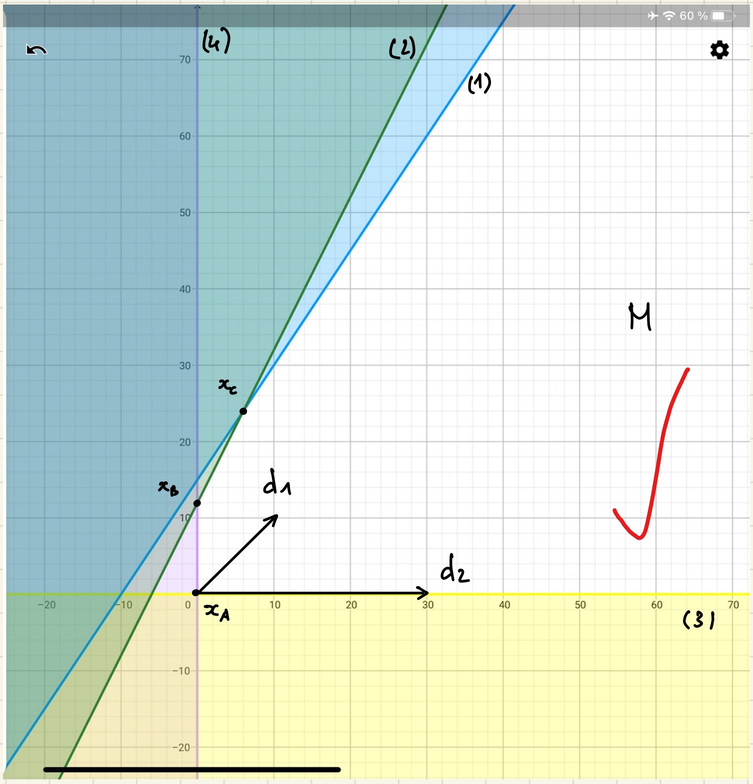
Aufgabe 1:

13,5/20

min $z = -5x_1 - 7x_2$

u.d.N
$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leq 30 \quad (1)\\ -2x_1 + x_2 &\leq 12 \quad (2)\\ x_1, x_2 &\geq 0 \quad (3,4) \end{aligned}$$



Die Extrempunkte sind

$x_A = (0,0)^T$, $x_B = (0,12)^T$

$x_C = (6,24)^T$

Es gibt keine Verbindung zwischen 2 zulässigen Punkte, sodass die Ecken auf diese Strecke liegen.

$\Rightarrow$ Die Extrempunkte sind genau die Ecken der zulässigen Mengen (weiße Bereich)

die Richtung der Unbeschränktheit:

Sei $\alpha > 0$ und $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \end{pmatrix}$

seien d_1, d_2 2 linear unabhängige Vektoren $d = \langle d_1, d_2 \rangle$

$A(x + \alpha d) \leq b \rightarrow Ax + \alpha Ad \leq b$

Sei $x \in M$, $x = x_A = (0,0)^T \Rightarrow Ax = 0$

$\Rightarrow \alpha Ad \leq b$

$\Leftrightarrow Ad \leq 0$

sei $d_1 = (1,1)^T \Rightarrow Ad = (-1,-1)^T \leq 0$
$d_2 = (1,0)^T \rightarrow Ad = (-3,-2)^T \leq 0$

$\rightarrow d_1$ und d_2 sind Richtung der Unbeschränktheit

4/4

War hier so ausführlich nicht unbedingt nötig, aber gut hergeleitet und formal gezeigt

Aufgabe 2:

(i) Bestimmen Sie alle zulässigen Basislösungen der durch die Bedingungen

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

gegebenen Menge. Welche der berechneten Basislösungen sind degeneriert?

i) ZBL

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ mit $\text{Rang}(A) = 2$

zu den Basis $\{x_1, x_2\}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 6/17 & -1/17 \\ -1/17 & 3/17 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5/17 \\ 2/17 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 5/17 \\ 2/17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ZBL

+) Basis $\{x_1, x_3\}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 1/7 & -3/7 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 0 \\ -2/7 \\ 0 \end{pmatrix}$ keine ZBL

+) Basis $\{x_1, x_4\}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ZBL

+) Basis $\{x_2, x_3\}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/8 \\ 3/4 & -1/8 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 7/24 \\ 5/8 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/24 \\ 5/8 \\ 0 \end{pmatrix}$ 9/24 3/8 ist ZBL

+) Basis $\{x_2, x_4\}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 6/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ZBL

f) Basis $\{x_3, x_4\}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ZBL

2,5/3

Die Basislösung $\{x_1, x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}$ sind degenerate

degeneriert wenn gleiche $\bar{x}$

(ii) Es wird nun die Menge $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Ist $x = (1,1,1,0,0,0)^\top$ eine zulässige Basislösung?

ii) Menge $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

$$\Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix} = b$$

$\Rightarrow$ x ist eine zulässige Lösung (ZL)

die Vektore $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$ sind linear abhängig für

$\lambda_1 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_2 = -2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 8 + 7 \\ 2 - 10 + 8 \\ 3 - 12 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ x ist keine ZBL

2/2

Aufgabe 3:

Aufgabe 3 Die Menge S sei durch die Bedingungen

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

gegeben. Stellen Sie den Punkt $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \end{pmatrix}^T$, als konvex Kombination der Extrempunkte von S plus, falls nötig, einer Richtung der Unbeschränktheit dar. Geben Sie zwei verschiedene Darstellungen an.

Menge $S = \{ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \mid x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \}$

Die basislösung lässt sich darstellen als $x_B = B^{-1} b$ mit invertierbare Untermatrix B von A

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(A) = 1$

zu Basis $\{x_1\}$ $B = (1) \Rightarrow B^{-1} = (1)$

$\Rightarrow B^{-1} \cdot b = 2 \Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ist eine ZBL, Extrempunkt

zu Basis $\{x_2\}$ $B = (2) \Rightarrow B^{-1} = (\frac{1}{2})$

$\Rightarrow B^{-1} \cdot b = 1 \Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ist eine ZBL, Extrempunkt

zu Basis $\{x_3\}$ $B = (-3) \Rightarrow B^{-1} = (\frac{-1}{3})$

$\Rightarrow B^{-1} \cdot b = \frac{-2}{3} \Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ keine ZBL

$\Rightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Sei $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ die Richtung der Unbeschränktheit.

$\Rightarrow Ad = 0$ und $d \cancel{\geqslant} 0$ (S. 57 - 58) Skript

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = d_1 + 2d_2 - 3d_3 = 0$

$\Rightarrow d_1 = 3d_3 - 2d_2$

Sei $y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 9/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Konvexkombination der Extrempunkte

Sei $\alpha \in [0,1]$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow \quad \alpha \cdot x_B^{(1)} + (1-\alpha)\, x_B^{(2)} + d$$

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cancel{\lambda} \begin{pmatrix} 3d_3 - 2d_2 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 9/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

guter Ansatz, hier weiter machen, was folgt bspw. direkt aus der dritten Gleichung?

2/5

$\Rightarrow \quad d_3 = 1$

Aus den Gleichung I und II erhällt man $d_2 = \frac{5}{4} + \alpha \geq 0$

$\forall \alpha \in [0,1]$

$0 \leq d_1 = -2\left(\frac{5}{4} + \alpha\right) + 3 \cdot 1 = \frac{1}{2} - 2\alpha \Rightarrow \alpha \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ d.h $\in [0, \frac{1}{4}]$

$\alpha = 0 \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{4}$

$$y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4.2.1)

Aufgabe 4:

4i) fehlt

Aufgabe 4

(i) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und die konvexe Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass sich der Rezessionskegel darstellen lässt durch

$$S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \geq 0\}.$$

(ii) Es wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und zu einem beliebigen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ die Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$ betrachtet. Stellen Sie den Rezessionskegel $S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \geq 0\}$ in der Form

$$S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^3 : d_3 \geq f(d_1, d_2)\}, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dar.

ii) Sei $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad S = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$

$$S^\infty = \{d \in \mathbb{R}^3 : x + \lambda d \in S, \ \forall x \in S, \ \forall \lambda \geq 0\}$$
$$= \{d \in \mathbb{R}^3 : Ad \geq 0\}$$

$$Ad = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 + d_3 \\ -d_1 + d_2 + d_3 \\ -d_1 - d_2 + d_3 \\ d_1 - d_2 + d_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} d_1 + d_2 + d_3 \geq 0 \\ -d_1 + d_2 + d_3 \geq 0 \\ -d_1 - d_2 + d_3 \geq 0 \\ d_1 - d_2 + d_3 \geq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} d_3 \geq -d_1 - d_2 & (1) \\ d_3 \geq d_1 - d_2 & (2) \\ d_3 \geq d_1 + d_2 & (3) \\ d_3 \geq -d_1 + d_2 & (4) \end{matrix}$$

Aus (1) (2) $\Rightarrow \quad d_3 \geq |d_1| - d_2$

(3) (4) $\Rightarrow \quad d_3 \geq |d_1| + d_2$

$$\Rightarrow \quad d_3 \geq |d_1| + |d_2| = f: (d_1, d_2)$$

gut, 3/3

i) $S^\infty = \{ d \in \mathbb{R}^n \mid x + yd \in S, \ \forall x \in S, y \geq 0\}$ es ist z.z.

$S^\infty = \{ d \in \mathbb{R}^n \mid Ad \geq 0\}$

„$\geq$" Sei d gegeben $Ad \geq 0$ und $x \in S$, $\gamma \geq 0$

$$A(x+\gamma d) = Ax + \gamma Ad \geq b + \gamma Ad$$

$$\gamma \geq 0 \Rightarrow \quad b + \gamma Ad \geq b + 0 = b$$
$$\geq b$$

$\Rightarrow \quad x + \gamma d \in S \quad \Rightarrow d \in S^\infty$

„$\leq$" Sei also $d \in S^\infty$ dh $x + \gamma d \in S \quad \forall x \in S, \gamma \geq 0$

Angenommen es existiere $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_i d < 0$

das bedeutet, dass $A(x + \gamma d) = a_i (x + \gamma d) = \underbrace{a_i x}_{\geq 0} + \underbrace{\gamma a_i d}_{< 0} < b$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq 0$

für γ groß genug $\Rightarrow x + \gamma d \notin S$ ↯ zu $d \in S^\infty$

d.h $ad \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \to Ad \geq 0$ da $d \in \{d \in \mathbb{R}^n \mid Ad \geq 0\}$