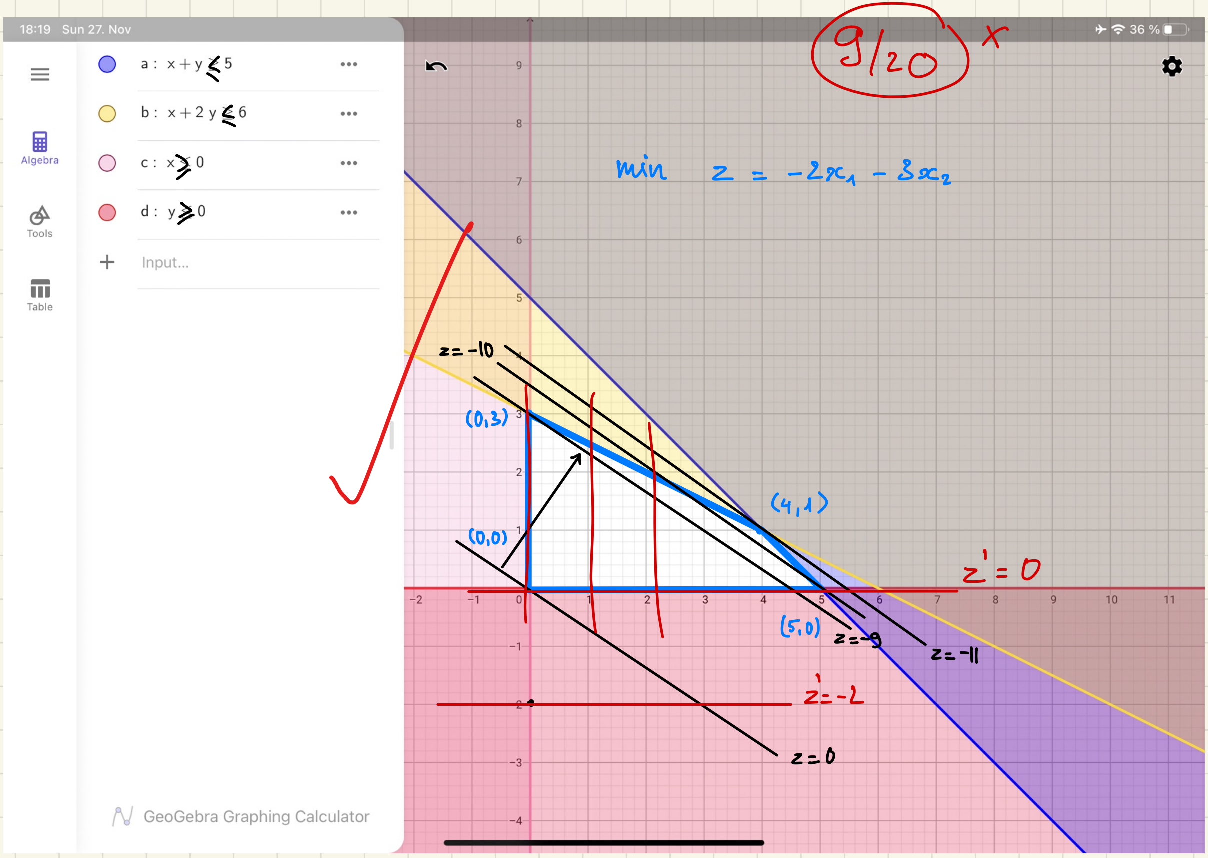
Aufgabe 1:

3,5



a)

Eckpunkten: $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $x_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Höhenlinie: $z = -2x_1 - 3x_2$

$0 = z = -2x_1 - 3x_2 \iff -2x_1 = 3x_2 \iff x_2 = \frac{-2x_1}{3}$

$-9 = z = -2x_1 - 3x_2 \iff 3x_2 = 9 - 2x_1 \iff x_2 = \frac{-2x_1}{3} + 3$

$-10 = z = -2x_1 - 3x_2 \iff -2x_1 + 10 = 3x_2 \iff x_2 = \frac{-2x_1}{3} + \frac{10}{3}$

$-11 = z = -2x_1 - 3x_2 \iff 3x_2 = 11 - 2x_1 \iff x_2 = \frac{-2x_1}{3} + \frac{11}{3}$

→ Globales Minimum $z = -11$ und globaler Minimierer $x_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

3/3

ii) Wenn die Zielfunktion mit min $z = x_1$ ersetzen wird, dann ist die Höhenlinie der Zielfkt. x_1 - Achse. Deswegen ist die optimale Lösung der Eckpunkt, der von x_1 - Achse berührt wird. In diesem Fall ist die Optimallösung E (5, 0)

Du hast Höhenlinien für die Zielfkt. y=x_2 eingezeichnet
E ist nicht optimal

0,5/2

Aufgabe 2:

$$\begin{array}{llrcrcrcl} \max & z = & 3x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & & \\ \text{U.d.N.} & & 7x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & \geq & 4 \\ & & -2x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 3 \\ & & 7x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \leq & 9 \\ & & & & x_1 & & & \geq & 1 \\ & & & & x_2, & & x_3 & & \text{frei} \end{array}$$

① $-\min \hat{z} = -z = -3x_1 - 5x_2 + 4x_3$

② $-2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 3 \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 = -3$

③ $x_1 \geq 1 \longrightarrow x_1 = x_1' + 1 \;,\; x_1' \geq 0$

x_2, x_3 frei $\longrightarrow x_2 = x_2' - x_2''$ & $x_3 = x_3' - x_3''$: $x_2', x'', x_3', x_3'' \geq 0$

Aus ①, ②, ③ ergibt sich:

$$\begin{array}{lrcl} \min z = -z = & -3(x_1'+1) - 5(x_2'-x_2'') + 4(x_3'-x_3'') & & \\ \text{U.d.N.:} & 7(x_1'+1) - 2(x_2'-x_2'') - 3(x_3'-x_3'') & \geq & 4 \\ & 2(x_1'+1) - 4(x_2'-x_2'') - 8(x_3'-x_3'') & = & -3 \\ & 7(x_1'+1) + 3(x_2'-x_2'') + 5(x_3'-x_3'') & \leq & 9 \\ & x_1' & \geq & 0 \\ & x_2', x_2'' & \geq & 0 \\ & x_3', x_3'' & \geq & 0 \end{array}$$

④ Schlupfvariablen einfügen:

$$\min \quad \hat{z} = -z = -3x_1' - 5x_2' + 5x_2'' + 4x_3' - 4x_3'' - 3$$

u.d.N.:

$$7x_1' - 2x_2' + 2x_2'' - 3x_3' + 3x_3'' - s_1 = -3$$
$$2x_1' - 4x_2' + 4x_2'' - 8x_3' + 8x_3'' = -5$$
$$7x_1' + 3x_2' - 3x_2'' + 5x_3' - 5x_3'' + s_3 = 2$$

$$x_1', x_2', x_2'', x_3', x_3'', s_1, s_3 \geq 0$$

in Standardform ist die rechte Seite b >= 0

4/5

↳ Standardform des LPs

↳ In Vektorschreibweise:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -8 & 8 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -3 & 5 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_2'' \\ x_3' \\ x_3'' \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

A3) fehlt

$$\min \quad -z = -c_1^T x_1 + c_2^T x_2$$

$$A_{11} x_1 + A_{12} x_2 - y_1 = b_1 \qquad s_1 \geq 0 \quad (s_1 \in \mathbb{R}^{m_1})$$

$$x_1 + y_2 = 1 \qquad s_2 \geq 0 \qquad (s_2 \in \mathbb{R}^{n_1})$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 = x_2^+ - x_2^- , \quad x_2^+, x_2^- \in \mathbb{R}^m \quad x_2^+, x_2^- \geq 0$$

Vektor $x = (x_1, x_1^-, x_2^+, s_1, s_2)^T$

$$\min \quad \hat{z} = c^T x$$
u.d.N.
$$Ax = b$$
$$x = 0$$

$$\text{II)} \quad A_{21} x_1 + A_{22} x_2^- - A_{22} x_2^- = b$$

$c = (-c_1, c_3,$

$A =$ A_{11} A_{12}
A_{22}

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

eine freie Variable $x_n^+, x_n^- \geq 0$ mit $x_n^+ - x_n^- = x_n$

Sei $A' = (a_1, \dots a_{n-1}, a_n, -a_n)$

$x' = (x_1, \dots x_{n-1}, x_n^+, x_n^-)^T$

$c' = (c_1, \dots c_{n-1}, \underset{c\_n}{c_n^+}, \underset{-c\_n}{-c_n})^T$

1,5/5

Standardform $\min (c')^T x'$

$A'x' = b$

$x' \geq 0$

9/20

Für eine ZBL gilt die Spalten zu den nicht null Einträgen sind lin unab

Da die letzten beiden Spalten lin abhängig kann in eine ZBL $x_n^+ > 0$, $x_n^- > 0$ nicht gelten. $\Rightarrow$ Muss eine der beiden Einträge Null $\Rightarrow x_n^+ x_n^- = 0$