BLATT 8 - LO

Nguyentv - Hoangkim

Aufgabe 1: $\min z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3$

UdN: $4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 22$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 30$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

① Umformung in Standardform:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \end{pmatrix}$, $c = (\underbrace{3, -2, -4}_{N}, \underbrace{0, 0}_{B})^T$

Schlupfvariablen x_5, x_6 als BV $\to x_B = (x_5, x_6)^T$

NBV $x_N = (x_1, x_2, x_3)^T$

Es folgt: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$, $N = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

② Berechne „Simplex-Multiplikatoren":

$\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$, $c_B^T = (0,0)^T \Rightarrow y^T = c_B^T B^{-1} = (0,0)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0)^T$

③ Reduzierte Kosten:

$\hat{c}_N^T := c_N^T - y^T N = (3,-2,-4) - (0,0)^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (3,-2,\underline{-4})$

x_3 tritt ein

hier: $\hat{c}_2, \hat{c}_3 < 0 \Rightarrow$ aktuelle Basis nicht optimal

$\hat{c}_3$ ist der betragmäßig ($|x|$) größte Wert

$\hookrightarrow x_3$ tritt in B ein, verlässt N

$\Rightarrow$ Berechne $\hat{A}_3 := B^{-1} A_3 = A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ x_5

$\min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} : a_{ij} > 0 \right\}$

$\hookrightarrow \min \left\{ \cancel{\frac{22}{-2}}, \frac{30}{1} \right\} = \frac{30}{1} = 30$

22/-2 gehört da nicht mit rein, da -2 < 0 ! siehe Skript S.68 unten, dort wird das erläutert

$\hookrightarrow x_5$ verlässt B & tritt N ein

Nun ist $B = \{x_4, x_3\}$ & $N = \{x_1, x_2, x_5\}$

Endet 1. Iteration

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c_B^T = (0,-4)^T \Rightarrow y^T = (0,-4)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

reduzierte Kosten:

$\hat{c}_N^T := c_N^T - y^T N = (3,-2,0) - (0,-4)^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (7, \underline{-10}, 4)$ ✓

x_2 tritt in Basis ein

da $\hat{c}_2 < 0 \rightarrow x_2$ tritt in B ein, verlässt N

$\hookrightarrow \hat{A}_2 := B^{-1} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ — x_4

da nur 1 positiven Wert $\rightarrow$ Quotienkriteritum sparen genau

$\hookrightarrow x_4$ verlässt B, tritt in N ein

Nun ist $B = \{x_2, x_3\}$ & $N = \{x_1, x_5, x_6\}$ ✓

Endet 2. Iteration

$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ & $N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $c_B^T = (-2,-4)^T \Rightarrow y^T = (-2,-4)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -24 \end{pmatrix}$

reduzierte Kosten:

$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = (3,0,0) - (-10,-24)^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (67, 10, 24)$

da die reduzierte Kosten $> 0 \rightarrow$ globalen Minimierer gefunden & gegeben durch: $x_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 194 \end{pmatrix}$ ✓

$$x_N = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$\rightarrow$ Zielwert (Minimum): $z = 0 - 2 \cdot 82 - 4 \cdot 194 = \boxed{-940}$

4/4

A2) fehlt

$$\min \quad c^T x$$
$$\text{udN} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$$c = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\underbrace{\begin{matrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}}_{N} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{B} \right) \qquad b = \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$B = \{4,5\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: B \qquad N = \{1,2,3\} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

$x^* = (0,1,1,3,0,0)^\mathsf{T}$

$$\min\ z = -x_1 - a^2x_2 + 2x_3 - 2ax_4 - 5x_5 + 10x_6$$

$$\text{U.d.N.}\quad -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$-2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2$$

$$x_1,\dots,x_6 \geq 0$$

$$c = \begin{pmatrix} -1 & -a^2 & 2 & -2a & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{-2}_{N} & \underbrace{0 & -1 & 1}_{B} & \underbrace{2 & 0}_{N} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_B = B^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x^*$ ist ZBL

Suche alle $a \in \mathbb{R}$ sodass $\hat{c}_N^T = 0$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -a^2 & 2 & -2a \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 - a + 1 & \frac{-1}{2}a^2 - a + 1 & \frac{-1}{2}a^2 - a - 1 \end{pmatrix}$$

$$c_N^T = c_N^T - y^T N = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a^2 + 2a + 2 & -a^2 - 2a - 2 & a^2 - 2a + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 - 2a - 3 & a^2 + 2a - 3 & -a^2 + 2a + 8 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

* $a^2 - 2a - 3 = 0 \iff a^2 - 2a + 1 = 4 \iff (a-1)^2 = 4 \iff a = 1 \pm 2$
  $\Rightarrow a^2 - 2a - 3 \geqslant 0 \iff a \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

* $a^2 + 2a - 3 = 0$
  $\iff a \in (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

* $-a^2 + 2a + 8 = 0 \iff a^2 - 2a + 1 = 9$
  $\iff a \in [-2, 4]$

$$\big((-\infty, 1] \cup [3, \infty)\big) \cap \big((-\infty, 3] \cup [1, \infty)$$

Aufgabe 2 Benutzen Sie den Optimalitätstest des Simplex-Algorithmus, um alle Werte $a \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für welche der Punkt $x^* = (0,1,1,3,0,0)^\top$ die Optimallösung des Linearen Programms

(Vorbereitung)

$\rightarrow B = (x_2, x_3, x_4)$

$$\min\ z = -x_1 - a^2x_2 + 2x_3 - 2ax_4 - 5x_5 + 10x_6$$
$$\text{U.d.N.}\ -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$-2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2$$
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad c = (-1 \quad -a^2 \quad 2 \quad -2a \quad -5 \quad 10)$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c_B^T = (-a^2 \quad 2 \quad -2a)$$

$$c_N^T = (-1 \quad -5 \quad 10)$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Suche $a \in \mathbb{R}$ sodass $\quad c_N^T \geq 0$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (-a^2 \quad 2 \quad -2a) \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}a^2 + 1 - a \ , \ \tfrac{-1}{2}a^2 + 1 - a \ , \ \tfrac{-1}{2}a^2 - 1 - a \right)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = (-1 \quad -5 \quad 10) - \left(\tfrac{1}{2}a^2 + 1 - a, \ \tfrac{-1}{2}a^2 + 1 - a, \ \tfrac{-1}{2}a^2 - 1 - a\right) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1 \ -5 \ 10) \qquad -a^2 - 2 - 2a \ +$$

Aufgabe 3:

es muss immer c = 0 und f >= 0 gelten

i) Die aktuelle Basis ist optimal, wenn alle reduzierten Kosten positiv sind $\Rightarrow a, b \geq 0$

ii) Die aktuelle Basis ist optimal und eindeutig, wenn die reduzierten Kosten zu den Nichtbasisvariable positiv und alle Variable strikt positiv $a, b, f \geq 0$

genau also hier: >

iii) Die aktuelle Basis ist optimal $\Rightarrow a, b \geq 0$
Es existieren weitere optimale Basen $\Rightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee f = 0$ gut

iv) Das lineare Programm ist unbeschränkt wenn $a < 0 \wedge g \leq 0$
"oder"
und $b < 0 \wedge e, h \leq 0$

v) Das aktuelle Lösung wird durch eine Vergrößerung von x_4 verbessert allerdings ändert sich der Wert der Zielfunktion nicht, wenn x_4 in die Basis eintritt
Wenn $b < 0$: durch eine Vergrößerung von x_4 der Wert der ZF sinkt
wenn $e > 0 \wedge f = 0 \Rightarrow$ degenerierten Basislösung und x_4 tritt in die Basis ein $\Rightarrow x_4 = 0$ und der Wert der ZF ändert sich nicht.

4,5/5

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
$-z$	0	a	0	b	$c = 0$	3	d
x_3	0	-2	1	e	0	3	f
x_1	1	g	0	-2	0	1	1
x_5	0	0	0	h	1	4	3

die red. Kosten zu BV sind 0. dh es muss stets $c = 0$ gelten
Außerdem gilt $d \geq 0$ ansonsten die aktuell BL nicht zulässig

i) die aktuell Basis ist optimal falls red. Kosten $\geq 0 \Rightarrow a, b \geq 0$
ii) " " " ist die eindeutige optimale Basis
$\Rightarrow a, b \geq 0$ und $f > 0$
$\hookrightarrow$ keine weitere BL

iii) Optimal Basis $\Rightarrow ab \geq 0$
Es existieren weiteren Basen $a = 0 \vee b = 0 \vee f = 0$

iv) Lineare Programm ist unbeschränkt
↳ wenn zu einem negativen Betrag . der red. Kosten

v) Es muss $b < 0$ gelten, damit Erhöhung um x_4 den ZW verringert

$$\max \; z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$\text{U.d.N. } 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 20$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \le 30$$
$$x_1, \dots, x_4 \ge 0$$

Aufgabe 4.

in SF umformen

$\Rightarrow$ $\min \; -z = -5x_1 - 3x_2 - 2x_3$

U.d.N

$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 20$

$3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 30$

$x_1, \dots x_6 \geq 0$

Startbasis als Schlupfvariable $\{x_5, x_6\}$

$\Rightarrow$ Tableaus:

	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
I	$-z$	-5	-3	-2	0	0	0	0
II	x_5	4	5	2	1	1	0	20
III	x_6	3	4	-3	1	0	1	30

$\Rightarrow$ größte negativen Wert -5 $\rightarrow$ x_1

$\min \left\{ \frac{20}{4}, \frac{30}{3} \right\} = \frac{20}{4} = 5$ $\Rightarrow$ x_5 tritt ein

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS	
$-z$	0	$13/4$	$1/2$	$5/4$	$5/4$	0	25	
x_1	1	$5/4$	$1/2$	$1/4$	$1/4$	0	5	$\leftarrow \frac{1}{4}\text{II}$
x_6	0	$1/4$	$-9/2$	$1/4$	$-3/4$	1	15	$\leftarrow -3\text{II}'$

alle reduzierten kosten nicht negativ sind $\Rightarrow$ Optimallösung

4/4

$\hat{x} = (5, 0, 0, 0, 0, 15)^T$ Optimalwert $= -25$

✓

$$\min \; z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3$$
$$\text{U.d.N. } x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 48$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 60$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

ii)

in SF $\rightarrow$ $\min \; z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3$

U.d.N

$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 48$

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 60$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Als Standardbasis werden wir die Schlupfvariable $\{x_4, x_5\}$

Tableaus:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	-6	-14	-13	0	0	0
x_4	1	$\boxed{4}$	2	1	0	48
x_5	1	2	4	0	1	60

$\Rightarrow$ größte negativen Wert -14 $\rightarrow$ x_2

$\min \left\{ \frac{48}{4}, \frac{60}{2} \right\} = 12$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	$-5/2$	0	-6	$7/2$	0	168
x_2	$1/4$	1	$1/2$	$1/4$	0	12
x_5	$1/2$	0	$\boxed{3}$	$-1/2$	1	36

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	$-3/2$	0	0	$5/2$	2	240
x_2	$\boxed{1/6}$	1	0	$1/3$	$-1/6$	6
x_3	$1/6$	0	1	$-1/6$	$1/3$	12

kleinst W $= -3/2$

$\min \left\{ \frac{6}{1/6}, \frac{12}{1/6} \right\} = \frac{6}{1/6} = 36$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	0	9	0	$11/2$	$1/2$	294
hier x_1 x_2	1	6	0	2	-1	36
x_3	0	-1	1	$-1/2$	$1/2$	6

$\rightarrow$ Optimallösung $\hat{x} = (0, 36, 6, 0, 0)$ mit $z = -294$

(36, 0, 6, ..)

3,5/4