Aufgabe 1: 2/3

$\Sigma = 11{,}5/16$

a) A, B, C seien Variable, $\alpha = \{ A \to 1,\ B \to 0,\ C \to 1,\ D \to 0 \}$

$F = (A \to C \vee (\neg D \wedge B))$

$$
\begin{aligned}
\hat\alpha(F) &= \hat\alpha\,(A \to C \vee (\neg D \wedge B)) \\
&= \hat\alpha\,(A) \Rightarrow \hat\alpha\,(C \vee (\neg D \wedge B)) \\
&= \alpha\,(A) \Rightarrow (\hat\alpha\,(C) \mid \hat\alpha\,(\neg D \wedge B)) \\
&= \alpha\,(A) \Rightarrow (\alpha\,(C) \mid (\hat\alpha\,(\neg D) \ \& \ \hat\alpha\,(B))) \\
&= \alpha(A) \to (\alpha\,(C) \mid (!\hat\alpha\,(D) \ \& \ \alpha(B))) \\
&= 1 \to (1 \mid (!0 \ \& \ 0)) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

b) Modelle α für $F = (B \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge \neg C)$

α ist Modell von F ($\alpha \models F$) wenn $\alpha(F) = 1$

$$
\begin{aligned}
\hat\alpha(F) &= \hat\alpha((B \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge \neg C)) \\
&= \hat\alpha\,(B \leftrightarrow C) = \hat\alpha\,(A \wedge \neg C) \\
&= (\hat\alpha(B) = \hat\alpha\,(C)) = (\hat\alpha\,(A) \ \& \ \hat\alpha\,(\neg C)) \\
&= (\hat\alpha(B) = \hat\alpha\,(C)) = (\hat\alpha\,(A) \ \& \ !\hat\alpha\,(C))
\end{aligned}
$$

einfach Wahrheitstabelle.

$\Rightarrow \hat\alpha(B) = \hat\alpha\,(C) = 1 \mid 0$, fall $= 1$: $\hat\alpha\,(A) \ \& \ !\hat\alpha\,(\neg C) = 1$

wenn $\hat\alpha\,(A) = 1 \ \& \ \hat\alpha\,(C) = 0$

fall $= 0$: $\hat\alpha\,(A) \ \& \ !\hat\alpha\,(\neg C) = 0$

$\hat\alpha\,(A) = 0 \ \& \ (\hat\alpha\,(C) = 0$ oder $\hat\alpha\,(C) = 1)$

$\hat\alpha\,(C) = 1 \ \& \ (\hat\alpha\,(A) = 0$ oder $\hat\alpha\,(A) = 1$

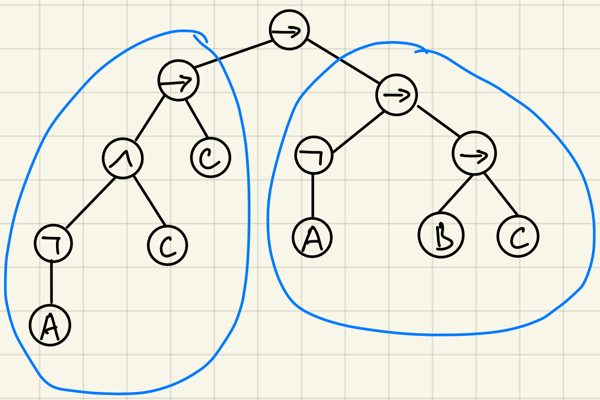
$\Rightarrow$

$\alpha_1 = (1, 1, 1, 0)$,
$\alpha_2 = (0, 0, 0, 0)$,
$\alpha_3 = (0\ 0\ 0\ 1)$,
$\alpha_4 = (0\ 0\ 1\ 0)$,
$\alpha_5 = (0\ 0\ 1\ 1)$

Nein - 1P

$(1\ 0\ 1)$
$(1\ 0\ 0)$
$(0\ 1\ 0)$
$(0\ 0\ 1)$

c) $F = (\neg A \wedge C \to C) \to \neg A \to B \to C$



b,

Aufgabe 2: Der Operator $\oplus$ 2,5/3

Seien A, B, C Formel

a, Kommutativ $A \oplus B \leftrightarrow B \oplus A$

Wahrheitstabelle

A	B	$A \oplus B$	$B \oplus A$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\Rightarrow$ $\oplus$ ist kommutativ ✓

b, Assosiativ $(A \oplus B) \oplus C \overset{?}{=} A \oplus (B \oplus C)$

A	B	C	$A \oplus B$	$(A \oplus B) \oplus C$	$B \oplus C$	$A \oplus (B \oplus C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

$\Rightarrow$ $\oplus$ ist assosiativ ✓

c, indempotent $A \oplus A \oplus A \oplus \ldots \oplus A = A$

Laut Interdefiniertbarkeit ist $A \oplus B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

$\Rightarrow$ $A \oplus A = (\neg A \wedge A) \vee (A \wedge \neg A)$

Außerdem gilt $\neg A \wedge A \equiv A \wedge \neg A$ (Äquivalenzregel)

$\neg A \wedge A \equiv \perp$ $\Rightarrow$ $A \oplus A = \perp \vee \perp = \perp$

Wir machen rekursiv for n-mal $A \oplus A \oplus \ldots \oplus A$, da $A \oplus A \equiv \perp$ ist

$\Rightarrow$ $\perp \oplus A = (T \wedge A)$

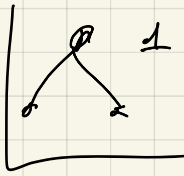
A	A	$(A \oplus A)$	$(A \oplus A) \oplus A$	$A \oplus A \oplus A \oplus A$
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0

$\oplus$ ist nicht idempotent, da $1 \oplus 1 = 0 \neq 1$.

$-0{,}5P$

Aufgabe 3: beliebige Formel F, $d(F)$ ist die Tiefe von F
$vars(F)$ die Menge aller Variable

2/3



$$|vars(F)| \leq 2^{d(F)}$$

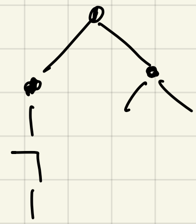
Induktionsanfang: Für automare Formel F, wenn $F = \bot$ oder $F = \top$
ist $d(F) = 0$, $vars(F) = 0$

$$\Rightarrow 2^{d(F)} = 2^0 = 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1$$ ✓

$2^4 = 16$

Induktionsannahme: gilt $|vars(F)| \leq 2^{d(F)}$



Induktionsschritt:

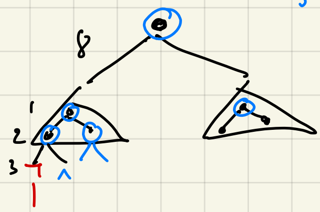
$\rightarrow$ zu zeigen: $|vars(\neg F_1)| \leq 2^{d(\neg F_1)}$

Sei $F = \neg F_1 \Rightarrow d(F) = d(F_1) + 1$

$$vars(F) \leq 2^{d(F)} < 2^{d(F_1)+1}$$

$d = 3$

$5 \leq 2^3 = 8$



Sei $F = F_1 \circ F_2$, $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

falsch $-0{,}5P$

$$|vars(F)| \overset{!}{=} |vars(F_1) + vars(F_2)|$$

$\leq$

laut IA: $vars(F_1) \leq 2^{d(F_1)}$, $vars(F_2) \leq 2^{d(F_2)}$

Nein $-0{,}5P$

$$\Rightarrow |vars(F)| \leq 2^{d(F_1)} + 2^{d(F_2)} \leq 2^{max(d(F_1), d(F_2))} \leq 2^{d(F_1 \circ F_2)}$$

$: 2^2 + 2^3 \not\leq 2^3$

$\Rightarrow$ die Formel $|vars(F)| \leq 2^{d(F)}$ gilt

$F = \underbrace{(A \rightarrow B)}_{F_1} \underbrace{\vee}_{\vee} \underbrace{(A \rightarrow C)}_{F_2}$, $|vars(F)| = |\{A, B, C\}| = 3 \leq |\{A, B\}| + |\{A, C\}| = 4$

IS: z.z. die Aussage ist wahr für $F = \neg F_1$, $F = F_1 \circ F_2$

$\Leftrightarrow$ $|vars(F_1 \circ F_2)| \leq 2^{d(F_1 \circ F_2)}$ ①

bzw $|vars(\neg F_1)| \leq 2^{d(\neg F_1)}$ ②

F_1, F_2 beliebige Formel

② $vars(\neg F_1) \leq 2^{d(\neg F_1)}$

$LS = vars(F_1) \leq 2^{d(F_1)} = 2^{d(\neg F_1) - 1}$

① $vars(F_1 \circ F_2) \leq 2^{d(F_1 \circ F_2)}$

$LS \leq |vars(F_1)| + |vars(F_2)| \leq 2^{d(F_1)} + 2^{d(F_2)}$

$\leq 2^{max(d(F_1), d(F_2))} \cdot 2$

$\leq 2^{1 + max(d(F_1), d(F_2))}$

$RS = 2^{d(F_1 \circ F_2)} = 2^{1 + max(d(F_1), d(F_2))}$

$\Rightarrow LS \leq RS$

Aufgabe 4: 3/3

F : Formel nur Variable (Atome) und die Junktoren

V ist positiv wenn : V→ Wurzel hat gerade Anzahl von negation

negativ ———————— ungerade ————————

```
posVars (F : Formel) : Set [Variable]

  switch F
     case (F ist atom)    : Set.add (F, "+")
     case Negation (F)    : negVars (F)
     case And (F1, F2)    : posVars (F1) ~~&&~~ +posVars (F2)
     case Or (F1, F2)     : posVars (F1) ~~||~~ +posVars (F2)
     case Imp (F1, F2)    : negVars (F1) ~~||~~ +posVars (F2)   // ¬F1 v F2
  else
     ~~False~~

negVars (F : Formel) : Set [Variable]

  switch F
     case (F ist atom)    : Set.add (F, "-")
     case Negation (F)    : pos Vars (F)
     case And (F1, F2)    : negVars (F1) ~~&&~~ +negVars (F2)
     case Or (F1, F2)     : negVars (F1) ~~||~~ +negVars (F2)
     case Imp (F1, F2)    : posVars (F1) ~~&&~~ +negVars (F2)   // De-Morgan
  else
     False

print ( Set )
```

→ append.

Ausgabe soll ein Set sein, kein Boolescher Wert.

Set [String] ().

Aufgabe 5: $F = A \vee B \wedge \neg A$ $\quad G = \neg A \rightarrow C$ $\quad H = A \wedge \neg B$

2/4

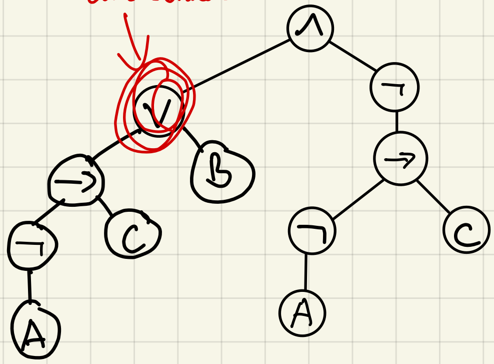
a) $F_{[G/A]} = (\neg A \rightarrow C) \vee B \wedge \neg(\neg A \rightarrow C)$

stärker als $\vee$

$= (\neg A \rightarrow C) \vee (B \wedge \neg(\neg A \rightarrow C))$

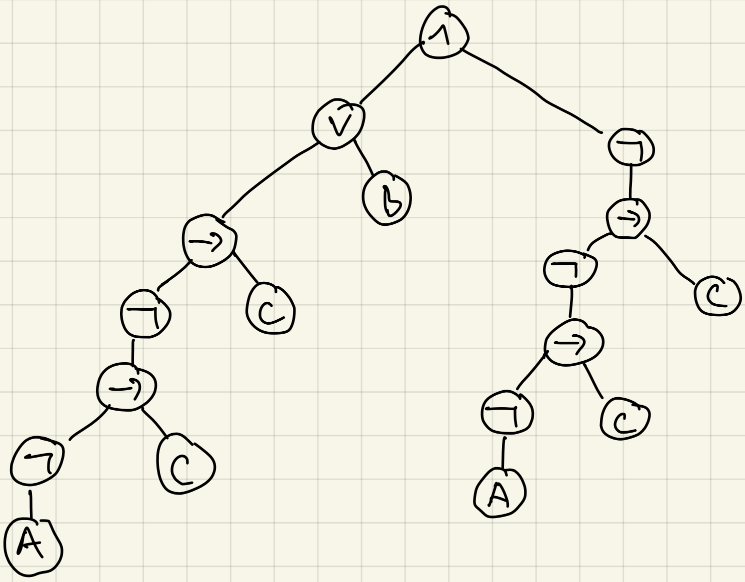
in der Wurzel

am schwächsten



$(F_{[G/A]})_{[G/A]} = (\neg(\neg A \rightarrow C) \rightarrow C) \vee B \wedge \neg(\neg(\neg A \rightarrow C) \rightarrow C)$

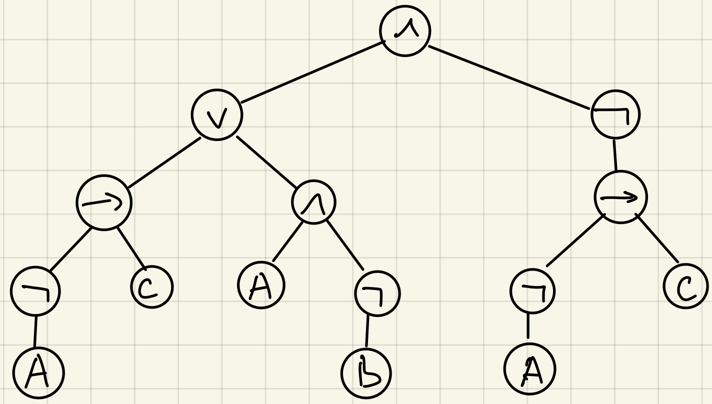
wie oben



$(F_{[G/A]})_{[H/B]} = (\neg A \rightarrow C) \vee (A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \rightarrow C)$

am schwächsten

Nein,



$F_{[G/A,\, H/B]} = (\neg A \rightarrow C) \vee (A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \rightarrow C)$

b, Seien F, G, H gegeben und $A \neq B$

$F_{([G/A])[H/B]} = F_{[G/A],[H/B]}$ wenn B ist nicht in G

& A ist nicht in H. $-1P$