Aufgabe 1: 2|3

$\Sigma = 11{,}5/16$

a, A,B,C seien Variable, $\alpha = \{A \to 1, B \to 0, C \to 1, D \to 0\}$

$F = (A \to C \vee (\neg D \wedge B))$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(F) &= \hat{\alpha}(A \to C \vee (\neg D \wedge B)) \\
&= \hat{\alpha}(A) \Rightarrow \hat{\alpha}(C \vee (\neg D \wedge B)) \\
&= \alpha(A) \Rightarrow (\hat{\alpha}(C) \mid \hat{\alpha}(\neg D \wedge B)) \\
&= \alpha(A) \Rightarrow (\alpha(C) \mid (\hat{\alpha}(\neg D) \,\&\, \hat{\alpha}(B))) \\
&= \alpha(A) \to (\alpha(C) \mid (!\hat{\alpha}(D) \,\&\, \alpha(B))) \\
&= 1 \to (1 \mid (!0 \,\&\, 0)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

✓

b, Modelle α für $F = (B \Leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge \neg C)$

α ist Modell von F ($\alpha \models F$) wenn $\alpha(F) = 1$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(F) &= \hat{\alpha}((B \Leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge \neg C)) \\
&= \hat{\alpha}(B \Leftrightarrow C) = \hat{\alpha}(A \wedge \neg C) \\
&= (\hat{\alpha}(B) = \hat{\alpha}(C)) = (\hat{\alpha}(A) \,\&\, \hat{\alpha}(\neg C)) \\
&= (\hat{\alpha}(B) = \hat{\alpha}(C)) = (\hat{\alpha}(A) \,\&\, !\hat{\alpha}(C))
\end{aligned}$$

einfach Wahrheitstabelle.

$\Rightarrow \hat{\alpha}(B) = \hat{\alpha}(C) = 1 \mid 0$, fall $= 1$: $\hat{\alpha}(A) \,\&\, !\hat{\alpha}(\neg C) = 1$

wenn $\hat{\alpha}(A) = 1 \;\&\; \hat{\alpha}(C) = 0$

fall $= 0$: $\hat{\alpha}(A) \,\&\, !\hat{\alpha}(\neg C) = 0$

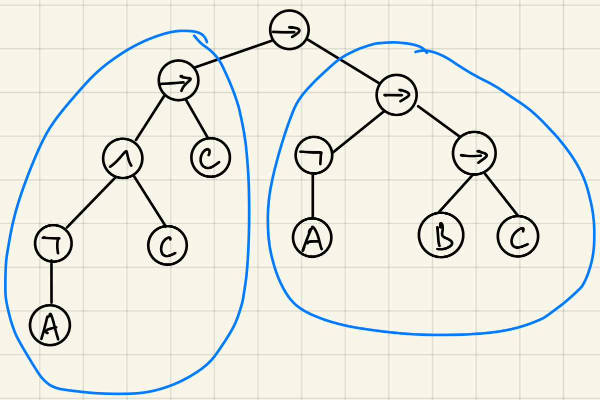
$\hat{\alpha}(A) = 0 \;\&\; (\hat{\alpha}(C) = 0$ oder $\hat{\alpha}(C) = 1)$

$\hat{\alpha}(C) = 1 \;\&\; (\hat{\alpha}(A) = 0$ oder $\hat{\alpha}(A) = 1$

$\Rightarrow$
$\alpha_1 = (1, 1, 1, 0)$,
$\alpha_2 = (0, 0, 0, 0)$,
$\alpha_3 = (0\ 0\ 0\ 1)$,
$\alpha_4 = (0\ 0\ 1\ 0)$,
$\alpha_5 = (0\ 0\ 1\ 1)$

Nein - 1P

c, $F = (\neg A \wedge C \to C) \to \neg A \to B \to C$



✓

Aufgabe 2: Der Operator $\oplus$ 2,5/3

Seien A, B, C Formel

a, Kommutativ $A \oplus B \leftrightarrow B \oplus A$

Wahrheitstabelle

A	B	$A \oplus B$	$B \oplus A$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\Rightarrow$ $\oplus$ ist kommutativ ✓

b, Assosiativ $(A \oplus B) \oplus C \stackrel{?}{=} A \oplus (B \oplus C)$

A	B	C	$A \oplus B$	$(A \oplus B) \oplus C$	$B \oplus C$	$A \oplus (B \oplus C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

$\Rightarrow$ $\oplus$ ist assosiativ ✓

c, indempotent $A \oplus A \oplus A \oplus \ldots \oplus A = A$

Laut Interdefiniertbarkeit ist $A \oplus B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

$\Rightarrow$ $A \oplus A = (\neg A \wedge A) \vee (A \wedge \neg A)$

Außerdem gilt $\neg A \wedge A \equiv A \wedge \neg A$ (Äquivalenzregel)

$\neg A \wedge A \equiv \bot$ $\Rightarrow$ $A \oplus A = \bot \vee \bot = \bot$

Wir machen rekursiv for n-mal $A \oplus A \oplus \ldots \oplus A$, da $A \oplus A \equiv \bot$ ist

$\Rightarrow$ $\bot \oplus A = (\top \wedge A)$

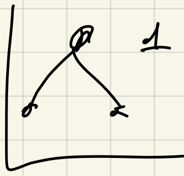
A	A	$(A \oplus A)$	$(A \oplus A) \oplus A$	$A \oplus A \oplus A \oplus A$
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0

$\oplus$ ist nicht idempotent, da $1 \oplus 1 = 0 \neq 1$.

$-0{,}5P$

Aufgabe 3: beliebige Formel F, $d(F)$ ist die Tiefe von F
$vars(F)$ die Menge aller Variable

2/3



$$|vars(F)| \leq 2^{d(F)}$$

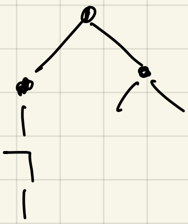
Induktionsanfang: Für automare Formel F, wenn $F = \perp$ oder $F = T$
ist $d(F) = 0$, $vars(F) = 0$

$$\Rightarrow 2^{d(F)} = 2^0 = 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1$$ ✓

$2^4 = 16$

Induktionsannahme: gilt $|vars(F)| \leq 2^{d(F)}$



Induktionsschritt:

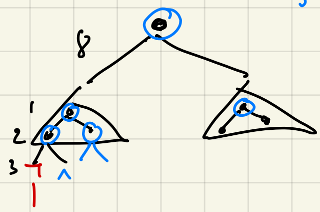
$\rightarrow$ zu zeigen: $|vars(\neg F_1)| \leq 2^{d(\neg F_1)}$

Sei $F = \neg F_1 \Rightarrow d(F) = d(F_1) + 1$

$$vars(F) \leq 2^{d(F)} < 2^{d(F_1)+1}$$

$d = 3$

$5 \leq 2^3 = 8$



Sei $F = F_1 \circ F_2$, $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

falsch $-0{,}5P$

$$|vars(F)| \stackrel{!}{=} |vars(F_1) + vars(F_2)|$$

laut IA: $vars(F_1) \leq 2^{d(F_1)}$, $vars(F_2) \leq 2^{d(F_2)}$

Nein $-0{,}5P$

$$\Rightarrow |vars(F)| \leq 2^{d(F_1)} + 2^{d(F_2)} \leq 2^{\max(d(F_1), d(F_2))} : 2^3 + 2^3 \not\leq 2^3$$

$$\leq 2^{d(F_1 \circ F_2)}$$

$\Rightarrow$ die Formel $|vars(F)| \leq 2^{d(F)}$ gilt

$F = \underbrace{(A \rightarrow B)}_{F_1} \underbrace{\vee}_{\vee} \underbrace{(A \rightarrow C)}_{F_2}$, $|vars(F)| = |\{A, B, C\}| = 3 \leq |\{A,B\}| + |\{A,C\}| = 4$

Aufgabe 4: 3/3

F : Formel nur Variable (Atome) und die Junktoren

V ist positiv wenn : V → Wurzel hat gerade Anzahl von negation

negativ ———————— ungerade ————————

posVars (F : Formel): Set [Variable]

```
switch F
    case (F ist atom)   :  Set.add (F, "+")
    case Negation (F)   :  negVars (F)
    case And (F1, F2)   :  posVars (F1) ~~&&~~ + posVars (F2)     → append.
    case Or (F1, F2)    :  posVars (F1) ~~||~~ + posVars (F2)
    case Imp (F1, F2)   :  negVars (F1) ~~||~~ + posVars (F2)     // ¬F1 v F2
else
    ~~False~~        Ausgabe soll ein Set sein, kein Boolescher Wert.
```

negVars (F : Formel): Set [Variable]

```
switch F
    case (F ist atom)   :  Set.add (F, "-")
    case Negation (F)   :  pos Vars (F)
    case And (F1, F2)   :  negVars (F1) ~~&&~~ + negVars (F2)
    case Or (F1, F2)    :  negVars (F1) ~~||~~ + negVars (F2)
    case Imp (F1, F2)   :  posVars (F1) ~~&&~~ + negVars (F2)     // De-Morgan
else
    False        Set [String] ().
```

print (Set)

Aufgabe 5: $F = A \vee B \wedge \neg A$ $G = \neg A \to C$ $H = A \wedge \neg B$

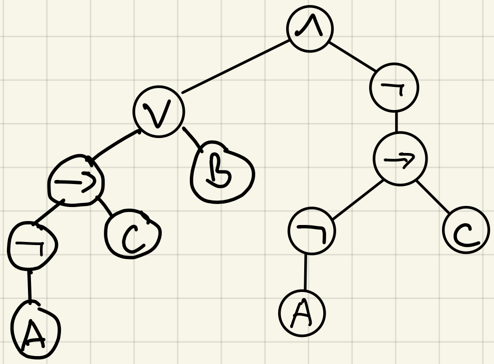
2/4

a) $F_{[G/A]} = (\neg A \to C) \vee B \wedge \neg(\neg A \to C)$

stärker als $\vee$

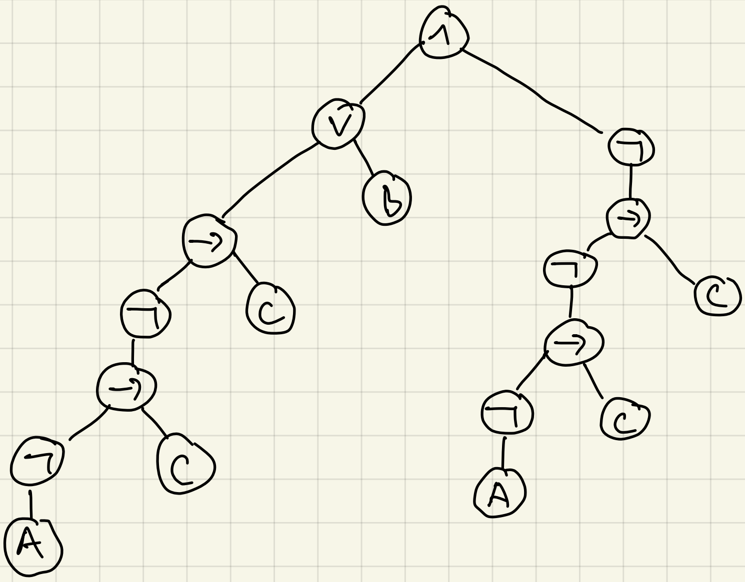
$= (\neg A \to C) \vee (B \wedge \neg(\neg A \to C))$

in der Wurzel



$(F_{[G/A]})_{[G/A]} = (\neg(\neg A \to C) \to C) \vee B \wedge \neg(\neg(\neg A \to C) \to C)$

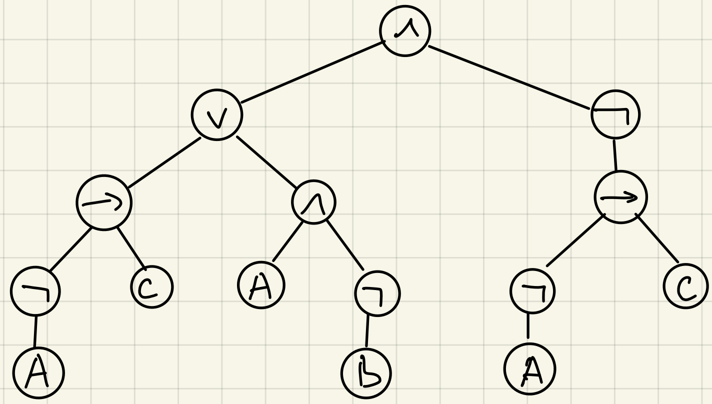
wie oben



$(F_{[G/A]})_{[H/B]} = (\neg A \to C) \vee (A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \to C)$

am schwächsten

Nein,



$F_{[G/A,\, H/B]} = (\neg A \to C) \vee (A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \to C)$

b, Seien F, G, H gegeben und $A \neq B$

$F_{([G/A])[H/B]} = F_{[G/A],[H/B]}$ wenn B ist nicht in G

& A ist nicht in H. -1P