Logik Prof. Dr. H. Peter Gumm
Wintersemester 22/23

Übungszettel 09

Abgabetermin: 7. Januar 2023, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

$\neg\neg B \to \neg B \to A$

Aufgabe 1 (Deduktionstheorem). (2 Punkte): Das Theorem $\vdash \neg\neg B \to (\neg B \to A)$ kann mit Hilfe des Deduktionstheorems im Hilbert-Kalkül wie folgt bewiesen werden:

1.		$\vdash$	$\neg\neg B \to (\neg A \to \neg\neg B)$	Bereits bewiesen $P \to (Q \to P) \equiv T$ Ax1
2.	$\{\neg\neg B\}$	$\vdash$	$\neg A \to \neg\neg B$	Ded. Thm
3.		$\vdash$	$(\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A)$	AX 3
4.		$\vdash$	$((\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A)) \to \neg\neg B \to ((\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A))$	Ax1
5.		$\vdash$	$\neg\neg B \to ((\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A))$	MP 3,4
6.	$\{\neg\neg B\}$	$\vdash$	$(\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A)$	Ded. Thm
7.	$\{\neg\neg B\}$	$\vdash$	$\neg B \to A$	MP 2,6
8.		$\vdash$	$\neg\neg B \to (\neg B \to A)$	Ded. THM

Geben Sie in in jeder Zeile die korrekte Begründung an.

Aufgabe 2 (Herleiten im Hilbertkalkül). (4 Punkte): Zeigen Sie, dass im Hilbertkalkül folgende Formeln hergeleitet werden können (Sie dürfen das Deduktionstheorem verwenden):

(a) $\vdash A \to (A \to B) \to B$

(b) $\vdash \neg A \to (A \to B)$

Aufgabe 3 (Regeln für weitere Operatoren). (2+2 Punkte): Wir erweitern nun den Hilbert-Kalkül, so dass er auch mit "$\wedge$" umgehen kann (vgl. Folie 217):

- $P \wedge Q \to P$ $\qquad \wedge - L$
- $P \wedge Q \to Q$ $\qquad \wedge - R$
- $P \to Q \to P \wedge Q$ $\qquad \wedge - Intro$

(a) Die folgende Liste von Formeln $P_1, ..., P_{11}$ ist jetzt ein Beweis für $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$. Dabei wird das Deduktionstheorem nicht benutzt. Geben Sie für jede Zeile die korrekte Begründung an.

P_1	$B \to A \to B \wedge A$
P_2	$(B \to A \to B \wedge A) \to A \wedge B \to (B \to A \to B \wedge A)$
P_3	$A \wedge B \to B \to A \to B \wedge A$
P_4	$(A \wedge B \to B \to (A \to B \wedge A)) \to (A \wedge B \to B) \to (A \wedge B \to A \to B \wedge A)$
P_5	$(A \wedge B \to B) \to (A \wedge B \to A \to B \wedge A)$
P_6	$A \wedge B \to B$
P_7	$(A \wedge B \to A \to B \wedge A)$
P_8	$(A \wedge B \to A \to B \wedge A) \to (A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to B \wedge A)$
P_9	$(A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to B \wedge A)$
P_{10}	$A \wedge B \to A$
P_{11}	$A \wedge B \to B \wedge A$

(b) Benutzen Sie jetzt das Deduktionstheorem, um $\vdash (P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$ ohne Verwendung der Axiome 1 und 2 in höchstens 8 Zeilen zu beweisen.

Aufgabe 4 (Sequenzenkalkül)**.** (2 Punkte)

Im Ilias-Verzeichnis Zettel 09 finden Sie die Datei `MCS_Aufgaben.jt`. Kopieren Sie diese in Ihr Jape-Verzeichnis „`..//examples/sequential_calculus/`“.

Rufen Sie dann Jape mit der „neuen Theorie“ `..//examples/sequential_calculus/MCS_Aufgaben.jt`“ auf. Beweisen Sie die Aufgaben im *Conjecture Panel* und machen Sie einen screenshot. (In der Klausur sollten Sie solche Beweise auch mit Bleistift und Papier aufschreiben und begründen können.)

Aufgabe 5 (Regel im Sequenzenkalkül)**.** (4 Punkte)

Die Logik in `MCS_Aufgaben.jt` kann auch mit dem Operator '≡' (für logische Äquivalenz) umgehen.

1. Finden Sie bitte heraus, welche ≡-Links-Regel und welche ≡-Rechts-Regel Jape in der obigen Theorie verwendet.

2. Vereinfachen Sie diese Regeln.

≡ - Links

≡ - Rechts

$\vdash \neg\neg P \rightarrow P$

$P \vdash P$

$\vdash \neg P, P$

$\neg\neg P \vdash P$

$\neg\neg P \rightarrow P$

Aufgabe 2

(a) $\vdash A \to (A \to B) \to B$

Setze $\Sigma = \{A, A \to B\}$ dann gilt

1.	$\{A, A \to B\}$	$\vdash$	A	$A \in \Sigma$
2.	$\{A, A \to B\}$	$\vdash$	$A \to B$	$A \to B \in \Sigma$
3.	$\{A, A \to B\}$	$\vdash$	B	MP 1,2
4.	$\{A\}$	$\vdash$	$(A \to B) \to B$	Ded. The
5.		$\vdash$	$A \to (A \to B) \to B$	Ded. The

(b) $\vdash \neg A \to (A \to B)$

1.		$\vdash$	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	Ax 1
2.	$\{\neg A\}$	$\vdash$	$\neg B \to \neg A$	Ded. The
3.		$\vdash$	$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	Ax 3
4.	$\{\neg A\}$	$\vdash$	$(A \to B)$	MP 2,3
5.		$\vdash$	$\neg A \to (A \to B)$	Ded. The

Aufgabe 3

P_1	$B \to A \to B \wedge A$	$\wedge$- Intro
P_2	$(B \to A \to B \wedge A) \to A \wedge B \to (B \to A \to B \wedge A)$	Ax 1
P_3	$A \wedge B \to B \to A \to B \wedge A$	MP 1,2
P_4	$(A \wedge B \to B \to (A \to B \wedge A)) \to (A \wedge B \to B) \to (A \wedge B \to A \to B \wedge A)$	Ax 2
P_5	$(A \wedge B \to B) \to (A \wedge B \to A \to B \wedge A)$	MP 3,4
P_6	$A \wedge B \to B$	$\wedge$- R
P_7	$(A \wedge B \to A \to B \wedge A)$	MP 5,6
P_8	$(A \wedge B \to A \to \underline{B \wedge A}) \to (A \wedge B \to \underline{A}) \to (A \wedge B \to \underline{B \wedge A})$	Ax2
P_9	$(A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to B \wedge A)$	MP 7,8
P_{10}	$A \wedge B \to A$	$\wedge$- L
P_{11}	$A \wedge B \to B \wedge A$	MP 9,10

$P \wedge Q \to P$	$\wedge - L$
$P \wedge Q \to Q$	$\wedge - R$
$P \to Q \to P \wedge Q$	$\wedge - Intro$

b. $\vdash (P \wedge Q) \to (Q \wedge P)$

$\vdash Q \to \underline{P \to (Q \wedge P)}$ $\wedge$ - Intro

$\vdash P \wedge Q \to Q$ ~~AX~~ $\wedge R$

$\{P \wedge Q\} \vdash Q$ DT

$\{P \wedge Q\} \vdash P \to (Q \wedge P)$

$\vdash P \wedge Q \to P$

MP

$\{P \wedge Q\} \vdash P$

$\{P \wedge Q\} \vdash Q \wedge P$

$\vdash (P \wedge Q) \to (Q \wedge P)$

$$\Delta \vdash P, Q \qquad \frac{\Delta\ \text{Axiom}}{\Delta, P \vdash P, T} \qquad \frac{\Delta\ \text{Axiom}}{\Delta, Q \vdash Q, T} \qquad \frac{}{\Delta\ Q, P \vdash T}$$

$$\overline{\Delta, \neg P, \neg Q \vdash T} \qquad \overline{\Delta, \neg P, P \vdash T} \qquad \overline{\Delta, Q, \neg Q \vdash T} \qquad \text{∨Links}\ \overline{\Delta\ Q, P, \vdash T}$$

$$\text{v\_links}\ \overline{\Delta, \neg P, \neg Q \vee P \vdash \Gamma} \qquad \text{V\_Links}\ \overline{\Delta, Q, \neg Q \vee P \vdash \Gamma}$$

$$\text{v\_Links}\ \overline{\Delta, \neg P \vee Q, \neg Q \vee P \vdash \Gamma}$$

$$\to \text{Links}\ \overline{\Delta, P \to Q, Q \to P \vdash \Gamma}$$