16 /22

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik
Dr. M. Hansen, D. Vogel

Wintersemester 2022/2023

Übungen zur Linearen Optimierung
8. Aufgabenblatt

min

4

Aufgabe 1 Lösen Sie das Lineare Programm (4)

$$A = \left(\right)$$

$$\begin{aligned} \min\ z &= 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{U.d.N. } 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &\leq 22 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + S_1 = 22$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_2 = 30$
$x_1 \ldots x_3, S_1, S_2 \geq 0$

mit dem Simplex-Algorithmus. Benutzen Sie dabei die Startbasis, die aus den Schlupfvariablen als Basiskoeffizienten besteht.

B

0

Aufgabe 2 Benutzen Sie den Optimalitätstest des Simplex-Algorithmus, um alle Werte $a \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für welche der Punkt $x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0)^\top$ die Optimallösung des Linearen Programms (5)

$$\begin{aligned} \min\ z = -x_1 - a^2x_2 + 2x_3 - 2ax_4 - 5x_5 + 10x_6 \\ \text{U.d.N. } -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2 \\ x_1, \ldots, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

ist.

4.5

Aufgabe 3 Zu den Parametern $a, b, \ldots, h \in \mathbb{R}$ sei das Tableau B7_A1 (5)

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
$-z$	0	a	0	b	c	3	d
x_3	0	-2	1	e	0	3	f
x_1	1	g	0	-2	0	1	1
x_5	0	0	0	h	1	4	3

gegeben, das zu einer Iteration des Simplex-Tableau-Algorithmus gehört. Geben Sie jeweils Bedingungen an die Parameter $a, b, \ldots, h$ an (mit Begründungen), sodass die folgenden Aussagen wahr sind:

(i) Die aktuelle Basis ist optimal. $a, b \geq 0$

(ii) Die aktuelle Basis ist die eindeutige optimale Basis. $a, b, f > 0$

$a\ b > 0$

(iii) Die aktuelle Basis ist optimal und es existieren weitere optimale Basen. $a = 0 \vee b = 0 \vee f = 0$

(iv) Das Lineare Programm ist unbeschränkt.

(v) Die aktuelle Lösung wird durch eine Vergrößerung von x_4 verbessert, allerdings ändert sich der Wert der Zielfunktion nicht, wenn x_4 in die Basis eintritt.

7.5

Aufgabe 4 Lösen Sie die folgenden LPs mit dem Simplex-Tableau-Verfahren. B7_A2 (4+4)

(i)

$$
\begin{aligned}
\max\ \ z &= 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
\text{U.d.N. } 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 20 \\
3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &\leq 30 \\
x_1, \ldots, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\min\ \ z &= -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \\
\text{U.d.N. } x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 48 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Abgabe: Dienstag, 20.12.22, vor der Vorlesung.

Aufgabe 3 Zu den Parametern $a, b, \ldots, h \in \mathbb{R}$ sei das Tableau (5)

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
$-z$	0	a	0	b	c	3	d
x_3	0	-2	1	e	0	3	f
x_1	1	g	0	-2	0	1	1
x_5	0	0	0	h	1	4	3

gegeben, das zu einer Iteration des Simplex-Tableau-Algorithmus gehört. Geben Sie jeweils Bedingungen an die Parameter $a, b, \ldots, h$ an (mit Begründungen), sodass die folgenden Aussagen wahr sind:

(i) Die aktuelle Basis ist optimal.

(ii) Die aktuelle Basis ist die eindeutige optimale Basis.

(iii) Die aktuelle Basis ist optimal und es existieren weitere optimale Basen.

(iv) Das Lineare Programm ist unbeschränkt.

(v) Die aktuelle Lösung wird durch eine Vergrößerung von x_4 verbessert, allerdings ändert sich der Wert der Zielfunktion nicht, wenn x_4 in die Basis eintritt.

Aufgabe 4 Lösen Sie die folgenden LPs mit dem Simplex-Tableau-Verfahren. (4+4)

(i)

$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{U.d.N. } 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &\leq 30 \\ x_1, \ldots, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \min\ z &= -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \\ \text{U.d.N. } x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 48 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Abgabe: Dienstag, 20.12.22, vor der Vorlesung.

Aufgabe 3 Zu den Parametern $a, b, \ldots, h \in \mathbb{R}$ sei das Tableau (5)

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
$-z$	0	a	0	b	c	3	d
x_3	0	-2	1	e	0	3	f
x_1	1	g	0	-2	0	1	1
x_5	0	0	0	h	1	4	3

gegeben, das zu einer Iteration des Simplex-Tableau-Algorithmus gehört. Geben Sie jeweils Bedingungen an die Parameter $a, b, \ldots, h$ an (mit Begründungen), sodass die folgenden Aussagen wahr sind:

(i) Die aktuelle Basis ist optimal.

(ii) Die aktuelle Basis ist die eindeutige optimale Basis.

(iii) Die aktuelle Basis ist optimal und es existieren weitere optimale Basen.

(iv) Das Lineare Programm ist unbeschränkt.

(v) Die aktuelle Lösung wird durch eine Vergrößerung von x_4 verbessert, allerdings ändert sich der Wert der Zielfunktion nicht, wenn x_4 in die Basis eintritt.

Aufgabe 4 Lösen Sie die folgenden LPs mit dem Simplex-Tableau-Verfahren. (4+4)

(i)

$$\begin{aligned} \max \ z &= 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \text{U.d.N. } 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &\leq 30 \\ x_1, \ldots, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \min \ z &= -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \\ \text{U.d.N. } x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 48 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Abgabe: Dienstag, 20.12.22, vor der Vorlesung.

BLATT 8 - LO | Nguyentv - Hoangkim

Aufgabe 1: $\min\ z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3$

UdN: $4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 22$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 30$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

① **Umformung in Standardform:**

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \end{pmatrix},\ c = (3, -2, -4, 0, 0)^T$

Schlupfvariablen x_5, x_6 als BV $\rightarrow x_B = (x_5, x_6)^T$

NBV $x_N = (x_1, x_2, x_3)^T$

Es folgt: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1},\ N = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

② **Berechne „Simplex-Multiplikatoren":**

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ c_B^T = (0,0)^T \Rightarrow y^T = c_B^T B^{-1} = (0,0)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0)^T$

③ **Reduzierte Kosten:**

$\hat{c}_N^T := c_N^T - y^T N = (3, -2, -4) - (0,0)^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (3, -2, -4)$

hier: $\hat{c}_2, \hat{c}_3 < 0 \Rightarrow$ aktuelle Basis nicht optimal

$\hat{c}_3$ ist der betragmäßig größte Wert

$\hookrightarrow x_3$ tritt in B ein, verlässt N

$\Rightarrow$ Berechne $\hat{A}_3 := B^{-1} A_3 = A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \min \left\{ \frac{22}{-2}, \frac{30}{1} \right\} = \frac{30}{1} = 30$

$\hookrightarrow x_5$ verlässt B & tritt N ein

Nun ist $B = \{x_4, x_3\}$ & $N = \{x_1, x_2, x_5\}$

Endet 1. Iteration

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ c_B^T = (0, -4)^T \Rightarrow y^T = (0, -4)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

reduzierte Kosten:

$\hat{c}_N^T := c_N^T - y^T N = (3,-2,0) - (0,-4)^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (7,-10,4)$

da $\hat{c}_2 < 0 \rightarrow x_2$ tritt in B ein, verlässt N

$\hookrightarrow \hat{A}_2 := B^{-1} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

da nur 1 positiven Wert $\rightarrow$ Quotienkriterium sparen

$\hookrightarrow x_4$ verlässt B, tritt in N ein

Nun ist $B = \{x_2, x_3\}$ & $N = \{x_1, x_5, x_6\}$

Endet 2. Iteration

$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ & $N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $c_B^T = (-2,-4)^T \Rightarrow y^T = (-2,-4)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -24 \end{pmatrix}$

reduzierte Kosten:

$\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N = (3,0,0) - (-10,-24)^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (67, 10, 24)$

da die reduzierte Kosten $> 0 \rightarrow$ globalen Minimierer gefunden & gegeben durch: $x_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 194 \end{pmatrix}$

$x_N = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\rightarrow$ Zielwert (Minimum): $z = 0 - 2 \cdot 82 - 4 \cdot 194 = \boxed{-940}$

Aufgabe 3:

i) Die aktuelle Basis ist optimal, wenn alle reduzierten kosten positiv sind $\Rightarrow$ $a, b \geq 0$

ii) Die aktuelle Basis ist optimal und eindeutig, wenn die reduzierten kosten zu den Nichtbasisvariable positiv und alle Variable strikt positiv $a, b, f \geq 0$

iii) Die aktuelle Basis ist optimal $\Rightarrow$ $a, b \geq 0$
Es existieren weitere optimale Basen $\Rightarrow$ $a = 0 \vee b = 0 \vee f = 0$

iv) Das lineare Programm ist unbeschränkt wenn $a < 0 \wedge g \leq 0$
und $b < 0 \wedge e, h \leq 0$

v) Das aktuelle Lösung wird durch eine Vergrößerung von x_4 verbessert allerdings ändert sich der Wert der Zielfunktion nicht, wenn x_4 in die Basis eintritt
wenn $b < 0$: durch eine Vergrößerung von x_4 der Wert der ZF sinkt
wenn $e > 0 \wedge f = 0$ $\Rightarrow$ degenerierten Basislösung und x_4 tritt in die basis ein $\Rightarrow$ $x_4 = 0$ und der Wert der ZF ändert sich nicht.

Aufgabe 4.

$$\max\ z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$\text{U.d.N. } 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 20$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \le 30$$
$$x_1, \dots, x_4 \ge 0$$

in SF umformen

$$\Rightarrow \quad \min\ -z = -5x_1 - 3x_2 - 2x_3$$
$$\text{U.d.N} \quad 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 20$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 30$$
$$x_1, \dots x_6 \geq 0$$

Startbasis als Schlupfvariable $\{x_5, x_6\}$
$\Rightarrow$ Tableaus:

	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
I	$-z$	-5	-3	-2	0	0	0	0
II	x_5	4	5	2	1	1	0	20
III	x_6	3	4	-3	1	0	1	30

$\Rightarrow$ größte negativen Wert -5 $\rightarrow$ x_1

$$\min \left\{ \frac{20}{4}, \frac{30}{3} \right\} = \frac{20}{4} = 5 \quad \rightarrow \quad x_5 \text{ tritt ein}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS	
$-z$	0	$13/4$	$1/2$	$5/4$	$5/4$	0	25	
x_1	1	$5/4$	$1/2$	$1/4$	$1/4$	0	5	$\leftarrow \frac{1}{4}\text{II}$
x_6	0	$1/4$	$-9/2$	$1/4$	$-3/4$	1	15	$\leftarrow -3\text{II}'$

alle reduzierten Kosten nicht negativ sind $\Rightarrow$ Optimallösung

$\hat{x} = (5, 0, 0, 0, 0, 15)^T$ Optimalwert $= -25$

ii)

$$\min\ z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3$$
$$\text{U.d.N. } x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 48$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 60$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

in SF $\rightarrow$ $\min\ z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3$
$$\text{U.d.N} \quad x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 48$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 60$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Als Standardbasis werden wir die Schlupfvariable $\{x_4, x_5\}$

Tableaus:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	-6	-14	-13	0	0	0
x_4	1	$\boxed{4}$	2	1	0	48
x_5	1	2	4	0	1	60

$\Rightarrow$ größte negativen Wert -14 $\rightarrow$ x_2

$$\min \left\{ \frac{48}{4}, \frac{60}{2} \right\} = 12$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	$-5/2$	0	-6	$7/2$	0	168
x_2	$1/4$	1	$1/2$	$1/4$	0	12
x_5	$1/2$	0	$\boxed{3}$	$-1/2$	1	36

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	$-3/2$	0	0	$5/2$	2	240
x_2	$\boxed{1/6}$	1	0	$1/3$	$-1/6$	6
x_3	$1/6$	0	1	$-1/6$	$1/3$	12

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RS
$-z$	0	9	0	$11/2$	$1/2$	294
x_2	1	6	0	2	-1	36
x_3	0	-1	1	$-1/2$	$1/2$	6

$\rightarrow$ Optimallösung $\hat{x} = (0, 36, 6, 0, 0)$ mit $z = -294$

Aufgabe 1

$$\min \quad z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3$$
$$\text{U.d.N.} \quad 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 22$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 30$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\xrightarrow{\text{in SF}}$ $\min \quad z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3$

U.d.N $\quad 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + s_1 = 22$

$x_1 - 2x_2 + x_3 + s_2 = 30$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$c = (3, -2, -4, 0, 0)^T$$

Nach Simplex - Methode:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c_B^T = (0 \quad 0) \qquad c_N^T = (3 \quad -2 \quad 4)$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$$

$$c_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = (3 \quad -2 \quad 4) - (0 \quad 0 \quad 0) = (3 \quad -2 \quad 4)$$

$$\hat{c}_t = \min_{\{1,2,3\}} \{ c_j : j < 0 \} = -2$$

$\Rightarrow$ x_2 tritt in die Basis ein

Um die auftretende zu wählen

$$\hat{A}_2 = B^{-1} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Quotientekriterium $\quad \min_i \left\{ \frac{\hat{b_i}}{\hat{a}_{it}} : \hat{a}_{i,t} > 0 \right\} = \frac{22}{5}$

$\Rightarrow$ s_1 verlässt Basis, tritt in N ein

neue Basis $\quad N = \{ x_1, s_1, x_3 \} \qquad B = \{ x_2, s_2 \}$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{pmatrix}$

$c_B^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad c_N^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8/5 & -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23/5 & 2/5 & 16/5 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

$\Rightarrow \quad B = \{x_2, s_2\}$ ist optimal

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22/5 \\ 106/5 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 22/5 & 0 & 0 & 106/5 \end{pmatrix}$$

$$z = 3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{22}{5} - 4 \cdot 0 = \frac{-44}{5} = -8{,}8$$