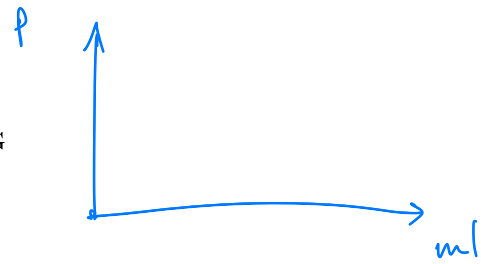
$9/18$

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Hansen, D. Vogel

Wintersemester 2022/2023



Übungen zur Linearen Optimierung
1. Aufgabenblatt

$0{,}85\,m^2$

Aufgabe 1 Eine Fruchtsaftfirma möchte einen neuen Saft auf den Markt bringen. Dieser soll eine möglichst günstige Mischung aus drei verschiedenen Fruchtsäften A,B und C sein. Die Produktionskosten der einzelnen Säfte belaufen sich bei Fruchtsaft A auf 80 Cent pro 100ml, bei Fruchtsaft B auf 40 Cent pro 100ml und bei Fruchtsaft C auf 50 Cent pro 100ml. Die produzierte Mischung soll weiterhin mindestens 7 Gramm Vitamin C pro 100ml enthalten, wobei Saft A 9.5 Gramm pro 100ml, Saft B 5 Gramm pro 100ml und Saft C 7.5 Gramm pro 100ml enthält. Der Arbeitsaufwand bei der Produktion der einzelnen Säfte beläuft sich auf 3 Stunden pro Liter bei Saft A, 4.5 Stunden pro Liter bei Saft B und 7 Stunden pro Liter bei Saft C. Der Arbeitsaufwand bei der Produktion von einem Liter der Mischung soll letztendlich nicht mehr als 5 Stunden betragen. Auch die Lagerkapazitäten sind begrenzt, hierbei steht nicht mehr als 0.85 Kubikmeter für die Früchte zur Verfügung, die zur Produktion von einem Liter Saft benötigt werden. Hierbei benötigen die bei der Produktion von einem Liter benutzten Früchte von Saft A 1 Kubikmeter, die von Saft B 1.05 Kubikmeter und die von Saft C 0.25 Kubikmeter. (8)

$7/8$

$A + B + C \leq 0.85 \Leftrightarrow 0.001\, x_A +$

$1L = 1\,m^2$
$1L = 1.05\,m^2$
$1L = 0{,}25\,m^2$

(i) Stellen Sie ein Lineares Programm auf, das die kostengünstigste Mischung der Fruchtsäfte unter Einhaltung der gegebenen Restriktionen berechnet.

$A = x_A$
$B = \frac{x_B \cdot 1000}{1.05}$
$C = \frac{x_C \cdot 1000}{0.25}$

(ii) Geben Sie ein Lineares Programm mit zwei Variablen an, das zu dem in (i) aufgestellten Programm äquivalent ist und skizzieren Sie den zulässigen Bereich in der Ebene. Bestimmen Sie dazu grafisch den Lösungspunkt des Linearen Programms.

Aufgabe 2 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll durch eine endliche Linearkombination von Polynomen (5)

$$p(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j t^{j-1} = \boxed{a_1 t^0 + a_2 t^1 + a_3 t^2 + \dots + a_m t^{m-1}}$$

$m-1$

vom Grad kleiner $m \in \mathbb{N}$ approximiert werden. Es ist dazu an n Stellen $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ der Wert der Funktion f bekannt. Formulieren Sie ein Lineares Programm, dessen Lösung das Polynom p vom Grad kleiner m ergibt, das die Funktion f an den Stellen t_k, $k = 1, \dots, n$ in der Maximumsnorm bestmöglich approximiert, es soll also das Polynom p bestimmt werden, für das

$0/5$

$$\max_{k=1}^{n} |f(t_k) - p(t_k)|$$

minimal ist.

Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2022/2023**
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Hansen, D. Vogel

Übungen zur LINEAREN OPTIMIERUNG
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Eine Fruchtsaftfirma möchte einen neuen Saft auf den Markt bringen. Dieser soll eine möglichst günstige Mischung aus drei verschiedenen Fruchtsäften A,B und C sein. Die Produktionskosten der einzelnen Säfte belaufen sich bei Fruchtsaft A auf 80 Cent pro 100ml, bei Fruchtsaft B auf 40 Cent pro 100ml und bei Fruchtsaft C auf 50 Cent pro 100ml. Die produzierte Mischung soll weiterhin mindestens 7 Gramm Vitamin C pro 100ml enthalten, wobei Saft A 9.5 Gramm pro 100ml, Saft B 5 Gramm pro 100ml und Saft C 7.5 Gramm pro 100ml enthält. Der Arbeitsaufwand bei der Produktion der einzelnen Säfte beläuft sich auf 3 Stunden pro Liter bei Saft A, 4.5 Stunden pro Liter bei Saft B und 7 Stunden pro Liter bei Saft C. Der Arbeitsaufwand bei der Produktion von einem Liter der Mischung soll letztendlich nicht mehr als 5 Stunden betragen. Auch die Lagerkapazitäten sind begrenzt, hierbei steht nicht mehr als 0.85 Kubikmeter für die Früchte zur Verfügung, die zur Produktion von einem Liter Saft benötigt werden. Hierbei benötigen die bei der Produktion von einem Liter benutzten Früchte von Saft A 1 Kubikmeter, die von Saft B 1.05 Kubikmeter und die von Saft C 0.25 Kubikmeter. (8)

(i) Stellen Sie ein Lineares Programm auf, das die kostengünstigste Mischung der Fruchtsäfte unter Einhaltung der gegebenen Restriktionen berechnet.

(ii) Geben Sie ein Lineares Programm mit zwei Variablen an, das zu dem in (i) aufgestellten Programm äquivalent ist und skizzieren Sie den zulässigen Bereich in der Ebene. Bestimmen Sie dazu grafisch den Lösungspunkt des Linearen Programms.

Aufgabe 2 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll durch eine endliche Linearkombination von Polynomen (5)

$$p(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j t^{j-1}$$

vom Grad kleiner $m \in \mathbb{N}$ approximiert werden. Es ist dazu an n Stellen $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ der Wert der Funktion f bekannt. Formulieren Sie ein Lineares Programm, dessen Lösung das Polynom p vom Grad kleiner m ergibt, das die Funktion f an den Stellen $t_k,\ k = 1, \ldots, n$ in der Maximumsnorm bestmöglich approximiert, es soll also das Polynom p bestimmt werden, für das

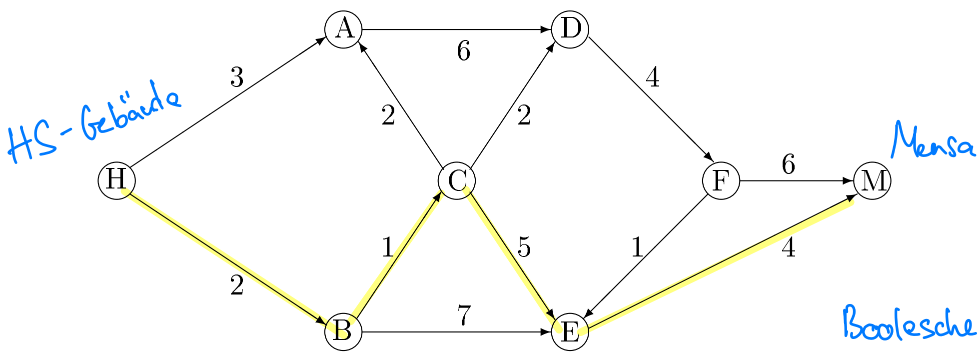
$$\max_{k=1}^{n} |f(t_k) - p(t_k)|$$

minimal ist.

2/5

Aufgabe 3 Nicht in jeder Stadt ist die Mensa M so nah am Hörsaalgebäude H gelegen wie in Marburg. In einer Universitätsstadt stehe für diesen Weg folgendes System von Einbahnstraßen zur Verfügung. (5)

W_{ij} : Zeitdauer von $i \to j$



Boolesche Menge

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$

Angegeben ist jeweils die Zeitdauer in Minuten, die sie mit ihrem Auto für die entsprechende Strecke benötigen. Formulieren Sie das Problem, mit ihrem Auto in minimaler Zeit vom Hörsaalgebäude zur Mensa zu kommen, als boolesches lineares Programm.

~~H~~ ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ E ~~F~~ M

H

A	3
B	2
C	3
D	5
E	8
F	9
M	12

$$\begin{pmatrix} HA & AD & BC & CD & DF & FE \\ HB & & BE & CE & EM & FM \end{pmatrix}$$

Abgabe: Dienstag, 01.11.22, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1

Wir nennen die Menge von 3 verschiedenen Fruchsäfte als x_1, x_2, x_3 in (ml)

x_1 = die Menge von Saft A
x_2 = B
x_3 = C
(mL)

ziel

Damit ergebt sich $z = 0{,}8\,x_1 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}5\,x_3$ und die NB $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^+$

(80 cent / 100 ml = 0,8 cent / ml)

Nebenbedingungen:

Mischung Vitamin : $0{,}095\,x_1 + 0{,}05\,x_2 + 0{,}075\,x_3 \geq 0{,}07\,(x_1 + x_2 + x_3)$

$\approx\; 95\,x_1 + 50\,x_2 + 75\,x_3 \geq 70\,(x_1 + x_2 + x_3)$

Arbeitsaufwand : $0{,}003\,x_1 + 0{,}0045\,x_2 + 0{,}007\,x_3 \leq 0{,}005$ (Stunden / mL)

$\approx\; 3x_1 + 4{,}5x_2 + 7x_3 \leq 5$ (Stunden / ml)

Lagerkapazität : $1\,x_1 + 1.05\,x_2 + 0.25\,x_3 \leq 0.85\,(x_1 + x_2 + x_3)$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ NB mit $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Ein lineares Programm

$$\min_{x_1 \dots x_3} z = 0{,}8\,x_1 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}5\,x_3 \quad \text{(Cent)}$$

$f_1(x): 95\,x_1 + 50\,x_2 + 75\,x_3 \geq 70\,(x_1 + x_2 + x_3)$
$f_2(x): 3x_1 + 4{,}5x_2 + 7x_3 \leq 5$
$f_3(x): 1\,x_1 + 1.05\,x_2 + 0.25\,x_3 \leq 0.85$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ || NB

ii)

Sei $x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3$

$f_1(x)$: $95\,x_1 + 50\,x_2 + 75\,x_3 \geq 70 \cdot 1$
$\Leftrightarrow 95\,(1 - x_2 - x_3) + 50\,x_2 + 75\,x_3 \geq 70$
$\Leftrightarrow 95 - 95x_2 - 95x_3 + 50\,x_2 + 75\,x_3 - 70 \geq 0$
$\Leftrightarrow 25 - 45x_2 - 20x_3 \geq 0$
$\Leftrightarrow 25 \geq 45\,x_2 - 20x_3$
$\Leftrightarrow 5 \geq 9\,x_2 - 4\,x_3$

$f_2(x)$: $3x_1 + 4{,}5x_2 + 7x_3 \leq 5$
$\Leftrightarrow 3\,(1 - x_2 - x_3) + 4{,}5\,x_2 + 7x_3 \leq 5$
$\Leftrightarrow 3 - 3x_2 - 3x_3 + 4{,}5\,x_2 + 7\,x_3 - 5 \leq 0$
$\Leftrightarrow -2 + 1{,}5\,x_2 + 4\,x_3 \leq 0$
$\Leftrightarrow 1{,}5\,x_2 + 4\,x_3 \leq 2$

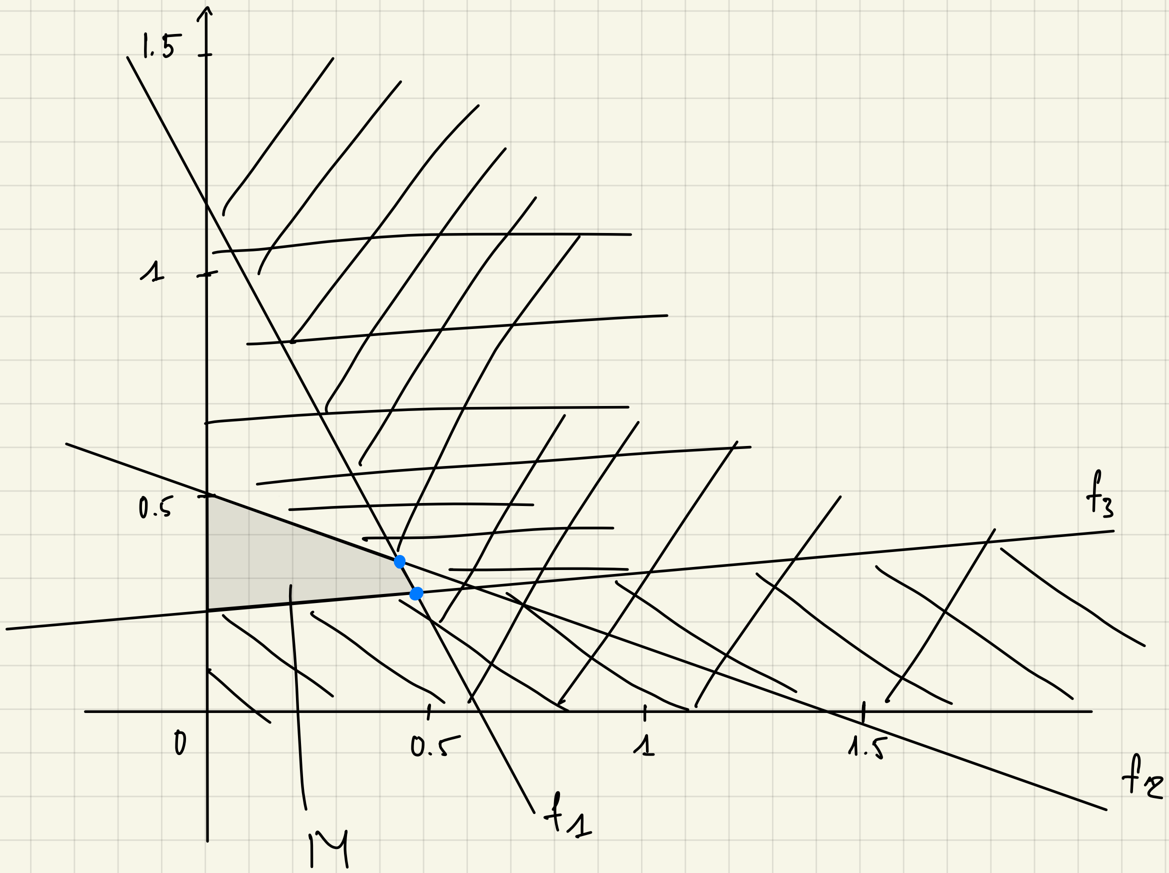
$f_3(x): \; 1x_1 + 1.05x_2 + 0.25x_3 \leqslant 0.85$

$\Leftrightarrow \quad 1 - x_2 - x_3 + 1.05x_2 + 0.25x_3 - 0.85 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad 0.15 + 0.5x_2 - 0.75x_3 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad 0.5x_2 - 0.75x_3 \leqslant -0.15$

graphisch



$z = 0.8x_1 + 0.4x_2 + 0.5x_3$

$= 0.8(1 - x_2 - x_3) + 0.4x_2 + 0.5x_3$

$= 0.8 - 0.8x_2 - 0.8x_3 + 0.4x_2 + 0.5x_3$

$= 0.8 - 0.4x_2 - 0.3x_3$

$= -0.4x_2 - 0.3x_3 + 0.8$

$f_1 \cap f_2 = M_1(0.4, 0.35)$

$f_2 \cap f_3 \approx M_2(0.45, 0.23)$

Einsetzen zu z

$\Rightarrow \quad M_1 \rightarrow z = 0.535$ cent/ml $=$ 5,35 €/ml

$\quad\quad M_2 \rightarrow z = 0.551$ cent/ml $=$ 5,51 €/ml

$\Rightarrow$ kostet 1L Mischung 5.35 €/ml

Aufgabe 3

Sei O die Menge alle Orte in Marburg. die man als Zwischenort durchfahren kann

in diesem Fall $O = [H, A, B, C, D, E, F, M]$

Sei $w_{ij} \geq 0$ die Zeitdauer in Minuten zwischen i und j (Wenn von i nach j eine Strecke gibt)

In dieser Aufgabe gilt keine Dreieckungleichung !

Die Liste $(p(H), p(A), \ldots, p(M))$ die Orte

Die Gesamtzeitdauer um von $H \rightarrow M$ zu gehen ist

$$\sum_{j=0}^{M} w_{p(O[j])\, p(O[j+1])}$$

Unsortierte Index !

Betrachtung des charakterischen vektor $x = (x_j) \in \mathbb{B}$ Boolesche Menge

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn die Ort ist besucht} \\ 0 & \text{wenn die Ort ist noch nicht besucht} \end{cases}$$

$$y = (y_j) \in$$

Die Minimum Zeitdauer zwischen 2 Orte

$$\min \left\{ \sum_{i=H}^{M} w_{i,\pi(i)} : \pi \in S_O \right\}$$

$\pi_H = \{A, B\}$

Die Orte von i erreichbar ist

Die Zielfunktion

$$\min \sum_{i=H,\, j=H}^{M} w_{ij}\, x_{ij}$$

$$x \in X = \{ x \in [0,1],\ x \in \mathbb{N} \}$$

Aufgabe 3

Sei A die Menge alle Orte in Marburg. H ist Hörsaalgebäude und M ist Mensa, gesucht ist die min Zeitdauer von H → M.

Sei $w_{ij} \geq 0$ die Zeitdauer in Minuten zwischen i und j (Wenn von i nach j eine Strecke gibt)

Sei x_{ij}: eine boolesche Variable um festzustellen, ob streke zwischen i und j schon am kürzesten ist.

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = H \\ -1 & i = M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 1

Wir nennen die Menge von 3 verschiedenen Fruchsäfte als x_1, x_2, x_3 in (ml)

x_1 = die Menge von Saft A
x_2 = B
x_3 = C
(mL)

Damit ergebt sich $\overset{\text{ziel}}{z} = 0{,}8\, x_1 + 0{,}4\, x_2 + 0{,}5\, x_3$ und die NB $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^+$

(80 cent / 100 ml = 0,8 cent / ml)

Nebenbedingungen:

$0{,}07(x_1 + x_2 + x_3)$

Mischung Vitamin : $0{,}095\, x_1 + 0{,}05 x_2 + 0{,}075\, x_3 \geq 0{,}07$ (g / mL)

$\approx 95\, x_1 + 50\, x_2 + 75\, x_3 \geq 70$ (g /mL)

Arbeitsaufwand : $0{,}003\, x_1 + 0{,}0045\, x_2 + 0{,}007\, x_3 \leq 0{,}005$ (Stunden / mL)

$\approx 3 x_1 + 4{,}5 x_2 + 7 x_3 \leq 5$ (Stunden / ml)

Lagerkapazität : $x_1 \leq 0{,}85\ m^2 \ / \ 1\, m^2 = 0{,}85\ (L) = 850\ mL$

$x_2 \leq 0{,}85\ m^2 \ / \ 1{,}05\, m^2 = 0{,}8\ (L) \approx 800\ mL$

$x_3 \leq 0{,}85\ m^2 \ / \ 0{,}25\, m^2 = 3{,}4\ (L) \approx 3400\ mL$

Ein lineares Programm

$$\min_{x_1 \dots x_3} z = 0{,}8\, x_1 + 0{,}4\, x_2 + 0{,}5\, x_3 \quad \text{(Cent)}$$

$$x_1 \leq 850$$
$$x_2 \leq 800 \quad \text{(mL)}$$
$$x_3 \leq 3400$$

$$95\, x_1 + 50\, x_2 + 75\, x_3 \geq 70$$
$$3 x_1 + 4{,}5 x_2 + 7 x_3 \leq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$x_1 = 0{,}4 \rightarrow 0{,}4\, L$

$x_2 = 0{,}3 \rightarrow 0{,}28\, L$

$x_3 = 0{,}15 \rightarrow 0{,}6\, L$

$95\, x_1 = 70 - 50\, x_2 - 75 x_3$

$x_1 = \frac{70}{95} - \frac{50}{95} x_2 - \frac{75}{95} x_3$

$x_1 \geq \frac{70 - 50 x_2 - 75 x_3}{95}$ $\qquad$ $x_1 \geq \frac{5 - 4{,}5 x_2 - 7 x_3}{3}$

Auf 2