Logik Prof. Dr. H. Peter Gumm
Wintersemester 22/23

Übungszettel 12

Abgabetermin: 28. Januar 2023, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

Aufgabe 1 (Semantik)**.** Gegeben sei die prädikatenlogische Formel

$$F = \forall x.R(x, f(x)) \wedge R(a, a) \wedge \exists y.\neg R(f(y), y).$$

Prüfen Sie, ob F in der Struktur $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, \{a, f\}, \{R\})$, mit $R^{\mathfrak{A}} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$, $a^{\mathfrak{A}} = 0$ und $f^{\mathfrak{A}}(0) = f^{\mathfrak{A}}(1) = 1$ gilt.

(2 Punkte)

Seite 44

Aufgabe 2 (Sichere Substitution)**.** Führen Sie eine sichere Substitution $F\{t/x\}$ bzw. $G\{t/x\}$ mit $t = s(y)$ in den Formeln F und G durch:

1. $F = \forall y.P(x, y)$
2. $G = P(x, y) \to \exists y.P(y, x)$.

Geben Sie alle von Ihnen durchgeführten Schritte explizit an.

(2 Punkte)

Aufgabe 3 (Äquivalenzumformungen)**.** Geben Sie (mit Begründung) eine prädikatenlogische Äquivalenzumformung für $\leftrightarrow$ an, um die Quantoren nach außen zu ziehen:
Falls $u \notin Frei(G)$ gilt:

entweder gebunden / nicht vorkommt

$$(\forall u.F) \leftrightarrow G \equiv ?.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 4 (Pränexe Normalform, Umwandlung in Klauselmenge)**.** Überführen Sie die Formel $F :\equiv \forall x.\,\exists y.\,\Big(\forall z.\,\big(P(y) \to Q(x,z) \wedge Q(y,x)\big) \vee \exists z.\,\forall x.\,\big(Q(z,y) \to P(x)\big)\Big)$ schrittweise in eine Formel F' in pränexer Normalform, die zu F ***äquivalent*** ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 5 (Pränexe Normalform, Umwandlung in Klauselmenge)**.** Geben Sie zu der folgenden Formel eine ***erfüllungsäquivalente*** Klauselmenge an:

$$G := \forall x.\,\exists y.\,\exists z.\,\forall v.\,\Big(\big(P(y,v) \vee Q(x) \to Q(y)\big) \wedge \big(Q(z) \to P(x,y)\big)\Big)$$

(4 Punkte)

Seite 103.

Aufgabe 6 (Gültigkeit mit Resolventenmethode)**.** Überprüfen Sie mit der Resolventenmethode, ob die folgende Formel *allgemeingültig* ist:

$$H := \forall z.\exists x.\forall j.\exists y.\Big(((P(x) \vee R(y)) \to R(j)) \vee (P(z) \wedge \neg R(y))\Big)$$

(4 Punkte)

Klausurvorbereitung

Aufgabe 1 (Semantik)**.** Gegeben sei die prädikatenlogische Formel

$$F = \forall x.R(x, f(x)) \wedge R(a, a) \wedge \exists y.\neg R(f(y), y).$$

Prüfen Sie, ob F in der Struktur $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, \{a, f\}, \{R\})$, mit $R^{\mathfrak{A}} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$, $a^{\mathfrak{A}} = 0$ und $f^{\mathfrak{A}}(0) = f^{\mathfrak{A}}(1) = 1$ gilt.

$\mathfrak{A} = (\{0,1\}, \{a,b\}, \{R\})$

$R^{\mathfrak{A}} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(F) &= \hat{\alpha}\left(\forall x.\, R(x, f(x)) \wedge R(a,a) \wedge \exists y.\, \neg R(f(y), y)\right) \\
&= \hat{\alpha}(\forall x.\, R(x, f(x))) \;\&\; \hat{\alpha}(R(a,a)) \;\&\; \hat{\alpha}(\exists y.\, \neg R(f(y), y)) \\
&= \min_{a \in A} \hat{\alpha}_{[x \to a]} R(x, f(x)) \;\&\; \hat{\alpha}(R(0,0)) \;\&\; \max_{a \in A} \hat{\alpha}_{[y \to a]} (\neg R(f(y), y)) \\
&= \hat{\alpha}_{[x \to 0]} R(0,1) \;\&\; \hat{\alpha}(R(0,0)) \;\&\; \hat{\alpha}_{[y \to 1]} (\neg R(1,1))
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ gilt in $\mathfrak{A}$

Logik
Wintersemester 22/23

Prof. Dr. H. Peter Gumm

Übungszettel 12

Abgabetermin: 28. Januar 2023, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

Aufgabe 1 (Semantik)**.** Gegeben sei die prädikatenlogische Formel

$$F = \forall x.R(x, f(x)) \wedge R(a, a) \wedge \exists y.\neg R(f(y), y).$$

Prüfen Sie, ob F in der Struktur $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, \{a, f\}, \{R\})$, mit $R^{\mathfrak{A}} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$, $a^{\mathfrak{A}} = 0$ und $f^{\mathfrak{A}}(0) = f^{\mathfrak{A}}(1) = 1$ gilt.

(2 Punkte)

Aufgabe 2 (Sichere Substitution)**.** Führen Sie eine sichere Substitution $F\{t/x\}$ bzw. $G\{t/x\}$ mit $t = s(y)$ in den Formeln F und G durch:

1. $F = \forall y.P(x, y)$
2. $G = P(x, y) \to \exists y.P(y, x)$.

Geben Sie alle von Ihnen durchgeführten Schritte explizit an.

(2 Punkte)

Aufgabe 3 (Äquivalenzumformungen)**.** Geben Sie (mit Begründung) eine prädikatenlogische Äquivalenzumformung für $\leftrightarrow$ an, um die Quantoren nach außen zu ziehen:
Falls $u \notin Frei(G)$ gilt:

$$(\forall u.F) \leftrightarrow G \equiv \,?.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 4 (Pränexe Normalform, Umwandlung in Klauselmenge)**.** Überführen Sie die Formel $F :\equiv \forall x.\, \exists y.\, \Big(\forall z.\, \big(P(y) \;\to\; Q(x,z) \;\wedge\; Q(y,x)\big) \;\vee\; \exists z.\, \forall x.\, \big(Q(z,y) \;\to\; P(x)\big)\Big)$ schrittweise in eine Formel F' in pränexer Normalform, die zu F ***äquivalent*** ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 5 (Pränexe Normalform, Umwandlung in Klauselmenge)**.** Geben Sie zu der folgenden Formel eine ***erfüllungsäquivalente*** Klauselmenge an:

$$G := \forall x.\, \exists y.\, \exists z.\, \forall v.\, \Big(\big(P(y,v) \;\vee\; Q(x) \;\to\; Q(y)\big) \;\wedge\; \big(Q(z) \;\to\; P(x,y)\big)\Big)$$

(4 Punkte)

Aufgabe 6 (Gültigkeit mit Resolventenmethode)**.** Überprüfen Sie mit der Resolventenmethode, ob die folgende Formel *allgemeingültig* ist:

$$H := \forall z.\exists x.\forall j.\exists y.\Big(((P(x) \vee R(y)) \to R(j)) \vee (P(z) \wedge \neg R(y))\Big)$$

(4 Punkte)

Tutorium

Aufgabe 1

$\mathcal{U} = \{A, \Sigma\}$
$\quad\quad\quad\quad \| $
$\quad\quad\quad \{F, R\}$

$\hat{\alpha}(F) = 1$

$\hat{\alpha}(\forall x . F) = 1$

$= \min\limits_{\forall a \in A} \hat{\alpha}_{[x \to a]}(F)$

$A = \{0,1\}$

$\hat{\alpha}(A \wedge B) = \hat{\alpha}(A) \,\&\, \hat{\alpha}(B)$

$\vee$

$\rightleftarrows$

$R(x,y) \in R^{\mathcal{U}}$

$\Leftrightarrow R(x,y) = 1$

$\hat{\alpha}(R(0,0)) = 1$

$\hat{\alpha}(R(1,0)) = 0$

$\hat{\alpha}(R(0,1)) = 1$

$\dots$

Aufgabe 2:

$F\{t/x\} \quad\quad F\{t/x\} \quad\quad t = s(y)$

$F\{t/x\} = \forall y . P(x,y)\{t/x\} = \forall \underline{y} . P(x,\underline{y})$

gebundene Variable

$\forall y' . P(x, y')$

$\forall y' . P(s(y), y')$

Aufgabe 1

$$F = \forall x. R(x, f(x)) \land R(a,a) \land \exists y. \neg R(f(y), y).$$

$$\forall x.\ R(x, f(x)) \land R(a,a) \land \neg \forall y.\ R(f(y), y)$$

$\mathcal{U} = (A, \underbrace{F, R}_{\Sigma})$ sei $A = \{0, 1\}$

$a^{\mathcal{U}} = 0 \rightarrow R(a,a) = R(0,0)$ in $R^{\mathcal{U}}$

sei $f^{\mathcal{U}}(0) = f^{\mathcal{U}}(1) = 1 \rightarrow \begin{cases} R(x, f(x)) = R(x, 1) \\ R(f(y), y) = R(1, y) \end{cases}$

aber $R^{\mathcal{U}} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$

Für $R(x, 1) \rightarrow x = \{0, 1\} \Rightarrow \forall x$
Für $R(1, y) \rightarrow y = \{1\} \rightarrow \neg \forall y$

$\rightarrow$ F gilt in der Struktur

Aufgabe 1

Prädikat

Sei $\mathcal{U} = \{ A, \mathcal{F}, R \}$ und $R = \{ (0,0), (0,1), (1,1) \}$

$\forall x.\ R(x, f(x))$

$R = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$

$\Rightarrow \quad \hat{\alpha}\,(\forall x.\ R(x, f(x))) = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$

$\min \hat{\alpha}_{[x \to a]} \quad R = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$

$\forall\ a \in A$

$\{0\}$ $\quad \{0,1\}$

Aufgabe 2: (Sichere Substitution)

$F\{t/x\}$, $G\{t/x\}$ $t = s(y)$ in F, G

1. $F = \forall y.\ P(x, y)$

$$
\begin{aligned}
F\{t/x\} &= \forall y.\ P(x, y)\{t/x\} \\
&= \forall y.\ P(t, y) \qquad \text{sei } t = s(y) \\
&= \forall y'.\ P(t, y') \\
&= \forall y'.\ P(s(y), y')
\end{aligned}
$$

2. $G = P(x, y) \rightarrow \exists y.\ P(y, x)$

$$
\begin{aligned}
G\{t/x\} &= P(x,y)\{t/x\} \rightarrow \exists y.\ P(y, x)\{t/x\} \\
&= P(t, y) \rightarrow \exists y.\ P(y, t) \\
&= P(t, y') \rightarrow \exists y''.\ P(y'', t) \\
&= P(s(y), y') \rightarrow \exists y''.\ P(y'', s(y))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 Äquivalentumformungen

$A \to B \equiv \neg A \vee B$

Falls $u \notin Frei(G)$ gilt

$$(\forall u. F) \leftrightarrow G \equiv ((\forall u.F) \to G) \wedge (G \to (\forall u.F))$$ // Auflösen der Äqivalent

$$\equiv \exists u.(F \to G) \wedge (\neg G \vee (\forall u.F))$$ // Auflösen $\to$

$$\equiv \exists u (F \to G) \wedge \forall u (\neg G \vee F)$$ // Sei $u \notin Frei(G)$ $t\{u'/u\}$

$$\equiv \exists u \ \forall u'. (F \to G) \wedge (\neg G \vee F)$$ //

$$\equiv \exists u. \forall u'. (F \to G) \wedge (G \to F)$$

Free (X): komt vor $\wedge$ nicht geb

~~Free~~ (X): nicht vorkommt / gebunden

Aufgabe 4: Pränexe Normalform $\to$ Klauselmenge

$$F := \forall x. \exists y \left(\forall z. (P(y) \to Q(x,z) \wedge Q(y,x)) \vee \exists z. \forall x. (Q(z,y) \to P(x)) \right)$$

$$F = \forall x. \exists y (\forall z.(P(y) \to Q(x,z) \wedge Q(y,x)) \vee \exists z'. \forall x' (Q(z',y) \to P(x')))$$

$$F = \forall x. \exists y. (\forall z. \exists z'. \forall x' ((P(y) \to Q(x,z) \wedge Q(y,x)) \vee (Q(z',y) \to P(x'))))$$

$$F = \forall x. \exists y. \forall z. \exists z'. \forall x'. ((P(y) \to Q(x,z) \wedge Q(y,x)) \vee (Q(z',y) \to P(x')))$$

Aufgabe 5 Erfüllungsäquivalent Klauselmenge

$$G := \forall x. \exists y. \exists z. \forall v. \left((P(\underline{y}, v) \vee Q(x) \to Q(\underline{y})) \wedge \underline{(Q(z) \to P(x, \underline{y}))} \right)$$

$\forall x. \exists y \Rightarrow y$ hängt von $x \Rightarrow y = f(x)$

$$G = \forall x. \exists z. \forall v ((P(f(x), v) \vee Q(x) \to Q(f(x))) \wedge (Q(z) \to P(x, f(x))))$$

$\forall x. \exists z \Rightarrow z$ hängt von $x \Rightarrow z = g(x)$

$$G = \forall x. \forall v ((P(f(x), v) \vee Q(x) \to Q(f(x))) \wedge (Q(g(x)) \to P(x, f(x))))$$

$\to$ in KNF

$$G = \forall x. \forall v ((\neg(P(f(x),v) \vee Q(x)) \vee Q(f(x))) \wedge (\neg Q(g(x)) \vee P(x, f(x))))$$

$$= \forall x. \forall v ((\neg P(f(x),v) \wedge \neg Q(x)) \vee Q(f(x))) \wedge (\neg Q(g(x)) \vee P(x, f(x))))$$

$$= \forall x. \forall y ((\neg P(f(x),v) \vee Q(f(x))) \wedge \neg Q(x) \vee Q(f(x)) \wedge (\neg Q(g(x)) \vee P(x, f(x))))$$

$$KM = \{ \{\neg P(f(x), v), Q(x)\}, \{\neg Q(x), Q(f(x))\}, \{\neg Q(g(x)), P(x, f(x))\} \}$$

Aufgabe 6 Gültigkeit mit Resolventenmethode

$$H := \forall z.\exists x.\forall j.\exists y.\Big(((P(x) \lor R(y)) \to R(j)) \lor (P(z) \land \neg R(y))\Big)$$

$A \lor B$

$\neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B$

Strategie: Zeigen dass $\neg H$ ist nicht erfüllbar

$$\neg H := \exists z.\forall x.\exists j.\forall y \Big(\neg((P(x) \lor R(y)) \to R(j)) \land \neg(P(z) \land \neg R(y))\Big)$$

$$= \exists z.\forall x.\exists j.\forall y \Big(((P(x) \lor R(y)) \land \neg R(j)) \land (\neg P(z) \lor R(y)) \Big)$$

Jetzt ist $\neg H$ in Pränexe Form $\Rightarrow$ skolemisieren

$$= \forall x.\exists j.\forall y \Big(((P(x) \lor R(y)) \land \neg R(j)) \land (\neg P(a) \lor R(y)) \Big)$$

j hängt von x ab $\Rightarrow$ $j = f(x)$

$$= \forall x.\forall y \Big(((P(x) \lor R(y)) \land \neg R(f(x))) \land (\neg P(a) \lor R(y)) \Big)$$

$\Rightarrow$ KM $\{ \{(P(x) \lor R(y))\}; \{\neg R(f(x))\}; \{\neg P(a) \lor R(y)\} \}$

$= \{ \{P(x), R(y)\}, \{\neg R(f(x))\}, \{\neg P(a), R(y)\} \}$ KNF

Durch Einsetzung

$\{P(x), R(y)\}$ $\{\neg R(f(x))\}$ $\{\neg P(a), R(y)\}$

$R(y)$

$\{\}$

nichterfüllbar