TUGAS BESAR 1 IF 2123 ALJABAR LINEAR DAN GEOMETRI

SISTEM PERSAMAAN LINEAR, DETERMINAN, DAN APLIKASINYA

SEMESTER I TAHUN 2022/2023

13521056 Daniel Egiant Sitanggang

13521079 Hobert Anthony Jonatan

13521159 Sulthan Dzaky Alfaro

Kelompok “Hoetan”

BAB I

DESKRIPSI MASALAH

Pada zaman yang serba digital seperti saat ini, kita tidak dapat dipisahkan dengan tabel. Tabel banyak kegunaannya, salah satunya untuk menyimpan data. Untuk menyelesaikan persoalan dalam tabel, kita dapat menggunakan matriks serta persamaan linear. Dengan menggunakan matriks, kita dapat menggunakan pemodelan matematika seperti persamaan linear agar kita dapat memformulasikan solusinya.

Matriks ini dapat digambarkan seperti tabel yang berisi angka, simbol, yang tersusun dari baris dan kolom. Untuk contoh, dibawah ini tersedia gambar matriks 2 x 3,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Gambar 1.1 Matriks dengan ukuran 2×3

Salah satu cara untuk menyelesaikan persoalan matriks adalah dengan menggunakan sistem persamaan linear (SPL). Ada banyak metode dari SPL ini, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan/invers($x = A^{-1} \times B$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan x peubah dan x persamaan. Untuk contoh pemodelan SPL, dibawah ini adalah salah satu cara pemodelan SPL:

$$x + 2y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 7$$

$$2x + y + z = 4$$

Gambar 1.2 Persamaan linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Gambar 1.3 Pemodelan SPL bentuk Augmented

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Gambar 1.4 Hasil OBE

$$x = -1; y = 2; z = 4$$

Gambar 1.5 Hasil dari matriks

Setiap metode SPL memiliki pola yang berulang. Hal ini dapat kita buat algoritma pada program komputer agar dapat menyelesaikan SPL dengan mudah dari metode-metode yang telah kita pelajari.

Kita dapat menyelesaikan permasalahan SPL dalam berbagai bidang, seperti bidang statistika, kita dapat menyelesaikan persamaan Interpolasi Polinom Bicubic Interpolation, dan Regresi Linear Berganda. Pada Tugas Besar ini, kita akan membuat algoritma agar dapat menyelesaikan permasalahan-permasalahan tersebut.

BAB II

TEORI SINGKAT

1. Determinan Matriks

Determinan adalah suatu nilai yang dapat dihitung hanya di matriks persegi. Matriks persegi adalah matriks yang memiliki jumlah kolom dan baris yang sama. Dalam menghitung determinan, ada 2 cara yang dapat dilakukan, yaitu dengn menggunakan metode ekspansi kofaktor dan matriks segitiga atas dan bawah.

Untuk metode ekspansi kofaktor dapat dilakukan sebagai berikut:

Jika ada sebuah matriks dengan ukuran $i \times j$, maka minor entri matriks dapat dinyatakan sebagai M_{ij} didefinisikan menjadi determinan submatriks selain baris i dan kolom j. Lalu ada yang namanya kofaktor yang dapat dihitung dengan cara $(-1)^{i+j}M_{ij}$ yang dapat dinyatakan sebagai C_{ij}. Berikut merupakan contoh dari minor entri dan kofaktor dari sebuah matriks.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -9$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$$

Gambar 2.1 Contoh Kofaktor dalam Matriks

Cara agar mudah untuk mengingat tanda positif dan negatif dengan melihat gambar dibawah ini.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Gambar 2.2 Positif Negatif Kofaktor

Contoh mendapatkan determinan dengan menggunakan ekspansi kofaktor

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(matriks) = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(matriks) = -27$$

Untuk menggunakan metode kedua, yaitu matriks segitiga bawah dan atas, kita bentuk terlebih dahulu matriks awal menjadi seperti gambar berikut lalu hitung determinan dengan rumus berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1k} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a'_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^p a'_{11} a'_{22} a'_{33} \ldots a'_{kk}$$

Gambar 2.2 Metode Segitiga Bawah

(p merupakan banyaknya baris yang di tukar)

2. Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss menggunakan konsep Matriks Eselon Baris dan Operasi Baris Elementer untuk mendapatkan hasil dari Sistem Persamaan Linear (SPL) yang ingin kita cari. Matriks Eselon Baris adalah matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris, kecuali baris yang seluruhnya 0. Berikut adalah beberapa contoh Matriks Eselon Baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.3 Contoh Matriks Eselon Baris

(Keterangan : * adalah nilai sembarang)

Matriks Eselon Baris memiliki beberapa sifat, antara lain :

1. Jika sebuah baris terdiri dari seluruhnya nol, maka bilangan tidak nol pertama di dalam baris tersebut adalah 1 (disebut 1 utama).
2. Jika ada baris yang seluruhnya nol, mala semua baris itu dikumpulkan pada bagian bawah matriks.
3. Di dalam dua baris berurutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan daripada 1 utama pada baris yang lebih tinggi.

Operasi Baris Elementer (OBE) merupakan suatu operasi yang diterapkan pada baris suatu matriks. OBE biasa digunakan untuk menentukan invers suatu matriks dan menyelesaikan suatu Sistem Persamaan Linear (SPL). Terdapat tiga Operasi Baris Elementer terhadap suatu matriks *augmented*, antara lain :

1. Kalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol
2. Pertukarkan dua buah baris
3. Tambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya

Solusi sebuah SPL diperoleh dengan menerapkan OBE pada matriks *augmented* sampai terbentuk Matriks Eselon Baris atau Matriks Eselon Baris Tereduksi. Jika berakhir pada Matriks Eselon Baris maka metode penyelesaiannya disebut Metode Eliminasi Gauss, sedangkan jika berakhir pada Matriks Eselon Baris Tereduksi maka metode penyelesaiannya disebut Metode Eliminasi Gauss-Jodan.

Langkah-langkah yang harus dilakukan untuk mencari solusi dari Sistem Persamaan Linear menggungakan Metode Eliminasi Gauss adalah

1. Nyatakan Sistem Persamaan Linear dalam bentuk matriks *augmented*
2. Terapkan Operasi Baris Elementer pada matriks *augmented* sampai terbentuk Matriks Eselon Baris
3. Pecahkan persamaan yang berkoresponden pada Matriks Eselon Baris dengan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*)

Berikut adalah contoh penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Metode Eliminasi Gauss.

Misalkan, diketahui 3 buah persamaan :

$$3x + 2y + 5z = 33$$

$$2x + y + z = 12$$

$$x + y + 4z = 21$$

Jika dinyatakan dalam matriks *augmented*, maka akan menjadi :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 33 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 4 & 21 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 33 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 4 & 21 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(R1,R3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 21 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \\ 3 & 2 & 5 & 33 \end{bmatrix} \xrightarrow{(R2-2R1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 21 \\ 0 & -1 & -7 & -30 \\ 3 & 2 & 5 & 33 \end{bmatrix} \xrightarrow{(R3-R1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 21 \\ 0 & -1 & -7 & -30 \\ 0 & -1 & -7 & -30 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-R2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & -7 & -30 \end{bmatrix} \xrightarrow{(R3+R2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 21 \\ 0 & -1 & -7 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil dalam bentuk solusi parametrik

$$z = a$$

$$y = 30 - 7a$$

$$x = -9 + 3a$$

3. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Selain Metode Eliminasi Gauss, kita dapat menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan untuk mencari solusi dari SPL. Secara garis besar, hampir sama dengan Eliminasi Gauss,sama-sama menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE), akan tetapi kita ubah matriks menjadi Matriks Eselon Baris Tereduksi. Untuk contoh Matriks Eselon Baris Tereduksi dapat dilihat pada gambar dibawah ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.4 Contoh Matriks Eselon Baris Tereduksi

Langkah-langkah yang dilakukan untuk mencari solusi dari Sistem Persamaan Linear menggunakan metode Eliminasi Gauss-Jordan sebagai berikut.

1. Fase eliminasi Gauss (menghasilkan nilai 0 dibawah 1 utama)
2. Fase selanjutnya yaitu agar menghasilkan nilai 0 diatas 1 utama

Untuk contoh dari metode Eliminasi Gauss-Jordan, berikut dibawah ini contoh SPL menggunakan metode Eliminasi Gauss-Jordan.

$$x + 5y + 3z = 16$$

$$x - 2y + 9z = 8$$

$$2x + y - z = 7$$

Dari fase Eliminasi Gauss didapat,

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -{}^{6}\!/_{7} & {}^{8}\!/_{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lalu kita modifikasi agar diatas 1 utama menjadi 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -{}^{6}\!/_{7} & {}^{8}\!/_{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(R1-5R2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & {}^{51}\!/_{7} & {}^{72}\!/_{7} \\ 0 & 1 & -{}^{6}\!/_{7} & {}^{8}\!/_{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(R1-{}^{51}\!/_{7}R3);(R2+{}^{6}\!/_{7}R3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat solusi dari SPL diatas,

$$x = 3; y = 2; z = 1$$

4. Matriks Balikan (Invers)

Misalkan M adalah sebuah matriks persegi, maka balikan atau *invers* dari matriks M (dinotasikan M^{-1}) adalah sebuah matriks yang apabila dikalikan dengan M akan menghasilkan matriks identitas ($M^{-1} \times M = I$). Syarat sebuah matriks memiliki balikan adalah matriks tersebut harus berbentuk persegi dan determinan matriks tidak bernilai nol. Matriks balikan biasanya digunakan untuk mencari solusi dari Sistem Persamaan Linear yang memiliki solusi tunggal.

$$Ax = B$$

$$A^{-1} Ax = A^{-1}B$$

$$Ix = A^{-1} B$$

$$x = A^{-1}B$$

$$(I \; adalah \; matriks \; identitas)$$

Terdapat dua metode yang biasa digunakan untuk menentukan matriks balikan dari M , yang pertama adalah dengan menggunakan kofaktor, yaitu dengan rumus :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} adj(M)$$

$\det(M)$ = determinan matriks M dan $adj(M)$ = matriks adjoin dari M

Metode yang kedua adalah dengan metode eliminasi Gauss-Jordan. Matriks balikan pada metode ini diperoleh dengan mengubah matriks *augmented* $[M|I] \sim (Gauss - Jordan) \sim [I|M^{-1}]$, dimana I adalah matriks identitas yang memiliki ukuran yang sama dengan matriks M.

5. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor adalah matriks yang terbentuk dari kofaktor-kofaktor matriks. Susunan elemen pada matriks sama saja dengan susunan pada matriksnya. Secara umum matriks kofaktor dapat ditulis sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Gambar 2.5 Bentuk dari matriks kofaktor

6. Matriks Adjoint

Adjoin di dalam matriks ini dapat dikatakan sebagai hasil transpose dari matriks kofaktor. Adjoin dari matriks dapat digunakan untuk menentukan balikan dari matriks dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times adj(A)$$

7. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer merupakan suatu rumus yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari sistem persamaan linear dengan banyak persamaan sama dengan banyak variabel, dan berlaku ketika SPL memiliki solusi tunggal. Rumus ini menggunakan determinan matriks koefisien (daris sistem persamaan) dan determinan matriks lain yang diperoleh dengan mengganti salah satu kolom matriks koefisien dengan vektor yang ada di kanan persamaan. Contoh $Ax = B$ merupakan SPL terdiri dari n persamaan dan n variabel. Jika $\det(A) \neq 0$ maka setiap variabel memiliki solusi yang unik yaitu,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}; \dots; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

8. Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom adalah suatu metode analisis numerik untuk memperkirakan/mengaproksimasi suatu nilai fungsi polinom berdasarkan beberapa titik data yang diketahui pada fungsi tersebut. Pada bidang sains dan rekayasa, seringkali kita mendapatkan kumpulan data dari hasil percobaan dan kemudian ingin memprediksi hasil percobaan apabila salah satu variabel independen dalam percobaan tersebut diubah. Dengan adanya metode interpolasi polinom, kita dapat membuat fungsi projeksi untuk membantu kita memodelkan bagaimana data tersebut berubah-ubah terhadap variabel independennya dan juga mengaproksimasi/memprediksi hasil percobaan apabila variabel independennya diubah.

Metode untuk mencari persamaan interpolasi polinom adalah sebagai berikut :

1. Diberikan $n + 1$ buah titik data yang berbeda.

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

2. Akan terdapat suatu polinom $p_n(x)$ yang memenuhi:

$$y_i = p_n(x_i), untuk\ i = 0, 1, 2, \dots, n$$

   Polinom tersebut diasumsikan memiliki bentuk:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

3. Buat matriks *augmented* dari persamaan $p_n(x)$ tersebut

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n & y_n \end{bmatrix}$$

4. Lakukan Eliminasi Gauss atau Eliminasi Gauss-Jordan pada matriks augmented agar mendapat nilai koefisien dari setiap variable(contoh dibawah ini menggunakan Eliminasi Gauss Jordan):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & k_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_n \end{bmatrix}$$

   Sehingga didapat solusi :

$$\begin{gathered} a_0 = k_0 \\ a_1 = k_1 \\ a_2 = k_2 \\ \vdots \\ a_n = k_n \end{gathered}$$

9. Bicubic Interpolation

Bicubic Interpolation merupakan perpanjangan dari cubic interpolation untuk menginterpolasi data titik di 2 dimensi. Untuk permukaan interpolasi jauh lebih halus daripada permukaan yang diperoleh dari interpolasi bilinear ataupun nearest-neighbor interpolation. Dalam pengaplikasiannya, yaitu dalam pemrosesan gambar, Bicubic Interpolation menghasilkan lebih baik dibandingkan Interpolasi Bilinear maupun Nearest-Neighbor Interpolation sehingga Bicubic Interpolation sering dipilih untuk pemrosesan gambar. Interpolasi Bilinear hanya memperhitungkan 4 pixel, sedangkan Bicubic Interpolation memperhitungkan 16 pixel.

Untuk perhitungan Bicubic Interpolation sebagai berikut:

Misalkan nilai fungsi f dan turunannya f_x, f_x dan f_{xy} diketahui di 4 pojok yaitu (0,0),(1,0),(0,1),(1,1) yang merupakan unit dari sebuah persegi. Permukaan interpolasi dapat ditulis sebagai berikut.

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j$$

Masalah interpolasi terdiri dari menentukan 16 koefisien a_{ij}. Masukkan titik tersebut ke $p(x, y)$.

1. $f(0,0) = p(0,0) = a_{00}$

2. $f(1,0) = p(1,0) = a_{00} + a_{10} + a_{20} + a_{30}$

3. $f(0,1) = p(0,1) = a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03}$

4. $f(1,1) = p(1,1) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij}$

Lalu,8 titik dimasukkan ke masing masing turunan x dan y

1. $f_x(0,0) = p_x(0,0) = a_{10}$

2. $f_x(1,0) = p_x(1,0) = a_{10} + 2a_{20} + 3a_{30}$

3. $f_x(0,1) = p_x(0,1) = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$

4. $f_x(1,1) = p_x(1,1) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} i$

5. $f_y(0,0) = p_y(0,0) = \ a_{01}$

6. $f_y(1,0) = p_y(1,0) = \ a_{01} + a_{11} + a_{21} + a_{31}$

7. $f_y(0,1) = p_y(0,1) = \ a_{01} + 2a_{02} + 3a_{03}$

8. $f_y(1,1) = p_y(1,1) = \ \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}j$

Lalu,empat persamaan untuk turunan parsial campuran xy

1. $f_x(0,0) = p_x(0,0) = \ a_{11}$

2. $f_x(1,0) = p_x(1,0) = \ a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31}$

3. $f_x(0,1) = p_x(0,1) = \ a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13}$

4. $f_x(1,1) = p_x(1,1) = \ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}ij$

Ekspresi di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$p_x(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}ix^{i-1}y^j$$

$$p_y(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}jx^iy^{j-1}$$

$$p_{xy}(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}ix^{i-1}jy^{j-1}$$

Prosedur ini menghasilkan permukaan $p(x,y)$ di persegi dengan satuan $[0,1] \times [0,1]$ yang kontinu dan memiliki turunan kontinu. Lalu mengelompokkan parameter yang tidak diketahui yaitu a_{ij} dalam vector

$$a = [a_{00}\ a_{10}\ a_{20}\ a_{30}\ a_{01}\ a_{11}\ a_{21}\ a_{31}\ a_{02}\ a_{12}\ a_{22}\ a_{32}\ a_{03}\ a_{13}\ a_{23}\ a_{33}]^T$$

Dan biarkan x

$$x = \begin{bmatrix} f(0,0)f(1,0)f(0,1)f(1,1)f_x(0,0)f_x(1,0)f_x(0,1)f_x(1,1)f_y(0,0)f_y(1,0)f_y(0,1)f_y(1,1)f_{xy}(0,0)f_{xy}(1,0)f_{xy}(0,1) \\ f_{xy}(1,1) \end{bmatrix}^T$$

Sistem persamaan diatas dapat dirumuskan kembali menjadi matriks untuk persamaan linear $Aa = x$ lalu dilakukan pembalikan matriks/invers sehingga didapat $a = A^{-1}x$

Sehingga didapat rumus Bicubic Interpolasi

$$p(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix}$$

10.Regresi Linear Berganda

Regresi linear berganda merupakan metode statistika yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel independen dengan suatu variabel dependen. Regresi Linear Berganda hanya dapat membuat hampiran linear dari beberapa data titik yang berbeda. Berbeda dengan Interpolasi Polinom yang dapat membuat hampiran polinom derajat n. Dibandingkan dengan Interpolasi Polinom yang hanya bisa memodelkan satu variabel independen saja, Regresi Linear Berganda dapat memodelkan banyak variabel independen secara bersamaan. Regresi Linear Berganda dapat memperkirakan hubungan antara variabel data independen (catatan: hubungannya hanya dapat berupa berbanding terbalik).

Metode untuk mencari persamaan Regresi Linear Berganda adalah sebagai berikut,

1. Misal terdapat k peubah $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ pada suatu data.
2. Untuk melakukan regresi, dibutuhkan k buah titik data yang berbeda pada data tersebut
5. Akan terdapat sebuah fungsi $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$ yang memenuhi

$$y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{ki})$$

Fungsi tersebut dapat diasumsikan memiliki bentuk

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta x + \epsilon_i$$

6. Buatlah matriks augmented dari persamaan tersebut menggunakan rumus Normal Estimation Equation for Mutiple Linear Regression:

$$\begin{bmatrix} k & \sum_{i=1}^{k} x_{1i} & \sum_{i=1}^{k} x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} x_{ki} & \sum_{i=1}^{k} y_i \\ \sum_{i=1}^{k} x_{1i} & \sum_{i=1}^{k} {x_{1i}}^2 & \sum_{i=1}^{k} x_{1i}x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} x_{1i}x_{ki} & \sum_{i=1}^{k} x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^{k} x_{2i} & \sum_{i=1}^{k} x_{2i}x_{1i} & \sum_{i=1}^{k} {x_{2i}}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{k} x_{2i}x_{ki} & \sum_{i=1}^{k} x_{2i}y_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} x_{ki} & \sum_{i=1}^{k} x_{ki}x_{1i} & \sum_{i=1}^{k} x_{ki}x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} {x_{ki}}^2 & \sum_{i=1}^{k} x_{ki}y_i \end{bmatrix}$$

7. Lakukan Eliminasi Gauss atau Eliminasi Gauss-Jordan pada matriks augmented agar mendapat nilai koefisien dari setiap variabel (contoh dibawah merupakan hasil dari metode Eliminasi Gauss-Jordan):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n_0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n_k \end{bmatrix}$$

BAB III

IMPLEMENTASI PROGRAM

1. Class Matrix
    - Attribute

Nama	Tipe	Deskripsi
row	private Int	Jumlah baris
col	private Int	Jumlah kolom
matrix	Private Double [ ][ ]	Berisi elemen elemen matriks

    - Methode

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
Matrix	Public Kontruktor	(int row,int col,double c)	Membuat matriks dengan kolom col dan baris row. Jika ingin menambah variable, input c
getNumRow	Public Int		Menghasilkan nilai baris
getNumCol	Public Int		Menghasilkan nilai kolom
getELMT	Public double	(int row,int col)	Menghasilkan elemen pada matriks di indeks kolom col dan baris row
setELMT	Public void	(int row,int col,double value)	Menginput elemen di indeks baris row dan indeks kolom col pada matriks
getDiagonalELMT	Public double	(int d)	Menghasilkan elemen diagonal pada indeks d di sebuah

			matriks(indeks kolom=indeks baris)
isSquare	Public boolean		mengirim nilai true jika matriks berbentuk persegi
isIndetity	Public boolean		mengirin nilai true jika matriks berbentuk matriks identitas(berisi 0 dan 1)
displayMatrix	Public void		menampilkan sebuah matriks ke layar
copyMatrix	Public Matrix	(Matrix a)	Menyalin semua elemen pada matriks a ke matriks yang baru/matriks yang sudah ada
swapRow	Public Matrix	(Matrix matrix,int row1,int row2)	Menukar baris di sebuah matriks
swapCol	Public Matrix	(Matrix matrix,int col1,int col2)	Menukar kolom di sebuah matriks
transpose	Public Matrix	(Matrix matrix)	Mengubah matriks menjadi matriks transpose
addMatrix	Public Matrix	(Matrix a,Matrix b)	Penjumlahan antara matriks 1 dengan yang lain
subtractMatrix	Public Matrix	(Matrix a,Matrix b)	Pengurangan antara matriks 1 dengan yang lain
timesRowCol	Public double	(Matrix a,Matrix b,int row,int col)	Perkalian antara baris suatu matriks dengan

			kolom matriks lain
multiplyMatrix	Public Matrix	(Matrix a,Matrix b)	Perkalian antara 2 buah matriks
rowTimesK	Public void	(Matrix matrix, double k,int row)	Perkalian sebuah baris pada matriks dengan sebuah angka
splitAugmentedMatrix	Public void	(Matrix augmented,Matrix square,Matrix hasil)	Memisahkan antara matriks inti(banyak kolom-1) dengan hasilnya (kolom terakhir)

2. Class SPL
    - Attribute

    Class ini tidak menggunakan atribut apapun

    - Methode

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
sortZero	Public Matrix	(Matrix matrix,int col,int r1)	Menukar baris dalam matriks apabila ada 0 di suatu kolom
gauss	Public String	(Matrix matrix)	Menghasilkan solusi dari persoalan SPL dengan menggunakan metode Gauss
getNumRow	Public Int		Menghasilkan banyak baris di suatu matriks
getELMT	Public double	(int row,int col)	Menghasilkan elemen di suatu matriks pada indeks baris row

			dan indeks kolom col
setELMT	Public void	(int row,int col, double value)	Mengisikan elemen ke dalam suatu matriks pada indeks baris row dan indeks kolom col
swapRow	Public Matrix	(Matrix matrix,int row1, int row2)	Menukar antara suatu baris dengan baris lain di sebuah matrix)
getNumCol	Public int		Menghasilkan banyaknya kolom dalam suatu matriks
gaussJordan	Public String	(Matrix matrix)	Menghasilkan solusi dari persoalan SPL dengan menggunakan metode Gauss-Jordan
ref	Public Matrix	(Matrix matrix)	Proses OBE matriks untuk menghasilkan matriks eselon baris (Metode Gauss)
rref	Public Matrix	(Matrix matrix)	Proses OBE matriks untuk menghasilkan matriks eselon tereduksi
searchInCol	Public int	(String[][] matrix,int col,int val)	Mengembalikan indeks pertama ditemukannya value pada suatu matriks,jika tidak

			ditemukan akan mengembalikan -1
append	Public Matrix	(Matrix list1,Matrix list2)	Menggabungkan antara sebuah list dengan list lain
solve	Public String	(Matrix matrix)	Mengembalikan solusi dari sebuah SPL dari bentuk matriks
replaceCol	Public Matrix	(Matrix matrix,Matrix rep,int col)	Mengubah sebuah kolom pada matriks menjadi kolom lain dari matriks yang sama
copyMatrix	Public Matrix	(Matrix matrix)	Menyalin elemen elemen pada suatu matriks ke matriks yang kosong/baru
cramer	Public Matrix	(Matrix matrix,Boolean print)	Menghasilkan solusi dari sebuah SPL dengan menggunakan Kaidah Crammer
splitAugmentedMatrix	Public void	(Matrix augmented,Matrix square,Matrix hasil)	Memisahkan antara matriks inti(banyak kolom-1) dengan hasilnya(kolom terakhir)
detRowRed	Public double	(Matrix matrix)	Menghasilkan nilai determinan suatu matriks dengan reduksi baris
isSquare	Public boolean		Menghasilkan nilai true jika

			matriks berbentuk square
SPLInverseToString	Public String	(Matrix matrix)	Mengubah solusi SPL dari matriks menjadi string
cramerToString	Public String	(Matrix matrix)	Mengubah solusi SPL dari matriks menjadi string

3. Class Inverse
    - Attribute

    Class ini tidak menggunakan atribut apapun

    - Methode

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
inverseGJ	Public Matrix	(Matrix matrix)	Inverse sebuah matriks dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan
gaussJordan	Public Matrix	(Matrix matrix)	metode untuk menyelesaikan persamaan linear dengan Gauss-Jordan
getNumRow	Public Int		Menghasilkan banyak baris pada matriks
setELMT	Public void	(int row,int col,double value)	Mengisikan elemen pada indeks baris row dan indeks kolom col pada sebuah matriks
getELMT	Public void	(int row,int col)	Menghasilkan elemen pada matriks di indeks

			baris row dan indeks kolom col
inverseCofactor	Public Matrix	(Matrix matrix)	Menghasilkan inverse sebuah matriks dengan menggunakan kofaktor
detCofactor	Public double	(Matrix matrix)	Menghasilkan determinan dengan kofaktor
subMatrix	Public Matrix	(Matrix matrix,int xRow,int xCol)	Membuat matriks baru yang terdiri dari elemen elemen matriks lain selain elemen yang ada di baris xRow dan kolom xCol
transpose	Public Matrix	(Matrix matrix)	Mengubah sebuah matriks menjadi matriks transpose
isSquare	Public boolean		Mengirim nilai true jika matriks berbentuk square

4. Class Determinan
    - Attribute

    Class ini tidak memiliki atribut apapun

    - Methode

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
subMatrix	Public Matrix	(Matrix matrix,int xRow,int xCol)	Membuat matriks baru yang terdiri dari elemen elemen matriks lain selain elemen yang ada di baris

			xRow dan kolom xCol
getNumRow	Public Int		Menghasilkan banyak baris dalam matriks
setELMT	Public void	(int row,int col,double value)	Mengisikan elemen pada matriks pada indeks baris row dan indeks kolom col
getELMT	Public void	(Int row,Int col)	Menghasilkan elemen pada matriks pada indeks baris row dan indeks kolom col
copyMatrix	Public Matrix	(Matrix a)	Menyalin sebuah matriks ke matriks lain yang baru
detRowRed	Public double	(Matrix matrix)	Menghasilkan determinan sebuah matriks dengan metode reduksi baris
getDiagonalELMT	Public double	(int d)	Menghasilkan elemen diagonal pada matriks di indeks d (indeks baris = indeks kolom)
swapRow	Public Matrix	(Matrix matrix,int row1,int row2)	Menukar baris di dalam suatu matriks
detCofactor	Public double	(Matrix matrix)	Menghasilkan determinan dengan menggunakan metode kofaktor

fileDeterminan	Public void	(double det,String path)	Menginputkan hasil determinan ke dalam sebuah file

5. Class Interpolasi
    - Attribute

    Class ini tidak menggunakan atribut apapun

    - Methode

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
Interpolation	Public double	(Matrix titik,double absis)	Memprediksi sebuah nilai dari data data yang telah didapat
getNumRow	Public Int		Menghasilkan banyaknya baris di dalam sebuah matriks
setELMT	Public void	(int row,int col,double value)	Mengisi elemen pada matriks pada indeks baris row dan indeks kolom col
getELMT	Public void	(int row,int col)	Menghasilkan elemen pada matriks di indeks baris row dan indeks kolom col
cramer	Public Matrix	(Matrix matrix,boolean print)	Metode penyelesaian SPL dengan menggunakan determinan
getNumCol	Public Int		Menghasilkan jumlah kolom pada matriks

fileInterpolation	Public void	(Matrix titik,double absis,String path)	Menginputkan hasil interpolasi ke dalam sebuah file

6. Class RLB
   - Attribute

   Class ini tidak memiliki atribut apapun

   - Methode

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
regression	Public void	(Matrix matrix)	Menghasilkan persamaan regresi dari data data yang diberikan
getNumRow	Public Int		Menghasilkan banyak baris dalam sebuah matriks
getNumCol	Public Int		Menghasilkan banyak kolom dalam sebuah matriks
getELMT	Public void	(int row,int col)	Menghasilkan elemen pada matriks dengan indeks baris row dan indeks kolom col
setELMT	Public void	(int row,int col,double value)	Mengisikan elemen ke dalam matriks di indeks baris row dan indeks kolom col
multiplyMatrix	Public Matrix	(Matrix a,Matrix b)	Perkalian antara 2 buah matriks
inverseCofactor	Public Matrix	(Matrix matrix)	Menghasilkan invers matriks dengan

			menggunakan metode kofaktor
transpose	Public Matrix	(Matrix matrix)	Mengubah sebuah matrix menjadi matrix transpose
displayMatrix	Public void		Menampilkan sebuah matriks ke layar

7. Class Bicubic
   - Attribute

   Class ini tidak menggunakan atribut apapun

   - Methode

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
bindHorizontal	Public Matrix	(Matrix m1,Matrix m2)	Menggabungkan antara suatu matriks dengan matriks lain menjadi 1 buah matriks saja
cutCol	Public Matrix	(Matrix matrix,int c1,int c2)	Menghasilkan matriks yang hanya terdiri dari elemen elemen diantara 2 kolom
identity	Public Matrix	(int n)	Membuat matriks identitas sebanyak n baris x n kolom
getNumRow	Public int		Menghasilkan banyaknya baris dalam suatu matriks
getNumCol	Public int		Menghasilkan banyaknya kolom dalam suatu matriks

setELMT	Public void	(int row,int col,double value)	Mengisikan elemen ke dalam sebuah matriks di indeks baris row dan kolom col
getELMT	Public void	(int row,int col)	Menghasilkan elemen pada sebuah matriks yang berada di indeks baris row dan indeks kolom col
multiply	Public Matrix	(Matrix m1,Matrix m2)	Menghasilkan perkalian antara 2 buah matriks
inverseGJLS	Public Matrix	(Matrix matrix)	Menghasilkan inverse matriks dari sebuah matriks dengan menggunakan metode Gauss-Jordan
rref	Public Matrix	(Matrix matrix)	Proses OBE matriks dengan menggunakan metode Gauss-Jordan
power	Public double	(double val,int n)	Menghasilkan perpangkatan dari sebuah angka
bicubicInterpolation	Public String	(Matrix matrix,double a,double b)	Mengembalikan hasil dari interpolasi bicubic dari sebuah data

BAB IV

EKSPERIMEN

1. Solusi dari SPL bentuk Ax = b

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Solusi:

```
SPL tidak memiliki solusi.
```

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solusi:

```
Hasil SPL:
x5 = s
x1 = (1.000)s+ (3.000)
x2 = (2.000)s
x4 = (1.000)s+ (-1.000)
X3 = Free
```

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solusi:

```
Hasil SPL:
x6 = s
x2 = (-1.000)s+ (1.000)
x4 = (-1.000)s+ (-2.000)
x5 = (1.000)s+ (1.000)
X1 = Free
X3 = Free
```

d) n = 6

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusi :

```
Hasil SPL:
x1 = (36.0000)
x2 = (-630.0000)
x3 = (3360.0000)
x4 = (-7560.0000)
x5 = (7560.0000)
x6 = (-2772.0000)
```

n = 10

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{17} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{17} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{17} & \frac{1}{18} & \frac{1}{19} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusi:

```
Hasil SPL:
x1 = (99.9963)
x2 = (-4949.6827)
x3 = (79193.2148)
x4 = (-600538.1369)
x5 = (2522224.2587)
x6 = (-6305485.5472)
x7 = (9608261.7832)
x8 = (-8750305.2142)
x9 = (4375119.5655)
x10 = (-923630.2350)
```

2. Solusi dari SPL dalam bentuk augmented

a.)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Solusi:

```
Hasil SPL:
x4 = s
x1 = (1.000)s+ (-1.000)
x3 = t
x2 = (2.000)t
```

b.)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi:

```
Hasil SPL:
x1 = (0.000)
x2 = (2.000)
x3 = (1.000)
x4 = (1.000)
```

3. Solusi dari SPL dalam bentuk umum

a.)

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Solusi:

```
Hasil SPL:
x1 = (-0.224)
x2 = (0.182)
x3 = (0.709)
x4 = (-0.258)
```

b.)

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

Solusi:

```
SPL tidak memiliki solusi.
```

4. a.) Solusi Kasus Interpolasi

x	0.4	0.7	0.11	0.14	0.17	0.2	0.33
$f(x)$	0.043	0.005	0.058	0.072	0.1	0.13	0.147

Didapat persamaan sebagai berikut:

```
f(x) = 21.8719 + (-612.8097)x + (6768.4378)x^2 + (-37545.7202)x^3 + (109765.4077)x^4 + (-158648.5166)x^5 + (87362.6570)x^6
```

Pengujian dengan nilai

x = 0.2

```
Taksiran untuk f(0.200000) ialah: 0.130000
```

x = 0.55

```
Taksiran untuk f(0.550000) ialah: -36.447044
```

x = 0.85

```
Taksiran untuk f(0.850000) ialah: 1187.237504
```

x = 1.28

```
Taksiran untuk f(1.280000) ialah: 65349.951098
```

b.)Kasus Positif Covid-19

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2022	6,567	12.624
30/06/2022	7	21.807
08/07/2022	7,258	38.391
14/07/2022	7,451	54.517
17/07/2022	7,548	51.952
26/07/2022	7,839	28.228
05/08/2022	8,161	35.764
15/08/2022	8,484	20.813
22/08/2022	8,709	12.408
31/08/2022	9	10.534

Didapat persamaan sebagai berikut:

```
f(x) = 7182524565905.522000 + (-9350472247994.203000)x + (5335741780993.041000)x^2 + (-1757283710674.549600)x^3 + (368640760119.987850)x^4 + (-51143429348.574394)x^5 + (469
6794214.533855)x^6 + (-275528781.137784)x^7 + (9374584.419448)x^8 + (-141018.352722)x^9
```

Lalu berikut merupakan prediksi kasus Covid-19 berbagai tanggal :

a. 16/07/2022 (dalam decimal : 7.516)

```
Taksiran untuk f(7.516000) ialah: -14469604651.380860
```

b. 10/08/2022 (dalam decimal : 8.322)

```
Taksiran untuk f(8.322000) ialah: -16109838893.917969
```

c. 05/09/2022 (dalam decimal : 9.167)

```
Taksiran untuk f(9.167000) ialah: -18099609721.203125
```

d. 10/11/2022 (dalam decimal : 11.333)

```
Taksiran untuk f(11.333000) ialah: -43365778570.250000
```

c.)Penyederhanaan Fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

Di bawah ini diperlihatkan titik-titik x yang diambil dari selang [0,2] dengan n = 6

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
$f(x)$	0	0.418884	0.507158	0.560925	0.583686	0.576652

Didapat persamaan :

```
f(x) = 0.000000 + (2.035257)x + (-3.552682)x^2 + (3.237115)x^3 + (-1.421266)x^4 + (0.236257)x^5
```

Lalu kita mencoba menginputkan sebuah nilai yaitu 2.4 didapat hasil sebagai berikut:

```
Taksiran untuk f(2.400000) ialah: 0.829056
```

5. Solusi Kasus Interpolasi Bicubic

$$\begin{bmatrix} 153 & 59 & 210 & 96 \\ 125 & 161 & 72 & 81 \\ 98 & 101 & 42 & 12 \\ 21 & 51 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai:

f(0,0) =

```
Hasil interpolasi bicubic f(0.0000,0.0000) adalah 161.000000
```

f(0.5,0.5) =

```
Hasil interpolasi bicubic f(0.5000,0.5000) adalah 97.726563
```

f(0.25,0.75) =

```
Hasil interpolasi bicubic f(0.2500,0.2500) adalah 133.797729
```

f(0.1,0.9) =

```
Hasil interpolasi bicubic f(0.1000,0.9000) adalah 74.696119
```

6. Solusi Kasus Regresi Linear Berganda

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperature 76^0F dan tekanan udara sebesar 29.30

Didapat persamaan Regresi

```
y = -3.5078 + (-0.0026)x1 + (0.0008)x2 + (0.1542)x3
```

Untuk Estimasi hasil nilai Nitrous Oxide adalah sebagai berikut:

```
Hasil taksiran nilai y dari regresi linier: 0.9384
```

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan berabgai metode, baik metode Gauss,Gauss-Jordan, Cramer, dan Matriks Balikan(Inverse). Setiap metode memiliki ciri khas dan ketentuan masing masing dalam menyelesaikan SPL. Seperti metode Cramer serta Matriks Balikan yang hanya dapat digunakan ketika matriks berbentuk persegi dan determinan pada matriks tidak nol.

Sistem Persamaan Linear selalu memiliki penyelesain, tetapi solusi dalam Sistem Persamaan Linear ini bermacam macam. Ada 3 jenis solusi dalam Sistem Persamaan Linear, yaitu solusi tunggal,solusi banyak, serta tidak ada solusi.

Untuk solusi tunggal dapat dilihat pada penyelesaian SPL pada matriks Hilbert dengan n=6 didapat solusi penyelesaian SPL tersebut adalah

$$x_1 = 36; x_2 = -630; x_3 = 3360; x_4 = -7560; x_5 = 7560; x_6 = -2772$$

Untuk solusi banyak dapat dilihat pada penyelesaian SPL pada kasus 1 bagian b dengan solusi penyelesaian SPL tersebut adalah

$$x_1 = s + 3; x_2 = 2s; x_3 = Free; x_4 = s - 1; x_5 = s$$

Lalu untuk SPL yang tidak memiliki solusi ada di kasus 1 bagian a. Hal ini terjadi karena ada baris yang memiliki nilai variable nol namun nilai persamaannya tidak 0 sehingga tidak memiliki solusi.

Selain itu, terdapat aplikasi dari Sistem Persamaan Linear yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai macam masalah. Aplikasi dari SPL ini ada 3, yaitu Interpolasi Polinom, Regresi Linear Berganda, dan Bicubic Interpolation. Aplikasi tersebut tentunya memanfaatkan system persamaan linear untuk perhitungannya.

Interpolasi Polinom dapat digunakan untuk memprediksi kasus dari fungsi yang telah didapat. Untuk contoh ada pada kasus 4 bagian b. Kita diminta untuk mencari prediksi dari data data yang telah diberikan. Dan didapat pada bagian b yaitu pada tanggal 10/08/2022 didapat nilai -16109838893.917969 Untuk prediksi jumlah kasus positif yang baru.

Lalu ada Regresi Linear Berganda dimana aplikasi ini digunakan untuk mengestimasi suatu persoalan. Untuk kasus nomor 6 diminta untuk mengestimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humaditu bernilai 50%, temperature 76^0F dengan tekanan udara sebesar 29,30. Didapat estimasi nilai Nitrous Oxide sekitar 0.9384.

Lalu ada Bicubic Interpolation yang pengaplikasiannya menggunakan sistem persamaan linear yang digunakan untuk perbesaran citra yang merupakan pengembangan dari interpolasi linear dan cubic. Untuk kasus nomor 5 diminta menentukan nilai dari matriks input. Didapat untuk hasil f(0.25,0.75) adalah 133.797729.

Saran untuk selanjutnya waktu pengerjaan diperpanjang agar pengerjaan tugas besar lebih maksimal dan sertakan contoh test case dan solusinya agar dapat dijadikan acuan untuk pengecekan.

Untuk tugas ini, kami merasa kami bekerja kurang maksimal. Tapi kami sudah melakukan semua tugas ini dengan semangat terbaik kami. Walaupun apa yang kami buat tidaklah sempurna, tetapi overall sudah sangat baik dan mantap.

REFERENSI

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-05-Sistem-Persamaan-Linier-2.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-06-Aplikasi-SPL-1.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-07-Aplikasi-SPL-2.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-09-Determinan-bagian2.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-09-Determinan-bagian2.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation