12,5 / 22

Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2022/2023**
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Hansen, D. Vogel

Übungen zur LINEAREN OPTIMIERUNG
11. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Es sei ein Lineares Programm (4)

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{U.d.N. } & Ax = c \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & c^T y \\ \text{udN } & A^T \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

1/4

mit $c \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch gegeben. Zeigen Sie, dass jeder zulässige Vektor schon eine Optimallösung ist.

Aufgabe 2 Es seien die linearen Probleme (2+2+2+2)

6,5/8

$$\begin{aligned} \max\ & z = c^T x \\ \text{U.d.N. } & Ax \leq b \end{aligned} \tag{P_1}$$

und

$$\begin{aligned} \min\ & z = c^T x \\ \text{U.d.N. } & Ax \geq b \end{aligned} \tag{P_2}$$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie die dualen Probleme.

(ii) Es seien beide Probleme zulässig und eines der beiden besitze eine endliche optimale Lösung, dann besitzt das andere Problem auch eine endliche optimale Lösung.

(iii) Es seien beide Probleme zulässig. Zeigen Sie das erste Problem ist nach oben unbeschränkt, genau dann wenn das zweite Problem nach unten unbeschränkt ist.

(iv) Angenommen beide Probleme hätten eine endliche optimale Lösung. Sei x zulässig für das erste Problem und $\hat{x}$ zulässig für das zweite. Zeigen Sie:

$$c^T x \leq c^T \hat{x}.$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie, ohne Berechnung der Optimallösung, eine realistische untere Schranke für den Optimalwert des Linearen Programms (4)

0 /4

$$\begin{aligned} \min\ z &= c^\mathsf{T} x \\ \text{U.d.N. } Ax &\geq b \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

indem Sie die zulässigen Basislösungen des dualen Problems berechnen.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie das duale Lineare Programm zu (6)

5 /6

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{U.d.N. } 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 &\geq 23 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

indem Sie es zunächst in kanonische Form umformen und zeigen Sie, dass das duale Problem des dualen Problems wieder dem primalen Problem entspricht.

Abgabe: Dienstag, 24.01.23, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{u.d.N} & Ax = c \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{l} c \in \mathbb{R}^n \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{symmetrie} \end{array}$$

- jede zulässige Vektor $(x \geq 0)$ eine Optimallösung ist wenn das Lineare Programm eine Lösung hat
- A sei symmetrie, ist A auch positiv definit $\Rightarrow$ es gibt eine eindeutige Lösung für das Gleichungssystem $Ax = c$. Da $x \geq 0$ eine zulässige Lösung ist, ist dies auch optimale Lösung.

Aufgabe 2

(i)

(P_1)

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{u.d.N} & Ax \leq b \end{array}$$

Für die erste Problem : Maximierung

$\rightarrow$ in kanonische Form umformen

$$\begin{array}{ll} -\min & z' = -c^T x \\ \text{u.d.N} & -Ax \geq -b \end{array}$$

$\rightarrow$ dual Problem

$$\begin{array}{ll} -\max & w' = -b^T y \\ \text{u.d.N} & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$\rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \min & w = b^T y \\ \text{u.d.N} = & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(P_2)

$$\begin{array}{ll} \min & z = c^T x \\ \text{u.d.N} & Ax \leq b \end{array}$$

Minimierung Problem

(P_2) ist schon in kanonische Form

$\longrightarrow$ dual Problem

$$\begin{array}{ll} \max & w = b^T y \\ \text{u.d.N} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(ii) Es seien beide Probleme zulässig und eines der beiden besitze eine endliche optimale Lösung, dann besitzt das andere Problem auch eine endliche optimale Lösung.

Annahme: besitzt (P_1) eine endliche Optimallösung
Seien x_1 in (P_1) optimal
y_1 in (D_1) auch optimal

$\longrightarrow$ Wegen der starken Dualität besitzt in (D_1) auch eine endliche Opt. Lösung

D_1 ist zulässig. Die Nebenbedingungen von (D_1) und (D_2) sind äquivalent $\Rightarrow$ D_2 ist zulässig
$\Rightarrow$ P_2 ist beschränkt und zulässig
$\Rightarrow$ P_2 besitzt eine endliche Optimallössung $\square$

(iii) Es seien beide Probleme zulässig. Zeigen Sie das erste Problem ist nach oben unbeschränkt, genau dann wenn das zweite Problem nach unten unbeschränkt ist.

- (P_1) ist nach oben unbeschränkt $\overset{(6.9)}{\Rightarrow}$ D_1 ist unzulässig
- Die zulässigen Menge der dualen Probleme identisch sind. ist damit auch (D_2) unzulässig $\rightarrow$ P_2 ist unzulässig, unbeschränkt

(iv) Angenommen beide Probleme hätten eine endliche optimale Lösung. Sei x zulässig für das erste Problem und $\hat{x}$ zulässig für das zweite. Zeigen Sie:

$$c^T x \leq c^T \hat{x}.$$

Nach der starken Dualität $\Rightarrow$ die dualen Probleme haben eine eine endliche optimale Lösung. Die dualen Probleme sind zulässig
y sei zulässige Punkt von (D_1) und (D_2) $\Rightarrow$ $c^T\hat{x} \geq b^T y$
$b^T y \geq c^T x$
$\rightarrow$ $c^T x \leq c^T \hat{x}$

Aufgabe 3

$$\min \quad z = 5x_1 + 8x_2 + 1x_3$$

$$\begin{aligned}
\text{U.d.N} \quad -x_1 - x_2 - x_3 &\geq 1 \\
2x_1 - x_2 - x_3 &\geq 1 \\
3x_2 + 2x_3 &\geq 0 \\
2x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\
x_{1,2,3,} &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\min z = c^\mathsf{T} x$$

$$\text{U.d.N. } Ax \geq b$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 4:

$$\begin{aligned} \max \ z &= 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{U.d.N. } 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 &\geq 23 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ in kanonische Form

$$\begin{array}{ll} -\min & -z = -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \\ \text{U.d.N} & 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 \geq 11 \\ & 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 \leq 11 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 \geq 23 \\ & 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ & x_{1,2} \geq 0,\ x_3 \leq 0 \quad x_4 \text{ frei} \end{array}$$

Sei $x_3 \leq 0 \Rightarrow x_3' = -x_3,\ x_3' \geq 0$

x_4 frei $\Rightarrow x_4 = x_4' - x_4''$; $x_4', x_4'' \geq 0$

Setzen in (P)

$$\begin{array}{ll} -\min & -z = -6x_1 + 3x_2 - 2x_3' - 5x_4' + 5x_4'' \\ \text{U.d.N} & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 7x_4' - 7x_4'' \geq 11 \\ & -4x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 7x_4 + 7x_4'' \geq -11 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 6x_4' - 6x_4'' \geq 23 \\ & -7x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4' + 2x_4'' \geq -12 \\ & x_{1,2} \geq 0,\ x_3' \geq 0,\ x_4' \geq 0,\ x_4'' \geq 0 \end{array}$$

$\rightarrow$ Dualisieren (P) in (D):

$$\begin{array}{l} -\max \ w = 11y_1 - 11y_2 + 23y_3 - 12y_4 \\ 4y_1 - 4y_2 + 3y_3 - 7y_4 \leq -6 \\ 3y_1 - 3y_2 + 2y_3 - 4y_4 \leq 3 \\ 8y_1 - 8y_2 - 7y_3 + 3y_4 \leq -2 \\ 7y_1 - 7y_2 + 6y_3 + 2y_4 \leq -5 \\ -7y_1 + 7y_2 - 6y_3 + 2y_4 \leq 5 \\ y_{1,2,3,4} \geq 0 \end{array}$$

$\rightarrow$ (D) in kanonische Form

$$\begin{array}{l} \min \ w' = -11y_1 + 11y_2 - 23y_3 + 12y_4 \\ -4y_1 + 4y_2 - 3y_3 + 7y_4 \geq 6 \\ -3y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 4y_4 \geq -3 \\ -8y_1 + 8y_2 + 7y_3 - 3y_4 \geq 2 \\ -7y_1 + 7y_2 - 6y_3 - 2y_4 \geq 5 \\ 7y_1 - 7y_2 + 6y_3 - 2y_4 \geq -5 \\ y_{1,2,3,4} \geq 0 \end{array}$$

$\rightarrow$ (D) in (P)

$$\begin{array}{l} \max \ z' = 6x_1 - 3x_2 + 2x_3' + 5x_4' - 5x_4'' \\ -4x_1 - 3x_2 - 8x_3' - 7x_4' + 7x_4'' \leq -11 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3' + 7x_4' + 7x_4'' \leq 11 \\ -3x_1 - 2x_2 + 7x_3' - 6x_4' + 6x_4'' \leq -23 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3' - 2x_4' - 2x_4'' \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3', x_4', x_4'' \geq 0 \end{array}$$

$\rightarrow \quad x_3' = -x_3 \quad x_3 \leq 0 \;,\; x_4 = x_4' - x_4''$

$$\max z' = 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4$$
$$4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x \geqslant 11$$
$$4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 \leqslant 11$$
$$-3x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 6x_4 \leqslant -23$$
$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 12$$
$$x_1 . x_2 \geqslant 0 \;,\; x_3 \leqslant 0 \;,\; x_4 \text{ frei}$$

$\rightarrow$

$$\max z' = 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 7x = 11$$
$$3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 \geqslant 23$$
$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 12$$
$$x_1 . x_2 \geqslant 0 \;,\; x_3 \leqslant 0 \;,\; x_4 \text{ frei}$$