

Übungszettel 01

Abgabetermin: 29. Oktober 2021, 18:00 Uhr

Installieren Sie *JAPE*. Die neueste Version finden Sie hier: <https://github.com/RBornat/jape/releases/>.

Die Installation erzeugt Ihnen einen Link *jape* sowie ein Verzeichnis *examples*. In diesem befinden sich die verschiedenen Logiken, die Jape schon kennt.

Wir wollen genau die Logik verwenden, die wir auch in der Vorlesung benutzen. Im Ilias finden Sie dazu eine komprimiertes Verzeichnis „Marburg2022.zip“. Dekomprimieren Sie dieses und starten Sie *jape* durch Doppelklick auf den oben erwähnten link. Aus dem Menü wählen Sie nun „File/Open new theory ...“, und navigieren Sie zu „.../Marburg2022/zettel01.jt“. Es öffnet sich ein Fenster mit den Beweisaufgaben der folgenden *Aufgabe 1*:

Aufgabe 1. Zeigen Sie mit Hilfe von JAPE die folgenden aussagenlogischen Formeln:

a)

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \quad (1)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R \quad (2)$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow Q \rightarrow R \quad (3)$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \vdash P \rightarrow Q \wedge R \quad (4)$$

b)

$$P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q \quad (5)$$

$$(P \vee (Q \rightarrow P)) \wedge Q \vdash P \quad (6)$$

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \vdash Q \quad (7)$$

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R) \quad (8)$$

c)

$$\neg P \vee \neg Q \rightarrow \neg(P \wedge Q) \quad (9)$$

$$(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (\neg D \rightarrow \neg B) \vdash C \vee D \quad (10)$$

Es genügt, wenn Sie Ihrem/r Tutor/in einen Screenshot mit den gelösten (abgehakten) Aufgaben schicken.
(2+2+2=6 Punkte)

Einen Screenshot können Sie mit Hilfe der Windowstaste leicht erstellen:

- „Win-Shift-S“ und dann den gewünschten Bereich auf dem Bildschirm markieren,
- das Ergebnis mit „Strg-v“ in Ihr Word- oder Ihr Powerpoint-Dokument einfügen.

Aufgabe 2. Lösen Sie die Aufgabe, die Sie hier bei der Uni Dortmund finden. Die gesuchten Formeln sind durch „Klicken“ zusammenzubauen. Verwenden Sie Klammern, wenn mehrere Operatoren in einer Formel vorkommen. Als Ergebnis geben Sie einen Screenshot der gelösten Seite ab

(2 Punkte)

$$\frac{1 \quad (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}) \wedge (\neg \mathbf{D} \rightarrow \neg \mathbf{B})}{\mathbf{C} \vee \mathbf{D}}$$

Aufgabe 3. Anne, Bernd, Christine und Dirk streiten. Wer hat recht?

- Anne sagt: „Jeder von uns hat recht.“
 - Bernd meint: „Nein, genau einer von uns liegt richtig.“
 - Christine ergänzt: „Jedenfalls sind nicht mehr als zwei richtig.“
 - Dirk behauptet: „Sowohl Anna als auch Bernd liegen falsch.“
- (a) Modellieren Sie die Situation mit aussagenlogischen Variablen A, B, C, D und Operatoren $\rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge, \neg$. Beispielsweise steht A für „Anne hat recht“ und Anne's Aussage besagt dann:

$$A \leftrightarrow A \wedge B \wedge C \wedge D$$

- (b) Finden Sie Wahrheitswerte (*true, false*) für die einzelnen Variablen, so dass alle Aussagen wahr sind.

(3+1=4 Punkte)

Mathematische Formeln können Sie auf folgende Weise in ein Word- oder Powerpoint Dokument eingeben. Wählen Sie aus dem Menü: „Einfügen/Formel/Neue Formel einfügen“. Dann öffnet sich ein Formelfenster wie unten gezeigt. Mathematische Zeichen werden textuell in diesem Formelfenster eingegeben.



Formelzeichen beginnen immer mit einem „backslash“ „\“ und zwar:

- \vee für \vee
- \wedge für \wedge
- \rightarrow für \rightarrow
- \neg für \neg
- \exists für \exists
- \forall für \forall

Für die obige Formel wurde also eingegeben: „ $(A \vee \neg B) \rightarrow C$ “. Sobald der Cursor das Formelfenster verlässt, erscheint die Formel in all ihrer Pracht.

Aufgabe 4. Modellieren Sie die folgenden Aussagen mit Quantoren \forall, \exists und mit Relationszeichen $istStudent(x), istAufgabe(y), gibtKeinePunkte(y), bearbeitet(x, y), bekommtVollePunktzahl(x, y)$.

Beispielsweise könnten Sie die Aussage: „nicht jeder Student erhält für jede Aufgabe die volle Punktzahl“ modellieren durch:

$$\neg(\forall x. istStudent(x) \rightarrow \forall y. (istAufgabe(y) \wedge bearbeitet(x, y) \rightarrow bekommtVollePunktzahl(x, y))) :$$

Modellieren Sie analog die folgenden Aussagen durch je eine Formel:

- (a) Es gibt einen Studenten, der jede Aufgabe bearbeitet.

- (b) Es gibt keinen Studenten, der eine Aufgabe bearbeitet, die keine Punkte gibt.
- (c) Es gibt eine Aufgabe für die jeder Student, der sie bearbeitet, die volle Punktzahl bekommt.
- (d) Für jede Aufgabe gibt es einen Studenten, der sie bearbeitet und volle Punktzahl bekommt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:

a. Aussagenlogische Variable

$$1) A \leftrightarrow A \wedge B \wedge C \wedge D$$

$$2) B \leftrightarrow \neg A \vee \neg C \vee \neg D$$

$$3) C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg D) \vee (\neg B \wedge \neg D)$$

$$4) D \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

b. Beispiel

$$1) A = B = C = D = \text{True}$$

$$\rightarrow A \wedge B \wedge C \wedge D = \text{True} \Rightarrow A = \text{True}$$

$$2) A = \text{True}, C = \text{False}, D = \text{False}$$

$$\rightarrow \neg A \wedge \neg C \wedge \neg D = \text{False} \wedge \text{True} \wedge \text{True} = \text{False} = B$$

$$3) A = B = \text{True}, D = \text{False}$$

$$\rightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg D) \vee (\neg B \wedge \neg D)$$

$$= (F \wedge F) \vee (F \wedge T) \vee (F \wedge T)$$

$$= F \vee F \vee F = \text{False} = C$$

$$\rightarrow A = B = \text{True}, C = D = \text{False}$$

$$4) A = B = \text{False}$$

$$\rightarrow \neg A = \neg B = \text{True} \rightarrow D = \neg A \wedge \neg B = \text{True}$$

Aufgabe 4:

Beispiel: Nicht jeder Student erhält für jede Aufgabe die volle Punktzahl

$$\neg (\forall x. \text{istStudent}(x) \rightarrow \forall y. (\text{istAufgabe}(y) \wedge \text{bearbeitet}(x,y))$$
$$\rightarrow \text{bekommtVollePunktzahl}(x,y))$$

a. Es gibt einen Studenten, der jede Aufgabe bearbeitet

$$\exists x. \text{istStudent}(x) \wedge \forall y. (\text{istAufgabe}(y) \wedge \text{bearbeitet}(x,y))$$

b. Es gibt keinen Studenten, der eine Aufgabe gearbeitet, die keine Punkte gibt

$$\neg (\exists x. \text{istStudent}(x) \wedge \exists y. (\text{istAufgabe}(y) \wedge \text{bearbeitet}(x,y) \rightarrow \text{gibtKeinePunkte}(y)))$$

c. Es gibt eine Aufgabe für die jeder Student, der sie bearbeitet, die volle Punktzahl bekommt

$$\exists y. (\text{istAufgabe}(y) \wedge \forall x. (\text{istStudent}(x) \wedge \text{bearbeitet}(x,y) \rightarrow \text{bekommtVollePunktzahl}(y)))$$

d) für jede Aufgabe gibt es einen Studenten, der sie bearbeitet und volle Punktzahl bekommt

$$\forall y . \left(\text{istAufgabe}(y) \rightarrow \exists x (\text{istStudent}(x) \wedge \text{bearbeitet}(x, y) \rightarrow \text{bekommtVollePunktzahl}(y)) \right)$$

Aufgabe 1

1 $P \rightarrow Q$

assumption

2 $Q \rightarrow R$
 3 P
 4 Q
 5 R
 6 $P \rightarrow R$

assumption
assumption
 \rightarrow elim 1,3
 \rightarrow elim 2,4
 \rightarrow intro 3,5

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow Q \rightarrow R$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \vdash P \rightarrow Q \wedge R$$

7 $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$ intro 2-6

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \quad \text{intro 1-7}$$

1 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ premise

2 $P \wedge Q$
 3 Q
 4 P
 5 $Q \rightarrow R$
 6 R

assumption
 \wedge elim - rechts 2
 \wedge elim - links 2
 \rightarrow elim 1,4
 \rightarrow elim 3,5

7 $(P \wedge Q) \rightarrow R \rightarrow$ intro 2-6

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$$

1 $(P \wedge Q) \rightarrow R$ premise

2 P
 3 Q
 4 $(P \wedge Q)$
 5 R
 6 $Q \rightarrow R$

assumption
assumption
 \wedge intro 2,3
 \rightarrow elim 1,4
 \rightarrow intro 3-5

7 $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow$ intro 2-6

$$P \wedge Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow Q \rightarrow R$$

1 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ premise

2 $P \rightarrow Q$
 3 $Q \rightarrow R$
 4 P
 5 Q
 6 R
 7 $Q \wedge R$

\wedge elim 1
 \wedge elim 1
assumption
 \rightarrow elim 2,4
 \rightarrow elim 3,5
 \wedge intro 1,6

8 $P \rightarrow (Q \wedge R) \rightarrow$ intro 4-7

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$$

1 $P \vee (Q \wedge R)$

premise

2 \boxed{P}

assumption
 \vee intro 2

3 $\boxed{P \vee Q}$

assumption
 \wedge elim 4
 \vee intro 5

7 $P \vee Q$ \vee elim 1, 2-3, 4-6

$P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q$

1 $(P \vee (Q \rightarrow P)) \wedge Q$ premise

2 $P \vee (Q \rightarrow P)$

3 Q

4 \boxed{P}

5 $\boxed{Q \rightarrow P}$

6 P

\wedge elim 1
 \wedge elim 1
assumption
assumption
 \rightarrow elim 3,5

7 P \vee -elim 4, 5-6

$(P \vee (Q \rightarrow P)) \wedge Q \vdash P$

1 $(P \vee Q) \wedge \neg P$ premise

2 $\neg P$

3 $P \vee Q$

4 \boxed{P}

5 \boxed{L}

6 \boxed{Q}

7 \boxed{Q}

\wedge elim 1
 \wedge elim 1
assumption
 \neg elim 2,4
contra 5
assumption
 \vee -intro 1,3,4-6,7

$(P \vee Q) \wedge \neg P \vdash Q$

1 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

premise

2
3
4
5
6
 $P \wedge Q$
P
Q
 $Q \vee R$
 $P \wedge (Q \vee R)$

assumption
1 elim 2
1 elim 2
 \vee intro 4
 \wedge intro 3,5

7
8
9
10
11
 $P \wedge R$
P
R
 $Q \vee R$
 $P \wedge (Q \vee R)$

assumption
1 elim 7
1 elim 7
 \vee intro 9
 \wedge intro 9,11

12 $P \wedge (Q \vee R)$

\vee -intro 1,2-6,7-11

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$

1
2
3
4
5
F
 $\neg P \vee \neg Q$
 $\neg P$
 $P \wedge Q$
P
 \perp
 $\neg(P \wedge Q)$

7
8
9
10
11
 $\neg Q$
 $P \wedge Q$
Q
 \perp
 $\neg(P \wedge Q)$
 $\neg(P \wedge Q)$

premise
assumption
assumption
1 elim link 3
 \neg elim 2,4
 \neg intro 3,5

assumption
assumption
1 elim recht
 \neg elim 7,9
 \neg intro 8,10

\rightarrow intro 1-11

$\neg P \vee \neg Q \rightarrow \neg(P \wedge Q)$