Logik Prof. Dr. H. Peter Gumm
Wintersemester 2022/23

Übungszettel 03

Abgabetermin: 12. November 2022, 18:00 Uhr

Für die ersten 3 Aufgaben sind wieder Beweise mit Jape zu erstellen. In Ilias finden Sie „`Zettel03.jt`“ und „`zettel03_problems.j`“. Kopieren Sie diese in Ihr Verzeichnis `Marburg2022`. Starten Sie Jape und laden Sie die Theorie `zettel03.jt`. Sie finden Fenster mit den folgenden 3 Aufgaben. Beweisen Sie diese in Jape und reichen Sie Screenshots mit dem „checkmark“ ein.

Als Übung für die Klausur: Versuchen Sie **vor Ausführung** eines Befehls (intro/elim/contra) die Auswirkung (den nächsten Zustand von Jape) vorherzusagen.

Aufgabe 1. ($\forall$ und $\exists$-Quantoren):

a) $\forall x.(R(x) \to S(x)), \forall y.(S(y) \to T(y)) \vdash \forall z.(R(z) \to T(z))$

b) $\forall x.(R(x) \wedge S(x)) \vdash \forall y.(R(y) \wedge \forall z.S(z))$

c) $\forall x.(R(x) \to S(x)), \exists y.R(y) \vdash \exists z.S(z)$

d) $\exists x.(R(x) \vee S(x)) \vdash \exists y.(R(y) \vee \exists z.S(z))$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Quantoren und Negation - geht ohne Widerspruchsbeweis):

a) $\exists x.R(x) \vdash \neg\forall y.R(y)$ x ist ge

b) $\forall x.\neg R(x) \vdash \neg\exists y.R(y)$ x ist un $\div$ 2

(2 Punkte)

Aufgabe 3. (Widerspruchsbeweise erforderlich!):

a) $\neg\exists x.\neg R(x) \vdash \forall y.R(y)$

b) $\neg\forall x.\neg R(x) \vdash \exists y.R(y)$

$0 \to 1$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Von den folgenden beiden Behauptungen ist eine beweisbar, eine nicht. Von der korrekten Behauptung erstellen Sie bitte in Jape einen Beweis. Für die nicht beweisbare Behauptung konstruieren Sie ein Gegenbeispiel, d.h. wählen Sie geeignete Relationen P und Q so, dass die Voraussetzung (premise) wahr ist, die Behauptung (conclusion) aber nicht. $0{,}5^2$ $\forall x \geq 3$

R (a) $\forall x.(P(x) \to Q(x)) \vdash (\forall y.P(y)) \to \forall z.Q(z)$ S.117 P: x is prime r

? F (b) $\exists x.(P(x) \to Q(x)) \vdash (\exists y.P(y)) \to \exists z.Q(z)$ Q: x is odd f

(4 Punkte)

Aufgabe 5. Beweisen Sie: $\neg\forall x.(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vdash (\forall x.(P(x)) \to \exists x.\neg Q(x)$.

Sie dürfen Jape benutzen, das wird aber etwas umfangreich. Daher können Sie den Beweis auch informell (von Hand) führen.

(2 Punkte)

$x \in N$

$\exists x$ P: $x \geq 0$ F

Q x ist ungerade T

$y \in N$

$z \in$

$$\frac{\neg\forall x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))}{(\forall(x).\,P(x)) \to \exists x.\,\neg Q(x)}$$

$\neg\forall x.\,(P(x) \wedge \neg Q(x)$

$\forall x.\,P(x)$

$\boxed{\begin{array}{l}\forall x.\,P(x) \wedge \neg Q\,x \\ \bot\end{array}}$

$\exists x.\,\neg Q(x)$

$\forall$

$$\frac{\forall(x).P(x)}{P(t)} \quad \forall\_\text{elim}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} t \\ \dots \\ P(t) \end{array}}}{\forall(x).P(x)} \quad \forall\_\text{intro}$$

$\exists$

$$\frac{\exists(x).P(x), \quad \boxed{\begin{array}{l} i, \; P(i) \\ \vdots \\ C \end{array}}}{C} \quad \exists\_\text{elim}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} t \\ \dots \\ P(t) \end{array}}}{\exists x. P(x)} \quad \exists\_\text{intro}$$

$$\frac{\neg \forall x. \neg R(x)}{\exists y. R(y)}$$

nicht für alle x , $R(x)$ nicht gilt

Es existiert 1 y, $R(y)$ gilt

$\neg \exists y. \; R(y)$

actual i

$$\boxed{\begin{array}{l} R(i) \\ \\ \perp \end{array}}$$

$\neg R(i)$

$\forall x. \neg R(x)$

$\perp$

Aufgabe 4

(a) $\forall x.(P(x) \to Q(x)) \vdash (\forall y.P(y)) \to \forall z.Q(z)$

Die Aussage ist falsch, beweisen durch folgende Beispiel :

Sei x alle natürliche Zahl ≥ 3

$\forall x.(P(x) \to Q(x))$ bsp : P: x ist primzahl
Q: x ist odd

if x ein primzahl daraus folgt , muss x auch eine odd Nummer

$\forall y . P(y) \to \forall z. Q(z)$

Aufgabe 4:

b, $\exists x . (\overset{w}{P(x)} \to \overset{w}{Q(x)}) \vdash (\exists y. \overset{w}{P(y)}) \to \overset{f}{\exists z. Q(z)}$ ist false

Sei $x \in \mathbb{N}$,

$P(x)$: $x \in \{0, \dots, 10\}$
$Q(x)$: $x = \emptyset$

$x = 0, \dots 10 \Rightarrow P(x) \to Q(x)$ richtig

Sei $x \geq 11 \Rightarrow P(x) \to Q(x)$ ist richtig

aber sei $\exists x . P(x)$ ist true
$\exists z . Q(z)$ ist true weil es gibt kein $z \in \mathbb{N}$
$z \in \mathbb{N}$ und $z = \emptyset$

Aufgabe 05

$\times$

$\checkmark$ $\times$

$\neg\forall x.(P(x) \land \neg Q(x)) \vdash (\forall x.(P(x)) \to \exists x.\neg Q(x).$

es gilt $\neg \forall x. (P(x) \land \neg Q(x))$ $\neg P \lor Q$

und zu beweisen $(\forall x. P(x)) \to \exists x. \neg Q(x)$

1) $\neg \forall x. (P(x) \land \neg Q(x))$ $\Rightarrow$ Es existier kein x sodass $P(x) \land \neg Q(x)$ gilt

$\Leftrightarrow$ $\exists x. (\neg P(x) \lor Q(x))$ $\Rightarrow$ Es existiert 1 x sodass entweder $\neg P(x)$ gilt oder $Q(x)$ gilt

$\Leftrightarrow$ $\exists x (P(x) \to Q(x))$

R

Falls $\exists x. \neg P(x)$ $\Rightarrow$ $\forall x. P(x)$ ist $\perp$

eine Aussage folgt aus eine falsche Aussage ist immer richtig

$\Rightarrow$ $(\forall(x). P(x)) \to \exists x. \neg Q(x)$ ist richtig

Falls $\exists x. \neg P(x)$ ist false $\Rightarrow$ $\forall x. P(x)$ ist $\top$

wenn $\forall x. P(x)$ dann muss $\exists(x). (\neg Q(x))$ gelten
$\Rightarrow$ min ein x existiert sodass $\forall x. P(x) \land \neg Q(x)$ gilt

$\forall(x). P(x) \to \exists(x). \neg Q(x)$ $F \to T$ ist T

$\square$

$P(x)$	$\neg Q(x)$	$P(x) \wedge \neg Q x$	$\neg(P(x) \wedge \neg Q x)$
0	1	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1

	$Q(x)$	$\neg P(x) \vee Q(x)$
1	0	1
1	1	1
0	0	0
0	1	1

Aufgabe 2

a) $\cancel{\exists x.R(x) \vdash \neg\forall y.R(y)}$

b) $\forall x.\neg R(x) \vdash \neg\exists y.R(y)$

a,

1	$\exists x.\ R(x)$	premise
2	$\forall y.\ \neg Ry$	assumption
3	actual i	assumption
4	$R(i)$	assumption
5	$\neg R(i)$	$\forall$_elim 2,3
6	$\bot$	$\neg$ elim 4,5
7	$\bot$	$\exists$_elim 1, 3-6
8	$\neg\forall y.\ \neg R(y)$	$\neg$ intro 2-7

b,

1	$\forall (x).\ \neg R(x)$	premise
2	$\exists y.\ R(y)$	assumption
3	actual i	assumption
4	$R(i)$	assumption
5	$\neg R(i)$	$\forall$_elim 1,3
6	$\bot$	$\neg$ elim 4,5
7	$\bot$	$\exists$_elim 2, 3-6
8	$\neg\exists y.\ R(y)$	$\neg$ intro 2,7

Aufgabe 3

a) $\neg\exists x.\neg R(x) \vdash \forall y.R(y)$

b) $\neg\forall x.\neg R(x) \vdash \exists y.R(y)$

a,

1	$\neg\exists x.\ \neg R(x)$	assumption
2	actual i	assumption
3	$\neg R(i)$	assumption
4	$\exists x.\ \neg R(i)$	$\exists$_intro 1,3
5	$\bot$	$\neg$_elim 3,4
6	$R(i)$	contra 3-5
7	$\forall x.\ R(y)$	$\forall$_intro 2-6

$\neg\forall x.\ \neg R(x)$