Grundlagen: Mengen, Aussagen, Zahlensysteme

Zahlenmengen

N: Natürliche Zahlen	{1,2,3,4,5,6,7,8,9,...}
N_0: Natürliche Zahlen mit 0	{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,...}
Z: Ganze Zahlen	{...-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,...}
Q: Rationale Zahlen	$\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots\}$Brüche
R: Reelle Zahlen	Alle Zahlen auf Zahlenstrahl
R+: Reelle Zahlen	> 0
R-: Reellee Zahlen	≥ 0
R\Q: Irrationale Zahlen	$\sqrt{2}, \pi$

Zahlensysteme

Bsp. 7 Für $B = 10$ ist $71 = 1 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 =: (71)_{10}$. System

Für $B = 2$ ist $71 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 =: (1000111)_2$.

Dual in Binär umrechnen: Jeweils durch 2 teilen, und rest (1 oder 0) aufschreiben. Rest von unten nach oben gelesen ergibt binär Zahl.

Wahrheitstabelle

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \text{ xor } B)$	$(\neg A \vee B)$	$(A \vee \neg B)$	$(A \wedge \neg B)$
w	w	f	f	w	w	w	f
w	f	w	f	f	f	w	w
f	w	w	f	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w	w	f

Mengengesetze

Für Mengen A, B und C gelten die folgenden Sätze:

9a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — **Assoziativgesetze** für $\cap$ und $\cup$

9b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

10a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — **Distributivgesetze** für $\cap$ und $\cup$

10b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

11a) $A \cap A = A$ — **Idempotenzgesetze** für $\cap$ und $\cup$

11b) $A \cup A = A$

12a) $A \cap (A \cup B) = A$ — **Absorptionsgesetze** für $\cap$ und $\cup$

12b) $A \cup (A \cap B) = A$

13) $A \cup B \setminus A = A \cup B$ — **Satz vom ausgeschlossenen Dritten**

14) $A \cap B \setminus A = \varnothing$ — **Satz vom Widerspruch**

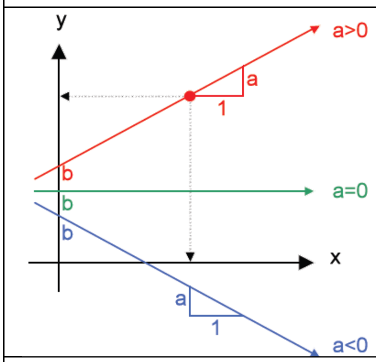
Funktionsbegriff: Funktion, Linearität, Stetigkeit

Lineare Funktion

y = ax + b → **a** Steigung der Geraden, **b** y-Achsenabschnitt

a > 0 → Gerade steigt von links nach rechts

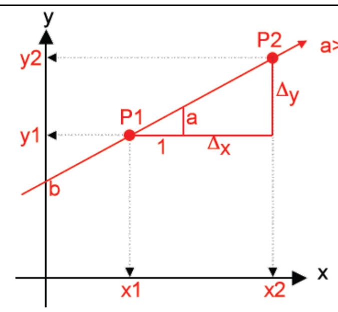
a < 0 → Gerade fällt von links nach rechts



Lineare Funktion, Steigung der Geraden

Das Verhältnis ist konstant, das Verhältnis ist die Steigung.

$$a = \frac{a}{1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$



Lineare Fkt., Berechnung

a) Gerade hat Steigung 1.25 und verläuft durch P(4/3):

$$3 = 1.25 * 4 + b$$

b berechnen und einsetzen, ergibt $y = 1.25x - 2$

b) Gerade verläuft durch P1(-4/0.65) und P2(5.25/-4.9).

Bestimme Funktionsgleichung:

$$\frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{-4.9 - 0.65}{5.25 - (-4)} = -0.6$$

Und einsetzen ergibt

$$y = -0.6x - 1.75$$

PRGM → GERADE

Lineare Funktion, Aufgabe Handy

Prepaid: keine Abogebühr, CHF 0.25 /Minute

Abo20: Abogebühr CHF 20 inkl. 60 min, CHF 0.20 pro weitere min.

Für wie viele Gesprächsminuten/Monat ist Prepaid günstiger?

$$K1(x) = 0.25\,x$$

$$K2(x) = \begin{cases} 20 & \text{für } x \leq 60 \\ 20 + 0.2(x - 60) & \text{für } x > 60 \end{cases}$$

K1(x) = K2(x)

Intervalle

Def

abgeschlossenes Intervall	**[a, b]**	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
offenes Intervall	**]a, b[**	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
halboffenes Intervall	**[a, b[**	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
halboffenes Intervall	**]a, b]**	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Linearer Kostenverlauf

$K(x) = 3.5x + 1000$ Fixkosten sind 1000, variable Kosten sind 3.5x, variable Stückkosten sind 3.5

Kostenfunktion, Aufgabe

K=Kosten, E=Erlös, G=Gewinn, p=Preis, x=Menge

Bei Produktion von 2000 Stk., Gesamtkosten von 26'000 Fr.. Bei Produktion von 6000 Stk., Gesamtkosten von 40'000 Fr.

Variable Kosten: 40'000 Fr. – 26'000 Fr. = 14'000 Fr.

14'000 Fr./4000 Stk. (Mehrprod.) = 3.5x variable Kosten bzw. 3.5 variable Stückkosten.

Fixkosten: 2000 Stk. * 3.5 = 7000

26'000Fr. – 7000 Fr. = 19'000 Fr. Fixkosten.

Gesamtkosten bei 4250 Stk.: 4250 * 3.5 + 19'000 = 33'875 Fr.

Stückzahl zu 34'253 Fr. GK.: 34'253 – 19'000 = 15'253 Fr.

15'253 Fr. /3.5 = 4358 Stk.

Nutzenschwelle: E(x) = K(x) **Bsp.** Nutzenschwelle=5000 Stk. → K(5000)=3.5*5000+19000 = 36'500 → Verkaufspreis bestimmen

E(x)=p*x → E(5000) = p * 5000 = 36'500 → p = 7.3 → E(x) = 7.3x

Gewinn bei 5500 Stk.: G(x) = E(x)-K(x) = 7.3x – (3.5x +19'000) → G(x) = 3.8x -19000 → G(5'500) = 1900

Steuerabzug Aufgabe

Vorwegabzug (V) = 18% des Bruttoeinkommens (E), V darf 6000 Fr. abzüglich 16% von E nicht übersteigen.

E mit Vorwegabzug von 18%: 0.18E = 6000 – 0.16E = 17647.05

Max. Vorwegabzug: Vmax = 0.18E * 17647.05 = 3176.46

Vorwegabzug(V) in Abhängigkeit des Bruttoeinkommens(E):

$$V(E) = \begin{Bmatrix} 0.18E \text{ für } E \in [0{,}17647.05] \\ 6000 - 0.16E \text{ für } E \in \,]17647.05{,}37500] \\ 0 \text{ für } E \in > 37500 \end{Bmatrix}$$

Miet- Ausleihwagen Aufgabe

Firma Miecar AG: Pro Tag CHF 157 inkl. Vollkasko u. 350 km. Mehrkilometer CHF 0.61. Kollege Gschwind: Pro Tag CHF 0.75 pro Mehrkilometer, aber max. CHF 300.

$$Miecar\ K(x) = \begin{Bmatrix} 157 & x \leq 350 \\ 0.61x - 56.5 & x > 350 \end{Bmatrix} 0.61(x - 350) + 157$$

$$Kollege\ K(x) = \begin{Bmatrix} 0.75x & x \leq 400 \\ 300 & x > 400 \end{Bmatrix} \text{0.75x=157}$$

Welcher günstiger? X1 und X2 für obige GL ausrechnen. Kollege günstiger für x≤209 und ≥584

Funktionsbegriff: Rationale Funktionen

Potenzfunktion

$f(x) = a*x^n$

Gerader Exponent: Graph positiv (nach oben geöffnet).
Ungerader Exponent: Graph negativ (S-Form)

Polynomfunktion

Besteht aus **mehreren Potenzfunktionen** (z.B. x^3-3x^2-6x+8). Wenn x gegen unendlich geht, ist nur der Term mit der höchsten Potenz von Bedeutung. (z.B. x^3)

Gebrochen rationale Funktion

$$f(x) \frac{\textbf{Polynom } m-\textbf{ten Grades}}{\textbf{Polynom } n-\textbf{ten Grades}}$$

- Definitionsbereich (DB) = R \ {Nullstellen von N}
- x ist Nullstelle von f ↔ $Z(x_0) = 0\,\delta \wedge N(x_0) \neq 0$ (Z = Zähler, N = Nenner), Achtung: N berechnen ob N ≠0
- f hat an der Stelle x eine senkrechte Asymptote
  ↔ $Z(x_A) \neq 0 \wedge N(x_A) = 0$

Nullstellen, Gleichungen, Schnittpunkte

a) **Gleichung lösen:** Gleichung auf 0 setzen und mit dem Solver ausrechnen MATH → 0:SOLVER
b) **Schnittpunkte bestimmen:** Beide Funktionen in TR eingeben 2ND CALC → 5:INTERSECT
c) **Nullstellen:** Gleichung auf 0 setzen und in TR eingeben, dann 2ND → CALC → ZERO
d) **Max- Minimum:** 2ND → CALC → 3:MINIMUM / 4:MAXIMUM

Quadratische Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0$ PRGM → QUADGL

Scheitelpunkt: PRGM → SCHEITP

Menge: $x = -\frac{b}{2a}$

Preis: $y = c - \frac{b^2}{4a}$

Determinante: $D = b^2 - 4ac$

Kosten, Erlös, Gewinn, Aufgabe

$K(x) = 0.1x^3 - 1.2x^2 + 6x + 9.8$ (Y1)
$E(x) = 7x$ (Y2)
(Y3) = Y2 – Y1 → VARS → YVARS → FUNCTION

a) **Schnittpunkte des Kosten u. Erlösgraphen:** Nutzenschwelle und Nutzengrenze 2ND → CALC → INTERSECT
b) **Lösungen bestimmen:** MATH →0:SOLVER
c) **Gewinnmaximale Erzeugung:** G(x) Maximum 2ND → CALC → 4:

Engelsches Gesetz (Konsumfunktion)

N=Ausgaben/Monat
C=Gesamtkonsum/Monat
→Die Ausgaben eines Haushaltes für Nahrungsmittel nehmen bei steigendem Gesamtkonsum weniger stark zu als die Gesamtkonsumausgaben.

Engelfunktion: $C(Y) = \frac{a*Y+b}{Y+c}$ $a = \frac{Sättigung}{1}$

1.) a berechnen: Sättigung entspricht der horizontalen Asymtote → a = y-Wert der Stättigung
2.) Beliebiger Punkt auf Graph auswählen, welcher gut „aufgeht" z.B. P(5/2)
3.) b berechnen: Nullpunkt P(0/0) in a*Y+b einsetzen
4.) c berechnen: a und b, sowie Punkt P(5/2) in C(Y) einsetzen und nach c auflösen.

$$2 = \frac{4*5+0}{5+c} \quad |(5+c)$$
$$10 + 2c = 20 \quad |-10$$
$$c = 5$$

5.) $C(Y) = \frac{2Y-10}{Y+5}$

Gewinnmaximale Menge, Aufgabe

$K(x) = 0.0001x^2 + 2x + 12'000$
$E(x)p * x$

a) **Berechne gewinnmaximale Erzeugungsmenge für p = 6**

$G(x) = 6x - 0.0001x^2 - 2x - 12000$
$G(x) = -0.0001x^2 + 4x - 12000$
PRGM → SCHEITP → A=-0.0001, B=4, C=12000
Somit ist Lösung: 20'000 ME

b) **Berechne gewinnmaximale Erzeugungsmenge in Abhäng. v. p**

$G(x) = p * x - 0.0001x^2 - 2x - 12000$
$G(x) = -0.0001x^2 + (p-2)x - 12000$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{p-2}{0.0002} = 5000(p-2) = 5000p - 10000$$

Funktionsbegriff: Umkehrfunktion

Umkehrfunktion

Zusammenhang von Preis und nachgefragter Menge.

1. f : x → p = 1.25x +9
2. f^{-1}:p → x = -0.8p +7.2 (Umkehrfunktion)

Nachfragefunktion: $x_N(p)$ → Umkehrfunktion $P_N(x)$
Angebotsfunktion: $x_A(p)$ → Umkehrfunktion $P_A(x)$

Ökonomisch sinnvoller sind **$x_N(p)$ und $x_A(p)$** da der Preis p unabhängige und die Menge x die abhängige Variabel ist.

Nachfrage und Angebot, Aufgabe

Nachfrage: x_1 =2, $p(y_1)$=6.5 und x_2=6, $p(y_2)$=1.5
Angebot: x_1=1, $p(y_1)$=3.75 und x_2=4, $p(y_2)$=6

a) **Bestimme p in Abhängigkeit von x, d.h. $P_N(x)$**

Umformung, d.h nach x auflösen: PGRM → GERADE → Nachfrage Werte eingeben (x_1, y_1, x_2, y_2)

$$P_N(x) = 1.25x + 9 = p$$
$$9 = p + 1.25x$$
$$9 - p = 1.25x$$
$$9 - p = \frac{5}{4}x \quad |*\frac{4}{5}$$
$$\frac{4}{5}*9 - \frac{4}{5}p = x = 7.2 - 0.8p = X_N(p)$$

b) **Bestimme das Marktgleichgewicht (Schnittpunkt)**

$X_A(p) = P_N(x)$ → 2ND → CALC → INTERSECT

c) **Umkehrfunktion $X_N(p)$ berechnen**

$$P_N(x) = 3 * e^{-0.01x} = p \quad |:3$$
$$e^{-0.01x} = \frac{p}{3} \quad |\,ln$$
$$\ln(e^{-0.01x}) = \ln\left(\frac{p}{3}\right)$$
$$-0.01x = \ln\left(\frac{p}{3}\right) \quad |*100$$
$$x = -100\ln\left(\frac{p}{3}\right) = X_N(p)$$

d) **Umkehrfunktion $X_A(p)$ berechnen**

$$P_A(x) = \ln(0.2x + 5) = p \quad |\exp$$
$$0.2x + 5 = e^p \quad |-5$$
$$0.2x = e^p - 5 \quad |*\frac{5}{1}$$
$$x = 5(e^p - 5) = X_A(p)$$

Untersuchung von Funktionen: Grenzfunktionen (Grenzkfunktions Satz ist immer ungefähr!)

Grenzkostenfunktion, Aufgaben

Erlösfunktion E(x) = **x(p) *p bzgl. Preis** od. **x*p(x) bzgl. Menge**

Grenzerlösfunktion **E'(p) bzgl. Preis** od. **E'(x) bzgl. Menge**

a) Errechne den Grenzerlös bei Verkauf v. 50 Stk.

p(x)=150-0.5x

E(x) = x * p(x) = 150x – 0.5x²

E'(x) = 150 – x

E'(50) = 100

Das heisst, erhöht man ausgehend von einem Verkaufsvolumen von 50 die Menge um 1, so steigt der Erlös um etwa 100.

b) Errechne den Grenzerlös bei Preis von 100

Gleiches Vorgehen, jedoch: *Erhöht man ausgehend von einem Preisniveau von 100 um eine Geldeinheit, so sinkt der Erlös um etwa 100 Geldeinheiten.*

Grenzproduktivität, Grenzertrag **x'(r)**

Gibt an, um wieviele Outputeinheiten die Produktion zu oder abnimmt, wenn die Einsatzmenge r des variablen Produktionsfaktors um eine Einheit zunimmt.

Grenzgewinn **G'(x)**

Gewinn für eine zusätzlich produzierte ME in GE/ME

Grenzkosten **K'(x)**

Gibt an, um wieviel die Gesamtkosten ungefähr steigen, wenn die Produktionsmenge um eine zusätzliche Einheit steigen.

Marginale Konsum- und Sparquote, Aufgabe

Haushalt teilt sein **Einkommen Y in Konsum C und Sparen S.**

Marginale Konsum- und Sparquote

Konsumfunktion: $C(Y) = 6 * \frac{Y+1}{Y+5}$

Sparfunktion: $S(Y) = Y - C(Y) = Y - 6 * \frac{Y+1}{Y+5}$

a) Sättigungsgrenze des Konsums

$$C(Y)\infty = lim_{Y\to\infty} 6 * \frac{Y+1}{Y+5} = 6\ (weil\ \frac{\infty}{\infty} = 1)$$

b) Marginale Konsumquote bestimmen (Grenzneigung zum Konsum) C'(Y) allgemein und speziell für Y=5. Interpretieren Sie S'(5)

Marginale Konsumquote → C'(Y)

$$C'(Y) = 6 * \frac{1*(Y+5)-(Y+1)*1}{(Y+5)^2} = \frac{24}{(Y+5)^2} = 0.24$$

(Quotientenregel) Bei einem Einkommen von CHF 5000 gilt: Von einem zusätzlichen Einkommen von CHF 100 werden näherungsweise CHF 24 für den Konsum verwendet.

c) Marginale Sparquote bestimmen(Grenzneigung zum Sparen) C'(Y) allgemein und speziell für Y=5. Interpretieren Sie S'(5)

Marginale Sparquote → S'(Y)

Wegen S=Y-C folgt: S'=1-C', also $S'(Y) = 1 - \frac{24}{(Y+5)^2}$

$S'(5) = 1 - 0.24 = 0.76$

Bei Einkommen von CHF 5000 gilt: Bei zusätzlichem Einkommen von CHF 100 werden ca. CHF 76 gespart.

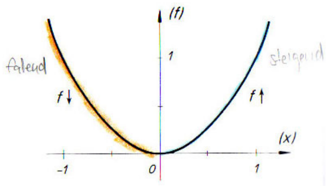
Untersuchung von Funktionen: Monotonie, Krümmung, Extrema, Wendepunkte

Monotonie

Monoton heisst, dass der Graph in einem Anschnitt **nur steigend** oder **nur fallend** ist.

monoton steigend/fallend: Der Funktionsgraph darf an mehreren Stellen **Null** sein (Graph kann horizontale Abschnitte aufweisen).

streng monoton steigend/fallend: Der Funktionsgraph darf maximal an einem **einzigen Punkt Null** betragen (z.B. bei einem Wendepunkt).



a) Zeige mittels Abl., dass K_A streng monoton wachsend ist.

$K_A(x) = 10\sqrt{0.1x+1}$

$K_A(x) = 10(0.1x+1)^{0.5}$

$K_A'(x) = 10 * 0.5(0.1x+1)^{-0.5} * 0.1$

$K_A'^{(x)} = 0.5(0.1x+1)^{-0.5} > 0 \quad (z.B. mit\ 1\ probieren.)$

b) Untersuche folgende Funktion auf Monotonie

$g(x) = xe^{-x}$

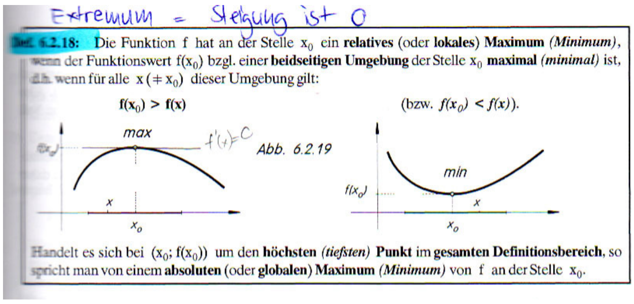
$g(x) = e^{-x} + x(-e^{x})$

$g(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

$g'(x) = e^{-x}(1-x)\begin{Bmatrix} > 0\ für\ x < 1 \\ < 0\ für\ x < 1 \end{Bmatrix}$

$g'ist\ streng\ monoton \begin{Bmatrix} steigend\ für\ x < 1 \\ fallend\ für\ x > 1 \end{Bmatrix}$

Extremum


Extremum = Steigung ist 0

Def. 6.2.18: Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein **relatives** (oder **lokales**) **Maximum** *(Minimum)*, wenn der Funktionswert $f(x_0)$ bzgl. einer **beidseitigen Umgebung** der Stelle x_0 **maximal** *(minimal)* ist, d.h. wenn für alle $x\ (\neq x_0)$ dieser Umgebung gilt:

$f(x_0) > f(x)$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$).

Handelt es sich bei $(x_0; f(x_0))$ um den **höchsten** *(tiefsten)* **Punkt** im **gesamten Definitionsbereich**, so spricht man von einem **absoluten** (oder **globalen**) **Maximum** *(Minimum)* von f an der Stelle x_0.

Relatives Maximum	**Relatives Minimum**
$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$	$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$
$\boldsymbol{f''(x_0)} < 0$	$\boldsymbol{f''(x_0)} > 0$

(D.h. nur dann kann f extremal sein!)

a) Extrema berechnen

1. $t(z) = z^2 + \frac{1}{z^2}$

$t(z) = z^2 + z^{-2}$

$t'(z) = 2z - 2z^{-3}$ **MATH → SOLVER (z.B. +10 u. -10) / QUADGL**

$t''(z) = 2 + 6z^{-4}$

x = 1 und x = -1 (von MATH SOLVER)

2. X = 1 und x =-1 jeweils in t'' einsetzen:

$t''(1) = 2 + 6 * 1^{-4}$

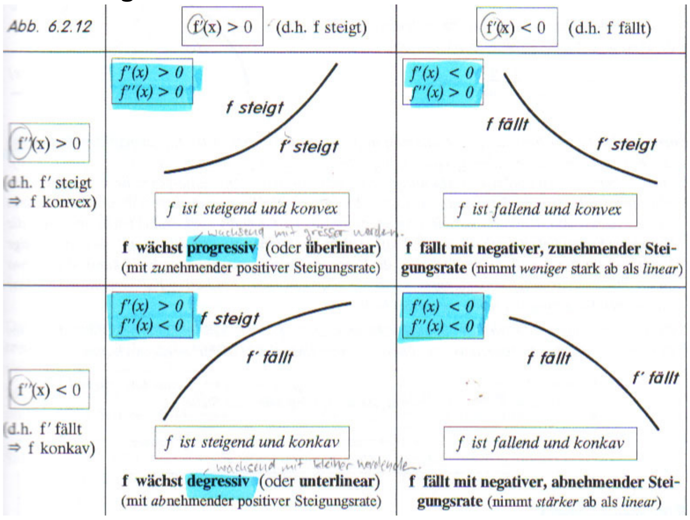
$t''(1) = 8 > 0$

$t''(-1) = 2 + 6 * (-1)^{-4}$

$t''(-1) = 8 > 0$

$\boldsymbol{t''(\pm 1)\ hat\ an\ den\ Stellen\ z = \pm 1\ relative\ Minima.}$

Krümmung



a) Zeige mittels Abl., dass K_A degressiv wachsend bzw. konkav ist (s.h. a) bei Monotonie)

$K_A''(x) = 0.5(-0.5)(0.1x+1)^{-1.5} * (0.1)$

$K_A''(x) = -0.025(0.1x+1)^{-1.5} < 0$

-0.025 < 0 und (0.1x+1)-1.5 > 0 das heisst – mal + gleich -, also < 0

b) Untersuche folgende Funktion auf die Krümmung

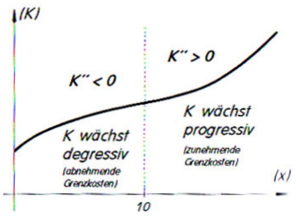
$$K(x) = \frac{1}{15}x^3 - 2x^2 + 6x + 900$$

$$K'(x) = 0.2x^2 - 4x + 6$$

$$K''(x) = 0.4x - 4 \begin{Bmatrix} > 0 \text{ für } x > 10 \\ < 0 \text{ für } x < 10 \end{Bmatrix}$$

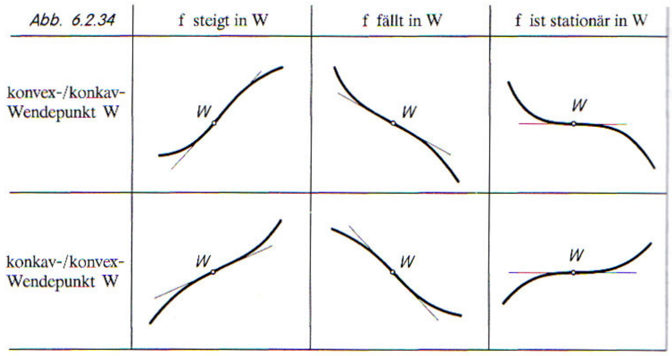
K *ist konkav für* x *0 bis 10 ME,*

für $x > 10$ *ME ist K konvex.*



Wendepunkte

Sind immer dann, wenn Übergang von einer **Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung, oder umgekehrt.**



Minimale Steigung

$f''(x_0) = 0$

$f'''(x_0) > 0$

Maximale Steigung

$f''(x_0) = 0$

$f'''(x_0) < 0$

a) Extrema berechnen

$f(x) = x^3 - 16x^2 + 6x - 4$

$f'(x) = 3x^2 - 32x + 6$

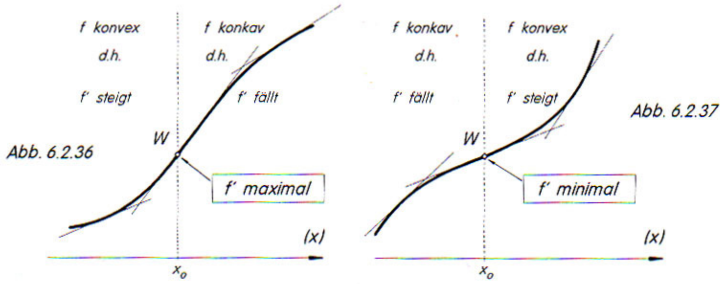
$f''(x) = 6x - 32$ **MATH → SOLVER (z.B. +100 u. -100)**

$f'''(x) = 6$

$$f''(x) = 6x - 32 = 0 \leftrightarrow x = \frac{16}{3}\ bzw. 5.33\ (MATH\ SOLVER)$$

$$f'''\left(\frac{16}{3}\right) = 6 > 0$$

Steigung minimal, d.h. konkav/konvex Wendepunkt



Wachstumsverhalten ökonomischer Funktionen

Zu finden sind Wendepunkt, Maximum, Nullstelle

a) Ableitungsfunktionen

$x(r) = -0.5r^3 + 1.5r^2 + 0.075r$

$x'(r) = -1.5r^2 + 3r + 0.075$

$x''(r) = -3r + 3$

$x'''(r) = -3 < 0$

b) Wendepunkt

$x'''(r) = -3 < 0$ *konvex/konkaver Wendepunkt*

c) Maximum

$x'(r) = 1.5r^2 + 3r + 0.075$ →MATH → SOLVER

$x_1 = -0.024$

$x_2 = 2.0247$ (Maximum)

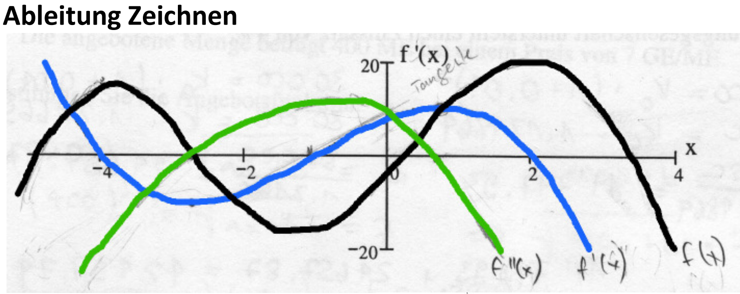
In 2. Ableitung einsetzen→ $x''(2.0247) = -3.0741 < 0$

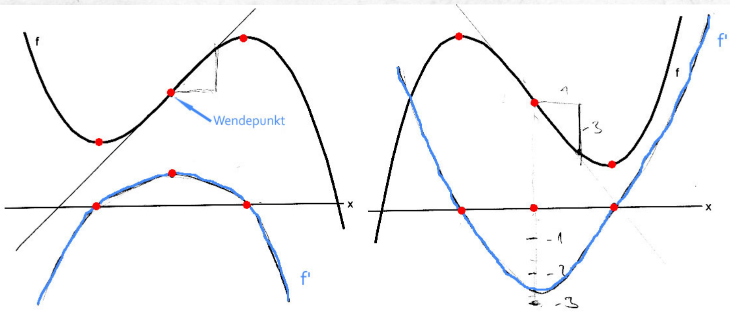
d) Nullstelle

2ND → CALC → ZERO

Ableitung: Grundidee der Ableitung

Ableitung Zeichnen





Ableitung: Grundidee der Ableitung

Ableitung mit TR zeichnen lassen

Y1 im TR → $f(x) = x^2 + 3$

Y2 im TR → **MATH → DERIV + VARS → YVARS → FUNCT → Y1,X,X**

Um die **Steigung** der **Tangente** von f(x) = x^2+3 **anzuzeigen**: **2ND → CALC → dy/dx → Zahl →**ergibt Steigung bei x. Um die **Wertetabelle** von Y2 aufzurufen: **→ 2ND → TABLE**

Grundbegriff der Ableitung: Ableitungsregeln

Ableitungsregeln

Erste Regeln

f(x) = c → f'(x) = 0 (Ganze Zahl fällt weg)

f(x) = x → f'(x) = 1

f(x) =ax +b → f'(x) = a

Potenzfunktion

f(x) = x^n → f'(x) = n*x^{n-1}

Beispiele

$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^{\frac{7}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{7}{4} * x^{\frac{7}{4}-\frac{4}{4}} = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x) = (-1) * x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$h(x) = \sqrt[7]{x^3} = x^{\frac{3}{7}} \rightarrow h'(x) = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Faktorregel

f(x) = c * g(x) → f'(x) = c * g'(x)

Beispiele

$f(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) = 4 * 3x^2 = 12x^2$

$f(x) = \frac{3x^7}{2} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} * 7x^6 = 10.5x^6$ ($\frac{3}{2}$ *ist* c, x^7 *ist* g)

$f(x) = -6 * x^{-3} \rightarrow f'(x) = (-6) * (-3) * x^{-4} = 18x^{-4} = \frac{18}{x^4}$

Summenregel

f(x) = u(x) + v(x) → f'(x) = u'(x) + v'(x)

f(x) = u(x) - v(x) → f'(x) = u'(x) - v'(x)

Beispiel

$f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 5 * (x^3)' + 6 * (x^2)' - 3 * (x)' + (2)'$

$f'(x) = 5 * 3x^2 + 6 * 2x - 3 * 1 + 0 = 15x^2 + 12x - 3$

Produktregel

f(x) = u(x) * v(x) → f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)

Beispiel

$f(x) = x^2 * (x-1)$

$f'(x) = (x^2)' * (x-1) + x^2 * (x-1)'$

$f'(x) = 2x * (x-1) + x^2 * 1$

$f'(x) = 2x^2 - 2x + x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

Kontrolle durch ausmultiplizieren: $f(x) = x^2 * (x-1)$, *ergibt* $f(x) = x^3 - x^2$ *und somit* $f'(x) = 3x^2 - 2x$

Quotientenregel

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)*v(x) - u(x)*v'(x)}{v(x)^2}$

Beispiele

$$f(x) = \frac{2x+1\ [u]}{x-1\ [v]}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1) * 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow \frac{(\ln x)' * (x) - (\ln x) * (x)'}{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} * x - \ln x * 1}{x^2} \rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Kettenregel

$f(x) = h(g(x)) = h(u)$ *mit* $u = g(x)$

$\rightarrow f'(x) = h'(u) * g'(x)$

Geschachtelte Funktionen einzeln ableiten und anschliessend miteinander multiplizieren.

Beispiele

$f(x) = (x^3 + 1)^2$

Äussere Funktion $h(u) = u^2$ — $h'(u) = 2u$

Innere Funktion $g(x) = x^3 + 1 = u$ — $g'(x) = 3x^2$

$f'(x) = h'(u) * g'(x)$

$f'(x) = 2u * 3x^2$

$f'(x) = 2(x^3 + 1) * 3x^2$

$f'(x) = 6x^2(x^3 + 1)$

$f(x) = (4x+9)^{0.5}$

$f'(x) = 0.5(4x+9)^{-0.5} * 4$

$f'(x) = 2(4x+9)^{-0.5}$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+9}}$$

$f(x) = e^{\sqrt{x}}$ → wäre $e^{x^{\frac{1}{2}}}$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} * \frac{1}{2} * x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Logarithmusfunktion/regel

$f(x) = \ln(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \log_a(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x*\ln(a)}$

$f(x) = \lg(x) \quad \rightarrow f0(x) = \frac{1}{x*\ln(10)}$

Beispiele

$f(x) = 16 * \ln(2x+1) \rightarrow f'(x) = 16 * \frac{1}{2x+1} * 2 = \frac{32}{2x+1}$

$f(x) = 250 * \log_2(x) + 1 \rightarrow f'(x) = 250 * \frac{1}{x*\ln(2)} = ca. \frac{360.674}{x}$

$f(x) = \ln(2x^3-1) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x^3-1} * 6x^2$

$f(x) = e^{2x} \rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$

Exponentialfunktion/regel

$f(x) = e^x \quad \rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = a^x \quad \rightarrow f'(x) = \ln(a) * a^x$

Beispiele

$f(x) = 12000 * e^{0.05x} \rightarrow f'(x) = 12000 * e^{0.05x} * 0.05 = 600 * e^{0.05x}$

$f(x) = 8 * 1.4^x \rightarrow f'(x) = 8 * \ln(1.4) * 1.4^x = ca. 2.692 * 1.4^x$

Grundbegriff der Ableitung: Exponential und Logarithmus Funktion

Exponentialfunktion $f(x) = k*a^x$

Eigenschaft: Keine Nullstellen, Für a >1 von links nach rechts streng monoton wachsend. Für 0<a<1 von links nach rechts streng monoton fallend.

$Basis\ a = 3 \quad y = f(x) = 3^x$

$Basis\ a = 10 \quad y = f(x) = 10^x$

$Basis\ a = e \quad y = f(x) = e^x$

Logarithmusfunktion f^{-1}

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponential-funktion.

$x = f^{-1}(y) = \log_3(y)$

$x = f^{-1}(y) = \lg(y)$ (10er Logarithmus)

$x = f^{-1}(y) = n(y)$ (natürlicher Logarithmus)

Beispiele

$\log_3(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(3)} = \frac{\lg(x)}{\lg(3)}$

$\log_5 100 = \frac{\log(100)}{\log(5)} = \frac{2}{0.699} = 2.861$

Zinseszins

$K_n = K_0(1+\frac{p}{100})^n$

K_0 Anfangskapital (Kapital zu Zeitpunkt 0)

K_n Kapital nach n Jahren

p Jahreszinsfuss

n Anzahl Jahre

Beispiel 1

a) Zu wieviel Prozent steht ein Kapital von CHF 7500 auf Zinseszins, wenn es in zehn Jahren auf CHF 10079.37 anwächst?

$10079.37 = 7500(1+i)^{10}$ | /7500

$\frac{10079.37}{7500} = (1+i)^{10}$ | $\sqrt[10]{\ }$

$\sqrt[10]{\frac{10079.37}{7500}} = 1 + i = 1.03$ | TR → $\frac{10079.37}{7500}$^0.1

$1.03 - 1 = 0.03 = 3\%$

b) In wie vielen Jahren wächst Kapital von CHF 8200 bei Verzinsung von 4% auf CHF 10790.64 an?

$10790.64 = 8200(1+\frac{4}{100})^n$

$10790.64 = 8200(1.04)^n$ | /8200

$\frac{10790.64}{8200} = (1.04)^n$

$n = \log_{1.04}\frac{10790.64}{8200}$

$n = \frac{\log(\frac{10790.64}{8200})}{\log(1.04)} = \frac{\log(1.31)}{\log(1.04)} = 7$

Beispiel 2

a) Versicherungsgesellschaft zahlt heute in drei Jahren 20'000 aus. Betrag soll jetzt ausgezahlt werden. Berechne den Barwert der in drei Jahren fälligen CHF 20'000. Zinssatz 5%.

$20000 = K_0 * (1+0.05)^3$ |ausmultiplizieren

$20000 = K_0 * (1.157)$ | /1.157

$\frac{20000}{1.157} = K_0 = 17276.8$

b) Schuld soll mit drei gleich grossen Tranchen à 12'000 getilgt wer-den. Zahlung erfolgt ab heute im Abstand von jeweils 2 Jahren. Mit welchem heute zu bezahlendem Betrag kann Schuld beglichen werden, wenn Schuldzins 8.5% pro Jahr beträgt?

$K_0 = 12000 * 1.085^4 + 12000 * 1.085^2 + 12000$ |4 J. und 2 J.

$K_0 = 12000\,(1.085^4 + 1.085^2 + 1) = 42757$

$K_0 = \frac{42757}{1.085^4} = 30852$

Spezialfall Logarithmus

Beispiel

$e^{-x} = 100$

$\ln e^{-x} = \ln 100$

$-x = \ln 100$

$x = -ln100$

$x = -4.6$

Potenzen, Wurzel und Logarithmengesetze

Potenzgesetze

$Def: a^0 = 1$

$P1: a^m * a^n = a^{m+n}$

$P2: (a^m)^n = a^{m*n}$

$P3: (axb)^n = a^n * b^n$

$P4: \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$P5: (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Wurzelgesetze

$Def: \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$W1: \sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$

$W2: \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$W3: \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$a\frac{m}{n} = \sqrt[n]{a^m = (\sqrt[n]{a})^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

Logarithmengesetze

$Def: y = a^x \leftrightarrow x = \log_a y$

$L1: \log_a(u * v) = \log_a u + \log_a v$

$L2: \log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

$L3: \log_a(u^n) = n * \log_a u$

Matrizen u. Gleichungssysteme: Lineare Gleichungssysteme

Das System

$$\left|\begin{array}{cccc} 2x & -y & +z & = -4 \\ 8x & -5y & +2z & = -15 \\ -11x & +7y & -3z & = 22 \end{array}\right|$$

Wenn z.B. y Wert in Matrix fehlt dann entspricht dies beim Umformen einer 0.

Umformen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Berechnung

$\boldsymbol{A^{-1} * B = x, y, z}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2ND → MATRIX → EDIT → A MATRIX UND B MATRIX EINGEBEN → BEI NAMES A AUSWÄHLEN → X-1 TASTE → * →2ND MATRIX → BEI NAMES B MATRIX AUSWÄHLEN → ENTER (ERR:SINGULAR MAT →Matrix ist singulär, invertieren nicht möglich.

Beispiel

a) Eine Gesamtfunktion soll durch eine Polynomfunktion 3. Grades K(x)=ax^3+bx^2+cx+d beschrieben werden.

1. Fixkosten betragen 16GE
2. Gesamtkosten der Produktion von 1 ME beträgt 38GE
3. Gesamtkosten der Produktion von 4 ME beträgt 56 GE
4. Grenzkosten der Produktion von 1 ME betragen 15GE/ME

Wie heisst die Funktionslgeichung K?

$K(x) = ax^3 + bx^3 + cx + d$

1. $K(x) = ax^3 + bx^3 + cx + 16$
2. $K(1) = a * 1^3 + b * 1^2 + c * 1 + 16$
   $K(1) = a + b + c + 16 = 38 \qquad | - 16$
   $K(1) = a + b + c = 22$
3. $K(4) = a * 4^3 + 6 * 4^2 + c + 16 = 64a + 16b + 4c = 40$
4. $K'(x) = 3ax^2 + 2b + c = 15$

$$\left|\begin{array}{cccc} a & +b & +c & = 22 \\ 64a & +16b & +4c & = 40 \\ 3a & +2b & +c & = 15 \end{array}\right| \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 64 & 16 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 64 & 16 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 22 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 30 \end{pmatrix} \rightarrow K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 16$$

Matrizen u. Gleichungssysteme: Matrizenrechnung

Produktionskoeffizienzen

Arbeitsstunden pro Mengeneinheit (Matrix H)

	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3
Maschine 1	2	4	0.5
Maschine 2	1	3	1.5

a) Es sollen hergestellt werden: 3 ME Produkt 1, 5 ME Produkt 2, 2 ME Produkt 3. (Matrix X)
H*X ergibt die benötigten Betriebsstunden für Maschine 1 und Maschine 2 und somit die neue (Matrix V)

Betriebskosten (Matrix Q)

	Maschine 1	Maschine 2
Stromkosten	1.5	2
Unterhaltskst.	0.2	0.1

b) Strom und Unterhaltskosten für die Produktion der Produkte.
Q*V ergibt die Stromkosten (82500) und Unterhaltskosten (7500) für die gesamte Produktion.

c) Betriebskosten der für die Produktion der Produkte.
Q*H ergibt die folgenden Betriebskosten:

	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3
Stromkosten	5	12	3.75
Unterhaltskst.	0.5	1.1	0.25

Kostenfunktion Aufgabe

Bestimme Kostenfunktion K(x)=ax^3+bx^2+cx+d, so dass:
1. Fixkosten 20 GE, 2. Minimalen Grenzkosten 0.3GE/ME, 3. Minimalen Grenzkosten bei Menge von 40 ME realisiert wird, 4. Bei Produktions Menge von 40 ME die Durchschnittskosten genau 2 GE/ME betragen.

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 20$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$K''(x) = 6ax + 2b$

Durchschnittskosten:

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{20}{x}$$

Bedingungen übersetzten:

$K'(40) = 0.3 \qquad 4800a + 80b + c = 0.3$

$K''(40) = 0 \qquad 240a + 2b = 0$

$k(40) = 2 \qquad 1600a + 40b + c + 0.5 = 2$

Da alle drei Bedingungen linear, in das LGS in Matrizenform schreiben:

$$\begin{pmatrix} 4800 & 80 & 1 \\ 240 & 2 & 0 \\ 1600 & 40 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4800 & 80 & 1 \\ 240 & 2 & 0 \\ 1600 & 40 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00075 \\ -0.09 \\ 3.9 \end{pmatrix}$$

$K(x) = 0.00075x^3 - 0.09x^2 + 3.9x + 20$

Übersicht ökonomische Funktionen

Bei Grenzfunktion handelt es sich immer um ungefähre Werte!

Name	Kürzel	Input Variable	Output Variable	Zusammenhänge
Kostenfunktion oder Gesamtkostenfunktion	$K(x)$	Produktionsmenge x in ME	Gesamtkosten in GE	$K(x)=K_v(x)+K_f$
Variable Kosten =Outputabhängige Kosten	$K_v(x)$	Produktionsmenge x in ME	Gesamtkosten in GE	$K_v(x)=K(x)-K_f$
Fixkosten =Outputunabhängige Kosten	K_f			$K_f=K(0)$
Durchschnittskosten (falls Produktion in Stück, dann auch gesamte Stückkosten)	$k(x)$	Produktionsmenge x in ME	Kosten pro produzierte Mengeneinheit in GE/ME	$k(x)=\frac{K(x)}{x}$
variable Durchschnittskosten	$k_v(x)$	Produktionsmenge x in ME	Kosten pro produzierte Mengeneinheit in GE/ME	$k_v(x)=\frac{K_v(x)}{x}$
Grenzkosten	$K'(x)$	Produktionsmenge x in ME	Kosten für eine zusätzlich produzierte ME in GE/ME	
variable Grenzkosten	$K_v'(x)$	Produktionsmenge x in ME	Variable Kosten für eine zusätzlich produziere ME in GE/ME	$K'(x)=K_v'(x)$
Grenzdurchschnittskosten oder Grenzstückkosten durchschnittliche Gesamtkosten	$k'(x)$	Produktionsmenge x in ME	Veränderung der Durchschnittskosten bei der Veränderung der Produktion um 1 ME in GE/ME²	$k'(x)=\left(\frac{K(x)}{x}\right)'$
Gewinnfunktion	$G(x)$	Produktionsmenge x in ME	Gewinn in GE	$G(x)=E(x)-K(x)$
Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$	Produktionsmenge x in ME	Gewinn für eine zusätzlich produzierte ME in GE/ME	$G'(x)=E'(x)-K'(x)$
Stückgewinnfunkion Durchschnittsgewinn	$g(x)$	Produktionsmenge x in ME	Durchschnittlicher Gewinn pro produzierte ME in GE/ME	$g(x)=\frac{G(x)}{x}=\frac{E(x)}{x}-\frac{K(x)}{x}$
Grenzstückgewinn	$g'(x)$	Produktionsmenge x in ME	Veränderung des Durchschnittsgewinns für eine zusätzliche produzierte ME ... (GE/ME)/ME	$g'(x)=\left(\frac{G(x)}{x}\right)'$
Gesamtdeckungsbeitrag	$G_D(x)$	Produktionsmenge x in ME	Deckungsbeitrag in GE	$G_D(x)=E(x)-K_v(x)$
Grenzdeckungsbeitrag	$G_D'(x)$	Produktionsmenge x in ME	Deckungsbeitrag für eine zusätzlich produzierte ME in GE/ME	$G_D'(x)=E'(x)-K_v'(x)$
Grenzstückdeckungsbeitrag	$g_D'(x)$	Produktionsmenge x in ME	Durchschnittlicher Deckungsbeitrag pro produzierte ME in GE/ME	$g_D(x)=\frac{G_D(x)}{x}=\frac{E(x)}{x}-\frac{K_v(x)}{x}$
Erlösfunktion	$E(x)$	Produktionsmenge x in ME	Erlös in GE $p(x)\times x = Angebots \quad monopol$	$E(x)=p\times x$ oder $E(x)=p(x)\times x$ p(x): Nachfragefunktion bzw. Preis-Absatz-Funktion
Erlösfunktion p: Preis (GE/ME), x=nachgefragte Menge	$E(p)$	Preis in GE	Erlös in GE	$E(p)=x(p)\times p$ x(p): Umkehrfunktion der Nachfragefunktion
Grenzerlös (bzgl. der Menge)	$E'(x)$	Produktionsmenge x in ME	Erlös für eine zusätzlich produzierte ME in GE/ME E= x · p(x) → E' ableiten	
Grenzerlös (bzgl. des Preises)	$E'(p)$	Preis in GE/ME	GE/(GE/ME) p(x) → x(p) E(p) = x(p) p → E' ableiten Erlösveränderung bei einer Preiszunahme von einer Geldeinheit	
Grenzgewinn bzgl. der Menge			x(p) = ? →z.B. x(100) in p einsetzen -2.5p+375=125ME danach G' (125) ableiten (GE/ME)	
Sparfunktion	$S(Y)$	Einkommen in GE	Gesparter Betrag in GE	S(Y) = Y-C(Y) → $Y=S(Y)+C(Y)$
Konsumfunktion	$C(Y)$	Einkommen in GE	Konsum in GE C(Y) = 0.4Y Bsp. 1000 + 0.2Y= 0.4Y → Y=5000 GE	$Y=S(Y)+C(Y)$
Durchschnittliche Konsumquote	$\overline{C}(Y)$		C(Y) : Y = Konsumquote; für Y wird immer eine Einkommenshöhe gegeben (z.B. 1000 GE) $C(1000)=\frac{0.2 \cdot 1000 + 1000}{1000}$ = 1.2 (Konsum 120% des Einkommens)	$C(Y)=\frac{C(Y)}{Y}$
Marginale Sparquote (Grenzneigung zum Sparen)	$S'(Y)=$ dC / dY	Einkommen in GE z.B. 1000 GE C(Y)=1'000 + 0.2Y	Gesparter Betrag für eine zusätzlich eingenommenen GE 1Ableitung der Konsumfunktion = … GE/GE S (Y)= Y-C(Y) = Y-(1'000 + 0.2Y) = (0.8 Y -1000 → S'(Y)= 0.8; S'(1000)=0.8 (80% jeder zusätzliche GE werden gespart)	$S'(Y)=1-C'(Y)$
Marginale Konsumquote (Grenzneigung zum Konsum)	$\frac{dC}{dY}=C'(Y)$	Einkommen in GE	Konsumierter Betrag für eine zusätzlich eingenommene GE 1. Ableitung der Sparfunktion = … GE/GE	$C'(Y)=1-S'(Y)$
Produktionsfunktion	$x(r)$	r: Inputfaktor in ME_r	X: Produktionsmenge in ME_x	Bsp: $x'(r)=-0.3r^2+12r+150$
Grenzproduktivität	$x'(r)$	Inputfaktor in ME_r	Zusätzlicher Output bei der Erhöhung des Inputs um eine ME_r in ME_x / ME_r	$x'(r)$ = dx/dr gibt an, um wie viele Outputeinehiten die Pruduktion zu- oderabnimmt, wenn r eine Einheit zunimmt
Anstieg Grenzproduktivität	$x''(r)$	Inputfaktor in ME_r	(MEx/MEr)/MEr	
Produktivität (=Durchschnittsertrag)	$\overline{x}(r)$	Inputfaktor in ME_r	MEx/MEr	$\frac{x(r)}{r}$
Output durchschnittl. Var. Kosten			von durchschnittlichen var. Kosten (siehe zu oberst) Ableitung und dann = 0 setzen und mit Solver =..ME	
durch. Gesamtkosten Anstieg 0			von Grenzstückkosten (siehe fast zu oberst) Ableitung und dann = 0 setzen und mit Solver berechnen	
Grenzkosten = Stückkosten			Grenzkosten und Grenzstückkosten gleichsetzen und dann addieren / subtrahieren u. dann auf 0 setzen & Solver, Calc Zero	
Grenzgewinn=0 im Verh zum Marktpr.			Grenzgewinn G'(x) mit Solver oder quadr. Gl berechnen und dann Resultat mit Preis-Absatz-Funktion p(x) multiplizieren= .. GE/ME	
Grenzkosten=Grenzerlös (Output)			G'(x) 0 = E'(x) – K'(x) Grenzgewinn ermitteln und mit Solver ausrechnen → G'(x)= ? ME	
Grenzkostenfunktion=horiz. Tangente			Doppelte Ableitung der Grenzkostenfunktion K''(x) und dann auf Solver setzen und berechnen x= ? ME	
Marktpreis, bei dem eine Preiserhöhung von 0.1 GE/ME zu einer Erlösminderung von ca. 0.5 GE			$\frac{dE}{dp}=\frac{-0.5}{0.1}$ (Erlösminderung) (Preiserhöhung) = -5 E'(p)= = -5 → p=? GE/ME	
Faktoreinsatzmenge, bei der zusätzlicher Input von 2 MEr die Produktionsmenge um ca. 0.1 MEx steigert			$\frac{dx}{dr}=\frac{0.1}{2}$ (Produktionsmengensteigerng) (Faktoreinsatzmenge) = 0,05 x'(r)= = 0.05 → r=? MEr	
Output, bei dem die Stückkosten um ca. 0.4 GE/ME sinken, wenn Output um eine ME gesteigert			$\frac{dk}{dx}=\frac{-0.4}{1}$ (Stückkostensenkung) (ME Steigerung) = -0,4 k'(x)= = -0.4 → x=? ME	
maximaler Gewinn (Bei welcher Produktionsmenge erzielt man den maximalen Gewinn)			$G(x)=E(x)-K(x)$ $E'(x)=K'(x)$	