wedge \big(\neg P(a) \vee R(y) \big) \Big)$

j hängt von x ab $\Rightarrow$ $j = f(x)$

$\cancel{=} \ \forall x. \forall y \Big(\big((P(x) \vee R(y)) \wedge \neg R(f(x)) \big) \wedge \big(\neg P(a) \vee R(y) \big) \Big)$

$\rightarrow$ KM $\{ \{ (P(x) \vee R(y)) \}; \{ \neg R(f(x)) \}; \{ \neg P(a) \vee R(y) \} \}$

$= \{ \{ P(x), R(y) \}, \{ \neg R(f(x)) \}, \{ \neg P(a), R(y) \} \}$ KNF

~~Durch Einsetzung~~ Spezialle Instanze:

$\{ P(x), R(y_1) \} \quad \{ \neg R(f(x_1)) \} \quad \{ \neg P(a), R(y_2) \}$

$R(y_2)$ $\quad M_1 = \{ x \mapsto a, \ y_1 \mapsto y_2 \}$

$\{\}$ $\quad M_2 = \{ y_2 \mapsto f(x_1) \}$.

nichterfüllbar

Hier muss man die konkreten Werte für $x, y, f(x)$ oder jeden Schritt eine Unifikation bestimmen.

$-1P.$

Oder $\{ P(a), R(f(a)) \} \quad \{ \neg R(f(a)) \} \quad \{ \neg P(a), R(f(a)) \}$

$\Downarrow$

Grundresolution (S.122)

$\{ R(f(a)) \}$

$\{\}$

$$\hat{\alpha}(F) = \hat{\alpha}(\forall x \dots \wedge R(a,a)) \wedge \exists y . \neg R(\dots)$$

$$= \hat{\alpha}(\forall x \dots) \;\&\; \hat{\alpha}(R(a,a)) \;\&\; \hat{\alpha}(\exists y . \neg R(\dots))$$

$$= \underbrace{\min_{\forall a \in \{0,1\}} \hat{\alpha}_{[x \to a]} R \dots}_{1} \;\&\; \underbrace{\hat{\alpha}(R(a,a))}_{1} \;\&\; \underbrace{\max_{\forall a \in \{0,1\}} \hat{\alpha}_{[x \to a]} \neg R(\dots)}_{1}$$

$$= 1$$