

## Übungszettel 13

**Abgabetermin:** 4. Februar 2023, 18:00 Uhr. Die Abgabe erfolgt über Ihr Ilias-Tutorium.

**Aufgabe 1** (Äquivalenzumformungen). Zeigen Sie mit Hilfe der Resolventenmethode, dass

$$\forall x.(P \rightarrow Q(x)) \rightarrow P \rightarrow \forall y.Q(y)$$

gilt, falls  $x \notin \text{Free}(P)$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 2** (Pränexe Normalform, Umwandlung in Klauselmenge). Wenden Sie den Algorithmus von Martelli-Montanari schrittweise auf die folgenden Mengen von Atomen an und finden sie jeweils den *mgu* oder begründen Sie, warum ein *mgu* nicht existiert:

1.  $\{P(g(a), x, f(h(y))), P(y, f(z), f(z))\}$
2.  $\{Q(x, f(g(a)), f(x)), Q(f(a), y, y)\}$
3.  $\{R(x, g(f(a)), f(x)), R(f(y), z, y)\}$
4.  $\{S(a, x, f(g(y))), S(z, h(z, u), f(u))\}$

(4 Punkte)

**Aufgabe 3** (Sichere Substitution). Ein Prolog Programm bestehe aus den Klauseln   
 $\{\{l(e, o), \{l(c(X, Y), s(N)) \vee \neg l(Y, N)\}, \{\neg l(c(e, e), U)\}\}.$

Zeigen Sie wie mit Hilfe der Resolventenmethode die Variable  $U$  in der Zielklausel bestimmt wird. Wie in Prolog üblich, sind  $X, Y, N$  und  $U$  Variablen,  $e$  und  $o$  Konstanten und  $l$  ein Prädikatsname.

(4 Punkte)

**Aufgabe 4** (Semantik). Zeigen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die folgenden prädikatenlogischen Sequenzen:

1.  $\forall x.(S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \vdash \forall x.(S(x) \wedge \neg R(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x))$
2.  $\exists x.\forall y.P(x, y) \vdash \forall x.\exists y.P(y, x).$
3. Falls  $x \notin \text{Free}(P)$  gilt:  $\forall x.(P \rightarrow Q(x)) \vdash (P \rightarrow \forall y.Q(y)).$

(4 Punkte)

$$\{ R(x, f(a), g(f(y))), R(f(y), z, g(f(z))) \} \Rightarrow y = x$$

$$\begin{array}{l} x = f(y) \\ f(a) = z \\ g(f(y)) = g(f(z)) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x = f(y) \\ z = f(a) \\ f(y) = f(z) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = f(y) \\ z = f(a) \\ y = \underbrace{z}_{f(a)} \end{array}$$

!  $g(\underline{x}) = f(\underline{x}) \rightarrow$  nicht unifizierbar  
 $x = f(g(x)) \rightarrow$  occur check  
 $x = f(x) \rightarrow \cancel{y = x}$

$$\{\{l(e, o)\}, \{l(c(X, Y), s(N)) \vee \neg l(Y, N)\}, \{\neg l(c(e, e), U)\}\}.$$

$$l(e, o)$$

$$l$$

$$\begin{array}{c} \{A, B\} \quad \{\neg A, B\} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \{B\} \end{array}$$

$t$  term

$$A-L \quad \frac{\Delta, P(t) \vdash T}{\Delta, \forall x. P \vdash T}$$

a first

$$\frac{\Delta \vdash P(a), T}{\forall R. \Delta \vdash \forall x. P, T}$$

a first

$$\frac{\Delta, P(a) \vdash T}{\exists t. \Delta, \exists x. P \vdash T}$$

$$\frac{\Delta \vdash P(t). T}{\exists R. \Delta \vdash \exists x. P, T} \quad t\text{-term}$$

$B = B_i \quad A \text{ axiom}$ 

$$\frac{}{A(B) \vdash A(B_i), B(a)}$$

$$\frac{}{A(B), A(B_i) \vdash B(a)}$$

 $b_i = a \quad A \text{ axiom}$ 

$$\frac{}{A(B), B(B_i) \vdash B(a)}$$

$$\frac{}{A(B), A(B_i) \rightarrow B(b_i) \vdash B(a)}$$

$$\forall x. (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x. A(x), \vdash B(a)$$

$$\frac{\forall x. (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x. A(x) \vdash \forall x. B(x)}{\forall x. (\forall x. A(x) \rightarrow B(x))}$$

$$\frac{\forall x. (\forall x. A(x) \rightarrow B(x)) \vdash \forall x. A(x), \forall x. B(x)}{\forall x. (\forall x. A(x) \rightarrow B(x)) \vdash (\forall x. A(x) \vee \forall x. B(x))}$$

$$\frac{\forall x. (\forall x. A(x) \rightarrow B(x)) \vdash (\forall x. A(x) \vee \forall x. B(x))}{\vdash \forall x. (\forall x. A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x. A(x) \vee \forall x. B(x))}$$

# Aufgabe 1

## Aquivalenzumformungen

$$\begin{aligned}
 \neg f &= \neg (\forall x. (P \rightarrow Q(x)) \rightarrow P \rightarrow \forall y. Q(y)) \\
 &= \neg (\neg (\exists x. \neg (P \rightarrow Q(x)) \vee (\neg P \vee \forall y. Q(y))) \\
 &= \forall x. (\neg P \vee Q(x)) \wedge \neg (\neg P \vee \forall y. Q(y)) \\
 &= \forall x. (\neg P \vee Q(x)) \wedge (P \wedge \exists y. \neg Q(y)) \\
 &= \forall x. (\neg P \vee Q(x)) \wedge \exists y'. \left( \begin{array}{l} P_{\{y'/y\}} \wedge \neg Q(y') \\ P_{\{y'/y\}} \wedge \neg Q(y') \end{array} \right) \\
 &= \forall x. \exists y' (\neg P \vee Q(x)) \wedge (P_{\{y'/y\}} \wedge \neg Q(y')) \\
 &= \forall x. (\neg P \vee Q(x)) \wedge (P_{\{y'/y\}} \wedge \neg Q(f(x)))
 \end{aligned}$$

$$\{ \{ \neg P, Q(x) \}, \{ P \}, \{ \neg Q(f(x)) \} \}$$

$$\{ \{ \neg P, Q(f(a)) \}, \{ P \}, \{ \neg Q(f(x_1)) \} \}$$

$\{ \{ \neg P, Q(f(a)), \{ P \}, \{ \neg Q(f(x_1)) \} \} \}$   
 $\{ \{ \neg P, Q(f(a)), \{ P \}, \{ \neg Q(f(a)) \} \} \}$   
 $\{ \{ Q(f(a)) \} \rightarrow \{ \{ \} \} \rightarrow \text{nicht gilt}$   
 $\Rightarrow f \text{ gilt}$

## Aufgabe 2: Pränexform, Umwandlung in kM

Algorithmus von Martelli - Montanari

1.  $\{P(g(a), x, f(h(y))), P(y, f(z), f(z))\}$

$$\begin{array}{lcl} g(a) & = & y \\ x & = & f(z) \\ f(h(y)) & = & f(z) \end{array}$$

Ersatzung durch erste Gleichung

$$\begin{array}{lcl} y & = & g(a) \\ x & = & f(z) \\ h(y) & = & z \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} y & = & g(a) \\ x & = & f(z) \\ z & = & h(g(a)) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} y & = & g(a) \\ x & = & f(h(g(a))) \\ z & = & h(g(a)) \end{array}$$

Ergebnis ist mgu mit

$$\mu = \{ \begin{array}{l} x \mapsto f(h(g(a))) \\ y \mapsto g(a) \\ z \mapsto h(g(a)) \end{array} \}$$

3.  $\{R(x, g(f(a)), f(x)), R(f(y), z, y)\}$

$$\begin{array}{lcl} x & = & f(y) \\ g(f(a)) & = & z \\ f(x) & = & y \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x & = & f(f(x)) \\ z & = & g(f(a)) \\ y & = & f(x) \end{array}$$

↑  
nicht unifizierbar

2.  $\{Q(x, f(g(a)), f(x)), Q(f(a), y, y)\}$

$$\begin{array}{lcl} x & = & f(a) \\ f(g(a)) & = & y \\ f(x) & = & y \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x & = & f(a) \\ y & = & f(g(a)) \\ y & = & f(f(a)) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x & = & f(a) \\ y & = & f(g(a)) \\ f(g(a)) & = & f(f(a)) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x & = & f(a) \\ y & = & f(g(a)) \\ g(a) & = & f(a) \end{array} \rightarrow \text{nicht unifizierbar}$$

4.  $\{S(a, x, f(g(y))), S(z, h(z, u), f(u))\}$

$$\begin{array}{lcl} a & = & z \\ x & = & h(z, u) \\ f(g(y)) & = & f(u) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} z & = & a \\ x & = & h(a, u) \\ g(y) & = & u \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} z & = & a \\ x & = & h(a, g(y)) \\ u & = & g(y) \end{array}$$

Ergebnis ist mgu mit

$$\mu = \{ \begin{array}{l} z \mapsto a, \\ x \mapsto h(a, g(y)) \\ u \mapsto g(y) \end{array} \}$$

### Aufgabe 3

$\{\{l(e, o)\}, \{l(c(X, Y), s(N)) \cancel{\text{, }}, \neg l(Y, N)\}, \{\neg l(c(e, e), U)\}\}.$

$\{l(e, o)\}$

$\{l(c(x, y), s(N)), \neg l(y, N)\}$

$\{\neg l(c(e, e), U)\}$

$$\mu = \begin{cases} X = e, & Y = e \\ U = S(N) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\neg l(Y, N) \mu \\ &= \neg l(e, N) \end{aligned}$$

$\{l(c(x_1, y_1), s(N_1)), \neg l(y_1, N_1)\}$

$\{l(e, o)\}$

$$\mu' = \{N = o\}$$

$$\begin{aligned} &\{ \} = \neg l(e, N) \mu' \\ &= \neg l(e, o) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U = S(o)$$

$p(a, a, a)$

$p(f(u), g(f(u)), v) :- p(u, g(u), v)$

$p(a, g(Y), X) :- p(Y, a, X)$

$\vdash p(f(f(a)), g(x), z) \quad // Goal$

$p(f(u), g(f(u)), v) :- p(u, g(u), v)$

$\vdash p(f(f(a)), g(x), z)$

$$\mu = \{ u \rightarrow f(a), x \rightarrow f(u), z \rightarrow v \}$$

$p(f(a), g(f(a)), v)$

$$\mu' = \{ u = a, z = v \}$$

$p(a, g(Y), X) :- p(Y, a, X)$

$p(a, g(a), z)$

$$\mu'' = \{ Y \rightarrow a, z \leftarrow x \}$$

$p(a, a, x)$

$p(a, a, a)$

{ }

$$\mu''' = \{ x \rightarrow a \}$$

## Aufgabe 4:

$$1. \forall x.(S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \vdash \forall x.(S(x) \wedge \neg R(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x))$$

$$\frac{\text{axiom} \quad \text{axiom}}{\frac{S(a), P(a) \vdash P(a), Q(a)}{\neg R(a) \vdash \neg P(a), Q(a)}} \quad \frac{\text{axiom}}{\frac{S(a), Q(a) \vdash P(a), Q(a)}{\neg R(a) \vdash \neg Q(a), P(a)}}$$

$$\frac{\text{axiom}}{\frac{S(a) \vdash \neg P(a)}{\neg R(a) \vdash P(a), Q(a)}} \quad \frac{\text{axiom}}{\frac{S(a) \vdash \neg Q(a)}{\neg R(a) \vdash P(a), Q(a)}} \quad \frac{\text{axiom}}{\frac{S(a), R(a) \vdash R(a), P(a), Q(a)}{\neg \vdash}}$$

$$\frac{S(a), \neg R(a) \vdash \neg P(a) \wedge \neg Q(a)}{P(a), Q(a)} \quad \frac{R(a)}{S(a), \neg R(a) \vdash P(a), Q(a)}$$

$$\frac{\text{axiom}}{\frac{S(a), \neg R(a) \vdash S(a), P(a), Q(a)}{\neg P(a) \wedge \neg Q(a) \rightarrow R(a) \vdash P(a), Q(a)}}$$

$$\frac{\text{---} L}{\frac{S(a) \rightarrow (\neg P(a) \wedge \neg Q(a) \rightarrow R(a)) \quad S(a), \neg R(a)}{\vdash P(a), Q(a)}}$$

$$\frac{\forall x \ (S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \quad S(a) \wedge \neg R(a)}{\vdash P(a), Q(a)}$$

$$\frac{\forall x \ (S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \quad S(a) \wedge \neg R(a)}{\vdash P(a) \vee Q(a)}$$

$$\frac{\forall x \ (S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \quad S(a) \wedge \neg R(a)}{\vdash S(a) \wedge \neg R(a) \rightarrow P(a) \vee Q(a)}$$

$$\frac{\forall x. \ (S(x) \rightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))) \quad \forall x. \ (S(x) \wedge \neg R(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x))}{\vdash}$$

a frisch

2.  $\exists x. \forall y. P(x, y) \vdash \forall x. \exists y. P(y, x).$

$$\underline{P(a, b)} \vdash P(a, b) \quad \text{wähle } y = a \quad \exists\text{-R}$$

$$\underline{P(a, b)} \vdash \exists y. P(y, b) \quad \text{setze } b \text{ für ein } y \quad \forall\text{-L}$$

$$\underset{a \text{ frisch}}{\underline{\forall y. P(a, y)}} \vdash \exists y. P(y, b) \quad \underset{b \text{ frisch}}{\underline{\exists\text{-L}}} \quad \forall\text{-R}$$

$$\underline{\exists x. \forall y. P(x, y)} \vdash \underline{\forall x. \exists y. P(y, x)}$$

3. Falls  $x \notin \text{Free}(P)$  gilt:  $\forall x. (P \rightarrow Q(x)) \vdash (P \rightarrow \forall y. Q(y)).$

axiom

$$\underline{Q(a), P} \vdash \underline{Q(a)} \quad \text{axiom}$$

$$\underline{\forall x. Q(x)} \vdash \underline{Q(a)} \quad \underline{P} \vdash \underline{P, Q(a)}$$

$$\underline{P \rightarrow \forall x. Q(x), P} \vdash \underline{Q(a)} \quad a \text{ frisch}$$

$$\underline{(P \rightarrow \forall x. Q(x)), P} \vdash \underline{\forall y. Q(y)}$$

$$\underline{P \rightarrow \forall x. Q(x)} \vdash \underline{P \rightarrow \forall y. Q(y)}$$