BÀI 23. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

- CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

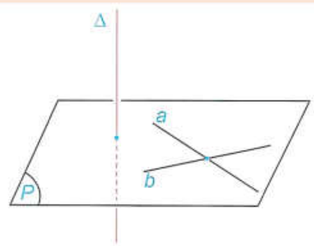
PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

Chú ý. Khi Δ vuông góc với (P), ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

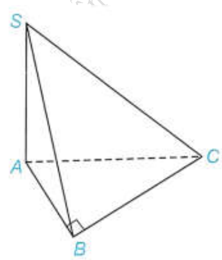


Hình 7.12

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì đường thẳng đó có vuông góc với cạnh còn lại hay không?

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh SA vuông góc với các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

Giải. (H.7.13)



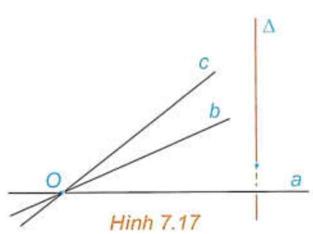
Hình 7.13

Vì SA vuông góc với hai đường thẳng AB và AC nên $SA \perp (ABC)$. Suy ra $SA \perp BC$.
Tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp BA$.
Vì BC vuông góc với hai đường thẳng SA và BA nên $BC \perp (SAB)$.

2. TÍNH CHẤT

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

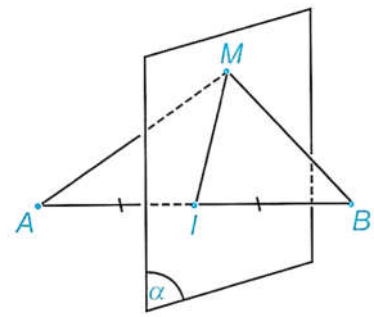
Nhận xét. Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với $\Delta (H.7.17)$.



Hình 7.17

Ví dụ 2. Chứng minh rằng điểm M cách đều hai điểm phân biệt A, B cho trước khi và chỉ khi M thuộc mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB.

Giải. (H.7.18)



Hình 7.18

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB. Ta có $MA = MB$ khi và chỉ khi M trùng I hoặc tam giác MAB cân tại M. Mặt khác, ΔMAB cân tại M khi và chỉ khi $MI \perp AB$, tức là M thuộc mặt phẳng (α). Do đó, $MA = MB$ khi và chỉ khi M thuộc (α).

Chú ý. Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B.

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Ví dụ 3. Cho điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P). Giải thích vì sao có duy nhất điểm H thuộc (P) sao cho đường thẳng AH vuông góc với (P).

Giải

Gọi a là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P). Lấy điểm H thuộc (P). Khi đó, đường thẳng AH vuông góc với (P) khi và chỉ khi AH trùng với a, tức là H là giao điểm của a và (P). Vậy có duy nhất điểm H thuộc (P) để AH vuông góc với (P), đó là giao điểm của a với (P).

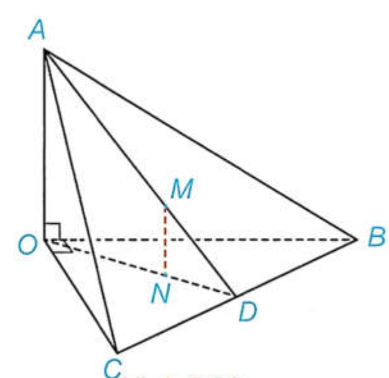
3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Nội dung của mục này nhằm củng cố kiến thức và kĩ năng đã học ở hai mục trên. Ngoài ra, từ đó có thể rút ra các tính chất về mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P).
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi M, N tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, OBC. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng (OBC).

Giải. (H.7.22)



Hình 7.22

Vì AO vuông góc với các đường thẳng OB, OC nên $AO \perp (OBC)$. Kẻ các đường trung tuyến AD, OD tương ứng của các tam giác ABC, OBC.

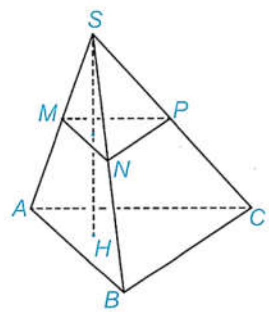
Ta có $\frac{MA}{MD} = 2 = \frac{NO}{ND}$. Do đó, MN song song với AO.

Mặt khác, $AO \perp (OBC)$ nên $MN \perp (OBC)$.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC. Đường thẳng qua S vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt mặt phẳng đó tại H. Chứng minh rằng $SH \perp (MNP)$.

Giải. (H.7.25)



Hình 7.25

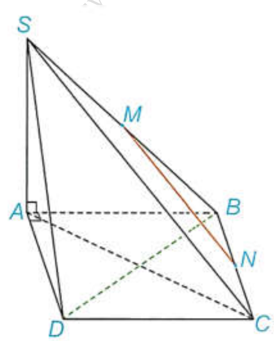
Do $MN // AB, MP // AC$ nên $(MNP) // (ABC)$.

Mặt khác, $SH \perp (ABC)$. Do đó $SH \perp (MNP)$.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P).
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P).

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của SB, BC. Chứng minh rằng $BD \perp MN$.

Giải. (H.7.26)



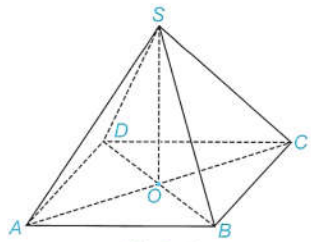
Hình 7.26

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$. Mặt khác, $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$. Ta lại có $MN // SC$ nên $MN // (SAC)$. Do đó $BD \perp MN$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Câu 1. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O, SA = SC$ và $SB = SD (H.7.14)$.

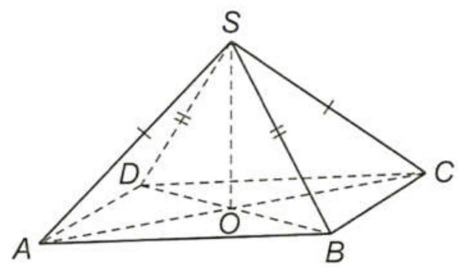


Hình 7.14

Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải

Vì $SA = SC, SB = SD$ và O là giao điểm hai đường chéo AC, BD nên O là trung điểm của AC, BD
$\Rightarrow SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.



Hình 7.5

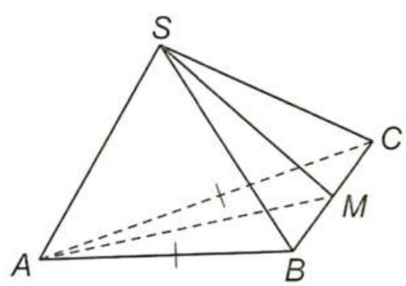
Câu 2. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAM)$;

b) Tam giác SBC cân tại S.

Lời giải

a) Vì $BC \perp AM, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAM)$.



Hình 7.6

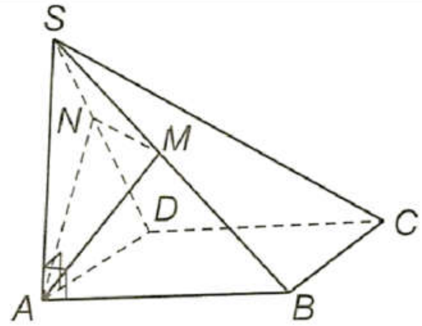
b) Có $BC \perp SM, M$ là trung điểm của BC nên ΔSBC cân tại S.

Câu 3. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng:

$AM \perp (SBC), AN \perp (SCD), SC \perp (AMN)$.

Lời giải

Vì $BC \perp SA, BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$



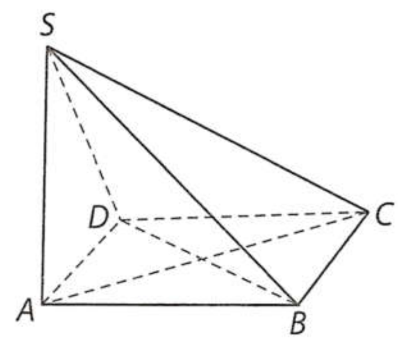
Hình 7.8

$\Rightarrow BC \perp AM$, mà $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$.
Tương tự: $AN \perp (SCD)$.
Ta có $AM \perp SC, AN \perp SC \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:
a) $BC \perp (SAB)$;
b) $BD \perp (SAC)$.

Lời giải

(H.7.4)



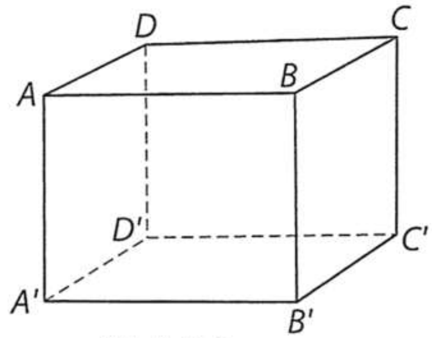
Hình 7.4

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$, mà $BC \perp AB$ và đường thẳng SA cắt đường thẳng AB nên $BC \perp (SAB)$.
b) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BD$, mà $BD \perp AC$ và đường thẳng SA cắt đường thẳng AC nên $BD \perp (SAC)$.

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:
a) $AA' \perp \left(A'B'C'D'\right)$;
b) $BB' \perp (ABCD)$.

Lời giải

(H.7.5)



Hình 7.5

a) Vì $AA' \perp (ABCD)$ và $(ABCD)//\left(A'B'C'D'\right)$ nên $AA' \perp \left(A'B'C'D'\right)$.

b) Vì $AA' \perp (ABCD)$ và $AA'//BB'$ nên $BB' \perp (ABCD)$.

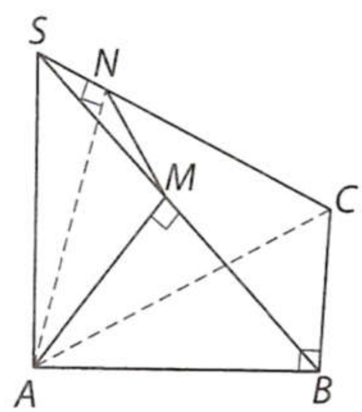
Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Kẻ AM vuông góc với SB tại M và AN vuông góc với SC tại N. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$;

b) $AM \perp (SBC)$;

c) $SC \perp (AMN)$.

Lời giải



Hình 7.26

a) Ta có: $BC \perp AB$ và $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$, suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AM$, mà $AM \perp SB$, suy ra $AM \perp (SBC)$.

c) Vì $AM \perp (SBC)$ nên $AM \perp SC$, mà $AN \perp SC$, suy ra $SC \perp (AMN)$.

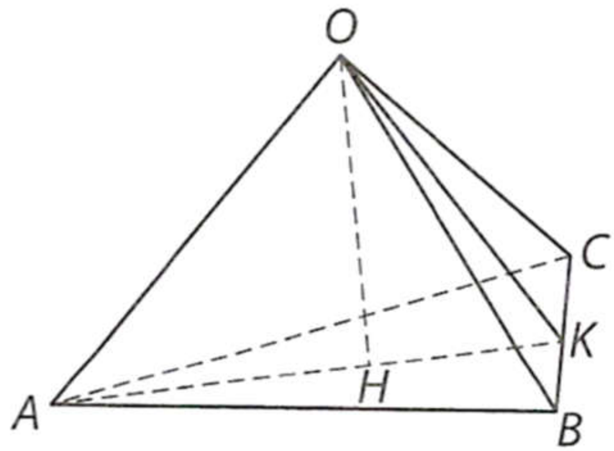
Câu 7. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O đến mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (OAH)$;

b) H là trực tâm của tam giác ABC;

c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Lời giải

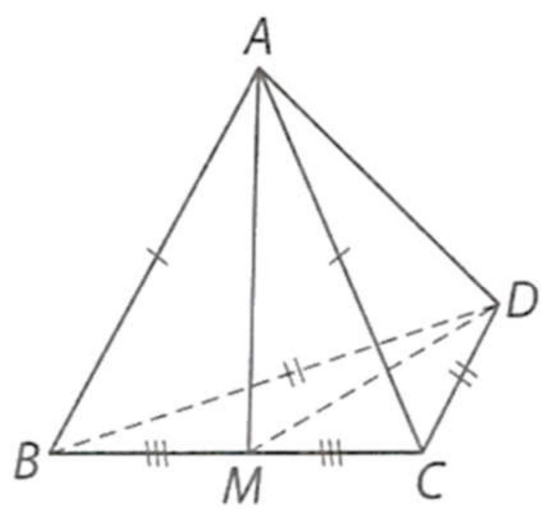


Hình 7.27

a) Vì $OA \perp OB, OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$, suy ra $OA \perp BC$.
Vì $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp BC$, suy ra $BC \perp (OAH)$.
b) Vì $BC \perp (OAH)$ nên $BC \perp AH$. Tương tự, $CA \perp BH$, do đó H là trực tâm của tam giác ABC.
c) Gọi K là giao điểm của AH và BC, ta có: $OK \perp BC$ và $OA \perp OK$ nên OK là đường cao của tam giác vuông OBC và OH là đường cao của tam giác vuông OAK.
Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông OBC và OAK, ta có:
$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2}$ và $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
Từ đó suy ra: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.

Lời giải



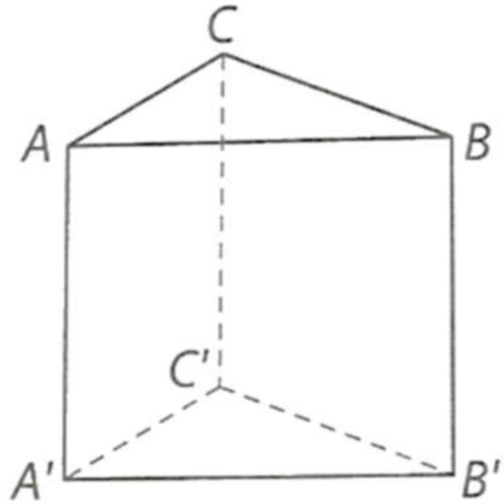
Hình 7.28

Gọi M là trung điểm của BC, ta có: $BC \perp AM, BC \perp MD$. Do đó $BC \perp (AMD)$, suy ra $BC \perp AD$.

Câu 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Chứng minh rằng:
a) $BB' \perp \left(A'B'C'\right)$;

b) $B'C' \perp (ABB'A')$.

Lời giải



Hình 7.29

a) Vì $AA' \perp (ABC), AA'//BB'$ và $(ABC)//(A'B'C')$ nên $BB' \perp (A'B'C')$.

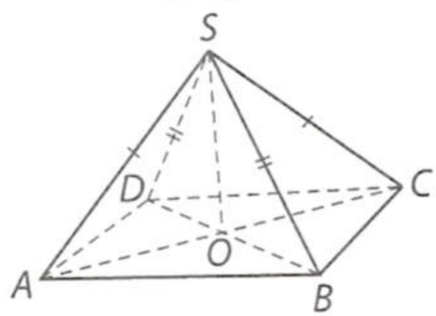
b) Vì $BC \perp AB, BC \perp BB'$ nên $BC \perp (ABB'A')$, mà $BC//B'C'$, suy ra $B'C' \perp (ABB'A')$.

Câu 10. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$;

b) $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$.

Lời giải



Hình 7.30

a) Vì O là giao điểm của AC và BD nên O là trung điểm của AC và BD, suy ra $SO \perp AC, SO \perp BD$. Do đó $SO \perp (ABCD)$.

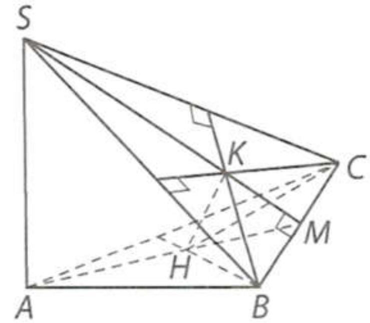
b) Vì $AC \perp BD, AC \perp SO$ nên $AC \perp (SBD)$. Tương tự, ta được $BD \perp (SAC)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAH)$ và các đường thẳng AH, BC, SK đồng quy;

b) $SB \perp (CHK)$ và $HK \perp (SBC)$.

Lời giải



Hình 7.31

a) Vì $BC \perp SA, BC \perp AH$ nên $BC \perp (SAH)$. Gọi M là giao điểm của AH và BC, ta có: $BC \perp (SAM)$, suy ra $BC \perp SM$, mà K là trực tâm của tam giác SBC nên SM đi qua K. Do đó, SK, AH, BC đồng quy tại M.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp CH$, mà $CH \perp AB$, suy ra $CH \perp (SAB)$. Do đó $CH \perp SB$, lại có $SB \perp CK$ nên

$SB \perp (CHK)$. Từ đó ta có $SB \perp HK$, tương tự, ta chứng minh được

$SC \perp (BHK)$, suy ra $SC \perp HK$. Do đó $HK \perp (SBC)$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi I là trung điểm của AC. Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$. Chứng minh rằng:

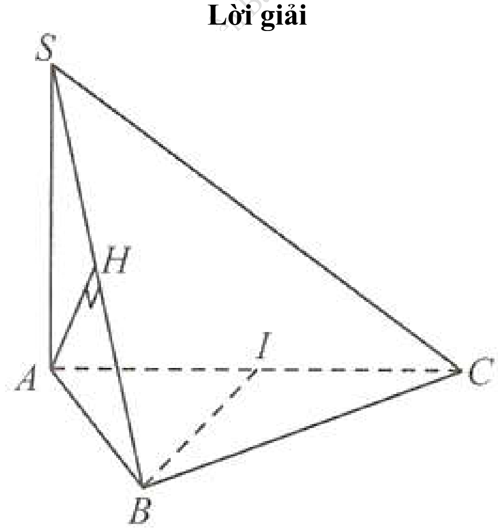
a) SA vuông góc với các cạnh đáy;

b) $BC \perp (SAB)$;

c) $BI \perp (SAC)$, từ đó suy ra $BI \perp SC$;

d) $AH \perp (SBC)$, từ đó suy ra $AH \perp SC$.

Lời giải



Hình 7

a) Vì $SA \perp (ABC)$ và AB, BC, CA cùng nằm trong (ABC) nên $SA \perp AB, SA \perp BC, SA \perp CA$.

b) Ta có $BC \perp AB$ (vì ΔABC vuông tại B) và $BC \perp SA$ (chứng minh trên), suy ra $BC \perp (SAB)$.

c) Do ΔABC vuông cân tại B và I là trung điểm của AC nên $BI \perp AC$ (1).

Ta có $SA \perp (ABC)$ và $BI \subset (ABC)$, suy ra $SA \perp BI$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BI \perp (SAC)$, suy ra $BI \perp SC$.

d) Theo giả thiết ta có $AH \perp SB$ (3).

Theo câu b) ta có $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$.(4)

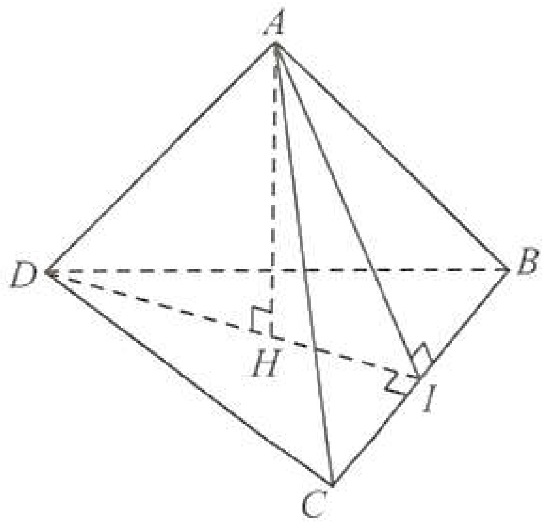
Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và BCD là các tam giác cân tại A và D. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng $BC \perp AD$.

b) Kẻ AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Lời giải



Hình 9

a) Tam giác ABC cân tại A và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.(1)

Tam giác DCB cân tại D và I là trung điểm của BC nên $DI \perp BC$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AID)$, suy ra $BC \perp AD$.

b) Ta có $AH \perp DI$ và $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (ADI)$, $AH \subset (ADI)$), suy ra $AH \perp (BCD)$.

Câu 14. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, SB = AB$ và $SB \perp (ABC)$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC, AB. Chứng minh rằng:

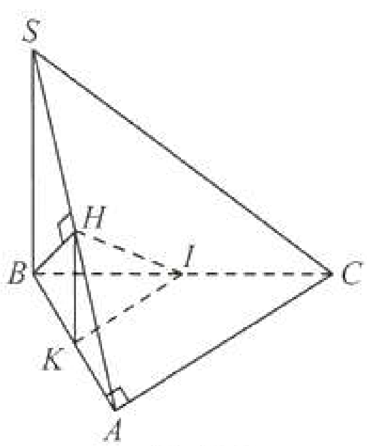
a) $AC \perp (SAB)$;

b) $BH \perp (SAC)$;

c) $KI \perp SA$;

d) $AB \perp IH$.

Lời giải



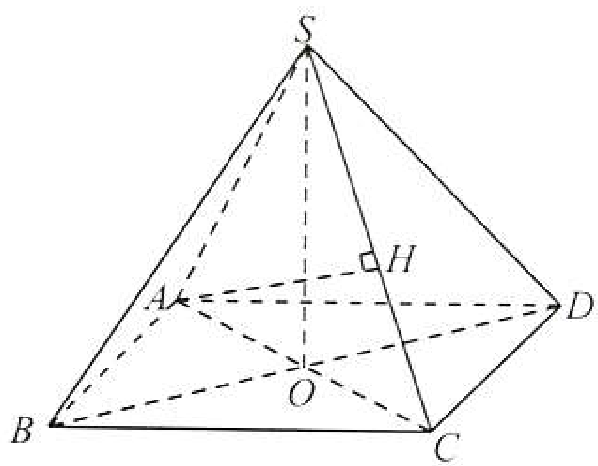
Hình 10

a) Ta có $AC \perp AB$ (vì ΔABC vuông tại A) và $AC \perp SB$ (vì $SB \perp (ABC)$), suy ra $AC \perp (SAB)$.

b) Vì $SB = AB$ nên ΔSAB cân tại B. Mà H là trung điểm của SA, suy ra $BH \perp SA$.(1)
Ta cũng có $AC \perp (SAB)$ và $BH \subset (SAB)$, suy ra $AC \perp BH$.(1)
Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$.
c) ΔABC có K, I lần lượt là trung điểm của AB, BC nên KI là đường trung bình của ΔABC, suy ra $KI // AC$. Ta lại có $AC \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp SA$.
d) ΔSAB có H, K lần lượt là trung điểm của SA, AB nên HK là đường trung bình của ΔSAB, suy ra $HK // SB$. Mặt khác $SB \perp AB$, suy ra $HK \perp AB$.(3)
Ta có $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp AB$.(4)
Từ (3) và (4) suy ra $AB \perp (HIK)$, suy ra $AB \perp IH$.

Câu 15. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $a\sqrt{2}$. Biết rằng $SA = SB = SC = SD, SO = 2a\sqrt{2}$.
a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
b) Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác SAC.

Lời giải

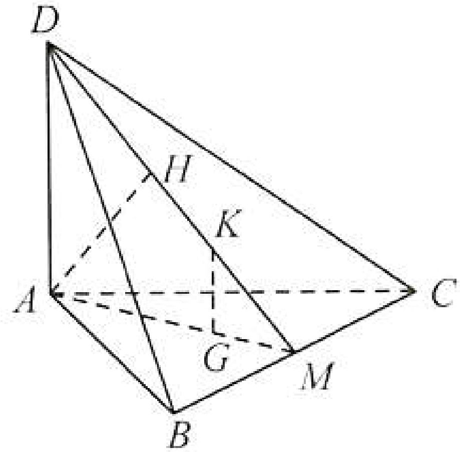


Hình 1

a) Ta có $SA = SC$, suy ra ΔSAC cân tại S, suy ra $SO \perp AC$.(1)
Ta có $SB = SD$, suy ra ΔSBD cân tại S, suy ra $SO \perp BD$.(2)
Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.
b) Ta có $AC = 2a, OC = a$,
$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = 3a$.
Vẽ đường cao AH của tam giác SAC. Ta có:
$AH = \frac{SO \cdot AC}{SC} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot 2a}{3a} = \frac{4a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC), ABC$ là tam giác cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $AH \perp MD$ tại H.
a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.
b) Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Chứng minh rằng $GK \perp (ABC)$.

Lời giải



Hình 3

a) Ta có $BC \perp DA, BC \perp AM$, suy ra

$BC \perp (ADM)$, suy ra $BC \perp AH$. Ta lại có $AH \perp DM$, suy ra $AH \perp (BCD)$.

b) Ta có $\frac{MK}{MD} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$, suy ra $GK // AD$.

Ta lại có $AD \perp (ABC)$, suy ra $GK \perp (ABC)$.

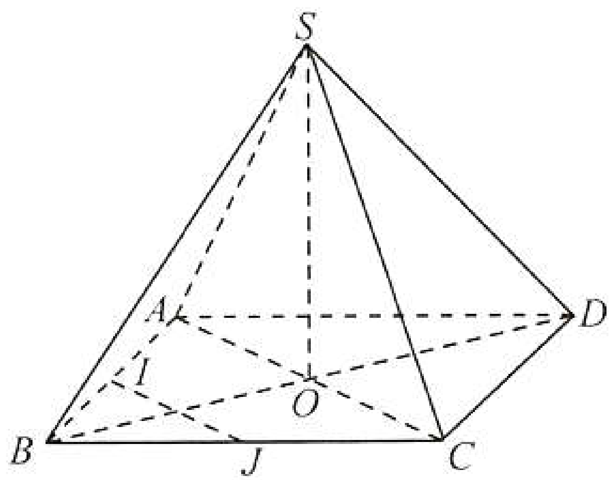
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, O là giao điểm của hai đường chéo, $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BA, BC. Chứng minh rằng $IJ \perp (SBD)$.

c) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

Lời giải



Hình 4

a) Ta có $SA = SC$, suy ra ΔSAC cân tại S, suy ra $SO \perp AC$.(1)

Tương tự ta có $SO \perp BD$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC \perp BD$ và $AC \perp SO$, suy ra $AC \perp (SBD)$.

Ta có IJ là đường trung bình của ΔABC nên suy ra $IJ // AC$, suy ra $IJ \perp (SBD)$.

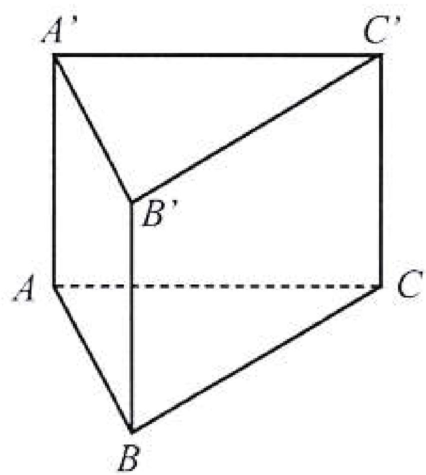
c) Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp SO$, suy ra $BD \perp (SAC)$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ (Hình 7). Chứng minh rằng:

a) $BB' \perp \left(A'B'C'\right)$;

b) $AA' \perp \left(A'B'C'\right)$.

Lời giải



Hình 7

a) Vì $BB' // AA'$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $BB' \perp \left(A'B'C'\right)$.

b) Vì $\left(A'B'C'\right) // (ABC)$ và $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp \left(A'B'C'\right)$.

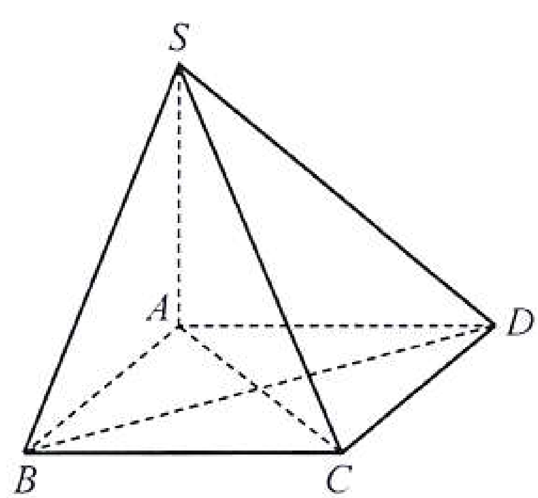
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì $BC \perp (SAB)$;

a) Nếu $ABCD$ là hình thoi thì $SC \perp BD$.

Lời giải

(Hình 8)



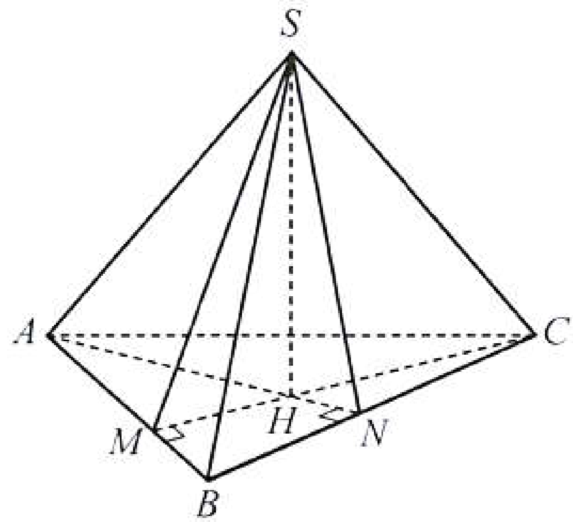
Hình 8

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$.

Mà $BC \perp BA$ vì $ABCD$ là hình chữ nhật, BA cắt SA trong mặt phẳng (SAB). Suy ra $BC \perp (SAB)$.
b) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Mà $BD \perp AC$ nên theo định lí ba đường vuông góc, ta có $BD \perp SC$.

Câu 20. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $SH \perp (ABC)$.

Lời giải

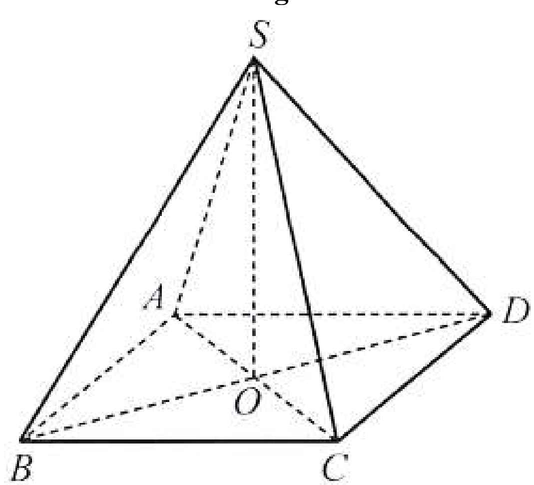


Hình 55

Gọi AN, CM là hai đường cao của tam giác ABC. Khi đó, H là giao điểm của AN và CM.
Theo giả thiết, $SA \perp SB, SA \perp SC$ mà SB, SC cắt nhau trong mặt phẳng (SBC) nên $SA \perp (SBC)$. Mà $BC \subset (SBC)$ nên $SA \perp BC$.
Ngoài ra, $AH \perp BC$ và SA, AH cắt nhau trong mặt phẳng (SAH) nên $BC \perp (SAH)$.
Mà $SH \subset (SAH)$ nên $BC \perp SH$.
Tương tự, ta có: $AB \perp SH$.
Bên cạnh đó, AB, BC cắt nhau trong mặt phẳng (ABC) nên $SH \perp (ABC)$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SC, SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải

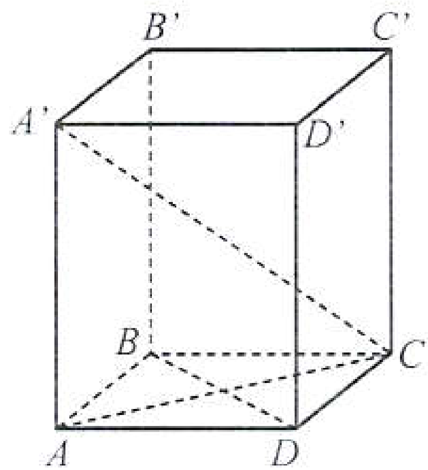


Hình 56

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC, BD.
Xét tam giác SAC cân tại S có SO là đường trung tuyến, nên SO là đường cao, suy ra $SO \perp AC$
Xét tam giác SBD cân tại S có SO là đường trung tuyến, nên SO là đường cao, suy ra $SO \perp BD$
Mà AC, BD cắt nhau trong mặt phẳng $(ABCD)$.
Do đó $SO \perp (ABCD)$.

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi, $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:
a) $BB' \perp \left(A'B'C'D'\right)$;
b) $BD \perp A'C$.

Lời giải

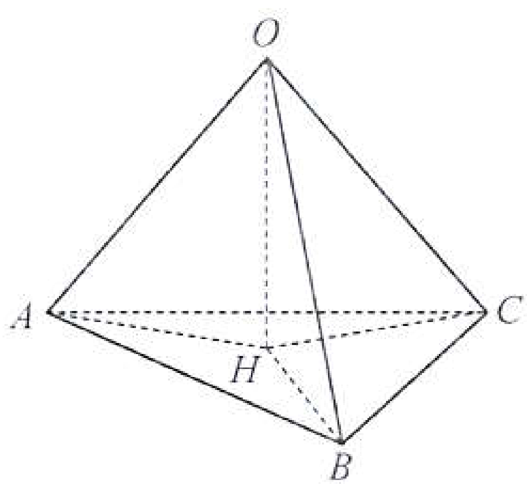


Hình 57

a) Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA' // BB'$. Mà $AA' \perp (ABCD)$ nên $BB' \perp (ABCD)$. Ngoài ra, ta cũng có $(ABCD) // \left(A'B'C'D'\right)$ nên $BB' \perp \left(A'B'C'D'\right)$.
b) Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Do $AA' \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABCD)$. Theo định lí ba đường vuông góc suy ra $BD \perp A'C$.

Câu 23. Cho hình chóp $O.ABC$ và điểm H không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA sao cho $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = \widehat{OHC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng H thuộc mặt phẳng (ABC).

Lời giải



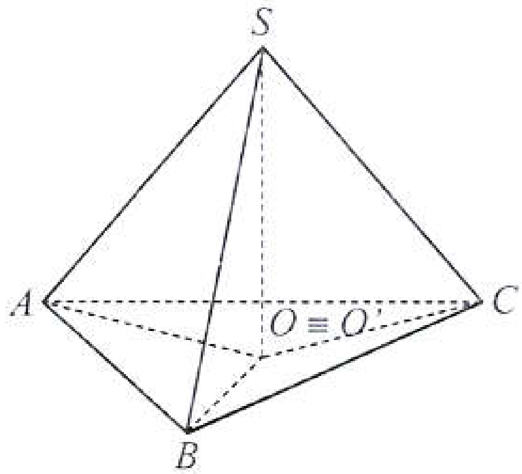
Hình 58

Vì H không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA nên HA, HB, HC đôi một cắt nhau.

Theo giả thiết, $OH \perp HA, OH \perp HB$ mà HA, HB cắt nhau nên $OH \perp (HAB)$. Tương tự, $OH \perp (HBC)$.
Vì (HAB) và (HBC) cùng đi qua H và vuông góc với OH nên hai mặt phẳng đó trùng nhau.
Suy ra H thuộc mặt phẳng (ABC).

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ thoả mãn $SA = SB = SC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $SO \perp (ABC)$.

Lời giải

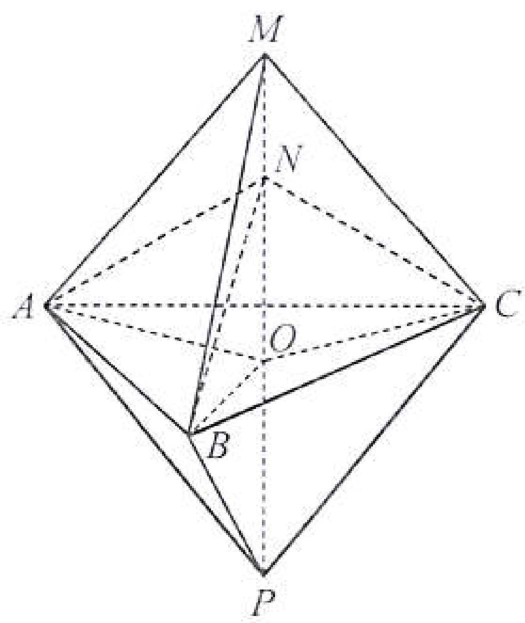


Hình 59

Gọi O' là hình chiếu của S trên (ABC). Khi đó, $SO' \perp (ABC)$. Mà $O'A, O'B, O'C$ đều nằm trên (ABC) nên $SO' \perp OA, SO' \perp OB, SO' \perp OC$.
Xét ba tam giác $SO'A, SO'B, SO'C$ vuông tại O' có $SA = SB = SC$ và SO' chung nên ba tam giác đó bằng nhau. Do đó, $O'A = O'B = O'C$.
Suy ra O' là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC hay O' trùng O. Vậy $SO \perp (ABC)$.

Câu 25. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P đôi một phân biệt thoả mãn $MA = MB = MC, NA = NB = NC, PA = PB = PC$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

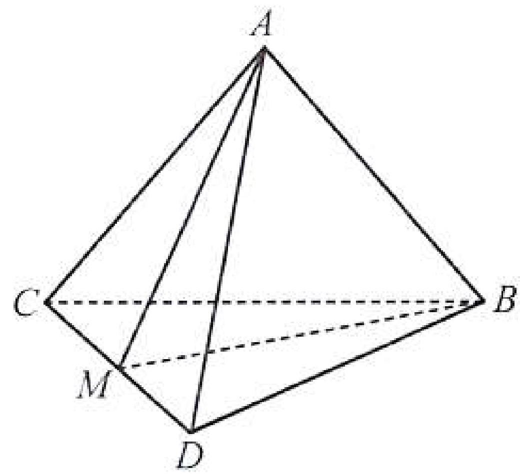


Hình 60

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.
Giả sử ba điểm M, N, P đều không thuộc mặt phẳng (ABC), áp dụng kết quả Bài 16 cho ba hình chóp $M.ABC, N.ABC, P.ABC$ ta có $MO \perp (ABC), NO \perp (ABC), PO \perp (ABC)$. Do đó ba đường thẳng MO, NO, PO trùng nhau hay M, N, P thẳng hàng.
Giả sử trong ba điểm M, N, P có một điểm nằm trên (ABC). Khi đó, theo giả thiết ta có điểm đó trùng O. Như vậy, cùng với kết quả trên ta có ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 26. Cho hình tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh $AB \perp CD$.

Lời giải



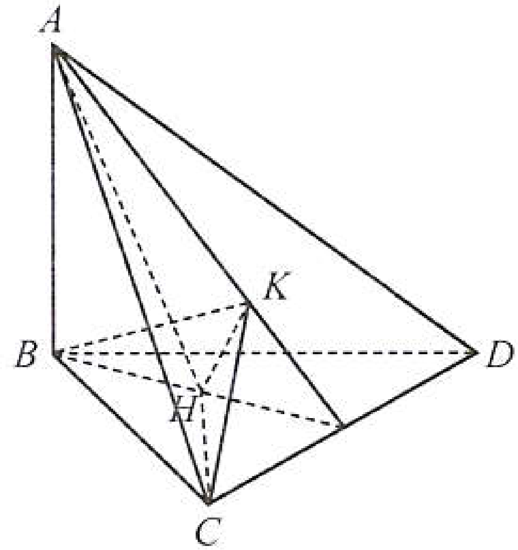
Hình 61

Gọi M là trung điểm của CD.
Vì $ABCD$ là hình tứ diện đều nên hai tam giác ACD và BCD là các tam giác đều.
Suy ra $AM \perp CD, BM \perp CD$.
Mà AM, BM cắt nhau trong mặt phẳng (ABM) nên $CD \perp (ABM)$. Ngoài ra, $AB \subset (ABM)$. Do đó, ta có $AB \perp CD$.

Câu 27. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD. Chứng minh rằng:

a) $AD \perp CH$;
b*) $HK \perp (ACD)$.

Lời giải

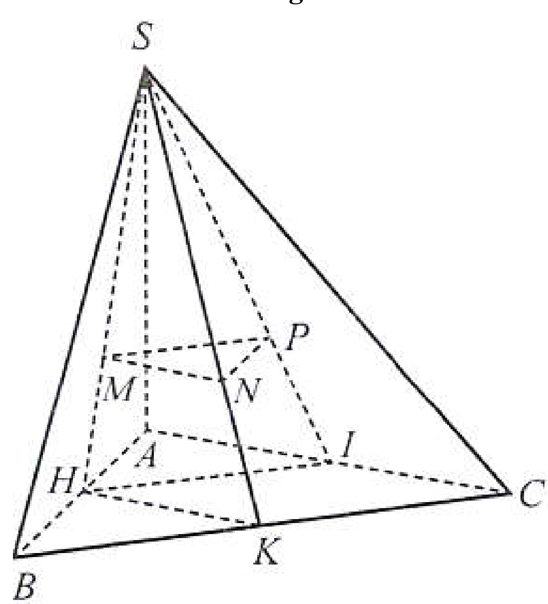


Hình 62

a) Vì $AB \perp (BCD), CH \subset (BCD)$ nên $AB \perp CH$.
Do H là trực tâm của tam giác (BCD) nên $CH \perp BD$. Mà AB, BD cắt nhau trong mặt phẳng (ABD) nên $CH \perp (ABD)$. Ngoài ra, $AD \subset (ABD)$ nên $AD \perp CH$.
b*) Vì K là trực tâm của tam giác (ACD) nên $CK \perp AD$. Mà CK, CH cắt nhau trong mặt phẳng (CHK) nên $AD \perp (CHK)$. Ngoài ra, $HK \subset (CHK)$ nên $AD \perp HK$. Áp dụng kết quả của Ví dụ 7 trang 93, ta có $CD \perp HK$. Bên cạnh đó, AC, CD cắt nhau trong mặt phẳng (ACD) nên $HK \perp (ACD)$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác SAB, SBC, SCA. Chứng minh rằng $SA \perp (MNP)$.

Lời giải



Hình 63

Gọi H, K, I lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Theo giả thiết ta có:
$\frac{SM}{SH} = \frac{SN}{SK} = \frac{SP}{SI} = \frac{2}{3}$. Do đó, trong tam giác SHK có $MN // HK$, trong tam giác SHI có $MP // HI$. Mà $HK \subset (ABC)$, $HI \subset (ABC)$ nên $MN // (ABC), MP // (ABC)$.

Ngoài ra, MN, MP cắt nhau trong mặt phẳng (MNP) nên $(MNP)//(ABC)$. Mà $SA \perp (ABC)$. Vậy $SA \perp (MNP)$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 29. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Khi làm cột treo quần áo, ta có thể tạo hai thanh đế thẳng đặt dưới sàn nhà và dựng cột treo vuông góc với hai thanh đế đó (H.7.15). Hãy giải thích vì sao bằng cách đó ta có được cột treo vuông góc với sàn nhà.

Hình 7.15

Lời giải

Điều này được giải thích bởi tính chất của đường thẳng và góc vuông. Một đường thẳng là đường đi qua hai điểm bất kỳ trên không gian và tạo thành một góc 180 độ. Trong khi đó, một góc vuông là một góc có độ lớn là 90 độ. Vì vậy, nếu ta đặt cột treo lên sao cho nó vuông góc với đường thẳng trên sàn nhà, thì chắc chắn cột treo sẽ đứng vuông góc với sàn nhà.

Bằng cách này, ta có thể đảm bảo rằng cột treo sẽ được đặt đúng vị trí và đứng thẳng đứng góc với sàn nhà, giúp cho quá trình sử dụng cột treo quần áo được dễ dàng hơn và tiện lợi hơn.

Câu 30. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho ba điểm phân biệt A, B, C sao cho các đường thẳng AB và AC cùng vuông góc với một mặt phẳng (P). Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Các đường thẳng AB, AC cùng vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt khác, qua điểm A có duy nhất đường thẳng vuông góc với (P). Do đó hai đường thẳng AB, AC trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.

Câu 31. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Một chiếc bàn có các chân cùng vuông góc với mặt phẳng chứa mặt bàn và mặt phẳng chứa mặt sàn. Hỏi hai mặt phẳng đó có song song với nhau hay không? Vì sao?

Lời giải

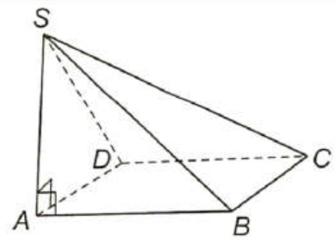
Hai mặt phẳng đó song song vì hai mặt phẳng đó phân biệt và cùng vuông góc với một đường thẳng, đường thẳng đó là đường thẳng chứa một trong các chân bàn.

Câu 32. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$.

Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD, SA \perp BC, SA \perp CD$.



Hình 7.7

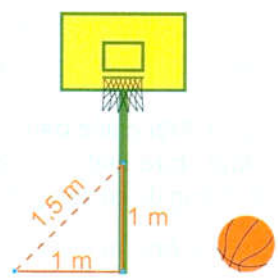
Mặt khác, $BC \perp AB, CD \perp AD \Rightarrow BC \perp (SAB), CD \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SB, CD \perp SD$.
Vậy các mặt bên SAD, SDC, SBC, SAB là các tam giác vuông.

Câu 33. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

Lời giải

Quả dọi vuông góc với mặt phẳng nước.

Câu 34. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột $1m$ đến một điểm trên cột, cách chân cột $1m$ được kết quả là $1,5m(H.7.27)$. Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?



Hình 7.27

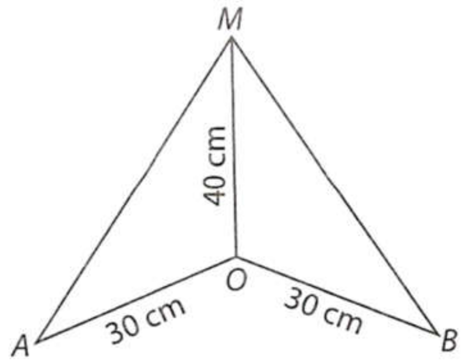
Lời giải

Đo chính xác thì cột không vuông góc với mặt sân vì nếu vuông góc với mặt sân thì theo định lí Pythagore, cạnh huyền bằng $\sqrt{2}\,m$, không phải $1,5m$.

Câu 35. Một chiếc cột được dựng trên nền sân phẳng. Gọi O là điểm đặt chân cột trên mặt sân và M là điểm trên cột cách chân cột $40cm$. Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm A và B đều cách O là $30cm$ (A, B, O không thẳng hàng). Người ta đo độ dài MA và MB đều bằng $50cm$. Hỏi theo các số liệu trên, chiếc cột có vuông góc với mặt sân hay không?

Lời giải

(H.7.6)



Hình 7.6

Ta có: $50^2 = 40^2 + 30^2$ nên $MA^2 = MO^2 + OA^2$ và $MB^2 = MO^2 + OB^2$. Do đó, tam giác MOA và tam giác MOB vuông tại O, hay $MO \perp OA$, $MO \perp OB$. Suy ra $MO \perp (OAB)$. Vậy chiếc cột vuông góc với mặt sân.

Câu 36. Một cây cột được dựng trên một sàn phẳng. Người ta thả dây dọi và ngắm thấy cột song song với dây dọi. Hỏi có thể khẳng định rằng cây cột vuông góc với sàn hay không? Vì sao?

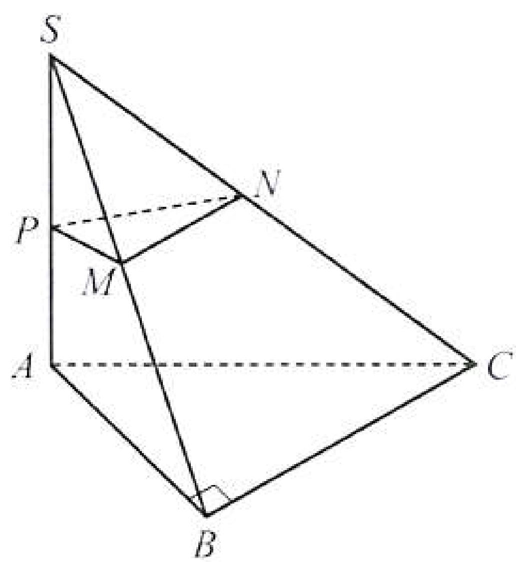
Lời giải

Vì dây dọi song song với cây cột và dây dọi vuông góc với mặt phẳng sàn nên cây cột vuông góc với mặt phẳng sàn.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC), BC \perp AB$. Lấy hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và điểm P nằm trên cạnh SA. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác vuông.

Lời giải

(Hình 9)



Hình 9

Vì $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.
Mà $BC \perp AB, AB$ và SA cắt nhau trong mặt phẳng (SAB). Suy ra $BC \perp (SAB)$.
Vì M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC nên $MN // BC$. Suy ra $MN \perp (SAB)$.

Mà $PM \subset (SAB)$ nên $MN \perp PM$.

Vậy tam giác MNP vuông tại M.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD. Chứng minh rằng:

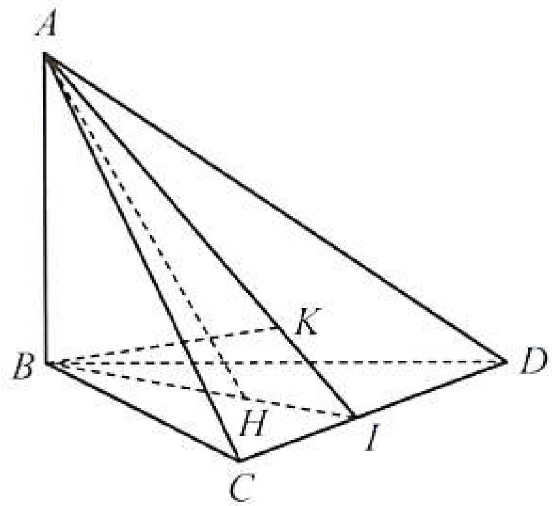
a) $CD \perp (ABH)$ và $CD \perp (ABK)$;

b) Bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

Lời giải

(Hình 12)



Hình 12

a) Vì $AB \perp (BCD)$ và $CD \subset (BCD)$ nên $AB \perp CD$. Mà $BH \perp CD$ vì H là trực tâm của tam giác BCD và AB, BH cắt nhau trong mặt phẳng (ABH) nên $CD \perp (ABH)$.

Tương tự ta chứng minh được $CD \perp (ABK)$.

b) Vì hai mặt phẳng (ABH) và (ABK) cùng đi qua điểm A và vuông góc với CD nên hai mặt phẳng này trùng nhau. Vậy bốn điểm A, B, H, K cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Trong mặt phẳng (BCD), gọi I là giao điểm của BH và CD. Khi đó, ba điểm A, K, I đều thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABHK)$ và (ACD). Suy ra A, K, I thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

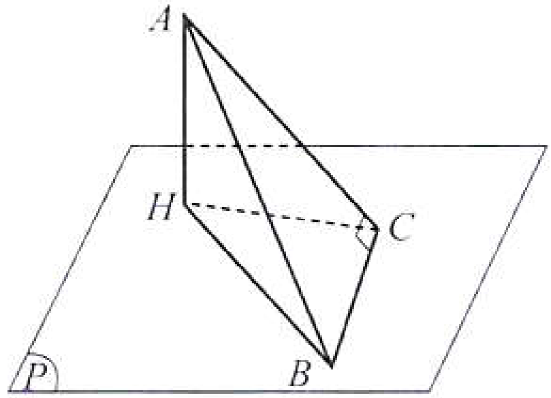
Câu 39. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ thoả mãn $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Lời giải

Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Chứng minh tương tự Bài 16 , ta có $OA = OB = OC = OD$. Suy ra O là tâm đường tròn đi qua bốn đỉnh tứ giác $ABCD$.

Câu 40. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B sao cho B thuộc (P) và A không thuộc (P). Điểm C chuyển động trên mặt phẳng (P) thoả mãn $\widehat{ACB} = 90^{\circ}$. Chứng minh rằng C chuyển động trên một đường tròn cố định trong (P).

Lời giải

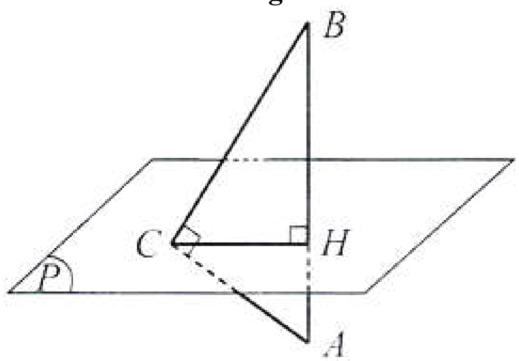


Hình 64

Gọi H là hình chiếu của A trên (P). Khi đó H cố định và HC là hình chiếu của AC trên (P). Vì $BC \perp AC$ nên theo Định lí ba đường vuông góc ta có $BC \perp HC$. Do đó C chuyển động trên đường tròn đường kính HB cố định nằm trong (P).

Câu 41. Cho đoạn thẳng AB và mặt phẳng (P) sao cho $(P) \perp AB$ và (P) cắt đoạn thẳng AB tại điểm H thoả mãn $HA = 4\,cm, HB = 9\,cm$. Điểm C chuyển động trong mặt phẳng (P) thoả mãn $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng điểm C thuộc đường tròn tâm H bán kính $6\,cm$ trong mặt phẳng (P).

Lời giải



Hình 65

Vì $AC \perp CB$ nên A, B, C không thẳng hàng. Do $AB \perp (P), HC \subset (P)$ nên $AB \perp HC$. Ta có ΔHBC đồng dạng ΔHCA nên $HC^2 = HA\,.\,HB$, suy ra $HC = \sqrt{4.9} = 6(cm)$. Vậy C thuộc đường tròn tâm H bán kính $6\,cm$ trong (P).