Logik Prof. Dr. H. Peter Gumm
Wintersemester 2022/23

Zettel 04

Abgabetermin: 19. November 2021, 18:00 Uhr

1 1 1 0
0 0 1 0

Aufgabe 1.

a) Seien A, B, C Variablen. Mit der Belegung $\alpha = \{A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1, D = 0\}$ berechnen Sie bitte $\hat{\alpha}(F)$ für die Formel $F = (A \to C \vee (\neg D \wedge B))$. Stellen Sie jeden Berechnungsschritt mit Begründung dar.

b) Bestimmen Sie alle Modelle α der Formel $(B \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge \neg C)$.

c) Zeichnen Sie den Syntaxbaum für die Formel $(\neg A \wedge B \to C) \to \neg A \to B \to C$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Beweisen Sie, oder geben Sie ein Gegenbeispiel zu den Behauptungen: Der Operator $\oplus$ ist

xor

a) *kommutativ*, $x \oplus y \stackrel{?}{=} y \oplus x$

b) *assoziativ*, $(x \oplus y) \oplus z \stackrel{?}{=} x \oplus (y \oplus z)$

c) *idempotent* . $\underbrace{x \oplus \ldots \oplus x}_{\substack{n\text{-mal} \\ n \in \mathbb{N}}} \stackrel{?}{=} x$

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Für eine beliebige Formel F sei $d(F)$ die Tiefe von F und $vars(F)$ die Menge aller Variablen, die in F vorkommen. Zeigen Sie durch Induktion über den Aufbau, dass für jede Formel F gilt:

$$|vars(F)| \leq 2^{d(F)}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Sei F eine Formel, in der nur Variablen (Atome) und die Junktoren $\vee, \wedge, \neg$ vorkommen. Eine Variable V kommt *positiv* (*negativ*) in F vor, falls in der Baumdarstellung von F die Anzahl der Negationen auf dem Weg von V zur Wurzel *gerade* (*ungerade*) ist.

Beispiel: In $F = \neg((\neg A \vee B) \wedge \neg(B \wedge \neg C))$ kommt A positiv vor, C negativ und B sowohl positiv als auch negativ.

Falls man auch den Junktor " $\to$ " erlaubt, so muss man jede Teilformel der Form $F_1 \to F_2$ gedanklich durch $\neg F_1 \vee F_2$ ersetzen. Definieren Sie wechselseitig rekursive Funktionen

- *posVars(F : Formel) : Set[Variable]* sowie
- *negVars(F : Formel) : Set[Variable]*,

die für eine Formel F jeweils die *Mengen aller Variablen* liefern, welche *positiv* bzw. *negativ* vorkommen. (Sie können, $posVars$ und $negVars$ als Programme formulieren, müssen es aber nicht.)

(3 Punkte)

Aufgabe 5. Für Formeln F, G und Variable A wurde in der Vorlesung $F_{[G/A]}$ definiert. Allgemeiner sei $F_{[G_1/A_1,\ldots,G_k/A_k]}$ die Formel, die man aus F erhält, wenn man gleichzeitig jede Variable A_i durch die Formel G_i ersetzt.

a) Für $F = A \vee B \wedge \neg A$ und $G = \neg A \rightarrow C$ sowie $H = A \wedge \neg B$ stellen Sie bitte folgende Formeln als Baum dar:

- $F_{[G/A]}$ und $(F_{[G/A]})_{[G/A]}$
- $(F_{[G/A]})_{[H/B]}$ und $F_{[G/A,H/B]}$

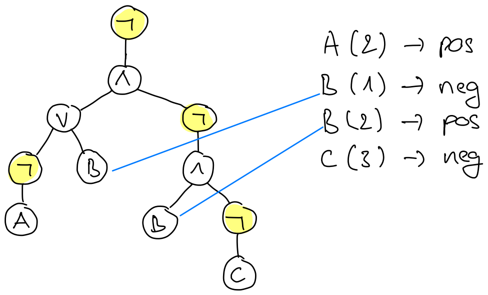
b) Seien beliebige Formeln F,G,H gegeben und Variablen $A \neq B$. Unter welcher Bedingungen gilt: $(F_{[G/A]})_{[H/B]} = (F_{[H/B]})_{[G/A]}$

$(F_{[G/A]})_{[H/B]} = (F_{[H/B]})_{[G/A]}$

(4 Punkte)

Auf 4: $F = \neg((\neg A \vee B) \wedge \neg(B \wedge \neg C))$

$\boxed{G \neq H}$



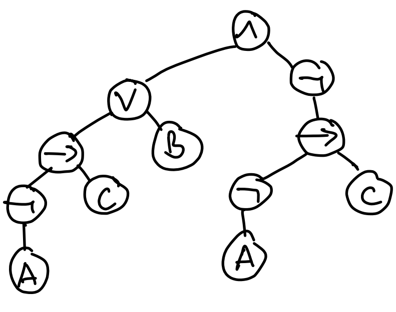
$G = \neg A \rightarrow C$

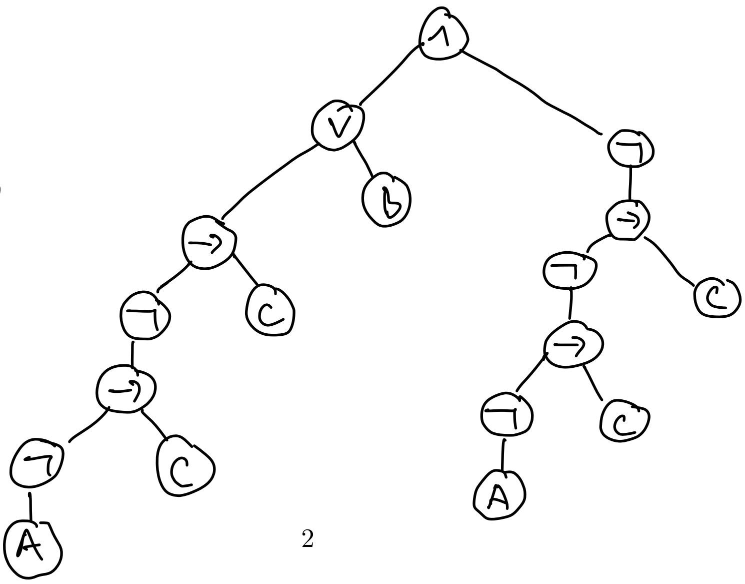
$F_{[G/A]}$

$(\neg A \rightarrow C) \vee B \wedge \neg(\neg A \rightarrow C)$

$(F_{[G/A]})_{[G/A]} =$

$(\neg(\neg A \rightarrow C) \rightarrow C) \vee B \wedge \neg(\neg(\neg A \rightarrow C) \rightarrow C)$





Aufgabe 1:

a, A, B, C seien Variable, $\alpha = \{A \to 1,\ B \to 0,\ C \to 1,\ D \to 0\}$

$F = (A \to C \vee (\neg D \wedge B))$

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}(F) &= \hat{\alpha}(A \to C \vee (\neg D \wedge B)) \\
&= \hat{\alpha}(A) \Rightarrow \hat{\alpha}(C \vee (\neg D \wedge B)) \\
&= \alpha(A) \Rightarrow (\hat{\alpha}(C) \mid \hat{\alpha}(\neg D \wedge B)) \\
&= \alpha(A) \Rightarrow (\alpha(C) \mid (\hat{\alpha}(\neg D) \ \& \ \hat{\alpha}(B))) \\
&= \alpha(A) \to (\alpha(C) \mid (!\hat{\alpha}(D) \ \& \ \alpha(B))) \\
&= 1 \to (1 \mid (!0 \ \& \ 0)) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

b, Modelle α für $F = (B \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge \neg C)$

α ist Modell von F ($\alpha \models F$) wenn $\alpha(F) = 1$

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}(F) &= \hat{\alpha}((B \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge \neg C)) \\
&= \hat{\alpha}(B \leftrightarrow C) = \hat{\alpha}(A \wedge \neg C) \\
&= (\hat{\alpha}(B) = \hat{\alpha}(C)) = (\hat{\alpha}(A) \ \& \ \hat{\alpha}(\neg C)) \\
&= (\hat{\alpha}(B) = \hat{\alpha}(C)) = (\hat{\alpha}(A) \ \& \ !\hat{\alpha}(C))
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \hat{\alpha}(B) = \hat{\alpha}(C) = 1 \mid 0$, fall $= 1$: $\hat{\alpha}(A) \ \& \ !\hat{\alpha}(\neg C) = 1$

wenn $\hat{\alpha}(A) = 1 \ \& \ \hat{\alpha}(C) = 0$

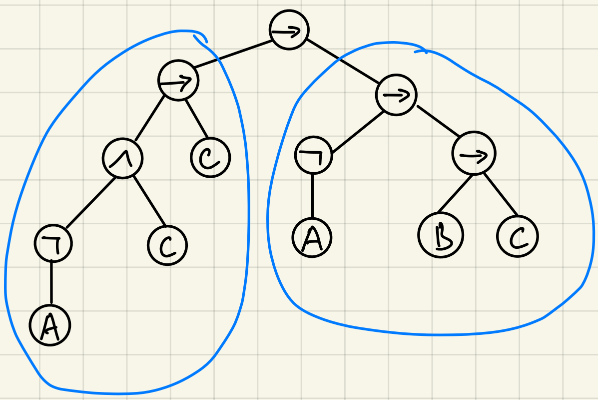
fall $= 0$: $\hat{\alpha}(A) \ \& \ !\hat{\alpha}(\neg C) = 0$

$\hat{\alpha}(A) = 0 \ \& \ (\hat{\alpha}(C) = 0$ oder $\hat{\alpha}(C) = 1)$

$\hat{\alpha}(C) = 1 \ \& \ (\hat{\alpha}(A) = 0$ oder $\hat{\alpha}(A) = 1$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\alpha_1 &= (1, 1, 1, 0), \\
\alpha_2 &= (0, 0, 0, 0), \\
\alpha_3 &= (0\ 0\ 0\ 1), \\
\alpha_4 &= (0\ 0\ 1\ 0), \\
\alpha_5 &= (0\ 0\ 1\ 1)
\end{aligned}
$$

c, $F = (\neg A \wedge C \to C) \to \neg A \to B \to C$



Aufgabe 2: Der Operator $\oplus$

Seien A, B, C Formel

a, Kommutativ $A \oplus B \leftrightarrow B \oplus A$

Wahrheitstabelle

A	B	$A \oplus B$	$B \oplus A$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\Rightarrow$ $\oplus$ ist kommutativ

b, Assosiativ $(A \oplus B) \oplus C \stackrel{?}{=} A \oplus (B \oplus C)$

A	B	C	$A \oplus B$	$(A \oplus B) \oplus C$	$B \oplus C$	$A \oplus (B \oplus C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

$\Rightarrow$ $\oplus$ ist assosiativ

c, indempotent $A \oplus A \oplus A \oplus \ldots \oplus A = A$

Laut Interdefiniertbarkeit ist $A \oplus B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

$\Rightarrow A \oplus A = (\neg A \wedge A) \vee (A \wedge \neg A)$

Außerdem gilt $\neg A \wedge A \equiv A \wedge \neg A$ (Äquivalenzregel)

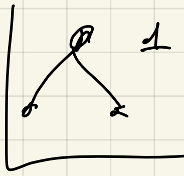
$\neg A \wedge A \equiv \perp \Rightarrow A \oplus A = \perp \vee \perp = \perp$

Wir machen rekursiv for n-mal $A \oplus A \oplus \ldots \oplus A$, da $A \oplus A \equiv \perp$ ist

$\Rightarrow \perp \oplus A = (\top \wedge A)$

A	A	$(A \oplus A)$	$(A \oplus A) \oplus A$	$A \oplus A \oplus A \oplus A$
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0

Aufgabe 3: beliebige Formel F, $d(F)$ ist die Tiefe von F
vars(F) die Menge aller Variable



$$|\text{vars}(F)| \leq 2^{d(F)}$$

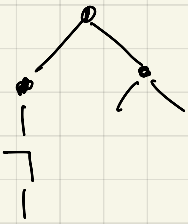
Induktionsanfang: Für automare Formel F, wenn $F = \bot$ oder $F = \top$
ist $d(F) = 0$, vars$(F) = 0$

$$\Rightarrow \quad 2^{d(F)} = 2^0 = 1$$

$2^4 = 16$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq 1$$

Induktionsannahme: gilt $|\text{vars}(F)| \leq 2^{d(F)}$



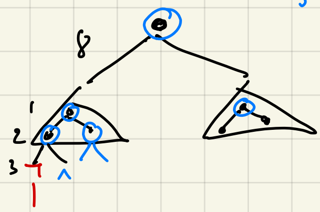
Induktionsschritt:

Sei $F = \neg F_1 \quad \Rightarrow \quad d(F) = d(F_1) + 1$

$$\text{vars}(F) \leq 2^{d(F)} < 2^{d(F_1)+1}$$

$d = 3$

$5 \leq 2^3 = 8$



Sei $F = F_1 \circ F_2$, $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$$|\text{vars}(F)| = |\text{vars}(F_1) + \text{vars}(F_2)|$$

laut IA: $\text{vars}(F_1) \leq 2^{d(F_1)}$, $\text{vars}(F_2) \leq 2^{d(F_2)}$

$$\Rightarrow |\text{vars}(F)| \leq 2^{d(F_1)} + 2^{d(F_2)} \leq 2^{\max(d(F_1), d(F_2))}$$
$$\leq 2^{d(F_1 \circ F_2)}$$

$\Rightarrow$ die Formel $|\text{vars}(F)| \leq 2^{d(F)}$ gilt

Aufgabe 4:

F : Formel nur Variable (Atome) und die Junktoren

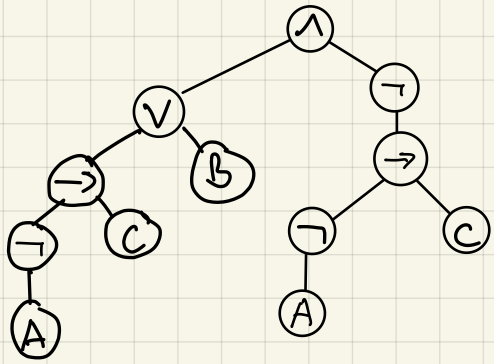
V ist positiv wenn : V → Wurzel hat gerade Anzahl von negation

negativ ———————— ungerade ————————

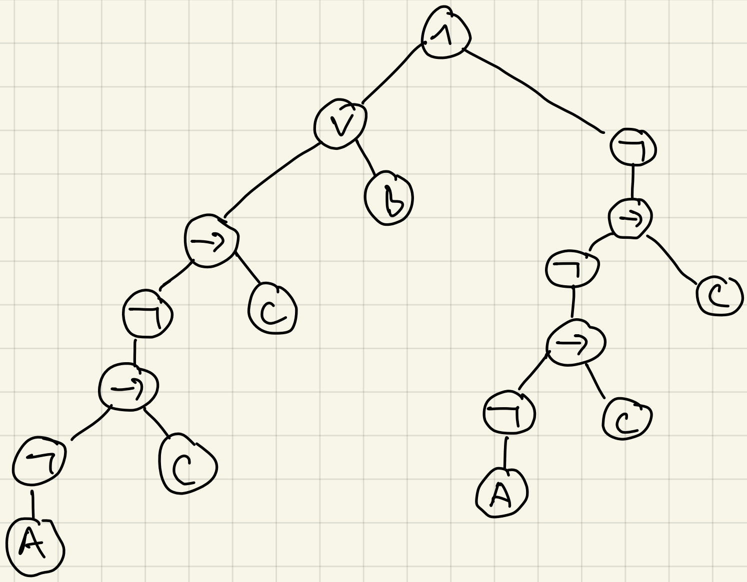
```
posVars (F : Formel) : Set [Variable]

    switch   F
        case   (F ist atom)     :   Set.add (F, "+")
        case   Negation (F)     :   negVars (F)
        case   And (F1, F2)     :   posVars (F1) && posVars (F2)
        case   Or (F1, F2)      :   posVars (F1) || posVars (F2)
        case   Imp (F1, F2)     :   negVars (F1) || posVars (F2)   // ¬F1 v F2
    else
        False

negVars (F : Formel) : Set [Variable]

    switch   F
        case   (F ist atom)     :   Set.add (F, "-")
        case   Negation (F)     :   pos Vars (F)
        case   And (F1, F2)     :   negVars (F1) && negVars (F2)
        case   Or (F1, F2)      :   negVars (F1) || negVars (F2)
        case   Imp (F1, F2)     :   posVars (F1) && negVars (F2)   // De-Morgan
    else
        False

print (Set)
```

Aufgabe 5: $F = A \lor B \land \neg A$ $\quad G = \neg A \to C$ $\quad H = A \land \neg B$

a) $F_{[G/A]} = (\neg A \to C) \lor B \land \neg(\neg A \to C)$

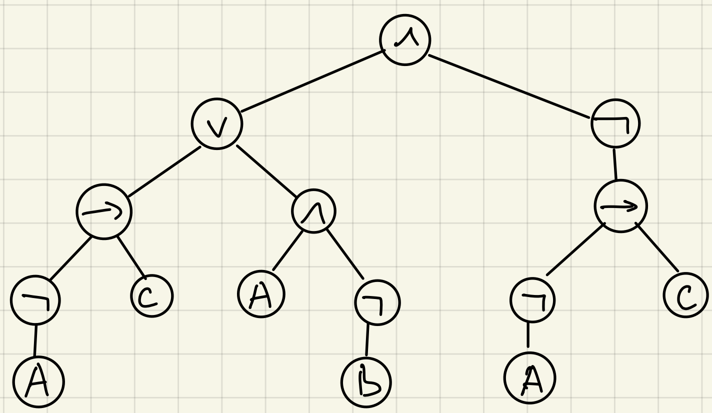


$(F_{[G/A]})_{[G/A]} = (\neg(\neg A \to C) \to C) \lor B \land \neg(\neg(\neg A \to C) \to C)$



$(F_{[G/A]})_{[H/B]} = (\neg A \to C) \lor (A \land \neg B) \land \neg(\neg A \to C)$

am schwächsten



$F_{[G/A,\, H/B]} = (\neg A \to C) \lor (A \land \neg B) \land \neg(\neg A \to C)$

b, Seien F, G, H gegeben und $A \neq B$

$F_{([G/A])[H/B]} = F_{[G/A],[H/B]}$ wenn B ist nicht in G