Tich phan suy rong Bai tap mau

Giải tích 1 (Đại học Quốc gia Hà Nội)

TÍCH PHÂN SUY RỘNG

1 Tích phân suy rộng loại 1 (tích phân với cận vô hạn)

1.1 Các định nghĩa:

Định nghĩa 1.1 *Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, b]$, với $b > a$. Ta gọi giới hạn*

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

là tích phân suy rộng loại 1 của $f(x)$ trên $[a, +\infty)$ và kí hiệu là

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = I.$$

Nếu I hữu hạn ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, còn trong trường hợp ngược lại (hoặc không tồn tại $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ hoặc $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \infty$) thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là phân kỳ.

Nhận xét 1.1 *Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với $b > a$. Khi đó với mọi số thực $a' > a$, ta có*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^b f(x)dx.$$

Do đó $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ tồn tại (hữu hạn hoặc vô cùng) khi và chỉ khi $\lim_{b\to+\infty} \int_{a'}^b f(x)dx$ tồn tại và ta có

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ khi và chỉ khi } \int_{a'}^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ}.$$

Nếu một trong hai tích phân suy rộng nói trên tồn tại thì

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ý nghĩa: *Khi nghiên cứu sự hội tụ của $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ta có thể cắt bỏ đi một đoạn $[a, a']$ tùy ý của $[a, +\infty)$ mà chỉ cần xét $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ là đủ.*

Ta dễ dàng chứng minh được các tính chất sau.

Định lý 1.1 *a) Nếu các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} [f(x)+ g(x)]dx$ và*

$$\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

b) Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và k là một hằng số thực thì tích phân $\int_a^{+\infty} kf(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

c) Nếu trong mọi đoạn $[a, b]$ ta áp dụng được công thức Newton-Leibnitz

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

và tồn tại $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$ thì $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$.

(d) (Công thức tích phân từng phần) Nếu $u(x)$, $v(x)$ là những hàm khả vi liên tục trên $[a, +\infty)$ và giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)$ tồn tại hữu hạn thì

$$\int_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu$$

trong đó

$$uv\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}[u(x)v(x) - u(a)v(a)].$$

Tương tự, ta định nghĩa tích phân trên các khoảng $(-\infty, b]$ và $(-\infty, +\infty)$.

Định nghĩa 1.2 *Cho hàm $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, với $a < b$. Tích phân suy rộng của f trên $(-\infty, b]$ là giới hạn*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \overset{dn}{=} \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Nếu giới hạn là hữu hạn thì ta nói rằng $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$ hội tụ. Tích phân không hội tụ gọi là phân kỳ.

Định nghĩa 1.3 *Cho hàm $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên mọi đoạn hữu hạn. Nếu với một số thực a nào đó, hai tích phân suy rộng $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ tồn tại và tổng*

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

có nghĩa (tức là không có dạng $\infty - \infty$) thì ta gọi tổng này là tích phân của f trên $(-\infty, +\infty)$ và ký hiệu là $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Như vậy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{dn}{=} \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là hội tụ nếu tổng ở vế phải hữu hạn.

Nhận xét 1.2 *(i) Dễ thấy rằng sự phân kỳ hay hội tụ của $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ và giá trị của nó không phụ thuộc vào a.*

(ii) Với cách xác định như trên ta có ngay

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx.$$

Ví dụ 1.1 *Tính $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.*

Với mọi số thực $b > 0$, ta có

$$I(b) = \int_0^b e^{-x}dx = (-e^{-x})\Big|_0^b = 1 - e^{-b},$$
$$I = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty}(1 - e^{-b}) = 1.$$

Do đó $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ và $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.

Ví dụ 1.1 *Tính*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

Ta phân tích

$$I = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}}_{I_2}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \arctan \frac{x+1}{2}\Big|_a^0 \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \Big(\arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{a+1}{2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{2}\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \arctan \frac{x+1}{2}\Big|_0^b \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2}\Big), \\ I &= I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy tích phân đã cho hội tụ và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 1.2 *Xét sự hội tụ của tích phân* $\int_a^{+\infty} \cos x dx$.
Ta có

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \cos x dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \cos x dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \sin x\big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} (\sin b - \sin a) \end{aligned}$$

Giới hạn này không tồn tại, vì lấy hai dãy $b_n = 2n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,\ b'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *trong khi đó*

$$\lim_{n\to\infty}(\sin 2n\pi - \sin a) = -\sin a,\ \lim_{n\to\infty}[(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - \sin a] = 1 - \sin a \neq -\sin a.$$

Vậy tích phân đã cho phân kỳ.

Ví dụ quan trọng sau đây được sử dụng nhiều trong thực hành.

Ví dụ 1.3 *Xét sự hội tụ của tích phân* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha},\ a > 0.$
Nếu $\alpha = 1$ *thì*

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x}$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \ln x|_a^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty.$$

Vậy trong trường hợp này tích phân phân kỳ.
Nếu $\alpha \neq 1$ *thì*

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{b\to+\infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_a^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \alpha < 1, \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{nếu } \alpha > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Các kết quả được phát biểu trong định lý sau:

Định lý 1.2 *Tích phân suy rộng*

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha},\ a > 0$$

hội tụ nếu $\alpha > 1$*, phân kỳ nếu* $\alpha \leqslant 1$*.*

1.2 Tích phân suy rộng của các hàm số không âm

Khi nói đến tích phân suy rộng, trước hết ta quan tâm xem nó có hội tụ hay không? Vì nhiều khi hàm dưới dấu tích phân không có nguyên hàm biểu diễn qua các hàm sơ cấp hoặc ta không cần tính giá trị của tích phân suy rộng. Vậy ta chỉ cần quan tâm tích phân suy rộng đã cho hội tụ hay phân kỳ. Ta đưa ra một số tiêu chuẩn sau đây:

Định lý 1.3 *Giả sử* $f(x)$ *là hàm số xác định trên* $[a, +\infty)$*, khả tích trên mọi đoạn* $[a, b]$ *với* $b > a$*. Nếu* $f(x) \geq 0$ *với mọi* $x \in [a, +\infty)$ *thì tích phân* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *luôn luôn tồn tại (hữu hạn hoặc bằng* $+\infty$*).*

Định lý 1.4 *(Tiêu chuẩn so sánh) Cho hai hàm* $f(x), g(x)$ *xác định trên khoảng* $[a, +\infty)$*, khả tích trên mọi đoạn hữu hạn* $[a, b]$ *với* $b > a$*. Nếu*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),\ \forall x \in [a, +\infty)$$

Khi đó

+ *Nếu* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *cũng hội tụ,*

+ *Nếu* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *cũng phân kỳ.*

Ta thường dùng tiêu chuẩn so sánh dưới dạng sau:

Hệ quả 1.1 *Cho $f(x), g(x)$ là những hàm khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, với $b > a$ và là những hàm không âm trên $[a, +\infty)$. Giả sử tồn tại giới hạn*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Khi đó

(a) Nếu $0 < k < +\infty$ thì hai tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ,

(b) $k = 0$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ,

(c) $k = +\infty$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng phân kỳ.

Nhận xét 1.3 *(i) Từ hệ quả trên ta thấy ngay rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \to +\infty$, tức là nếu*

$$f(x) \sim g(x) \ \text{ khi } x \to +\infty$$

thì các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Có lẽ vì vậy mà một số tài liệu gọi hệ quả trên là tiêu chuẩn tương đương.

(ii) Hàm so sánh đơn giản thường được chọn là hàm dạng $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ và kết hợp sử dụng kết quả của Định lý 1.4.

(iii) Nếu $f(x) \leqslant 0$ thì chỉ việc khảo sát tích phân

$$-\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} -f(x)dx.$$

Nếu $f(x)$ đổi dấu một số lần trong $[a, a']$ và trong $[a', +\infty)$ giữ nguyên một dấu thì để khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, ta chỉ việc cắt bỏ đi đoạn $[a, a']$ và khảo sát tích phân trong khoảng còn lại $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$.

Ví dụ 1.4 *Xét sự hội tụ của tích phân*

$$1)\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \qquad\qquad 2)\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx.$$

1) Ta có $0 < e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ với mọi $x \geq 1$. Ta biết rằng $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ. Do đó theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ.
2) Ta có

$$\frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{1}{x} \ \text{ với mọi } x \geq 2.$$

Ta biết rằng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ ($\alpha = 1$). Do đó theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra tích phân đã cho phân kỳ.

Ví dụ 1.5 *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng loại 1 sau:*

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}}{2x^2+x-1}dx$ *2)* $\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}dx$ *4)* $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}dx$

Giải: 1) Hàm số dưới dấu tích phân dương và liên tục trên $[1, +\infty)$. *Ta có*

$$\frac{\sqrt{x^3+2}}{2x^2+x-1} \sim \frac{x^{3/2}}{2x^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x^{1/2}} \text{ khi } x \to +\infty.$$

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ *phân kỳ* ($\alpha = 1/2 < 1$) *nên theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra tích phân đã cho phân kỳ.*
2) Hàm số dưới dấu tích phân dương và liên tục trên $[1, +\infty)$. *Ta có*

$$1 - \cos\frac{2}{x} \sim \frac{2}{x^2} \text{ khi } x \to +\infty.$$

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ *hội tụ* ($\alpha = 2 > 1$)*, nên theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra tích phân đã cho hội tụ.*
2) Hàm số dưới dấu tích phân dương và liên tục trên $[1, +\infty)$. *Ta có*

$$\frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} \sim \frac{2x}{x^{5/2}} = \frac{2}{x^{3/2}} \text{ khi } x \to +\infty.$$

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ *hội tụ* ($\alpha = 3/2 > 1$)*, nên theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra tích phân đã cho hội tụ.*
3) Với $x > \frac{2}{\pi}$*, ta có* $\cos\frac{1}{x} > 0$. *Vì vậy khi xét tính hội tụ hoặc phân kỳ của tích phân, ta có thể xem hàm số dưới dấu tích phân của tích phân đã cho là một hàm số dương.*

$$\frac{\cos\frac{1}{x}}{x} \sim \frac{1}{x} \text{ khi } x \to +\infty.$$

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ *phân kỳ* ($\alpha = 1$)*, nên theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra tích phân đã cho phân kỳ.*

Ví dụ 1.6 *Chứng minh rằng tích phân suy rộng* $\int_0^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$ *hội tụ, sau đó tính giá trị của chúng.*

Giải. Ta có $\int_0^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = I_1 + I_2$.

Tích phân I_1 là tích phân xác định thông thường nên hội tụ. Dễ dàng thấy rằng I_2 hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh. Vậy tích phân đã cho hội tụ.

$$\begin{aligned} I = \int_0^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx &= \int_0^{+\infty} \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^6+1}\right]dx \\ &= \left[\arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3\right]\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Nhận xét 1.4 *Định lý 1.4 và Hệ quả 1.1 chỉ áp dụng được cho trường hợp hàm dưới dấu tích phân không âm (với giá trị đủ lớn của* a*).*

Định lý sau đây được áp dụng cho cả các hàm số dưới dấu tích phân có dấu bất kỳ.

Định lý 1.5 *(Tiêu chuẩn Côsi)*
Giả sử f *là một hàm số xác định trên* $[a, +\infty)$ *và khả tích trên mọi đoạn* $[a, b]$ *với* $b > a$. *Khi đó tích phân* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ khi và chỉ khi với mọi* $\epsilon > 0$ *bé tuỳ ý, tồn tại* $B = B(\epsilon) \geq a$ *sao cho với mọi* $b, b' \geq B(\epsilon)$ *ta có*

$$\left|\int_b^{b'} f(x)dx\right| < \epsilon.$$

1.3 Tích phân suy rộng của hàm có dấu bất kỳ

Định nghĩa 1.4 *Ta nói rằng tích phân* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối nếu tích phân* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *hội tụ.*

Định lý 1.6 *Tích phân hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.*

Proof. Vì $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn Côsi, với mọi $\epsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại $B = B(\epsilon) \geq a$ sao cho với mọi $b, b' \geq B(\epsilon)$ ta có

$$\int_b^{b\prime} |f(x)|dx < \epsilon.$$

Nhưng ta lại có bất đẳng thức

$$\left|\int_b^{b\prime} f(x)dx\right| \leqslant \int_b^{b\prime} |f(x)|dx < \epsilon.$$

Vậy tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy ở trên. □

Ví dụ 1.7 *Xét sự hội tụ của tích phân* $\int_0^{+\infty} \frac{\cos kx}{a^2+x^2}dx$*,* a*,* $k \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*.*

Giải: Với mọi $a \neq 0$, hàm số dưới dấu tích phân xác định và liên tục trên $[0, +\infty)$. Với mọi $x \geq 1$, ta có

$$\left|\frac{\cos kx}{a^2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}dx$ hội tụ ($\alpha = 2 > 1$) nên tích phân $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos kx}{a^2+x^2}\right|dx$ hội tụ (theo tiêu chuẩn so sánh), tức là tích phân được xét hội tụ tuyệt đối (do đó hội tụ).

Ví dụ 1.8 *Xét sự hội tụ của tích phân* $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Giải: Vì $|e^{-x}\cos\alpha x| \leqslant e^{-x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối.

Nhận xét 1.5 *Chiều ngược lại của Định lý 1.6 không đúng. Ví dụ sau đây chứng tỏ điều đó.*

Ví dụ 1.9 *Chứng minh rằng tích phân* $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ *hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối.*

Chứng minh: Trước hết ta chỉ ra tích phân đã cho hội tụ. Thật vậy, tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \\ &= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \quad (\text{vì } |\cos b| \leqslant 1 \text{ nên } \lim_{b\to+\infty} \frac{\cos b}{b} = 0) \end{aligned}$$

Mặt khác vì $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ với mọi $x \geq 1$ và $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ nên tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ hội tụ tuyệt đối. Do đó tích phân đã cho hội tụ.

Hơn nữa, nếu $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ hội tụ thì vì

$$\frac{\sin^2 x}{x} \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right| \quad \text{với mọi } x \geq 1$$

nên
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x} dx$$
hội tụ. Bằng cách tương tự như $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ta cũng chỉ ra được tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ hội tụ. Do vậy
$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{1-\cos 2x}{2x} dx + \frac{\cos 2x}{2x}\right] dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$$
hội tụ. Đây là điều mâu thuẫn. Vậy tích phân đã cho không hội tụ tuyệt đối.

Định nghĩa 1.5 *Một tích phân suy rộng hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối ta gọi nó là bán hội tụ (hay còn gọi là hội tụ tương đối).*

Khi xét sự hội tụ của các tích phân không hội tụ tuyệt đối ta thường cần tới hai tiêu chuẩn hội tụ: Tiêu chuẩn Dirichlet và tiêu chuẩn Abel.

Định lý 1.7 *(Tiêu chuẩn Dirichlet)*
Cho $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, b]$, $b \geq a$. Nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

a) Hàm $g(x)$ đơn điệu dần đến 0 khi $x \to +\infty$ và có đạo hàm $g'(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$;

b) Hàm $f(x)$ có nguyên hàm $F(x)$ bị chặn trên $[a, +\infty)$, tức là $\exists\, C > 0$ sao cho $|F(x)| \leqslant C,\ \forall x \geq a$;

thì tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)f(x)dx$ hội tụ.

Định lý 1.8 *(Tiêu chuẩn Abel)*
Cho $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, b]$, $b \geq a$. Nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

a) Tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ;

b) Hàm $g(x)$ đơn điệu và bị chặn trong khoảng $[a, +\infty)$;

thì tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)f(x)dx$ hội tụ.

Ví dụ 1.10 *Xét sự hội tụ của các tích phân (với $a > 0$)*
$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^p} dx,$$
và
$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{x^p} dx,$$
trong đó α, β, p là các hằng số, $\alpha, \beta \neq 0$.

Ta chỉ xét tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^p} dx$, tích phân còn lại làm tương tự.

- Dễ dàng thấy rằng nếu $p > 1$ thì tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối.

- Ta sẽ chứng minh rằng với $0 < p \leqslant 1$ thì tích phân được xét là bán hội tụ, tức là hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối.
  Thật vậy, đặt $f(x) = \sin\alpha x$, ta có $F(x) = -\dfrac{\cos\alpha x}{\alpha}$. Do vậy $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{|\alpha|}$; đặt tiếp $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$, ta có

$$g(x) \text{ giảm trên } [0,+\infty) \text{ và } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,\ g'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}} \text{ liên tục trên } [a,+\infty).$$

Do đó, theo tiêu chuẩn Dirichlet, tích phân được xét hội tụ.

Tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$ không hội tụ tuyệt đối vì nếu nó hội tụ tuyệt đối, tức là tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{|\sin\alpha x|}{x^p}dx$ hội tụ thì từ bất đẳng thức $\sin^2\alpha x \leqslant |\sin\alpha x|$ với mọi x, ta suy ra tích phân

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2\alpha x}{x^p}dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1-\cos 2\alpha x}{x^p}dx$$

hội tụ. Nhưng tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{x^p}dx$ với $0 < p \leqslant 1$ hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet (chứng minh tương tự trên). Do đó tích phân

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_a^{+\infty} \left[\frac{2\sin^2\alpha x}{x^p} + \frac{\cos 2\alpha x}{x^p}\right]dx$$

hội tụ. Điều này không thể xảy ra vì với $p \leqslant 1$, tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ phân kỳ.

- Nếu $p \leqslant 0$ thì tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x^p}dx$ phân kỳ. Thật vậy, với $p = 0$ ta được $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sin\alpha x dx$, tích phân này phân kỳ (xem Ví dụ 1.2). Giả sử tích phân hội tụ với một $p < 0$ nào đó. Đặt

$$f(x) = \frac{\sin\alpha x}{x^p},\quad g(x) = x^p,\quad x \geq 1.$$

Khi đó $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và hàm $g(x)$ giảm và bị chặn trên $[a,+\infty)$. Theo tiêu chuẩn Abel, tích phân

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_a^{+\infty} \sin\alpha x dx$$

hội tụ. Đây là điều vô lý.

Ví dụ 1.11 *Xét sự hội tụ của các tích phân Fresnel*

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx \ \text{ và } \ \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx.$$

Hàm số $x \mapsto \cos(x^2)$ liên tục trên $[0,+\infty)$. Ta chứng minh $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$ hội tụ. Thực hiện phép đổi biến số $t = x^2$, $x = \sqrt{t}$. Với $b \geq 1$, ta có

$$\int_1^b \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

Theo tiêu chuẩn Dirichlet, tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ hội tụ. Do vậy

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

Do đó

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \int_1^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

Vậy tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$ hội tụ. Tích phân này bán hội tụ vì tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ bán hội tụ (xem Ví dụ 1.10). Tương tự, tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ cũng là bán hội tụ.

Nhận xét 1.6 *Trong hai tích phân Fresnel nói trên, hàm số dưới dấu tích phân không dần về* 0 *khi* $x \to +\infty$.

2 Tích phân suy rộng loại 2 (tích phân suy rộng của hàm không bị chặn)

Bây giờ ta xét việc suy rộng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ trong đó hàm f không bị chặn trên $[a, b]$. Tích phân suy rộng loại này gọi là tích phân suy rộng loại 2.

2.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 2.1 *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên* $[a, b)$, *trong đó*

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty \text{ (điểm } b \text{ gọi là điểm bất thường của } f(x)\text{)}.$$

Giả sử $f(x)$ *khả tích trên mọi đoạn* $[a, b - \epsilon]$, *với* $\epsilon > 0$ *bé tuỳ ý. Ta gọi giới hạn*

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

là tích phân suy rộng loại 2 của $f(x)$ *trên* $[a, b]$ *và ký hiệu là* $\int_a^b f(x)dx$. *Như vậy*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

Nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn thì ta nói thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ, còn trong trường hợp ngược lại (không tồn tại giới hạn hoặc giới hạn bằng* ∞*) thì ta nói tích phân suy rộng* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ.*

Chẳng hạn các tích phân

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1}, \ \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \ \alpha > 0$$

là tích phân suy rộng loại 2 vì

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty, \ \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty.$$

Tương tự, khi điểm bất thường của f là $x = a$ hoặc điểm trong c của đoạn $[a, b]$ hoặc cả hai đầu mút a, b, ta định nghĩa như sau

Định nghĩa 2.2 *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên* $(a, b]$, *trong đó* $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$. *Giả sử* $f(x)$ *khả tích trên mọi đoạn* $[a + \epsilon, b]$, *với* $\epsilon > 0$ *bé tuỳ ý, ta định nghĩa*

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{dn}{=} \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

Nếu giới hạn là hữu hạn thì ta nói rằng $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ. Tích phân không hội tụ gọi là phân kỳ.*

Định nghĩa 2.3 *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên* (a, b), $c \in (a, b)$, *trong đó* $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty$. *Nếu cả hai tích phân suy rộng* $\int_a^c f(x)dx$ *và* $\int_c^b f(x)dx$ *đều tồn tại và tổng*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

có nghĩa thì tổng này được gọi là tích phân suy rộng của hàm số f trên đoạn (a,b) và được ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Như vậy

$$\int_a^b f(x)dx \overset{dn}{=} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ nếu tổng ở vế phải là hữu hạn.

Nhận xét 2.1
- *Dễ dàng thấy rằng sự hội tụ và giá trị của tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm c.*
- *Hiển nhiên*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon'\to 0}} \int_{a+\epsilon'}^{b+\epsilon} f(x)dx.$$

trong đó $\epsilon \to 0, \epsilon' \to 0$ một cách độc lập với nhau.

Định nghĩa 2.4 *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a,b] \setminus \{c\}$, $c \in (a,b)$, trong đó $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$. Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ đều tồn tại và tổng*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

có nghĩa thì tổng này được gọi là tích phân suy rộng của hàm số f trên đoạn $[a,b]$ và được ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Như vậy

$$\int_a^b f(x)dx \overset{dn}{=} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ nếu tổng ở vế phải là hữu hạn.

Nhận xét 2.2
- *Dễ dàng thấy rằng sự hội tụ và giá trị của tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm c.*
- *Với cách xác định như trên ta có ngay*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon'\to 0}} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon'}^b f(x)dx \right].$$

trong đó $\epsilon \to 0, \epsilon' \to 0$ một cách độc lập với nhau.

Ví dụ 2.1 *Xét sự hội tụ của tích phân $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ nên đây là tích phân suy rộng loại hai (của hàm $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ với điểm bất thường là $x = 1$). Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \arcsin x \Big|_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \arcsin(1-\epsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 2.2 *Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng*

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} dx,\ a < b,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nếu $\alpha \leqslant 0$ thì tích phân đã cho là tích phân xác định thông thường. Với $\alpha > 0$, vì $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{1}{(b-x)^\alpha} = \infty$ nên tích phân đã là tích phân suy rộng loại 2 với điểm bất thường là $x = b$. Theo định nghĩa ta có (với $\alpha \neq 1$)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= -\lim_{\epsilon\to 0+} \int_a^{b-\epsilon} (b-x)^{-\alpha} d(b-x) \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0+} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^{b-\epsilon} \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{1-\alpha}[\epsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}]
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{nếu } \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha} & \text{nếu } \alpha < 1 \end{cases}$$

Riêng với $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{b-x} &= -\lim_{\epsilon\to 0+} \int_a^{b-\epsilon} \frac{d(b-x)}{b-x} \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0+} \ln|b-x|\Big|_a^{b-\epsilon} \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0+} (\ln\epsilon - \ln(b-a)) = +\infty.
\end{aligned}$$

Tóm lại nếu $\alpha < 1$, tích phân hội tụ, còn nếu $\alpha \geq 1$, tích phân phân kỳ.

Các kết quả được phát biểu trong định lí sau.

Định lý 2.1 *Tích phân $I = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha},\ a < b,\ \alpha \in \mathbb{R}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$ và phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.*

Tương tự ta có

Định lý 2.2 *Tích phân $I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha},\ a < b,\ \alpha \in \mathbb{R}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$ và phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.*

2.2 Các tính chất cơ bản

Sau đây ta phát biểu cho trường hợp tích phân suy rộng $I = \int_a^b f(x)dx$ với điểm bất thường $x = b$.

1) Hai tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$, $\int_A^b f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ với mọi $a < A < b$.

2) Nếu $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì

$$\int_a^b [C_1 f(x) + C_2 g(x)]dx = C_1 \int_a^b f(x)dx + C_2 \int_a^b g(x)dx$$

với C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý.

3) Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì ta có thể dùng công thức Newton-Leibnitz

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Thật vậy, bởi vì với mọi $\epsilon > 0$,

$$\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx = F(b-\epsilon) - F(a)$$

do đó

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}[F(b-\epsilon) - F(a)] = F(b) - F(a).$$

4) Đặt $t = \dfrac{1}{b-x} \Longrightarrow x = b - \dfrac{1}{t}$,

$$f(x) = f\big(b - \frac{1}{t}\big), \quad dx = \frac{dt}{t^2}.$$

Khi $x \to b - 0$ thì $t \to +\infty$ và

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} f\big(b - \frac{1}{t}\big)\frac{dt}{t^2}\end{aligned}$$

Như vậy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} \varphi(t)dt = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

Do đó tích phân suy rộng loại 2 dạng $\int_a^b f(x)dx$ với điểm bất thường b được chuyển về tích phân suy rộng loại 1 dạng $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \varphi(t)dt$. Do vậy việc chứng minh các tính chất của tích phân suy rộng loại 2 trở nên đơn giản bằng cách chuyển về tích phân suy rộng loại 1 rồi áp dụng các kết quả đã biết.

2.3 Tích phân của các hàm số không âm

Sau đây ta sẽ phát biểu các kết quả cho trường hợp tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ với điểm bất thường $x = b$.

Định lý 2.3 *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a, b)$, khả tích trên mọi đoạn $[a, b-\epsilon]$, với $\epsilon \in (0, b-a)$. Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b)$ thì điều kiện cần và đủ để tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ là tồn tại $K > 0$ sao cho*

$$\Big|\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx\Big| \leqslant K, \quad \forall\epsilon \in (0, b-a).$$

Định lý 2.4 *(Tiêu chuẩn so sánh)*
Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ xác định trên $[a, b)$, khả tích trên mọi đoạn $[a, b-\epsilon]$, với $\epsilon > 0$ đủ nhỏ. Giả sử

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \text{ với mọi } x \in [a, b).$$

Khi đó

1) Nếu $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ và*

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

2) Nếu $\int_a^b f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^b g(x)dx$ *cũng phân kỳ.*

Hệ quả 2.1 *Cho hai hàm số* $f(x), g(x)$ *xác định trên* $[a, b)$*, khả tích trên mọi đoạn* $[a, b-\epsilon]$*, với* $\epsilon > 0$ *đủ nhỏ. Giả sử*

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \leqslant K \leqslant +\infty).$$

Khi đó

1) Nếu $0 < K < +\infty$ *thì* $\int_a^b f(x)dx$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *đồng thời hội tụ hoặc phân kỳ.*

2) Nếu $K = 0$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *cũng hội tụ.*

3) Nếu $K = +\infty$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *cũng phân kỳ.*

Nhận xét 2.3 *(i) Từ hệ quả trên ta thấy ngay rằng nếu* $f(x)$ *và* $g(x)$ *là hai VCL tương đương khi* $x \to b-0$*, tức là nếu*

$$f(x) \sim g(x) \text{ khi } x \to b-0$$

thì các tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Có lẽ vì vậy mà một số tài liệu gọi hệ quả trên là tiêu chuẩn tương đương.*

(ii) Hàm so sánh đơn giản thường được chọn là hàm dạng $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ *(hoặc* $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$*,* $\alpha > 0$ *và kết hợp sử dụng kết quả của Định lý 2.4 và Hệ quả 2.1.*

(iii) Nếu $f(x) \leqslant 0$ *thì chỉ việc khảo sát tích phân*

$$-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx.$$

Nếu $f(x)$ *đổi dấu một số lần trong* $[a, a']$ *và trong* $[a', b)$ *giữ nguyên một dấu thì để khảo sát sự hội tụ hay phân kỳ của tích phân* $\int_a^b f(x)dx$*, ta chỉ việc cắt bỏ đi đoạn* $[a, a']$ *và khảo sát tích phân trong khoảng còn lại* $\int_{a'}^b f(x)dx$*.*

Ví dụ 2.3 *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng loại 2 sau đây*

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$ *2)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$

3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ *4)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$

Giải:
1) Vì $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{1}{\cos x}=+\infty$ *nên tích phân dã cho là tích phân suy rộng loại 2 với bất thường là* $x=\pi/2$. *Vậy*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x}&=\lim_{b\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^b\frac{dx}{\cos x}\\&=-\lim_{b\to\frac{\pi}{2}-0}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|\Big|_0^b\\&=-\lim_{b\to\frac{\pi}{2}-0}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|=\infty.\end{aligned}$$

Vậy tích phân đã cho phân kỳ.
2) Ta phân tích

$$\begin{aligned}\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}&=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\\&=\lim_{a\to1-0}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{b\to1+0}\int_b^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\\&=\lim_{a\to1-0}\arcsin x\Big|_0^a+\lim_{b\to1+0}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\Big|_b^2\\&=\lim_{a\to1-0}\arcsin a+\lim_{b\to1+0}[\ln(2+\sqrt{3})-\ln|b+\sqrt{b^2-1}|]\\&=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Vậy tích phân đã cho hội tụ. Nếu chú ý đến tính chất 3) trong Mục 2.2 ta có thể tính đơn giản hơn như sau:

$$\begin{aligned}\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}&=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\\&=\arcsin x\Big|_0^1+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\Big|_1^2\\&=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

3) Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-4x+4)}}&=\int_1^3\frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\\&=\arcsin(x-2)\Big|_1^3=\arcsin 1+\arcsin 1=\pi.\end{aligned}$$

Vậy tích phân đã cho hội tụ.
4) Nhận xét

$$\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{x^2+x+1}\right).$$

Do đó, $\displaystyle\int_0^1\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$ *là tích phân xác định thông thường nên là một số hữu hạn. Còn* $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x}=\infty$, *bởi vì*

$$\lim_{c\to1-0}\int_0^c\frac{dx}{1-x}=-\lim_{c\to1-0}\int_0^c\frac{d(1-x)}{1-x}=-\lim_{c\to1-0}\ln(1-c)=+\infty.$$

Vậy $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1-x^3}dx=+\infty$, *tức là tích phân đã cho phân kỳ.*

Ví dụ 2.4 *Xét sự hội tụ của tích phân* $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Giải. Vì $\ln x \leqslant 0$ với mọi $x \in (0,1]$ nên để áp dụng được Hệ quả 2.1, ta xét tích phân $-\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. Ta có

$$\lim_{x\to+0}\frac{-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x^{3/4}}} = \lim_{x\to+0}(-x^{1/4}\ln x) = 0.$$

Vì $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}}$ hội tụ nên $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ (thực ra, bài này có thể giải đơn giản hơn bằng cách dùng định nghĩa và công thức tích phân từng phần để tính trực tiếp).

Nhận xét 2.1 *Để áp dụng cho nhiều ví dụ khác, lời giải trên thường được trình bày dưới dạng tinh hơn như sau: Với mọi $\alpha > 0$, ta có $\lim\limits_{x\to+0}(x^\alpha \ln x) = 0$ (sử dụng quy tắc L'Hospital). Vì vậy*

$$|\ln x| < x^{-\alpha} \text{ với mọi } x > 0 \text{ đủ nhỏ và } \alpha > 0.$$

Từ đó:

$$\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}} \text{ với mọi } x > 0 \text{ đủ nhỏ và } \alpha > 0.$$

Chọn $\alpha = \frac{1}{4}$ ta có ngay

$$\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{3/4}} \text{ với } x > 0 \text{ đủ nhỏ}.$$

Từ đó suy ra tích phân hội tụ tuyệt đối.

Nhận xét 2.4 *Nếu $f(x)$ là một hàm xác định trên $(a,+\infty)$ và $x = a$ là điểm bất thường (có thể có một số hữu hạn điểm bất thường trên khoảng này), các điều kiện khả tích thỏa mãn. Khi đó ta định nghĩa tích phân trên $(a,+\infty)$ như sau:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \stackrel{dn}{=} \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

trong đó $a < b < +\infty$ là số tùy ý (dễ kiểm chứng rằng vế phải không phụ thuộc vào cách chọn b). Một số tài liệu gọi đây là tích phân suy rộng loại 3 (tích phân suy rộng hỗn hợp).

Ví dụ 2.5 *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng loại 2 sau*

1) $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}dx,\ n \in \mathbb{N}$ 2) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$

3) $\int_0^1 \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$

Giải: 1) Vì $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} = +\infty$ nên tích phân đã cho là tích phân suy rộng loại 2 với điểm bất thường $x = 1$. Ta có

$$f(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{2(1-x)^{1/2}} \text{ khi } x \to 1-0.$$

mà $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ hội tụ ($\alpha = 1/2 < 1$). Vậy tích phân đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.
2) Vì

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} = \lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

nên đây là tích phân suy rộng loại 2 với điểm bất thường $x = 0$. Khi $x \to 0+0$ ta có

$$\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

nhưng $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^{1/2}}$ *hội tụ* ($\alpha = 1/2 < 1$) *nên tích phân đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.*
3) Vì

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

nên đây là tích phân suy rộng loại 2 với điểm bất thường $x = 1$. *Khi* $x \to 1-0$ *ta có*

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin 2x}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}} \sim \frac{\frac{\sin 2}{\sqrt{2}}}{(1-x)^{1/2}}$$

mà

$$\int_0^1 \frac{\frac{\sin 2}{\sqrt{2}}}{(1-x)^{1/2}} dx = \frac{\sin 2}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$$

hội tụ ($\alpha = 1/2 < 1$). *Vậy tích phân đã cho hội tụ tiêu chuẩn so sánh.*
4) Ta phân tích

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}}_{I_2}$$

Dễ thấy I_1 *là tích phân suy rộng loại 2 với điểm bất thường tại* $x = 0$. *Khi* $x \to 0+0$ *ta có*

$$\frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^{1/2}}$$

mà

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{x^{1/2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^{1/2}}$$

hội tụ vì $\alpha = 1/2 < 1$ *nên* I_1 *hội tụ. Còn* I_2 *là tích phân suy rộng loại 1. Ta có*

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \quad x \to +\infty$$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ *hội tụ vì* $\alpha = 3/2 < 1$, *do đó* I_2 *hội tụ. Vậy* $I = I_1 + I_2$ *hội tụ.*

Cũng như đối với tích phân suy rộng loại 1, Định lý 2.4 và Hệ quả 2.1 chỉ áp dụng được cho trường hợp các hàm số dưới dấu tích phân không âm.

2.4 Tích phân suy rộng loại 2 của hàm có dấu bất kỳ

Định lý 2.5 *(Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của tích phân)*
Cho hàm số $y = f(x)$ *xác định trên* $[a, b)$ *với* $x = b$ *là điểm bất thường, khả tích trên mọi đoạn* $[a, c]$, *với* $a \leqslant c < b$. *Điều kiện cần và đủ để tích phân suy rộng* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ là với mọi* $\epsilon > 0$ *bất kỳ, tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho với mọi* $\delta, \delta' \in (b-\delta, b)$ *thì*

$$\left| \int_\delta^{\delta'} f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Đây chính là tiêu chuẩn Cauchy cho hàm $F(\delta) = \int_a^\delta f(x)dx$ *khi* $\delta \to b-0$.

Định nghĩa 2.5 *Tích phân suy rộng* $\int_a^b f(x)dx$ *với điểm bất thường* $x = b$ *được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu tích phân suy rộng* $\int_a^b |f(x)|dx$ *hội tụ.*

Định lý 2.6 *Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.*

Tương tự như trong trường hợp tích phân suy rộng loại 1, ta cũng có các tiêu chuẩn Dirichlet và Abel đối với tích phân các hàm số không bị chặn. Bạn đọc tự phát biểu và chứng minh các tiêu chuẩn này.

Ví dụ 2.6 *Xét sự hội tụ của tích phân sau* $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^\alpha} dx$ *với* $\alpha \in (0,1)$.

Giải. Ta có

$$\left|\frac{\ln x}{1+x^\alpha}\right| \leqslant \frac{|\ln x|}{x^\alpha} = \frac{-\ln x}{x^\alpha}, \quad \forall x \in (0,1).$$

Chọn $\beta \in (0,1)$: $0 < \alpha < \beta < 1$, khi đó

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\ln x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\beta}} = \lim_{x\to 0^+} (-x^{\beta-\alpha}) \ln x = 0.$$

Nhưng $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ hội tụ vì $0 < \beta < 1$ do đó $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^\alpha} dx$ hội tụ tuyệt đối.

Ta nhắc lại một tính chất cơ bản của tích phân xác định như sau.

Định lý 2.7 *Nếu các hàm số* $f(x)$ *và* $\varphi(x)$ *chỉ khác nhau tại một số hữu hạn điểm trên khoảng* $[a,b]$ *thì với giả thiết là một trong các hàm số này khả tích, ta có thể khẳng định rằng hàm số kia cũng khả tích và hơn nữa*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Nhận xét 2.5 Giả sử hàm số $f(x)$ xác định khắp nơi trên $[a,b]$ trừ một số hữu hạn điểm x_1, x_2, ..., x_n. Định lý trên cho phép đưa ra khái niệm tích phân của các hàm số như thế bằng cách sau:

Xác định thêm cho $f(x)$ *những giá trị bất kỳ tại các điểm* x_1, x_2, ..., x_n *và gọi* $\varphi(x)$ *là hàm số mới đã xác định trong toàn khoảng. Nếu* $\varphi(x)$ *khả tích trong khoảng* $[a,b]$ *thì ta cũng nói* $f(x)$ *khả tích trong khoảng này. Theo định nghĩa ta cũng đặt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Ta thấy tính khả tích của $f(x)$ *và giá trị của tích phân không phụ thuộc vào cách bổ sung giá trị cho hàm số này.*

Ví dụ 2.7

- *Hàm số* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(0 < x \leqslant 1)$ *liên tục trên* $(0,1]$. *Vì*

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

  nên ta xét hàm

  $$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

  liên tục trên toàn đoạn $[0,1]$. *Vậy theo Định lý 2.7,* $f(x)$ *khả tích trong khoảng* $[0,1]$ *và*

  $$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

- *Hàm số* $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant 1$, $f(0) = 5$, *khả tích trong khoảng* $[0,1]$ *vì rằng nó bị chặn và có trong khoảng này chỉ một điểm gián đoạn* $x = 0$.

Ví dụ 2.8 *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng*

$$1)\ I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \qquad\qquad 2)\ J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} dx.$$

Giải. 1) $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I_1 + I_2.$

- *Vì* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ *nên* I_1 *là tích phân xác định thông thường (xem chú ý sau Định lý 2.7 và Ví dụ 2.7). Do vậy nó là số hữu hạn.*
- I_2 *hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet.*

Do đó tích phân đã cho hội tụ.

2) $J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} dx = J_1 + J_2.$

- *Vì* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} = 0$ *nên* J_1 *là tích phân xác định thông thường (xem chú ý sau Định lý 2.7 và Ví dụ 2.7). Do vậy nó là số hữu hạn.*
- *Vì* $\frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{x}{x+2} \sim \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{x}}$ *(khi* $x \to +\infty$*) và* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *phân kỳ nên* J_2 *phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh.*

Do đó tích phân đã cho phân kỳ.

Ví dụ 2.9 *Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng*

$$1)\ I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} dx \qquad\qquad 2)\ J = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx.$$

Giải. 1) $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} dx = I_1 + I_2.$

- $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} dx$*. Ta có*

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (\textit{khi } x \to 0^+).$$

  Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *hội tụ nên* I_1 *hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.*

- $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} dx$*. Nhận xét rằng*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0.$$

  Do đó tồn tại $A > 0$ *sao cho* $\ln(1+x^2) < x^\alpha$*, với mọi* $x > A$*,* $\alpha > 0$*. Từ đó*

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} < \frac{x^\alpha}{2\sqrt{x^6}} \quad \textit{với mọi } x > A,\ \alpha > 0.$$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} < \frac{1}{2x^{3-\alpha}} \quad \textit{với mọi } x > A,\ \alpha > 0.$$

  Chọn $\alpha = 1$ *ta được*

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} < \frac{1}{2x^2} \quad \textit{với mọi } x > A.$$

  Tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ *hội tụ nên* I_2 *hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh. Tóm lại tích phân đã cho hội tụ.*

Lưu ý rằng việc xét sự hội tụ của I_2 có thể sử dụng đánh giá đơn giản hơn như sau:

$$\forall x \geq 1 : \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{2x^6+x^5}} < \frac{\ln(1+2x+x^2)}{\sqrt{2x^6}} = \frac{2\ln(1+x)}{\sqrt{2x^6}} < \frac{2x}{\sqrt{2}x^3} = \frac{\sqrt{2}}{x^2}.$$

2) $J = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx = J_1 + J_2.$

- $I_1 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx$. *Ta có*

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2x^{1/2}} \quad (x \to 0^+).$$

Tích phân $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ *hội tụ nên* J_1 *hội tụ.*

- $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3/2}} dx$. *Ta có*

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2x^{3/2}} \quad (x \to +\infty).$$

Tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{x^{3/2}} dx$ *hội tụ nên* J_2 *hội tụ. Vậy tích phân đã cho hội tụ.*