Einführung Wahrscheinlichkeitsrechnung

Permutationen (Anordnung, die jedes Element genau 1 mal enthält)

Anzahl Permutationen von n-Elementen = n! TR-> Math

Kombinationen (Eine Auswahl von k aus n Elementen)

Anzahl Kombinationen = $\frac{n!}{(n-k)!*k!}$ oder $\binom{n}{k}$ -> $\frac{k\ Faktoren\ abwärts\ von\ n}{k\ Faktoren\ aufwärts\ 1}$ Bsp: $\binom{5}{3}$ → $\frac{5*4*3}{1*2*3}$

→TR:Math nCr(5,3)

Wahrscheinlichkeit	Zufallsvariable Z	diskrete Zufallsvariable	stetige Zufallsvariable
P=$\frac{Anzahl\ günstige\ Fälle}{Anzahl\ aller\ gleichmöglichen\ Fälle}$	Variable, deren angenommenen Werte vom Zufall abhängen	Kann nur bestimmte isolierte Werte annehmen (Bsp. Würfel:1,2,3,4,5,6)	Kann in einem Intervall jede reelle Zahl annehmen (Bsp: Flasche: Anzahl ml)

diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Funktion, die jedem Wert einer diskreten Zufallsvariable eine Wahrscheinlichkeit zuordnet! Bsp:Würfel: z={1,2,3,4,5,6} → p=$\frac{1}{6}$

Taschenrechner Tipps

arithmetisches Mittel $\overline{x}$ →mean(L1,L2)
Standardabweichung s →stdDev(L1,L2)
Varianz s^2 →variance(L1,L2)
geometrisches Mittel →prod(L1)$^{1/n}$

Bezeichnungen der Stichprobe S

n = Stichprobengrösse
s = empirische Standardabweichung
E(X) = Erwartungswert μ
X_n = Zufallsvariable
$\overline{x}$ = arithmetisches Mittel
s^2 = empirische Varianz
Var(E)=Varianz σ^2

Bezeichnungen der Grundgesamtheit G

N = Grösse der Grundgesamtheit
μ = Erwartungswert
π = μ (einfach nominal)
σ = Standardabweichung
σ^2 = Varianz (Formel von σ ohne Wurzel)

Arithmetisches Mittel	Standardabweichung s	Erwartungswert μ	Standardabweichung σ
$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{W_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot w_i$ = Summe der Merkmalswerte mal ihre relativen Gewichte	$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i-\overline{x})^2 \cdot \frac{W_i}{n-1}}$	$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i$	$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i-\mu)^2 \cdot p_i}$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung (Qualitativ)

Beispiele:
- Wahr oder nicht wahr
- Zahl oder Kopf

Bei der n-mailgen Ausführung eines Experimentes besteht für das Eintreten des Ereignisses E immer dieselbe Wahrscheinlichkeit p
Die Zufallsvariable X nimmt die Werte 0 bis n an mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Für die Binomialverteilung gilt:

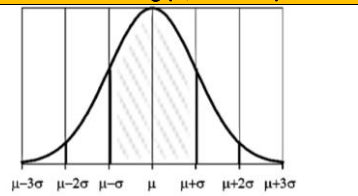
Die Zufallsvariable X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$

und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

resp. die Varianz $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

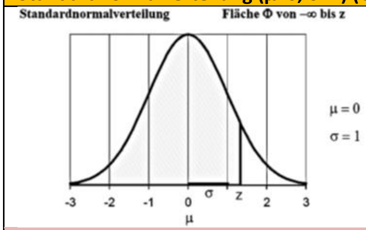
TR: binompdf(n,p,L1) ->liefert Funktionswert
binomcdf(n,p,untergrenze,obergrenze) ->liefert Fläche

Normalverteilung (Quantitativ)



Im Intervall von μ−σ bis μ+σ liegen **68.27%** der Fläche.
Im Intervall von μ−2σ bis μ+2σ liegen **95.45%** der Fläche.
Im Intervall von μ−3σ bis μ+3σ liegen **99.73%** der Fläche.

Standardnormalverteilung (μ=0, σ=1) (Quantitativ)



z=invnorm(C) ->liefert **Z-Wert** auf X-Achse

Jede normalverteilte Zufallsvariable X kann in die standardnormalverteilte Zufallsvariable Z transformiert werden:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

TR: normpdf(x, μ, σ) ->liefert Funktionswert (Bei stdNV nur x angeben)
normcdf(untergrenze, obergrenze, μ, σ) ->liefert Fläche

Rechenregeln für Varianz und Erwartungswert

1. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
2. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$
   $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$
3. $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ $a \in \mathbb{R}$
4. $Var(a \cdot X) = a^2 \cdot Var(X)$ $a \in \mathbb{R}$
5. $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Der zentrale Grenzwertsatz

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.),

wobei $E[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$.

Dann gilt für die Zufallsvariablen $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ sowie

$\overline{X} = \frac{S}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$:

$E(S) = n \cdot \mu$ $E(\overline{X}) = \mu$

$Var(S) = n \cdot \sigma^2$ $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

n muss mindestens 30 betragen!

Die Standardabweichung des Durchschnitts wird als Standardfehler $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bezeichnet!

Konfidenzintervalle

Ziel: Aus beobachteten Messwerten($\overline{x}$, s^2, p) die unbekannten Grössen (μ, σ^2, π) der Grundgesamtheit schätzen durch Punkt- oder Intervallschätzung.

Punktschätzung

Ein einzelner Wert wird als Schätzung angegeben

Intervallschätzung

Ein Bereich (Intervall) wird als Schätzung angegeben

$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i$ → schätzer für μ

$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ → schätzer für σ^2

p = relative Häufigkeit → Schätzer für π

Vertrauensbereiche für arithmethische Mittelwerte (Qantitativ)

Z-Verteilung (σ bekannt ->Grundgesamtheit) (Quantitativ)

α=Fehlerrisiko 1 – α = Konfidenzniveau

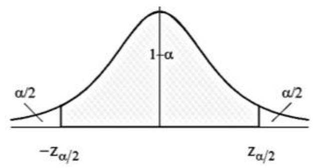
Mit der Wahrscheinlichkeit 1 – α enthält das Intervall von

$\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bis $\overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

das arithmethische Mittel μ der Grundgesamtheit
Bei grossen Stichproben (Faustregel : n > 5% von N) wird

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ durch $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ ersetzt.

α	1−α	$z_{\alpha/2}$
0.317	0.683	1
0.05	0.95	**1.96**
0.046	0.954	2
0.01	0.99	**2.58**



TR: ZIntervall oder TIntervall

z oder $z_{\alpha/2}$ mit TR bestimmen (α =5%, C=95%):
- Einseitig: z = invnorm(0.95)
- **Zweiseitig: $z_{\alpha/2}$=invnorm(0.975)**

Funktionswert → tpdf(x,v)
Fläche → tcdf(untere Grenze, obere Grenze, v)
T-Wert auf X-Achse (t) → invt(Confidentially, v)

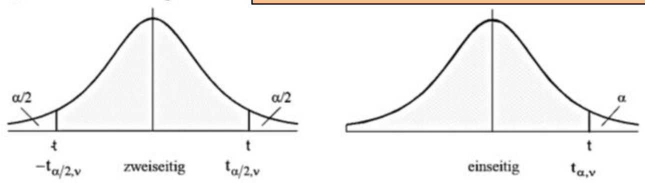
T-Verteilung (s bekannt -> Stichprobe) (Quantitativ)

v=Anzahl Freiheitsgrade= n–1

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Wobei der Korrekturfaktor nur angewendet wird wenn n>5%!!

Quantile der t-Verteilung



Vertrauensbereiche für Anteilswerte (Qualitativ)

1) $\hat{p} = \frac{x}{n}$

Mit der Wahrscheinlichkeit von 1 – α enthält das Intervall von

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$$: den Anteil π der Grundgesamtheit

Voraussetzung: $\boxed{n \cdot \hat{p} \cdot (1-\hat{p}) > 9}$

Korrekturfaktor $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Wobei der Korrekturfaktor nur angewendet wird wenn n>5%!!

TR: 1-PropZInt (eine Stichprobe) 2-PropZInt(2 Stichproben)

Stichprobengrösse

Quantitativ

$$n \geq \frac{z^2_{\alpha/2} \cdot \sigma^2}{F^2}$$

σ ist entweder durch eine Studie bekannt, ansonsten 3-Sigma-Regel:

- Max - Min = Spannweite
- SW/6 = σ

Qualitativ

$$n \geq \frac{z^2_{\alpha/2} \cdot \pi \cdot (1-\pi)}{F^2}$$

π entweder durch Studie bekannt, ansonsten:

- π*(1- π) durch
- 0.25 ersetzen

Testen von Hypothesen

Null-Hypothese H_0 -> immer =	Alternativ-Hypothese H_A	Signifikanzniveau
Sie wird entweder verworfen oder beibehalten!! **Immer mit gleichheitszeichen:** • μ = … • π = … • p = …	Sie versuchen wir zu beweisen/bestätigen!!! 3 Möglichkeiten: • > (einseitig) • < (einseitig) • Ungleich (zweiseitig)	α_1=5% oder für hochsignifikanz α_2=1% • p = α_1 →signifikant • p < α_1 →signifikant • p = α_2 →hochsignifikant • p < α_2 →hochsignifikant Grenze wird als kritischer Wert c bezeichnet. Verwerfungsbereich V = {1,2,3…}
2 Schritte um c und V zu bestimmen (α=5%)	Liste 1 erstellen (Anzahl n) z.B. n=40 → L1=seq(x,x,1,40,1)	1-binomcdf(n, π, L1) →liefert zu jedem n den Anteilswert →erster Wert der im Signifikanzniveau ist = c
2 Mögliche Resultate	1. H_0 wird verworfen (p<oder= α)	2. H_0wird beibehalten (p> α)

Kritischer Bereich K	Auch Verwerfungsbereich. Die Menge aller Ergebnisse, bei deren Eintreffen wir die Nullhypothese verwerfen wollen.	P-Wert	Ist der p-Wert ≤ 0.05 so wird die Nullhypothese verworfen.
Signifikanz-niveau	Die Wahrscheinlichkeit P(K) soll klein sein, kleiner als eine Schranke α. Bei einem Signifikanzniveau von **α = 1%** spricht man von **hochsignifikant**. Ein Testergebnis, das auf dem Niveau von **α = 5%** zur Ablehnung der Nullhypothese führt, nennt man **signifikant**. **Wenn P-Wert > 0.05 wird H_0 beibehalten** **Wenn P-Wert < 0.05 dann wird H_0 verworfen = signifikant** **Wenn P-Wert Wert < 0.01 dann wird H_0verworfen = hochsignifikant**		

Vorgehen beim Testen von Hypothesen	1.	Eine Vermutung kann nicht direkt bewiesen werden → indirekte Bestätigung
	2.	Der zu bestätigenden "Alternativhypothese" H_A wird die Nullhypothese H_0 gegenübergestellt, in der Hoffnung, H_0 widerlegen zu können.
	3.	Zufallsexperiment planen: Wahl einer geeigneten Testgrösse.
	4.	[Evtl. Signifikanzniveau α wählen,] Verwerfungsbereich K bestimmen, Entscheidungsregel aufstellen.
	5.	Zufallsexperiment durchführen, Wert der Testgrösse bestimmen. Es sind 2 Entscheidungen möglich: a) Wert der Testgrösse fällt in den Verwerfungsbereich: H_0 wird verworfen. (**Fehlerrisiko 1. Art**: H_0 wird verworfen, obwohl H_0 richtig ist. Die WS, diesen Fehler zu begehen, ist kleiner als α.) b) Wert der Testgrösse fällt nicht in den Verwerfungsbereich: H_0 wird beibehalten. (**Fehlerrisiko 2. Art**: H_0 wird beibehalten, obwohl H_0 falsch ist. Die WS β für diesen Fehler kann im Allgemeinen nur durch zusätzliche Überlegungen oder Annahmen berechnet werden.

Tests für Anteilswerte (Qualitativ)

1-Stichproben Test

Ist in einer Grundgesamtheit der Anteil π für die Ausprägung eines Merkmals verschieden von einem vermuteten Wert π_0?

1. H_0 ($\pi=\pi_0$)und H_A (π entweder <, >, oder ungleich π_0 ->Wert der überfrüft wird (effektive Zahl)bestimmen
2. Stichprobe:
$$n > \frac{9}{\pi_0 \cdot (1-\pi_0)}$$
$$\hat{p} = \frac{x}{n} \quad \text{Anteil des Merkmals in der Stichprobe}$$
3. Test Zufallsvariable:
$$Z = \frac{\left(\frac{X}{n} - \pi_0\right) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\pi_0 \cdot (1-\pi_0)}} \quad \text{ist angenähert **standardnormalverteilt**}$$
4. Realisation der Testgrösse:
$$z = \frac{(\hat{p} - \pi_0) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\pi_0 \cdot (1-\pi_0)}}$$
5. Verwerfungsbereich:
zweiseitig $\pi \neq \pi_0$: $|z| > z_{\alpha/2}$ = invNorm(1-α/2)
einseitig $\pi > \pi_0$: $z > z_\alpha$ = invNorm(1-α)
einseitig $\pi < \pi_0$: $z < -z_\alpha$
6. TR: **1-PropZTest**
Input: π_0, x, n (TR: „prop" statt π sowie „p0" statt π_0)
Der Output liefert z und den zu z gehörenden p-Wert sowie den Schätzwert $\hat{p}$.

2-Stichprobentest

Sind die Anteile π_1 und π_2 einer Merkmalsausprägung in zwei Grund-gesamtheiten verschieden?

1. H_0 ($\pi_1=\pi_2$)und H_A (π_1 entweder <, >, oder ungleich π_2)bestimmen
2. Stichproben:
$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} \quad \text{Anteil des Merkmals in der 1. Stichprobe}$$
$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} \quad \text{Anteil des Merkmals in der 2. Stichprobe}$$
$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \quad \frac{\hat{p}_1 \cdot n_1 + \hat{p}_2 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{Schätzung für } \pi$$
Bedingungen: $(n_1 + n_2) \cdot \hat{p} \cdot (1-\hat{p}) > 9 \ \wedge \ n_1 \geq 50, n_2 \geq 50$
3. Testgrösse Z und realisation z:
$$Z = \frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}}{\sqrt{\pi \cdot (1-\pi) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p} \cdot (1-\hat{p}) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$
ist angenähert **standardnormalverteilt**
4. Verwerfungsbereich:
zweiseitig $\pi_1 \neq \pi_2$: $|z| > z_{\alpha/2}$ = invNorm(1-α/2)
einseitig $\pi_1 > \pi_2$: $z > z_\alpha$ = invNorm(1-α)
einseitig $\pi_1 < \pi_2$: $z < -z_\alpha$
5. TR: **2-PropZTest**
Input: n_1, x_1, n_2, x_2 (TR: p_1 und p_2 statt π_1 und π_2)
Der Output liefert z und den zu z gehörenden p-Wert, ausserdem $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$, $\hat{p}$.

Chi Quadrat-Unabhängigkeitstest (Qualitativ!!)

Ziel: Wird benutzt um zu testen ob zwei qualitative Merkmale voneinander unabhängig sind!

Nullhypothese H_0 Zwischen den beiden Merkmalen besteht Unabhängigkeit.

Alternativhypothese H_A Zwischen den beiden Merkmalen besteht Abhängigkeit.

Kreuztabelle:

	Tabaksorte (Merkmal 2)				
Pfeifentyp (M 1)	I	II	III	IV	Σ
A	19	20	9	32	80
B	12	14	9	15	50
C	9	26	2	33	70
Σ	40	60	20	80	200

40% 25% 35%

100%

Symbolik:
Die empirischen (beobachteten) Häufigkeiten bezeichnen wir im Folgenden mit f_{ij}

$$\nu = (Anzahl\ Zeilen - 1) * (Anzahl\ Spalten - 1)$$

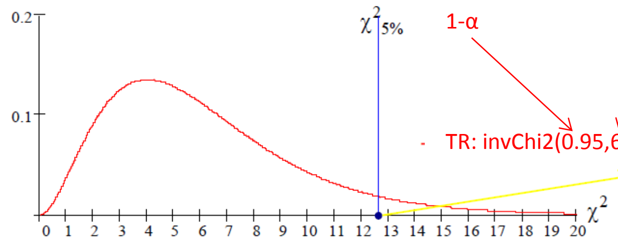
40% von 40 = 16
25% von 40 = 10
35% von 40 = 14

	Tabaksorte					
Pfeifentyp	I (=1)	II (=2)	III (=3)	IV (=4)	Σ	rel. Häufigkeit p
A (=1)	19 16	20 24	9 8	32 32	80	40%
B (=2)	12 10	14 15	9 5	15 20	50	25%
C (=3)	9 14	26 21	2 7	33 28	70	35%
Σ	40	60	20	80	200	
rel. Häufigkeit q_j	20%	30%	10%	40%		

$$\chi^2 = \frac{(19-16)^2}{16} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(9-8)^2}{8} + \frac{(32-32)^2}{32} + \ldots\ldots + \frac{(33-28)^2}{28} = 13.71$$

Für $\alpha = 5\%$ und $\nu = 6$ lesen wir den kritischen Wert aus der χ^2-Tabelle ab: $\chi^2_{5\%} = 12.59$

1. Matrix [A] Werte eingeben
2. X^2-Text auswählen
3. P-Wert lesen und beurteilen



1-α Nü

TR: invChi2(0.95,6)

Feststellung:	Die Testgrösse ist grösser als der kritische Wert. Wir verwerfen die Nullhypothese.
Entscheid:	Die Abweichung ist signifikant (aber nicht hochsignifikant). Auf Grund des Stichprobenergebnisses muss davon ausgegangen werden, dass Abhängigkeit zwischen Pfeifentyp und Tabaksorte besteht.
TI-Output:	$\chi^2 = 13.71$ $p = 3.30\%$ (p-Wert) $1\% \le p \le 5\%$

Tests für arithmetische Mittelwerte (Quantitativ)

1-Stichproben Test (σ unbekannt)

Ist in einer Grundgesamtheit das arithmetische Mittel μ signifikant verschieden von einem vermuteten Wert μ_0?

1. H_0 ($\mu = \mu_0$) und H_A (μ entweder <, >, oder ungleich μ_0) bestimmen
2. Stichprobe:
   Grösse n
   arithmetisches Mittel $\bar{x}$
   Standardabweichung s (σ_0 durch s geschätzt)
3. Test Zufallsvariable:
   $T = \frac{(\bar{X} - \mu_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$ ist **t-verteilt** mit $\nu = n - 1$ Freiheitsgraden
4. Realisation der Testgrösse:
   $t = \frac{(\bar{x} - \mu_0) \cdot \sqrt{n}}{s}$
5. Verwerfungsbereich:
   zweiseitig $\mu \neq \mu_0$: $|t| > t_{\alpha/2,n-1}$ = invT(1-α/2,n-1)
   einseitig $\mu > \mu_0$: $t > t_{\alpha,n-1}$ = invT(1-α,n-1)
   einseitig $\mu < \mu_0$: $t < -t_{\alpha,n-1}$
6. TR:
   T-Test Input: Stichprobenwerte als Kennzahlen (Stats) oder als Listen (Data)
   Der Output liefert t und den p-Wert

2-Stichprobentest (unabhängige Stichproben)

Sind die arithmetischen Mittel μ_1 und μ_2 eines Merkmals in zwei Grundgesamtheiten signifikant verschieden?

1. H_0 ($\mu_1 = \mu_2$) und H_A (μ_1 entweder <, >, oder ungleich μ_2) bestimmen
2. TR:
   2-SampTTest
   Zu unterscheiden sind zwei Fälle; der zweite stellt den Normalfall dar:
   - Pooled: Yes
     Man weiss im Voraus, dass die beiden Grundgesamtheiten gleiche Varianzen aufweisen: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (Spezialfall !)
   - Pooled: No
     Über die Varianzen der beiden Grundgesamtheiten ist nichts bekannt: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (Normalfall !)

   In beiden Fällen:

Input:	Data	Stichprobenwerte als Listen, oder
	Stats	Stichprobenumfänge n_1, n_2 arithmetische Mittel $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ Standardabweichungen s_1 und s_2

   Der Output liefert t, ν = df und den p-Wert

Gepaarter 2-Stichprobentest (abhängige Stichproben ->Vorher/Nacher)

Weicht der Erwartungswert des Merkmals im Zustand B signifikant vom Erwartungswert des Merkmals im Zustand A ab?

- Gleiches vorgehen wie 1-Stichproben Test ausser: $\bar{x}$ und **s** wird aus der Differenz A-B berechnet
- Dann entweder mit TR(t-Test) oder schriftlich