Homework 1

Nguyễn Hoàng Long - 11202352 - DSEB 62

17/08/2022

1 Problem 1

a.

Total	0.16	0.17	0.11	0.22	0.34	1
y_1	0.01	0.02	0.03	0.1	0.1	0.26
y_2	0.05	0.1	0.05	0.07	0.2	0.47
y_3	0.01	0.05	0.03	0.05	0.04	0.27
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Total

After computed the above table, we have the marginal distributions of $p(x)$ and $p(y)$:
$*$ The marginal distributions $p(x)$:
$p(x_1) = 0.16, p(x_2) = 0.17, p(x_3) = 0.11, p(x_4) = 0.22, p(x_5) = 0.34$
$*$ The marginal distributions $p(y)$:
$p(y_1) = 0.26, p(y_2) = 0.47, p(y_3) = 0.27$

b. Formula for the conditional probability p($x_i|Y = y_1$) :

$$p(x_i|Y = y_1) = \frac{p(x_i, Y = y_1)}{p(Y = y_1)} = \frac{p(x_i, Y = y_1)}{0.26}$$

Calculate the conditional probability p($x_i|Y = y_1$) :

i	1	2	3	4	5
p($x_i|Y = y_1$)	1/26	1/13	3/26	5/13	5/12

Formula for the conditional probability p($x_i|Y = y_3$) :

$$p(x_i|Y = y_3) = \frac{p(x_i, Y = y_3)}{p(Y = y_3)} = \frac{p(x_i, Y = y_3)}{0.27}$$

Calculate the conditional probability $p(x_i|Y=y_3)$:

i	1	2	3	4	5
$p(x_i|Y=y_3)$	10/27	5/27	1/9	5/27	4/27

2 Problem 2

Proof:

$$E_y[E_x[x|y]] = \sum_y E[X|Y=y].P(Y=y)$$

$$= \sum_y \sum_x x.P[X=x|Y=y].P(Y=y)$$

$$= \sum_y \sum_x x.P[Y=y|X=x].P(X=x)$$

$$= \sum_x x.P(X=x).\sum_y P[Y=y|X=x]$$

$$= E_x[X].1 = E_x[X]$$

$$(Note: \sum_y P[Y=y|X=x] = 1)$$

3 Problem 3

Ta có: $P(X) = 0,207; P(Y) = 0,5; P(X|Y) = 0,365$

a. $P(XY) = P(Y).P(X|Y) = 0,5.0,365 = 0,1825$

b. $P(\overline{X}|Y) = \frac{P(\overline{X}.Y)}{P(Y)} = \frac{P(Y)-P(XY)}{P(Y)} = \frac{0,5-0,1825}{0,5} = 0,635$

$=> P(Y|\overline{X}) = \frac{P(\overline{X}|Y).P(Y)}{P(\overline{X})} = \frac{0,635.0,5}{1-0,207} = 0,4004$

4 Problem 4

We have: $E_x[x] = \mu$
Proof:
$V_x = \sum_x (x-\mu)^2.P(x)$
$= E_x[(x-\mu)^2]$
$= E_x[x^2 - 2\mu x + \mu^2]$
$= E_x[x^2] - 2\mu E_x[x] + \mu^2$
$= E_x[x^2] - 2\mu.\mu + \mu^2$
$= E_x[x^2] - \mu^2$
$= E_x[x^2] - (E_x[x])^2$
$=>\mathrm{V}_x = E_x[x^2] - (E_x[x])^2$

5 Problem 5

Ban đầu chọn ô cửa số 1. Lấy A là biến cố chiếc xe ở ô cửa 1 (chọn ban đầu), B là biến cố Monty mở ô cửa 2.

=> $P(A) = \frac{1}{3}$

Ta có: $P(B|A) = \frac{1}{2}$ là xác suất Monty mở ô cửa 2 khi chiếc xe ở ô cửa 1 do khi đó ông ấy chỉ mở cửa số 2 hoặc 3

$P(B) = \frac{1}{2}$ là xác suất Monty mở ô cửa 2 vì ông ấy phải mở 1 trong 2 cửa còn lại mà khác với cửa đã chọn

$P(A|B) = \frac{1}{3}$: xác suất chiếc xe nằm ở cô cửa 1 khi Monty đã mở ô cửa 2

Gọi C là biến cố xe nằm ở ô cửa số 3. A và C là 2 biến cố xung khắc (do xe chỉ ở ô cửa 1 hoặc ô cửa 3) nên $P(C) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

Kết luận: Thực hiện thay đổi ô cửa đã chọn sẽ tăng xác suất trúng xe hơn so với giữ nguyên