Logik Prof. Dr. H. Peter Gumm
Wintersemester 22/23

Übungszettel 11

Abgabetermin: 21. Januar 2023, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

Aufgabe 1 (Gültigkeit in einer Struktur)**.** Die folgenden drei Aufgaben entstammen einem Intelligenztest, in dem gefragt wird, welche der Schlussfolgerungen $(a) - (d)$ jeweils zwingend sind:

1. Alle Vögel legen Eier. Kein Tier, das Eier legt, isst gerne Körner. $\forall x. ($ legtEir(x)
   (a) Einige Vögel essen gerne Körner
   (b) Alle Vögel essen gerne Körner
   (c) Kein Vogel isst gerne Körner
   (d) Keine der Schlussfolgerungen ist korrekt
2. Kein Vogel ist ein Fisch. Kein Fisch ist eine Pflanze. $\neg \exists x\,(Vogel(x) \wedge Fisch(x))$. $\neg \exists x\,(Fisch(x) \wedge Pflanze(x))$
   (a) Alle Pflanzen sind Vögel.
   (b) Keine Pflanze ist ein Vogel.
   (c) Einige Vögel sind keine Pflanzen.
   (d) Keine der Schlussfolgerungen ist korrekt

Modellieren Sie zunächst die gegebenen Aussagen in der Prädikatenlogik, indem Sie Relationsnamen mit Stelligkeiten einführen, z.B. in Aufgabe 1: $Vogel(x)$ für „x ist ein Vogel", bzw $LegtEier(x)$, $IsstKörner(x)$. Da es implizit nur um Tiere geht, benötigen Sie kein gesondertes Prädikat $Tier(x)$.

1. $\varphi_1 = \forall x.(Vogel(x) \to LegtEier(x)) \;\wedge ....$
   (a) ...
   (b) $\varphi_{1\,b} = \forall x.Vogel(x) \to IsstKörner(x)$.
   (c) ...

Lösen Sie dann das Rätsel.

Für jede der Schlussfolgerungen, die nicht zwingend aus der Hauptaussage folgen, geben Sie als Gegenbeispiel jeweils ein Modell an, in dem die Hauptaussage gilt, nicht aber die entsprechenden Folgerungen. Im Fall der ersten Aufgabe z.B. ein Gegenbeispiel zu (b):

$(b) : Tiere = \{a, b, c, d, e\}$, $Vogel = \{a, b, c\}$, $LegtEier = \{a, b, c, e\}$, $IsstKörner = \{d\}$.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2 (Gültigkeit in einer Struktur)**.** Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und $\odot$ ein zweistelliges Funktionssymbol, das wir infix schreiben. Betrachte die Formeln
$F := \exists x.\forall y.R(x \odot x, y)$ und $G := \forall y.\exists x.R(x \odot x, y)$. Geben Sie

F R

1. eine Interpretation in einer passenden Struktur $\mathfrak{A}$ an, in der eine der Formeln gilt, die andere aber nicht.
   $\mathfrak{A}$
2. eine Interpretation in der beide Formeln gelten.

$x \notin Frei(x)$ | Zeigen: $\models F \to \forall x. G$

$\models F \to G \lor \hat{\alpha}(F) = 1, \hat{\alpha}(G) = 1$ | Annehmen $\hat{\alpha}(F) = 1$

(2 Punkte)

Aufgabe 3 (Semantik)**.** Sei x eine Variable, t ein Term und F eine Formel. Zeigen Sie

1. $\models \forall x.F \to F\{t/x\}$
2. falls $x \notin Frei(F)$ und $\models F \to G$ dann gilt auch $\models F \to \forall x.G$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4 (Semantik)**.** Sei x eine Variable, t ein Term, in dem y nicht vorkommt. Sie sollen zunächst zeigen:

$$\alpha_{[y \mapsto a]}(t\{y/x\}) = \alpha_{[x \mapsto a]}(t).$$

1. Der Beweis verläuft analog dem Beweis des Substitutionslemmas, das wir in der Aussagenlogik besprochen hatten (Folie 58, Kapitel Aussagenlogik). Schreiben Sie neben jeden Schritt die richtige Begründung:

   (a) $t = v$ ist eine Variable

   i. $v = x$

$$\begin{aligned} \alpha_{[y \mapsto a]}(t\{y/x\}) &= \alpha_{[y \mapsto a]}(v\{y/x\}) && \text{Sei } t = v \\ &= \alpha_{[y \mapsto a]}(y) && \text{sei } v = x \text{ und } \{y/x\} \\ &= a && y \to a \\ &= \alpha_{[x \mapsto a]}\{v\} \end{aligned}$$

   ii. $v \neq x$,

$$\begin{aligned} \alpha_{[y \mapsto a]}(t\{y/x\}) &= \alpha_{[y \mapsto a]}(v\{y/x\}) \\ &= \alpha_{[y \mapsto a]}(v) \\ &= \alpha(v) \\ &= \alpha_{[x \mapsto a]}(t). \end{aligned}$$

   (b) $t = f(t_1, ..., t_n)$

$$\begin{aligned} \alpha_{[y \mapsto a]}(t\{y/x\}) &= \alpha_{[y \mapsto a]}(f(t_1, ..., t_n)\{y/x\}) \\ &\alpha_{[y \mapsto a]}(f(t_1\{y/x\}, ..., t_n\{y/x\})) \\ &= f(\alpha_{[y \mapsto a]}(t_1\{y/x\}), ..., \alpha_{[y \mapsto a]}(t_n\{y/x\})) \\ &= f(\alpha_{[x \mapsto a]}(t_1), ..., \alpha_{[x \mapsto a]}(t_n)) \\ &= \alpha_{[x \mapsto a]}(f(t_1, ..., t_n)) \\ &= \alpha_{[x \mapsto a]}(t). \end{aligned}$$

2. Die obige Behauptung lässt sich auch auf Formeln F hochziehen. Falls y nicht frei in F ist, gilt

$$\alpha_{[y \mapsto a]}(F\{y/x\}) = \alpha_{[x \mapsto a]}(F).$$

   Versuchen Sie dies für den Fall $F = \forall v.G$ zu zeigen, wobei Sie voraussetzen können, dass die Behauptung für G schon gezeigt sei.

(4 Punkte)

Aufgabe 1:

1. Alle Vögel legen Eier. Kein Tier, das Eier legt, isst gern Körner

$$\varphi_1 = \forall x.(\text{Vogel}(x) \rightarrow \text{LegtEier}(x)) \wedge \neg\exists.(\text{LegtEier}(x) \rightarrow \text{IsstKörner}(x))$$

a) $\exists x.(\text{Vogel}(x) \wedge \text{IsstKörner}(x))$
b) $\forall x.(\text{Vogel}(x) \rightarrow \text{IsstKörner}(x))$
c) $\neg\exists x.(\text{Vogel}(x) \wedge \text{IsstKörner}(x))$

Gegenbeispiel:
a) Tiere $= \{a, b, c\}$, Vogel $= \{b, c\}$, legtEier $= \{b, c\}$, Isstkörner $= \{a\}$

b) Tiere $= \{a, b, c, d, e\}$, Vogel $= \{a, b, c\}$, LegtEier $= \{a, b, c, e\}$, Isstkörner $= \{d\}$

c) kein Gegenbeispiel

2. Kein Vogel ist ein Fisch. Kein Fisch ist eine Pflanze

$$\varphi_2 = \neg\exists x\,(\text{Vogel}(x) \wedge \text{Fisch}(x)) \wedge \neg\exists x.(\text{Fisch}(x) \wedge \text{Pflanze}(x))$$

a) $\forall x.(\text{Pflanze}(x) \longrightarrow \text{Vogel}(x))$
b) $\neg\exists x\,(\text{Pflanze}(x) \longrightarrow \text{Vogel}(x))$
c) $\exists x.(\text{Vogel}(x) \wedge \neg\,\text{Pflanze}(x))$

a) Vogel $= \{a, b\}$ Fisch $= \{c, d\}$ Pflanze $= \{e, f\}$
b) Vogel $= \{a, b\}$ Fisch $= \{c, d\}$ Pflanze $= \{a, b\}$
c) Vogel $= \{a, b\}$ Fisch $= \{c, d\}$ Pflanze $= \{a, f\}$

Aufgabe 2: Gültigkeit in einer Struktur

$\Sigma = \{\mathcal{F}, P\}$

$\odot$ sei " Funktionssymbol $\odot \in \mathcal{F}$
R sei zweistelliges Relationssymbol $R \in P$

$\mathfrak{A}$

$F = \exists x.\forall y.R(x \odot x, y)$ $\quad G = \forall y.\exists x.R(x \odot x, y)$

1. Passende Struktur $\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \overbrace{\{+^{\mathbb{N}}\}}^{F}; \overbrace{\{=^{\mathbb{N}}\}}^{P})$ gilt für F nicht für G

- Es existiert natürliche Zahl x, sodass natürliche Zahl y gilt (F) aber nicht jede natürliche Zahl y, existiert eine natürliche Zahl x
Bsp: $x + x = y$

$F = \exists x.\forall y.R(x + x = y)$ → gilt
$G = \forall y.\exists x.R(x + x = y)$ → nicht gilt, sei $x = 3$ ⇒ kein natürliche Zahl y gilt.

2. Interpretation in beiden Formeln

$\mathfrak{A} = (\{0,1\}, \{+^{\mathbb{N}}\}, \{\leq^{\mathbb{N}}\})$

- Es existiert immer eine natürliche Zahl x sodass für alle y gilten F und G

  Bsp F : für $\mathfrak{A}$ und $\alpha: x = 0_B, y = 0_B \Rightarrow 0 + 0 \leq 0$

  $\alpha: x = 1, y = 0 \Rightarrow 1 + 1 \leq 0$

  ...

Aufgabe 3 : Semantik

1). $\models \forall x. F \rightarrow F\{t/x\}$

- wir müssen zeigen, dass für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung α gilt.

  aus $\alpha(\forall x. F) = 1$ folgt $\alpha(F\{t/x\})$

$$= \min_{a \in A} \alpha_{[t \to a]} (F\{t/x\})$$

$$= \min_{a \in A} \alpha_{[t \to a]} F \Rightarrow \alpha_{[t \to a]} F = 1$$

$\Rightarrow$ sei $\alpha(\forall x. F) = 1$ und $\alpha(F_{\{t/x\}}) = 1$

$\Rightarrow \models \forall x. F \rightarrow F\{t/x\}$

2) $x \notin \text{Frei}(F) \wedge \models F \rightarrow G$ dann gilt $\models F \rightarrow \forall x. G$

- Beweisen wir wie a

  Wir zeigen, dass für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung α gilt.

  aus $\alpha(F) = 1$ und sei $x \in \text{Frei}(F) \Rightarrow \alpha_{[x \to a]}(F) = 1$

aus der Aufgabenstellung gilt $\models F \rightarrow G$, da $\alpha_{[x \to a]}(F) = 1$

dann muss auch gelten $\alpha_{[x \to a]} G = 1 \Rightarrow \alpha(\forall x. G) = 1$

$\Rightarrow \models F \rightarrow \forall x. G$

Aufgabe 4: Semantik

Var x , Term t (in dem y nicht vorkommt)

$$\alpha_{[y \to a]}(t\{y/x\}) = \alpha_{[x \to a]}(t)$$

1) $t = v$ ist eine Variable

i. $v = x$

$$\begin{aligned}\alpha_{[y\mapsto a]}(t\{y/x\}) &= \alpha_{[y\mapsto a]}(v\{y/x\}) \\ &= \alpha_{[y\mapsto a]}(y) \\ &= a \\ &= \alpha_{[x\mapsto a]}\{v\}\end{aligned}$$

(Sei $t = v$)