IAA005 - ESTATÍSTICA APLICADA I
Parte 2

Prof. Arno P. Schmitz

UFPR – Universidade Federal do Paraná

Distribuição de Probabilidade Discreta

- As funções de distribuição de probabilidade discretas descrevem as probabilidades das variáveis aleatórias discretas acontecerem (ocorrência do fenômeno estudado).

- Os estatísticos prepararam tabelas de probabilidade, tornando desnecessários os cálculos da probabilidade de ocorrência de determinado evento.

- Dentre as distribuições de probabilidades discretas mais utilizadas estão as distribuições de probabilidade “Binomial”, “Poisson”, “Geométrica”, “Hipergeométrica” e “Binomial Negativa”.

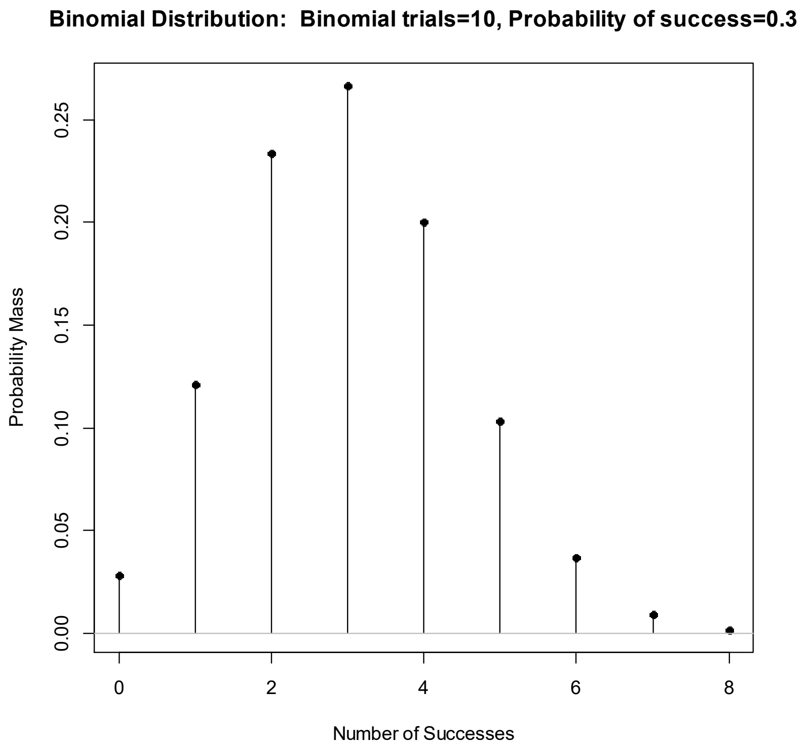
Distribuição Discreta Binomial

Processo de Bernoulli

É um processo de amostragem no qual:

1. Em cada tentativa existem dois resultados possíveis mutuamente exclusivos (sucesso, fracasso);
2. As séries de tentativas, ou observações, são eventos independentes;
3. A probabilidade de sucesso (p), permanece constante de tentativa em tentativa (processo estacionário).

Distribuição Discreta Binomial



$$P(x;n,p) = \ C_n^x \,.\, p^x q^{n-x}$$

Distribuição Discreta Binomial

A Distribuição Binomial é formada a partir da seguinte expressão:

$$P(x; n, p) = C_n^x \,.\, p^x (1-p)^{n-x}$$

Em que:

$P(x; n, p)$ = probabilidade do evento x, dado o número de:

$x =$ número de sucessos do evento;

$n =$ número de tentativas no referido evento;

p = probabilidade de sucesso;

C_n^x = combinação de x, n a n .

Distribuição Discreta Binomial

Dada a expressão:

$$P(x; n, p) = C_n^x \,.\, p^x (1-p)^{n-x}$$

Exemplo:

Durante um ano particular, 70% das ações ordinárias negociadas na bolsa de valores de Nova York tiveram aumentadas suas cotações, enquanto 30% tiveram suas cotações diminuídas ou estáveis. No começo de determinado ano, um serviço de assessoria financeira escolheu 10 ações como sendo “especialmente recomendadas”. Se as 10 ações representam uma seleção aleatória, qual a probabilidade de que “nenhuma” das 10 ações tivessem suas cotações aumentadas?

x = 0

n = 10

$$P = \frac{10!}{0!(10-0)!} \,.\, 0{,}30^0 \,.\, (1-0{,}30)^{\,10-0} = 1 \,.\, 1 \,.\, 0{,}7^{10} = 0{,}0282$$

p = 0,30

$$P = 2{,}82\%$$

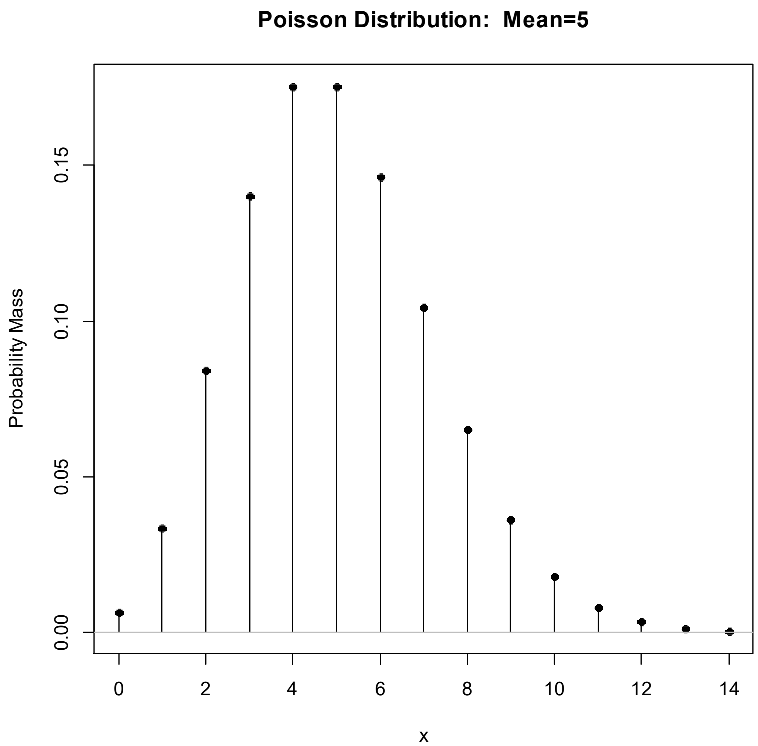
1	DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL $X \sim B(n,p)$ VALORES DA FUNÇÃO MASSA DE PROBABILIDADE $f(x)=P(X=x)$

		p									
n	**x**	**0,05**	**0,1**	**0,15**	**0,2**	**0,25**	**0,3**	**0,35**	**0,4**	**0,45**	**0,5**
1	**0**	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	**0**	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	**0**	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	**0**	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	**0**	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313

Tabela completa em:
http://www.esac.pt/noronha/estatistica/praticas/Tabela%20Binomial.pdf

Distribuição Discreta Poisson

-



Distribuição Discreta Poisson

A distribuição discreta de Poisson apresenta a probabilidade de Poisson de ocorrência de um determinado número de sucessos.

A principal característica das probabilidades de Poisson é que os eventos ocorrem em um “continuum” de tempo e espaço. É o chamado processo de Poisson.

Exemplos: chamadas em uma central telefônica; navios que atracam em um porto; água que é transportada por um rio, etc.

Distribuição Discreta Poisson

A estimativa da probabilidade de Poisson é dada por:

$$P(X|\lambda) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}$$

Em que:

$P(X|\lambda)$ = Probabilidade de Poisson;

λ = número médio de sucessos;

X = Dado número de sucessos de interesse;

Distribuição Discreta Poisson

Exemplo: Um departamento de informática recebe em média 5 chamadas por hora de usuários para solucionar problemas em um dado software. A probabilidade de que, em uma hora selecionada aleatoriamente, sejam recebidas exatamente 3 chamadas é:

$$P(X|\lambda) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} = \frac{5^3 e^{-5}}{3!} = \frac{125\,.\,0{,}00673795}{6} = 0{,}1404 = 14{,}04\%$$

Para:

λ = 5;

X = 3;

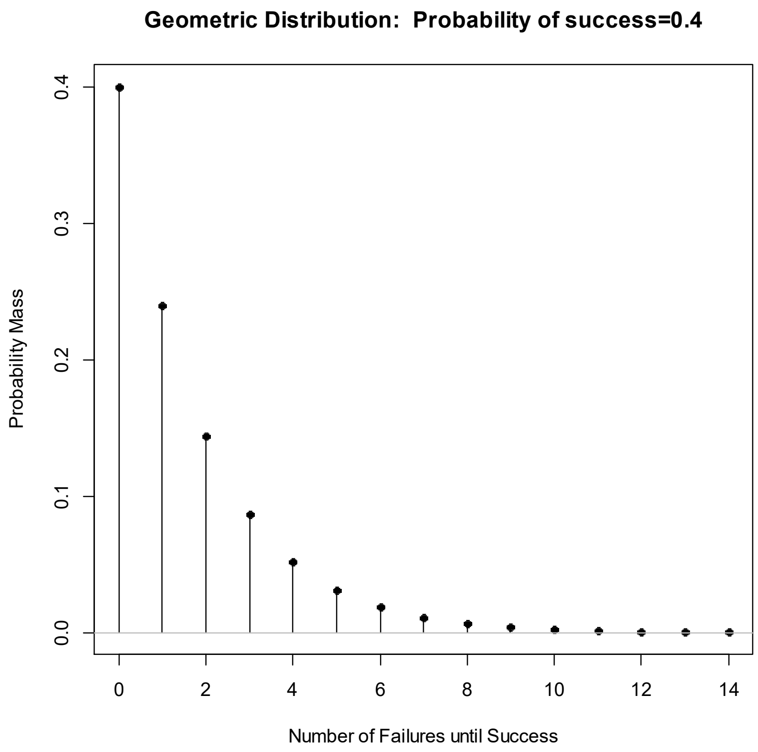
2	DISTRIBUIÇÃO POISSON $X \sim P(\lambda)$ VALORES DA FUNÇÃO MASSA DE PROBABILIDADE

x	λ														
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

x	λ														
	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
0	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

Tabela completa em:
http://www.esac.pt/noronha/estatistica/praticas/Tabela%20Poisson.pdf

Distribuição Discreta Geométrica



Distribuição Discreta Geométrica

A Distribuição Geométrica considera a probabilidade da ocorrência do número de fracassos até acontecer o primeiro sucesso. O cálculo é dado por:

$$P(Y = k) = p(1 - p)^k$$

Exemplo:

Se a probabilidade de que um certo ensaio de química tenha sucesso é de 0,4; qual será a probabilidade de que ocorram 2 fracassos antes do primeiro sucesso?

$$P(Y = 2) = 0{,}4(1 - 0{,}4)^2 = 0{,}1440 = 14{,}40\%$$

Distribuição Discreta Geométrica

Alternativamente, pode-se obter a probabilidade do número de tentativas necessárias para se obter um sucesso.

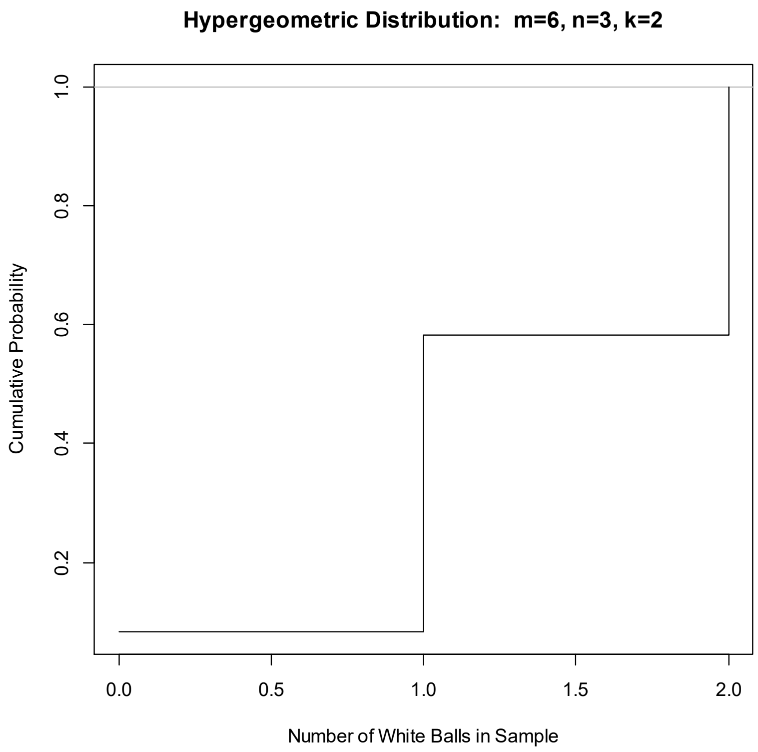
$$P(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Exemplo:

Na cidade de Curitiba, a probabilidade de ocorrência de chuva de granizo entre os meses de dezembro e janeiro é de 0,10. Admitindo a independência de um dia para o outro, qual é a probabilidade da ocorrência da primeira chuva de granizo acontecer no dia 03 de janeiro?

$$P(Y = 34) = 0{,}1(1 - 0{,}1)^{34-1} = 0{,}003 = 0{,}3\%$$

Distribuição Discreta Hipergeométrica

- 

Distribuição Discreta Hipergeométrica

- A amostragem é feita sem reposição de cada item amostrado de uma população finita. Logo, não se pode aplicar o processo de Bernoulli, pois existe mudança na probabilidade de sucesso a medida que os itens são retirados da população.

$$P(X|N, X_t, n) = \frac{\binom{N - X_t}{n - X}\binom{X_t}{X}}{\binom{N}{n}}$$

Em que:

X = número de sucessos;

N = tamanho da população;

X_t = número total de sucessos na população;

n = tamanho da amostra.

Distribuição Discreta Hipergeométrica

Exemplo:

De 6 empregados de uma empresa, 3 trabalham nesta empresa a 5 anos ou mais. Se 4 empregados são aleatoriamente escolhidos deste grupo de 6, a probabilidade de que exatamente 2 estejam na empresa a 5 ou mais anos é:

$$P(X|N, X_t, n) = \frac{\binom{6\ -3}{4\ -2}\binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{\frac{3!}{2!\,1!}\frac{2!}{2!\,1!}}{\frac{6!}{4!\,2!}} =$$

$$P(X|N, X_t, n) = \frac{3\,.\,3}{15} = 0{,}60 = 60\%$$

Em que:

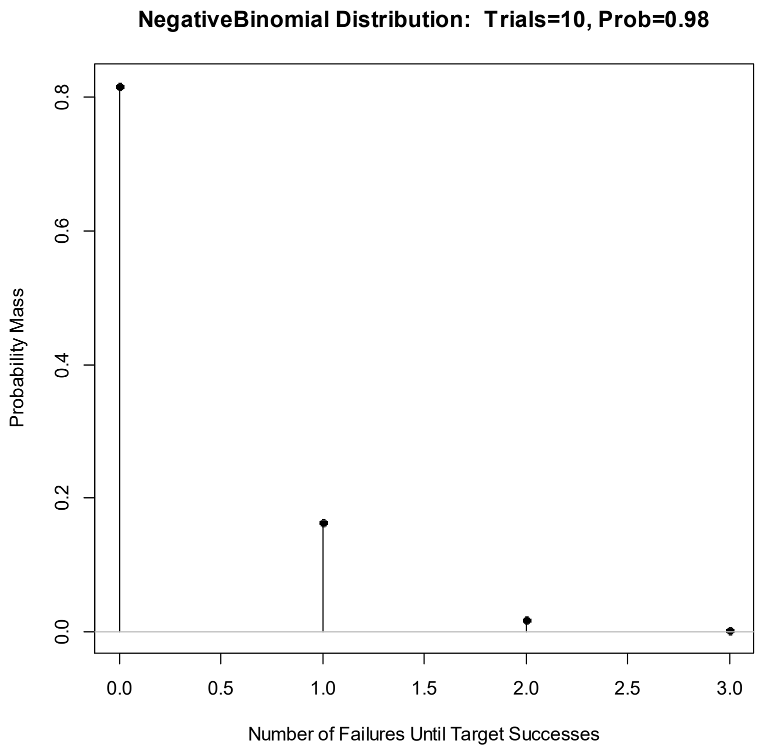
X = 2

N = 6

X_t = 3

n = 4

Distribuição Discreta Binomial Negativa



Distribuição Discreta Binomial Negativa

- Seja “X” uma variável aleatória que conta o número de tentativas necessárias para se obter “k” sucessos, em “n” ensaios de Bernoulli com probabilidade “p” em cada ensaio. Neste caso o último ensaio será o k-ésimo sucesso.

Neste caso, a probabilidade de realizar “x” ensaios é dada por:

$$P(X = x) = \binom{x\ -1}{k\ -1}\ p^k (1-p)^{x-k}$$

Em que:

k = número de sucessos;

x = número de ensaios;

p = probabilidade de sucesso.

Distribuição Discreta Binomial Negativa

- Exemplo: Suponha que em uma fábrica produz resistência para chuveiros, com uma taxa de defeitos de 2%. Qual a probabilidade de que em uma inspeção de 10 resistências tenha-se 3 resistências defeituosas sendo que a terceira defeituosa seja exatamente a décima inspecionada.

$$P(X = 10) = \binom{10\ -1}{3\ -1}\ 0{,}02^3(1 - 0{,}02)^{10-3}$$

$$P(X = 10) = \binom{9}{2} .\, 0{,}000008\, .0{,}868125$$

$$P(X = 10) = \frac{9!}{2!\,7!} .\, 0{,}000008\, .0{,}868125 = 0{,}00025 = 0{,}025\%$$

Em que:

k = 3

x = 10

p = 0,02

Distribuição de Probabilidade Contínua

- Várias distribuições de probabilidade contínuas são aplicáveis a uma ampla variedade de variáveis contínuas, sob certas circunstâncias.

- Os estatísticos prepararam tabelas de probabilidade, tornando desnecessária a integração de área sob a curva de probabilidade para identificar a probabilidade de ocorrência de determinado evento.

- Dentre as distribuições de probabilidade mais utilizadas estão as distribuições de probabilidade “Z - normal”, “t de Student”, “qui-quadrado”, “F de Fisher-Snedecor”, “d de Durbin e Watson” e “logística”.

Distribuição de Probabilidade Contínua

Distribuição Normal Padronizada (Z)

- A distribuição normal de probabilidade é uma distribuição que é simétrica e mesocúrtica.

Esta distribuição de probabilidade é importante para a inferência estatística por 3 razões distintas:

1. As medidas produzidas em diversos processos aleatórios seguem esta distribuição;
2. A probabilidade normal pode ser usada frequentemente como aproximação de outras distribuições discretas de probabilidade (Poisson e Binomial);
3. As distribuições de estatísticas da amostra tais como a média e a proporção frequentemente seguem a distribuição normal independente da distribuição da população.

Distribuição de Probabilidade Contínua

Distribuição Normal Padronizada (Z)

- A curva de probabilidade, para uma variável normalmente distribuída é dada por:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\left[\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

- Cada combinação de μ e σ gera uma distribuição normal de probabilidade diferente (simétricas e mesocústicas), as tabelas de probabilidade normal são baseadas em uma distribuição particular: *a distribuição normal padronizada*.
- Esta distribuição normal de probabilidade tem média zero (μ = 0) e desvio padrão igual a 1 (σ = 1).
- Qualquer conjunto de valores (amostras) normalmente distribuído pode ser convertido em valores normais padronizados Z através de:

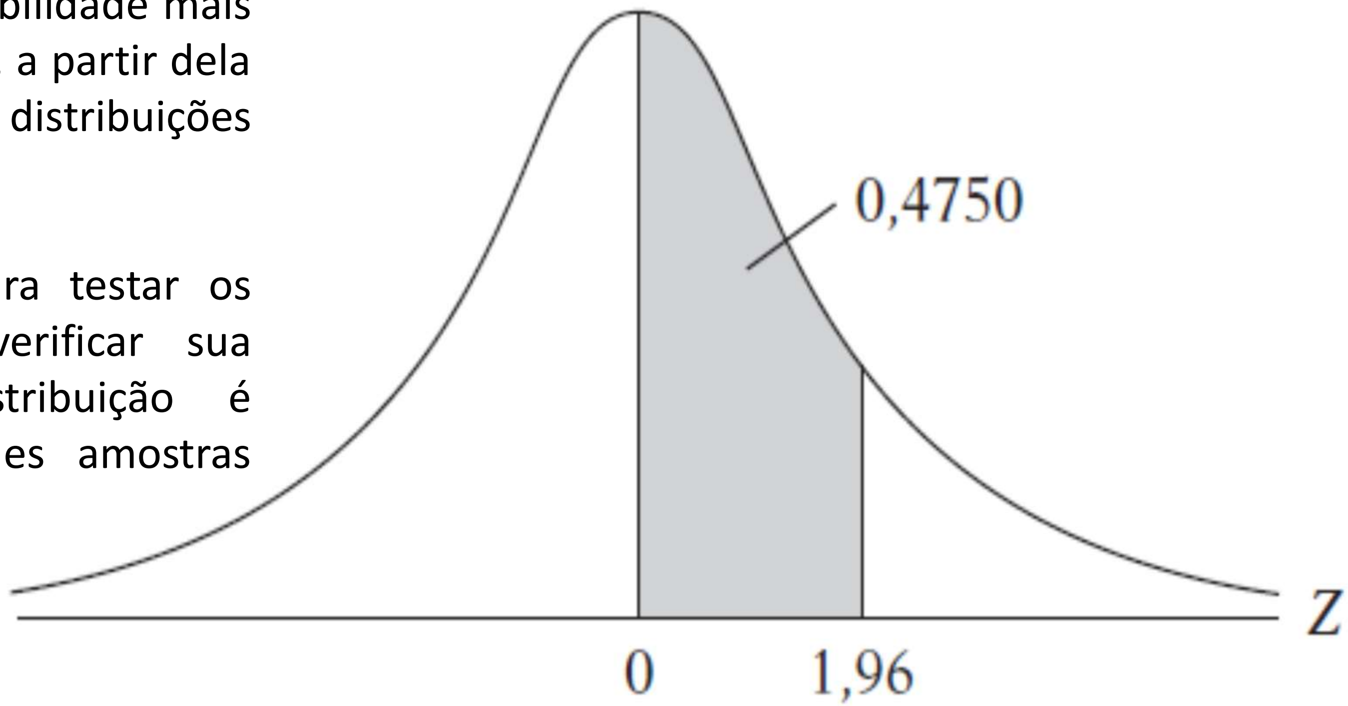
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Distribuição de Probabilidade Contínua

Distribuição Normal Padronizada (Z)

Esta é, talvez, a distribuição de probabilidade mais importante para toda estatística. Pois, a partir dela derivaram uma série de outras distribuições estatísticas.

No modelo de MQO ela serva para testar os parâmetros (β_s) calculados e verificar sua significância estatística. Esta distribuição é especialmente utilizada para grandes amostras $(n > 100)$.



Com probabilidade de 95% de confiança
ou 5% de significância

TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Tabela A6.2 Distribuição normal – valores de $P(0 \leqslant Z \leqslant z_0)$

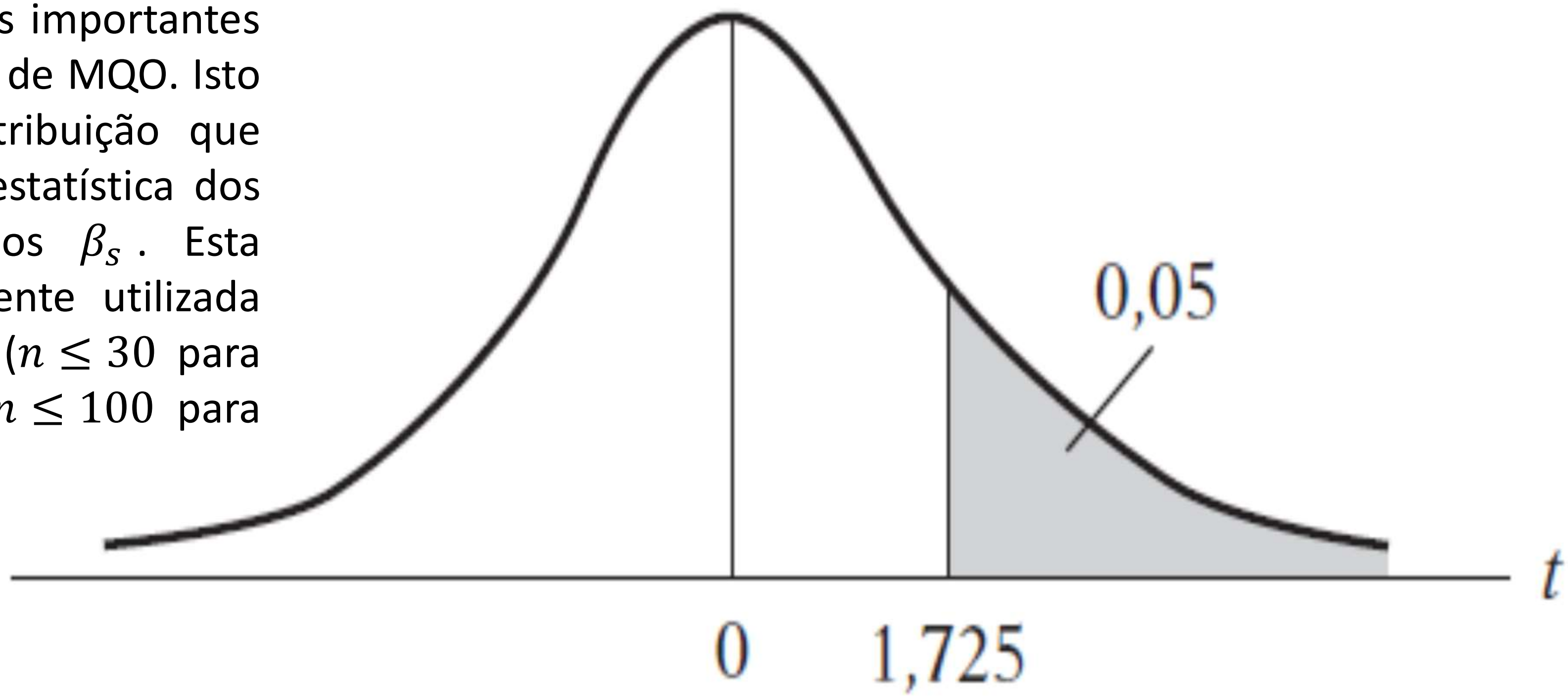
z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4967	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Tabela disponível em:
http://www.dex.ufla.br/thelmasafadi/tabela%20normal.pdf

Distribuição de Probabilidade Contínua

Distribuição t de Student

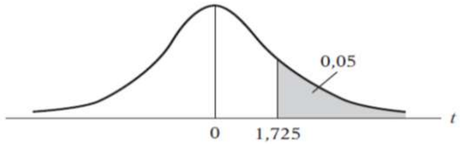
Esta distribuição de probabilidade estatística é uma das mais importantes na aplicação dos modelos de MQO. Isto porque é com esta distribuição que testamos a significância estatística dos parâmetros calculados, os β_s . Esta distribuição é especialmente utilizada para pequenas amostras ($n \leq 30$ para alguns estatísticos; mas $n \leq 100$ para outros estatísticos).



$\Pr(t > 1{,}725) = 0{,}05$ para gl = 20

gl = n - k ➔ n = tamanho amostra; k = número de variáveis explicativas do modelo (desconsidera-se a constante)

Exemplo
$Pr(t > 2{,}086) = 0{,}025$
$Pr(t > 1{,}725) = 0{,}05$ para gl = 20
$Pr(|t| > 1{,}725) = 0{,}10$



Pr/ gl	0,25 0,50	0,10 0,20	0,05 0,10	0,025 0,05	0,01 0,02	0,005 0,010	0,001 0,002
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

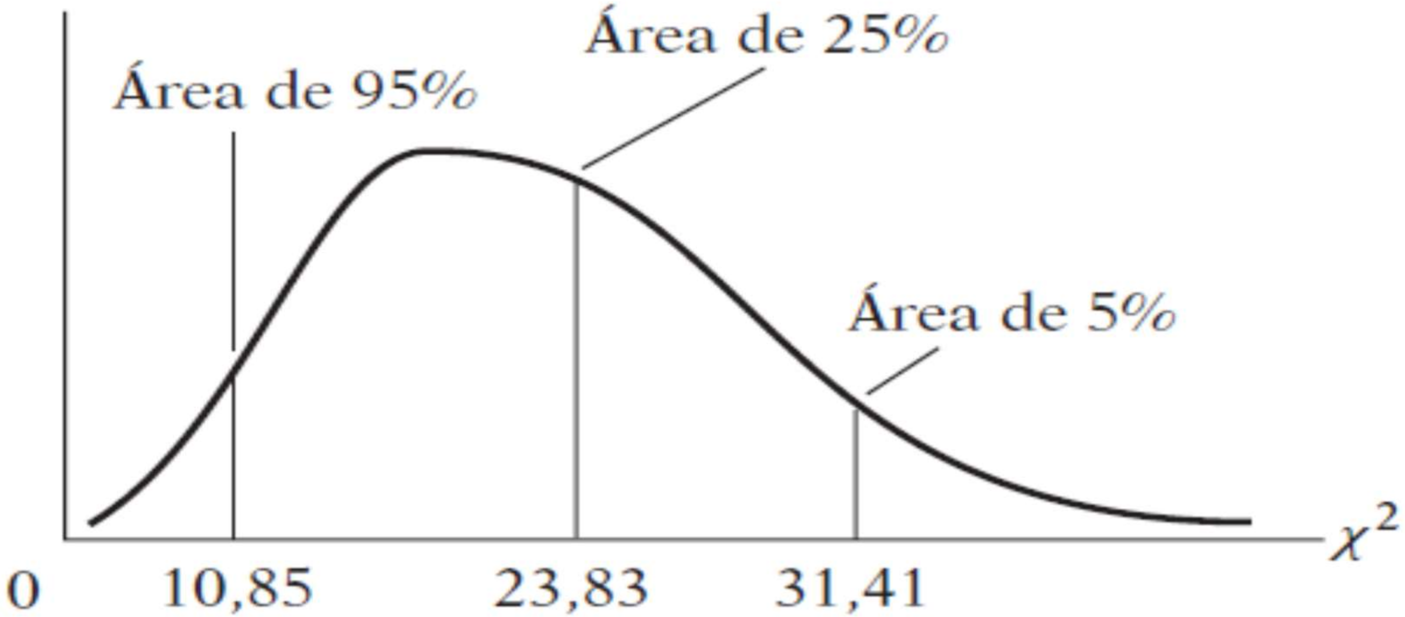
Fonte: PEARSON, E. S.; HARTLEY, H. O. (Eds.). *Biometrika tables for statisticians*. 3. ed. Nova York: Cambridge University Press, 1966. v. 1, tabela 12. Reprodução autorizada pelos editores e curadores da *Biometrika*.
Nota: a menor probabilidade mostrada no título de cada coluna é a área em uma cauda; a probabilidade maior é a área em ambas as caudas.

Distribuição de Probabilidade Contínua

Distribuição Qui-Quadrado

Esta é uma distribuição de probabilidade estatística que tem muitas aplicações em vários testes estatísticos.

Uma das aplicações mais importantes desta distribuição é testar a significância estatística do desvio padrão.



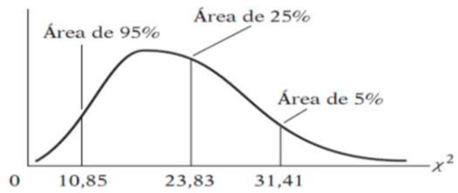
Exemplo

$\Pr(\chi^2 > 10{,}85) = 0{,}95$

$\mathrm{Prc}(\chi^2 > 23{,}83) = 0{,}25$ para gl = 20

$\Pr(\chi^2 > 31{,}41) = 0{,}05$

Exemplo
$Pr(\chi^2 > 10,85) = 0,95$
$Prc(\chi^2 > 23,83) = 0,25$ para gl = 20
$Pr(\chi^2 > 31,41) = 0,05$



Graus de liberdade \ Pr	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900
1	392704×10^{-10}	157088×10^{-9}	982069×10^{-9}	393214×10^{-8}	0,0157908
2	0,0100251	0,0201007	0,0506356	0,102587	0,210720
3	0,0717212	0,114832	0,215795	0,351846	0,584375
4	0,206990	0, 297110	0,484419	0,710721	1,063623
5	0,411740	0,554300	0,831211	1,145476	1,61031
6	0,675727	0,872085	1,237347	1,63539	2,20413
7	0,989265	1,239043	1,68987	2,16735	2,83311
8	1,344419	1,646482	2,17973	2,73264	3,48954
9	1,734926	2,087912	2,70039	3,32511	4,16816
10	2,15585	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518
11	2,60321	3,05347	3,81575	4,57481	5,57779
12	3,07382	3,57056	4,40379	5,22603	6,30380
13	3,56503	4,10691	5,00874	5,89186	7,04150
14	4,07468	4,66043	5,62872	6,57063	7,78953
15	4,60094	5,22935	6,26214	7,26094	8,54675
16	5,14224	5,81221	6,90766	7,96164	9,31223
17	5,69724	6,40776	7,56418	8,67176	10,0852
18	6,26481	7,01491	8,23075	9,39046	10,8649
19	6,84398	7,63273	8,90655	10,1170	11,6509
20	7,43386	8,26040	9,59083	10,8508	12,4426
21	8,03366	8,89720	10,28293	11,5913	13,2396
22	8,64272	9,54249	10,9823	12,3380	14,0415
23	9,26042	10,19567	11,6885	13,0905	14,8479
24	9,88623	10,8564	12,4011	13,8484	15,6587
25	10,5197	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734
26	11,1603	12,1981	13,8439	15,3791	17,2919
27	11,8076	12,8786	14,5733	16,1513	18,1138
28	12,4613	13,5648	15,3079	16,9279	18,9392
29	13,1211	14,2565	16,0471	17,7083	19,7677
30	13,7867	14,9535	16,7908	18,4926	20,5992
40	20,7065	22,1643	24,4331	26,5093	29,0505
50	27,9907	29,7067	32,3574	34,7642	37,6886
60	35,5346	37,4848	40,4817	43,1879	46,4589
70	43,2752	45,4418	48,7576	51,7393	55,3290
80	51,1720	53,5400	57,1532	60,3915	64,2778
90	59,1963	61,7541	65,6466	69,1260	73,2912
100*	67,3276	70,0648	74,2219	77,9295	82,3581

*Para gl maior que 100, a expressão $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{(2k-1)} = Z$ segue a distribuição normal padronizada, em que k representa os graus de liberdade.

TABELA D.4 (*Continuação*)

0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
0,1015308	0,454937	1,32330	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944
0,575364	1,38629	2,77259	4,60517	5,99147	7,37776	9,21034	10,5966
1,212534	2,36597	4,10835	6,25139	7,81473	9,34840	11,3449	12,8381
1,92255	3,35670	5,38527	7,77944	9,48773	11,1433	13,2767	14,8602
2,67460	4,35146	6,62568	9,23635	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496
3,45460	5,34812	7,84080	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476
4,25485	6,34581	9,03715	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777
5,07064	7,34412	10,2188	13,3616	15,5073	17,5346	20,0902	21,9550
5,89883	8,34283	11,3887	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5893
6,73720	9,34182	12,5489	15,9871	18,3070	20,4831	23,2093	25,1882
7,58412	10,3410	13,7007	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	26,7569
8,43842	11,3403	14,8454	18,5494	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995
9,29906	12,3398	15,9839	19,8119	22,3621	24,7356	27,6883	29,8194
10,1653	13,3393	17,1170	21,0642	23,6848	26,1190	29,1413	31,3193
11,0365	14,3389	18,2451	22,3072	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013
11,9122	15,3385	19,3688	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672
12,7919	16,3381	20,4887	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185
13,6753	17,3379	21,6049	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	37,1564
14,5620	18,3376	22,7178	27,2036	30,1435	32,8523	36,1908	38,5822
15,4518	19,3374	23,8277	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968
16,3444	20,3372	24,9348	29,6151	32,6705	35,4789	38,9321	41,4010
17,2396	21,3370	26,0393	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	42,7956
18,1373	22,3369	27,1413	32,0069	35,1725	38,0757	41,6384	44,1813
19,0372	23,3367	28,2412	33,1963	36,4151	39,3641	42,9798	45,5585
19,9393	24,3366	29,3389	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	46,9278
20,8434	25,3364	30,4345	35,5631	38,8852	41,9232	45,6417	48,2899
21,7494	26,3363	31,5284	36,7412	40,1133	43,1944	46,9630	49,6449
22,6572	27,3363	32,6205	37,9159	41,3372	44,4607	48,2782	50,9933
23,5666	28,3362	33,7109	39,0875	42,5569	45,7222	49,5879	52,3356
24,4776	29,3360	34,7998	40,2560	43,7729	46,9792	50,8922	53,6720
33,6603	39,3354	45,6160	51,8050	55,7585	59,3417	63,6907	66,7659
42,9421	49,3349	56,3336	63,1671	67,5048	71,4202	76,1539	79,4900
52,2938	59,3347	66,9814	74,3970	79,0819	83,2976	88,3794	91,9517
61,6983	69,3344	77,5766	85,5271	90,5312	95,0231	100,425	104,215
71,1445	79,3343	88,1303	96,5782	101,879	106,629	112,329	116,321
80,6247	89,3342	98,6499	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
90,1332	99,3341	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169

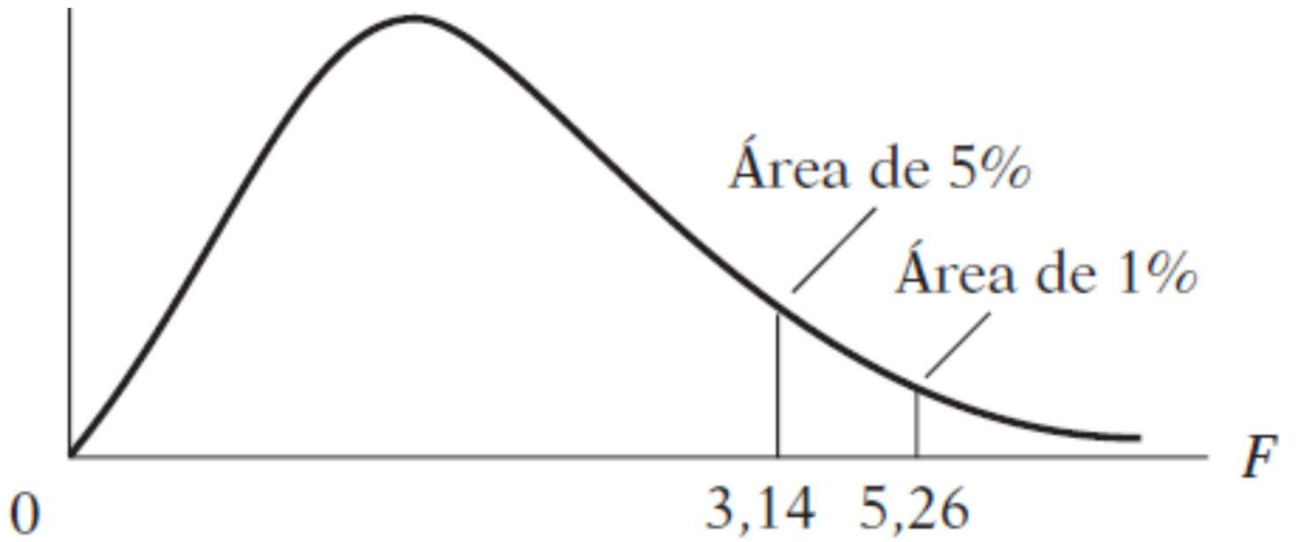
Fonte: resumida de PEARSON, E. S.; HARTLEY, H. O. (Eds.). *Biometrika tables for statisticians*. 3. ed. Nova York: Cambridge University Press, 1966. v. 1, tabela 12. Reprodução autorizada pelos editores e curadores da *Biometrika*.

Distribuição de Probabilidade Contínua

Distribuição F de Fisher-Snedecor

Esta distribuição de probabilidade tem várias aplicações. Uma delas é testar a existência da reta de regressão no MQO.

Outros testes estatísticos se utilizam desta distribuição de probabilidade.

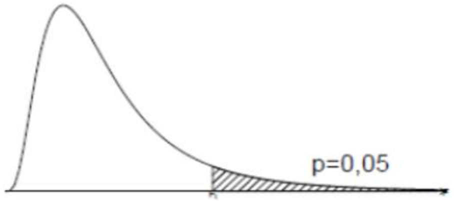


Exemplo: $Pr(F > 3{,}14) = 0{,}05$ para gl $N_1 = 10$

$Pr(F > 5{,}26) = 0{,}01$ e $N_2 = 9$

Gl do numerador (N_1) = m = número de restrições lineares (número de parâmetros); gl do denominador (N2) = n-k = n é o tamanho da amostra e k o número de parâmetros da regressão.

Distribuição F de Snedecor a 5% (p=0.05)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	30	40	60	120
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.42	19.43	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.71	8.70	8.69	8.67	8.66	8.62	8.59	8.57	8.55
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.87	5.86	5.84	5.82	5.80	5.75	5.72	5.69	5.66
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.64	4.62	4.60	4.58	4.56	4.50	4.46	4.43	4.40
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.96	3.94	3.92	3.90	3.87	3.81	3.77	3.74	3.70
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.53	3.51	3.49	3.47	3.44	3.38	3.34	3.30	3.27
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.24	3.22	3.20	3.17	3.15	3.08	3.04	3.01	2.97
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.03	3.01	2.99	2.96	2.94	2.86	2.83	2.79	2.75
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.86	2.85	2.83	2.80	2.77	2.70	2.66	2.62	2.58
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.74	2.72	2.70	2.67	2.65	2.57	2.53	2.49	2.45
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.64	2.62	2.60	2.57	2.54	2.47	2.43	2.38	2.34
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.55	2.53	2.51	2.48	2.46	2.38	2.34	2.30	2.25
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.48	2.46	2.44	2.41	2.39	2.31	2.27	2.22	2.18
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.42	2.40	2.38	2.35	2.33	2.25	2.20	2.16	2.11
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.37	2.35	2.33	2.30	2.28	2.19	2.15	2.11	2.06
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.33	2.31	2.29	2.26	2.23	2.15	2.10	2.06	2.01
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.29	2.27	2.25	2.22	2.19	2.11	2.06	2.02	1.97
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.26	2.23	2.21	2.18	2.16	2.07	2.03	1.98	1.93
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.22	2.20	2.18	2.15	2.12	2.04	1.99	1.95	1.90
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.10	2.01	1.96	1.92	1.87
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.17	2.15	2.13	2.10	2.07	1.98	1.94	1.89	1.84
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.15	2.13	2.11	2.08	2.05	1.96	1.91	1.86	1.81
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.13	2.11	2.09	2.05	2.03	1.94	1.89	1.84	1.79
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.11	2.09	2.07	2.04	2.01	1.92	1.87	1.82	1.77
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.09	2.07	2.05	2.02	1.99	1.90	1.85	1.80	1.75
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.08	2.06	2.04	2.00	1.97	1.88	1.84	1.79	1.73
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.06	2.04	2.02	1.99	1.96	1.87	1.82	1.77	1.71
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.05	2.03	2.01	1.97	1.94	1.85	1.81	1.75	1.70
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.84	1.79	1.74	1.68
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.95	1.92	1.90	1.87	1.84	1.74	1.69	1.64	1.58
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.84	1.82	1.78	1.75	1.65	1.59	1.53	1.47
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.78	1.75	1.73	1.69	1.66	1.55	1.50	1.43	1.35

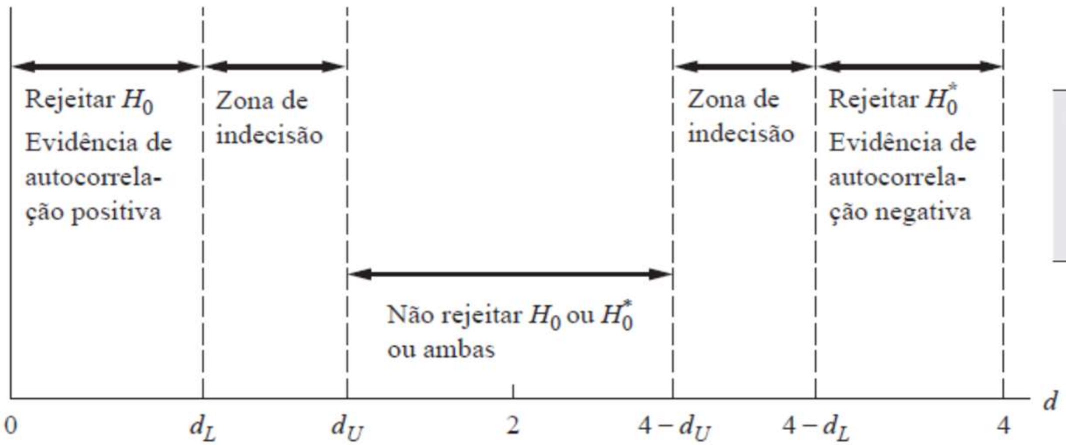
Tabela 5: Quantis da Distribuição F para probabilidade $p = P[F \geq F_t] = 0,05$. Graus de liberdade do numerador dado no topo e do denominador na margem esquerda.

Obtida em :
https://docs.ufpr.br/~niveam/ce071/An%C3%A1lise%20de%20Vari%C3%A2ncia.pdf

Distribuição de Probabilidade de Durbin-Watson (d)

- Serve para examinar a autocorrelação nos resíduos, ou seja, representa uma análise da existência de que as observações estejam correlacionadas. Por exemplo: comportamento dos preços de determinado produto. É um teste para verificar uma das hipóteses dos modelos de MQO.

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{t=n}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t=n}\hat{u}_t^2}$$



Legenda
H_0: Ausência de autocorrelação positiva
H_0^*: Ausência de autocorrelação negativa

EXEMPLO 1 Se n = 40 e $k' = 4$, $d_L = 1{,}285$ e $d_U = 1{,}721$. Se um valor calculado de d é menor que 1,285, há evidência de correlação serial positiva de primeira ordem; se é maior que 1,721, não há nenhuma evidência de correlação serial positiva de primeira ordem; mas, se d está entre o limite inferior e o limite superior, a evidência é inconclusiva em relação à presença ou ausência de correlação serial positiva de primeira ordem.

TABELA D.5A Estatística d de Durbin-Watson: pontos de significância de d_L e d_U em níveis de significância de 0,05

	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$		$k'=6$		$k'=7$		$k'=8$		$k'=9$		$k'=10$	
n	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,610	1,400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0,700	1,356	0,467	1,896	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0,763	1,332	0,559	1,777	0,368	2,287	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	0,824	1,320	0,629	1,699	0,455	2,128	0,296	2,588	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	0,879	1,320	0,697	1,641	0,525	2,016	0,376	2,414	0,243	2,822	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0,927	1,324	0,658	1,604	0,595	1,928	0,444	2,283	0,316	2,645	0,203	3,005	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0,971	1,331	0,812	1,579	0,658	1,864	0,512	2,177	0,379	2,506	0,268	2,832	0,171	3,149	—	—	—	—	—	—
13	1,010	1,340	0,861	1,562	0,715	1,816	0,574	2,094	0,445	2,390	0,328	2,692	0,230	2,985	0,147	3,266	—	—	—	—
14	1,045	1,350	0,905	1,551	0,767	1,779	0,632	2,030	0,505	2,296	0,389	2,572	0,286	2,848	0,200	3,111	0,127	3,360	—	—
15	1,077	1,361	0,946	1,543	0,814	1,750	0,685	1,977	0,562	2,220	0,447	2,472	0,343	2,727	0,251	2,979	0,175	3,216	0,111	3,438
16	1,106	1,371	0,982	1,539	0,857	1,728	0,734	1,935	0,615	2,157	0,502	2,388	0,398	2,624	0,304	2,860	0,222	3,090	0,155	3,304
17	1,133	1,381	1,015	1,536	0,897	1,710	0,779	1,900	0,664	2,104	0,554	2,318	0,451	2,537	0,356	2,757	0,272	2,975	0,198	3,184
18	1,158	1,391	1,046	1,535	0,933	1,696	0,820	1,872	0,710	2,060	0,603	2,257	0,502	2,461	0,407	2,667	0,321	2,873	0,244	3,073
19	1,180	1,401	1,074	1,536	0,967	1,685	0,859	1,848	0,752	2,023	0,649	2,206	0,549	2,396	0,456	2,589	0,369	2,783	0,290	2,974
20	1,201	1,411	1,100	1,537	0,998	1,676	0,894	1,828	0,792	1,991	0,692	2,162	0,595	2,339	0,502	2,521	0,416	2,704	0,336	2,885
21	1,221	1,420	1,125	1,538	1,026	1,669	0,927	1,812	0,829	1,964	0,732	2,124	0,637	2,290	0,547	2,460	0,461	2,633	0,380	2,806
22	1,239	1,429	1,147	1,541	1,053	1,664	0,958	1,797	0,863	1,940	0,769	2,090	0,677	2,246	0,588	2,407	0,504	2,571	0,424	2,734
23	1,257	1,437	1,168	1,543	1,078	1,660	0,986	1,785	0,895	1,920	0,804	2,061	0,715	2,208	0,628	2,360	0,545	2,514	0,465	2,670
24	1,273	1,446	1,188	1,546	1,101	1,656	1,013	1,775	0,925	1,902	0,837	2,035	0,751	2,174	0,666	2,318	0,584	2,464	0,506	2,613
25	1,288	1,454	1,206	1,550	1,123	1,654	1,038	1,767	0,953	1,886	0,868	2,012	0,784	2,144	0,702	2,280	0,621	2,419	0,544	2,560
26	1,302	1,461	1,224	1,553	1,143	1,652	1,062	1,759	0,979	1,873	0,897	1,992	0,816	2,117	0,735	2,246	0,657	2,379	0,581	2,513
27	1,316	1,469	1,240	1,556	1,162	1,651	1,084	1,753	1,004	1,861	0,925	1,974	0,845	2,093	0,767	2,216	0,691	2,342	0,616	2,470
28	1,328	1,476	1,255	1,560	1,181	1,650	1,104	1,747	1,028	1,850	0,951	1,958	0,874	2,071	0,798	2,188	0,723	2,309	0,650	2,431
29	1,341	1,483	1,270	1,563	1,198	1,650	1,124	1,743	1,050	1,841	0,975	1,944	0,900	2,052	0,826	2,164	0,753	2,278	0,682	2,396
30	1,352	1,489	1,284	1,567	1,214	1,650	1,143	1,739	1,071	1,833	0,998	1,931	0,926	2,034	0,854	2,141	0,782	2,251	0,712	2,363
31	1,363	1,496	1,297	1,570	1,229	1,650	1,160	1,735	1,090	1,825	1,020	1,920	0,950	2,018	0,879	2,120	0,810	2,226	0,741	2,333
32	1,373	1,502	1,309	1,574	1,244	1,650	1,177	1,732	1,109	1,819	1,041	1,909	0,972	2,004	0,904	2,102	0,836	2,203	0,769	2,306
33	1,383	1,508	1,321	1,577	1,258	1,651	1,193	1,730	1,127	1,813	1,061	1,900	0,994	1,991	0,927	2,085	0,861	2,181	0,795	2,281
34	1,393	1,514	1,333	1,580	1,271	1,652	1,208	1,728	1,144	1,808	1,080	1,891	1,015	1,979	0,950	2,069	0,885	2,162	0,821	2,257
35	1,402	1,519	1,343	1,584	1,283	1,653	1,222	1,726	1,160	1,803	1,097	1,884	1,034	1,967	0,971	2,054	0,908	2,144	0,845	2,236
36	1,411	1,525	1,354	1,587	1,295	1,654	1,236	1,724	1,175	1,799	1,114	1,877	1,053	1,957	0,991	2,041	0,930	2,127	0,868	2,216
37	1,419	1,530	1,364	1,590	1,307	1,655	1,249	1,723	1,190	1,795	1,131	1,870	1,071	1,948	1,011	2,029	0,951	2,112	0,891	2,198
38	1,427	1,535	1,373	1,594	1,318	1,656	1,261	1,722	1,204	1,792	1,146	1,864	1,088	1,939	1,029	2,017	0,970	2,098	0,912	2,180
39	1,435	1,540	1,382	1,597	1,328	1,658	1,273	1,722	1,218	1,789	1,161	1,859	1,104	1,932	1,047	2,007	0,990	2,085	0,932	2,164
40	1,442	1,544	1,391	1,600	1,338	1,659	1,285	1,721	1,230	1,786	1,175	1,854	1,120	1,924	1,064	1,997	1,008	2,072	0,952	2,149
45	1,475	1,566	1,430	1,615	1,383	1,666	1,336	1,720	1,287	1,776	1,238	1,835	1,189	1,895	1,139	1,958	1,089	2,022	1,038	2,088
50	1,503	1,585	1,462	1,628	1,421	1,674	1,378	1,721	1,335	1,771	1,291	1,822	1,246	1,875	1,201	1,930	1,156	1,986	1,110	2,044
55	1,528	1,601	1,490	1,641	1,452	1,681	1,414	1,724	1,374	1,768	1,334	1,814	1,294	1,861	1,253	1,909	1,212	1,959	1,170	2,010
60	1,549	1,616	1,514	1,652	1,480	1,689	1,444	1,727	1,408	1,767	1,372	1,808	1,335	1,850	1,298	1,894	1,260	1,939	1,222	1,984
65	1,567	1,629	1,536	1,662	1,503	1,696	1,471	1,731	1,438	1,767	1,404	1,805	1,370	1,843	1,336	1,882	1,301	1,923	1,266	1,964
70	1,583	1,641	1,554	1,672	1,525	1,703	1,494	1,735	1,464	1,768	1,433	1,802	1,401	1,837	1,369	1,873	1,337	1,910	1,305	1,948
75	1,598	1,652	1,571	1,680	1,543	1,709	1,515	1,739	1,487	1,770	1,458	1,801	1,428	1,834	1,399	1,867	1,369	1,901	1,339	1,935
80	1,611	1,662	1,586	1,688	1,560	1,715	1,534	1,743	1,507	1,772	1,480	1,801	1,453	1,831	1,425	1,861	1,397	1,893	1,369	1,925
85	1,624	1,671	1,600	1,696	1,575	1,721	1,550	1,747	1,525	1,774	1,500	1,801	1,474	1,829	1,448	1,857	1,422	1,886	1,396	1,916
90	1,635	1,679	1,612	1,703	1,589	1,726	1,566	1,751	1,542	1,776	1,518	1,801	1,494	1,827	1,469	1,854	1,445	1,881	1,420	1,909
95	1,645	1,687	1,623	1,709	1,602	1,732	1,579	1,755	1,557	1,778	1,535	1,802	1,512	1,827	1,489	1,852	1,465	1,877	1,442	1,903
100	1,654	1,694	1,634	1,715	1,613	1,736	1,592	1,758	1,571	1,780	1,550	1,803	1,528	1,826	1,506	1,850	1,484	1,874	1,462	1,898
150	1,720	1,746	1,706	1,760	1,693	1,774	1,679	1,788	1,665	1,802	1,651	1,817	1,637	1,832	1,622	1,847	1,608	1,862	1,594	1,877
200	1,758	1,778	1,748	1,789	1,738	1,799	1,728	1,810	1,718	1,820	1,707	1,831	1,697	1,841	1,686	1,852	1,675	1,863	1,665	1,874

(*Continua*)

TABELA D.5A Estatística d de Durbin-Watson: pontos de significância de d_L e d_U em níveis de significância de 0,05 (*Continuação*)

	$k'=11$		$k'=12$		$k'=13$		$k'=14$		$k'=15$		$k'=16$		$k'=17$		$k'=18$		$k'=19$		$k'=20$	
n	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
16	0,098	3,503	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	0,138	3,378	0,087	3,557	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	0,177	3,265	0,123	3,441	0,078	3,603	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	0,220	3,159	0,160	3,335	0,111	3,496	0,070	3,642	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	0,263	3,063	0,200	3,234	0,145	3,395	0,100	3,542	0,063	3,676	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21	0,307	2,976	0,240	3,141	0,182	3,300	0,132	3,448	0,091	3,583	0,058	3,705	—	—	—	—	—	—	—	—
22	0,349	2,897	0,281	3,057	0,220	3,211	0,166	3,358	0,120	3,495	0,083	3,619	0,052	3,731	—	—	—	—	—	—
23	0,391	2,826	0,322	2,979	0,259	3,128	0,202	3,272	0,153	3,409	0,110	3,535	0,076	3,650	0,048	3,753	—	—	—	—
24	0,431	2,761	0,362	2,908	0,297	3,053	0,239	3,193	0,186	3,327	0,141	3,454	0,101	3,572	0,070	3,678	0,044	3,773	—	—
25	0,470	2,702	0,400	2,844	0,335	2,983	0,275	3,119	0,221	3,251	0,172	3,376	0,130	3,494	0,094	3,604	0,065	3,702	0,041	3,790
26	0,508	2,649	0,438	2,784	0,373	2,919	0,312	3,051	0,256	3,179	0,205	3,303	0,160	3,420	0,120	3,531	0,087	3,632	0,060	3,724
27	0,544	2,600	0,475	2,730	0,409	2,859	0,348	2,987	0,291	3,112	0,238	3,233	0,191	3,349	0,149	3,460	0,112	3,563	0,081	3,658
28	0,578	2,555	0,510	2,680	0,445	2,805	0,383	2,928	0,325	3,050	0,271	3,168	0,222	3,283	0,178	3,392	0,138	3,495	0,104	3,592
29	0,612	2,515	0,544	2,634	0,479	2,755	0,418	2,874	0,359	2,992	0,305	3,107	0,254	3,219	0,208	3,327	0,166	3,431	0,129	3,528
30	0,643	2,477	0,577	2,592	0,512	2,708	0,451	2,823	0,392	2,937	0,337	3,050	0,286	3,160	0,238	3,266	0,195	3,368	0,156	3,465
31	0,674	2,443	0,608	2,553	0,545	2,665	0,484	2,776	0,425	2,887	0,370	2,996	0,317	3,103	0,269	3,208	0,224	3,309	0,183	3,406
32	0,703	2,411	0,638	2,517	0,576	2,625	0,515	2,733	0,457	2,840	0,401	2,946	0,349	3,050	0,299	3,153	0,253	3,252	0,211	3,348
33	0,731	2,382	0,668	2,484	0,606	2,588	0,546	2,692	0,488	2,796	0,432	2,899	0,379	3,000	0,329	3,100	0,283	3,198	0,239	3,293
34	0,758	2,355	0,695	2,454	0,634	2,554	0,575	2,654	0,518	2,754	0,462	2,854	0,409	2,954	0,359	3,051	0,312	3,147	0,267	3,240
35	0,783	2,330	0,722	2,425	0,662	2,521	0,604	2,619	0,547	2,716	0,492	2,813	0,439	2,910	0,388	3,005	0,340	3,099	0,295	3,190
36	0,808	2,306	0,748	2,398	0,689	2,492	0,631	2,586	0,575	2,680	0,520	2,774	0,467	2,868	0,417	2,961	0,369	3,053	0,323	3,142
37	0,831	2,285	0,772	2,374	0,714	2,464	0,657	2,555	0,602	2,646	0,548	2,738	0,495	2,829	0,445	2,920	0,397	3,009	0,351	3,097
38	0,854	2,265	0,796	2,351	0,739	2,438	0,683	2,526	0,628	2,614	0,575	2,703	0,522	2,792	0,472	2,880	0,424	2,968	0,378	3,054
39	0,875	2,246	0,819	2,329	0,763	2,413	0,707	2,499	0,653	2,585	0,600	2,671	0,549	2,757	0,499	2,843	0,451	2,929	0,404	3,013
40	0,896	2,228	0,840	2,309	0,785	2,391	0,731	2,473	0,678	2,557	0,626	2,641	0,575	2,724	0,525	2,808	0,477	2,892	0,430	2,974
45	0,988	2,156	0,938	2,225	0,887	2,296	0,838	2,367	0,788	2,439	0,740	2,512	0,692	2,586	0,644	2,659	0,598	2,733	0,553	2,807
50	1,064	2,103	1,019	2,163	0,973	2,225	0,927	2,287	0,882	2,350	0,836	2,414	0,792	2,479	0,747	2,544	0,703	2,610	0,660	2,675
55	1,129	2,062	1,087	2,116	1,045	2,170	1,003	2,225	0,961	2,281	0,919	2,338	0,877	2,396	0,836	2,454	0,795	2,512	0,754	2,571
60	1,184	2,031	1,145	2,079	1,106	2,127	1,068	2,177	1,029	2,227	0,990	2,278	0,951	2,330	0,913	2,382	0,874	2,434	0,836	2,487
65	1,231	2,006	1,195	2,049	1,160	2,093	1,124	2,138	1,088	2,183	1,052	2,229	1,016	2,276	0,980	2,323	0,944	2,371	0,908	2,419
70	1,272	1,986	1,239	2,026	1,206	2,066	1,172	2,106	1,139	2,148	1,105	2,189	1,072	2,232	1,038	2,275	1,005	2,318	0,971	2,362
75	1,308	1,970	1,277	2,006	1,247	2,043	1,215	2,080	1,184	2,118	1,153	2,156	1,121	2,195	1,090	2,235	1,058	2,275	1,027	2,315
80	1,340	1,957	1,311	1,991	1,283	2,024	1,253	2,059	1,224	2,093	1,195	2,129	1,165	2,165	1,136	2,201	1,106	2,238	1,076	2,275
85	1,369	1,946	1,342	1,977	1,315	2,009	1,287	2,040	1,260	2,073	1,232	2,105	1,205	2,139	1,177	2,172	1,149	2,206	1,121	2,241
90	1,395	1,937	1,369	1,966	1,344	1,995	1,318	2,025	1,292	2,055	1,266	2,085	1,240	2,116	1,213	2,148	1,187	2,179	1,160	2,211
95	1,418	1,929	1,394	1,956	1,370	1,984	1,345	2,012	1,321	2,040	1,296	2,068	1,271	2,097	1,247	2,126	1,222	2,156	1,197	2,186
100	1,439	1,923	1,416	1,948	1,393	1,974	1,371	2,000	1,347	2,026	1,324	2,053	1,301	2,080	1,277	2,108	1,253	2,135	1,229	2,164
150	1,579	1,892	1,564	1,908	1,550	1,924	1,535	1,940	1,519	1,956	1,504	1,972	1,489	1,989	1,474	2,006	1,458	2,023	1,443	2,040
200	1,654	1,885	1,643	1,896	1,632	1,908	1,621	1,919	1,610	1,931	1,599	1,943	1,588	1,955	1,576	1,967	1,565	1,979	1,554	1,991

Nota: n = número de observações, k' = número de variáveis explanatórias, excluindo o termo constante.

Fonte: Esta tabela é uma extensão da tabela original de Durbin-Watson, reproduzida de SAVIN, N. E.; WHITE, K. J. "The Durbin-Watson test for serial correlation with extreme small samples or many regressors." *Econometrica*, v. 45, p. 1.989-1996, nov. 1977. Ela foi corrigida por FAREBROTHER, R. W. *Econometrica*, v. 48, p. 1.554, set. 1980. Reprodução autorizada pela Econometric Society.

Distribuição de Probabilidade Contínua

Distribuição Logística

- Consideremos uma base de dados – amostra – composta por exemplo: indivíduos, domicílios, municípios, países, etc.
- Para cada observação da amostra, tem-se uma variável Y_i que assume valores 0 ou 1 (zero se não possui determinada característica e 1 se possui esta característica). Outra possibilidade são variáveis qualitativas não numéricas do tipo: bom:ruim; aprovado:reprovado; etc.
- Tem-se um conjunto de colunas que representam as variáveis explicativas - $X_{1,i}$; $X_{2,i}$; $X_{3,i}$; … … ; $X_{n,i}$.
- O objetivo da regressão logística é assumir que cada valor individual Y_i corresponde a uma variável aleatória de Bernoulli, com probabilidade de sucesso (por exemplo, pessoa identificada como infectada com Covid-19) dada por Prob[Y_i =1] = p_i .
- Logo, a probabilidade de fracasso (por exemplo, pessoa não identificada como infectada com Covid-19) é dada por Prob[Y_i=0] = 1-p_i.

Distribuição de Probabilidade Contínua

Distribuição Logística

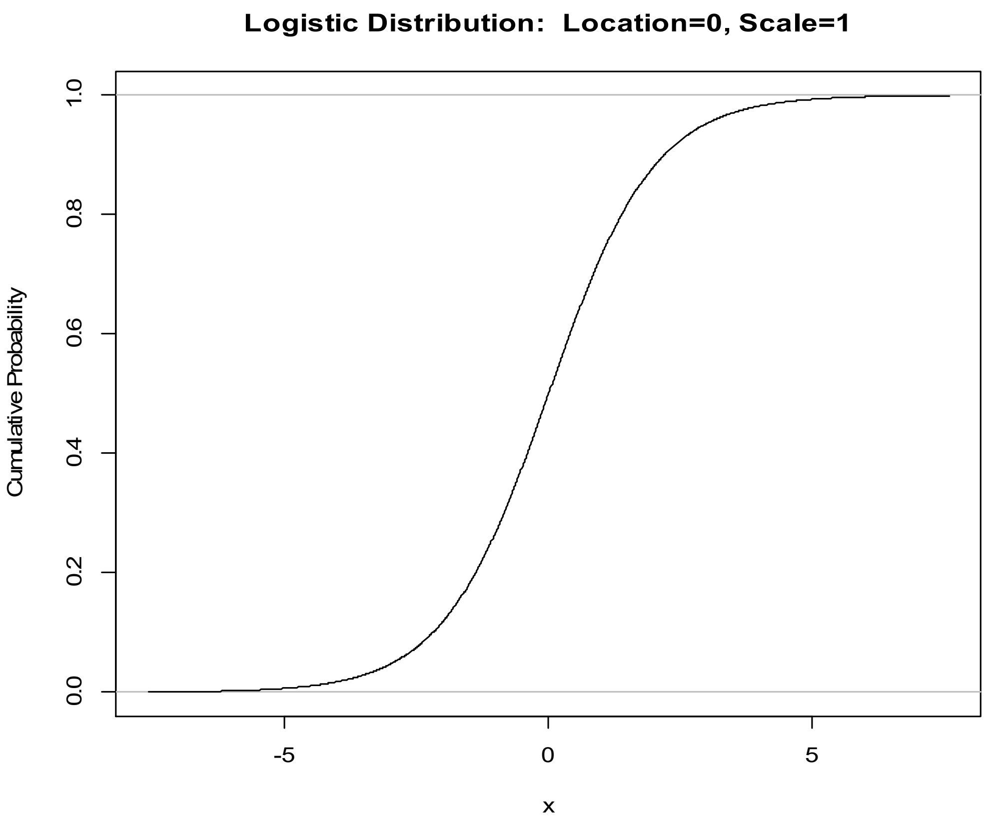
O objetivo é fazer com que esta variável Y dependa das variáveis explicativas;

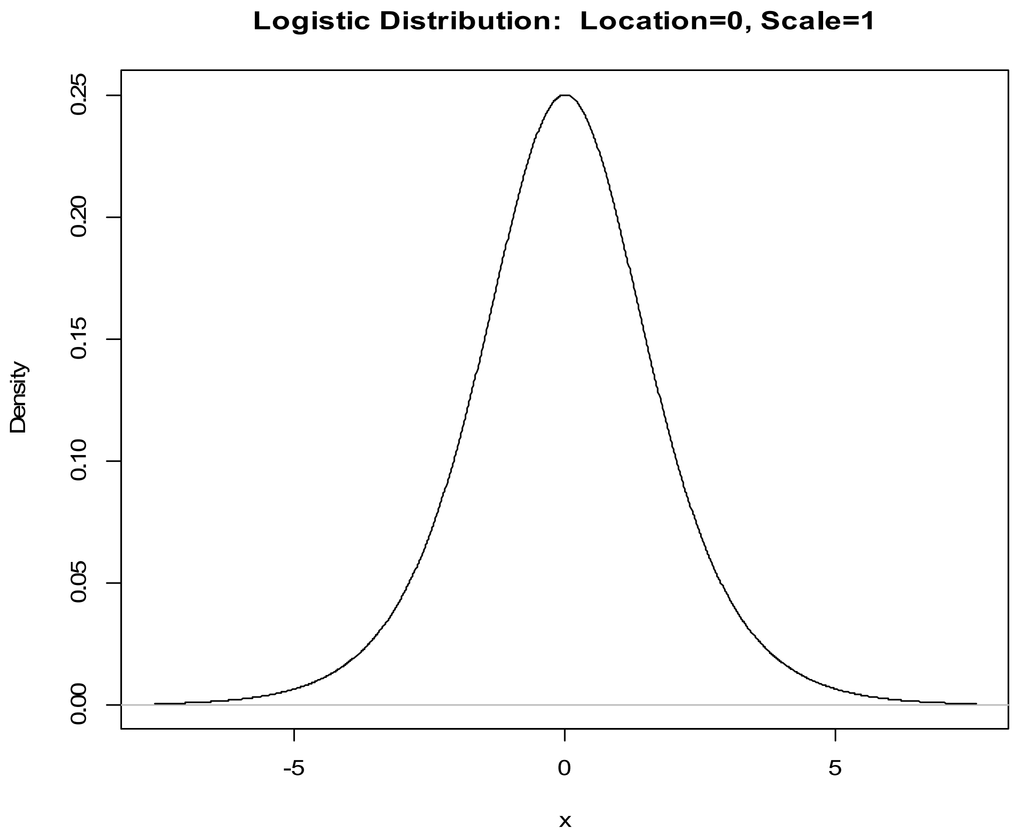
$$Prob[Y_i = 1] = p_i = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki})}}$$

- Esta formulação implica que a probabilidade p_i vai se situar no intervalo (0,1).
- Por exemplo, dada a nossa amostra de infectados pelo Covid-19, a resposta desse modelo é a probabilidade de estar infectado pelo Covid-19.
- Além disso o modelo apresentaria quais são as variáveis explicativas que realmente explicam a probabilidade de estar infectado pelo Covid-19.
- Quando os betas são positivos e quando os valores dos X_s aumenta, a probabilidade de sucesso aumenta.
- No “R”, para Machine Learning, experimente usar o pacote H2O.

Distribuição de Probabilidade Contínua

Distribuição Logística





Medidas de Posição

<u>MÉDIA ARITMÉTICA</u>

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Em que:

$\bar{X}$ = Média dos valores de X;

X_i = Valores de X da amostra;

n = Tamanho da amostra.

Medidas de Posição

MEDIANA: Valor que divide a amostra ao meio (valor central)

Forma de cálculo:

1) Ordenar a amostra com a variável que se deseja obter a mediana, em ordem crescente de valores;

2) **Tratamento:**

✓ **Para uma amostra de número ímpar de elementos:**

$$EM_d = \frac{n}{2} + 1/2$$

Exemplo: Se a amostra tem 5 elementos ➔ $\mathrm{E}M_d = \frac{5}{2} + 0{,}5 = 3$; a mediana será o 3º elemento da amostra ordenada;

✓ **Para uma amostra de número par de elementos:**

$$EM_d = \frac{n}{2} + 1/2$$

Exemplo: Se a amostra tem 4 elementos ➔ $EM_d = \frac{4}{2} + 0{,}5 = 2{,}5$; a mediana será o valor da média aritmética do 2º e 3º elementos da amostra ordenada;

Em que: EM_d = Elemento da mediana ; n = tamanho da amostra.

Medidas de Posição

MODA

Valor mais frequente em uma amostra, aquele que mais “aparece”;

Exemplo: Amostra = 20, 32, 10, 32, 20, 32, 41, 53

Moda = 32 (aparece 3 vezes)

✓A moda é útil para variáveis qualitativas e em alguns casos para variáveis quantitativas;

Medidas de Dispersão

- São medidas de espalhamento em relação ao valor médio;
- Medidas quantitativas que expressam quanto os elementos da amostra se distanciam da média;
- As principais medidas de dispersão são: Variância, Desvio padrão e coeficiente de variação.

Medidas de Dispersão

Variância

Para uma população:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(X - \mu)^2}{N}$$

Em que:

σ^2 = Variância da população;

X = Cada observação (dado) da variável X (que se deseja calcular a variância;

μ = Média da variável X (população);

N = Tamanho da população.

Medidas de Dispersão

Variância

Para uma amostra:

$$s^2 = \frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n - 1}$$

Em que:

s^2 = Variância da amostra;

X = Cada observação (dado) da variável X (que se deseja calcular a variância;

$\bar{X}$ = Média da variável *X (da amostra)*;

n = Tamanho da amostra.

Medidas de Dispersão

Desvio Padrão

Para uma população:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X - \mu)^2}{N}}$$

Em que:

σ= Variância da população;

X = Cada observação (dado) da variável X (que se deseja calcular a variância;

μ = Média da variável X (população);

N = Tamanho da população.

Medidas de Dispersão

Desvio Padrão

Para uma amostra:

$$s = \sqrt{\frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Em que:

s = Variância da amostra;

X = Cada observação (dado) da variável X (que se deseja calcular a variância;

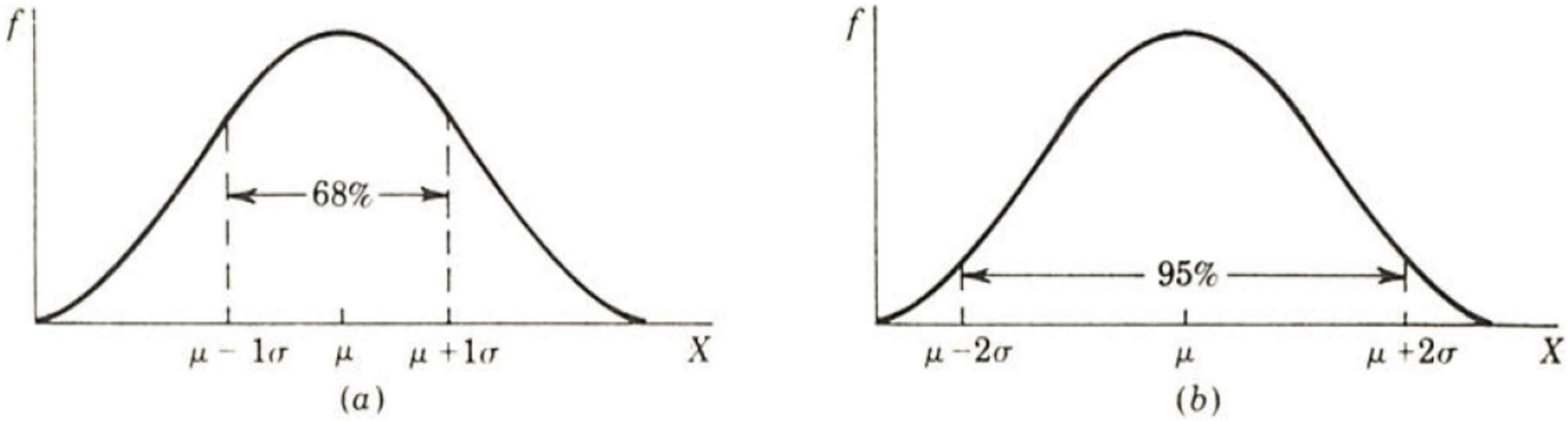
$\bar{X}$ = Média da variável *X (amostra)*;

n = Tamanho da amostra.

Medidas de Dispersão

- Uma das utilidades do desvio padrão

Distribuição de frequência, curva simétrica e mesocústica ➔ Curva normal



Medidas de Dispersão

- Exemplo de uso do Desvio Padrão

Foi observado que as contas de energia elétrica para uma área municipal, no mês de junho, são normalmente distribuídas. Se a média das contas for $42,00 e o desvio padrão $12,00, então aproximadamente 68% das contas estão entre $30,00 e $54,00. Também pode-se dizer que, aproximadamente 95% das contas estão entre $18,00 e $66,00.

Medidas de Dispersão

Coeficiente de Variação (CV)

- Indica a magnitude relativa do desvio padrão quando comparado com a média de uma variável.

Para a população:

$$V = \frac{\sigma}{\mu}$$

Para a amostra:

$$V = \frac{s}{\bar{X}}$$

Em que:

V = Coeficiente de variação;

σ , s = Desvio padrão; população e amostra, respectivamente;

μ , $\bar{X}$ = Média; população e amostra, respectivamente.

Medidas de Dispersão

Coeficiente de Variação (CV)

Exemplo de uso do Coeficiente de Variação:

Para duas emissões de ações ordinárias de duas empresas da indústria eletrônica, na bolsa de valores, o preço médio diário no fechamento dos negócios, durante o período de 1 mês, para as ações "A" foi de $150 com desvio padrão de $5. Para as ações "B", o preço médio foi de $50 com um desvio padrão de $3.

$$V(A) = \frac{5}{150} = 0{,}03333 = 3{,}33\%$$

$$V(B) = \frac{3}{50} = 0{,}06000 = 6{,}00\%$$

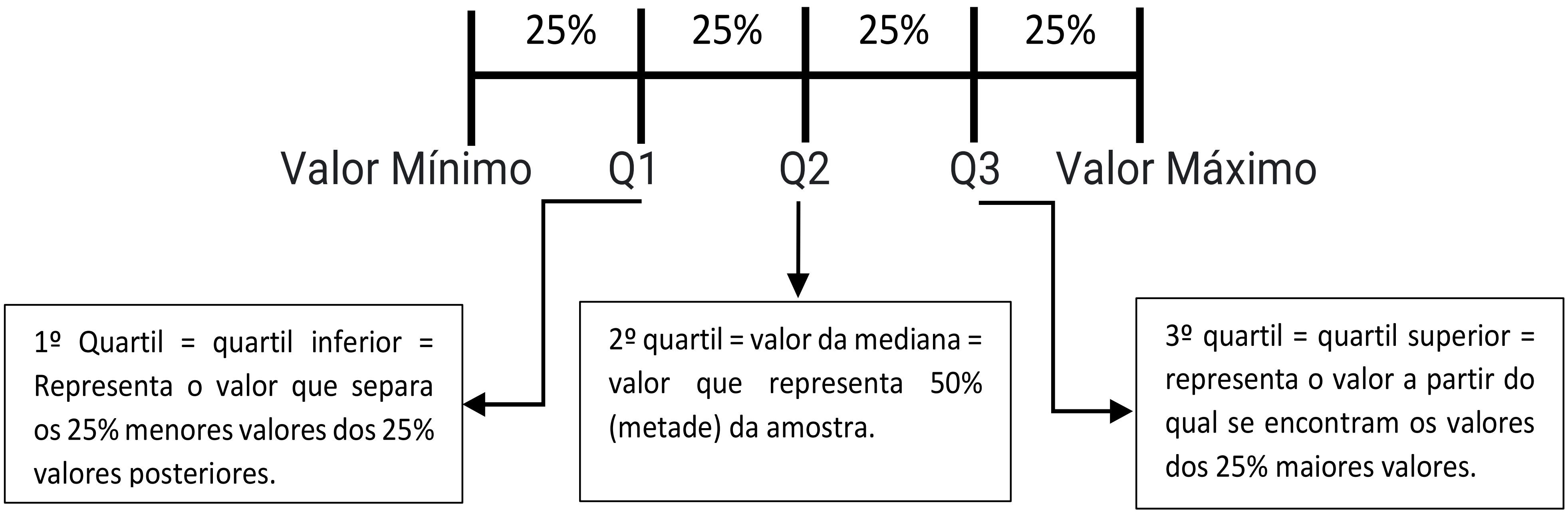
Baixa dispersão: cv ≤ 15%

Média dispersão: cv ➔ entre 16-29%

Alta dispersão: cv ≥ 30%

Medidas Separatrizes - Quartis

- Quartis são os valores que dividem o conjunto ordenado de dados em quatro partes iguais, e assim cada parte representa 1/4 da amostra ou população.



Medidas Separatrizes - Quartis

- Exemplo: amostra com dados ordenados (crescente) – amostra com número impar de elementos:

60, 65, 66, 67, 68, 68, 69, 70, 71, 72, 77

Valor Mínimo = 60

Valor Máximo = 77

n = tamanho da amostra = 11

- $Q_1 = \frac{(n+1)}{4} = \frac{(11+1)}{4} = 3º\ elemento\ da\ amostra = 66$

- Logo, 25% das observações são "iguais a" ou "abaixo" de 66 e 75% das observações estão acima de 66.

- $Q_2 = 2\,.\left(\frac{(n+1)}{4}\right) = 2\,.\left(\frac{(11+\ \ )}{4}\right) = 6º\ elemento\ da\ amostra = 68$

- Logo, a observação que divide a amostra ao meio é o 6º elemento, cujo valor é 68.

Medidas Separatrizes - Quartis

- Exemplo: amostra com dados ordenados (crescente) – amostra com número impar de elementos:

60, 65, 66, 67, 68, 68, 69, 70, 71, 72, 77

Valor Mínimo = 60

Valor Máximo = 77

n = tamanho da amostra = 11

- $Q_3 = 3.\left(\frac{(n+1)}{4}\right) = 3\,.\left(\frac{(11+1)}{4}\right) = 9º\ elemento\ da\ amostra = 71$

- Portanto, 75% das observações são “iguais a” ou estão “abaixo” de 71 e 25% das observações estão acima de 71.

Medidas Separatrizes – Distância Interquartílica

- Exemplo: amostra com dados ordenados (crescente) – amostra com número impar de elementos:

60, 65, 66, 67, 68, 68, 69, 70, 71, 72, 77

Valor Mínimo = 60

Valor Máximo = 77

n = tamanho da amostra = 11

- Uma medida de dispersão alternativa ao desvio padrão é a distância interquartílica, definida como a diferença entre o terceiro e o primeiro quartis, ou seja:

$$d_q = Q_3 - Q_1 = 71 - 66 = 5$$

Medidas Separatrizes - Quartis

- Exemplo: amostra com dados ordenados (crescente) – amostra com número par de elementos:

60, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 77

Valor Mínimo = 60

Valor Máximo = 77

n = tamanho da amostra = 10

- $Q_1 = \frac{(n)}{4} + 0{,}5 = \frac{(10)}{4} + 0{,}5 = 3º\ elemento\ da\ amostra = 66$

- Logo, 25% das observações são “iguais a” ou estão “abaixo” de 66 e 75% das observações estão acima de 66.

- $Q_2 = 2\,.\left(\frac{(n)}{4}\right) + 0{,}5 = 2\,.\left(\frac{(10)}{4}\right) + 0{,}5 = 5{,}5 =$ média aritmética entre o 5º e o 6º elemento =

$\frac{(68+69)}{2} = 68{,}5$

Medidas Separatrizes - Quartis

- Exemplo: amostra com dados ordenados (crescente) – amostra com número par de elementos:

60, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 77

Valor Mínimo = 60

Valor Máximo = 77

n = tamanho da amostra = 10

- $Q_3 = 3.\frac{(n)}{4} + 0{,}5 = 3\,.\frac{(10)}{4} + 0{,}5 = 8^{\text{º}}\ elemento\ da\ amostra = 71$

- Portanto, 75% das observações são "iguais a" ou estão "abaixo" de 71 e 25% das observações estão acima de 71.

Medidas Separatrizes - Percentis

- O modo de calcular e o conceito são parecidos com os quartis.
- Ao contrário dos quartis, o objetivo não é subdividir a amostra em "quatro" partes, mas sim em "cem" partes.

Logo, para se calcular o valor do "décimo" percentil em uma amostra com número de observações ímpares, a fórmula é:

$$P_{10} = 10\,.\left(\frac{(n+1)}{100}\right)$$

E, para se calcular o valor do "nonagésimo" percentil em uma amostra com número de observações pares, a fórmula é:

$$P_{90} = 90\,.\left(\frac{(n)}{100}\right) + 0{,}5$$