

CHUYÊN ĐỀ 7. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI TOÁN THỰC TẾ

• Fanpage: Nguyễn Bảo Vương - <https://www.nbv.edu.vn/>

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

1. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG

Giả sử y là một hàm số của x và ta viết $y = f(x)$. Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2 , thì sự thay đổi của x là $\Delta x = x_2 - x_1$, và sự thay đổi tương ứng của y là $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi trung bình của y đối với x trên đoạn $[x_1; x_2]$.

Giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi tức thời của y đối với x tại điểm $x = x_1$.

Như vậy, đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$.

Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lý, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.
- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

Ví dụ 1. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất $2m$ với vận tốc ban đầu $24,5m/s$ là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lý đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Giải

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t(m/s)$.

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9(m/s)$.

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\frac{b}{2a} = \frac{24,5}{2 \cdot 4,9} = 2,5$

(giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5) = 32,625(m)$.

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$, hay $t \approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5,08) = 24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284(m/s)$.

Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Ví dụ 2. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm

được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm

ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Giải

Ta có: $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0.$

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 12. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt

quá 100 tế bào.

Ví dụ 3. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = 300 - 5x + 0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200) = 300 - 5 \cdot 200 + 0,375 \cdot 200^2 = 14300$.

Chi phí biên tại $x = 200$ là 14300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

$$C(201) - C(200) = 1004372,625 - 990000 = 14\,372,625 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

Ví dụ 4. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100-x} \text{ (triệu đồng), } 0 \leq x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Giải

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{300x}{100-x}, 0 \leq x < 100$.

Ta có:

$$-y' = \frac{30000}{(100-x)^2} > 0, \text{ với mọi } x \in [0; 100).$$

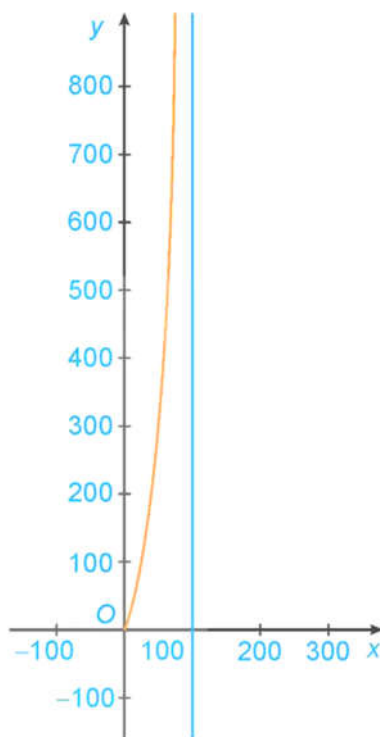
Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$.

$$- \lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{300x}{100-x} = +\infty, \text{ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là } x = 100.$$

Bảng biến thiên:

x	0		100
$C'(x)$		+	
$C(x)$	0		$+\infty$

Đồ thị hàm số như Hình.



a) Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.

b) Vì $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = +\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x = 100$) nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).

2. MỘT VÀI BÀI TOÁN TỐI ƯU HOÁ ĐƠN GIẢN

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, **chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.**

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biên thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

Bước 1. Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

Bước 2. Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.

Bước 3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

Ví dụ 5. Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Giải

Đổi 1 lít = 1000 cm^3 .

Gọi $r(\text{cm})$ là bán kính đáy của hình trụ, $h(\text{cm})$ là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Do thể tích của hình trụ là 1000cm^3 nên ta có: $1000 = V = \pi r^2 h$, hay $h = \frac{1000}{\pi r^2}$.

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, r > 0$.

Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$S' = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}; S' = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 500 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Bảng biến thiên:

r	0	$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$	$+\infty$
$S'(r)$		0	+
$S(r)$	$+\infty$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$+\infty$

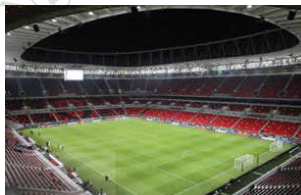
$$\text{Khi đó: } h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\frac{250000}{\pi^2}}} = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}.$$

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42(\text{cm})$ và chiều cao

$$h = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \approx 10,84(\text{cm}).$$

Chú ý. Từ lời giải Ví dụ 5 ta thấy: Nếu hình trụ có thể tích V không đổi thì diện tích bề mặt của hình trụ nhỏ nhất khi chiều cao bằng đường kính đáy.

Ví dụ 6. Một đội bóng đá thi đấu trong một sân vận động có sức chứa 55000 khán giả. Với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình là 27000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất?



Giải

Gọi p (nghìn đồng) là giá của mỗi vé; x là số khán giả mua vé. Ta cần xác định hàm cầu $p = p(x)$.

Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất.

Giá vé $p_1 = 100$ ứng với $x_1 = 27000$ và giá vé $p_2 = 90$ ứng với $x_2 = 27000 + 3000 = 30000$.

Do đó, phương trình đường thẳng $p = ax + b$ đi qua hai điểm $(27000; 100)$ và $(30000; 90)$ là

$$p - 100 = \frac{100 - 90}{27000 - 30000}(x - 27000), \text{ hay } p - 100 = -\frac{1}{300}(x - 27000), \text{ tức là } x = -300p + 57000.$$

Hàm doanh thu từ tiền bán vé là $R(p) = px = p(-300p + 57000) = -300p^2 + 57000p$.

Ta cần tìm p sao cho R đạt giá trị lớn nhất. Ta có:

$$R'(p) = -600p + 57000; R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 95,38$$

Bảng biến thiên:

p	0	95	$+\infty$	
$R'(p)$		+	0	-
$R(p)$	0		2 707 500	$-\infty$

Vậy với giá vé là 95 nghìn đồng một vé thì doanh thu bán vé là lớn nhất.

Ví dụ 7. Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hằng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là $P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000$.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = P(x), x \geq 0$. Sử dụng đồ thị đã vẽ để trả lời các câu hỏi sau:

- Khi chỉ sản xuất một vài máy xay sinh tố, công ty sẽ bị lỗ (vì lúc này lợi nhuận âm). Hỏi hằng tháng công ty phải sản xuất ít nhất bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn?
- Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu? Công ty có nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng hay không?

Giải

Xét hàm số $y = P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000, x \geq 0$.

Ta có:

$$- y' = P'(x) = -0,9x^2 + 72x + 1800; y' = 0 \Leftrightarrow x = 100 \text{ (vì } x \geq 0 \text{)}.$$

$$P'(x) > 0 \text{ với mọi } x \in [0; 100), P'(x) < 0 \text{ với mọi } x \in (100; +\infty).$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$ và nghịch biến trên khoảng $(100; +\infty)$.

Tại $x = 100$, hàm số đạt cực đại và $y_{CD} = y(100) = 192000$.

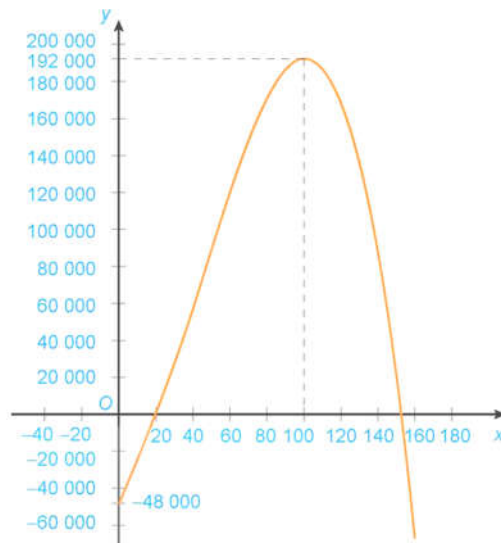
$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	0	100	$+\infty$	
$P'(x)$		+	0	-
$P(x)$			192 000	
	-48 000			$-\infty$

Đồ thị hàm số như Hình (ở đây ta lấy một đơn vị trên trục hoành bằng 1000 đơn vị trên trục tung).

Từ đồ thị đã vẽ suy ra:



- Đồ thị xuất phát từ điểm $(0; -48000)$, ở phía dưới trục hoành (tức là công ty đang bị lỗ), và giao với trục hoành tại điểm đầu tiên có hoành độ $x = 20$. Do đó, hằng tháng công ty cần sản xuất ít nhất 20 chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn.

b) Từ đồ thị ta thấy khi sản xuất hơn 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng thì càng sản xuất nhiều lợi nhuận càng giảm. Do đó, công ty không nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng. Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể thu được là $y_{CD} = y(100) = 192000$ (nghìn đồng), tức là 192 triệu đồng, đạt được khi sản xuất đúng 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, t \geq 0$.



Hỏi trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?

Câu 2. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$$N(t) = \frac{25t+10}{t+5}, t \geq 0, \text{ trong đó } N(t) \text{ được tính bằng nghìn người.}$$

a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Câu 3. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{27t+10}{t+10} \quad (f(t) \text{ được tính bằng nghìn người}).$$

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 2005 là 19,57 nghìn người.

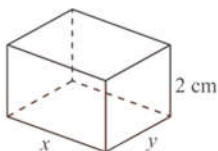
b) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Khi đó $f'(t) = \frac{260}{(t+10)^2}$

c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Khi đó tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là $\approx 0,33$

d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

Khi đó vào năm 2026 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm

Câu 4. Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất.



Chiều cao hộp phải là 2 cm , các kích thước khác là x, y với $x > 0$ và $y > 0$.

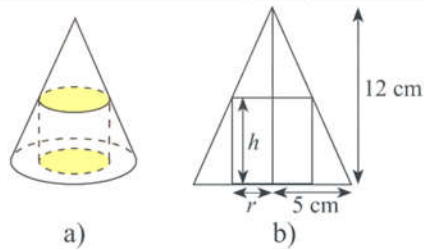
a) Hãy biểu thị y theo x .

b) Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là: $S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 5. Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 12 cm và bán kính đáy bằng 5 cm (Hình a). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình b.



a) Chứng minh rằng công thức tính bán kính r của đáy hình trụ theo chiều cao h của nó là:

$$r = \frac{5(12-h)}{12}.$$

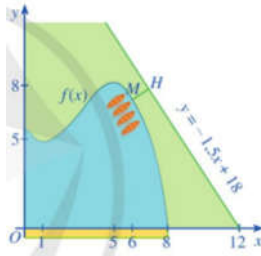
b) Chứng minh biểu thức sau biểu thị thể tích khối trụ theo h :

$$V(h) = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}.$$

c) Tìm h để khối trụ có thể tích lớn nhất.

Câu 6. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa (Hình), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số

$$y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56). \text{ Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là } 100m$$



a) Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài bao nhiêu mét?

b) Tại những điểm nào trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) thì khoảng cách theo Hình phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất? Tìm khoảng cách lớn nhất đó.

c) Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tìm tọa độ của điểm để xây bến thuyền này.

Câu 7. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao $250km$ so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm

$$h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250, \text{ trong đó } t \text{ là thời gian tính bằng giây và } h \text{ là độ cao tính bằng kilômét}$$

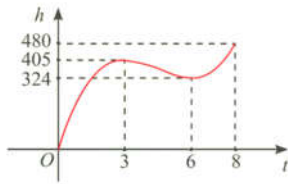
a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).

b) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 50$. Xác định hàm số $v(t)$.

c) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

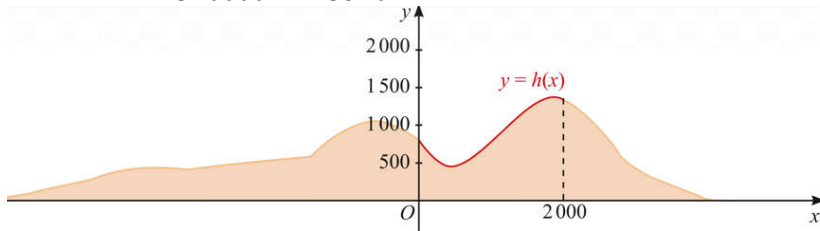
Câu 8. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?
 Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

Câu 9.

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840, 0 \leq x \leq 2000.$$



Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.

Câu 10.

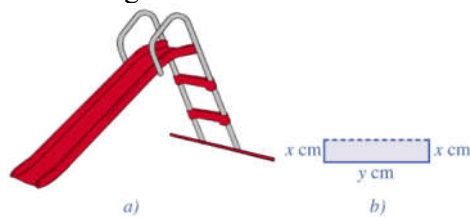
Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Câu 11.

Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình b. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



a) Gọi S là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của x và viết công thức tính S theo x .

b) Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Câu 12.

Thể tích V (đơn vị: centimet khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ C \leq T \leq 30^\circ C$) được tính bởi công thức sau: $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$.

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ C \leq T \leq 30^\circ C$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Câu 13.

Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23, (v \text{ được tính bằng } ft/s, 1 \text{ feet} = 0,3048 m)$$



Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Câu 14.

Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

Câu 15. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Câu 16. Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m (Hình). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?



Câu 17. Khối lượng $q(\text{kg})$ của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

a) Viết công thức biểu diễn R theo p .

b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Câu 18. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4; 0 \leq t \leq 0,5.$$

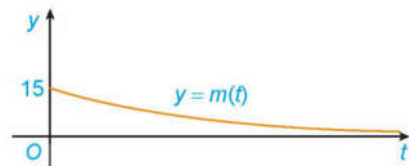
a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?

c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Câu 19. Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam) sau t ngày phân rã được cho bởi hàm số

$$m(t) = 15e^{-0,012t}.$$



Khối lượng $m(t)$ thay đổi ra sao khi $t \rightarrow +\infty$?

Điều này thể hiện trên Hình như thế nào?

Câu 20. Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100 - p} \text{ (triệu đồng)}, \text{ với } 0 \leq p < 100.$$

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

Câu 21. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là

$$C(x) = 2x + 50 \text{ (triệu đồng)}$$

Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Câu 22. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144m^2$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$.

- Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.
- Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Câu 23. Trong Hình, đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimet.



Chứng minh rằng $y = 55 - \frac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.

Câu 24. Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức:

$$C(x) = \frac{50x + 2000}{x}.$$

Tìm các đường tiệm cận của hàm số $C(x)$.

Câu 25. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

Câu 26. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

- Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200 + t}$.

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Câu 27. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức

$$S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right), \text{ trong đó } x \geq 1.$$

a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

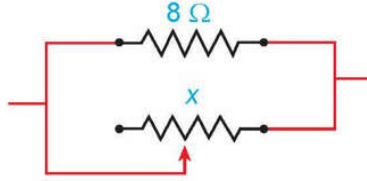
b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Câu 28. Một cốc chứa 30ml dung dịch KOH (potassium hydroxide) với nồng độ 100mg/ml.

Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8mg/ml được trộn vào cốc.

- Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x(ml)$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.
- Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.
- Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml.

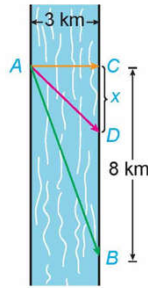
Câu 29. Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).



Giả sử một điện trở 8Ω được mắc song song với một biến trở như Hình. Nếu điện trở đó được kí hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x . Vẽ đồ thị của hàm số $y = R(x), x > 0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

- Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.
- Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8Ω .

Câu 30. Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt. Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B , hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B , hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B . Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



Câu 31. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hoá nào đó là:

$$C(x) = 23000 + 50x - 0,5x^2 + 0,00175x^3.$$

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(100)$ và giải thích ý nghĩa của nó.
- So sánh $C'(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 101.

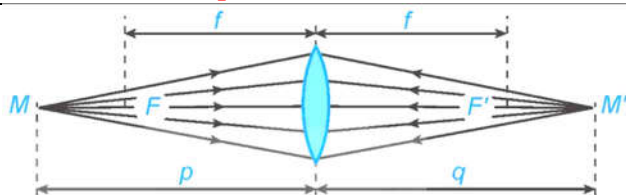
Câu 32. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hoá được cho bởi công thức

$$p = \frac{354}{1 + 0,01x}, x \geq 0, \text{ trong đó } p \text{ là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và } x \text{ là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.}$$

- Tìm công thức tính x như là hàm số của p . Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $x = x(p)$. Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:
 - Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;
 - Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p)$.

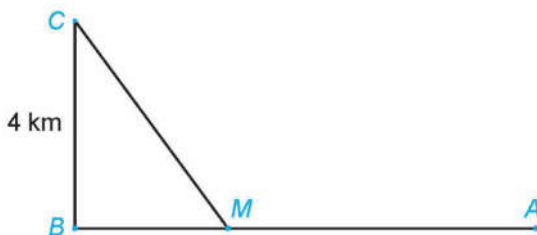
Câu 33. Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f . Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$



- a) Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f; +\infty)$.
 b) Tính các giới hạn $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p)$; $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.
 c) Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f; +\infty)$.

Câu 34. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như Hình. Khoảng cách từ C đến B là 4 km . Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10 km . Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng.



Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.

Câu 35. Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức:

$$v(x) = k(x_0 - x)x^2, \frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$$
 trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Tìm x theo x_0 để vận tốc của luồng khí một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất.

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p.285)

Câu 36. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

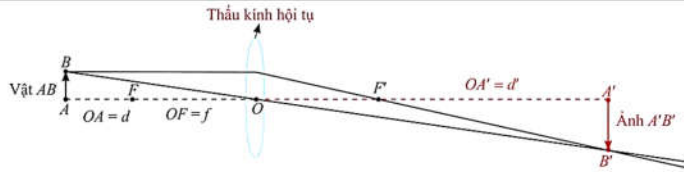
a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

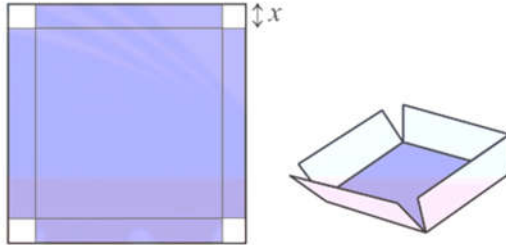
Câu 37. Xét một vật thật đặt trước thấu kính hội tụ có tiêu cự $f > 0$. Gọi d là khoảng cách từ vật đến thấu kính ($d > 0$), d' là khoảng cách từ thấu kính đến ảnh (ảnh thật thì $d' > 0$, ảnh ảo thì $d' < 0$). Ta có công thức: $\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$ hay $d' = \frac{df}{d-f}$.

Xét trường hợp $f = 3$, đặt $x = d, y = d'$. Ta có hàm số $y = \frac{3x}{x-3}$ và $x \neq 3$.

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số trên.
 b) Dựa vào đồ thị hàm số trên, hãy cho biết vị trí của vật để ảnh của vật là: ảnh thật, ảnh ảo.
 c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm thì ảnh thay đổi như thế nào?



Câu 38. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh $6dm$ làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình).



Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.

Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

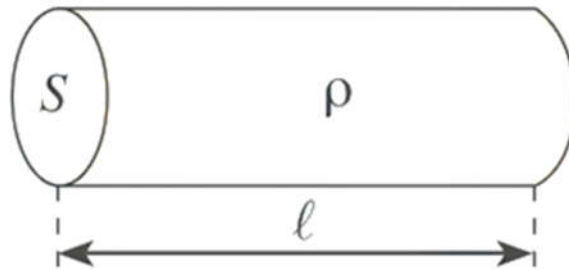
Câu 39. Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức:

$$\bar{C}(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}.$$

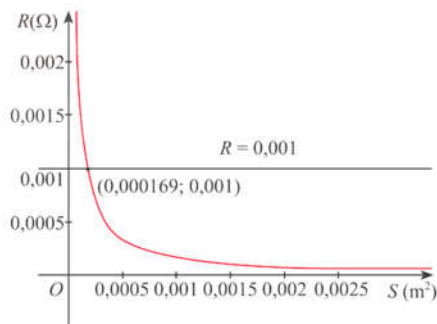
a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\bar{C}(x)$ trên $[30; 120]$.

b) Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

Câu 40. Điện trở $R(\Omega)$ của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất $\rho(\Omega m)$, chiều dài $\ell(m)$ và tiết diện $S(m^2)$ được cho bởi công thức $R = \rho \frac{\ell}{S}$



Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S (ở nhiệt độ $20^\circ C$) của một sợi dây điện dài $10m$ làm từ kim loại có điện trở suất ρ và thu được đồ thị hàm số như Hình.



a) Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S ?

b) Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$.

c) Tính điện trở suất ρ của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm bằng kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

Kim loại	Điện trở suất ở 20 °C (Ωm)
Bạc	$1,62 \cdot 10^{-8}$
Đồng	$1,69 \cdot 10^{-8}$
Vàng	$2,44 \cdot 10^{-8}$
Nhôm	$2,75 \cdot 10^{-8}$
Sắt	$9,68 \cdot 10^{-8}$

Câu 41. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

a) Tính số dân của thị trấn vào năm 2022 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $f(t)$.

c) Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

- Tính tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn đó.

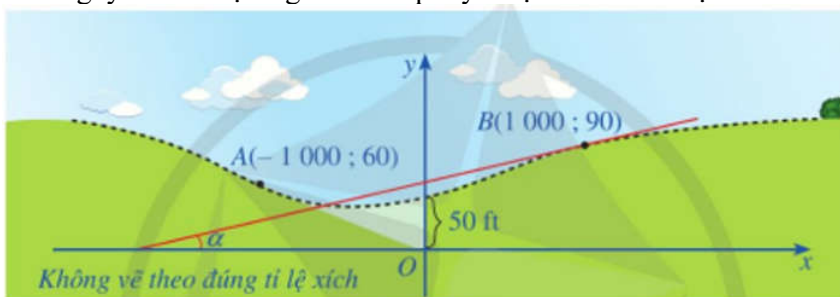
- Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm?

Câu 42. (Bài toán thiết kế mô hình đường giao thông) Để thiết kế mô hình của một đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi với sự khác biệt về độ cao ở vị trí hai sườn đồi giao nhau là 50 feet (Hình 27), người ta có thể làm như sau:

- Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là vị trí hai sườn đồi giao nhau, phương nằm ngang là trục Ox , đơn vị trên mỗi trục tọa độ là feet ($1 \text{ feet} = 0,3048 m$).

- Chọn hai vị trí A, B lần lượt trên hai sườn đồi. Bằng cách đo đạc tại thực địa, ta xác định được tọa độ của hai điểm A, B và góc dốc α (đơn vị: độ) tại điểm B của sườn đồi. Giả sử ta có $A(-1000; 60), B(1000; 90)$ và $\tan \alpha = 0,04$ (Hình)

- Trong hệ trục tọa độ Oxy , quan sát đường cong (vẽ bằng nét đứt) mô phỏng đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi, đường cong đó gọi nên hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba. Vì thế ta có thể chọn hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) sao cho trong hệ trục tọa độ Oxy , đồ thị của hàm số đó trên đoạn $[-1000; 1000]$ mô phỏng đoạn đường cao tốc cần thiết kế. Ta chọn theo nguyên tắc: Hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04.



Hãy xác định hàm số bậc ba đó.

Câu 43. (Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

· Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau t tuần học ($5 \leq t \leq 30$), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong Bảng

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

- Ta cần chọn hàm số $y = f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở Bảng, tức là ở hệ trục tọa độ Oxy , đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0; +\infty)$ "gần" với các điểm $A(5;38)$, $B(10;56)$, $C(15;79)$, $D(20;90)$, $E(25;93)$, $G(30;94)$. Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y = f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M \in \mathbb{R}, M > 94$. Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở Bảng. Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ ($ac \neq 0$) cho mục đích đó. Dựa

vào Bảng, ta chọn hàm số $f(t) = \frac{110t-280}{t+2}$ ($t > 0$).

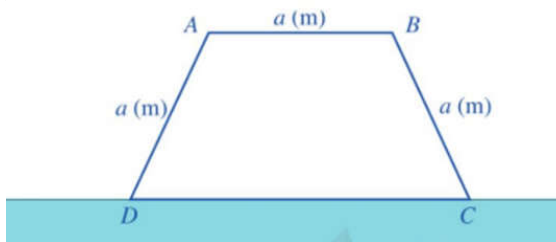
a) Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút).

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

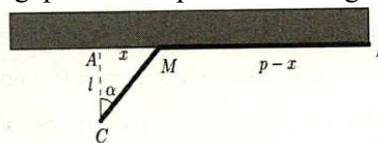
c) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

Câu 44. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2 . Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm , để lề trái và lề phải đều là 2 cm . Phần còn lại của trang sách được in chữ. Kích thước tối ưu của trang sách là bao nhiêu để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất?

Câu 45. Một bác nông dân có ba tấm lưới thép $B40$, mỗi tấm dài $a(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như Hình (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Câu 46. Từ tổng kho ở địa điểm C cách bờ sông $l(km)$, người ta cần vận chuyển hàng hóa đến trạm trung chuyển M ở bờ sông để rồi vận chuyển tiếp bằng đường thủy đến kho cảng B (hình vẽ). Hãy hoạch định tuyến đường bộ từ C đến M và tiếp đến là tuyến đường thủy đến B sao cho chi phí vận chuyển là thấp nhất, biết rằng chi phí vận chuyển một tấn hàng (trên cùng một đơn vị khoảng cách) theo đường bộ đắt gấp 4 lần chi phí theo đường thủy.

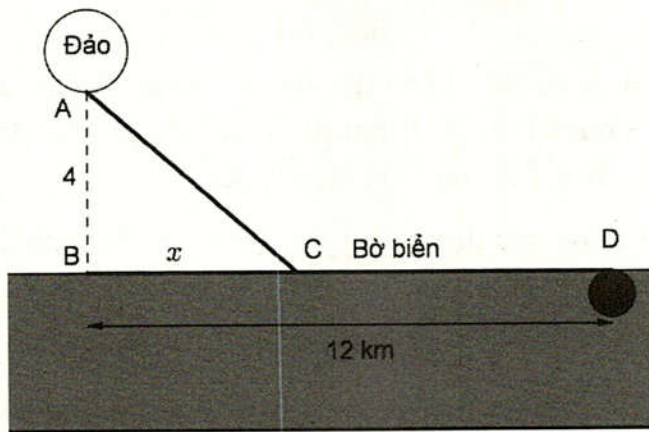


Câu 47. Theo các nhà điều cầm học, khi bay ngang qua mặt nước, chim phải tiêu tốn nhiều năng lượng hơn so với khi bay ngang qua đất liền, và theo bản năng, chim luôn chọn đường bay tiêu tốn ít năng lượng nhất.

Một con chim cất cánh từ đảo A cách bờ biển 4 km . Hãy xem A như là một điểm, bờ biển là một đường thẳng; và gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên bờ biển. Quan sát cho thấy: trước tiên chim bay đến một điểm C trên bờ biển, sau đó mới bay dọc theo bờ biển đến tổ D của nó. Giả sử B và D cách nhau 12 km .

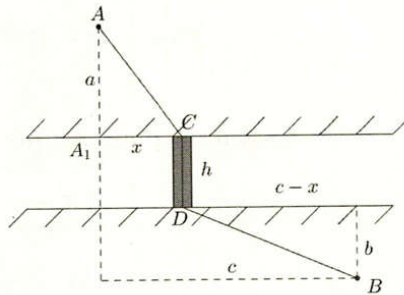
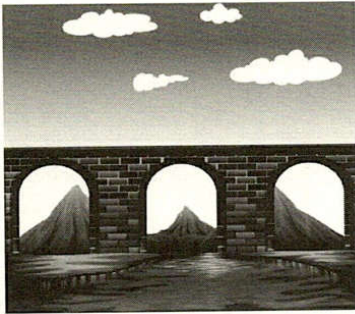
Đặt $r = W/L$;

trong đó W và L lần lượt là năng lượng tiêu tốn mỗi kilômét bay khi chim bay ngang qua mặt nước và khi chim bay ngang qua đất liền.

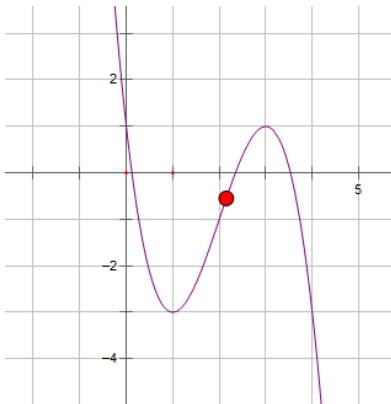


Xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.

Câu 48. Hãy chọn địa điểm để xây dựng một cây cầu vượt sông sao cho chiều dài đoạn đường nối hai địa điểm cho trước ở hữu nghị và tả nghị sông là lớn nhất (hình vẽ).



Câu 49. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3 - 9t + 1$, s tính theo mét, t tính theo giây. Trong 5 giây đầu tiên, thời điểm t mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất sẽ là bao nhiêu?

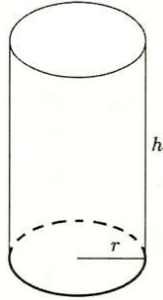


Câu 50. Một cái dây dài L được cắt thành hai đoạn. Một đoạn bị nối thành dạng hình vuông và đoạn kia là thành hình tròn. Cái dây sẽ bị cắt như thế nào sao cho tổng diện tích bao gồm bởi hai đoạn dây này là

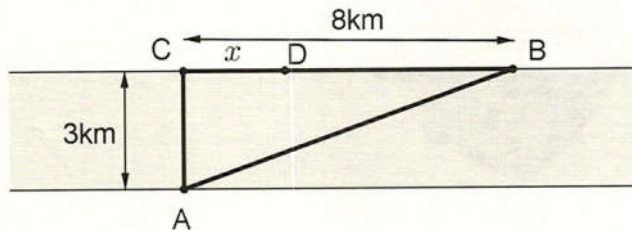


- a) Cực đại;
- b) Cực tiểu.

- Câu 51.** Một nhà máy sản xuất các hộp đựng xà phòng hình trụ nhận a đơn đặt hàng đối với các hộp có thể tích được chỉ rõ là V_0 . Diện tích toàn bộ bề mặt của một cái hộp sẽ đạt cực tiểu khi nào? Và số lượng kim loại cần cho nhà máy là bao nhiêu?

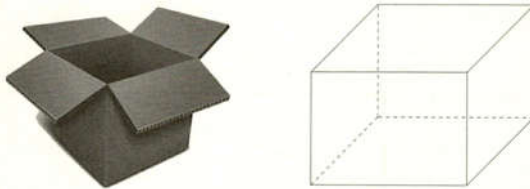


- Câu 52.** Một người đàn ông muốn hạ thủy chiếc thuyền của mình từ điểm A trên bờ một con sông rộng 3 km và muốn cập bến sang điểm B của bờ đối diện, cách 8 km theo hướng xuôi dòng với thời gian nhanh nhất có thể (xem hình vẽ)

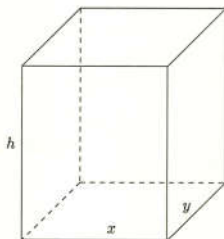


Ông có thể chèo trực tiếp sang điểm C bờ đối diện rồi sau đó chạy xuống điểm B , hoặc ông có thể chèo thẳng sang điểm B , hoặc chèo đến điểm D giữa C và B rồi sau đó chạy xuống điểm B . Nếu ông có thể chèo qua sông với vận tốc là 6 km/h và chèo xuôi dòng với vận tốc 8 km/h , thì ông nên dùng chân ở điểm nào để đến B nhanh nhất? (Giả sử vận tốc của dòng nước không ảnh hưởng bao nhiêu đến vận tốc chèo thuyền của người đàn ông).

- Câu 53.** Từ một tấm bìa carton hình chữ nhật có kích thước là $a \times b$ với $a < b$. Người ta cắt bỏ 4 hình vuông bằng nhau ở 4 góc rồi gò thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Hỏi cạnh của hình vuông cắt đi phải bằng bao nhiêu để hình hộp đó có thể tích lớn nhất?



- Câu 54.** Cần phải xây dựng một hồ ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $V(\text{m}^3)$ không đổi, hệ số $k > 0$ cho trước (k là tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy. Hãy xác định các kích thước của đáy để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.



- Câu 55.** Kính viễn vọng Hubble được tàu không gian Discovery đưa vào sử dụng ngày 24/4/1990. Phương trình biểu diễn vận tốc của tàu không gian này từ lúc rời bệ phóng $t = 0$ cho đến khi tên lửa vào thời gian $t = 126$ giây được cho bởi

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 \text{ (feet / s)}.$$

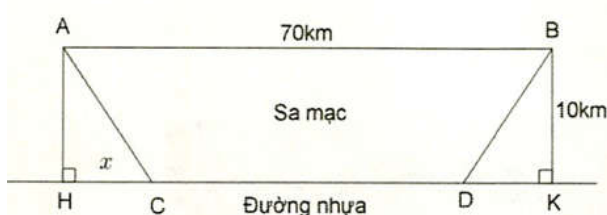
Hãy sử dụng phương trình này để tính các giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của gia tốc tàu giữa lúc cất cánh và lúc hoàn toàn được phóng đi.

- Câu 56.** Enzyme là protein hoạt động như một chất xúc ta làm tăng tốc độ phản ứng hóa học xuất hiện trong các tế bào. Trong một phản ứng nào đó, một enzyme được chuyển hóa thành một enzyme

khác, được gọi là enzyme sản phẩm. Enzyme sản phẩm này hoạt động như một chất xúc tác cho chính sự hình thành của nó. Tốc độ R mà tại đó enzyme sản phẩm được tạo thành được cho bởi phương trình $R = kp(l - p^2)$, trong đó l là tổng số lượng enzyme ban đầu và enzyme sản phẩm, p là lượng enzyme sản phẩm, và k là hằng số dương. Với giá trị nào của p thì R đạt giá trị lớn nhất?

Câu 57. Hàm chi phí của một nhà máy được cho bởi $C = C(Q) = \frac{Q^2}{4} + 3Q + 400$ trong đó C là tổng chi phí sản xuất Q đơn vị sản phẩm. Với mức sản lượng là bao nhiêu thì chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là thấp nhất? Khi đó chi phí trung bình tối thiểu bằng bao nhiêu?

Câu 58. Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B cách A một đoạn là 70km. Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30km/h. Nhà địa chất ấy phải đến được điểm B sau 2 giờ. Vì vậy, nếu anh ta đi thẳng từ A đến B sẽ không thể đúng giờ. May mắn thay, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10km. Trên đường nhựa này, thì xe của nhà địa chất học có thể di chuyển với vận tốc 50km/h. Làm thế nào để nhà địa chất học đến sớm nhất (đảm bảo trong khung giờ cho phép)?



PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là:

- A. $-9m/s^2$. B. $9m/s^2$. C. $-12m/s^2$. D. $12m/s^2$.

Câu 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $89(m/s)$. B. $71(m/s)$. C. $109(m/s)$. D. $\frac{25}{3}(m/s)$.

Câu 3. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tạo đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

- A. $t = 2$. B. $t = 0,5$. C. $t = 2,5$. D. $t = 1$.

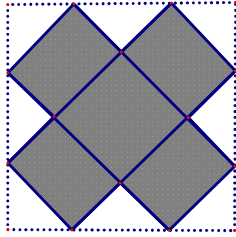
Câu 4. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $289(m/s)$. B. $105(m/s)$. C. $111(m/s)$. D. $487(m/s)$.

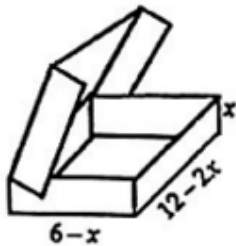
Câu 5. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng $10m^3$. Thùng tôn là hình hộp chữ nhật có chiều dài đáy bằng hai lần chiều rộng và không có nắp. Trên thị trường giá tôn làm đáy thùng là $75.000/m^2$ và giá tôn làm thành xung quanh thùng là $55.000/m^2$. Tính chi phí thấp nhất để làm thùng đựng gạo. (Làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 1.418.000 đồng. B. 1.403.000 đồng. C. 1.402.000 đồng. D. 1.417.000 đồng.

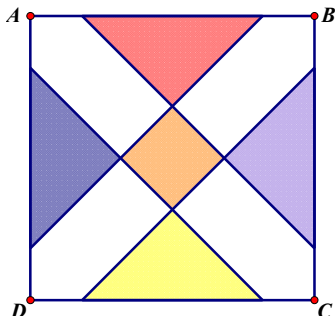
- Câu 6.** Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



- A. $8\sqrt{2}$. B. $10\sqrt{2}$. C. $9\sqrt{2}$. D. $11\sqrt{2}$.
- Câu 7.** Ông A dự định sử dụng hết $5,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) ?:
- A. $1,17 \text{ m}^3$. B. $1,01 \text{ m}^3$. C. $1,51 \text{ m}^3$. D. $1,40 \text{ m}^3$.
- Câu 8.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. 216 (m/s) B. 30 (m/s) C. 400 (m/s) D. 54 (m/s)
- Câu 9.** Trong một chuyển động thẳng, chất điểm chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 10$, trong đó thời gian t tính bằng giây và quãng đường s tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm chất điểm dừng lại là
- A. -6 m/s^2 . B. 0 m/s^2 . C. 12 m/s^2 . D. 10 m/s^2 .
- Câu 10.** Một hộp đựng Chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tư thể tích phía trên của hộp được rải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị V_0 bằng



- A. 64 (đvtt) . B. $\frac{64}{3} \text{ (đvtt)}$. C. 16 (đvtt) . D. 48 (đvtt) .
- Câu 11.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

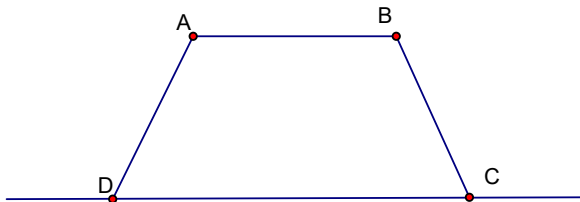


- A. $\frac{19}{3}$. B. $\frac{17}{3}$. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{14}{3}$.

Câu 12. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

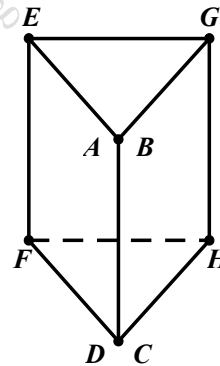
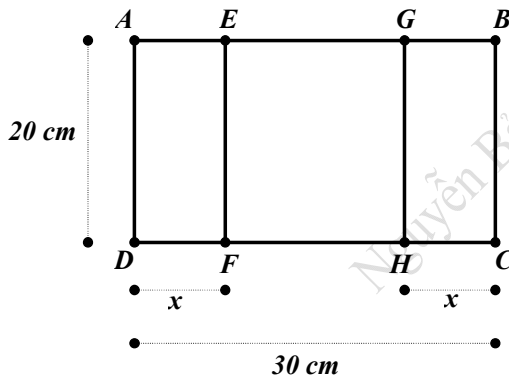
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. C. 1. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13. Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?



- A. $100\sqrt{3}$. B. $106\sqrt{3}$. C. $108\sqrt{3}$. D. $120\sqrt{3}$.

Câu 14. Một tấm kẽm hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 30$ cm; $BC = 20$ cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:



- A. $x = 10$ (cm). B. $x = 9$ (cm). C. $x = 8$ (cm). D. $x = 5$ (cm).

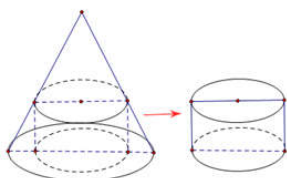
Câu 15. Một chất điểm chuyển động với quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) tại vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. 12. B. 24. C. 2. D. 6.

Câu 16. Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là

- A. $x = 15(mg)$. B. $x = 20(mg)$. C. $x = 20(mg)$. D. $x = 25(mg)$.

Câu 17. Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2m$, chiều cao $h = 6m$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Giá trị của V là:



A. $V = \frac{32}{9}\pi(\text{m}^3)$. B. $V = \frac{32}{3}\pi(\text{m}^3)$. C. $V = \frac{32}{27}\pi(\text{m}^3)$. D. $V = \frac{32}{5}\pi(\text{m}^3)$.

Câu 18. Ông A dự định sử dụng hết 8 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

A. 2.05 m^3 . B. 1.02 m^3 . C. 1.45 m^3 . D. 0.73 m^3 .

Câu 19. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. 30,54cm. B. 33,61cm. C. 40,62cm. D. 26,43cm

Câu 20. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. B. Sau 0,5 giờ.

C. Sau 2 giờ. D. Sau 1 giờ.

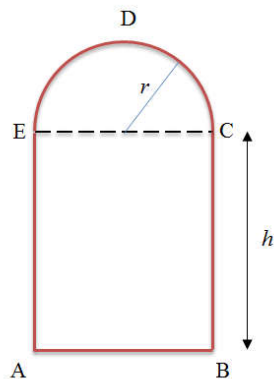
Câu 21. Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất? Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia 100m.

A. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$. B. $75\sqrt{3}$. C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$. D. $75\sqrt{2}$.

Câu 22. Ông X muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72 m^3 . Đáy làm bằng bê tông giá 100 nghìn đồng/ m^2 , thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/ m^2 . Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. B. $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. C. $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Câu 23. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ.



Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r (theo m) để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.

A. 1. B. 0,5. C. $\frac{4}{\pi+4}$. D. $\frac{2}{\pi+4}$.

Câu 24. Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

- A. 20. B. 10. C. 1200. D. 1100.

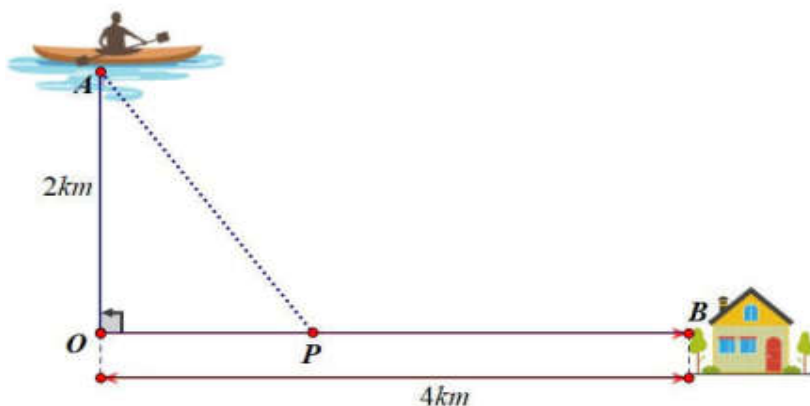
Câu 25. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t(s)$ bằng

- A. 12(s). B. 6(s). C. 4(s). D. 2(s).

Câu 26. Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

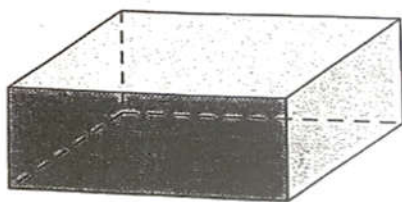
- A. $1,01m^3$. B. $1,17m^3$. C. $1,51m^3$. D. $1,40m^3$.

Câu 27. Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc $6m/h$ và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10km/h$. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là



- A. 40 phút. B. 44 phút. C. 30 phút. D. 38 phút.

Câu 28. Một người thợ gò làm một cái hòm dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng tôn. Biết rằng độ dài đường chéo hình hộp bằng $3\sqrt{2}dm$ và chỉ được sử dụng vừa đủ $18dm^2$ tôn. Với yêu cầu như trên người thợ có thể làm được cái hòm có thể tích lớn nhất bằng



- A. $8dm^3$. B. $2\sqrt{2}dm^3$. C. $6dm^3$. D. $4dm^3$.

Câu 29. Bạn A có một đoạn dây dài $20m$, bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều, phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất.

- A. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m$. B. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m$. C. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m$. D. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m$.

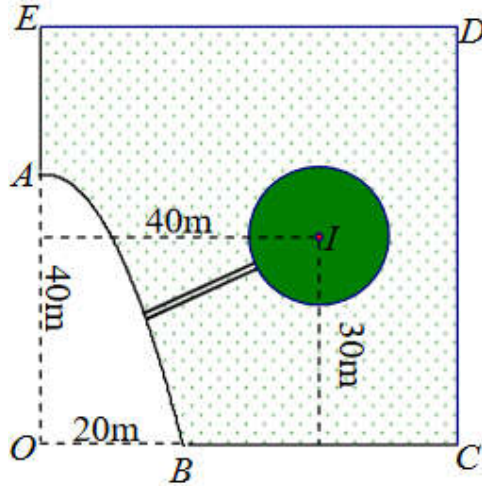
Câu 30. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem

lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

- A. 18 USD/người. B. 19 USD/người. C. 14 USD/người. D. 25 USD/người.

Câu 31. Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10m. Người ta muốn bắc một cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt 40m và 30m.

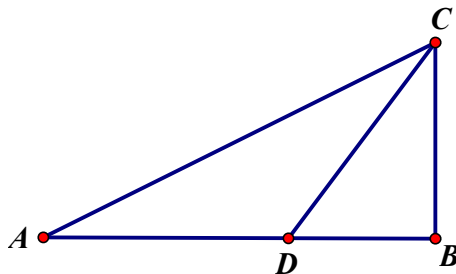


- A. $l \approx 17,7$ m. B. $l \approx 25,7$ m. C. $l \approx 27,7$ m. D. $l \approx 15,7$ m.

Câu 32. Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi 20 m, bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất ?

- A. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}$ m. B. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}$ m. C. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}$ m. D. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}$ m.

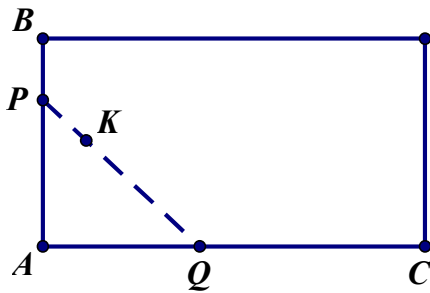
Câu 33. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40$ km, $BC = 10$ km)



- A. 10 km. B. $\frac{65}{2}$ km. C. 40 km. D. $\frac{15}{2}$ km.

Câu 34. Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để

thả bèo (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).



- A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $9\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 35. Một người bán buôn Thanh Long Đồ ở Lập Thạch – Vĩnh Phúc nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 nghìn/kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 nghìn /kg thì khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2000 nghìn /kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó khách lại mua nhiều hơn mức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 nghìn /kg. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 16000 nghìn /kg. B. 24000 nghìn /kg. C. 22000 nghìn /kg. D. 12000 nghìn /kg.

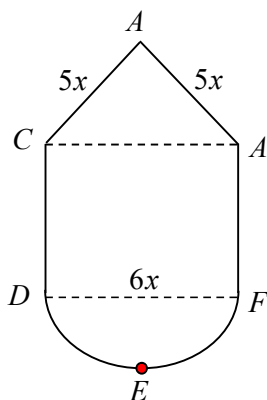
Câu 36. Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $2,26\text{m}^3$. B. $1,61\text{m}^3$. C. $1,33\text{m}^3$. D. $1,50\text{m}^3$.

Câu 37. Ông A dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $1,57\text{m}^3$. B. $1,11\text{m}^3$. C. $1,23\text{m}^3$. D. $2,48\text{m}^3$.

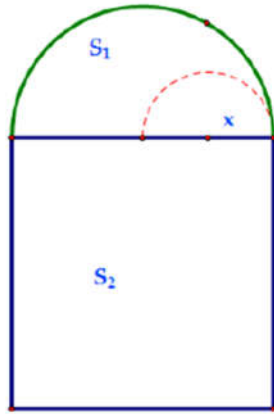
Câu 38. Một đoạn dây thép dài 150 cm được uốn thành khung có dạng như hình vẽ.



Khi x thay đổi, tìm x để diện tích hình phẳng thu được đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{25}{4+\pi}$ cm. B. $\frac{100}{4+\pi}$ cm. C. $\frac{10}{4+\pi}$ cm. D. $\frac{50}{4+\pi}$ cm.

Câu 39. Cần phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là a mét (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi đường kính của hình bán nguyệt). Gọi d là đường kính của hình bán nguyệt. Hãy xác định d để diện tích cửa sổ là lớn nhất.



- A. $d = \frac{a}{2 + \pi}$. B. $d = \frac{a}{4 + \pi}$. C. $d = \frac{2a}{2 + \pi}$. D. $d = \frac{2a}{4 + \pi}$.
- Câu 40.** Bác Tôm có một cái ao có diện tích 50m^2 để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ 20con/m^2 và thu được tất cả $1,5$ tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được bác ấy cứ giảm đi 8con/m^2 thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5\text{kg}$. Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).
- A. 1100 con. B. 1000 con. C. 500 con. D. 502 con.
- Câu 41.** Người ta muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, tiền chi phí xây bể là 500.000đồng/m^2 . Xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí sẽ thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để xây bể là bao nhiêu?
- A. 168 triệu đồng. B. 54 triệu đồng. C. 108 triệu đồng. D. 90 triệu đồng.
- Câu 42.** Gia đình ông An xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp dung tích là 2018lít , đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng được làm bằng bê tông có giá 250.000đồng/m^2 , thân bể được xây bằng gạch có giá 200.000đồng/m^2 và nắp bể được làm bằng tôn có giá 100.000đồng/m^2 . Hỏi chi phí thấp nhất gia đình ông An bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).
- A. 2.017.000 đồng. B. 2.017.331 đồng. C. 2.017.333 đồng. D. 2.017.334 đồng.
- Câu 43.** Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inóc có nắp đáy với thể tích $1\text{ (m}^3\text{)}$. Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó án kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?
- A. $\sqrt[3]{2\pi}$. B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- Câu 1.** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} \quad (f(t) \text{ được tính bằng nghìn người}).$$



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.		
b)	Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.		
c)	Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.		
d)	Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Thì vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm		

Câu 2. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

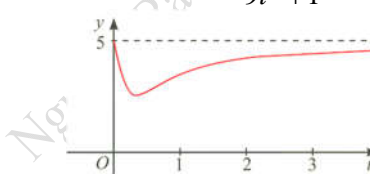
$$N(t) = 100e^{0,012t} \quad (N(t) \text{ được tính bằng triệu người, } 0 \leq t \leq 50)$$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: 108,763 (triệu người)		
b)	Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: 125,488 (triệu người)		
c)	Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.		
d)	Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.		

Câu 3. Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$$



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5 (mg/l)		
b)	Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)		
c)	Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất		
d)	Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 3,5 (mg/l)		

Câu 4. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$		
b)	Hàm $a(t) = 6t - 12$		
c)	Trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm tăng		
d)	Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm		

Câu 5. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm vận tốc là: $v(t) = 3t^2 - 12, t \geq 0$		
b)	Hạt chuyển động xuống dưới khi $t > 2$		
c)	Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là $9m$		
d)	Khi $t > 0$ thì hạt tăng tốc		

Câu 6. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi. Vậy hàm cầu là: $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$		
b)	Công ty giảm giá 4,5 (triệu đồng)/1 tivi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất		
c)	Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, vậy có 2300 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.		
d)	Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 ti vi để lợi nhuận là lớn nhất		

Câu 7. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$).

Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

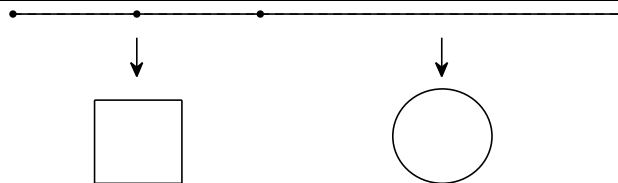
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).		
b)	Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 220x - 500$ (nghìn đồng).		
c)	Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa		
d)	Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được là 1000 nghìn đồng.		

Câu 8. Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $P = 400 - 2Q$ và hàm chi phí trung bình $\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$ trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (P và \bar{C} được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$Q = 90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa;		
b)	Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$		
c)	Lợi nhuận tối đa là 17420\$		
d)	Nếu chính phủ đánh thuế 22\$/ một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa		

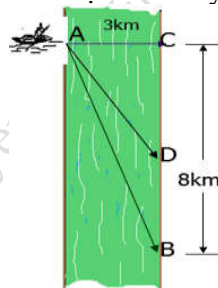
Câu 9. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$).



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Bán kính đường tròn: $r = \frac{x}{\pi}$.		
b)	Diện tích hình vuông: $\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.		
c)	Tổng diện tích hai hình: $\frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.		
d)	Khi $x = \frac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.		

Câu 10. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông.

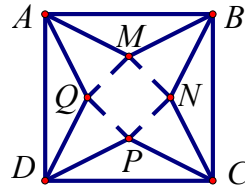


Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$8-x$ (km) là độ dài quãng đường CD .		
b)	Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ (giờ)		
c)	Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{8-x}{8}$		
d)	Khoảng 1 ^h 20' là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B .		

Câu 11. Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $MA^2 = MB^2 + MC^2$, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB , BNC , CPD và DQA . Với phần còn lại, người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều.

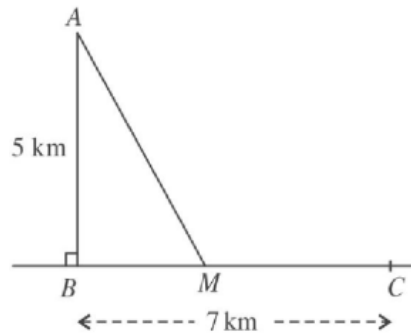


Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$. Khi đó :

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Chiều cao của hình chóp là $\sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.		
b)	Điều kiện của x là: $0 < x < 25\sqrt{2}$		
c)	Thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^3 - 25\sqrt{2}x^4}$.		
d)	Khi cạnh đáy của khối chóp bằng $3\sqrt{2}\text{dm}$ thì thể tích của khối chóp là lớn nhất		

Câu 12. Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC = 7\text{km}$ (tham khảo hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4km/h và đi bộ đến kho C với vận tốc 6km/h .

Đặt $BM = x$ với $0 < x < 7$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Thời gian đi từ A đến M là $\frac{\sqrt{25+x^2}}{4}$.		
b)	Thời gian đi từ A đến C là $\frac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \frac{7-x}{6}$.		
c)	Thời gian ngắn nhất từ A đến C là khoảng $3\text{h } 06$ phút.		
d)	Muộn nhất $3\text{h } 54$ phút người đó phải xuất phát từ vị trí A để có mặt tại kho C lúc 7 giờ sáng		

Câu 13. Ông Nam cần xây dựng một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đáy để phục vụ cho việc tưới cây trong vườn. Do các điều kiện về diện tích vườn, ông Nam cần bể có thể tích là 36m^3 , đáy bể có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và chiều rộng không quá 4m , biết rằng chi phí vật liệu xây dựng mỗi mét vuông diện tích bề mặt là như nhau.

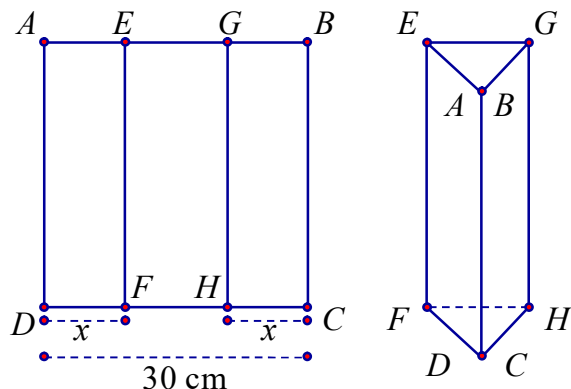
Gọi $x(\text{m})$ là chiều rộng của bể, ta có $0 < x \leq 4$. Khi đó

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Chiều dài của bể là $2x(\text{m})$		
b)	Chiều cao của bể là $\frac{18}{x^2}(\text{m})$.		

c)	Tổng diện tích các mặt cần xây là: $2x^2 + \frac{108}{x}$.		
d)	Chiều cao bể nước bằng 3(m) thì tổng chi phí vật liệu là nhỏ nhất		

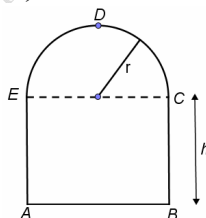
Câu 14. Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Thể tích khối trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó S là diện tích của tam giác AEF		
b)	Diện tích của tam giác AEF bằng: $\sqrt{30} \cdot \sqrt{(15-x)^2 (2x-15)}$		
c)	Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10$ (cm)		
d)	Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250		

Câu 15. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 250 cm để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn,



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Diện tích của nửa hình tròn là $S_1 = \frac{1}{2} \pi r^2$		
b)	Diện tích của hình chữ nhật là $S_2 = 250r - \pi r^2 - 2r^2$		
c)	Khi $r = 10$ thì giá trị diện tích của khung cửa sổ nằm trong khoảng $(2000; 2140)$		
d)	Biết $r = r_0$ thì diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất khi đó $r_0 \in (35; 36)$		

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Trả lời:.....

Câu 2. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}$ (km). Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1

giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

Trả lời:.....

- Câu 3.** Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao $2m$ với vận tốc ban đầu là $24,5m/s$. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Trả lời:.....

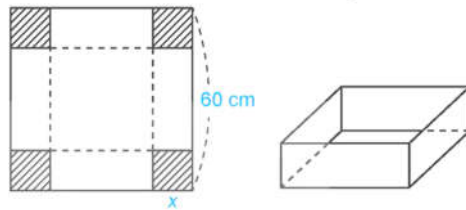
- Câu 4.** Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0, \text{ trong đó thời gian } t \text{ được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm}$$

mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

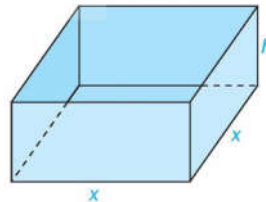
Trả lời:.....

- Câu 5.** Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng $60cm$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp. Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Trả lời:.....

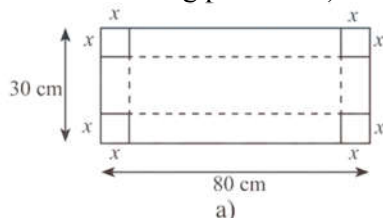
- Câu 6.** Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng $108cm^2$ như Hình.



Biết khi $x = x_0; h = h_0$ thì thể tích của hộp là lớn nhất. Khi đó $x_0 + h_0$ bằng?

Trả lời:.....

- Câu 7.** Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng $30cm$ và chiều dài $80cm$ (Hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(cm)$ với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b, tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời:.....

- Câu 8.** Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh $6dm$. Bác Ánh cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài bằng $x(dm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như Hình để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo x .



Tìm $x(dm)$ để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.

Trả lời:.....

- Câu 9.** Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2} \text{ (con)}, \text{ trong đó } t \text{ là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn}$$

nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời:.....

- Câu 10.** Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

$$V = k(R - r)r^2; 0 \leq r < R, \text{ trong đó } k \text{ là hằng số, } R \text{ là bán kính bình thường của khí quản, } r \text{ là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?}$$

Trả lời:.....

- Câu 11.** Người quản lý của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lý nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Trả lời:.....

- Câu 12.** Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích $200m^2$ để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình). Do điều kiện địa lý, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?

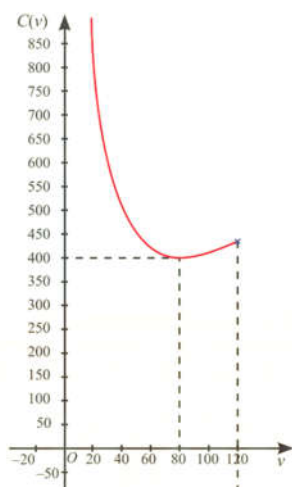


Trả lời:.....

- Câu 13.** Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình $v(km/h)$ theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v (0 < v \leq 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v , người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Trả lời:.....

- Câu 14.** Một người nông dân có 15000000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Trả lời:.....

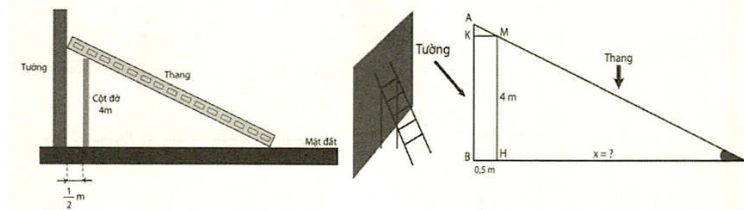
- Câu 15.** Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Trả lời:.....

- Câu 16.** Hàm cầu của một sản phẩm có dạng $P = \frac{80 - Q}{4}$, $0 \leq Q \leq 80$, trong đó Q là số lượng sản phẩm và P là giá bán của mỗi sản phẩm. Doanh thu tối đa bằng bao nhiêu?

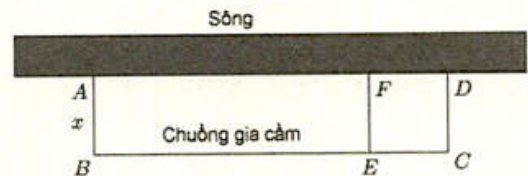
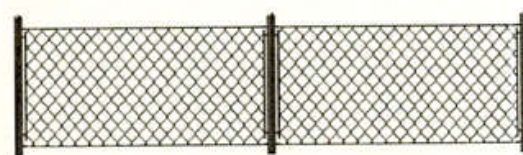
Trả lời:.....

- Câu 17.** Tìm chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4m, song song và cách tường 0,5m kể từ góc của cột đỡ như hình vẽ.



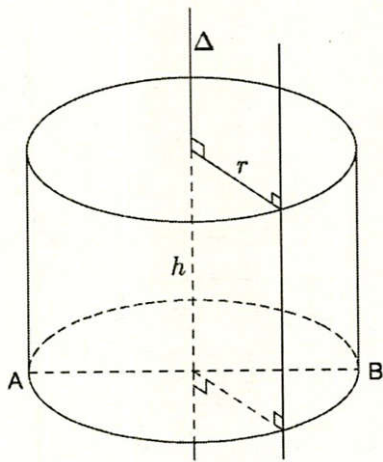
Trả lời:.....

- Câu 18.** Một chủ trang trại nuôi gia cầm muốn rào thành 2 chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng nuôi gà và một chuồng nuôi vịt. Biết rằng đã có sẵn 240m hàng rào và cạnh bờ sông thì không phải rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu?



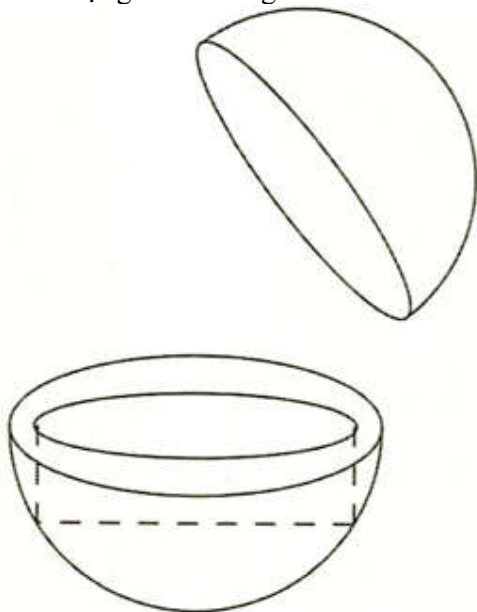
Trả lời:.....

- Câu 19.** Giả sử bạn là chủ của một xưởng cơ khí vừa nhận được một đơn đặt hàng là thiết kế một bồn chứa nước hình trụ có nắp với dung tích 20 lít. Để tốn ít nguyên vật liệu nhất thì chiều cao bồn nước lúc đó bằng bao nhiêu?



Trả lời:.....

- Câu 20.** Công ti mỹ phẩm chuẩn bị cho ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế là một khối cầu như viên ngọc trai không lỗ, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng da như hình vẽ.



Theo dữ kiện, nhà sản xuất dự định thiết kế khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem sao cho thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất.

Trả lời:.....

- Câu 21.** Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km . Vận tốc dòng nước là $6(\text{km}/\text{h})$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(\text{km}/\text{h})$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

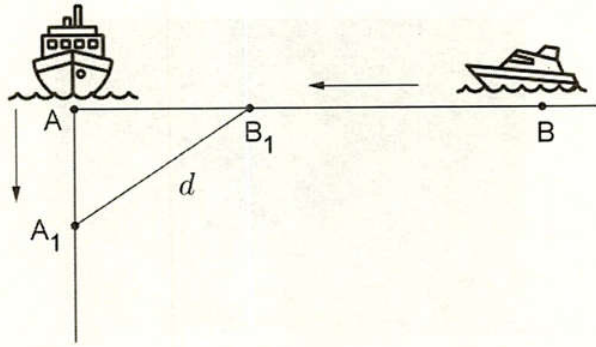
Trả lời:.....

- Câu 22.** Thể tích V của 1 kg nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa 0°C đến 30°C) được cho bởi công thức $V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3 \text{ (m}^3\text{)}$.

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Trả lời:.....

- Câu 23.** Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với 6 hải lí/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai tàu là bé nhất?



Trả lời:.....

- Câu 24.** Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6, 0 \leq x \leq 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo?

Trả lời:.....

- Câu 25.** Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Trả lời:.....

- Câu 26.** Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t (0 \leq t \leq 12)$$

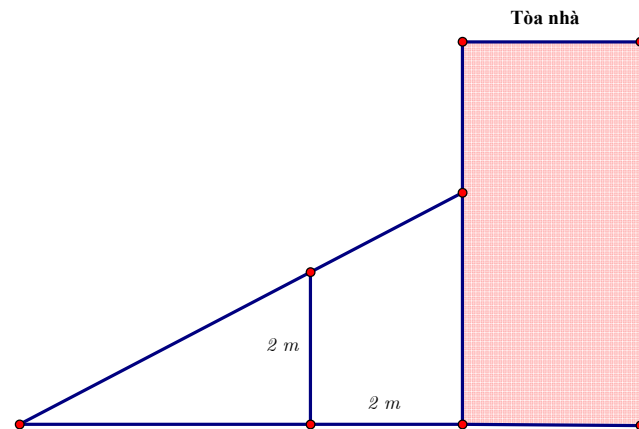
Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Trả lời:.....

- Câu 27.** Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo. Giá để xây đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi km và 130000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC = 6$ km, $AC = 9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là bao nhiêu?

Trả lời:.....

- Câu 28.** Một bức tường cao 2m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét ?



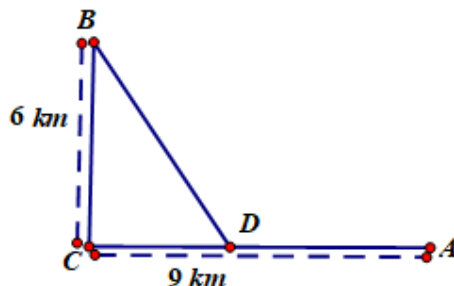
Trả lời:.....

- Câu 29.** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được

trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Trả lời:.....

- Câu 30.** Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB . Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.



Trả lời:.....

- Câu 31.** Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Biết đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100.000 đồng/ m^2 . Tìm kích thước của hồ để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là?

Trả lời:.....

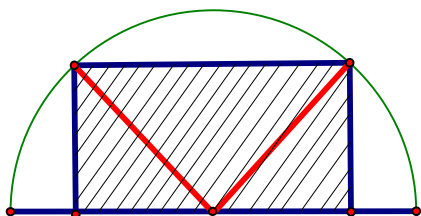
- Câu 32.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

Trả lời:.....

- Câu 33.** Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200 m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 300 nghìn đồng/ m^2 (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và thành bể). Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

Trả lời:.....

- Câu 34.** Tính diện tích lớn nhất S_{\max} của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6 cm$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Trả lời:.....

- Câu 35.** Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn đường kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng?

Trả lời:.....

Câu 36. Ông A sử dụng hết 5 m^2 kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời:.....

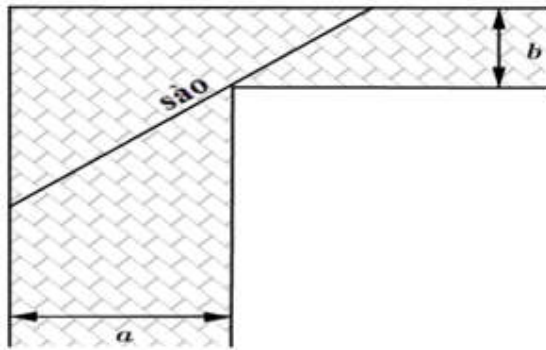
Câu 37. Đợt nộp hồ sơ dự thi tốt nghiệp THPT quốc gia thường kéo dài 1 tháng (30 ngày). Nhà trường nhận thấy số lượng hồ sơ mà học sinh nộp tính theo ngày thứ t được cho công thức $S(t) = \frac{1}{50}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 36t - 270$ (hồ sơ) với $1 \leq t \leq 30$. Hỏi trong 30 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng hồ sơ nộp nhiều nhất?

Trả lời:.....

Câu 38. Một viên đá được ném lên từ gốc tọa độ O trong mặt phẳng Oxy (Ox nằm ngang) chuyển động theo đường (quỹ đạo) có phương trình $y = -(1+m^2)x^2 + mx$. Tìm giá trị của tham số thực, dương m để viên đá rơi xuống tại điểm cách O xa nhất.

Trả lời:.....

Câu 39. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$, hỏi cái sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu?



Trả lời:.....

Câu 40. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Trả lời:.....