Lógica Fuzzy

Tópicos de Inteligência Artificial

Prof. Dr. Dieval Guizelini

Fevereiro/2023

Conceito

Usamos, no cotidiano, conceitos subjetivos para classificar ou considerar certas situações tais como :

- Siga em frente "alguns metros" .
- O dia está "parcialmente" nublado.
- Preciso perder "alguns" quilos para ficar "bem".
- Estamos com uma moeda "estável".

ou ainda :

- A classificação de certos objetos como "largo", "sujo",..
- A classificação de pessoas pela idade tal como "velho", "jovem",..
- A descrição de características humanas como "saudável", "alto", ..

No Brasil, o termo fuzzy foi traduzido como lógica nebulosa, lógica difusa. Mas o melhor modelo para representar a ideia de fuzzy são os “pelos de ovelhas”

Conjuntos fuzzy

Na teoria clássica, os conjuntos são denominados **"crisp"** e um dado elemento do universo em discurso (domínio) **pertence** ou **não pertence** ao referido conjunto.

Na teoria dos conjuntos **"fuzzy"** existe um grau de pertinência de cada elemento a um determinado conjunto. Por exemplo considere os conjuntos abaixo:

- Conjunto das pessoas com alta renda.
- Conjunto das pessoas altas.

Podemos verificar que não existe uma fronteira bem definida para decidirmos quando um elemento pertence ou não ao respectivo conjunto nos exemplos acima.

Com os conjuntos "fuzzy" podemos definir critérios e graus de pertinência para tais situações.

A função característica (crisp sets) pode ser generalizada de modo que os valores designados aos elementos do conjunto universo U pertençam ao intervalo de números reais de 0 a 1 inclusive, isto é [0,1].

Conjunto fuzzy

Estes valores indicam o GRAU DE PERTINÊNCIA dos elementos do conjunto U em relação ao conjunto A, isto é, quanto é possível para um elemento x de U pertencer ao conjunto A .

Tal função é chamada de FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA e o conjunto A é definido como "CONJUNTO FUZZY".

$$f(U_i) = N, onde\ N \subset [0,1]$$

Exemplo

Seja o conjunto universo **U** ={5,10,20,30,40,50,60,70,80} e consideremos os seguintes conjuntos "fuzzy:

A={crianças},

B={jovens},

C={adultos} e

D={velhos}

para os quais atribuímos os graus de pertinência dos elementos do conjunto **U** na seguinte tabela:

DADE	*Criança*	*Jovem*	*Adulto*	*Velho*
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

Suporte

- O SUPORTE de um conjunto fuzzy A no conjunto universo U é o conjunto clássico que contém todos os elementos de U que têm grau de pertinência maior do que zero (>0) e indicamos

$$\text{sup } A = \{ x \in U \mid \quad (x) > 0 \}$$

- **Exemplos**:
- O suporte do conjunto "fuzzy" "jovem" da tabela anterior é o conjunto clássico sup (jovem) = { 5,10,20,30,40,50}
- O conjunto vazio "fuzzy" tem um conjunto suporte vazio, isto é, o grau de pertinência é 0.
- Na tabela anterior o suporte do conjunto "fuzzy""crianças" é o conjunto vazio ∅.

Cardinalidade

- A CARDINALIDADE de um conjunto "fuzzy" A sobre um conjunto universo finito U é a soma dos graus de pertinência de todos os elementos de U em A e indicamos:

$$|A| = \sum_{x \subset U} \mu_A(x)$$

Exemplo:

- A cardinalidade do conjunto "fuzzy""velho"da tabela anterior é:
  | velho | = 0+0+0.1+0.2+0.4+0.6+0.8+1+1 = 4.1

Operações

O conjunto "fuzzy" A é um SUBCONJUNTO de um conjunto "fuzzy" B
se o grau de pertinência de cada elemento do conjunto universo U no conjunto A é menor ou igual que seu grau de pertinência no conjunto B;
ou seja para todo $x \epsilon U, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ e indicamos $A \subseteq B$.

Ex: na tabela anterior o conjunto fuzzy “velho” é um subconjunto de “adulto”.

Os conjuntos fuzzy A e B são IGUAIS se $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ para todo elemento $x \in U$ indicamos A=B

Os conjuntos fuzzy A e B NÃO SÃO IGUAIS se $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$ para todo elemento $x \in U$ indicamos A $\neq$ B

Operações

- Complemento: e um conjunto "fuzzy" **A** em relação ao conjunto universo U é indicado por **A’** e a função de pertinência é definido como:

$$\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)\ para\ todo\ x\ \in U$$

Ex: Se um elemento tem grau de pertinência 0.8 no conjunto A, seu grau de pertinência em A’ será 0.2

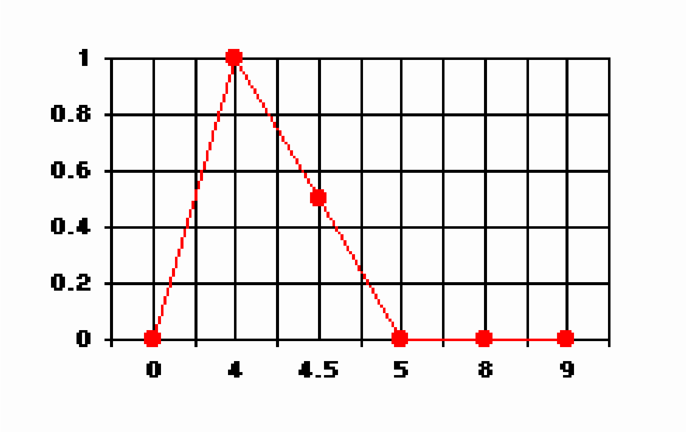
A **UNIÃO** de dois conjuntos difusos A e B é um conjunto $A \cup B$ tal que para todo $x \in U$ $\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$

A **INTERSECÇÃO** de dois conjuntos difusos A e B é um conjunto $A \cap B$ tal que para todo $x \in U$ $\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$

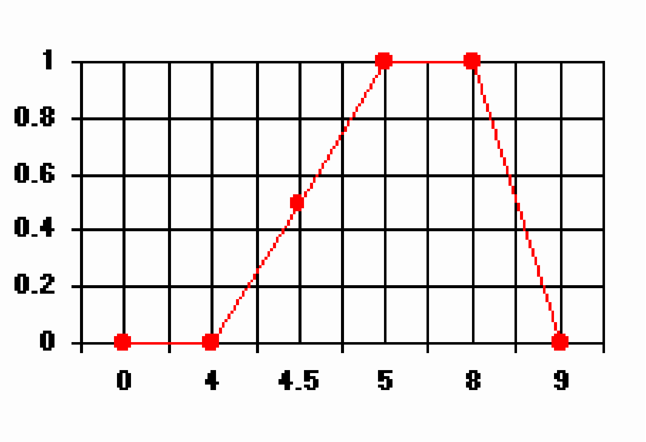
Exemplo

- Consideremos o conjunto **U** = [0 , 9] e sejam **A** e **B** dois conjuntos "fuzzy" e as respectivas funções de pertinência representadas pelas figuras:

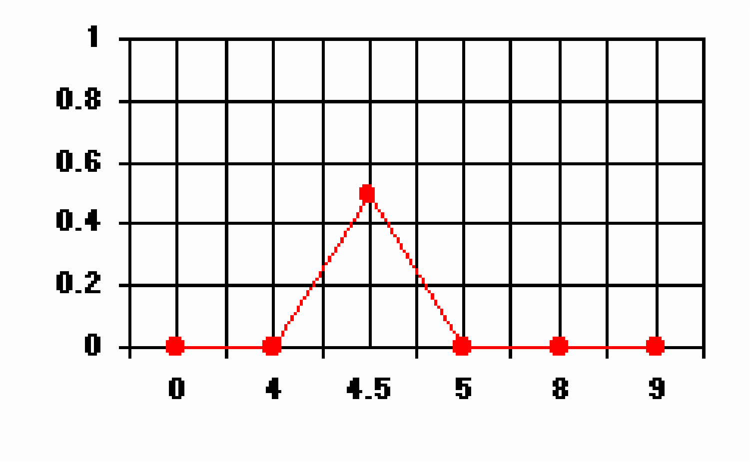
$\mu_A : U \rightarrow [0,1]$



$\mu_B : U \rightarrow [0,1]$



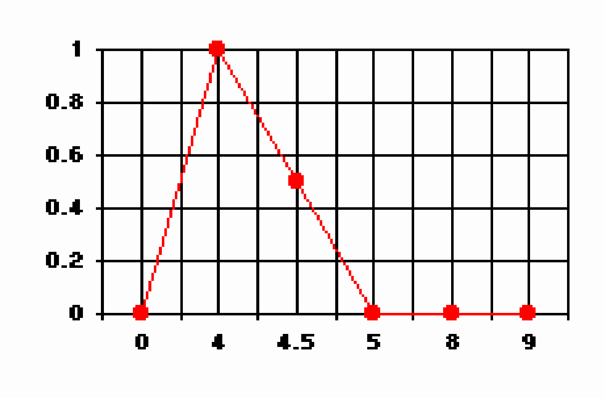
Intersecção



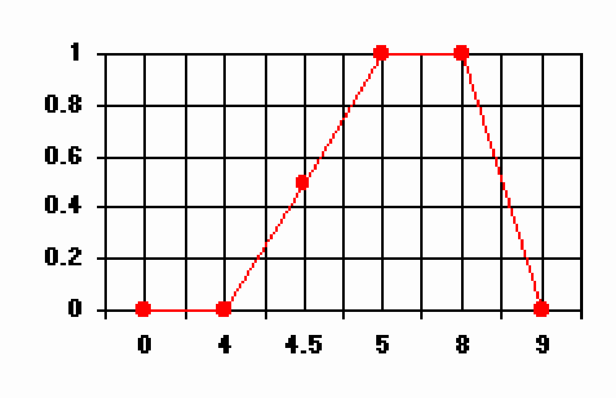
Exemplo

- Consideremos o conjunto **U** = [0 , 9] e sejam **A** e **B** dois conjuntos "fuzzy" e as respectivas funções de pertinência representadas pelas figuras:

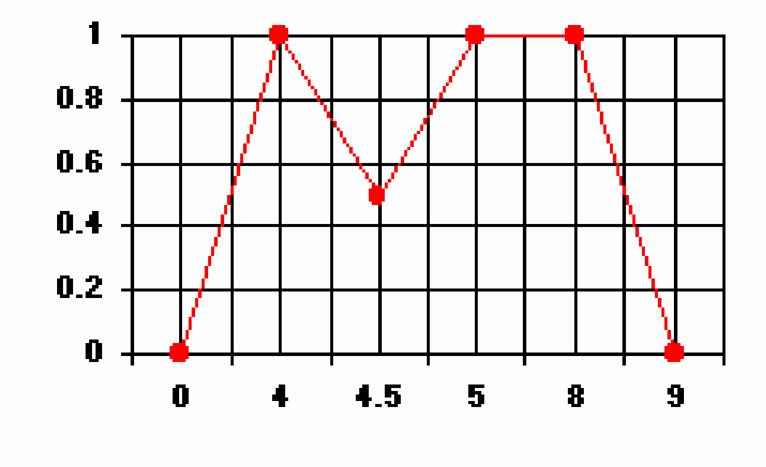
$\mu_A : U \rightarrow [0,1]$



$\mu_B : U \rightarrow [0,1]$



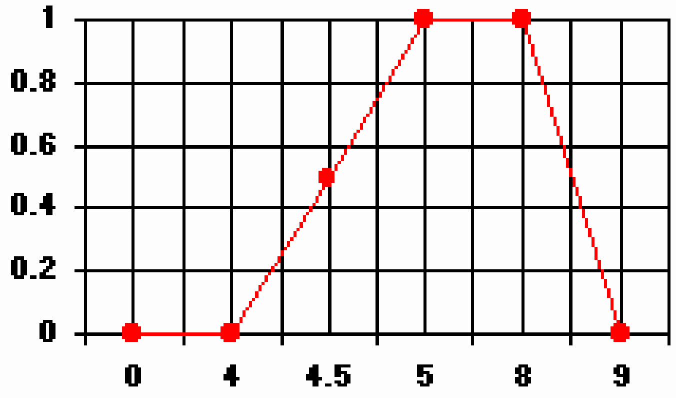
União



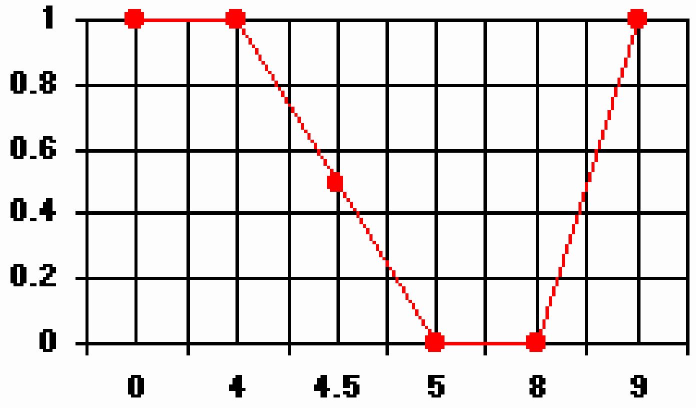
Exemplo

- Consideremos o conjunto **U** = [0 , 9] e sejam **A** e **B** dois conjuntos "fuzzy" e as respectivas funções de pertinência representadas pelas figuras:

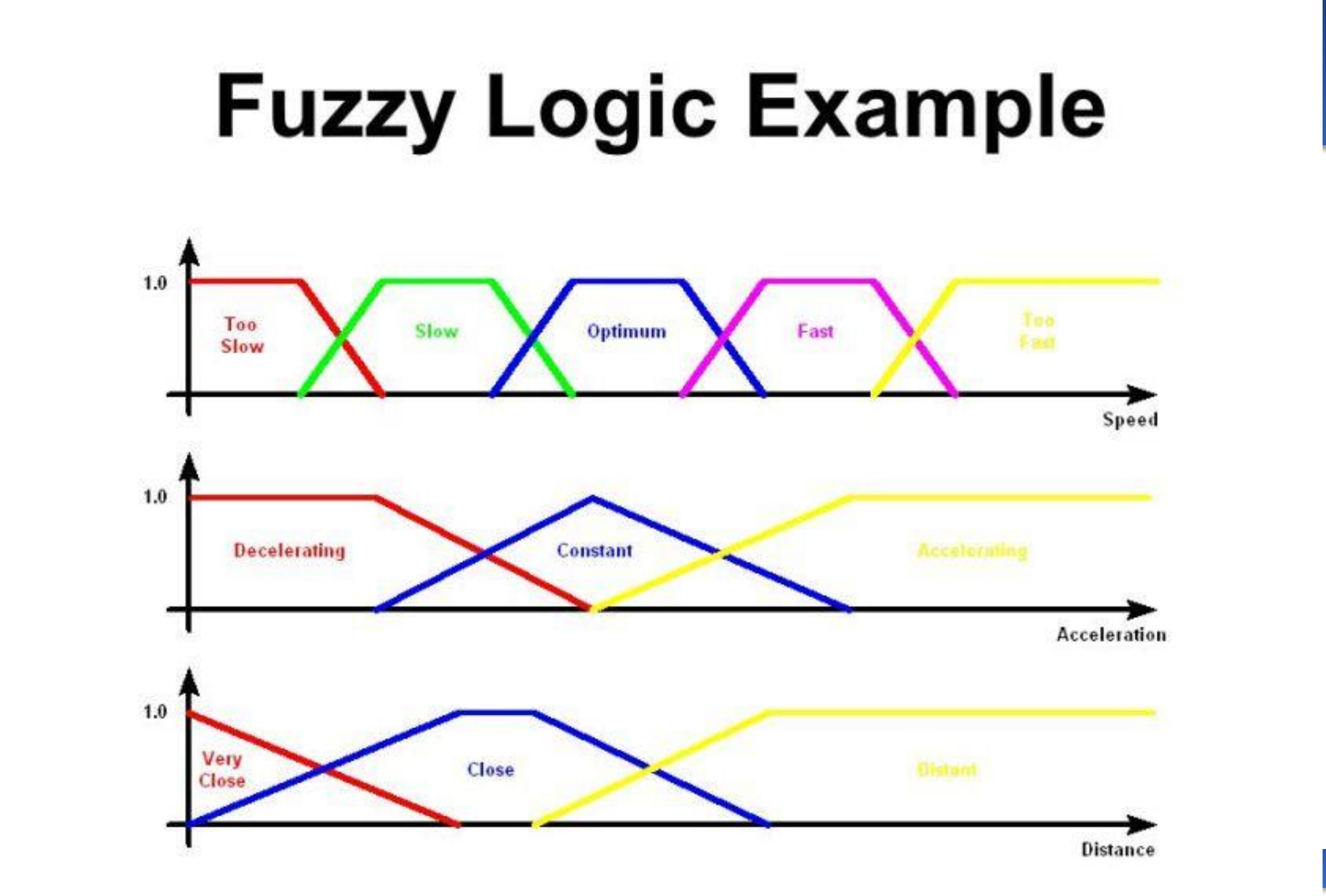
$\mu_B : U \to [0,1]$



Complementar

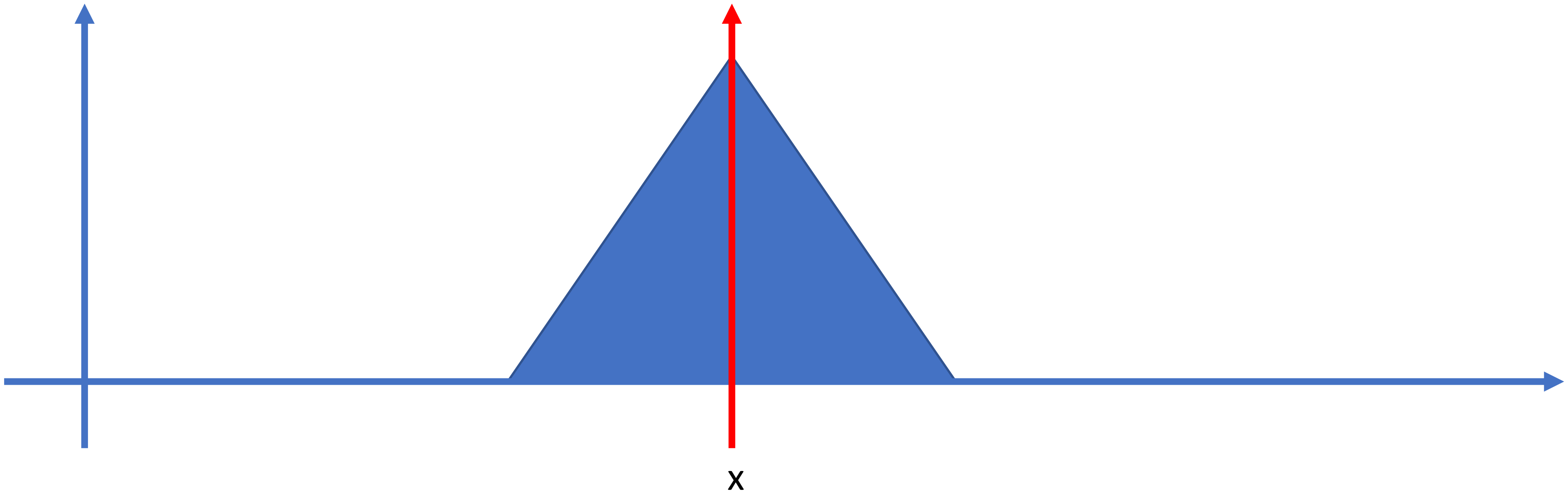


Fu


Fuzzy Logic Example
1.0
Too
Slow
Slow
Optimum
Fast
Too
Fast
Speed
1.0
Decelerating
Constant
Accelerating
Acceleration
1.0
Very
Close
Close
Distant
Distance

Função triangular

$$T_j = 1 - \frac{d}{|(i-j)|}, \ \max(i-d, 1) \leq j \leq \min(i+d, n) \qquad (2)$$

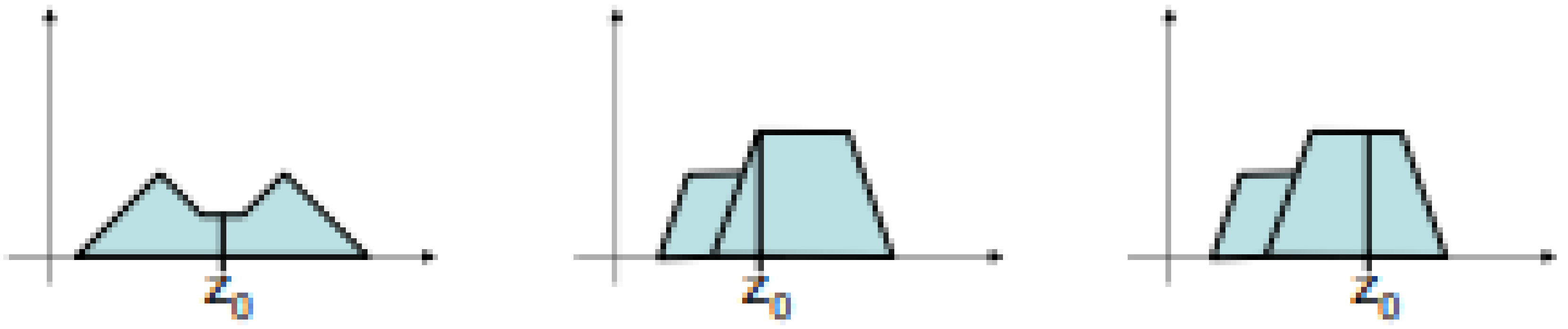


“defuzzificação”

É o processo para obter um valor “crisp” a partir de um grau de pertinência de um elemento fuzzy. Observe que o valor fuzzificado só possui a informação do grau de pertinência e a informação complementar, precisar estar presente na definição do conjunto.

Algumas estratégias são:

Exemplos:



Centróide

First-of-Maxima

Critério Máximo

Referências

- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. 1965
- ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. Lógica Fuzzy. PUC/SP. 2004.