Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Analiză Numerică & Metode Numerice
09–13.10.2023

LABORATOR#2

I. ECUAŢII NELINIARE: METODE ITERATIVE DE PUNCT FIX

ALGORITM (Metodă iterativă de punct fix)

Date: ϕ `(construită pornind de la` f`),` a, b;

$n = 0:\ x_n \in [a, b]$;

$n \geq 1:\ x_n = \phi(x_{n-1})$;

$n = n + 1$; `repeat step for` $n \geq 1$;

OBS: Metodele iterative de punct fix au **viteza/ordinul de convergenţă cel puţin liniară.**

EX#1 Fie ecuaţia:

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0\,, \quad x \in [1, 2]\,. \tag{1}$$

(a) Să se construiască în `Python` o funcţie `MetPunctFix` care are ca date de intrare (i) funcţia de punct fix ϕ, (ii) aproximarea iniţială x_0 şi (iii) numărul maxim de iteraţii N, iar ca dată de ieşire soluţia aproximativă generată de metoda de punct fix cu datele de intrare de mai sus.

(b) Să se implementeze următoarele cerinţe:

(b1) Să se construiască graficul funcţiei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ pe intervalul $[1, 2]$.

(b2) Considerăm funcţiile $\phi_j : \mathscr{D}_{\phi_j} \cap [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3, 4$, unde $\mathscr{D}_{\phi_j}$ sunt domeniile de definiţie ale funcţiilor ϕ_j, $j = \overline{1, 4}$, definite prin:

(i) $\phi_1(x) = -x^3 - 4x^2 + x + 10$;

(ii) $\phi_2(x) = \sqrt{(10/x) - 4x}$;

(iii) $\phi_3(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$;

(iv) $\phi_4(x) = \sqrt{10/(x + 4)}$.

Să se construiască graficele funcţiilor ϕ_j, $|\phi_j'|$, $j = \overline{1, 4}$, pe intervalul maxim $[1, 2]$ şi să se determine care dintre acestea verifică ipotezele Teoremei lui Brouwer.

(b3) Să se construiască aproximările x_n, $n = \overline{1, N}$, pentru soluţia ecuaţiei (1), apelând procedura `MetPunctFix` cu ϕ_j, $j = \overline{1, 4}$, $x_0 = 1$ şi $N = 20$.

(b4) Care dintre funcţiile ϕ_j, $j = \overline{1, 4}$, generează cea mai rapidă metodă de punct fix în cazul alegerii valorii iniţiale $x_0 = 1$?

II. ECUAŢII NELINIARE: METODA NEWTON-RAPHSON

ALGORITM (Metoda Newton-Raphson)

Date: f, f', a, b;

$n = 0: \ x_n \in [a, b]$;

$n \geq 1: \ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$;

$n = n + 1$; `repeat step for` $n \geq 1$;

OBS: Metoda Newton-Raphson are **viteza/ordinul de convergenţă cel puţin pătratică.**

EX#2 Fie $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x^2} \cos x$.

(a) Reprezentaţi graficul funcţiei f şi salvaţi imaginea cu numele `Graficf.eps`

(b) Creaţi o funcţie `NewtonRaphsonf` care are ca date intrare (i) funcţia f, (ii) derivata acesteia f', (iii) aproximarea iniţială x_0 şi numărul maxim de iteraţii N, iar ca date de ieşire primele N aproximări ale rădăcinii funcţiei f generate de metoda Newton-Raphson. Rulaţi funcţia `NewtonRaphsonf` pentru f şi f' corespunzătoare **EX#2**, $x_0 = 0$ şi $N = 10$.

EX#3 (a) Creaţi fişierul funcţie `NewtonRaphson` cu datele de intrare f, f', prima aproximare x_0 şi toleranţa `TOL` şi data de ieşire x_{aprox}, generat de metoda Newton-Raphson şi criteriul de oprire $|f(x_n)| <$ `TOL`.

(b) Fie $f : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - x$, $x_0 = \pi/4$ şi `TOL` $= 10^{-8}$. Apelaţi funcţia creată la subpunctul (a) pentru aceste date de intrare.

Afişaţi, în acelaşi sistem de coordonate xOy, graficul funcţiei f, dreapta de ecuaţie $y = 0$ şi şirul de aproximări generat.