

Übungen zur LINEAREN OPTIMIERUNG  
10. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1** Betrachten Sie das Lineare Programm (6)

$$\begin{aligned} \min z &= -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{U.d.N. } &\frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ &\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ &x_1 + x_7 = 1 \\ &x_1, \dots, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

mit der Startbasis bestehend aus  $\{x_5, x_6, x_7\}$ . Zeigen Sie, dass das Simplex-(Tableau-)Verfahren bei der Lösung dieses Problems einen Zyklus durchläuft, wenn als Auswahlkriterium für die eintretende Variable die in der Vorlesung eingeführte Regel von Dantzig benutzt wird, also  $\hat{c}_t = \min\{\hat{c}_j : \hat{c}_j < 0\}$ . (Tritt das Minimum beim Ratio-Test in mehreren Indizes auf, wird der kleinste Index gewählt.)

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie die Optimallösung des Linearen Programms aus Aufgabe 1 mit (5) dem Simplex-Tableau-Verfahren, indem Sie dieses Mal Bland's Rule verwenden.

**Aufgabe 3** Gegeben sei ein LP in Standardform: (4+3)

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ \text{U.d.N. } &Ax = b \\ &x \geq 0, \end{aligned}$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Besitzt das LP genau eine Gleichungsnebenbedingung, dann kann es mit der Regel von Dantzig zu keinem Zyklus kommen. (Hinweis: Zeigen Sie, dass die reduzierten Kosten auf allen schon durchlaufenen Basen monoton wachsen sind.)
- (ii) Ist  $n = 2$ , dann kann es mit der Regel von Dantzig zu keinem Zyklus kommen.

**Abgabe:** Dienstag, 17.01.23, vor der Vorlesung.

# Aufgabe 1

$$\min z = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4$$

$$\text{U.d.N. } \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 = 0$$

$$x_1 + x_7 = 1$$

$$x_1, \dots, x_7 \geq 0$$

$$C^T = (-10, 57, 9, 24)$$

Tableau Tabelle

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
I	-z	-10	57	9	24	0	0	0
II	$x_5$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0
III	$x_c$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0
IV	$x_7$	1	0	0	0	0	0	1



kleinste Wert = -10  $\Rightarrow x_1$  tritt in Basis ein

Quotient kriterium  $\min \left\{ \frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{0}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x_5$  tritt aus

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
$I + 10 II \rightarrow$	-z	0	-53	-41	204	20	0	0
	$x_1$	1	-11	-5	18	2	0	0
$III - \frac{1}{2} II$	$x_c$	0	4	2	-8	-1	1	0
$III - II$	$x_7$	0	11	5	-18	-2	0	1

kleinste Wert = -53  $\Rightarrow x_2$  tritt in Basis ein

Quotient kriterium  $\min \left\{ \frac{0}{4}, \frac{1}{11} \right\} = \frac{0}{4} \Rightarrow x_6$  tritt aus

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
$I + 53 III$	-z	0	0	$-\frac{29}{2}$	98	$\frac{27}{4}$	$\frac{53}{4}$	0
$II + 11 III$	$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
	$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$IV - 11 III$	$x_7$	0	0	$-\frac{11}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$	1

kleinste Wert =  $-\frac{29}{2}$   $\Rightarrow x_3$  tritt in Basis ein

Quotient kriterium  $\min \left\{ \frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{2}} \right\} = \frac{0}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x_1$  tritt aus

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
$I + \frac{29}{2} II$	-z	29	0	0	-18	-15	93	0
	$x_3$	2	0	1	-8	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$III - \frac{1}{2} II$	$x_2$	-1	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0
$IV + \frac{1}{2} II$	$x_7$	1	0	0	0	0	1	1

kleinste Wert = -18  $\Rightarrow x_4$  tritt in Basis ein

Quotient kriterium  $\min \left\{ \frac{0}{2} \right\} = 0 \Rightarrow x_2$  tritt aus

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
$I + 18 III$	-z	20	9	0	0	$-2\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$	0
$II + 8 III$	$x_3$	-2	4	1	0	1/2	$-\frac{9}{2}$	0
	$x_4$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0
	$x_7$	1	0	0	0	0	1	1

kleinste Wert =  $-2\frac{1}{2}$   $\Rightarrow x_5$  tritt in Basis ein

Quotient kriterium  $\min \left\{ \frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{4}} \right\} = 0 \Rightarrow x_1$  tritt aus

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
$I + \frac{21}{2} II$	-z	-22	93	21	0	0	-24	0
	$x_5$	-4	8	2	0	1	-9	0
$III - \frac{1}{4} II$	$x_4$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0
	$x_7$	1	0	0	0	0	1	1

kleinste Wert = -24  $\Rightarrow x_6$  tritt in Basis ein

Quotient kriterium  $\min \left\{ \frac{0}{1} \right\} = 0 \Rightarrow x_4$  tritt aus

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
$I + 24 III$	-z	-10	57	9	24	0	0	0
$II + 9 III$	$x_5$	1/2	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0
	$x_4$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0
	$x_7$	1	0	0	0	0	1	1

$\Rightarrow$  Zyklus  
- durchläuft  $\oplus$

# Aufgabe 2: Band's rule

$$\min z = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4$$

$$\text{U.d.N. } \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 = 0$$

$$x_1 + x_7 = 1$$

$$x_1, \dots, x_7 \geq 0$$

Tableau Tabelle

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
I	-z	-10	57	9	24	0	0	0
II	$x_5$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0
III	$x_c$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{2}$	1	0	1	0
IV	$x_7$	1	0	0	0	0	0	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
I + 10 II $\rightarrow$	-z	0	-53	-41	204	20	0	0
	$x_1$	1	-11	-5	18	2	0	0
III - $\frac{1}{2}$ II	$x_c$	0	4	2	-8	-1	1	0
IV - II	$x_7$	0	11	5	-18	-2	0	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
-z	0	0	$-\frac{29}{2}$	98	$\frac{27}{4}$	$\frac{53}{4}$	0	0
	$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	0
	$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$	0
	$x_7$	0	0	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
-z	29	0	0	-18	-15	93	0	0
	$x_3$	2	0	1	-8	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	0
	$x_2$	-1	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0
	$x_7$	1	0	0	0	0	0	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
-z	20	9	0	0	$-\frac{21}{2}$	$\frac{141}{2}$	0	0
	$x_3$	-2	4	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0
	$x_4$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0
	$x_7$	1	0	0	0	0	1	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
$\text{I} + \frac{21}{2} \text{II}$	-z	-22	93	21	0	0	-24	0
	$x_5$	-4	8	2	0	1	-9	0
$\text{III} - \frac{1}{4} \text{II}$	$x_4$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0
	$x_7$	1	0	0	0	0	1	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
-z	0	27	-1	44	0	20	0	0
	$x_5$	0	-4	-1	8	1	-1	0
	$x_4$	1	-3	-2	2	0	2	0
	$x_7$	0	3	$\boxed{1}$	-2	0	-2	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	R
-z	0	30	0	42	0	18	1	1
	$x_5$	0	2	0	4	1	-5	2
	$x_4$	1	0	0	0	0	1	1
	$x_3$	0	3	1	-2	0	-2	1

Optimale Basis = {  $x_5, x_1, x_3$  } mit  $z = -1$

Optimallösung  $\hat{x} = \{ 1, 0, 1, 0, 2 \}$