LABORATOR#4

I. ECUAŢII NELINIARE: METODE ITERATIVE PENTRU RĂDĂCINI MULTIPLE

ALGORITM (Metoda Newton-Raphson modificată – ordinul de multiplicitate, m, cunoscut)

Date: $f\,,\ a\,,\ b;$

$n = 0:\ x_n \in [a, b]\,;$

$n \geq 1:\ x_n = x_{n-1} - m\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\,;$

$n = n + 1;$ `repeat step for` $n \geq 1;$

ALGORITM (Metoda Newton-Raphson modificată – ordinul de multiplicitate, m, necunoscut)

Date: $f\,,\ a\,,\ b;$

$n = 0:\ x_n \in [a, b]\,;$

$n \geq 1:\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})}{\big[f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})\big]'}\,;$

$n = n + 1;$ `repeat step for` $n \geq 1;$

OBS: Metodele Newton-Raphson modificate au **viteza/ordinul de convergenţă cel puţin pătratică/pătratic.**

EX#1 Fie ecuaţia:

$$f(x) := x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2\,(x-2) = 0\,, \quad x \in [0; 1,75]\,. \tag{1}$$

(a) Reprezentaţi grafic funcţiile f şi f' pe intervalul $[0; 1,75]$ şi salvaţi imaginile cu numele `GraficFunctie.eps`, respectiv `GraficDerivata.eps`.

(b) Să se construiască în `Python` funcţia `NewtonRaphsonModificata1` care determină rădăcina cu ordinul de multiplicitate, $m > 1$, cunoscut pentru ecuaţia neliniară $f(x) = 0$, folosind metoda Newton-Raphson modificată corespunzătoare.

Folosiţi ca **date de intrare** ale funcţiei `NewtonRaphsonModificata1`:

- m – ordinul de multiplicitate a soluţiei;
- f – funcţia ce defineşte ecuaţia neliniară;

- df – derivata funcţiei f;
- $x0$ – aproximarea iniţială a soluţiei ecuaţiei neliniare;
- ITMAX – numărul maxim de iteraţii;
- TOL – toleranţa admisă a soluţiei numerice;

iar ca **date de ieşire**:

- sol – soluţia numerică obţinută;
- $iter$ – numărul de iteraţii necesare.

Criteriul de oprire folosit este cel uzual, i.e. $\mathrm{ErrRel}(n_{\mathrm{final}}) < \mathrm{TOL}$ sau $|f(n_{\mathrm{final}})| < \mathrm{TOL}$ sau $n > \mathrm{ITMAX}$, unde $\mathrm{ErrAbs}(n)$ şi $\mathrm{ErrRel}(n)$ sunt erorile absolută şi relativă la iteraţia n în raport cu soluţia numerică de la iteraţia anterioară.

(c) Să se construiască în `Python` funcţia `NewtonRaphsonModificata2` care determină rădăcina cu ordinul de multiplicitate, $m > 1$, necunoscut pentru ecuaţia neliniară $f(x) = 0$, folosind metoda Newton-Raphson modificată corespunzătoare.

Folosiţi ca **date de intrare** şi **date de ieşire** ale funcţiei `NewtonRaphsonModificata2`, precum şi **criteriul de oprire**, cele utilizate pentru `NewtonRaphsonModificata1`, fără ordinul de multiplicitate a soluţiei, m, dar cu derivata de ordinul doi a lui f, $d2f$.

(d) Afişaţi, sub forma unui tabel, următorii parametri obţinuţi cu funcţile `NewtonRaphsonModificata1`, `NewtonRaphsonModificata2` şi `NewtonRaphsonf`, vezi Laboratorul #2, pentru ecuaţia (1), $x_0 = 0$, $\mathrm{ITMAX} = 20$ şi $\mathrm{TOL} = 10^{-10}$:

- numărul iteraţiei, n;
- soluţia numerică corespunzătoare iteraţiei n, x_n;
- eroarea absolută în raport cu soluţia numerică de la iteraţia anterioară, $\mathrm{ErrAbs}(n) = |x_{n-1} - x_n|$;
- eroarea relativă în raport cu soluţia numerică de la iteraţia anterioară, $\mathrm{ErrRel}(n) = \mathrm{ErrAbs}(n)/|x_{n-1}|$;
- eroarea reziduală corespunzătoare iteraţiei n, $|f(x_n)|$;
- toleranţa admisă a soluţiei numerice, TOL.

II. ECUAŢII NELINIARE: TEHNICI DE ACCELERARE A CONVERGENŢEI

ALGORITM (Metoda lui Aitken)

Date: ϕ `(construită pornind de la` f`),` a, b;

$x_0 \in [a,b]$ `arbitrar;` $x_n = \phi(x_{n-1})\,,\quad n \geq 1;$

$$n \geq 2:\ \widehat{x}_n = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{(x_n - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_{n-2})} = \frac{x_n x_{n-2} - x_{n-1}^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}\,;$$

$n = n + 1;$ `repeat step for` $n \geq 2;$

ALGORITM (Metoda lui Steffensen)

Date: ϕ `(construită pornind de la` f`),` a, b;
$n = 0:$ $\widehat{x}_{3n} \in [a, b]$; $\quad \widehat{x}_{3n+1} = \phi(\widehat{x}_{3n})$; $\quad \widehat{x}_{3n+2} = \phi(\widehat{x}_{3n+1})$;
$n \geq 1:$ $\widehat{x}_{3n} = \widehat{x}_{3n-1} - \dfrac{(\widehat{x}_{3n-1} - \widehat{x}_{3n-2})^2}{(\widehat{x}_{3n-1} - \widehat{x}_{3n-2}) - (\widehat{x}_{3n-2} - \widehat{x}_{3n-3})} = \dfrac{\widehat{x}_{3n-1}\widehat{x}_{3n-3} - \widehat{x}_{3n-2}^2}{\widehat{x}_{3n-1} - 2\widehat{x}_{3n-2} + \widehat{x}_{3n-3}}$;
$\widehat{x}_{3n+1} = \phi(\widehat{x}_{3n})$; $\quad \widehat{x}_{3n+2} = \phi(\widehat{x}_{3n+1})$;
$n = n + 1$; `repeat step for` $n \geq 1$;

EX#2 (a) Să se construiască în `Python` funcţia `Aitken` care determină rădăcinile ecuaţiei neliniare $f(x) = 0$, folosind metoda lui Aitken pentru funcţia de punct fix asociată metodei Newton-Raphson.

Folosiţi ca **date de intrare** ale funcţiei `Aitken`:

- f – funcţia ce defineşte ecuaţia neliniară;
- *phi* – funcţia de punct fix asociată;
- $x0$ – aproximarea iniţială a soluţiei ecuaţiei neliniare;
- ITMAX – numărul maxim de iteraţii;
- TOL – toleranţa admisă a soluţiei numerice;

iar ca **date de ieşire**:

- *sol* – soluţia numerică obţinută;
- *iter* – numărul de iteraţii necesare.

Criteriul de oprire folosit este cel uzual, i.e. $\mathrm{ErrRel}(n_{\mathrm{final}}) < \mathrm{TOL}$ sau $|f(n_{\mathrm{final}})| < \mathrm{TOL}$ sau $n > \mathrm{ITMAX}$, unde $\mathrm{ErrAbs}(n)$ şi $\mathrm{ErrRel}(n)$ sunt erorile absolută şi relativă la iteraţia n în raport cu soluţia numerică de la iteraţia anterioară.

(b) Să se construiască în `Python` funcţia `Steffensen` care determină rădăcinile ecuaţiei neliniare $f(x) = 0$, folosind metoda lui Steffensen pentru funcţia de punct fix asociată metodei Newton-Raphson.

Folosiţi ca **date de intrare** şi **date de ieşire** ale funcţiei `Steffensen`, precum şi **criteriul de oprire**, cele utilizate pentru `Aitken`.

(c) Afişaţi, sub forma unui tabel, următorii parametri obţinuţi cu funcţile `Aitken`, `Steffensen` şi `NewtonRaphsonf` pentru ecuaţia $f(x) := x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2\,(x-2) = 0$, $x_0 = 0$, $\mathrm{ITMAX} = 20$ şi $\mathrm{TOL} = 10^{-10}$:

- numărul iteraţiei, n;
- soluţia numerică corespunzătoare iteraţiei n, x_n;
- eroarea absolută în raport cu soluţia numerică de la iteraţia anterioară, $\mathrm{ErrAbs}(n) = |x_{n-1} - x_n|$;
- eroarea relativă în raport cu soluţia numerică de la iteraţia anterioară, $\mathrm{ErrRel}(n) = \mathrm{ErrAbs}(n)/|x_{n-1}|$;
- eroarea reziduală corespunzătoare iteraţiei n, $|f(x_n)|$;
- toleranţa admisă a soluţiei numerice, TOL.