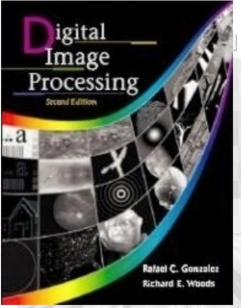


Realce de Imagens

Domínio da Frequência

Prof. Dr. Lucas Ferrari de Oliveira

Realce de Imagens no Domínio da Frequência

Objetivos:

Introduzir conceitos básicos sobre filtragem no domínio da frequência.

Introdução

- Todos os filtros no domínio da frequência podem ser implementados no domínio espacial
- Desde que exista um "kernel" para o problema em questão
- Filtragem no dominio espacial é menos custosa em termos computacionais

Introdução

Ideia principal

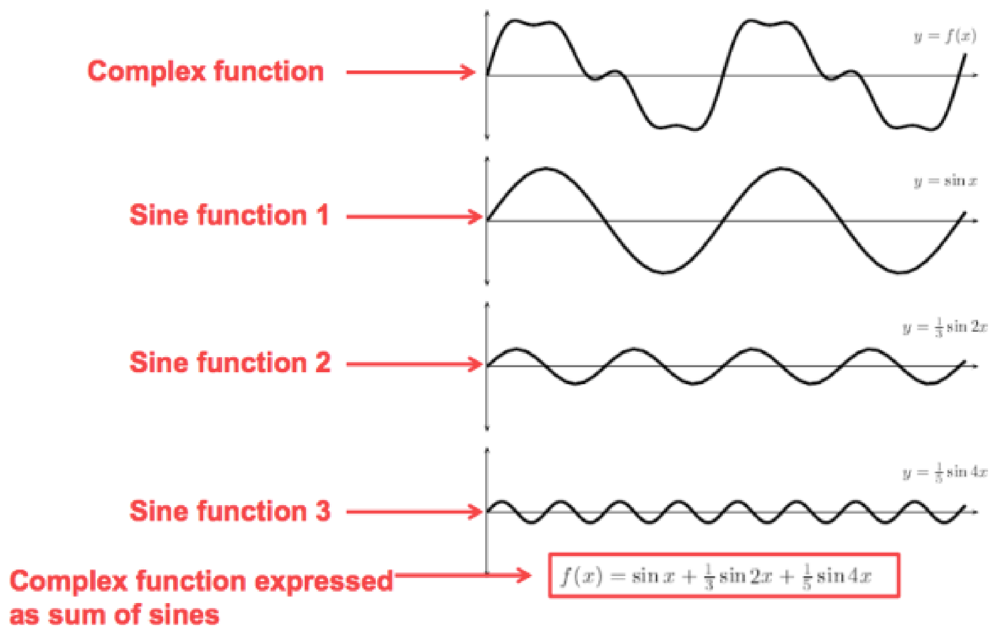
- Decompor o sinal (imagem) em diversas frequências
- Filtrar as frequências e não os pixels e suas vizinhanças

Realce de Imagens no Domínio da Frequência

Introdução

Como decompor o sinal?

- Qualquer sinal periódico pode ser decomposto numa soma de senos e cosenos.
- Transformada de Fourier



Realce de Imagens no Domínio da Frequência

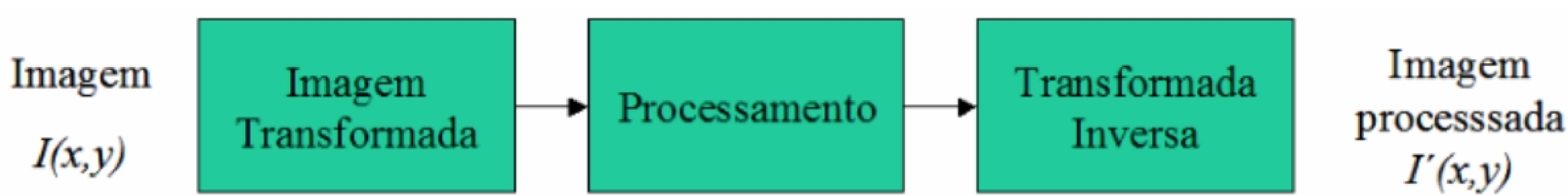
Imagem Decomposta

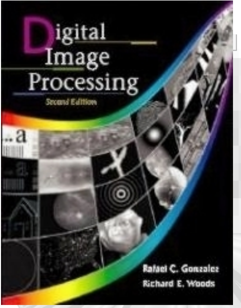
(a) Original, (b) Segunda frequência, (c) Terceira frequência (d) 50% das frequências

Realce de Imagens no Domínio da Frequência

Introdução

- Processamento de imagem no domínio da frequência é realizado em três passos
  1. A imagem é transformada do dominio espacial para o da frequência, usando a transformada de Fourier
  2. Operações são realizadas nessa imagem
  3. Para que a imagem possa ser exibida, ocorre o processo inverso, transformando a imagem novamente para o domínio espacial.
- O último passo é realizado pela transformada inversa de Fourier.



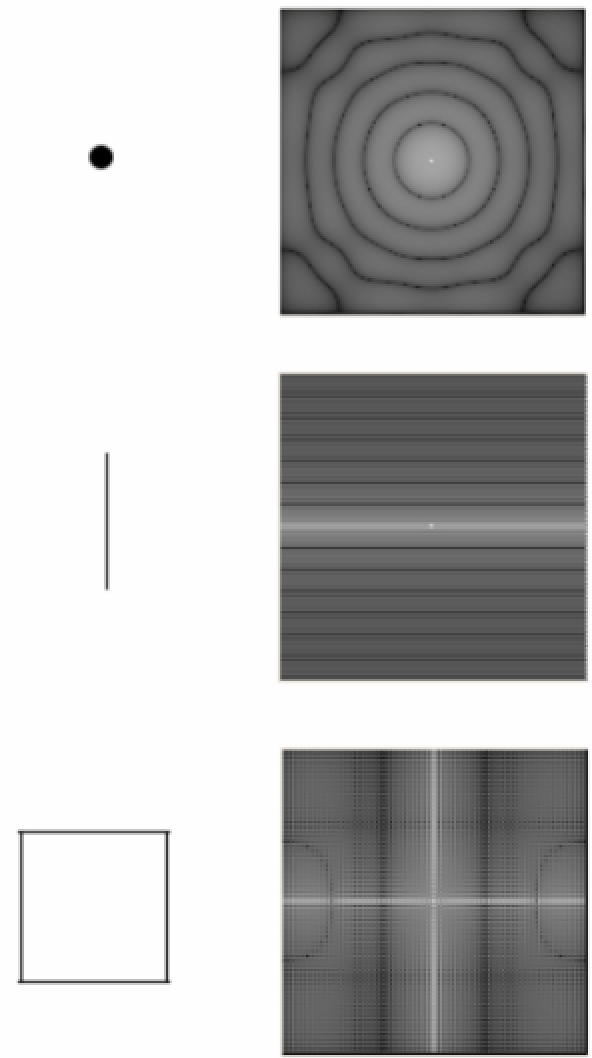


Transformada de Fourier

- Desenvolvida pelo matemático Francês Jean Baptiste Fourier (1768-1830)
- Duas formas da transformada são importantes em processamento de imagens
  - DFT - Discrete Fourier Transform
  - FFT - Fast Fourier Transform
- A mudança do domínio espacial (x, y) para o domínio da frequência (u, v) e vice-versa, ocorre através dessas transformadas.
- Não há perda de informação durante a mudança de domínios.
- Informação visual é representada de outra forma

Transformada de Fourier

- Um ponto de uma imagem representada no domínio da frequência pode conter informações sobre toda a imagem no domínio espacial
- Indicando quanto desta frequência há na imagem
- Essas imagens são conhecidas como espectro de Fourier
- Impossível fazer associação direta entre os componentes da imagem e sua transformada.



Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier de uma função continua $f(x)$ de uma variável x é definida como sendo

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi ux] dx, \text{ onde } j = \sqrt{(}-1) \qquad (1)$$

- e a partir de $F(u)$, pode-se obter $f(x)$ através da inversa de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[-j2\pi ux] du \qquad (2)$$

- Essas duas equações são chamadas de **par de transformada de Fourier e podem existir se forem integráveis e se $f(x)$ for contínua.**

Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier de uma função $f(x)$ é uma função complexa e pode ser expressa pela soma de suas componentes real e imaginária, representados por R e I, respectivamente,

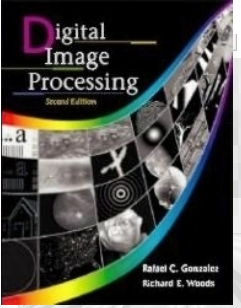
$$F(u) = R(u) + jI(u) \tag{3}$$

- frequentemente, para se obter o espectro de Fourier, se faz necessário expressar a Equação anterior na forma exponencial

$$F(u) = |F(u)|e^{j\theta u} \tag{4}$$

- Com isso obtêm-se o espectro de Fourier

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$



Transformada de Fourier

- A variável u que está presente na transformada de Fourier é chamada de variável de frequência, derivada do termo exponencial $\exp[-j\pi ux]$
- Pela fórmula de Euler, obtêm-se

$$\exp[-j\pi ux] = \cos 2\pi ux - j \sin 2\pi ux \tag{6}$$

- Portanto, uma função pode ser decomposta pelo somatório de senos e cosenos
- A transformada de Fourier computa a distribuição (amplitude, frequências e fases) desses senos e cosenos.

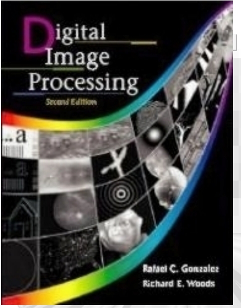
Transformada de Fourier 2D

- O formalismo anterior pode ser estendido para uma função bidimensional $f(x,y)$

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]dxdy \qquad (7)$$

- e a partir de $F(u,u)$, pode-se obter $f(x,y)$ através da inversa de Fourier

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp[-j2\pi(ux+vy)]dudv \qquad (8)$$



Transformada de Fourier 2D

- A transformada de Fourier de uma função $f(x, y)$ é uma função complexa e pode ser expressa pela soma de suas componentes real e imaginária, representados por R e I, respectivamente,

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v) \tag{9}$$

- e como no caso unidimensional, o espectro de Fourier e dado por

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

Transformada Discreta de Fourier

- A transformada discreta de Fourier pode ser definida como uma soma finita de exponenciais complexas

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux/N] \tag{11}$$

- e sua inversa

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[-j2\pi ux/N] du \tag{12}$$

- sendo $x = (0, 1, 2, \dots, N-1)$.

Transformada Discreta de Fourier 2D

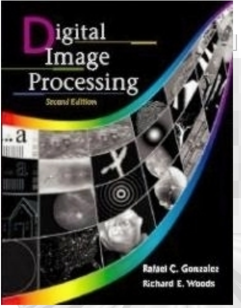
- No caso bidimensional

$$F(u,v) = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{N-1} f(x,y) \exp[-j2\pi(\frac{ux}{n} + \frac{vy}{N})] \qquad (13)$$

- e sua inversa

$$f(x,y) = \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{u=0}^{N-1} F(u,v) \exp[-j2\pi(\frac{ux}{n} + \frac{vy}{N})] \qquad (14)$$

- sendo $x = (0, 1, 2, \ldots, M-1)$ e $y = (0, 1, 2, \ldots, N-1)$



Transformada Discreta de Fourier 2D

- Na prática, em aplicações de processamento de imagens, as transformadas de Fourier são sempre calculadas utilizando o algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)
- Complexidade cai de N^2 para $N \log_2 N$
- Significativa economia computacional, particularmente quando NM é muito grande.

Transformada Discreta de Fourier 2D

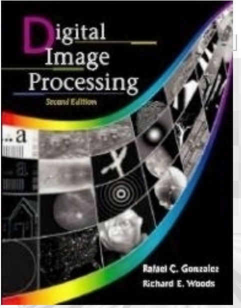
Teorema da Convolução

- A convolução de uma imagem $f(x,y)$ com outra imagem $h(x,y)$ gera uma terceira imagem $g(x,y)$.

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) \tag{15}$$

- em que * representa o operador de convolução.

$$g(x,y) = \frac{1}{NM} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{N-1} f(m,n) h(x-m, y-n) \tag{16}$$



Transformada Discreta de Fourier 2D

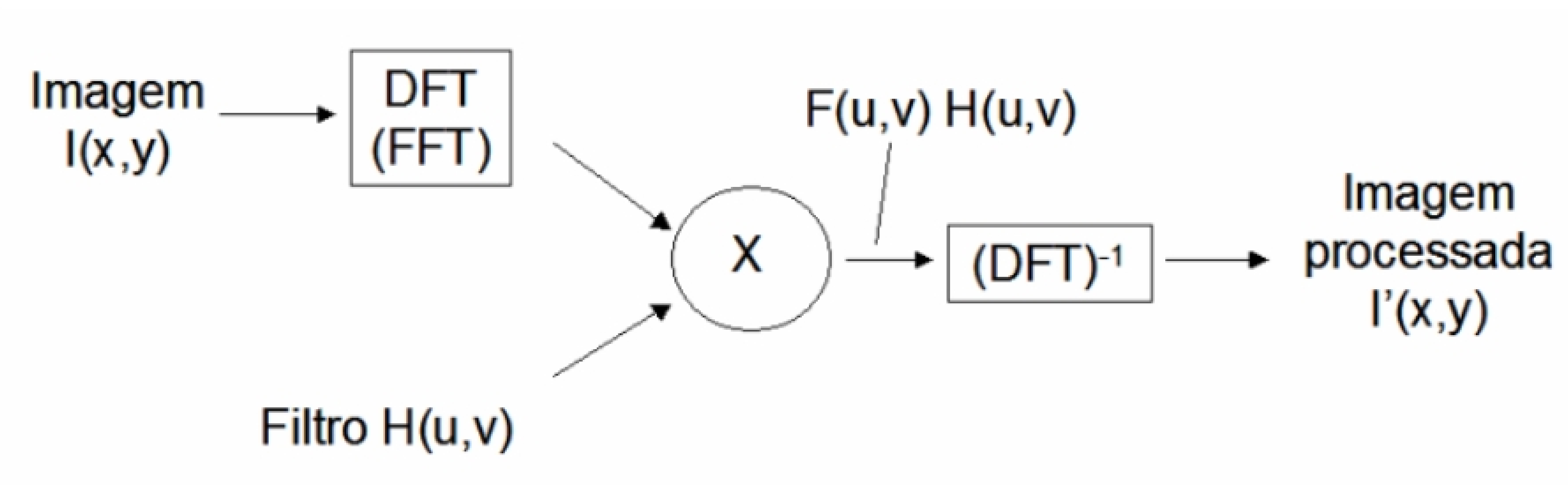
Teorema da Convolução

- Como $F(u,v)$ e $H(u,v)$ são transformadas de Fourier de $f(x,y)$ e $h(x,y)$, respectivamente, o teorema da convolução diz que $f(x,y) * h(x,y)$ e $F(u,v)H(u,v)$ constituem um par de transformadas de Fourier.
- A partir deste teorema obtém-se a seguinte relação no domínio de frequência

$$f(x,y) * h(x,y) \Longleftrightarrow F(u,v)H(u,v) \tag{17}$$

- Esta relação indica que a convolução pode ser obtida pela transformada de Fourier inversa do produto $F(u,v)H(u,v)$
- Portanto, a convolução entre duas funções no dominio espacial tem como transformada a multiplicação das transformadas das duas funções no domínio da frequênca, e vice versa.

Filtragem no Domínio da Frequência



Filtragem no Domínio da Frequência

Passa baixa

- Maior parte da imagem é composta por baixas frequências (geralmente concentradas no centro da imagem espectral)
- Fácil de explicar, pois em geral componentes de alta frequência representam detalhes da imagem (bordas, por exemplo).
- Filtro passa baixa ideal é aquele cuja a a função de transferência satisfaz a relação

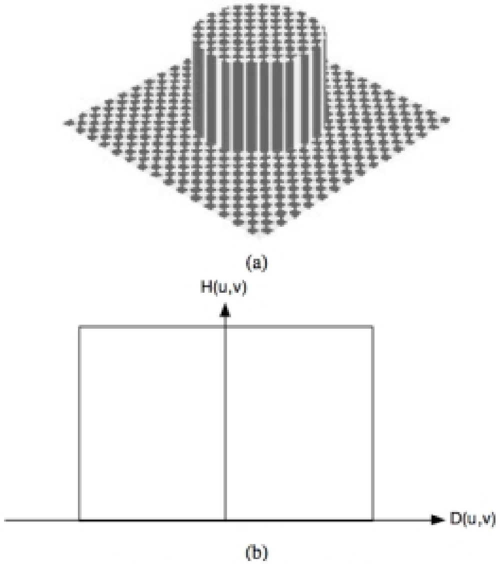
$$H(u,v) = \begin{cases} 1 \text{ se } D(u,v) \leqslant D_0 \\ 0 \text{ se } D(u,v) > D_0 \end{cases} \tag{18}$$

- em que D_0 é um valor não negativo e $D(u,v)$ é a distância do ponto (u,v) à origem do plano de frequência

$$D(u,v) = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

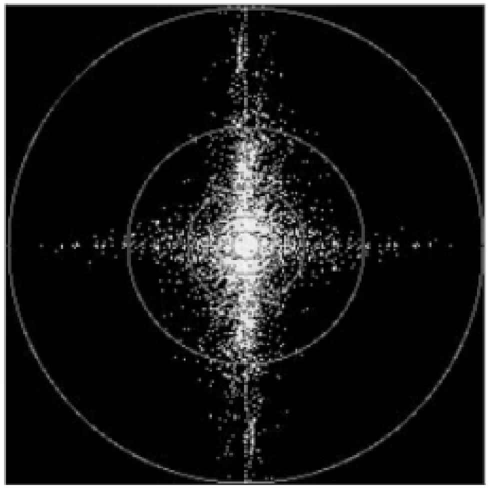
Filtragem no Domínio da Frequência

Passa baixa



Filtro passa baixo em 3D (a) e corte (b)

(a)

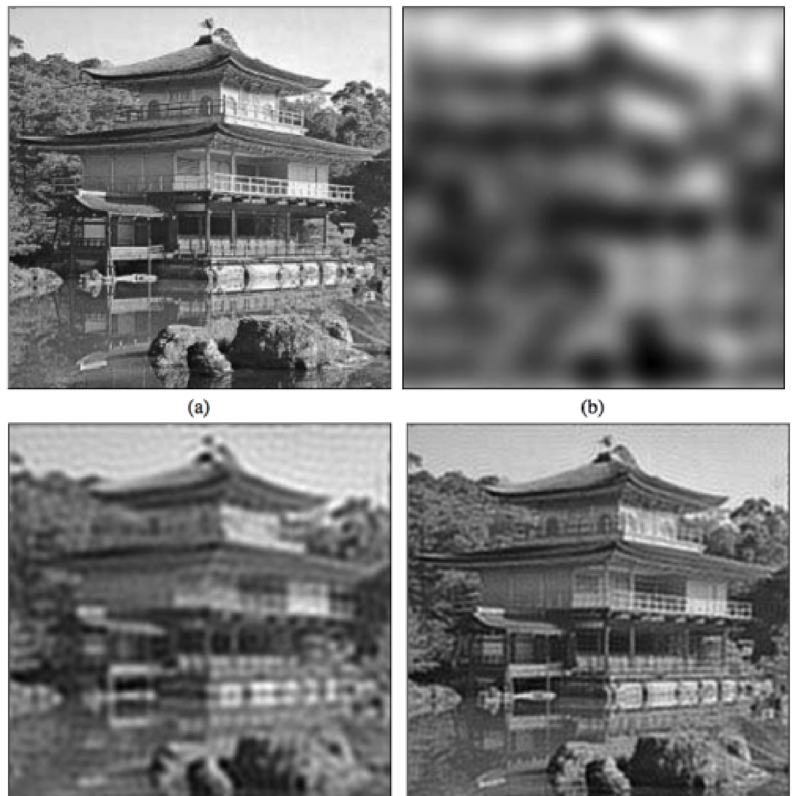


(b)

Imagem 512×512 (a) e seu respectivo espectro de Fourier(b). Baixas frequências concentradas no centro de espectro.

Filtragem no Domínio da Frequência

Exemplo passa baixa



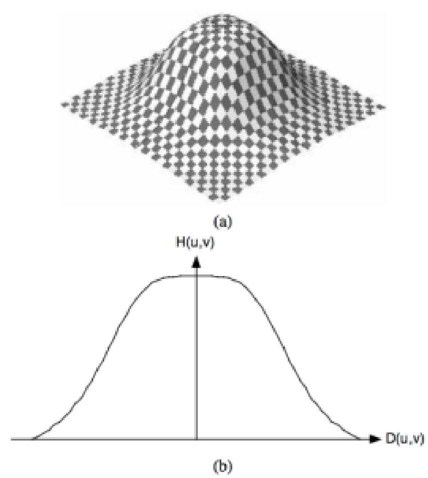
Resultados com filtra de raio 8, 32 e 64

Filtragem no Domínio da Frequência

Filtro Passa-baixa Butterworth

- Ao contrário do filtro passa-baixa ideal, este não possui uma transição abrupta entre banda de passagem e banda de rejeição.

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}} \tag{20}$$



Realce de Imagens no Domínio da Frequência

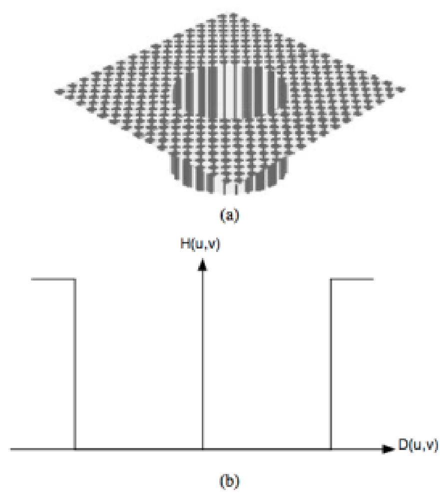
Filtragem no Domínio da Frequência

Passa-alta

- Similar ao filtro passa-baixa, o passa-alta é dado por

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 \text{ se } D(u,v) \leqslant D_0 \\ 1 \text{ se } D(u,v) > D_0 \end{cases} \tag{21}$$

- em que D_0 é a distância de corte do filtro e $D(u,v)$ é a distância do ponto (u,v) à origem do plano de frequência

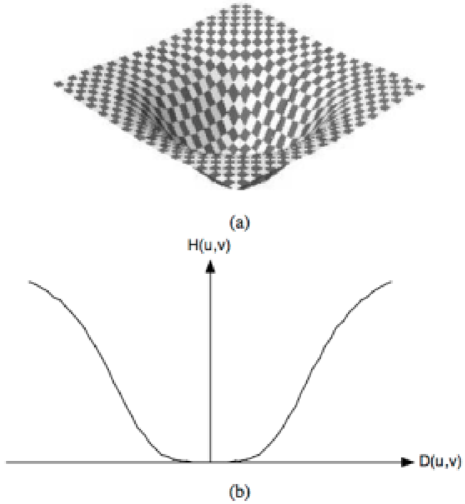


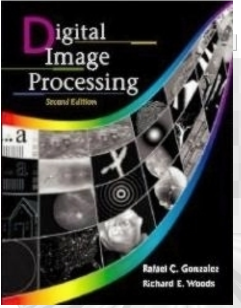
Filtragem no Domínio da Frequência

Filtro Passa-alta Butterworth

- E também similar ao passa-baixa Butterworth, o passa-alta Butterworth tem a seguinte função de transferência

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}} \quad (22)$$

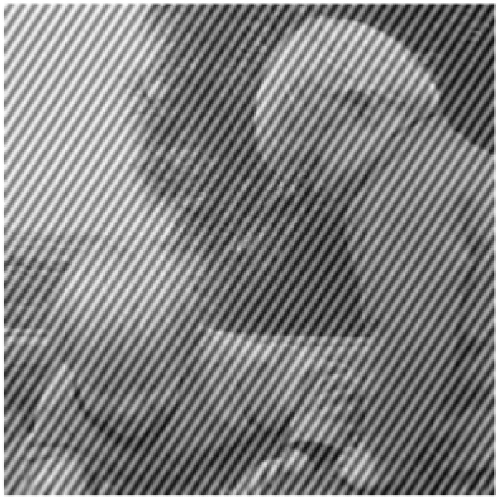


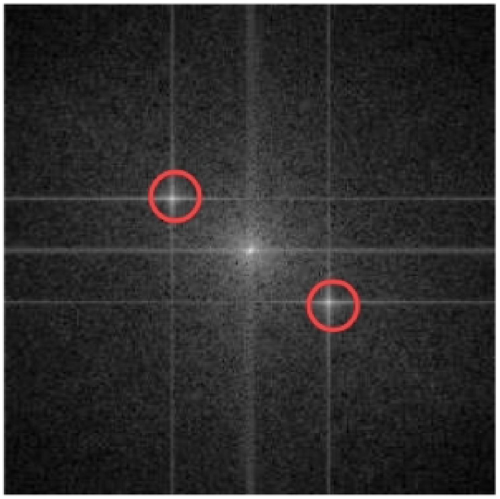


Filtragem no Domínio da Frequência

Removendo ruído periódico

- Lembrando que esse tipo de ruído não pode ser removido no domínio espacial
- Podem ser removidos, ao menos atenuados, no domínio da frequência
- Aparecem como picos (longe da origem) na imagem do espectro.

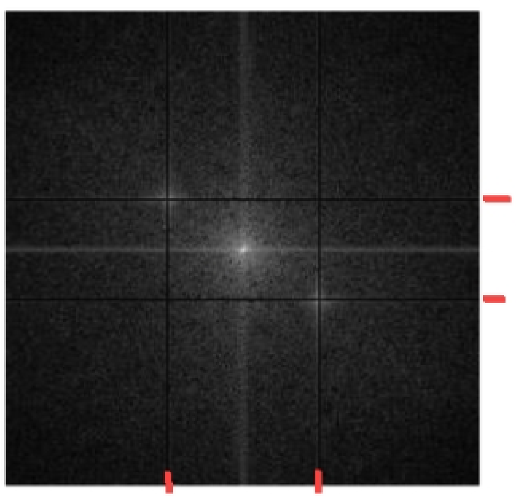




Filtragem no Domínio da Frequência

Removendo ruído periódico

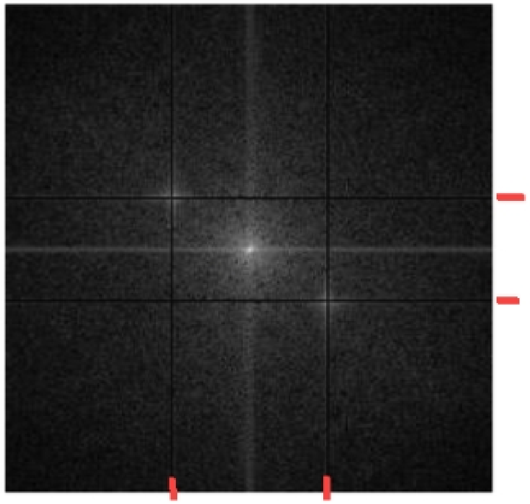
- Existem duas maneiras de eliminar ruído periódico no domínio da frequência
  - Notch filter
  - Rejeita banda
- Notch filter: Atribuir 0 para as linhas e colunas dos picos que representam o ruído



Filtragem no Domínio da Frequência

Removendo ruído periódico

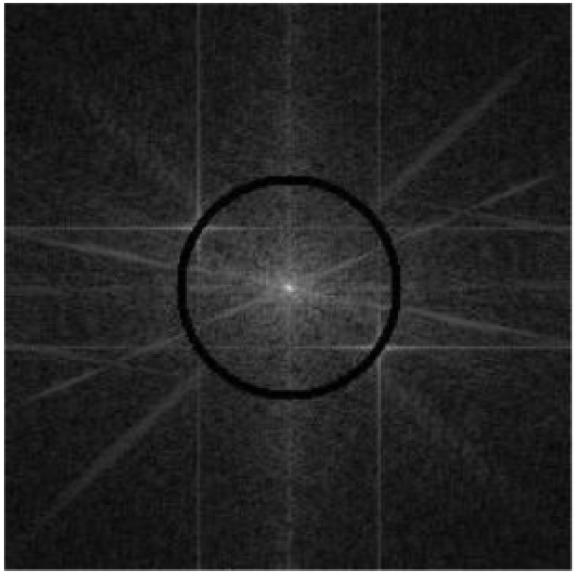
- Existem duas maneiras de eliminar ruído periódico no domínio da frequência
  - Notch filter
  - Rejeita banda
- Notch filter: Atribuir 0 para as linhas e colunas dos picos que representam o ruído



Filtragem no Domínio da Frequência

Removendo ruído periódico

- No caso do rejeita-banda, basta criar um filtro com zeros no raio do ruído e 1 no restante.
- Aplicar o filtro na imagem do espectro



Filtragem no Domínio da Frequência

Removendo ruído periódico

- No caso do rejeita-banda, basta criar um filtro com zeros no raio do ruído e 1 no restante.
- Aplicar o filtro na imagem do espectro