Philipps-Universität Marburg **Wintersemester 2022/2023**
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Hansen, D. Vogel

Übungen zur Vorlesung Lineare Optimierung
Probeaufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe 1 Skizzieren Sie die durch $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ mit (2*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegebene zulässige Menge.

Aufgabe 2 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ m < n$ mit vollem Rang gegeben. Geben Sie die Definitionen des Nullraums $\mathcal{N}(A)$ und des Bildraums $\mathcal{R}(A^\top)$ an. In welcher Beziehung stehen diese beiden Räume zueinander und lässt sich jeder beliebige Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ durch Elemente aus Nullraum und Bildraum darstellen? (2*)

Aufgabe 3 Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere und konvexe Menge. Wie ist der Rezessionskegel S^∞ definiert? (1*)

$S^\infty = (A(x + \gamma d) < b,\ x \in \mathbb{R}^n, x \geqslant 0,\ r > 0)$

Aufgabe 4 Lösen Sie das Lineare Programm (3*)

$$\begin{array}{lrl} \min & z = -5x_1 - 3x_2 & \\ \text{U.d.N.} & x_1 + 2x_2 & \leq 14 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \leq 18 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq 10 \\ & 2x_1 - 4x_2 & \leq 5 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

mit dem Simplex-Tableau-Verfahren.

Aufgabe 4 Lösen Sie das Lineare Programm

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -5x_1 - 3x_2 \\ \text{U.d.N.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

mit dem Simplex-Tableau-Verfahren.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -5x_1 - 3x_2 \\ \text{U.d.N} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{SF} \quad \begin{aligned} \min \quad & z = -5x_1 - 3x_2 \\ \text{U.d.N} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 14 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_2 = 18 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_3 = 10 \\ & 2x_1 - 4x_2 + s_4 = 5 \\ & x_1, \dots s_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} c_N^T &= (-5 \quad -3) \\ c_B^T &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

$$y^T = c_B^T \cdot N = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = (-5 \quad -3) - (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = (-5 \quad -3)$$

$\hookrightarrow \min \{ c_j : c_j < 0 \} = -5 \Rightarrow x_1$ tritt in Basis ein

Um die auszutretende zu wählen

$$\hat{A}_1 = B^{-1} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\min \left\{ \frac{\hat{b_i}}{\hat{a_{it}}} : \hat{a_{it}} > 0 \right\} = \min \left(\frac{14}{1}, \frac{18}{3}, \frac{5}{2} \right) = 2{,}5 \Rightarrow s_4$ verlässt Basis

$\Rightarrow \quad B = \{ s_1, s_2, s_3, x_1 \} \qquad N = \{ s_4, x_2 \}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow c_N^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$y^T = c_B^T \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N =$$

Aufgabe 5 Das Lineare Programm (4*)

$$\begin{array}{lrl} \min & z = -101x_1 + 87x_2 + 23x_3 & \\ \text{U.d.N.} & 6x_1 - 13x_2 - 3x_3 & \leq 11 \\ & 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 & \leq 45 \\ & x_1 + 5x_2 + x_3 & \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

$z = -101x_1 + 87x_2 + 23x_3$
$6x_1 - 13x_2 - 3x_3 + x_4 = 11$
$6x_1 + 11x_2 + 2x_3 + x_5 = 45$
$x_1 + 5x_2 + x_3 + x_6 = 12$
$x_1 \dots x_6 \geqslant 0$

hat die durch das Tableau

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
$-z$	0	0	0	12	4	5	372
x_1	1	0	0	1	-2	7	5
x_2	0	1	0	-4	9	-30	1
x_3	0	0	1	19	-43	144	2

gegebene Optimallösung. Bestimmen Sie die Optimallösung des Linearen Programms, das entsteht, indem der zweite Eintrag der rechten Seite um 15 verkleinert wird.

Aufgabe 6 (4*)

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Definition eines globalen Minimierers von f an.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \leq -1, \\ 1 - |x|, & -1 < x < 1 \\ |x-1|, & x \geq 1 \end{cases}$$

Wie viele globale sowie lokale Maximierer bzw. Minimierer besitzt f? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g := (f_1 + f_2) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

konvex ist.

Seien f_1, f_2 konvex $\Rightarrow$ $\forall \lambda \in R$, $0 \leq \lambda \leq 1$

Um $g = (f_1 + f_2)$, $g : \mathbb{R}^n \to R$ konvex zu zeigen $\to$ wir zeigen

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$ gilt

Seien x, y $\in g \Rightarrow$ z.z.: $\underline{g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)}$

Aufgabe 7 Es sei ein lineares Programm (P) in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ gegeben durch: (4*)

$$\begin{array}{rrl} \min & q^T y & \\ \text{U.d.N.:} & Wy + Tx & = h \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

wobei $q, y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $W \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$, $T \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ und $h \in \mathbb{R}^m$.

(i) Leiten Sie das entsprechende duale Problem (D) für ein beliebig fixiertes x her. Bezeichnen Sie die dualen Variablen mit dem Buchstaben π.

(ii) Es definiere die Funktion $\sigma : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}$ den Optimalwert von (P). Unter welchen Bedingungen gilt die Beziehung

$$\sigma(x) = \max\{\pi^T(h - Tx) | W^T \pi \leq q\}?$$

Wann gilt die Beziehung $\sigma(x) \geq \max\{\pi^T(h - Tx) | W^T \pi \leq q\}$?

(iii) Kann (P) oder (D) unendlich viele zulässige Basislösungen besitzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iv) Es sei angenommen, dass (P) zulässig ist. Nehmen Sie dazu an, dass die Menge

$$\Pi := \{\pi \in \mathbb{R}^m : W^T \pi \leq q\}$$

nichtleer und beschränkt ist. Bestimmen Sie den Rezessionskegel zu Π und begründen Sie die Existenz endlich vieler, dual zulässiger Punkte π_i $i = 1, \dots, L$, so dass gilt

$$\sigma(x) = \max_{1 \leq j \leq L} \{\pi_j^T (h - Tx)\}$$

Hinweis I: Dieser Zettel dient zur Klausurvorbereitung. Benötigen Sie für die Klausurzulassung noch weitere Punkte, so wird dieser Zettel als Bonuszettel gewertet. In diesem Fall findet die Abgabe am Dienstag, 07.02.23, vor der Vorlesung, statt.

Hinweis II: Der Umfang der Probeaufgaben und die Punkteverteilung muss nicht repräsentativ für die Klausur sein.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 Skizzieren Sie die durch $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegebene zulässige Menge.

$M = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sei $Ax \leq b$ $\Rightarrow$

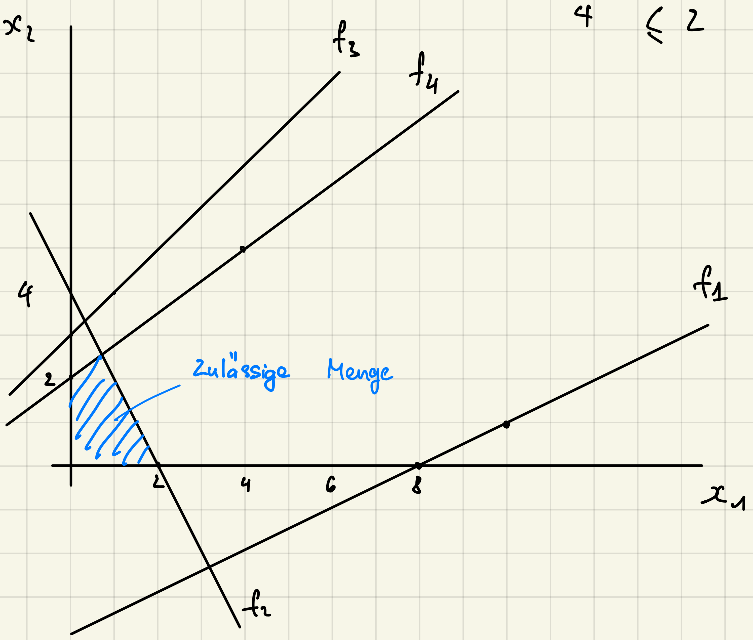
$$f_1: \quad x_1 - 2x_2 \leq 4$$
$$2x_2 \leq x_1 - 4$$
$$x_2 \leq \frac{1}{2} x_1 - 4$$

$$f_2: \quad 2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_2 \leq 4 - 2x_1$$

$$f_3: \quad -x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_2 \leq 3 + x_1$$

$$f_4: \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 4 + x_1$$
$$x_2 \leq 2 + \frac{1}{2} x_1$$

$$4 \leq 2 \quad \frac{1}{2} \cdot 4$$



Aufgabe 2

Aufgabe 2 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ m < n$ mit vollem Rang gegeben. Geben Sie die Definitionen des Nullraums $\mathcal{N}(A)$ und des Bildraums $\mathcal{R}(A^\intercal)$ an. In welcher Beziehung stehen diese beiden Räume zueinander und lässt sich jeder beliebige Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ durch Elemente aus Nullraum und Bildraum darstellen? (2*)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad m < n \quad$ mit vollen Rang

Nullraums $\mathcal{N}(A)$:

(iii) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g := (f_1 + f_2) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

konvex ist.

$g = (f_1 + f_2) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex

Zu zeigen g ist konvex, wir müssen zeigen $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$

$g(\lambda x + 1 - \lambda y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$

Wir stellen zuerst fest, dass die Summe zweier konvexer Funktionen auch konvex ist.

$f1$ konvex $\Rightarrow f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)$
f_2 konvex $\Rightarrow f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)$

Addiere die Ungleichungen

$$f1(\lambda(x) + (1-\lambda)y) + f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y) + \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)$$
$$\leq \lambda(f1(x) + f_2(x)) + (1-\lambda)(f_1(y) + f_2(y))$$

da $g = f1 + f_2 \Rightarrow g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda(g(x)) + (1-\lambda)(g(y))$
$\leq \lambda(f_1(x) + f_2(x)) + \ldots$

$\rightarrow g = f_1 + f_2$ konvex

Aufgabe 7

$\min \quad q^T y$