

10,5 / 18

Übungen zur LINEAREN OPTIMIERUNG
 10. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Betrachten Sie das Lineare Programm (6)

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{U.d.N.} \quad & \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ & x_1 + x_7 = 1 \\ & x_1, \dots, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

mit der Startbasis bestehend aus $\{x_5, x_6, x_7\}$. Zeigen Sie, dass das Simplex-(Tableau-)Verfahren bei der Lösung dieses Problems einen Zyklus durchläuft, wenn als Auswahlkriterium für die eintretende Variable die in der Vorlesung eingeführte Regel von Dantzig benutzt wird, also $\hat{c}_t = \min\{\hat{c}_j : \hat{c}_j < 0\}$. (Tritt das Minimum beim Ratio-Test in mehreren Indizes auf, wird der kleinste Index gewählt.)

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Optimallösung des Linearen Programms aus Aufgabe 1 mit dem Simplex-Tableau-Verfahren, indem Sie dieses Mal Bland's Rule verwenden. (5)

Aufgabe 3 Gegeben sei ein LP in Standardform: (4+3)

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{U.d.N.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Besitzt das LP genau eine Gleichungsnebenbedingung, dann kann es mit der Regel von Dantzig zu keinem Zyklus kommen. (Hinweis: Zeigen Sie, dass die reduzierten Kosten auf allen schon durchlaufenen Basen monoton wachsen sind.)
- (ii) Ist $n = 2$, dann kann es mit der Regel von Dantzig zu keinem Zyklus kommen.

Abgabe: Dienstag, 17.01.23, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1

$$\min z = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4$$

$$\text{U.d.N. } \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 = 0$$

$$x_1 + x_7 = 1$$

$$x_1, \dots, x_7 \geq 0$$

$$C^T = (-10, 57, 9, 24)$$

Tableau Tabelle

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|-----|-------|---------------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|---|
| I | -z | -10 | 57 | 9 | 24 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| II | x_5 | $\boxed{1/2}$ | $-11/2$ | $-5/2$ | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| III | x_6 | $1/2$ | $-3/2$ | $-1/2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| IV | x_7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |



Kleinste Wert = -10 $\Rightarrow x_1$ tritt in Basis ein

Quotient Kriterium $\min \left\{ \frac{0}{1/2}; \frac{0}{1/2}; \frac{1}{1} \right\} = \frac{0}{1/2} \Rightarrow x_5$ tritt aus

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|-------------------------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| I + 10 II \rightarrow | -z | 0 | -53 | -41 | 204 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| | x_1 | 1 | -11 | -5 | 18 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| III - $\frac{1}{2}$ II | x_6 | 0 | $\boxed{4}$ | 2 | -8 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| IV - II | x_7 | 0 | 11 | 5 | -18 | -2 | 0 | 1 | 1 |

Kleinste Wert = -53 $\Rightarrow x_2$ tritt in Basis ein

Quotient Kriterium $\min \left\{ \frac{0}{4}; \frac{1}{11} \right\} = \frac{0}{4} \Rightarrow x_6$ tritt aus

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|-------------|-------|-------|-------|-----------------|-------|--------|---------|-------|---|
| I + 53 III | -z | 0 | 0 | $\boxed{-29/2}$ | 98 | $27/4$ | $53/4$ | 0 | 0 |
| II + 11 III | x_1 | 1 | 0 | $\boxed{1/2}$ | -4 | $-3/4$ | $11/4$ | 0 | 0 |
| | x_2 | 0 | 1 | $1/2$ | -2 | $-1/4$ | $1/4$ | 0 | 0 |
| IV - 11 III | x_7 | 0 | 0 | $-1/2$ | 4 | $3/4$ | $-11/4$ | 1 | 1 |

Kleinste Wert = $-29/2$ $\Rightarrow x_3$ tritt in Basis ein

Quotient Kriterium $\min \left\{ \frac{0}{1/2}; \frac{0}{1/2} \right\} = \frac{0}{1/2} \Rightarrow x_1$ tritt aus

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|---|
| $I + 29/2 II$ | $-z$ | 29 | 0 | 0 | -18 | -15 | 93 | 0 | 0 |
| | x_3 | 2 | 0 | 1 | -8 | $-3/2$ | $11/2$ | 0 | 0 |
| $III - \frac{1}{2} II$ | x_2 | -1 | 1 | 0 | 2 | $1/2$ | $-5/2$ | 0 | 0 |
| $IV + \frac{1}{2} II$ | x_7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Kleinste Wert = -18 $\Rightarrow x_4$ tritt in Basis ein
 Quotient Kriterium $\min \left\{ \frac{0}{2} \right\} = 0 \Rightarrow x_2$ tritt aus

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|--------------|-------|--------|-------|-------|-------|---------|---------|-------|---|
| $I + 18 III$ | $-z$ | 20 | 9 | 0 | 0 | $-21/2$ | $141/2$ | 0 | 0 |
| $II + 8 III$ | x_3 | -2 | 4 | 1 | 0 | $1/2$ | $-9/2$ | 0 | 0 |
| | x_4 | $-1/2$ | $1/2$ | 0 | 1 | $1/4$ | $-5/4$ | 0 | 0 |
| | x_7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Kleinste Wert = $-21/2 \Rightarrow x_5$ tritt in Basis ein
 Quotient Kriterium $\min \left\{ \frac{0}{1/2}, \frac{0}{1/4} \right\} = 0 \Rightarrow x_1$ tritt aus

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|-----------------------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|---|
| $I + \frac{21}{2} II$ | $-z$ | -22 | 93 | 21 | 0 | 0 | -24 | 0 | 0 |
| | x_5 | -4 | 8 | 2 | 0 | 1 | -9 | 0 | 0 |
| $III - 1/4 II$ | x_4 | $1/2$ | $-3/2$ | $-1/2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | x_7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Kleinste Wert = -24 $\Rightarrow x_6$ tritt in Basis ein
 Quotient Kriterium $\min \left\{ \frac{0}{1} \right\} = 0 \Rightarrow x_4$ tritt aus

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|--------------|-------|-------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|---|
| $I + 24 III$ | $-z$ | -10 | 57 | 9 | 24 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $II + 9 III$ | x_5 | $1/2$ | $-11/2$ | $-5/2$ | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | x_4 | $1/2$ | $-3/2$ | $-1/2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | x_7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

\Rightarrow Zyklus
 - durchläuft $\textcircled{*}$

Aufgabe 2: Band's rule

$$\begin{aligned} \min z &= -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{U.d.N. } \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + x_5 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_6 &= 0 \\ x_1 + x_7 &= 1 \\ x_1, \dots, x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tableau Tabelle

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|-----|-------|---------------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|---|
| I | -z | -10 | 57 | 9 | 24 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| II | x_5 | $\boxed{1/2}$ | $-11/2$ | $-5/2$ | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| III | x_6 | $1/2$ | $-3/2$ | $-1/2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| IV | x_7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

I + 10 II →

III - $\frac{1}{2}$ II

IV - II

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|--|-------|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| | -z | 0 | -53 | -41 | 204 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| | x_1 | 1 | -11 | -5 | 18 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| | x_6 | 0 | $\boxed{4}$ | 2 | -8 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| | x_7 | 0 | 11 | 5 | -18 | -2 | 0 | 1 | 1 |

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|--|-------|-------|-------|---------------|-------|-------|-------|-------|---|
| | -z | 0 | 0 | -29/2 | 98 | 27/4 | 53/4 | 0 | 0 |
| | x_1 | 1 | 0 | $\boxed{1/2}$ | -4 | -3/4 | 1/4 | 0 | 0 |
| | x_2 | 0 | 1 | 1/2 | -2 | -1/4 | 1/4 | 0 | 0 |
| | x_7 | 0 | 0 | -1/2 | 4 | 3/4 | -1/4 | 1 | 1 |

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|--|-------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------|---|
| | -z | 29 | 0 | 0 | -18 | -15 | 93 | 0 | 0 |
| | x_3 | 2 | 0 | 1 | -8 | -3/2 | 11/2 | 0 | 0 |
| | x_2 | -1 | 1 | 0 | $\boxed{2}$ | 1/2 | -5/2 | 0 | 0 |
| | x_7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

| | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|-------|-------|---|
| | -z | 20 | 9 | 0 | 0 | -21/2 | 141/2 | 0 | 0 |
| | x_3 | -2 | 4 | 1 | 0 | $\boxed{1/2}$ | -3/2 | 0 | 0 |
| | x_4 | -1/2 | 1/2 | 0 | 1 | 1/4 | -5/4 | 0 | 0 |
| | x_7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

$$I + \frac{21}{2} II$$

$$III - 1/4 II$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|-------|---------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|---|
| - z | -22 | 93 | 21 | 0 | 0 | -24 | 0 | 0 |
| x_5 | -4 | 8 | 2 | 0 | 1 | -9 | 0 | 0 |
| x_4 | $\boxed{1/2}$ | $-3/2$ | $-1/2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x_7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|-------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|---|
| - z | 0 | 27 | -1 | 44 | 0 | 20 | 0 | 0 |
| x_5 | 0 | -4 | -1 | 8 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| x_1 | 1 | -3 | -2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| x_7 | 0 | 3 | $\boxed{1}$ | -2 | 0 | -2 | 1 | 1 |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | R |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| - z | 0 | 30 | 0 | 42 | 0 | 18 | 1 | 1 |
| x_5 | 0 | 2 | 0 | 4 | 1 | -5 | 2 | 2 |
| x_1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| x_3 | 0 | 3 | 1 | -2 | 0 | -2 | 1 | 1 |

Optimale Basis = $\{x_5, x_1, x_3\}$ mit $z = -1$

Optimallösung $\hat{x} = \{1, 0, 1, 0, 2\}$