Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2022/2023**
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Hansen, D. Vogel

/20

Übungen zur Linearen Optimierung

12. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Es sei das Lineare Programm (6)

$y^T(Ax-b)=0$
$(y^TA - c^T)x = 0$

$$
\begin{array}{lrl}
\min & z = -8x_1 + 9x_2 - 12x_3 - 4x_4 - 11x_5 & \\
\text{U.d.N.} & -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 - 3x_5 & \geq -1 \\
& -x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 & \geq -1 \\
& -5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 - 3x_5 & \geq -22 \\
& x_1, \dots, x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

gegeben. Prüfen Sie mittels der Komplementaritätsbedingungen, ob der Vektor $\hat{x} = (0, 2, 0, 7, 0)^\mathsf{T}$ Optimallösung des Linearen Programms ist.

Aufgabe 2 Lösen Sie das Lineare Programm (5)

$$
\begin{array}{lrl}
\min & z = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 & \\
\text{U.d.N.} & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 & \geq 3 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 & \geq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

mit dem dualen Simplex-Verfahren. Wählen Sie zur Pivotisierung der austretenden Variablen den negativen Eintrag mit dem kleinsten Index! Formen Sie das Problem dazu zunächst in Standardform um und starten Sie mit der Basis aus Schlupfvariablen. Es muss dabei gezeigt werden, dass diese Basis dual zulässig ist.

$y^T(A\cancel{x}-b) = 0$

$(y^TA - c^T)\,x = 0$

Aufgabe 1

$c^T = (-8 \quad \underline{9} \quad -12 \quad \underline{-4} \quad -11)$

Komplementaritätsbedingungen $\qquad \hat{x} = (0, \underline{2}, 0, \underline{7}, 0)^T$

$y^T(Ax-b) = 0 \quad$ und $\quad (y^T A - c^T)x = 0$

$$Ax = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & -1 & -5 \\ -1 & -7 & -3 & 2 & -1 \\ -5 & -4 & 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -22 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -22 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Ax - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y^T(Ax-b) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = 0$$

$$(y_1 \quad y_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = (3y_1 - 4y_2, \; -y_1 - 2y_2)$$

$$= (9 \qquad -4)$$

$$\Leftrightarrow \quad (17/5 \; ; \; 3/10)$$

$$c^T x = (9 \quad -4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -10$$

$$b^T y = (-1 \quad -22) \begin{pmatrix} 17/5 \\ 3/10 \end{pmatrix} = -10$$

$\Rightarrow$ Optimal

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ \text{u.d.N} \quad & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ & x_{1\dots3} \geq 0 \end{aligned}$$

SF

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ \text{u.d.N} \quad & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 5 \\ & x_{1\dots5} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 \\ \text{u.d.N} \quad & -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ & x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = -5 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
$-z$	5	2	8	0	0	0
x_4	-2	3	-2	1	0	-3
x_5	1	$\boxed{-1}$	-1	0	1	-5

$\min = -5$

$\min\left\{\left|\frac{2}{-1}\right|, \left|\frac{8}{-1}\right|\right\} = \left|\frac{2}{-1}\right|$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
$-z$	7	0	6	0	2	-10
x_4	1	0	$\boxed{-5}$	1	3	-18
x_2	-1	1	1	0	-1	5

I - 2 III

II - 3 III

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
$-z$	$41/5$	0	0	$6/5$	$28/5$	$-158/5$
x_3	$-1/5$	0	1	$-1/5$	$-3/5$	$18/5$
x_2	$-4/5$	1	0	$1/5$	$-2/5$	$7/5$

I - 6 II

III - II

$z = 158/5$ $\qquad c_N^T > 0$

$x_B \geq 0$

$x_B = \{x_3 \; x_2\}$ optimal

$\text{OZBL} = \left(0 \;\; \frac{7}{5} \;\; \frac{18}{5} \;\; 0 \;\; 0\right)$

Aufgabe 3 Es sei das Lineare Programm (9)

$$\begin{array}{lrl} \max & z = 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 & \\ \text{U.d.N.} & x_1 + x_2 & \leq 7 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 15 \\ & 2x_2 + 3x_3 & \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

mit der optimalen Basis $\{x_1, x_2, x_3\}$ und

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Beantworten Sie die folgenden (voneinander unabhängigen) Fragen:

(i) Was ist die Optimallösung des Problems? Was sind die optimalen dualen Variablen?

(ii) Was ist die Optimallösung des Problems, wenn der Eintrag der rechten Seite zur zweiten Nebenbedingung um 5 verkleinert wird?

(iii) Um wieviel kann der Eintrag der rechten Seite zur ersten Nebenbedingung verkleinert bzw. vergrößert werden ohne die optimale Basis zu wechseln?

(iv) Was ist die Optimallösung des Problems, wenn der Koeffizient der Zielfunktion zur Variable x_2 um 15 vergrößert wird?

(v) Um wieviel kann der Koeffizient der Zielfunktion zur Variable x_1 verkleinert bzw. vergrößert werden ohne die optimale Basis zu wechseln?

(vi) Es wird eine neue Variable x_4 eingeführt, wobei $c_4 = 5$ und $A_4 = (2, -1, 5)^\mathsf{T}$ gilt. Ist die aktuelle Basis immer noch optimal?

Abgabe: Dienstag, 31.01.23, vor der Vorlesung.

Aufgabe 3:

$$\max \quad z = 3x_1 + 13x_2 + 13x_3$$
$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$$
$$2x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$x_{123} \geq 0$$

$$\min \quad z' = -z = -3x_1 - 13x_2 - 13x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 7$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 15$$
$$2x_2 + 3x_3 + x_6 = 9$$
$$x_{1\ldots6} \geq 0$$

i)

optimallösung
$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 5/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z = c_B^T \cdot x_B = (-3 \ -13 \ -13) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -64$$

$$\Rightarrow \max = 64$$

$$c_N \geq 0$$
$$x_B \geq 0$$

Optimal dual ?

$$A = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \{ x_1 \ x_2 \ x_3 \} \qquad N = \{ x_4 \ x_5 \ x_6 \} \qquad c^T = (-3 \ -13 \ -13 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c_B^T = (-3 \ -13 \ -13)$$
$$c_N^T = (0 \ 0 \ 0)$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (-1 \ -2 \ -3)$$
$$\bar{c}_N^T = c_N^T - y^T N = (0 \ 0 \ 0) - (-1 \ -2 \ -3)$$
$$= (1 \ 2 \ 3)$$
$$\rightarrow \text{Optimal}$$

ii)

$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ -4{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow x_B \not\geq 0 \text{ primal unzulässig}$$

$$z = c_B^T \cdot x_B = -54$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	R
$-z'$	0	0	0	1	2	3	54
x_1	1	0	0	5/2	-3/2	1	11
x_2	0	1	0	$\boxed{-3/2}$	3/2	-1	-4,5
x_3	0	0	1	1	-1	1	6

$\min\left\{ \frac{1}{3/2}, \frac{3}{1} \right\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	R
$-z'$	0	4/3	0	0	3	7/3	51
x_1	1	5/3	0	0	1	-2/3	7/2
x_4	0	-2/3	0	1	-1	2/3	3
x_3	0	2/3	1	0	0	1/3	3

I − III
II − $\frac{5}{2}$ III

IV − III

√ optimal

$\min z' = -51$
$\max z = 51$

b,
$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+\Delta b \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7+\Delta b \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/2\,(7+\Delta b) - 13{,}5 \\ -3/2\,(7+\Delta b) + 13{,}5 \\ 7+\Delta b - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 5/2\,\Delta b \\ 3 - 3/2\,\Delta b \\ 1 + \Delta b \end{pmatrix} \geq 0$$

$4 + 5/2\,\Delta b \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{2}\Delta b \geq -4 \rightarrow \Delta b \geq \frac{-8}{5}$

$3 - 3/2\,\Delta b \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 3/2\,\Delta b \Rightarrow \Delta b \leq 2$

$1 + \Delta b \geq 0 \Rightarrow \Delta b \geq -1$

$\Rightarrow -1 \leq \Delta b \leq 2$

iv)
$$c_B^T = (-3 \quad -13 \quad -13) + (0, 15, 0)$$
$$= (-3 \quad 2 \quad -13)$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (-23{,}5 \quad 20{,}5 \quad -18)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = (0 \quad 0 \quad 0) - y^T = (23{,}5 \quad -20{,}5 \quad 18)$$

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z = c_B^T \cdot x_B = (-3 \quad 2 \quad -13) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -19$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	R
$-z$	0	0	0	23,5	-20,5	18	19
x_1	1	0	0	$5/2$	$-3/2$	1	4
x_2	0	1	0	$-3/2$	$\boxed{3/2}$	-1	3
x_3	0	0	1	1	-1	1	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	R	
$-z$	0	$41/3$	0	3	0	$13/3$	60	+ 20,5 II
x_1	1	1	0	1	0	0	7	
x_5	0	$2/3$	0	-1	1	$-2/3$	2	
x_3	0	$4/3$	1	0	0	$4/3$	3	+ II

$z\ max = 60$

$$x_B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

v) $c_B^T = (-3 + \Delta c \,,\, -13 \,,\, -13)$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (-3 + \Delta c, -13, -13) \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(5/2(-3+\Delta c) + 6.5 \,,\; -3/2(-3+\Delta c) - 6.5 \,,\; -3 + \Delta c \right)$$

$$= \left(-1 + \frac{5}{2}\Delta c \,,\; -2 + \Delta c \,,\; -3 + \Delta c \right)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = \left(1 - \frac{5}{2}\Delta c \,,\; 2 - \Delta c \,,\; 3 - \Delta c\right) \geq 0$$

$$1 - \frac{5}{2}\Delta c \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \frac{5}{2}\Delta c \Rightarrow \Delta c \leq \frac{2}{5}$$

$$2 - \Delta c \geq 0 \Rightarrow \Delta c \leq 2$$

$$\Delta c \leq 3$$

$$\Rightarrow \Delta c \leq \frac{2}{5} \quad \text{(vergrößert)}$$

vi)

$$\max z = 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 + 5x_4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 7$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 15$$
$$2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 9$$
$$x_{1\ldots4} \geq 0$$

$$\min z' = -3x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 5x_4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 7$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 15$$
$$2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_7 = 9$$
$$x_{1\ldots7} \geq 0$$

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$c_B^T = (-3 \quad -13 \quad -13)$$

$$N = \{4\ 5\ 6\ 7\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_N^T = \begin{array}{cccc} 4 & 5 & 6 & 7 \\ \end{array}$$
$$c_N^T = (-5 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N =$$

$$c_4^T = c_4^T - y^T \cdot A_4 = -5 - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -5 - (-15) = -5 + 15 = 10 \geq 0$$

optimal

Aufgabe 4.3

$$\max \quad z = 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 \qquad \min \quad z' = -3x_1 - 13x_2 - 13x_3$$
$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$$
$$2x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$x_{1\ldots3} \geq 0$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \{x_1\ x_2\ x_3\}$$

i) Optimallösung

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z = c^T \cdot x_B = (3 \quad 13 \quad 13) \cdot x_B = 64$$

Optimal dual variable

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (-3\ -13\ -13) \cdot \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (-1 \quad -2 \quad -3)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = (0 \quad 0 \quad 0) - (-1\ -2\ -3)$$
$$= (1 \quad 2 \quad 3) \Rightarrow \text{Optimal}$$

ii) Eintrag rechte Seite zur zweiten Bedingung um 5 verkleinert

$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad B = \{x_1\ x_2\ x_3\}$$

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ -4{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} \ngeq 0$$

$$z = (-3 \quad -13 \quad -13) \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ -4{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} = -54$$