PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình - khá

Câu 1. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. Nếu $b // a$ thì $b // (P)$.

B. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

D. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải

Nếu $a \perp (P)$ và $b // a$ thì $b \perp (P)$.

Câu 2. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Theo tính chất 1 SGK Hình học 11 trang 100.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì d vuông góc với hai đường thẳng trong mặt phẳng (α).

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) thì d vuông góc với mặt phẳng (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) thì d vuông góc với bất kỳ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α).

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Lời giải

Khẳng định B **sai** vì: đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) mà hai đường thẳng đó song song thì d không vuông góc với mặt phẳng (α).

Câu 4. Trong không gian, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Lời giải

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 5. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Q).

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song với đường thẳng b.

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì đường thẳng a song song hoặc trùng với đường thẳng b.

D. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

Lời giải

Phát biểu D đúng theo định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.

Câu 6. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a \perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha) \perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Lời giải

Hiển nhiên **B** đúng.

Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Do đó, **A** sai.

Nếu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau và cắt nhau thì mặt phẳng chứa cả a và b không thể vuông góc với b. Do đó, **C** sai.

Qua một đường thẳng có vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác. Do đó, **D** sai.

Câu 7. Cho hai đường thẳng phân biệt a,b và mặt phẳng (P). Chọn khẳng định đúng?

A. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.
B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
D. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $b \parallel a$.

Lời giải

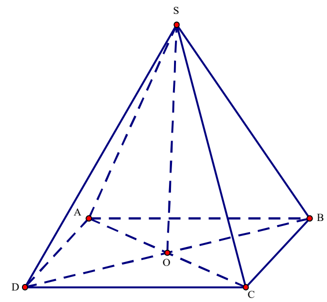
Chọn B

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $SC \perp (ABCD)$. **D.** $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có O là trung điểm của AC,BD

Mà $SA=SC,SB=SD\Rightarrow SO\perp AC,SO\perp BD$

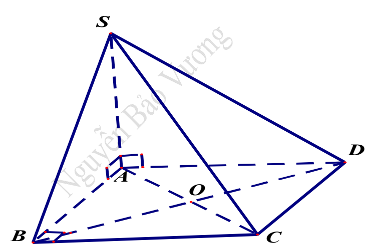
$\Rightarrow SO\perp\left(ABCD\right)$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $CD\perp(SBC)$. **B.** $SA\perp(ABC)$. **C.** $BC\perp(SAB)$. **D.** $BD\perp(SAC)$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết, ta có : $SA\perp(ABC)\Rightarrow$ B đúng.

Ta có : $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow$ C đúng.

Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow$ D đúng.

Do đó: A sai. Chọn **A.**

Nhận xét: Ta có cũng có thể giải như sau:

$\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)$

Mà (SCD) và (SAD) không song song hay

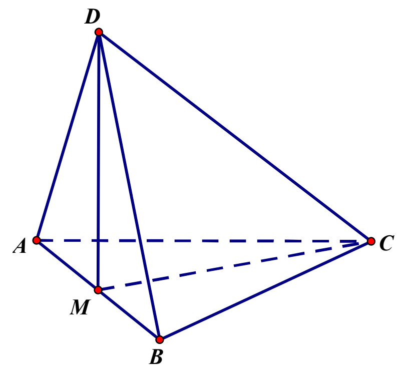
Trùng nhau nên $CD\perp(SCD)$ là sai. Chọn **A.**

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là hai tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $CM \perp (ABD)$. **B.** $AB \perp (MCD)$.

C. $AB \perp (BCD)$. **D.** $DM \perp (ABC)$.

Lời giải

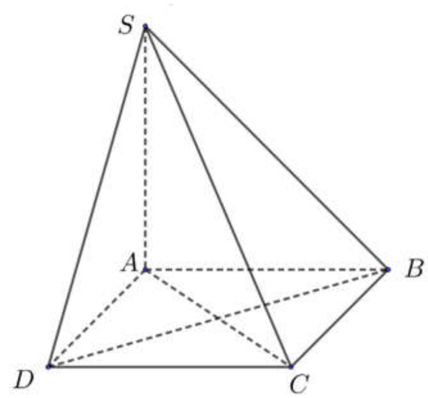


$$\left.\begin{matrix} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (CDM).$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $AC \perp (SBD)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $CD \perp (SAD)$.

Lời giải



Ta có:

$+ \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

$+ \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD).$

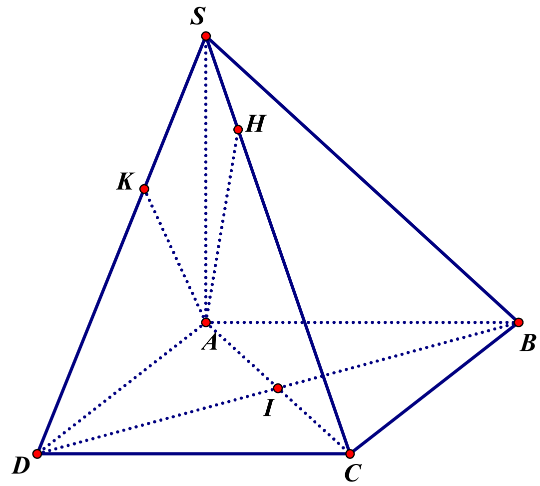
$+ \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$

Suy ra: đáp án B sai.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AH \perp (SCD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AK \perp (SCD)$. **D.** $BC \perp (SAC)$.

Lời giải



Có $\left.\begin{matrix} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

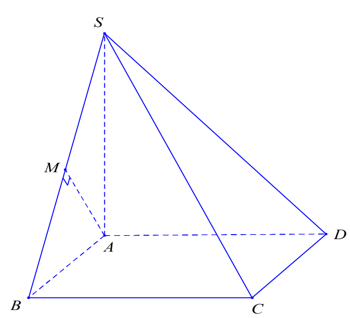
Có $\left.\begin{matrix} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK \perp (SCD)$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A trên SB. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AM \perp SD$. **B.** $AM \perp (SCD)$. **C.** $AM \perp CD$. **D.** $AM \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn D



Do $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông nên $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

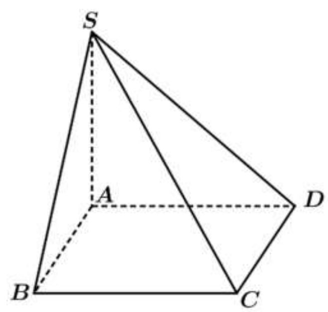
$\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ AM \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow AM \perp BC$; $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $BA\perp(SAD)$. **B.** $BA\perp(SAC)$. **C.** $BA\perp(SBC)$. **D.** $BA\perp(SCD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$BA\perp SA$ (do $SA\perp(ABCD)$)

$BA\perp AD$ (do $ABCD$ là hình vuông)

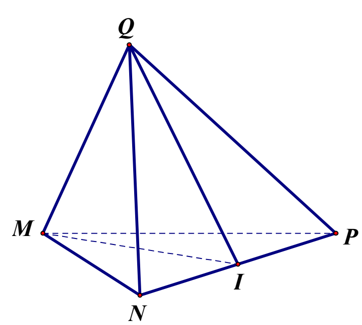
$\Rightarrow BA\perp(SAD)$.

Câu 15. Cho tứ diện $MNPQ$ có hai tam giác MNP và QNP là hai tam giác cân lần lượt tại M và Q. Góc giữa hai đường thẳng MQ và NP bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D



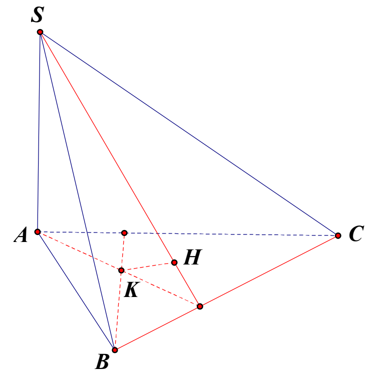
Gọi I là trung điểm cảu NP, ta có: $\begin{cases} NP\perp MI \\ NP\perp QI \end{cases} \rightarrow NP\perp(QIM)\rightarrow NP\perp QM$.

Câu 16. Cho hình chóp $SABC$ có $SA\perp(ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $BC\perp(SAH)$. **B.** $HK\perp(SBC)$.

C. $BC\perp(SAB)$. **D.** SH, AK và BC đồng quy.

Lời giải



Cách 1:

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$ nên A đúng suy ra C sai vì mặt phẳng (SAH) và mặt phẳng (SAB) là hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với BC suy ra $(SAH)//(SAB)$. Điều này không thể vì hai mặt phẳng này có SA chung.

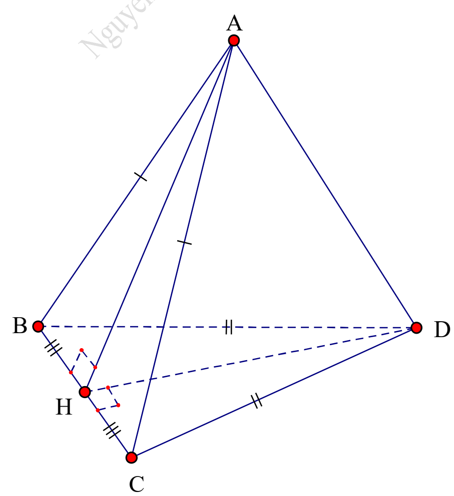
Cách 2:

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BA$ nên tam giác ABC vuông tại B, điều này giả thiết không cho suy ra C sai.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2,\ DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp AD$. **B.** $AC \perp BD$. **C.** $AB \perp (BCD)$. **D.** $DC \perp (ABC)$.

Lời giải



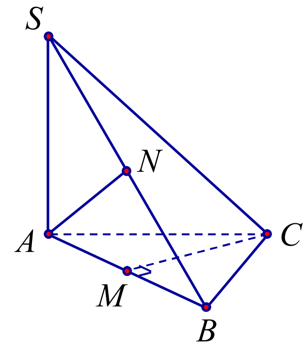
Theo đề bài ta có: $\Delta ABC,\ \Delta DBC$ lần lượt cân tại $A,\ D$. Gọi H là trung điểm của BC.

$$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ DH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD \subset (ADH) \\ BC \perp (ADH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD.$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. $CM \perp SB$. **B.** $CM \perp AN$. **C.** $MN \perp MC$. **D.** $AN \perp BC$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \\ SA, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB$

Mà $AN \subset (SAB) \Rightarrow CM \perp AN$

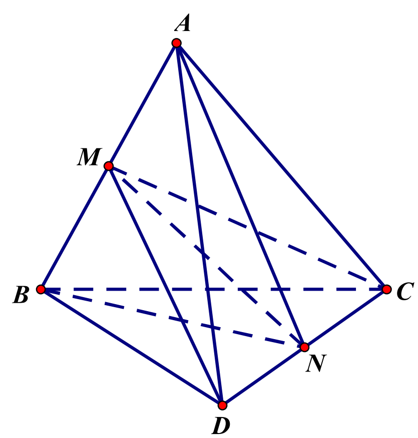
Mặt khác $\begin{cases} MN \parallel SA \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABC)$

Vì $\begin{cases} MN \subset (SAB) \\ CM \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \perp CM$.

Câu 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $MN \perp AB$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp CD$. **D.** $AB \perp CD$.

Lời giải



• ΔNAB cân tại N nên $MN \perp AB$.

• ΔMCD cân tại M nên $MN \perp CD$.

• $CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp AB$.

• Giả sử $MN \perp BD$

mà $MN \perp AB$. Suy ra $MN \perp (ABD)$ (Vô lí vì $ABCD$ là tứ diện đều)

Vậy phương án B sai.

Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá – giỏi

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O; Gọi I là trung điểm của SC; Xét các khẳng định sau:

1. $OI\perp(ABCD)$.

2. $BD\perp SC$.

3. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

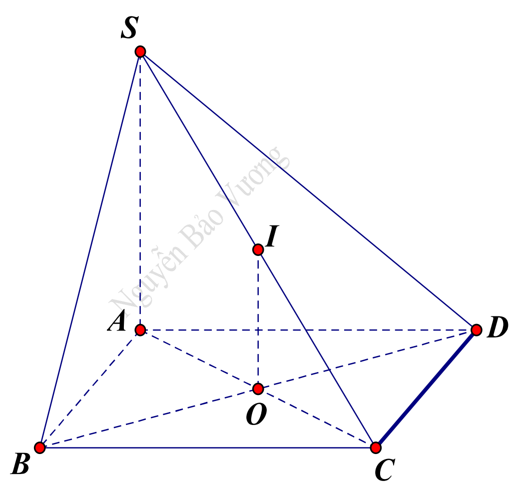
4. $SB=SC=SD$.

Trong bốn khẳng định trên, số khẳng định **sai** là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Xét khẳng định 1, Ta có: OI là đường trung bình trong tam giác SAC nên $OI//SA$, mà $SA\perp(ABCD)$ suy ra $OI\perp(ABCD)$. Khẳng định 1 đúng.

Xét khẳng định 2, Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp SC$. Khẳng định 2 đúng.

Xét khẳng định 3, Ta có: $\begin{cases}BD\cap(SAC)=O\\BD\perp(SAC)\end{cases}$, O là trung điểm của BD. Khẳng định 3 đúng.

Xét khẳng định 4, Ta có: $\begin{cases}SB^2=SA^2+AB^2\\SC^2=SA^2+AC^2\\SD^2=SA^2+AD^2\\AB\neq AC\end{cases}\Rightarrow SB=SD\neq SC$. Khẳng định 4 sai.

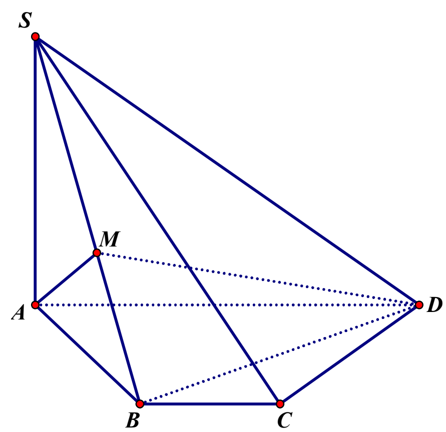
Vậy trong các khẳng định trên số khẳng định sai là 1.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD. Khi đó, tỉ số $\frac{SM}{SB}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Áp dụng tính chất nửa lục giác đều, ta có $BD \perp AB$.

Mặt khác, $BD \perp SA$. Suy ra $BD \perp (SAB)$, ta được $BD \perp AM$.

Kết hợp $AM \perp MD$, ta được $AM \perp (SBD)$. Suy ra $AM \perp SB$.

Khi đó $\frac{SM}{SB} = \frac{SM.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4}$.

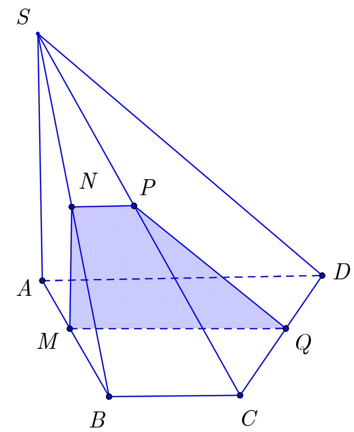
O trên mặt phẳng (ABC).

$AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B. SA vuông góc với đáy, M là một điểm trên cạnh AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA, AD. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) là

A. Hình bình hành. **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải



Do $(P)//SA$ và $M \in (SAB)\cap(P)$ nên $(P)\cap(SAB)=MN$ (với $N\in SB; MN//SA$).

Do $(P)//AD$ và $M \in (ABCD)\cap(P)$ nên $(P)\cap(ABCD)=MQ$ (với $Q\in BC; MQ//AD$).

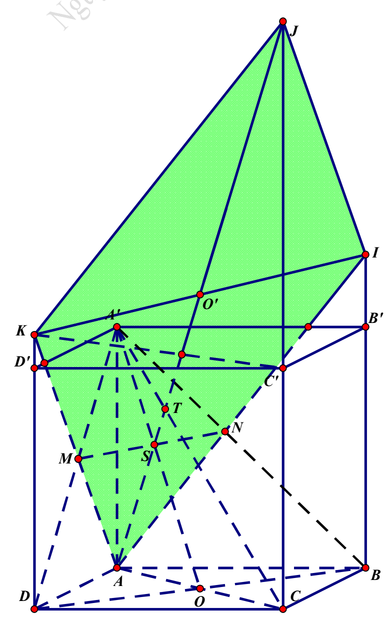
Do $(P)//AD$ và $N \in (SBC)\cap(P)$ nên $(P)\cap(SBC)=NP$ (với $P\in SC; NP//AD//BC$).

Vậy thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$.

Câu 23. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $AA'=3a$. Mặt phẳng qua A vuông góc với $A'C$ cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại I, J, K. Tính diện tích thiết diện $AIJK$

A. $\frac{2a^2\sqrt{11}}{3}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{3}$. **D.** $\frac{3a^2\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải



Dựng $AM \perp A'D$ ta có $AM \perp (A'DC) \Rightarrow AM \perp A'C$,

Tương tự, dựng $AN \perp A'B$ ta có $AN \perp (A'BC) \Rightarrow AN \perp A'C$.

Vậy mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là mặt phẳng (AMN).

Kéo dài $AM \cap DD' = \{K\}, AN \cap BB' = \{I\}$, và $AS \cap CC' = \{J\}$ với $\{S\} = MN \cap A'C$.

Thiết diện $AIJK$ là thiết diện cần tìm.

Dễ thấy $ABCD$ là hình chiếu vuông góc của $AIJK$ lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có $S_{ABCD} = S_{AIJK}.\cos\left((ABCD),(AIJK)\right)$.

Dễ thấy góc giữa hai mặt $(AIJK)$ và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường $A'A$ & $A'C$ và là góc $\widehat{AA'C}$.

Xét tam giác vuông $A'AC\left(\widehat{A}=1v\right)$ có $\cos\widehat{AA'C} = \dfrac{A'A}{A'C} = \dfrac{3a}{a\sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

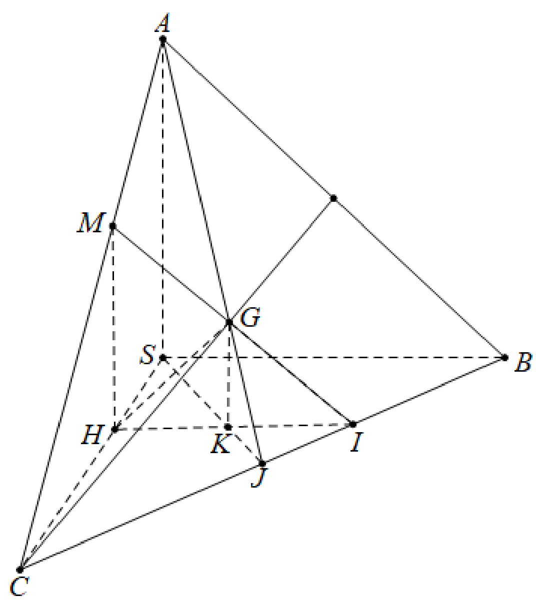
Vậy $S_{AIJK} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos\left((ABCD),(AIJK)\right)} \Rightarrow S_{AIJK} = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{3}$.

Câu 24. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$, các mặt bên là các tam giác vuông cân tại S. Gọi G là trọng tâm của ΔABC, (α) là mặt phẳng qua G vuông góc với SC. Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) bằng

A. $\dfrac{4}{9}a^2$. **B.** $\dfrac{2}{3}a^2$. **C.** $\dfrac{4}{3}a^2$. **D.** $\dfrac{2}{9}a^2$.

Lời giải

Chọn A



Xét ΔSBC vuông cân tại $S, BC = 2a$ ta có:

$SB^2 + SC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2SB^2 = 4a^2 \Leftrightarrow SB^2 = 2a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{2} = SA = SC$.

Gọi J là trung điểm của BC, trong (SJA) kẻ $GK // SA$ cắt SJ tại K.

Trong (SBC) kẻ đường thẳng qua K song song với SB cắt SC và CB lần lượt tại H và I.

Trong (SAC) kẻ $HM // SA$ cắt SC tại M.

Do các mặt bên của hình chóp $S.ABC$ là các tam giác vuông tại S nên ta có:

$\begin{cases} SA \perp SC \\ SA \perp SB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$ mà $GK // SA \Rightarrow GK \perp (SBC) \Rightarrow GK \perp SC$ (1).

Do $\begin{cases} SB \perp SC \\ IH // SB \end{cases} \Rightarrow IH \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2)$\Rightarrow$ $SC \perp (HMI)$. Vậy thiết diện là ΔHMI.

Ta có: $KG // SA; KJ // SB$ và do G là trọng tâm ΔABC nên $\frac{JG}{JA} = \frac{JK}{JS} = \frac{JI}{JB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác: $HI // SB; HM // SA$ nên ta có:

$$\frac{2}{3} = \frac{CI}{CB} = \frac{HI}{SB} \Rightarrow HI = \frac{2}{3}SB = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{CI}{CB} = \frac{CH}{CS} = \frac{HM}{SA} \Rightarrow HM = \frac{2}{3}SA = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Do $SB \perp ((SAC); HI // SB \Rightarrow HI \perp (SAC) \Rightarrow HI \perp MH \Rightarrow \Delta HMI$ vuông tại H.

Diện tích ΔHIM là: $S_{\Delta HIM} = \frac{1}{2}HM.HI = \frac{1}{2}.\left(\frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$.

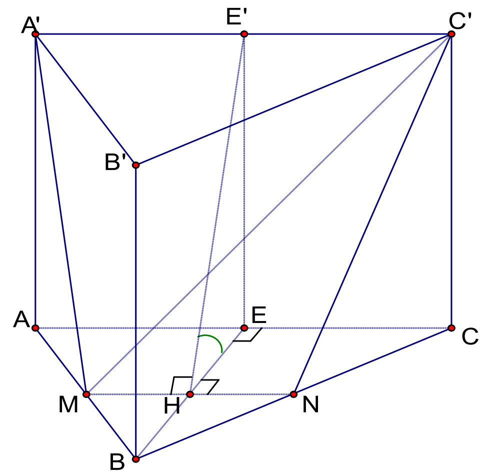
Câu 25. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Diện tích thiết diện cắt lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là

A. $\frac{7\sqrt{2}}{16}a^2$. **B.** $\frac{3\sqrt{35}}{16}a^2$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$. **D.** $\frac{9}{8}a^2$.

Lời giải

Chọn B

Hình vẽ minh họa



Gọi N là trung điểm BC. Kẻ $MN//AC \Rightarrow MN//A'C'$

Mặt phẳng $\left(A'C'M\right)$ cắt lăng trụ theo thiết diện là hình thang $A'C'NM$.

Gọi E,E' lần lượt là trung điểm AC và $A'C'$. Gọi H là giao điểm của MN và BE

Ta dễ dàng chứng minh $MN \perp \left(E'HE\right)$.

Ta có $\begin{cases}\left(A'C'NM\right)\cap\left(ABC\right)=MN\\ EH\perp MN\\ E'H\perp MN\end{cases}$. $\Rightarrow \widehat{\left(\left(A'C'NM\right),\left(ACNM\right)\right)}=\widehat{\left(HE,HE'\right)}=\widehat{E'HE}=\varphi$

Ta có $BE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HE=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. $E'H=\sqrt{E'E^2+EH^2}=\sqrt{2a^2+\dfrac{3a^2}{16}}=\dfrac{a\sqrt{35}}{4}$

Từ đó $\cos\varphi=\dfrac{HE}{HE'}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{4}{a\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$

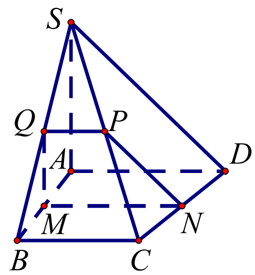
Diện tích hình thang cân $S_{ACNM}=\dfrac{\left(MN+AC\right).HE}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{2}+a\right)\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{2}=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

Ta có $S_{ACNM}=S_{A'C'NM}.\cos\varphi$, $\Rightarrow S_{A'C'NM}=\dfrac{S_{ACNM}}{\cos\varphi}=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}.\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3a^2\sqrt{35}}{16}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD=8$, đáy nhỏ $BC=6$. SA vuông góc với đáy, $SA=6$. Gọi M là trung điểm của AB. $\left(P\right)$ là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $\left(P\right)$ có diện tích bằng:

A. 20. **B.** 15. **C.** 30. **D.** 16.

Lời giải



Ta có $\left.\begin{array}{l} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SAD)$. Mà (P) qua M và vuông góc với AB nên $(P)//(SAD)$

$\Rightarrow (P)//SA$, $(P)//AD$ và $(P)//SD$.

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $MQ//SA$ với $Q \in SB$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $MN//AD$ với $N \in CD$.

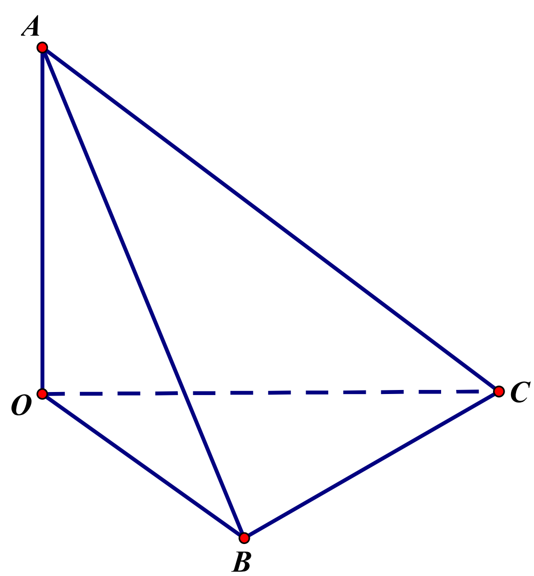
Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $NP//SD$ với $P \in SC$.

Vì M là trung điểm của AB nên N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, SC, SB. Do đó thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại Q và M.

Ta có $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(8+6) = 7$, $MQ = \frac{1}{2}SA = 3$ và $PQ = \frac{1}{2}BC = 3$.

Vậy diện tích của thiết diện là : $S_{MNPQ} = \frac{(MN + PQ).QM}{2} = \frac{(7+3).3}{2} = 15$.

Câu 27. Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2\alpha).(3 + \cot^2\beta).(3 + \cot^2\gamma)$ là

A. Số khác. **B.** $48\sqrt{3}$. **C.** 48. **D.** 125.

Lời giải

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, vì tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta có $OH\perp(ABC)$ và $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Ta có $\alpha=\widehat{(OA;(ABC))}=\widehat{OAH}$, $\beta=\widehat{(OB;(ABC))}=\widehat{OBH}$, $\gamma=\widehat{(OC;(ABC))}=\widehat{OCH}$.

Nên $\sin\alpha=\frac{OH}{OA}$, $\sin\beta=\frac{OH}{OB}$, $\sin\gamma=\frac{OH}{OC}$.

Đặt $a=OA$, $b=OB$, $c=OC$, $h=OH$ thì $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ và

$$M=(3+\cot^2\alpha).(3+\cot^2\beta).(3+\cot^2\gamma)=\left(2+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right).\left(2+\frac{1}{\sin^2\beta}\right).\left(2+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)$$

$$=\left(2+\frac{a^2}{h^2}\right).\left(2+\frac{b^2}{h^2}\right).\left(2+\frac{c^2}{h^2}\right)=8+4(a^2+b^2+c^2).\frac{1}{h^2}+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\frac{1}{h^4}+a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}.$$

Ta có: $(a^2+b^2+c^2).\frac{1}{h^2}=(a^2+b^2+c^2).\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 3\sqrt[3]{a^2.b^2.c^2}.3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}}=9$.

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\frac{1}{h^4}=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2.b^2c^2.c^2a^2}.\left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}\right)}\right)^2=3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}.9\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}}=27.$$

$$a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}=a^2b^2c^2.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^3\geq a^2b^2c^2.\left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}\right)}\right)^3=27.$$

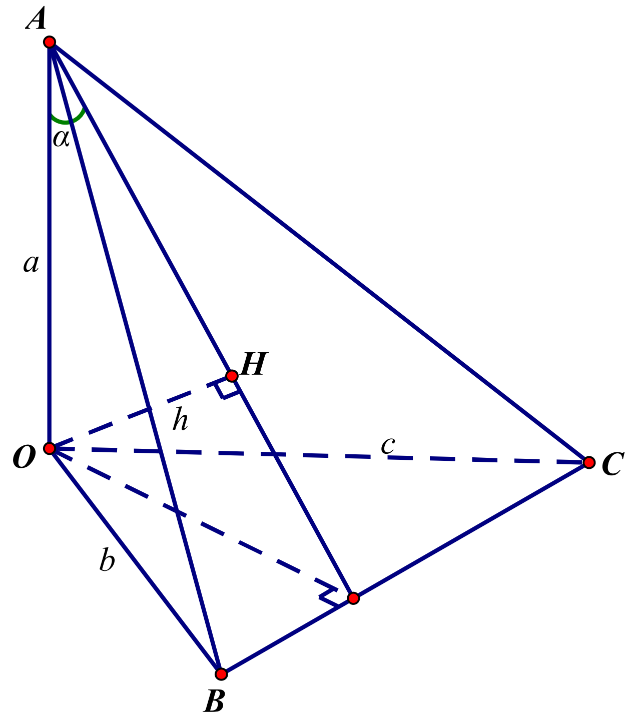
Do đó:

$$M=8+4(a^2+b^2+c^2).\frac{1}{h^2}+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\frac{1}{h^4}+a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}$$

$$\geq 8+4.9+2.27+27=125.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hay $OA=OB=OC$.

Vậy $\min M=125$.


A
α
a
H
h
O
c
C
b
B