

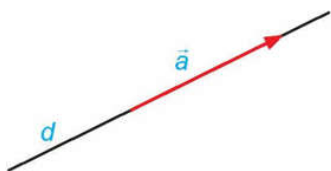
CHUYÊN ĐỀ 8. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

• Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** - <https://www.nbv.edu.vn/>

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

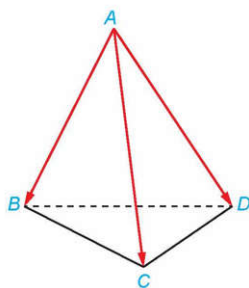
1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Vector trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- Độ dài của vector trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó.
- Chú ý.** Tương tự như vector trong mặt phẳng, đối với vector trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:
 - Vector có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là \overrightarrow{AB} .
 - Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vector thì vector còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
 - Độ dài của vector \overrightarrow{AB} được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vector \vec{a} được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
 - Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vector



được gọi là giá của vector đó.

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1.



- a) Có bao nhiêu vector có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?
- b) Trong các vector tìm được ở câu a, những vector nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) ?
- c) Tính độ dài của các vector tìm được ở câu a.

Giải

- a) Có ba vector là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và \overrightarrow{AD} .
- b) Trong ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và \overrightarrow{AD} chỉ có hai vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) .
- c) Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$.

Tương tự như trường hợp của vector trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vector trong không gian:

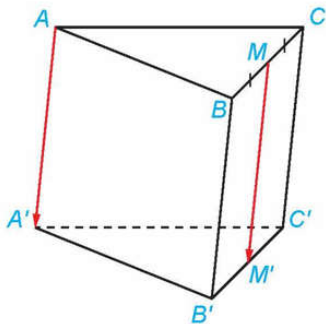
- Hai vector được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vector cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vector \vec{a} và \vec{b} được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý. Tương tự như vector trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vector trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vector \vec{a} cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Các vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ gọi là các vector-không.

- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.



a) Trong ba vectơ \overrightarrow{BC} , $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

Giải

a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và \overrightarrow{BC} không cùng phương. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và \overrightarrow{BC} không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA' \parallel CC'$ và $AA' = CC'$. Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

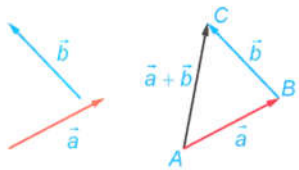
b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM' \parallel BB'$ và $MM' = BB'$. Hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' \parallel BB'$ và $AA' = BB'$, suy ra $MM' \parallel AA'$ và $MM' = AA'$. Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ \overrightarrow{AC} được gọi là tổng của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} , kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.

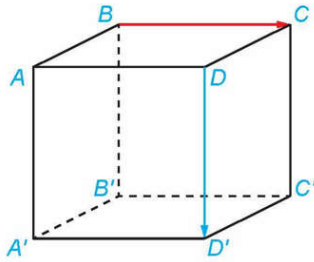


Nhận xét. Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:

- Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;

- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 3: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}$.

**Giải**

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Do đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'}$.

Tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông nên $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{2}$, suy ra $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}| = \sqrt{2}$.

Chú ý. Tương tự như phép cộng vector trong mặt phẳng, phép cộng vector trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: Nếu \vec{a} và \vec{b} là hai vector bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

- Tính chất kết hợp: Nếu \vec{a}, \vec{b} và \vec{c} là ba vector bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

- Tính chất cộng với vector $\vec{0}$: Nếu \vec{a} là một vector bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vector trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vector \vec{a}, \vec{b} và \vec{c} là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vector trong không gian.

Ví dụ 4: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

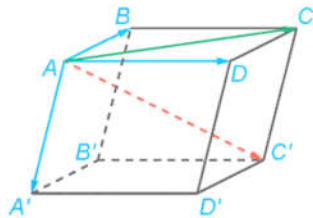
Giải

Theo quy tắc ba điểm trong không gian, ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Từ đó lần lượt áp dụng tính chất của phép cộng vector trong không gian, ta được:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Quy tắc hình hộp.



Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Giải

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vector trong không gian

Trong không gian, vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector \vec{a} được gọi là vector đối của vector \vec{a} , kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý

- Hai vector là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

- Vector \overrightarrow{BA} là một vector đối của vector \overrightarrow{AB} .

- Vector $\vec{0}$ được coi là vector đối của chính nó.

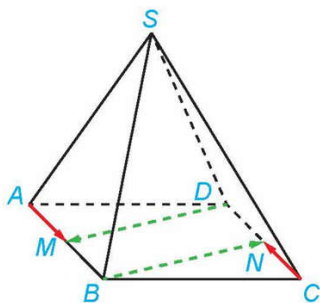
Tương tự như hiệu của hai vector trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vector trong không gian:

Vector $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vector \vec{a} và \vec{b} và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vector được gọi là phép trừ vector.

Nhận xét. Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh rằng:



a) \vec{AM} và \vec{CN} là hai vector đối nhau;

b) $\vec{SC} - \vec{AM} - \vec{AN} = \vec{SA}$.

Giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB \parallel CD$, suy ra $AM = CN$ và $AM \parallel CN$. Hai vector \vec{AM} và \vec{CN} có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vector đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\vec{CN} = -\vec{AM}$.

Suy ra $\vec{SC} - \vec{AM} - \vec{AN} = \vec{SC} + \vec{CN} - \vec{AN} = \vec{SN} - \vec{AN} = \vec{SN} + \vec{NA} = \vec{SA}$.

3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

Tương tự như tích của một số với một vector trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về tích của một số với một vector trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

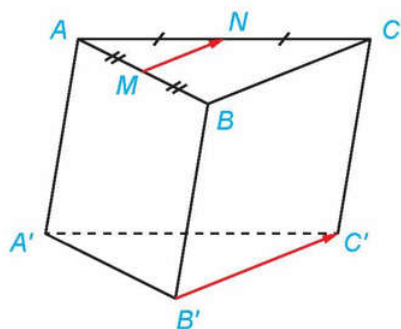
- Cùng hướng với vector \vec{a} nếu $k > 0$; ngược hướng với vector \vec{a} nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vector được gọi là phép nhân một số với một vector.

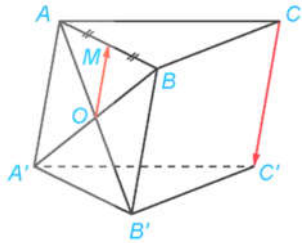
Chú ý

- Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vector \vec{a} và \vec{b} ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .



Gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$.



Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

Giải

Vì O là trung điểm của AB' nên OM là đường trung bình của tam giác $AB'B$. Suy ra $B'B \parallel OM$ và $B'B = 2OM$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $B'B \parallel C'C$ và $B'B = C'C$.

Do đó $C'C \parallel OM$ và $C'C = 2OM$. Vì hai vectơ $\overrightarrow{CC'}$ và \overrightarrow{OM} ngược hướng nên $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

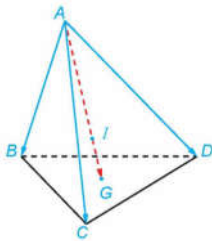
Chú ý. Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và \vec{a} là một vectơ bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.

- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và \vec{a}, \vec{b} là hai vectơ bất kì thì $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu \vec{a} là một vectơ bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Giải

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

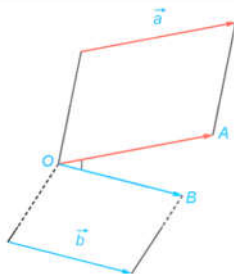
Do đó ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{AG} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 3\overrightarrow{AG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{AG}$.

Chú ý. Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

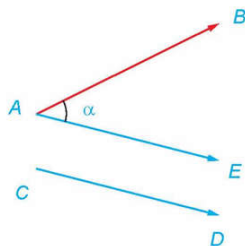
Trong không gian, cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc \widehat{AOB} ($0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$) được gọi là góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} , kí hiệu là (\vec{a}, \vec{b}) .



Nếu góc giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} là 90° thì ta nói hai vector \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.

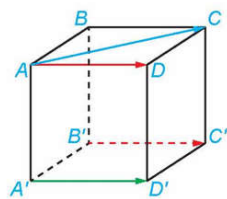
Chú ý

- Để xác định góc giữa hai vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BAE}$.



- Quy ước góc giữa một vector bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .

Ví dụ 9: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp vector sau:



a) \overrightarrow{AD} và $\overrightarrow{B'C'}$;

b) \overrightarrow{AC} và $\overrightarrow{A'D'}$.

Giải

a) Hai vector \overrightarrow{AD} và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{B'C'}) = 0^\circ$.

b) Vì tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$. Do đó $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{CAD}$. Tam giác ADC vuông cân tại D nên $\widehat{CAD} = 45^\circ$, vì vậy $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = 45^\circ$.

b) Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Hãy nhắc lại công thức xác định tích vô hướng của hai vector trong mặt phẳng.

Trong không gian, cho hai vector \vec{a}, \vec{b} đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vector \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Chú ý

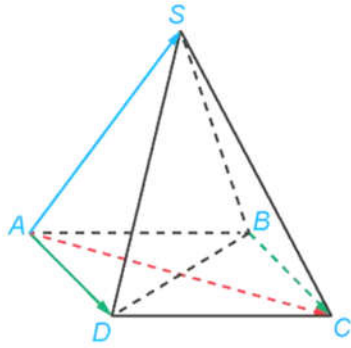
- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- Cho hai vector \vec{a}, \vec{b} đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- Với mọi vector \vec{a} , ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

- Nếu \vec{a}, \vec{b} là hai vector khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng sau:



a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Giải

a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{SAD} = 60^\circ$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{SAD} = 60^\circ$.

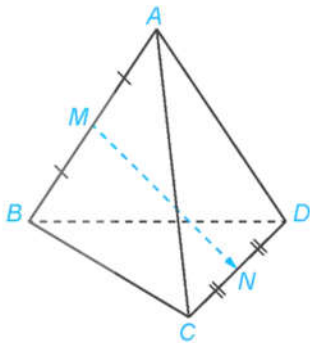
$$\text{Do đó } \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S , suy ra $\widehat{SAC} = 45^\circ$. Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \widehat{SAC} = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Nhận xét. Tích vô hướng của hai vector trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai vector trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là các vector trong không gian và k là một số thực thì ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Ví dụ 11: Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD . Chứng minh rằng:



a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$.

$$\text{Do đó } 2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}).$$

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$.

$$\text{Suy ra } 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}, \text{ hay } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

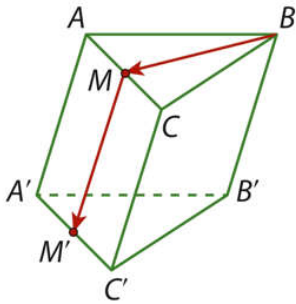
b) Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\text{Vì vậy, } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

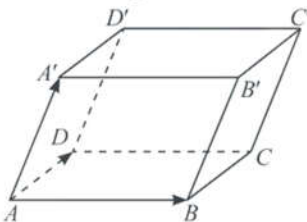
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Khái niệm vectơ trong không gian

- Câu 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.
- Câu 2.** Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm các cạnh $AC, A'C'$ (Hình).



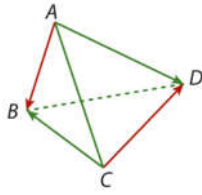
- a) Trong tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lăng trụ, hãy chỉ ra các vectơ:
- Khác $\vec{0}$ và cùng phương với \overrightarrow{AM} ;
 - Khác $\vec{0}$ và cùng hướng với \overrightarrow{AM} ;
 - Là vectơ đối của \overrightarrow{AC} ;
 - Bằng $\overrightarrow{MM'}$.
- b) Tìm độ dài của \overrightarrow{BM} trong trường hợp ABC là tam giác cân tại B , có cạnh bên bằng 5 cm và góc ở đỉnh bằng 30° (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Câu 3.** Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra ba vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vectơ đó:
- a) Bằng vectơ \overrightarrow{AD} ;
- b) Là vectơ đối của vectơ \overrightarrow{AD} .
- Câu 4.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.
- Câu 5.** Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.



- a) Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?
- b) Tìm các vectơ bằng vectơ \overrightarrow{AB} .
- c) Tìm các vectơ đối của vectơ \overrightarrow{AD} .

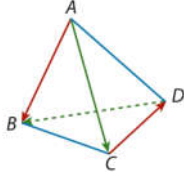
Dạng 2. Các phép toán của vectơ trong không gian

- Câu 6.** Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Tìm các vectơ tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$.
- Câu 7.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.



Câu 8. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình). Tìm vector $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$.

Câu 9. Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.



Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Thực hiện các phép toán sau đây:

a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$

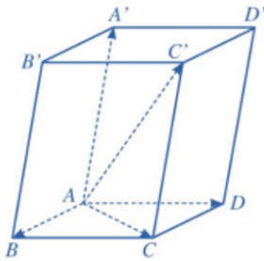
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành.

Tìm các vector hiệu $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD}$.

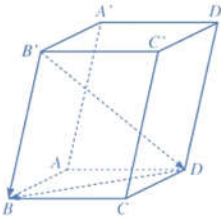
Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.



Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.



Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC ; G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Xác định các điểm M, N thỏa mãn:

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của MN và G_1 là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

c. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

d. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 4\overrightarrow{NG}, \forall N.$

e. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG_1}$

Câu 18. Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}.$

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}.$

b) $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{A'C}.$

c) Gọi O là tâm hình hộp. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a. Chứng minh rằng có một điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}.$

b. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian ta đều có $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'})$. Suy ra điểm O nói trên là duy nhất.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Hãy phân tích các vector $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SO}$.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Chứng minh ba vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Câu 23. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Trên đoạn SA lấy M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

a. Phân tích vector \overrightarrow{SG} theo các vector $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

b. Gọi D là trọng tâm của của hình chóp $S.ABC$. Phân tích vector \overrightarrow{SD} theo ba vector $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

Câu 25. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

a. Phân tích các vector $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$ theo các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b. Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Phân tích vector $\overrightarrow{AG'}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có trung tuyến qua đỉnh A của tam giác ABC và AN . Lấy điểm M trên AN sao cho $\frac{AM}{MN} = \frac{3}{7}$. Phân tích vector \overrightarrow{DM} theo $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

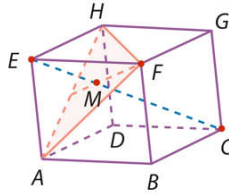
Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$, M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . P, Q là các điểm định bởi $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD}$. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng.

Câu 28. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Hai điểm M, N lần lượt chia đoạn AC và BD theo cùng tỉ số λ . Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. Hãy biểu thị vector \overrightarrow{MN} theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} .

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD ; P, Q lần lượt là các điểm chia đoạn AC và BD theo tỉ số $k \neq 1$. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Dạng 3. Tích vô hướng, góc của 2 vecto

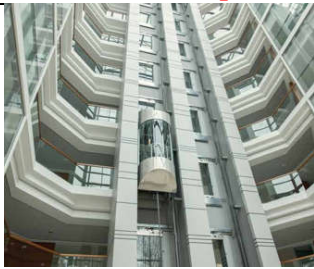
Câu 30. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Điểm M là trọng tâm tam giác AFH (Hình).



- a) Chứng minh rằng ba điểm E, M, C thẳng hàng.
- b) Tính độ dài của \overline{EM} trong trường hợp $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng có các cạnh $AB = 5, AD = 6, AE = 10$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$.
- Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ \overrightarrow{DC} và \overrightarrow{BS} .
- Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Hãy tính:
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS}$;
 - $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$;
 - $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS}$.
- Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ \overrightarrow{SC} và \overrightarrow{AB} .
- Câu 34.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.
- Câu 35.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .
- Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.
 - Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.
- Câu 36.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}$.
- Câu 37.** Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vectơ \overrightarrow{OM} và \overrightarrow{AC} .
- Câu 38.** Cho tứ diện $ABCD$:
- Chứng minh: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.
 - Suy ra rằng nếu 2 cặp cạnh đối trong tứ diện vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối thứ 3 cũng vuông góc với nhau.
- Câu 39.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a .
- Tính góc giữa hai vectơ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.
 - Gọi I là trung điểm của AB . Tính góc giữa hai vectơ $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{AC})$.
- Câu 40.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB .
- Biểu diễn các vectơ \overrightarrow{SM} và \overrightarrow{BC} theo các vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.
 - Tính $(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC})$.

Dạng 4. Ứng dụng thực tế

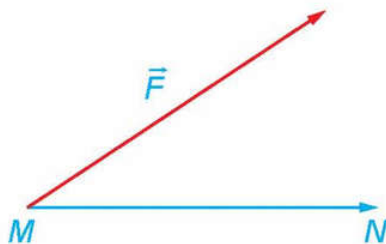
- Câu 41.** Một toà nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của toà nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.



- Câu 42.** Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h , trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ \vec{F}_1 và \vec{F}_2 . Hãy giải thích vì sao $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

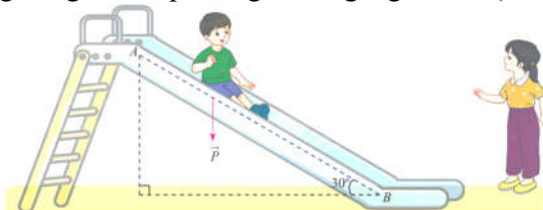


- Câu 43.** Như đã biết, nếu có một lực \vec{F} tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun. Do đó, nếu dùng một lực \vec{F} có độ lớn không đổi để làm một vật di chuyển một quãng đường không đổi thì công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Hãy giải thích vì sao.



Kết quả trên có thể được áp dụng như thế nào khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng?

- Câu 44.** Một em nhỏ cân nặng $m = 25 \text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài $3,5 \text{ m}$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình).

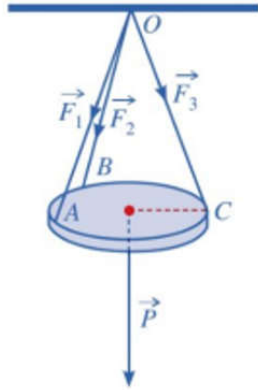


- a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do \vec{g} có độ lớn là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
- b) Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực \vec{F} có độ dịch chuyển \vec{d} được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực \vec{P} khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.
- Câu 45.** Trọng lực \vec{P} là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật, được tính theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), còn \vec{g} là vectơ gia tốc rơi tự do, có

hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bưởi có khối lượng $2,5 \text{ kg}$.



- Câu 46.** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$ (Hình).



Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

- Câu 47.** Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N . Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N . Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

- Câu 48.** Theo định luật II Newton. Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

$\vec{F} = m\vec{a}$ trong đó \vec{a} là vector gia tốc (m/s^2), \vec{F} là vector lực (N) tác dụng lên vật, $m(\text{kg})$ là khối lượng của vật.



Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5 \text{ kg}$ một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

- Câu 49.** Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực \vec{F} tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó \vec{d} là vector biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực \vec{F} .

Một chiếc xe có khối lượng $1,5$ tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực \vec{P} khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực \vec{P} được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và \vec{g} là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dành cho đối tượng học sinh trung bình

- Câu 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vector khác vector $\vec{0}$ mà mỗi vector có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?
- A. 12. B. 4. C. 10. D. 8.
- Câu 2.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?
- A. $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$. B. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.
C. $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$. D. $\vec{AB} = \vec{CD}$.
- Câu 3.** Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**?
- A. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. B. $\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.
C. $\vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. D. $\vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$.
- Câu 4.** Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD ; Đẳng thức nào **sai**?
- A. $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD})$. B. $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$.
C. $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{DC} + \vec{AD} + \vec{BD})$. D. $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{CD})$.
- Câu 5.** Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?
- A. $\vec{BC} + \vec{AB} = \vec{DA} - \vec{DC}$. B. $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BC}$.
C. $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{DB} - \vec{DC}$. D. $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CD} + \vec{BC}$.
- Câu 6.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức vector đúng:
- A. $\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AB'} + \vec{AD}$. B. $\vec{DB'} = \vec{DA} + \vec{DD'} + \vec{DC}$.
C. $\vec{AC'} = \vec{AC} + \vec{AB} + \vec{AD}$. D. $\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{DD'} + \vec{DC}$.
- Câu 7.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biểu thức nào sau đây đúng:
- A. $\vec{A'D} = \vec{A'B'} + \vec{A'C}$. B. $\vec{AB'} = \vec{AB} + \vec{AA'} + \vec{AD}$.
C. $\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AA'} + \vec{AD}$. D. $\vec{AD'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC'}$.
- Câu 8.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CB} + \vec{AD}$. B. $2\vec{MN} = \vec{AB} + \vec{DC}$.
C. $\vec{AD} + 2\vec{MN} = \vec{AB} + \vec{AC}$. D. $2\vec{MN} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$.
- Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $\vec{SA} + \vec{SD} = \vec{SB} + \vec{SC}$. B. $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \vec{0}$.
C. $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$. D. $\vec{SA} + \vec{SB} = \vec{SC} + \vec{SD}$.
- Câu 10.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Vector nào sau đây là vector chỉ phương của đường thẳng AB ?
- A. $\vec{A'B'}$. B. $\vec{A'C}$. C. $\vec{A'C'}$. D. $\vec{A'B}$.
- Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$, gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Ta có
- A. $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = \vec{SG}$. B. $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 2\vec{SG}$.
C. $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 3\vec{SG}$. D. $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 4\vec{SG}$.
- Câu 12.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ . Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?
- A. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. B. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = 2\vec{IJ}$.
C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{JI}$. D. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = -2\vec{JI}$.

- Câu 13.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các biểu thức vectơ sau đây, biểu thức nào **đúng**.
A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$. **B.** $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. **C.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **D.** $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
- Câu 14.** Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:
A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. **D.** $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
- Câu 15.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vectơ bằng vectơ \overrightarrow{AB} là vectơ nào dưới đây?
A. $\overrightarrow{D'C'}$. **B.** \overrightarrow{BA} . **C.** \overrightarrow{CD} . **D.** $\overrightarrow{B'A'}$.
- Câu 16.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?
A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$. **B.** $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.
C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$. **D.** $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.
- Câu 17.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{DG}$
A. $k = 2$. **B.** $k = 3$. **C.** $k = \frac{1}{2}$. **D.** $k = \frac{1}{3}$.
- Câu 18.** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O . Chọn đẳng thức **sai**.
A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$. **B.** $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{OC_1}$.
- Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}; \overrightarrow{SB} = \vec{b}; \overrightarrow{SC} = \vec{c}; \overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$. **C.** $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.
- Câu 20.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD . Chọn khẳng định đúng?
A. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$. **B.** $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$.
C. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
- Câu 21.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$
A. $k = 2$. **B.** $k = \frac{1}{2}$. **C.** $k = \frac{1}{3}$. **D.** $k = 3$.
- Câu 22.** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?
A. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$. **B.** $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$. **D.** $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.
- Câu 23.** Cho tứ diện $ABCD$ và I là trọng tâm tam giác ABC . Đẳng thức đúng là.
A. $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$. **B.** $\overrightarrow{SI} = 3(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.
C. $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$. **D.** $6\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$.
- Câu 24.** Cho hình lập phương $ABCDEFGH$, thực hiện phép toán: $\vec{x} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$

- A.** $\vec{x} = \vec{CE}$. **B.** $\vec{x} = \vec{CH}$. **C.** $\vec{x} = \vec{EC}$. **D.** $\vec{x} = \vec{GE}$.
- Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn: $\vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
A. G, S không thẳng hàng. **B.** $\vec{GS} = 4\vec{OG}$.
C. $\vec{GS} = 5\vec{OG}$. **D.** $\vec{GS} = 3\vec{OG}$.
- Câu 26.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\vec{BD} - \vec{D'D} - \vec{B'D'} = k\vec{BB'}$
A. $k = 4$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 0$. **D.** $k = 2$.
- Câu 27.** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức **sai**?
A. $\vec{BC} + \vec{BA} = \vec{B_1C_1} + \vec{B_1A_1}$. **B.** $\vec{AD} + \vec{D_1C_1} + \vec{D_1A_1} = \vec{DC}$.
C. $\vec{BC} + \vec{BA} + \vec{BB_1} = \vec{BD_1}$. **D.** $\vec{BA} + \vec{DD_1} + \vec{BD_1} = \vec{BC}$.
- Câu 28.** Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\vec{PI} = k(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD})$.
A. $k = \frac{1}{4}$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 4$. **D.** $k = \frac{1}{2}$.
- Câu 29.** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm AD . Chọn đẳng thức đúng.
A. $\vec{C_1M} = \vec{C_1C} + \vec{C_1D_1} + \frac{1}{2}\vec{C_1B_1}$. **B.** $\vec{C_1M} = \vec{C_1C} + \frac{1}{2}\vec{C_1D_1} + \frac{1}{2}\vec{C_1B_1}$.
C. $\vec{BB_1} + \vec{B_1A_1} + \vec{B_1C_1} = 2\vec{B_1D}$. **D.** $\vec{B_1M} = \vec{B_1B} + \vec{B_1A_1} + \vec{B_1C_1}$.
- Câu 30.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?
A. $\vec{GM} + \vec{GN} = \vec{0}$. **B.** $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$.
C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GD}$. **D.** $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.
- Câu 31.** Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mp (BCD) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
A. $\vec{GA} = -2\vec{G_0G}$. **B.** $\vec{GA} = 4\vec{G_0G}$. **C.** $\vec{GA} = 3\vec{G_0G}$. **D.** $\vec{GA} = 2\vec{G_0G}$.
- Câu 32.** Cho tứ diện đều $ABCD, M$ và N theo thứ tự là trung điểm của cạnh AB và CD . Mệnh đề nào sau đây **sai**?
A. $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$. **B.** $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$.
C. $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{AD} + \vec{BC} = -4\vec{NM}$. **D.** $\vec{MC} + \vec{MD} - 4\vec{MN} = \vec{0}$.
- Câu 33.** Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, với K là trung điểm CC_1 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:
A. $\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA_1}$ **B.** $\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AA_1}$
C. $\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}$ **D.** $\vec{AK} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA_1}$
- Câu 34.** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $M = CD_1 \cap C_1D$. Khi đó:
A. $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA_1}$ **B.** $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA_1}$
C. $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA_1}$ **D.** $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AA_1}$

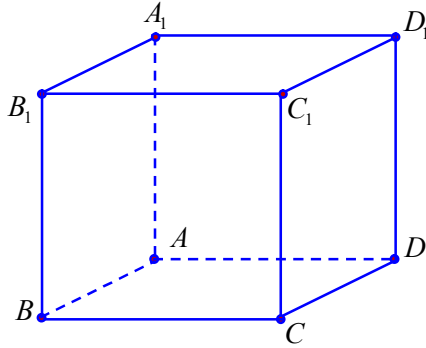
Câu 35. Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, trong các khẳng định sau khẳng định sai:

- A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$
 C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$ D. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi O là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{OG}$
 C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{OG}$ D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{OG}$

Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ (Tham khảo hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$ B. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}$
 C. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ D. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

Câu 38. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
 C. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Câu 39. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vector $\overrightarrow{BC'}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

- A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ B. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ C. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ D. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$ B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$
 C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$ D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$

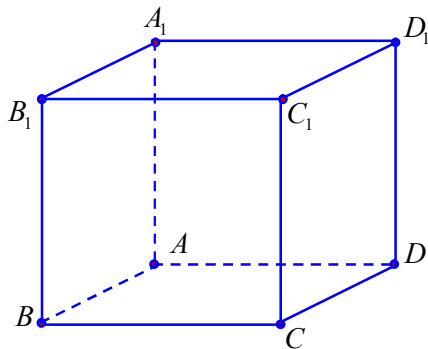
Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, gọi M là trung điểm của BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$ B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
 C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$ D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của BC và AD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$ B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b} - \vec{c})$ C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$ D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$

Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ (Tham khảo hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Các véc tơ $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}$ đồng phẳng. B. Các véc tơ $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.
C. Các véc tơ $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}$ đồng phẳng. D. Các véc tơ $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}$ đồng phẳng.

Câu 44. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định **đúng**.

- A. $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BD}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

Câu 45. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$.
C. Ba vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng. D. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

Câu 46. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

Câu 47. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Bộ 3 vector nào sau đây đồng phẳng:

- A. $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{CD'}, \overrightarrow{A'B}$. B. $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{C'D}, \overrightarrow{A'B'}$. D. $\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}$.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và CD . Ba véc tơ nào đồng phẳng:

- A. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$.

Câu 49. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào sau đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

- A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.
B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p \neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.
C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.
D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui.

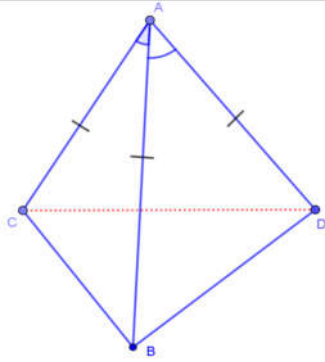
Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$ đồng phẳng.
B. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
C. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
D. Các vector $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vector \overrightarrow{SB} và \overrightarrow{AC} bằng

- A. 60° . B. 120° . C. 30° . D. 90° .

Câu 52. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $AB = AD = AC$ (tham khảo như hình vẽ bên).



Gọi φ là góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} . Chọn mệnh đề **đúng**?

- A. $\varphi = 60^\circ$. B. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$. C. $\varphi = 90^\circ$. D. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

Câu 53. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'})$

- A. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 0$. B. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 1$.
C. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1}{2}$. D. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 54. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} .

- A. 90° . B. 30° . C. 120° . D. 60° .

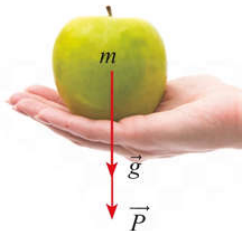
Câu 55. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA})$ bằng

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai vectơ \overrightarrow{SA} và \overrightarrow{BC} .

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

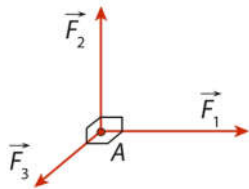
Câu 57. Nếu một vật có khối lượng $m(\text{kg})$ thì lực hấp dẫn \vec{P} của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó \vec{g} là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình).



- A. $0,9996 \text{ N}$. B. $0,5996 \text{ N}$. C. $0,9196 \text{ N}$. D. $0,8996 \text{ N}$.

Dành cho đối tượng học sinh khá giỏi

Câu 58. Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc với nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt là $10 \text{ N}, 8 \text{ N}$ và 5 N , xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



- A. 13,7. B. 12,7. C. 14,7. D. 11,7.

Câu 59. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc đường thẳng CC' sao cho $C'I = 3C'C$, G điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = 0$. Biểu diễn vector \overrightarrow{IG} qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} \right)$. B. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$.

C. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b})$. D. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4} \left(\vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} - 2\vec{a} \right)$

Câu 60. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó \overrightarrow{AG} bằng

A. $\vec{a} + \frac{1}{6} (\vec{b} + \vec{c})$. B. $\vec{a} + \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c})$. C. $\vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c})$. D. $\vec{a} + \frac{1}{4} (\vec{b} + \vec{c})$

Câu 61. Cho tam giác $x=1, x=-3$. có $AB = 2$; $AC = 5$, gọi AD là phân giác trong của góc A (D thuộc cạnh BC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{7} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{7} \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{7} \overrightarrow{AB} - \frac{2}{7} \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AD} = \frac{-5}{7} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{7} \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AD} = -\frac{5}{7} \overrightarrow{AB} - \frac{2}{7} \overrightarrow{AC}$.

Câu 62. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$. B. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3} (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$. D. $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3} (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

Câu 63. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. B. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4} (\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4} (\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Câu 64. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AD}$, $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Các vector $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi chúng thỏa mãn đẳng thức vector nào sau đây:

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{MP} + \frac{3}{4} \overrightarrow{MQ}$. B. $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MN} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MP} + \frac{2}{3} \overrightarrow{MQ}$. D. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MP} + \frac{3}{2} \overrightarrow{MQ}$.

Câu 65. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh AB và G là trọng tâm của tam giác BCD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Phân tích véc tơ \overrightarrow{MG} theo $\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$.

B. $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$.

C. $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$.

D. $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$.

Câu 66. Cho ba vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} không đồng phẳng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ đồng phẳng.

C. Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. Các vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$, $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 67. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M , N sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Gọi P , Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Các vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{MN} đồng phẳng.

B. Các vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{MN} đồng phẳng.

C. Các vectơ \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{MN} đồng phẳng.

D. Các vectơ \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{MN} đồng phẳng.

Câu 68. Cho tứ diện $ABCD$. M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD . Bộ ba vectơ nào dưới đây đồng phẳng?

A. \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{AD} .

B. \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{MN} .

C. \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{MN} .

D. \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{MA} .

Câu 69. Cho tứ diện $ABCD$. M là điểm trên đoạn AB và $MB = 2MA$. N là điểm trên đường thẳng CD mà $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$. Nếu \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BC} đồng phẳng thì giá trị của k là:

A. $k = \frac{2}{3}$.

B. $k = \frac{3}{2}$.

C. $k = \frac{4}{3}$.

D. $k = \frac{1}{2}$.

Câu 70. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AC , BD lần lượt lấy M , N sao cho $AM = 3MD$; $BN = 3NC$. Gọi P , Q lần lượt là trung điểm của AD , BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Các vectơ \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{MN} không đồng phẳng

B. Các vectơ \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{PQ} đồng phẳng

C. Các vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{PQ} đồng phẳng

D. Các vectơ \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{MN} đồng phẳng

Câu 71. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc tạo bởi hai vectơ \overrightarrow{BC} và \overrightarrow{OM} bằng

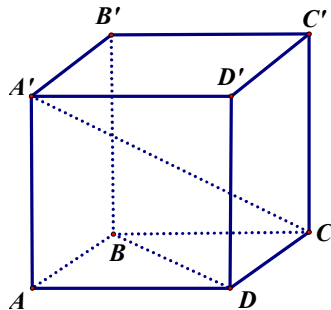
A. 135° .

B. 150° .

C. 120° .

D. 60° .

Câu 72. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Tính góc giữa $A'C$ và BD .



A. 90° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Câu 73. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a , tính $\left| \cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) \right|$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 74. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc hợp bởi hai véc tơ \overrightarrow{BC} và \overrightarrow{OM} bằng

A. 120° . B. 150° . C. 135° . D. 60° .

Câu 75. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và \overrightarrow{BM} .

A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 76. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và góc $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Giá trị $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC})$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 0,83.

B. 0,37.

C. 0,45.

D. 0,71.

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD . Giá trị $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$		
b)	$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$		
c)	$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$		
d)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$		

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$		
b)	$\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$		
c)	$\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$		
d)	$\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A_1D_1}$		

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$		
b)	$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$		
c)	$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$		
d)	$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$		

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$		
b)	$ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'D'} $		

c)	$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{CD}$		
d)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$		

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'}$		
b)	$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$		
c)	$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{DC'}$		
d)	$\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DC'} + \overrightarrow{DA}$		

Câu 6. Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ không đồng phẳng.		
b)	Các vectơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ không đồng phẳng.		
c)	Các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{A'C}$ không đồng phẳng.		
d)	Các vectơ $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ đồng phẳng.		

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, có cạnh a . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{CC'} = a^2$		
b)	$\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$		
c)	$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$		
d)	$ \overrightarrow{AC'} = a\sqrt{3}$		

Câu 8. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD , I là trung điểm của đoạn MN . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$		
b)	$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$		
c)	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$		
d)	$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$		

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.		
b)	$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.		
c)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.		
d)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.		

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{0}$		
b)	$2\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'D}$		
c)	$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$		
d)	$\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AD}$		

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC và BD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$		
b)	$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{MN}$		

c)	$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$		
d)	$2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$		

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$		
b)	$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$		
c)	$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$		
d)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$		

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$		
b)	$\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} = \vec{0}$		
c)	$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$		
d)	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$		

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$		
b)	Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng.		
c)	$\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$		
d)	Ba vector $\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{IK}; \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.		

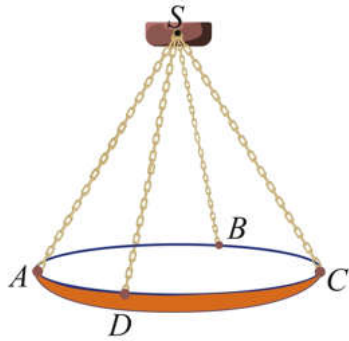
Câu 15. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.		
b)	Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP .		
c)	Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$		
d)	Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.		

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM = 3MD; BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.		
b)	Các vector $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.		
c)	Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.		
d)	Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.		

Câu 17. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5\text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$ (Hình).



Biết $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó \vec{g} là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2 , \vec{P} là trọng lực tác động vật có đơn vị là N , m là khối lượng của vật có đơn vị kg . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng		
b)	$ \vec{SA} = \vec{SB} = \vec{SC} = \vec{SD} $		
c)	Độ lớn của trọng lực \vec{P} tác động lên chiếc đèn chùm bằng 50 N		
d)	Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\frac{25\sqrt{3}}{2}\text{ N}$		

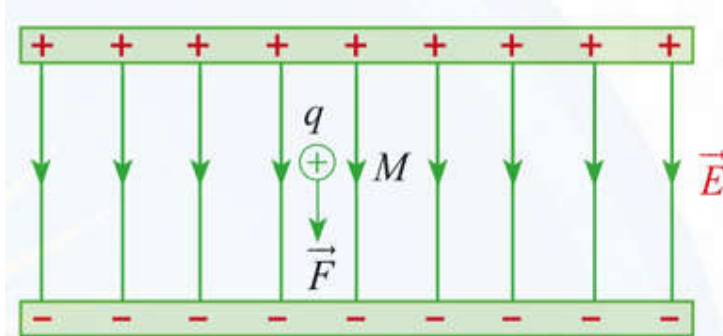
PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

- Câu 1.** Trọng lực \vec{P} là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật được tính bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), \vec{g} là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8\text{ m/s}^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bóng có khối lượng 450 gam .



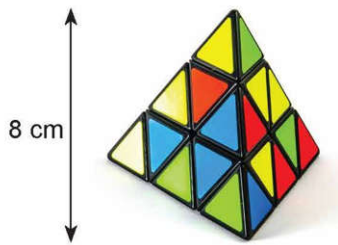
Trả lời:.....

- Câu 2.** Trong điện trường đều, lực tĩnh điện \vec{F} (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó \vec{E} là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}\text{ C}$ và độ lớn điện trường $E = 10^5\text{ N/C}$ (Hình).



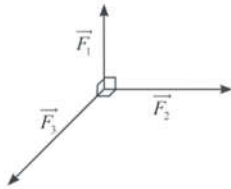
Trả lời:.....

- Câu 3.** Ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thỏa mãn $\vec{AI} = 3\vec{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD . Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm .



Trả lời:.....

- Câu 4.** Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là $2N; 3N; 4N$. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



Trả lời:.....

- Câu 5.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC . Tính $\cos(\vec{AB}, \vec{DM})$

Trả lời:.....

- Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD, \widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa cặp véc tơ \vec{AB}, \vec{IJ} bằng bao nhiêu độ?

Trả lời:.....

- Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O ; $AD = a\sqrt{2}$; $AB = a$; các cạnh bên bằng nhau và bằng a . Gọi E là trung điểm của cạnh SD . Khi đó góc giữa hai vector $\vec{SA}; \vec{OE}$ bằng bao nhiêu độ:

Trả lời:.....

- Câu 8.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết: $\vec{AN} = -4\vec{AB} + k\vec{AA'} - 2\vec{AD}$ ($k \in \mathbb{R}$); $\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}$. Giá trị k thích hợp để $\vec{AN} \perp \vec{AM}$ là:

Trả lời:.....

- Câu 9.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD . Tính $\cos(\vec{AC}, \vec{MN})$

Trả lời:.....

- Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC$. Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{SI}; \vec{BC}$

Trả lời:.....

- Câu 11.** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $G_1; G_2$ lần lượt là trọng tâm tam giác BDA_1 và CB_1D_1 . Biết $\vec{AC_1} = a\vec{AG_1} + b\vec{AG_2}$. Tính $a + b$

Trả lời:.....

- Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Ba cạnh SA, AB, AD đôi một vuông góc và $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SD . Tính $\cos(\vec{AI}, \vec{SC})$

Trả lời:.....

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA=3, SB=4, SC=5$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của $S.ABC$ cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2}$.

Trả lời:.....

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=BD=a$, $AB=CD=2a$, $AD=BC=a\sqrt{6}$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng bao nhiêu độ

Trả lời:.....

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=a$, $SB=2a$, $SC=3a$, $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=60^\circ$, $\widehat{CSA}=90^\circ$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC . Tính $\cos \alpha$.

Trả lời:.....

Câu 16. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$ và $AA'=\sqrt{2}a$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng bao nhiêu độ

Trả lời:.....

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

Trả lời:.....

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=2a$, $BC=a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC

Trả lời:.....

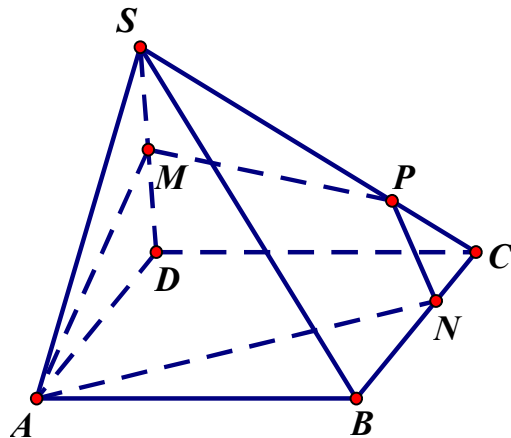
Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

Trả lời:.....

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi N là điểm thỏa $\overrightarrow{C'N}=2\overrightarrow{NB'}$, M là trung điểm của $A'D'$, I là giao điểm của $A'N$ và $B'M$. Biết $\overrightarrow{AI}=a\overrightarrow{AA'}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AD}$. Tính $a+b+c$

Trả lời:.....

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành, gọi M và N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MS}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P . Tính tỉ số $\frac{SP}{SC}$.



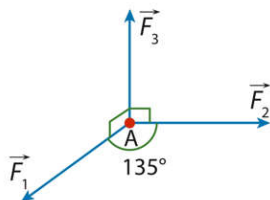
Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của SB . Khi đó góc giữa AM và BD bằng bao nhiêu độ?

Trả lời:.....

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI , với I là trung điểm của AD .

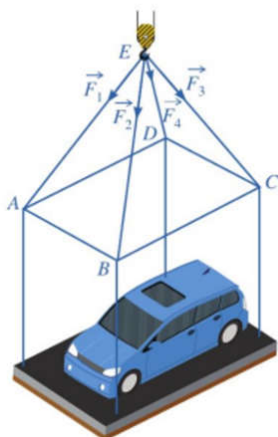
Trả lời:.....

Câu 24. Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α) , chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$, còn lực \vec{F}_3 có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N , 15 N và 10 N .



Trả lời:

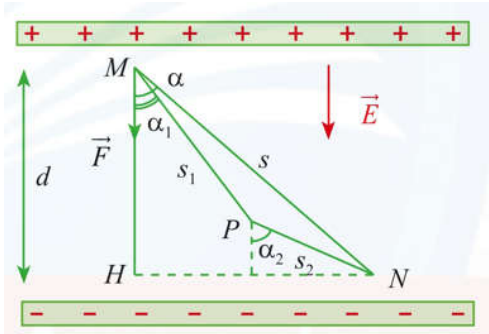
Câu 25. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° (Hình). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.



Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, \vec{F}_4 đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N .

Trả lời:

Câu 26. Một lực tĩnh điện \vec{F} tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12}\text{ C}$, vector điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5\text{ N/C}$ và $d = MH = 5\text{ mm}$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện \vec{F} .



Trả lời: