

LABORATOR#1

I. ECUAȚII NELINIARE: METODA BISECȚIEI

- Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă a.î. $f(a)f(b) < 0$. Atunci $\exists x^* \in (a, b)$ a.î. $f(x^*) = 0$.
- Metoda bisecției generează un șir de aproximări $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ convergent către soluția exactă a ecuației $f(x) = 0$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, unde x^* este soluția exactă a ecuației $f(x) = 0$.
- Metoda bisecției constă în înjumătățirea, la fiecare pas, a intervalului și selectarea celui interval în care se află soluția.

ALGORITHM (Metoda bisecției)

```
Date:    $f, a, b$ ;  
  
 $n = 0$  :  $a_n = a$ ;    $b_n = b$ ;  
          $x_n = a_n + (b_n - a_n)/2$ ;  
 $n \geq 1$  : if  $f(a_{n-1})f(x_{n-1}) \leq 0$  then  
            $a_n = a_{n-1}$ ;    $b_n = x_{n-1}$ ;  
         else  
            $a_n = x_{n-1}$ ;    $b_n = b_{n-1}$ ;  
         endif  
          $x_n = a_n + (b_n - a_n)/2$ ;  
          $n = n + 1$ ;   repeat step for  $n \geq 1$ 
```

EX#1 Fie ecuația $x^6 - x - 1 = 0$.

- Să se construiască în **Python** graficul funcției $f(x) = x^6 - x - 1$ pe intervalul $[-2, 2]$ și dreapta de ecuație $y = 0$, în același sistem de coordonate xOy .
- Să se creeze un fișier script în **Python** care construiește soluția aproximativă a ecuației prin metoda bisecției cu eroarea $TOL = 10^{-5}$ pentru fiecare interval în parte $[-1, 0]$, respectiv $[1, 2]$. Se va considera criteriul de oprire $|f(x_n)| < TOL$.

EX#2 (a) Să se construiască în **Python** graficul funcției $g(x) = e^{-x/2}(x^2 + 2x - 8)$ pe intervalul $[-3, 3]$ și dreapta de ecuație $y = 0$, în același sistem de coordonate xOy .

(b) Să se creeze un fișier script în **Python** pentru a calcula x_{10} , care aproximează soluția ecuației $g(x) = 0$ pe intervalul $[-3, 3]$ prin metoda bisecției.

- (c) Fie $x^* = 2$ soluția exactă a acestei ecuații. Să se calculeze eroarea absolută $\text{err}_a(x_n) = |x^* - x_n|$ și eroarea relativă $\text{err}_r(x_n) = |x^* - x_n|/|x^*|$, $n = \overline{1, 10}$, și să se reprezinte grafic.

EX#3 (a) Să se creeze o funcție în **Python** care determină soluția numerică a ecuației $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, folosind metoda biseției și are ca *date de intrare*:

- (i) funcția f care definește ecuația $f(x) = 0$;
- (ii) capetele intervalului de izolare a soluției $[a, b]$;
- (iii) numărul maxim de iterații **ITMAX**;
- (iv) toleranța **TOL** cu care este aproximată numeric soluția exactă a ecuației $f(x) = 0$ pe intervalul $[a, b]$;
- (v) argumentul opțional **OPT** prin care se selectează criteriul de oprire dorit, e.g. **OPT** = 1 pentru criteriul $|b_n - a_n| \leq \text{TOL}$, **OPT** = 2 pentru criteriul $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| \leq \text{TOL}$, respectiv **OPT** = 3 pentru criteriul $|f(x_n)| \leq \text{TOL}$;

și ca *date de ieșire*:

- (i) soluția numerică obținută prin metoda biseției x_n ;
 - (ii) numărul de iterații n necesare obținerii soluției numerice x_n .
- (b) Într-un fișier script, rulați funcția **Python** creată la (a) pentru $f(x) = x^2 - 3$, $[a, b] = [1, 2]$, **ITMAX** = 10^4 , **TOL** = 10^{-8} și toate cele trei criterii de oprire menționate la (a).