2) $p \in \mathcal{N}(A)$ $\quad A \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2022/2023**

Fachbereich Mathematik

Dr. M. Hansen, D. Vogel

11,5 / 22

Übungen zur Linearen Optimierung

4. Aufgabenblatt

semi-definite

Aufgabe 1 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. (2+2+2)

3/6

A symmetric

$v^T A v \geq 0 \; (v \in V)$

(i) Zeigen Sie, dass AA^T positiv semidefinit ist.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix A mit $\operatorname{rank}(A) > 1$ an, für die AA^T nicht invertierbar ist. wenn die Vektoren linear abhängig also. es gibt $\lambda \neq 0$

(iii) Zeigen Sie, dass aus $\operatorname{rank}(A) = m$ die Invertierbarkeit von AA^T folgt.

4,5/5

Aufgabe 2 Bestimmen Sie zu (5)

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Nullraummatrix Z, sodass Z keine Basis des Nullraums von A ist. Geben Sie außerdem für die Vektoren $x^{(1)} = (1,0,1,0)^T$ und $x^{(2)} = (3,5,-5,-3)^T$ die eindeutigen Vektoren $p^{(1)}, p^{(2)} \in \mathcal{N}(A)$ und $q^{(1)}, q^{(2)} \in \mathcal{R}(A^T)$ an, sodass $x^{(1)} = p^{(1)} + q^{(1)}$ und $x^{(2)} = p^{(2)} + q^{(2)}$.

4/4

Aufgabe 3 Gegeben sei das folgende LP: (4)

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{u.d.N.} & x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ & \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_4 - x_6 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ & x \geq 0 \end{array} .$$

(VRM)

Geben Sie zunächst A und b explizit an. Benutzen Sie die Variable Reduction Method um einen Punkt x zu bestimmen, für den gilt $Ax = b$. Verwenden Sie als Index für die Basisvariablen einmal {1,2,3} und einmal {2,4,5} um mögliche Punkte herzuleiten. Sind diese Punkte zulässig? Warum ist es nicht möglich die Indizes {4,5,6} als Indizes der Basisvariablen zu verwenden?

Aufgabe 4 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leq n$ mit $\operatorname{rank}(A) = m$ und P die orthogonale Projektionsmatrix bzgl. $\mathcal{N}(A)$. Außerdem sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, der sich nicht als Linearkombination der Zeilen von A darstellen lässt. (2+5)

(i) Zeigen Sie, dass $a^\mathsf{T} P a \neq 0$ gilt.

(ii) Sei nun

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ a^\mathsf{T} \end{pmatrix}$$

und sei $\hat{P}$ die Orthogonale Projektionsmatrix bzgl. $\mathcal{N}(\hat{A})$. Zeigen Sie, dass $\hat{P}$ die Darstellung

$$\hat{P} = P - Pa(a^\mathsf{T} P a)^{-1} a^\mathsf{T} P$$

besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\hat{P}$ tatsächlich eine Projektion ist, also $\hat{P}^2 = \hat{P}$ gilt. Zeigen Sie anschließend $\hat{P}p = p$ für $p \in \mathcal{N}(\hat{A})$ und $\hat{P}q = 0$ für $q \in \mathcal{R}(\hat{A}^T)$.

Abgabe: Dienstag, 22.11.22, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1

(i) A ist semipositiv definit wenn $\left\langle \begin{array}{l} A \text{ ist symmetric} \\ x^T A\, x \geq 0 \quad (x \in R^n) \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow$ AA^T ist positiv definit . das gilt $x^T . A . A^T . x > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$
$x \neq 0$

Sei $y = A^T x \Rightarrow x^T A . A^T x = y^T . y$

$\Leftrightarrow \quad y^T . y = \sum_{k=1}^{N} y_k^2$

Sei $y_k^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} y_k^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ AA^T ist positiv definit bzw. positiv semidefinit

(ii) Matrix A mit rank $(A) > 1$

- Ein Matrix, in denen Zeilen oder Spalten linear abhängig sind, gibt kein inverse Matrix

sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}$

$\text{rang}(A) = 3 > 1$ und die Zeilen von AA^T ist linear abhängig

$\Rightarrow$ AA^T gibt kein Inverse.

(iii) $\text{rank}(A) = m \Rightarrow$ Matrix A hat vollen Rank

Sei S, T invertierbare Matrix $S, T \in \mathbb{R}^{m \times n}$

mit $S^{-1} . A . T = E_n \Rightarrow S^{-1} . A = T^{-1}$ sei $B = TS^{-1}$

$B . A = T . S^{-1} . A = T . T^{-1} = E_n$

$\Rightarrow$ A ist auch invertierbar

Aufgabe 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{N}(A) = \{ p \in \mathbb{R}^4 : Ap = 0 \}$. Sei $p = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4)$

$$Ap = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-(\mathrm{III}-\mathrm{II})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\mathrm{II}]{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Dann erhalten wir $\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \\ p_2 + p_3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_4 = 0 \\ p_2 = -p_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = -p_4 \\ p_2 = -p_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Daraus folgt $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist NRM von $\mathcal{N}(A)$

$\dim \mathcal{N}(A) = 2 \Rightarrow \dim \mathcal{R}(A^T) = 4 - \dim \mathcal{N}(A) = 2 \rightarrow$ diese Zeilen bilden eine Basis des Bildraums

$$\rightarrow x^{(1)} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\ \lambda_2 - \mu_3 \\ -\lambda_2 - \mu_3 \\ -\lambda_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \end{pmatrix}$$

sei $\lambda_2 - \mu_3 = 0$ in Zeile 2 $\Rightarrow \lambda_2 = \mu_3$

Einsetzen in Z.3 $\Rightarrow -\lambda_2 - \mu_3 = 1 \Rightarrow -2\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \mu_3 = \frac{-1}{2}$

in Z.1 $\Rightarrow \lambda_1 + 2\mu_2 - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 + 2\mu_2 = \frac{3}{2}$

in Z.4 $\rightarrow$ $-\lambda_1 + 2\mu_2 - \frac{1}{2} = 0 \iff -\lambda_1 + 2\mu_2 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}$

$$p = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$q = \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\ \lambda_2 - \mu_3 \\ -\lambda_2 - \mu_3 \\ -\lambda_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \end{pmatrix}$$

sei von Z.2, Z.3 $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 - \mu_3 = 5 \\ -\lambda_2 - \mu_3 = -5 \end{cases} \rightarrow \lambda_2 = 5, \quad \mu_3 = 0$

$\Rightarrow$ in Z.1 $\rightarrow \lambda_1 + 2\mu_2 + 0 = 3$

Z.4 $\rightarrow -\lambda_1 + 2\mu_2 + 0 = -3$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\mu_2 = 3 \\ -\lambda_1 + 2\mu_2 = -3 \end{cases} \rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \mu_2 = 0$

$$p = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$q = \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{N}(A) = \{ p \in \mathbb{R}^4 : Ap = 0 \}$. Sei $p = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4)$

$$Ap = 0 \iff \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-(\text{III}-\text{II})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\text{II}]{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Dann erhalten wir $\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \\ p_2 + p_3 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} p_1 + p_4 = 0 \\ p_2 = -p_3 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = -p_4 \\ p_2 = -p_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Daraus folgt $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist NRM von $\mathcal{N}(A)$

$\Rightarrow$ $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \bar{z} \\ 0 & -1 & \\ -1 & 0 & \end{pmatrix}$ ist kein Basis von $\mathcal{N}(A)$, wobei $\bar{z}$ ist eine Linearkombination der Spalten Z

- Sei $R(A^T) = \{ q \in \mathbb{R}^4 \mid q = A^T\lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R}^3 \}$

  ist $x^{(1)} = (1, 0, 1, 0)^T$ dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}^3$ sodass $x = p + q$
  $= p + A^T\lambda$

$$Ax^{(1)} = Ap + AA^T\lambda \quad \text{mit} \quad A.p = 0$$
$$\Rightarrow Ax^{(1)} = AA^T\lambda$$

Wobei $Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$(AA^T)^{-1}$ bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{4}\mathrm{III}]{\frac{1}{4}(\mathrm{II}-\mathrm{I})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ keinen vollen Rang $\Rightarrow$ AA^T ist nicht invertierbar $\rightarrow$ $x = p + q$ kann nicht definiert

ist $x^{(2)} = (3, 5, -5, -3)^T$ dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}^3$ sodass $x^{(2)} = p + q$
$= p + A^T\lambda$

$Ax^{(2)} = Ap + AA^T\lambda$ mit $A.p = 0$

$\Rightarrow Ax^{(2)} = AA^T\lambda$

Wobei $Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Indizes $\{1, 2, 3\}$

Die Spalten $1, 2, 3$ von A sind linear unabhängig

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II} - \frac{1}{2}\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III} + 4\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}\mathrm{III}]{2\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I} - \mathrm{III}]{\mathrm{II} + \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 16/3 \\ 10/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ 10/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\bar{x} \geq 0 \Rightarrow$ es ist eine zulässige Punkt

Indices $\{2, 4, 5\}$

Die Spalten $2, 4, 5$ von A sind linear unabhängig

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} + \mathrm{I}]{\mathrm{II} - \mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{x}$ ist nicht $\geq 0 \Rightarrow$ ist $\bar{x}$ nicht zulässig die Indizes $\{4.5.6\}$ ist die Spaltenvektor nicht linear unabhängig

$\Rightarrow$ kein Basis