

## BÀI 22. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

- CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

## PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

## 1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Góc giữa hai đường thẳng  $m$  và  $n$  trong không gian, kí hiệu  $(m, n)$ , là góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với  $m$  và  $n$ .

**Chú ý**

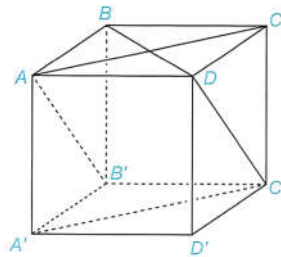
- Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ , ta có thể lấy một điểm  $O$  thuộc đường thẳng  $a$  và qua đó kẻ đường thẳng  $b'$  song song với  $b$ . Khi đó  $(a, b) = (a, b')$ .

- Với hai đường thẳng  $a, b$  bất kì:  $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$ .

Nếu  $a$  song song hoặc trùng với  $a'$  và  $b$  song song hoặc trùng với  $b'$  thì  $(a, b)$  và  $(a', b')$  có mối quan hệ gì?

**Ví dụ 1.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có các mặt là các hình vuông. Tính các góc  $(AA', CD), (A'C', BD), (AC, DC')$ .

**Giải.** (H.7.3)



Hình 7.3

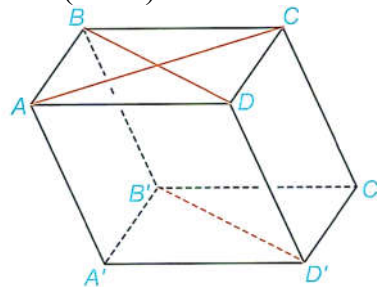
Vì  $CD \parallel AB$  nên  $(AA', CD) = (AA', AB) = 90^\circ$ . Tứ giác  $ACC'A'$  có các cặp cạnh đối bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó,  $A'C' \parallel AC$ . Vậy  $(A'C', BD) = (AC, BD) = 90^\circ$ .

Tương tự,  $DC' \parallel AB'$ . Vậy  $(AC, DC') = (AC, AB')$ . Tam giác  $AB'C$  có ba cạnh bằng nhau (vì là các đường chéo của các hình vuông có độ dài cạnh bằng nhau) nên nó là một tam giác đều. Từ đó,  $(AC, DC') = (AC, AB') = 60^\circ$ .

## 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Hai đường thẳng  $a, b$  được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu  $a \perp b$ , nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .

**Ví dụ 2.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  (H.7.6).



Hình 7.6

- Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng  $AC$  và  $B'D'$ .
- Chứng minh rằng  $AC$  và  $B'D'$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $ABCD$  là một hình thoi.

**Giải**

a) Hai đường thẳng  $AC$  và  $B'D'$  lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song  $(ABCD)$  và  $(A'B'C'D')$  nên chúng không có điểm chung, tức là chúng không thể trùng nhau hoặc cắt nhau.

Tứ giác  $BDD'B'$  có hai cạnh đối  $BB'$  và  $DD'$  song song và bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó  $B'D'$  song song với  $BD$ . Mặt khác,  $BD$  không song song với  $AC$  nên  $B'D'$  không song song với  $AC$ .

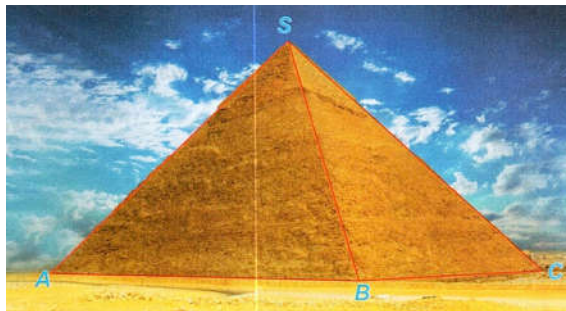
Từ những điều trên suy ra  $AC$  và  $B'D'$  chéo nhau.

b) Do  $B'D'$  song song với  $BD$  nên  $(AC, B'D') = (AC, BD)$ . Do đó,  $AC$  và  $B'D'$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau. Do  $ABCD$  là hình bình hành nên  $AC$  vuông góc với  $BD$  khi và chỉ khi  $ABCD$  là hình thoi.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

### Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng

**Câu 1.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Kim tự tháp Kheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219m (kích thước hiện nay). (Theo britannica.com). Tính (gần đúng) góc tạo bởi cạnh bên  $SC$  và cạnh đáy  $AB$  của kim tự tháp (H.7.4).



Hình 7.4

**Câu 2.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình lăng trụ  $ABC \cdot A'B'C'$  có các đáy là các tam giác đều. Tính góc  $(AB, B'C')$ .

**Câu 3.** Cho hình lăng trụ  $ABC \cdot A'B'C'$  có tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc hai đoạn thẳng  $AA'$  và  $BB'$  thỏa mãn  $MN \parallel AB$ , các điểm  $P, Q$  lần lượt thuộc hai đoạn thẳng  $AA'$  và  $CC'$  ( $P$  khác  $M$ ) thỏa mãn  $PQ \parallel AC$  (Hình 2). Tính các góc sau:

- a)  $(AB, AC)$ ;
- b)  $(AB, B'C')$ ;
- c)  $(MN, PQ)$ .

**Câu 4.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$ , biết  $MN = a\sqrt{3}$  và  $AD = BC = 2a$ .

**Câu 5.** Cho tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi  $M, N, K$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC, BC$  và  $AB$ . Tính góc giữa đường thẳng  $MN$  và  $BD$ ; góc giữa đường thẳng  $KN$  và  $MD$ .

**Câu 6.** Tháp Phước Duyên ở Chùa Thiên Mụ (Huế) cao bảy tầng, sàn của mỗi tầng đều là hình bát giác đều. Hãy tính góc giữa hai cạnh  $AB$  và  $CD$  được thể hiện trên hình sau:



**Câu 7.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành, tam giác  $SAD$  là tam giác đều và  $M$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $BC$  và  $SA$ ;  $BC$  và  $SM$ .

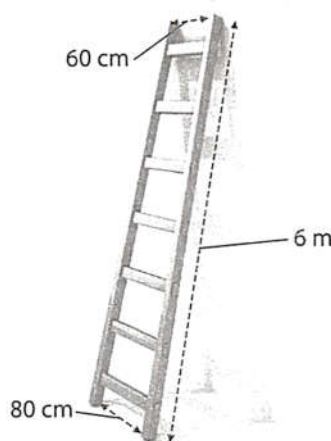
**Câu 8.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh bằng nhau và góc  $A'AD$  bằng  $120^\circ$ . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:  $A'C'$  và  $BD$ ;  $AD$  và  $BB'$ ;  $A'D$  và  $BB'$ .

**Câu 9.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông tâm  $O$  và tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $SA, AB$ .

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:  $MN$  và  $SD$ ;  $MO$  và  $SB$ .

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng  $SN$  và  $BC$ .

**Câu 10.** Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao  $6m$ , hai chân thang cách nhau  $80cm$ , hai ngọn thang cách nhau  $60cm$ . Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



**Câu 11.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ ,  $SA \perp BC$ .

Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SC$ . Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a)  $IJ$  và  $BD$ ;

b)  $SD$  và  $BC$ .

**Câu 12.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = 2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$ . Cho biết  $MN = a\sqrt{3}$ , tính góc giữa  $AB$  và  $CD$ .

**Câu 13.** Cho tứ diện đều  $ABCD, M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính góc giữa  $AB$  và  $DM$ .

**Câu 14.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ ,  $SA \perp AC$ ,

$SA \perp BC$ ,  $\widehat{BAD} = 120^\circ$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ . Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

- a)  $SD$  và  $BC$ .
- b)  $MN$  và  $SC$ .

**Câu 15.** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $M, N, I, J$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SD, SC$  và  $BC$ . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

- a)  $IJ$  và  $DC$ ;
- b)  $MN$  và  $IJ$ .

**Câu 16.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AB = AC$ ,  $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $BC$ .

**Câu 17.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $A'C'$  và  $BD$ .

**Câu 18.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $BA'$  và  $CD$ .

**Câu 19.** Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Côsin của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $DM$  bằng?

**Câu 20.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AA'$  và  $A'B'$ . Tính số đo góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $BD$ .

**Câu 21.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC \cdot A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân  $AB = AC = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{2}$  và  $AA' \perp AB, AA' \perp AC$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC$ .

**Câu 22.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc với nhau và  $SA = SB = SC = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $SM$  và  $BC$ .

**Câu 23.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'D'$ ?

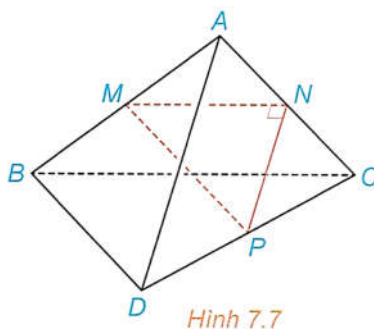
**Câu 24.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB$  vuông góc với  $(BCD)$ . Biết tam giác  $BCD$  vuông tại  $C$  và  $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AD$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CE$ ?

**Câu 25.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với  $AB$  và  $AD, SA = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ . Tính góc giữa  $AM$  và  $BD$ .

**Câu 26.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $BC$ . Số đo của góc  $(IJ, CD)$  bằng?

## Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

**Câu 27. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$  và một điểm  $A$  nằm ngoài mặt phẳng  $(MNP)$ . Lần lượt lấy các điểm  $B, C, D$  sao cho  $M, N, P$  tương ứng là trung điểm của  $AB, AC, CD$  (H.7.7).



Hình 7.7

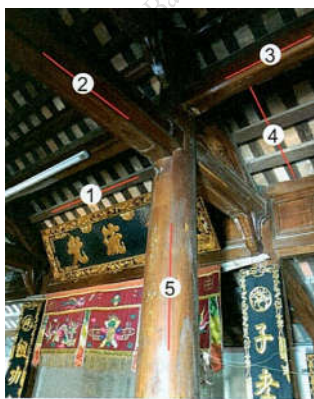
Chứng minh rằng  $AD$  và  $BC$  vuông góc với nhau và chéo nhau.

**Câu 28. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng tứ diện  $ACB'D'$  có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

**Câu 29. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $\widehat{CBD} = 90^\circ$ .

- Gọi  $M, N$  tương ứng là trung điểm của  $AB, AD$ . Chứng minh rằng  $MN$  vuông góc với  $BC$ .
- Gọi  $G, K$  tương ứng là trọng tâm của các tam giác  $ABC, ACD$ . Chứng minh rằng  $GK$  vuông góc với  $BC$ .

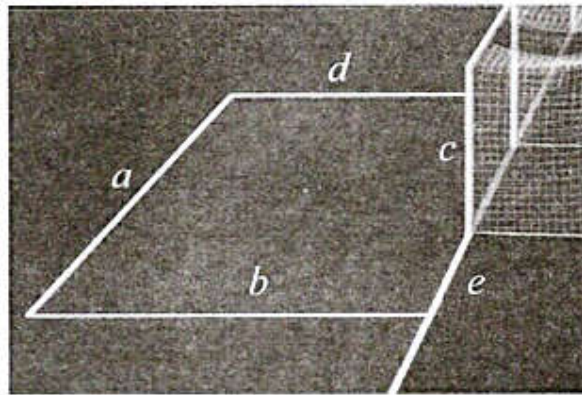
**Câu 30. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện: hoành, quá giang, xà cái, rui, cột tương ứng được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 như trong Hình 7.8, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?



Hình 7.8

**Câu 31.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành,  $SAB$  là tam giác cân tại  $S$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$  (Hình 3). Chứng minh rằng  $SM \perp CD$ .

**Câu 32.** Hình 5 gợi nên hình ảnh một số cặp đường thẳng vuông góc với nhau. Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng vuông góc với nhau.



Hình 5

**Câu 33.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông.

- a) Chứng minh rằng  $AB \perp A'D'$  và  $AC \perp B'D'$ .
- b) Tính góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'B'$ .

**Câu 34.** Cho hình lăng trụ  $MNPQ \cdot M'N'P'Q'$  có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng  $M'N \perp P'Q$ .

**Câu 35.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $O$  và tam giác  $SAC$  vuông tại  $S$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $SB$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $OM$  vuông góc với đường thẳng  $SB$ .

**Câu 36.** Cho tứ diện  $ABCD$ , gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ . Biết  $MN = a\sqrt{3}$ ;  $AB = 2\sqrt{2}a$  và  $CD = 2a$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AB$  vuông góc với đường thẳng  $CD$ .

**Câu 37.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $a$  và các cạnh bên đều bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, SD$ . Chứng minh rằng  $MN \perp SC$ .

**Câu 38.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD, AC = BD, AD = BC$ .

- a) Chứng minh đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.
- b) Chứng minh hai đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với nhau.

**Câu 39.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCD$ . Chứng minh hai đường thẳng  $OA$  và  $CD$  vuông góc với nhau.

**Câu 40.** Cho tứ diện  $ABDC$  có  $AB = AC$  và  $DB = DC$ . Chứng minh:  $BC \perp AD$ .

**Câu 41.** Trong hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh:

- a)  $A'C' \perp BD$ .
- b)  $A'B \perp DC'$ .
- c)  $BC' \perp A'D$ .

### PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

#### 1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

**Câu 1.** Trong không gian, cho đường thẳng  $d$  và điểm  $O$ . Qua  $O$  có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng  $d$ ?

- A. 3.                      B. vô số.                      C. 1.                      D. 2.



**Câu 2.** Trong không gian cho trước điểm  $M$  và đường thẳng  $\Delta$ . Các đường thẳng đi qua  $M$  và vuông góc với  $\Delta$  thì:

- A. vuông góc với nhau. B. song song với nhau.  
C. cùng vuông góc với một mặt phẳng. D. cùng thuộc một mặt phẳng.

**Câu 3.** Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì vuông góc với đường thẳng còn lại.  
B. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.  
C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.  
D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

**Câu 4.** Trong không gian, cho 3 đường thẳng  $a, b, c$  phân biệt và mặt phẳng  $(P)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu  $a \perp c$  và  $(P) \perp c$  thì  $a // (P)$ .  
B. Nếu  $a \perp c$  và  $b \perp c$  thì  $a // b$ .  
C. Nếu  $a \perp b$  và  $b \perp c$  thì  $a \perp c$ .  
D. Nếu  $a \perp b$  thì  $a$  và  $b$  cắt nhau hoặc chéo nhau.

**Câu 5.** Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. Qua một điểm  $O$  cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.  
B. Qua một điểm  $O$  cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng  $\Delta$  cho trước.  
C. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.  
D. Qua một điểm  $O$  cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

**Câu 6.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.  
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.  
C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.  
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

**Câu 7.** Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.  
B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.  
C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.  
D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

**Câu 8.** Trong hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.  $BB' \perp BD$ . B.  $A'C' \perp BD$ . C.  $A'B \perp DC'$ . D.  $BC' \perp A'D$ .

**Câu 9.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng  $BC'$ ?

- A.  $A'D$ . B.  $AC$ . C.  $BB'$ . D.  $AD'$ .

**Câu 10.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi tâm  $O$  và  $SA = SC$ ,  $SB = SD$ . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- A.  $AC \perp SD$ . B.  $BD \perp AC$ . C.  $BD \perp SA$ . D.  $AC \perp SA$ .

**Câu 11.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'B$ .

- A.  $60^\circ$  B.  $45^\circ$  C.  $75^\circ$  D.  $90^\circ$

**Câu 12.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $BA'$  và  $CD$  bằng:

- A.  $45^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $30^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 13.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng  $a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$ .

- A.  $45^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $\arctan 2$ .

**Câu 14.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $A'C'$  và  $BD$  bằng.

- A.  $60^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $45^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 15.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , góc giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $B'C$  là

- A.  $90^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $30^\circ$ . D.  $45^\circ$ .

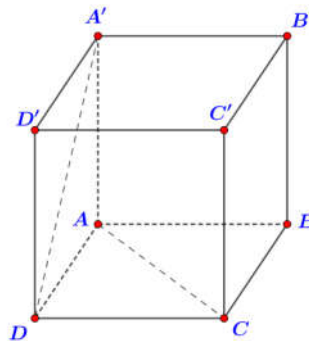
**Câu 16.** Cho hình lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 2. Gọi  $C_1$  là trung điểm của  $CC'$ . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $BC_1$  và  $A'B'$ .

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ . B.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ . D.  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ .

**Câu 17.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $BC$ . Số đo của góc  $(IJ, CD)$  bằng:

- A.  $30^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $45^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 18.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'D$  bằng



- A.  $45^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 19.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$  và  $N$  là trung điểm của  $A'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $B'M$  và  $C'N$  bằng

- A.  $30^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 20.** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA = OB = OC = a$ ;  $OA, OB, OC$  vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $OI$ .

- A.  $45^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $90^\circ$ . D.  $60^\circ$ .



**Câu 21.** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình chữ nhật và  $\widehat{CAD} = 40^\circ$ . Số đo góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $B'D'$  là

- A.  $40^\circ$ .                      B.  $20^\circ$ .                      C.  $50^\circ$ .                      D.  $80^\circ$ .

**Câu 22.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $BB'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $IJ$  bằng

- A.  $45^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .

**Câu 23.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $DA'$  bằng

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .

**Câu 24.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $A'C'$ .

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $90^\circ$ .

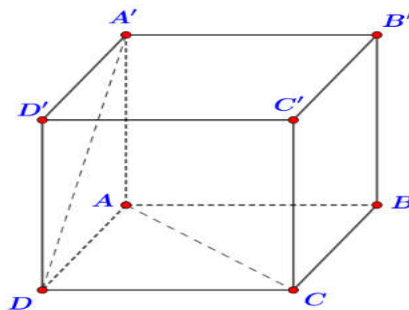
**Câu 25.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $CD'$  bằng

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $90^\circ$ .

**Câu 26.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$  và  $SA \perp BC$ . Góc giữa hai đường thẳng  $SD$  và  $BC$  bằng

- A.  $90^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Câu 27.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $A'D$  bằng



- A.  $30^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $45^\circ$ .

**Câu 28.** Cho hình lăng trụ đều  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Góc giữa hai đường thẳng  $BC'$  và  $B'D'$  bằng

- A.  $30^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $90^\circ$ .

**Câu 29.** Cho lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 1$ ,  $AA' = \sqrt{2}$ . Tính góc giữa  $AB'$  và  $BC'$

- A.  $30^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $120^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .

## 2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

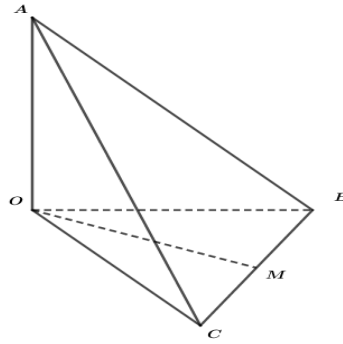
**Câu 30.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = 2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Biết  $MN = \sqrt{3}a$ , góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng

- A.  $45^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Câu 31.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$  và  $AA' = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  bằng

- A.  $90^\circ$ .                      B.  $30^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $45^\circ$ .

**Câu 32.** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $OA = OB = OC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng  $OM$  và  $AB$  bằng

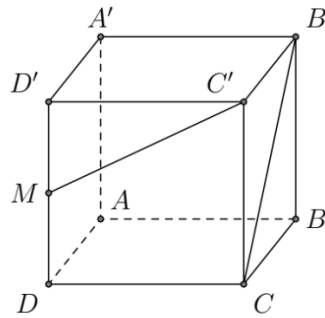


- A.  $90^\circ$ .      B.  $30^\circ$ .      C.  $60^\circ$ .      D.  $45^\circ$ .

**Câu 33.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ ; gọi  $M$  là trung điểm của  $B'C'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $BC'$  bằng

- A.  $45^\circ$ .      B.  $90^\circ$ .      C.  $30^\circ$ .      D.  $60^\circ$ .

**Câu 34.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $DD'$  (Tham khảo hình vẽ). Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $B'C$  và  $C'M$



- A.  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .      B.  $\frac{1}{3}$ .      C.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .      D.  $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ .

**Câu 35.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, AD$ . Giả sử

$AB = CD = a$  và  $PQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Số đo góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  là

- A.  $90^\circ$ .      B.  $45^\circ$ .      C.  $30^\circ$ .      D.  $60^\circ$ .

**Câu 36.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$ ,  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  ta được kết quả:

- A.  $90^\circ$ .      B.  $30^\circ$ .      C.  $60^\circ$ .      D.  $45^\circ$ .

**Câu 37.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = 2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Biết  $MN = a\sqrt{3}$ . Tính góc giữa  $AB$  và  $CD$ .

- A.  $45^\circ$ .      B.  $30^\circ$ .      C.  $90^\circ$ .      D.  $60^\circ$ .

**Câu 38.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$  trung điểm các cạnh  $CD$ . cosin của góc giữa  $AC$  và  $C'M$  là

- A.  $0$ .      B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      C.  $\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**Câu 39.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a = 4\sqrt{2}\text{cm}$ , cạnh bên  $SC$  vuông góc với đáy và  $SC = 2\text{cm}$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ . Góc giữa hai đường thẳng  $SN$  và  $CM$  là

A.  $30^\circ$ .B.  $60^\circ$ .C.  $45^\circ$ .D.  $90^\circ$ .

**Câu 40.** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.MNP$  có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi  $I$  là trung điểm cạnh  $AC$ . Cosin của góc giữa hai đường thẳng  $NC$  và  $IB$  bằng

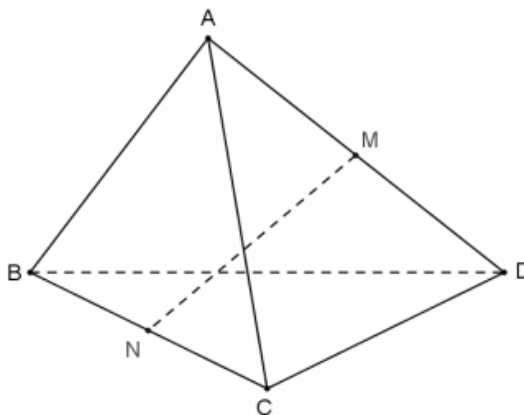
A.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

B.  $\frac{\sqrt{10}}{4}$ .

C.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .

D.  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

**Câu 41.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Xác định độ dài đoạn thẳng  $MN$  để góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $MN$  bằng  $30^\circ$ .



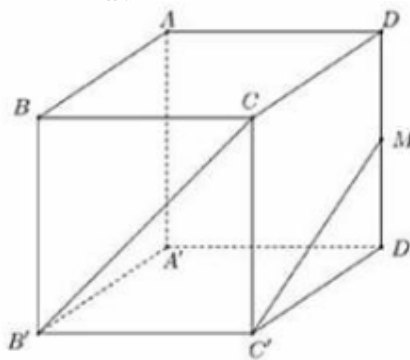
A.  $MN = \frac{a}{2}$ .

B.  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

D.  $MN = \frac{a}{4}$ .

**Câu 42.** Cho hình lập phương trình  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $DD'$  (tham khảo hình vẽ dưới đây). Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $B'C$  và  $C'M$ .



A.  $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ .

B.  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .

C.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 43.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = 3a, BD = 4a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $BC$ . Biết  $AC$  vuông góc  $BD$ . Tính  $MN$ .

A.  $MN = \frac{5a}{2}$ .

B.  $MN = \frac{7a}{2}$ .

C.  $MN = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

D.  $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 44.** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình chữ nhật và  $\widehat{CAD} = 40^\circ$ . Số đo góc giữa hai đường thẳng  $AC, B'D'$  là

A.  $40^\circ$ B.  $20^\circ$ .C.  $50^\circ$ .D.  $80^\circ$ .

**Câu 45.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Góc giữa hai đường thẳng  $CD'$  và  $A'C'$  bằng.

- A.  $30^\circ$ . B.  $90^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $45^\circ$ .

**Câu 46.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD = 1$ ;  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ ;  $\widehat{BAD} = 90^\circ$ ;  $\widehat{DAC} = 120^\circ$ . Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng  $AG$  và  $CD$ , trong đó  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ .

- A.  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ . B.  $\frac{1}{3}$ . C.  $\frac{1}{6}$ . D.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 47.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $4a$ , lấy  $H, K$  lần lượt trên các cạnh  $AB, AD$  sao cho  $BH = 3HA, AK = 3KD$ . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  tại  $H$  lấy điểm  $S$  sao cho  $\widehat{SBH} = 30^\circ$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $CH$  và  $BK$ . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $SE$  và  $BC$ .

- A.  $\frac{28}{5\sqrt{39}}$ . B.  $\frac{18}{5\sqrt{39}}$ . C.  $\frac{36}{5\sqrt{39}}$ . D.  $\frac{9}{5\sqrt{39}}$ .

**Câu 48.** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $SD$ . Số đo của góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $SC$  là

- A.  $45^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $30^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 49.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, C'D'$ . Xác định góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $AP$ .

- A.  $60^\circ$ . B.  $90^\circ$ . C.  $30^\circ$ . D.  $45^\circ$ .

**Câu 50.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $SB$ . Góc giữa  $AM$  và  $BD$  là

- A.  $60^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $90^\circ$ . D.  $45^\circ$ .

**Câu 51.** Cho tứ diện đều  $ABCD$ ,  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính giá trị của  $\cos(\widehat{AB, DM})$ .

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . B.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ . C.  $\frac{1}{2}$ . D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 52.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, C'D'$ . Xác định góc giữa  $MN$  và  $AP$ .

- A.  $60^\circ$ . B.  $30^\circ$ . C.  $90^\circ$ . D.  $45^\circ$ .

**Câu 53.** Cho tứ diện  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$ ;  $BC = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng

- A.  $0^\circ$ . B.  $120^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 54.** Cho lăng trụ đều  $ABC.DEF$  có cạnh đáy bằng  $a$ , chiều cao bằng  $2a$ . Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng  $AC$  và  $BF$ .

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{10}$ . B.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ . C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . D.  $\frac{\sqrt{3}}{10}$ .

**Câu 55.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $DM$ ?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . B.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ . C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 56.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau, biết  $AB = AC = AD = 1$ . Số đo góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng

- A.  $45^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $30^\circ$ . D.  $90^\circ$ .

**Câu 57.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = a$ ,  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ . Tính  $\cos$  của góc tạo bởi hai đường thẳng  $SC$  và  $BD$ .

- A.  $\sqrt{\frac{3}{10}}$ . B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . C.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$ . D.  $\frac{\sqrt{3}}{10}$ .

**Câu 58.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = 2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AD$  và  $BC$ . Biết  $MN = a\sqrt{3}$ , góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng.

- A.  $45^\circ$ . B.  $90^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $30^\circ$ .

**Câu 59.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$  và tam giác  $ABC$  vuông tại

$B$ ,  $SA = a, AB = a, BC = a\sqrt{2}$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ .  $\cos$  của góc giữa đường thẳng  $AI$  và  $SC$  là?

- A.  $-\sqrt{\frac{2}{3}}$  B.  $\frac{2}{3}$  C.  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  D.  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

**Câu 60.** Cho tứ diện  $ABCD$  gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Biết  $AB = CD = a$ ,  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

- A.  $30^\circ$ . B.  $90^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $120^\circ$ .

**Câu 61.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$ . Biết  $AB = CD = a$  và  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng

- A.  $30^\circ$ . B.  $90^\circ$ . C.  $120^\circ$ . D.  $60^\circ$ .

**Câu 62.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với

$AB = a; AD = a\sqrt{2}; SA = 2a; SA \perp (ABCD)$ . Tính  $\cos$  góc giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $AC$ .

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . B.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ . C.  $\frac{1}{\sqrt{15}}$ . D.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**Câu 63.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $AD'$ .

- A.  $90^\circ$ . B.  $60^\circ$ . C.  $45^\circ$ . D.  $30^\circ$ .