多 目 标 规 划

1. 多目标规划简介

在前面所述的最优化问题，无论是线性规划、整数规划还是非线性规划，其目标函数都只有一个。但在实际问题中，衡量一个设计方案的好坏往往不止一个标准，常常要考虑多个目标。例如研究生产过程时，人们既要提高生产效率，同时还要考虑产品质量，又要考虑成本以降低生产费用，可能还希望生产过程中的环保问题，即废渣、废水、废气造成的污染小。在设计导弹的过程中，既要射程远，又要燃料省，还要重量轻且打击精度高。在进行投资决策时，既希望回报高的同时又希望降低投资风险，如此等等。这就向我们提出了一个多指标最优化问题。我们把在这样的背景下建立起来的最优化称之为多目标规划问题。

例1 木梁设计问题

用直径为 1（单位长）的圆木制成截面为矩形的梁。为使重量最轻面强度最大，问截面的宽和高应取何尺寸？

例2 工厂采购问题

某工厂需要采购某种生产原料，该原料市场上有 A 和 B 两种，单价分别为 2 元/kg 和 1.5 元/kg。现要求所花的总费用不超过 300 元，购得的原料总重量不少于 120kg，其中 A 原料不得少于 60kg。问如何确定最佳采购方案，花最少的钱，采购最多数量的原料。

1. 多目标规划简介

多目标规划是数学规划的一个分支。

研究**多于一个的目标函数**在**给定区域**上的最优化。又称多目标最优化。通常记为

MOP(multi-objective programming)。

在很多实际问题中，例如经济、管理、军事、科学和工程设计等领域，衡量一个方案的好坏往往难以用一个指标来判断，而需要用多个目标来比较，而这些目标有时不甚协调，甚至是矛盾的。因此有许多学者致力于这方面的研究。

1896年法国**经济学家 V. 帕雷托最早研究**不可比较目标的优化问题，之后，J.冯·诺伊曼、H.W.库恩、A.W.塔克、A.M.日夫里翁等**数学家做了深入的探讨**，但是**尚未有一个完全令人满意的定义**。

2. 多目标规划的常用解法

求解多目标规划的方法大体上有以下几种：

一种是化多为少的方法， 即把多目标化为比较容易求解的单目标或双目标，如主要目标法、线性加权法、理想点法等；

另一种叫分层序列法，即把目标按其重要性给出一个序列，每次都在前一目标最优解集内求下一个目标最优解，直到求出共同的最优解。

对多目标的线性规划除以上方法外还可以适当修正单纯形法来求解；还有一种称为层次分析法，是由美国运筹学家沙旦于70年代提出的，这是一种定性与定量相结合的多目标决策与分析方法，对于目标结构复杂且缺乏必要的数据的情况更为实用。

3. 多目标规划模型

多目标规划模型

（一）任何多目标规划问题，都由两个基本部分组成：
（1）两个以上的目标函数；
（2）若干个约束条件。

（二）对于多目标规划问题，可以将其数学模型一般地描写为如下形式：

$$Z=F(X)=\begin{pmatrix}\max(\min)f_1(X)\\ \max(\min)f_2(X)\\ \vdots\\ \max(\min)f_k(X)\end{pmatrix}$$

s.t.

$$\Phi(X)=\begin{pmatrix}\varphi_1(X)\\ \varphi_2(X)\\ \vdots\\ \varphi_m(X)\end{pmatrix}\le G=\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_m\end{pmatrix}$$

式中：$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$ 为决策变量向量。

缩写

$$\max(\min)Z=F(X)$$

s.t. $\Phi(X)\le G$

有n个决策变量，k个目标函数，m个约束方程，则：

$Z=F(X)$ 是k维函数向量，

$\Phi(X)$是m维函数向量；

G是m维常数向量；

3. 多目标规划模型

对于**线性多目标规划**问题，可以进一步用矩阵表示：

$$\max(\min) Z = F(X)$$

s.t. $\Phi(X) \le G$

$\longrightarrow$

$$\max(\min) Z = CX$$

s.t. $AX \le b$

式中：

$Z=F(X)$　是k维函数向量，
$\Phi(X)$是m维函数向量；
G是m维常数向量；

式中：

X 为n 维决策变量向量；
C 为$k \times n$ 矩阵，即目标函数系数矩阵；
A 为$m \times n$ 矩阵，即约束方程系数矩阵；
b 为m 维的向量，即约束向量。

4. 多目标规划的非劣解

$$\max(\min) Z = F(X)$$

$$\text{s.t.} \quad \Phi(X) \leq G$$

多目标规划问题的求解不能只追求一个目标的最优化（最大或最小），而不顾其它目标。

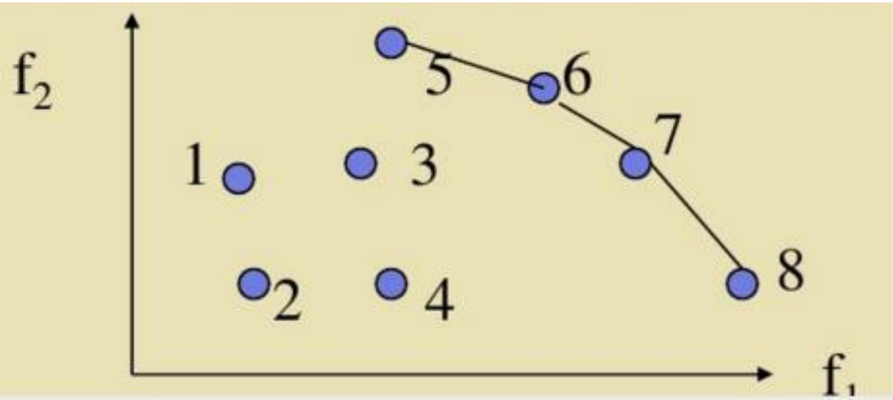
对于上述多目标规划问题，求解就意味着需要做出如下的复合选择：

▲ 每一个目标函数取什么值，原问题可以得到最满意的解决？

▲ 每一个决策变量取什么值，原问题可以得到最满意的解决 ？

4. 多目标规划的劣解与非劣解

在解决单目标问题时，我们的任务是选择一个或一组变量X，使目标函数$f(X)$取得最大（或最小）。对于任意两方案所对应的解，只要比较它们相应的目标值，就可以判断谁优谁劣。但在多目标情况下，问题却不那么单纯了。例如，有两个目标$f_1(X)$，$f_2(X)$,希望它们都越大越好。下图列出在这两个目标下共有8个解的方案。其中方案1，2，3，4称为劣解，因为它们在两个目标值上都比方案5差，是可以淘汰的解。而方案5，6，7，8是非劣解（或称为有效解，满意解），因为这些解都不能轻易被淘汰掉，它们中间的一个与其余任何一个相比，总有一个指标更优越，而另一个指标却更差。



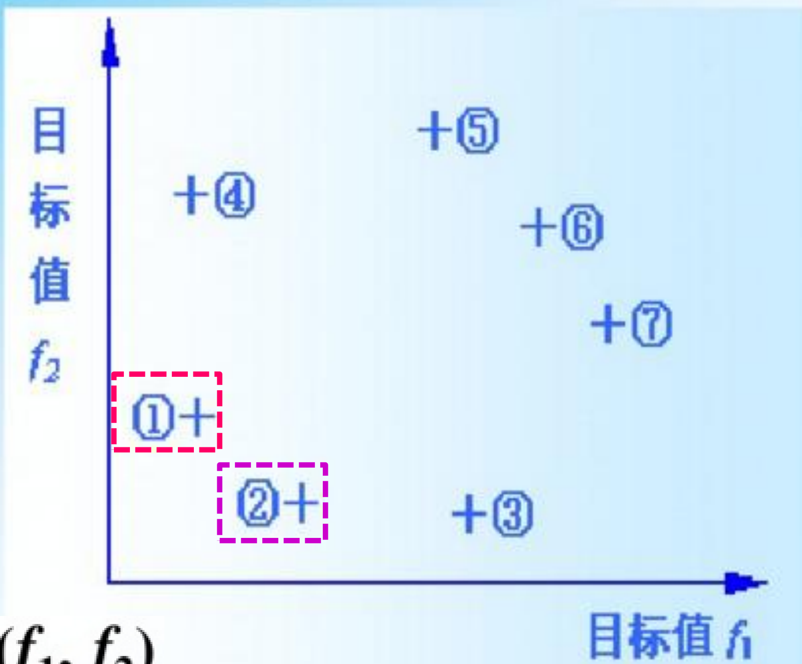
$\max(f_1, f_2)$

方案1，2，3，4称为劣解

方案5，6，7，8是非劣解（或称为有效解，满意解）

4. 多目标规划的劣解与非劣解

非劣解可以用图1说明。



$\max(f_1, f_2)$

图1 多目标规划的劣解与非劣解

在图1中，$\max(f_1, f_2)$.就方案①和②来说，①的 f_2 目标值比②大，但其目标值 f_1 比②小，因此无法确定这两个方案的优与劣。

在各个方案之间，显然：④比①好，⑤比④好，⑥比②好，⑦比③好……。

4. 多目标规划的劣解与非劣解

非劣解可以用图1说明。

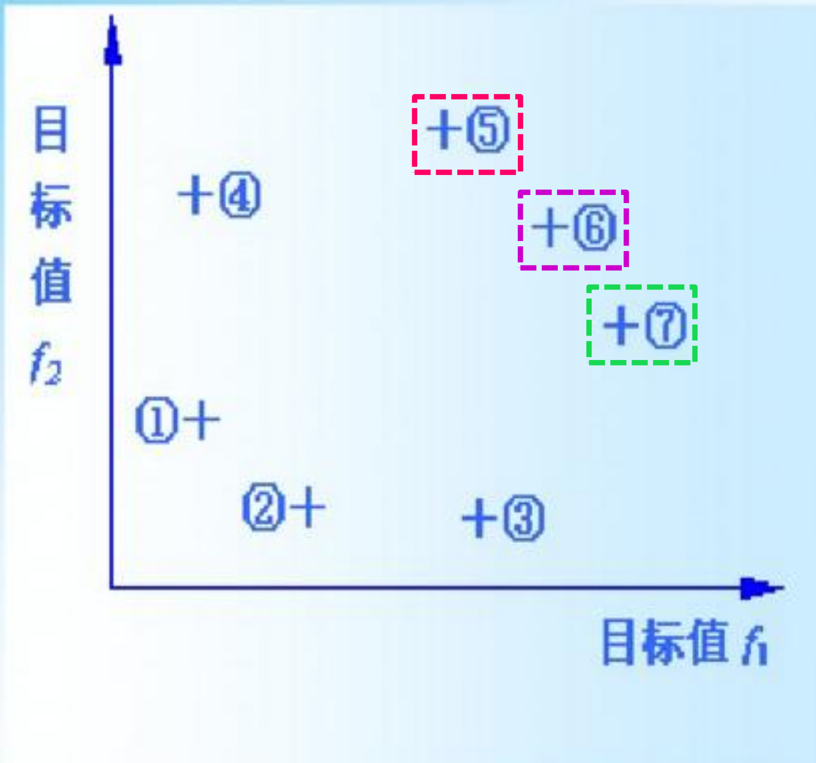


图1 多目标规划的劣解与非劣解

而对于方案⑤、⑥、⑦之间则无法确定优劣，而且又没有比它们更好的其他方案，所以它们就被称为多目标规划问题的**非劣解**或**有效解**，其余方案都称为**劣解**。所有非劣解构成的集合称为**非劣解集**。

当目标函数处于**冲突状态**时，就不会存在使所有目标函数同时达到最大或最小值的最优解，于是我们只能寻求非劣解（又称**非支配解或帕累托解**）。

4. 多目标规划的求解方法简介

为了求得多目标规划问题的非劣解，常常需要将**多目标规划问题转化为单目标规划问题**去处理。实现这种转化，有如下几种建模方法。

- ✓ 效用最优化模型
- ✓ 罚款模型
- ✓ 约束模型
- ✓ 目标达到法
- ✓ 目标规划模型

4.1. 线性加权法

方法一　效用最优化模型（线性加权法）

思想：规划问题的各个目标函数可以通过一定的方式进行求和运算。这种方法将一系列的目标函数与效用函数建立相关关系，各目标之间通过效用函数协调，使多目标规划问题转化为传统的单目标规划问题：

$$\begin{aligned} &\max Z = F(X) \\ &\text{s.t.} \quad \Phi(X) \le G \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} &\max Z = \psi(X) \\ &s.t. \quad \Phi(X) \le G \end{aligned}$$

ψ是与各目标函数相关的效用函数的和函数。

4.1. 线性加权法

在用效用函数作为规划目标时，需要确定一组权值 λ_i 来反映原问题中各目标函数在总体目标中的权重，即：

$$\max\ \psi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \psi_i$$

$$\Phi_i(x_1, x_2, \cdots x_n) \le g_i (i = 1, 2, \cdots, m)$$

向量形式：

$$\max \psi = \lambda^T \psi$$

$$s.t.\quad \Phi(X) \le G$$

式中，λ_i 应满足：$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

4.2. 理想点法

方法二 罚款模型（理想点法）

思想： 规划决策者对每一个目标函数都能提出所**期望的值**（或称**满意值**）；

通过比较实际值 f_i 与$\boxed{\text{期望值 } f_i^*}$之间的偏差来选择问题的解，其数学表达式如下：

$$\min Z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (f_i - f_i^*)^2$$

$$\Phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le g_i (i = 1, 2, \cdots, m)$$

或写成矩阵形式：

$$\min Z = (F - F^*)^T A (F - F^*)$$

$$\Phi(X) \le G$$

式中，λ_i 是与第i个目标函数相关的**权重**；

A是由 λ_i $(i=1,2,\ldots,k)$组成的$m \times m$对角矩阵。

4.3. 极大极小法

方法三　约束模型（极大极小法）

理论依据：若规划问题的某一目标可以给出一个可供选择的范围，则该目标就可以作为约束条件而被排除出目标组，进入约束条件组中。

假如，除第一个目标外，其余目标都可以提出一个可供选择的范围，则该多目标规划问题就可以转化为单目标规划问题：

$$\max(\min)\ Z = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le g_i \ (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\boxed{f_j^{\min} \le f_j \le f_j^{\max} \ (j = 2, 3, \cdots, k)}$$

4.4. 目标可达法

方法四　目标达到法

首先将多目标规划模型化为如下**标准形式**：

$$\min F(x)=\min\begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \vdots \\ f_k(X) \end{bmatrix}$$

$$\Phi(X)=\begin{pmatrix} \varphi_1(X) \\ \varphi_2(X) \\ \vdots \\ \varphi_m(X) \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

多目标规划问题就转化为：

$$\min_{X,\gamma} \gamma$$

$$\varphi_i(X)\le 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$\boxed{f_i(X)-\omega_i\gamma \le f_i^*,\quad (i=1,2,\cdots,k)}$$

在求解之前，先设计与目标函数相应的一组目标值理想化的期望目标 f_i^* $(i=1,2,\ldots,k)$，每一个目标对应的权重系数为 ω_i^* $(i=1,2,\ldots,k)$，再设 γ 为一松弛因子。

松弛因子

由于流体力学中要求解非线性的方程,在求解过程中,控制变量的变化是很必要的,这就通过松弛因子来实现的.它控制变量在每次迭代中的变化.也就是说,变量的新值为原值加上变化量乘以松弛因子.

如:A1=A0+B*DETA

A1：新值 A0：原值： B：松弛因子 DETA：变化量

松弛因子可控制收敛的速度和改善收敛的状况!

为1,相当于不用松弛因子

大于1,为超松弛因子,加快收敛速度

小于1,欠松弛因子,改善收敛的条件

一般来讲,大家都是在收敛不好的时候，采用一个较小的欠松弛因子。Fluent里面用的是欠松弛，主要防止两次迭代值相差太大引起发散。

松弛因子的值在0～1之间，越小表示两次迭代值之间变化越小，也就越稳定，但收敛也就越慢。

4.5. 目标规划法

方法五　目标规划模型（目标规划法）

需要预先确定各个目标的期望值 f_i^*，同时给每一个目标赋予一个**优先因子**和**权系数**，假定有K个目标，L个优先级($L \leq K$)，目标规划模型的数学形式为：

$$\min Z = \sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{k=1}^{K} (\omega_{lk}^- d_k^- + \omega_{lk}^+ d_k^+)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq g_i (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$f_i + d_i^- - d_i^+ = f_i^* (i = 1, 2, \cdots, K)$$

式中：d_i^+ 和 d_i^-分别表示与f_i 相应的与f_i^* 相比的目标超过值和不足值，即正、负偏差变量；

p_l表示第l个优先级；

ω_{lk}^+、ω_{lk}^-表示在同一优先级 p_l 中，不同目标的正、负偏差变量的权系数。

4.6. 应用例子：投资的收益与风险

一、问题提出

市场上有 n 种资产 s_i（i=1,2……n）可以选择，现用数额为 M 的相当大的资金作一个时期的投资。这 n 种资产在这一时期内购买 s_i 的平均收益率为 r_i，风险损失率为 q_i，投资越分散，总的风险越小，总体风险可用投资的 s_i 中最大的一个风险来度量。

购买 s_i 时要付交易费，（费率 p_i），当购买额不超过给定值 u_i 时，交易费按购买 u_i 计算。另外，假定同期银行存款利率是 r_0，既无交易费又无风险。（r_0 =5%）

已知 n=4 时相关数据如下：

s_i	r_i（%）	q_i（%）	p_i（%）	u_i（元）
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定达到资金 M，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，使总体风险尽可能小。

请每组认真思考和独立完成

谢 谢