Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Hansen, D. Vogel

Wintersemester 2022/2023

11 /18

Übungen zur Linearen Optimierung
7. Aufgabenblatt

B5- A1

Aufgabe 1 Sei S eine konvexe Menge. Zeigen Sie: Ein Punkt $x \in S$ ist ein Extrempunkt von S, genau dann wenn die Implikation (4)

$$x = \frac{1}{2}(y+z), \; y, z \in S \quad \Rightarrow \quad x = y = z$$

2/4

gilt.

Aufgabe 2 Es sei das Lineare Programm (4)

$$\begin{aligned} \min \; & z = x_1 - x_2 \\ \text{U.d.N.} \; & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Zielfunktion auf der zulässigen Menge nach unten beschränkt ist. Geben Sie außerdem eine Darstellung der Menge der Optimallösungen des Linearen Programms an und zeigen Sie, dass diese Menge unbeschränkt ist.

Aufgabe 3 Betrachten Sie die beiden Linearen Programme B6_A2 (10)

$$\begin{aligned} \min \; 2x_1 - x_2 - 3x_3 & \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq -2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\geq -3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

4,5/5

$$\begin{aligned} \min \; -4x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\geq -1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\geq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

4,5/5

Weisen Sie nach, dass der zulässige Bereich X der Probleme nicht leer ist und leiten Sie daraus eine zulässige Startbasis für die Standardform ab. Lösen Sie die Probleme anschließend mit dem revidierten Simplex-Verfahren.

Abgabe: Dienstag, 13.12.22, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1:

Aufgabe 1 Sei S eine konvexe Menge. Zeigen Sie: Ein Punkt $x \in S$ ist ein Extrempunkt von S, genau dann wenn die Implikation (4)

$$x = \frac{1}{2}(y+z),\ y, z \in S \quad \Rightarrow \quad x = y = z$$

gilt.

Sei S eine konvexe Menge und $x \in S$ nach Definition

$\Rightarrow$ Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$ sodass gilt:

$$x = \lambda a + (1-\lambda) b \quad \text{mit } a, b \in S, \quad a, b \neq x$$

x sei ein Extrempunkt von S wenn $x = \frac{1}{2}(y+z)$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z \qquad (y, z \in S)$$

Laut Def von Extrempunkt, es gibt kein $y, z \in S$, $y, z \neq x$

sodass $x = \lambda a + (1-\lambda) b$ gilt $\Rightarrow$ muss $y = z = x$ sein

dann $x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x$ stimmt.

Aufgabe 3

$$\min\ 2x_1 - x_2 - 3x_3$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq -2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\geq -3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min\ -4x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &\geq -1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\geq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Weisen Sie nach, dass der zulässige Bereich X der Probleme nicht leer ist und leiten Sie daraus eine zulässige Startbasis für die Standardform ab. Lösen Sie die Probleme anschließend mit dem revidierten Simplex-Verfahren.

$$\min\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \xrightarrow{SF} \min\ z = 2x_1 - x_2 - 3x_3$$

u.d.N
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq -2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\geq -3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

u.d.N
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 - 3x_3 + s_1 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 &= 1 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + s_3 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c = (2, -1, -3, 0, 0, 0)^T$$

Nach der Simplex-Methode:

Basis $\{s_1, s_2, s_3\}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c_B^T = (0, 0, 0) \qquad c_N^T = (2, -1, -3)$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (0\ 0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - (c_B^T \cdot B^{-1} N) = c_N^T - y^T \cdot N = c_N^T = (2, -1, \underline{-3})$$

$$\hat{c}_t = \min_{\{1,2,3\}} \{ \hat{c}_j : c_j < 0 \} = -3$$

$\Rightarrow x_3$ tritt in die Basis ein

Um die austretende zu wählen:

$$\hat{A}_3 = B^{-1} \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow > 0$$

Quotientekriterium $\min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{it}} : \hat{a}_{i,t} > 0 \right\}$ nur $\hat{a}_{2,3} > 0$

$\Rightarrow s_2$ verlässt Basis

Neue Basis $N = \{x_1, x_2, s_2\}$ $B = \{s_1, x_3, s_3\}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad c_N^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$\Rightarrow B\{s_1, x_3, s_3\}$ ist optimal

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad x_N = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$z = 2 \cdot 0 - 0 - 3 \cdot 1 = -3$$

$$\min \quad -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad \xrightarrow{SF} \quad \min \quad -4x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\text{u.d.N} \quad \begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &\geq -1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\geq -2 \\ x_1\ x_2\ x_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + s_1 &= 1 \\ -4x_1 - x_2 - 2x_3 + s_2 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 + s_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{matrix}}_{N} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{B} \right) \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c^T = (-4 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$B = \{ s_1, s_2, s_3 \} \qquad N = \{ x_1, x_2, x_3 \} \qquad c_B^T = (0\ 0\ 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (0, 0, 0)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = (-4 \quad 2 \quad 1) - (0 \quad 0 \quad 0) = (-4 \quad 2 \quad 1)$$

$$\hat{c}_t = \min_{\{1,2,3\}} (\hat{c}_i : i > 0) = -4$$

$\Rightarrow x_1$ tritt in Basis ein

$$\hat{A}_1 = B^{-1} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Quotientkriterium $\min_{\{1,2,3\}} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,t}} : \hat{a}_{i,t} > 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 1$

$\Rightarrow s_1$ verlässt die Basis $\Rightarrow N = \{ s_1, x_2, x_3 \}$ $B = \{ x_1, s_2, s_3 \}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (-4 \quad 0 \quad 0) \qquad c_N^T = (0 \quad 2 \quad -1)$$

$$y^T = c_B^T \, \overset{B^{-1}}{\cancel{N^{-1}}} = (-4 \quad 0 \quad 0)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = (0 \quad 2 \quad -1) - (-4 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$\hat{c}_3 = -5 < 0 \Rightarrow x_3$ trifft in Basis ein

$$\hat{A}_3 = B^{-1} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung