Logik Prof. Dr. H. Peter Gumm
Wintersemester 22/23

Übungszettel 10

Abgabetermin: 14. Januar 2022, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

Aufgabe 1 (Signatur)**.** Geben Sie zu der folgenden prädikatenlogischen Formel die zugehörige Signatur Σ mit den entsprechenden Stelligkeiten an:

Prädikat

$\Sigma = (F, R)$

$= \; f, g,$

$$\exists y.\forall x.(\forall y.z > x \to a(f, g(y))).$$

Funktion f, g

Prädikat $>, a$

(1 Punkt)

Aufgabe 2 (Formelhierarchie)**.** Stellen Sie die folgende prädikatenlogische Formel als Baum dar, wobei die atomaren Formeln die Blätter darstellen.

$\forall x.\exists y.(R(g(x), c) \longleftrightarrow \neg S(f(y, d))) \longrightarrow \neg(\exists y.((\forall x.R(d, g(x)) \to R(c, f(y, x))) \to S(g(y)))).$

(2 Punkte)

Aufgabe 3 (Kurzschreibweisen)**.** Wir haben Kurzschreibweisen mit „bedingten Quantoren" kennengelernt. Ein Beispiel ist die sogenannte Goldbachsche Vermutung, dass jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann (siehe z.B. Wikipedia):

$x + y$

$$\forall_{x>2,\, gerade}.\exists_{p,q\, prim}.p + q = x.$$

(a) Expandieren sie die bedingten Quantoren in diesem Beispiel, so dass die entstandene Formel der in der Vorlesung benutzen Standardsyntax (s. Folie 20) genügt. Benutzen Sie die Signatur mit $\Sigma = (\{+\}; \{=, gerade, prim\})$ mit Stelligkeiten $(2; 2, 1, 1)$.

(b) Mit den folgenden Äquivalenzen kann man Negationen über Quantoren hinweg nach innen ziehen: $\neg\forall x.F \equiv \exists x.\neg F$ und $\neg\exists x.F \equiv \forall x.\neg F$. Zeigen Sie, dass diese Äquivalenzen sich auch auf bedingte Quantoren fortsetzen. Es genügt, wenn Sie dies anhand des folgenden Beispiels ausführlich nachrechnen:

$$\neg\forall_{x\, gerade}.\exists_{p,q\, prim}.p + q = x \equiv \exists_{x\, gerade}.\forall_{p,q\, prim}.p + q \neq x$$

(1+2 Punkte)

Aufgabe 4 (Eindeutige Existenz)**.** $\exists!\, x.\, P(x)$ soll bedeuten: „Es existiert genau ein x mit $P(x)$. Oft benutzt man diesen Quantor auch in der bedingten Version, wie z.B. in der Formel $\exists!_{x\geq 0}.x * x = 1$.

! genau 1

(a) Expandieren sie diese Formel gemäß der Syntax von Folie 20, und schreiben Sie anschließend das Ergebnis mit Hilfe der Kurzschreibweise der vorigen Aufgabe.
Hinweis: „Es *existiert genau ein* x mit $P(x)$" bedeutet, dass
   i) ein x mit $P(x)$ existiert und
   ii) für jedes jedes (andere) x' mit $P(x')$ folgt, dass $x = x'$ ist.

(b) Negieren Sie die in (a) gewonnene Formel, ziehen Sie dann wie oben gezeigt die Negation nach innen und schreiben Sie das Ergebnis wieder mit Hilfe bedingter Quantoren auf.

(4 Punkte)

Aufgabe 5 (Semantik)**.** Lösen Sie die Aufgaben Create-Model(I-III) im Iltis-System der Uni Dortmund. Als Lösung gilt jeweils ein Screenshot Ihres Modells, das die angegebene Formel erfüllt.

(6 Punkte)

$\exists x_1.\exists x_2.\exists x_3.(E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_1)$
$\wedge R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge R(x_3)$
$\wedge \neg ((x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_3) \vee (x_2 = x_3)))$
$\wedge \quad \neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3)$
$x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \quad x_2 \neq x_3$ $\Rightarrow x_1 \neq x_2 \neq x_3$

$\exists x.\exists y_1.\exists y_2.\exists y_3 (E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge E(x, y_3)$
$\wedge R(x) \wedge \forall y(E(x,y) \to B(y))$
$\wedge \neg ((y_1 = y_2) \vee (y_1 = y_2) \vee (y_2 = y_3))) \wedge \forall x. \neg (E(x,x))$

$\exists x_1.\exists x_2.\exists x_3.(E(x_1, x_2)$

Terme : z, x, y, a

Aufgabe 1:

Aufgabe 1 (Signatur). Geben Sie zu der folgenden prädikatenlogischen Formel die zugehörige Signatur Σ mit den entsprechenden Stelligkeiten an:

$$\exists y.\forall x.(\forall y.z > x \rightarrow a(f, g(y))).$$

f sei Funktion (Terme)

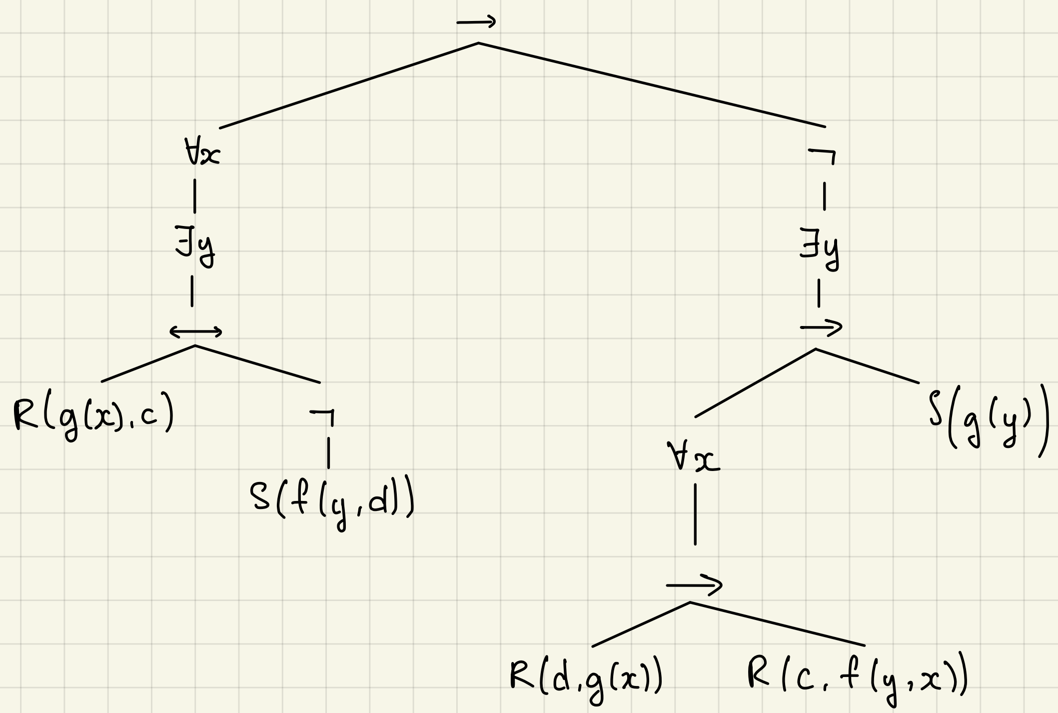
- Die folgenden prädikatenlogischen Formel haben die Signatur $\Sigma = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$

$\mathcal{F}$ sei Funktion : f, g
P sei Prädikat : $>, a$

$\Rightarrow \quad \Sigma = (f, g \; ; >, a)$ mit Stelligkeiten $(0, 1 ; 2, 2)$

Aufgabe 2:

Aufgabe 2 (Formelhierarchie). Stellen Sie die folgende prädikatenlogische Formel als Baum dar, wobei die atomaren Formeln die Blätter darstellen.
$\forall x.\exists y.(R(g(x), c) \longleftrightarrow \neg S(f(y, d))) \longrightarrow \neg(\exists y.((\forall x.R(d, g(x)) \rightarrow R(c, f(y, x))) \rightarrow S(g(y))))$.



Aufgabe 3

$$\forall_{x>2,\, gerade}.\exists_{p,q\, prim}.p + q = x.$$

(a) Expandieren sie die bedingten Quantoren in diesem Beispiel, so dass die entstandene Formel der in der Vorlesung benutzen Standardsyntax (s. Folie 20) genügt. Benutzen Sie die Signatur mit $\Sigma = (\{+\}; \{=, gerade, prim\})$ mit Stelligkeiten $(2; 2, 1, 1)$.

a)

$\Sigma = (\{+\} ; \{=, gerade, prim\})$ Stelligkeiten $(2; 2, 1, 1)$

$\forall x.((\neg(x=0) \wedge \neg(x=1) \wedge \neg(x=2)) \wedge gerade(x) \longrightarrow \exists p.\exists q(prim(p) \wedge prim(q) \wedge$
$p + q = x))$

b, $\neg\forall_{x\, gerade}.\exists_{p,q\, prim}.p+q=x \equiv \exists_{x\, gerade}.\forall_{p,q\, prim}.p+q\neq x$

$\neg\forall x.F \equiv \exists x.\neg F$ und $\neg\exists x.F \equiv \forall x.\neg F$.

$\neg\forall_{x\ gerade} . \exists_{p,q\ prim} . \ p+q = x$

$\equiv \neg\forall x . (gerade(x) \rightarrow \exists p.(prim(p) \wedge \exists q.(prim(q) \wedge p+q=x)))$

$\equiv \exists x . \neg(gerade(x) \rightarrow \exists p.(prim(p) \wedge \exists q.(prim(q) \wedge p+q=x)))$

$(A \rightarrow B) = \neg A \vee B \Rightarrow \neg(A \rightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) = A \wedge \neg B$

$\equiv \exists x . (gerade(x) \wedge \neg\exists p.(prim(p) \wedge \exists q.(prim(q) \wedge p+q=x)))$

$\equiv \exists x . (gerade(x) \wedge \forall p. \neg(prim(p) \wedge \exists q.(prim(q) \wedge p+q=x)))$

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B = A \rightarrow \neg B$

$\equiv \exists x . (gerade(x) \wedge \forall p . (prim(p) \rightarrow \neg\exists q(prim(q) \wedge p+q=x)))$

$\equiv \exists x . (gerade(x) \wedge \forall p . (prim(p) \rightarrow \forall q . \neg(prim(q) \wedge p+q=x)))$

$\equiv \exists x . (gerade(x) \wedge \forall p . (prim(p) \rightarrow \forall q . (prim(q) \rightarrow \neg(p+q=x))))$

$\equiv \exists_{x\ gerade} . \forall_{p,q\ prim} . \ p+q \neq x$

Aufgabe 4 Eindeutige Existenz

$\exists! x . P(x)$

$\exists!_{x\geq 0} . \ x.x = 1$

i) Es existiert 1 x mit $P(x)$

ii) Für andere x' mit $P(x')$ folgt dass $x = x'$

a, $\exists x . (P(x) \wedge \forall x' (P(x') \rightarrow x' = x))$

$\exists_x . P(x) . \forall_{x'} . P(x') . x' = x$ (Kurzschreibweise)

b, Negiere

$\neg\exists x . (x \geq 0 \wedge x.x = 1 \wedge \forall x' . (x' \geq 0 \wedge x'.x' = 1 \rightarrow x' = x))$

$\equiv \forall x . \neg(x \geq 0 \wedge x.x = 1 \wedge \forall x' . (x' \geq 0 \wedge x'.x' = 1 \rightarrow x' = x))$

$\equiv \forall x . (x \geq 0 \wedge x.x = 1 \rightarrow \neg\forall x' (x' \geq 0 \wedge x'.x' = 1 \rightarrow x' = x))$

$\equiv \forall x . (x \geq 0 \wedge x.x = 1 \rightarrow \exists x' . \neg(x' \geq 0 \wedge x'.x' = 1 \rightarrow x' = x))$

$\equiv \forall x . (x \geq 0 \wedge x.x = 1 \rightarrow \exists x' . (x' \geq 0 \wedge x'.x' = 1 \wedge \neg(x' = x))$

$\equiv \forall_{x\geq 0} . \ x.x = 1 \rightarrow \exists_{x'\geq 0} . \ x'.x' = 1 \wedge x \neq x'$