

Aufgabe 1:

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2 Phasen - Methoden und Simplex - Methode

in Standardform

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Führe 2 künstliche Variablen $\Rightarrow \min z' = x_5 + x_6$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$c = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$$

$$B = \{5, 6\} \quad N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$c_B^T = (1, 1)$$

$$c_N^T = (0, 0, 0, 0)$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 1)$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_N^T &= c_N^T - y^T \cdot N = (0, 0, 0, 0) - (1, 1) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, 0, 0) - (1, 2, 3, -1) \\ &= (-1, -2, -3, 1) \end{aligned}$$

$$\hat{c}_t = \min_{\{1, 2, 3, 4\}} \{ \hat{c}_i : c_i < 0 \} = -3$$

$\Rightarrow x_3$ tritt in Basis ein

Um die austretende zu wählen

$$\hat{A}_3 = B^{-1} \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quotientenkriterium $\min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{it}} : \hat{a}_{it} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{1} \right\} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x_5$ verlässt Basis

→ neue Basis $B = \{3, 6\}$ $N = \{1, 2, 5, 4\}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad C_B^T = (0, 1) \\ C_N^T = (0, 0, 1, 0)$$

$$y^T = C_B^T \cdot B^{-1} = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (-1/2 \quad 1)$$

$$\hat{C}_N^T = C_N^T - y^T \cdot N = (0, 0, 1, 0) - \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = (0, 0, 1, 0) - (-2 \quad 5/2 \quad -1/2 \quad 1/2) \\ = (2 \quad -5/2 \quad 3/2 \quad -1/2)$$

$$\hat{C}_t = \min \{ \hat{C}_j : c_j < 0 \} = -\frac{5}{2} \rightarrow x_2 \text{ tritt in Basis ein}$$

Um die austretende zu wählen

$$\hat{A}_2 = B^{-1} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Quotientenkriterium $\min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,t}} : \hat{a}_{i,t} > 0 \right\} = 2$
 $\Rightarrow x_6$ verlässt Basis ✓

→ Neue Basis $B = \{3, 2\}$ $N = \{1, 6, 5, 4\}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

alle künstliche Variable sind entfernt

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}$$

$$x = (0 \quad 7/5 \quad 18/5 \quad 0) \rightarrow \text{ZBL} \quad \checkmark$$

Aufgabe 2: 2. Phasen Methode und Tableau - Verfahren

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 \\ \text{u.d.N} \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 40 \\ & x_1, \dots, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in Standardform} \Rightarrow \min \quad & z = -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 \\ \text{u.d.N} \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 40 \\ & x_1, \dots, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Startbasis} \quad B = \{5, 6\}, \quad N = \{1, 2, 3, 4\}$$

Tableaus

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
-z	-4	-2	-8	0	0	0
x_4	2	-1	3	1	0	30
x_5	1	2	4	0	1	40

Das ist nicht das richtige Vorgehen, man löst in der 1. Phase ein Hilfs-LP mit anderer Zielfkt.

$$\text{Kleinste Wert} = -8 \Rightarrow x_3 \text{ tritt in Basis ein}$$

$$\text{Quotientenkriterium} \quad \min \left\{ \frac{30}{3}, \frac{40}{4} \right\} = 10 \Rightarrow x_4 \text{ verlässt Basis}$$

	Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
I	-z	-4	-2	-8	0	0	0
II	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
III	x_5	1	2	4	0	1	40

	Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
I + 8II	-z	$\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	0	80
	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
III - 4II	x_5	$-\frac{5}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	0

$$\Rightarrow \text{Kleinste Wert} = -\frac{14}{3} \Rightarrow x_2 \text{ tritt in Basis ein}$$

$$\text{Qk} : \min \left\{ \frac{10}{10/3} \right\} = 3$$

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
-z	$\frac{4}{3}$	$-\frac{14}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	0	80
x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	0

$$\begin{array}{l} \text{I} + \frac{14}{3} \text{III} \\ \text{II} + \frac{1}{3} \text{III} \end{array} \rightarrow$$

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
-z	-1	0	0	4/5	7/5	80
x_3	1/2	0	1	1/5	1/10	10
x_2	-1/2	1	0	-2/5	3/10	0

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
-z	-1	0	0	4/5	7/5	80
x_3	1/2	0	1	1/5	1/10	10
x_2	-1/2	1	0	-2/5	3/10	0

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
-z	0	0	2	6/5	8/5	100
x_1	1	0	2	2/5	1/2	20
x_2	0	1	1	-1/5	2/5	10

Optimallösung $\hat{x} = (20, 10, 0, 0, 0)$, $z = -100$

das ist zwar das richtige Ergebnis, aber das Vorgehen müsst ihr euch nochmal anschauen
siehe Beispiel 5.8, daher nur 3P

Aufgabe 3:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{u.d.N} \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ & -x_1 + x_2 - x_5 = 4 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir führen die künstlichen Variablen

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3 \\ \text{u.d.N} \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + a_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + a_2 = 4 \\ & -x_1 + x_2 - x_5 + a_3 = 4 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	R
-z	2	-2	-1	-2	3	M	M	M	0
a_1	-2	1	-1	-1	0	1	0	0	1
a_2	1	-1	2	1	1	0	1	0	4
a_3	-1	1	0	0	-1	0	0	1	4

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	R
I -z	2+2M	-2-M	-1-M	-2	3	0	0	0	-9M
II a_1	-2	1	-1	-1	0	1	0	0	1
III a_2	1	-1	2	1	1	0	1	0	4
IV a_3	-1	1	0	0	-1	0	0	1	4

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	R
I - (-2-M)II	-2	0	-3-2M	-4-M	3	1	0	0	2-8M
II	-2	1	-1	-1	0	1	0	0	1
III + II	-1	0	1	0	1	0	1	0	5
IV - II	1	0	1	1	-1	0	0	1	3

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	R
I + (3+2M)III	1+2M	0	0	-1+M	-2M	1	0	1	11-2M
II	-1	1	0	0	-1	1	0	0	4
a_2	-2	0	0	-1	2	0	1	0	2
x_3	1	0	1	1	-1	0	0	1	3

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	R
-z	1	0	0	-1/2	0	1	1	1	11
x_2	-2	1	0	-1/2	0	1	0	0	5
x_5	-1	0	0	-1/2	1	0	0	0	1
x_3	0	0	1	1/2	0	0	0	0	4

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	R
-z	1	0	2	0	0	1	1	1	19
x_2	-2	1	1	0	0				9
x_5	-1	0	1	0	1				5
x_4	0	0	2	1	0				8

⇒ Optimallösung $\hat{x} = (0, 9, 0, 8, 5)$

$$\min z = -19$$

sehr gut

7/7

$$15.6 \quad 1920 \times 1080 \Rightarrow \text{pd} = 0.01799$$

$$\downarrow$$

$$\text{cm } H = 19.43 \times W = 34.59$$

$$28 \quad 3840 \times 2160 \Rightarrow \text{pd} = 0.0161435 \text{ cm}$$

$$\downarrow$$

$$H = 34.87 \times W = 61.99$$

$$19.43$$

$$\frac{61.99}{19.43} = 3.19$$