Aufgabe 1

11,5 / 22

(i) A ist semipositiv definit wenn $\begin{cases} A \text{ ist symmetric} \\ x^T A x \geqslant 0 \quad (x \in R^n) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ AA^T ist positiv definit . das gilt $x^T . A . A^T . x > 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}^n, \; x \neq 0$

Sei $y = A^T x \Rightarrow x^T A . A^T x = y^T . y$

$$\Leftrightarrow \quad y^T . y = \sum_{k=1}^{N} y_k^2$$

Sei $y_k^2 \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} y_k^2 \geqslant 0$ ✓

$\Rightarrow$ AA^T ist positiv definit bzw. positiv semidefinit

(ii) Matrix A mit rank $(A) > 1$

- Ein Matrix, in denen Zeilen oder Spalten linear abhängig sind, gibt kein inverse Matrix

sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}$

$\text{rang}(A) = 3 > 1$ und die Zeilen von AA^T ist linear abhängig

Das müsste man bei diesem Beispiel schon kurz zeigen
hier kann man A deutlich einfacher wählen bspw. mit
zwei verschiedenen Einheitsvektoren und einer Nullspalte

$\Rightarrow$ AA^T gibt kein Inverse.

(iii) rank $(A) = m \Rightarrow$ Matrix A hat vollen Rank

Sei S, T invertierbare Matrix $S, T \in \mathbb{R}^{m \times n}$

mit $S^{-1} . A . T = E_n \Rightarrow S^{-1} . A = T^{-1}$ sei $B = TS^{-1}$

$$B . A = T . S^{-1} . A = T . T^{-1} = E_n$$

$\Rightarrow$ A ist auch invertierbar

A muss nicht quadratisch sein
es ist z.z. das AA^T invertierbar

3/6

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zwei lin unabhängig Spalte rang $(A) = 1$ $AA^T = A$

$0 = \det(A) = \det(AA^T) \rightarrow AA^T$ nicht invertierbar

iii) z aus $AA^T x = 0$ folgt $x = 0$ $\mathcal{N}(AA^T) = \{0\}$

$AA^T x = 0 \Rightarrow x^T AA^T x = 0 \Rightarrow \|A^T x\|_2 = 0$, es gilt also $A^T x = 0$

Da Rang $(A) = m$ und $A \in R^{m \times n} \Rightarrow$ Zeilen von A lin. unabh

$\Rightarrow$ Spalten von A^T lin. unabh

$\Rightarrow x = 0$

Aufgabe 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{N}(A) = \{ p \in \mathbb{R}^4 : Ap = 0 \}$. Sei $p = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4)$

$$Ap = 0 \iff \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-(\mathrm{III}-\mathrm{II})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\mathrm{II}]{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Dann erhalten wir $\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \\ p_2 + p_3 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} p_1 + p_4 = 0 \\ p_2 = -p_3 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = -p_4 \\ p_2 = -p_3 \end{cases} \checkmark$$

$$\Rightarrow p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}(A) = \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Spalten Basis}} \Big\rangle$$

$\rightarrow$ Daraus folgt $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Z ist NRM von $\mathcal{N}(A)$

Z sollte keine Basis sein

$\dim \mathcal{N}(A) = 2 \Rightarrow \dim \mathcal{R}(A^T) = 4 - \dim \mathcal{N}(A) = 2 \rightarrow$ diese Zeilen bilden eine Basis des Bildraums $\rightarrow$ (...)

$$\rightarrow x^{(1)} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\ \lambda_2 - \mu_3 \\ -\lambda_2 - \mu_3 \\ -\lambda_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \end{pmatrix}$$

sei $\lambda_2 - \mu_3 = 0$ in Zeile 2 $\Rightarrow \lambda_2 = \mu_3$

Einsetzen in Z.3 $\Rightarrow -\lambda_2 - \mu_3 = 1 \Rightarrow -2\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \mu_3 = \frac{-1}{2}$

in Z.1 $\Rightarrow \lambda_1 + 2\mu_2 - \frac{1}{2} = 1 \iff \lambda_1 + 2\mu_2 = \frac{3}{2}$

in Z.4 $\rightarrow$ $-\lambda_1 + 2\mu_2 - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda_1 + 2\mu_2 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}$

$$p = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$q = \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \\ \lambda_2 - \mu_3 \\ -\lambda_2 - \mu_3 \\ -\lambda_1 + 2\mu_2 + \mu_3 \end{pmatrix}$$

sei von Z.2, Z.3 $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 - \mu_3 = 5 \\ -\lambda_2 - \mu_3 = -5 \end{cases} \rightarrow \quad \lambda_2 = 5, \quad \mu_3 = 0$

$\Rightarrow$ in Z.1 $\rightarrow$ $\lambda_1 + 2\mu_2 + 0 = 3$

Z.4 $\rightarrow$ $-\lambda_1 + 2\mu_2 + 0 = -3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\mu_2 = 3 \\ -\lambda_1 + 2\mu_2 = -3 \end{cases} \rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \mu_2 = 0$$

$$p = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$q = \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4,5/5

(...) Auf 2

Die ersten beiden Zeilen von A sind lin. unab

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A^{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad R(A^T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$x^{(1)} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Indizes $\{1, 2, 3\}$

Die Spalten 1, 2, 3 von A sind linear unabhängig

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II} - \frac{1}{2}\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} + 4\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}\text{III}]{2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I} - \text{III}]{\text{II} + \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 & -1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I} - \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 16/3 \\ 10/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ 10/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

Da $\bar{x} \geq 0 \Rightarrow$ es ist eine zulässige Punkt

Indizes $\{2, 4, 5\}$

Die Spalten 2, 4, 5 von A sind linear unabhängig

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} - \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*) $-3 < 0$

$\bar{x}$ ist nicht $\geq 0 \Rightarrow$ ist $\bar{x}$ nicht zulässig die Indizes $\{4,5,6\}$ ist die Spaltenvektor nicht linear unabhängig

$\Rightarrow$ kein Basis

4/4

A4) fehlt

Auf 4:

a, z.z. $a^T P a = 0$ angenommen $a^T P a$

$$0 = a^T P a = a^T P^T a = a^T P P a = a^T P^T P a = (Pa)^T (Pa)$$
$$= \|Pa\|_2^2$$

$Pa = 0$ da P orthogonal Projek auf $\mathcal{N}(A) \Rightarrow a \in R(A^T)$

$\Rightarrow \exists\ \lambda$ sodass $a = A^T \lambda \Rightarrow$ o darstellbar als LK der Spalte

von A^T ($\hat{=}$ Zeile von A) ↯ Wiederspruch $\Rightarrow a^T P a \neq 0$

zunächst zuzeigen $\hat{P}^2 = P$, $(P - Pa(a^T P a)^{-1} a^T P)(P - Pa(a^T P a)^{-1} a^T P)$

$$= P^2 - P^2 a (a^T P a)^{-1} a^T P$$
$$=$$
$$=$$

Sei nun $p \in \mathcal{N}(\hat{A}) \rightarrow \hat{A} p = \begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} Ap \\ a^T p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Ap = 0$ und $a^T p = 0$, dh $p \in \mathcal{N}(A)$
$Pp = p$

$$\hat{P} p = (P - Pa(a^T P a)^{-1} a^T P) p = Pp - Pa (a^T P a)^{-1} a^T P p$$
$$= p - Pa (a^T P a)^{-1} \underbrace{a^T p}_{= 0} = p$$

Sei $q \in \mathbb{R}(A)^T$ dh $\hat{\lambda}$ mit $A^T \hat{\lambda} = q$ $\quad A^T = A_1^T$