

## CHUYÊN ĐỀ 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

• Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** - <https://www.nbv.edu.vn/>

### PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

#### a) Khái niệm cực trị của hàm số

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(a; b)$  ( $a$  có thể là  $-\infty$ ,  $b$  có thể là  $+\infty$ ) và điểm  $x_0 \in (a; b)$ .

- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x_0$ .

- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x_0$ .

#### Chú ý

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x_0$  thì  $x_0$  được gọi là điểm cực đại của hàm số  $f(x)$ . Khi đó,  $f(x_0)$  được gọi là giá trị cực đại của hàm số  $f(x)$  và kí hiệu là  $f_{CB}$  hay  $y_{CB}$ . Điểm

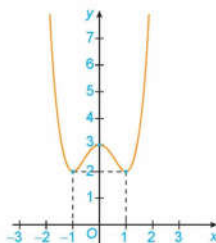
$M_0(x_0; f(x_0))$  được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x_0$  thì  $x_0$  được gọi là điểm cực tiểu của hàm số  $f(x)$ . Khi đó,  $f(x_0)$  được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số  $f(x)$  và kí hiệu là  $f_{CT}$  hay  $y_{CT}$ . Điểm

$M_0(x_0; f(x_0))$  được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

**Ví dụ 1.** Hình là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ . Hãy tìm các cực trị của hàm số.



#### Giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -1$  và  $y_{CT} = y(-1) = 2$ .

Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$  và  $y_{CB} = y(0) = 3$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 1$  và  $y_{CT} = y(1) = 2$ .

#### b) Cách tìm cực trị của hàm số

##### ĐỊNH LÝ

Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và có đạo hàm trên các khoảng  $(a; x_0)$  và  $(x_0; b)$ . Khi đó:

a) Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì  $x_0$  là một điểm cực tiểu của hàm số  $f(x)$ .

b) Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì  $x_0$  là một điểm cực đại của hàm số  $f(x)$ .

Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

$x$	$a$	$x_0$	$b$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực tiểu)	

$x$	$a$	$x_0$	$b$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực đại)	

**Chú ý.** Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  như sau:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm  $f'(x)$ . Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm  $f'(x)$  bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
3. Lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

**Ví dụ 2.** Tìm cực trị của hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$ .

**Giải**

Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .

Ta có:  $y' = 3x^2 - 12x + 9$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$  hoặc  $x = 3$ .

Lập bảng biến thiên của hàm số:

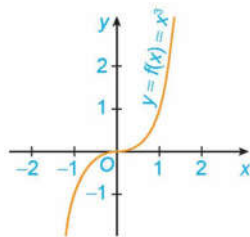
$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$y'$		+	0	-	0	+
$y$			34		30	

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại  $x = 1$  và  $y_{CD} = y(1) = 34$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 3$  và  $y_{CT} = y(3) = 30$ .

**Chú ý.** Nếu  $f'(x_0) = 0$  nhưng  $f'(x)$  không đổi dấu khi  $x$  qua  $x_0$  thì  $x_0$  không phải là điểm cực trị của hàm số. Chẳng hạn, hàm số  $f(x) = x^3$  có  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f'(0) = 0$ , nhưng  $x = 0$  không phải là điểm cực trị của hàm số.



**Ví dụ 3.** Tìm cực trị của hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$ .

**Giải**

Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Ta có:  $y' = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2 - 2x + 9)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$  hoặc  $x = 5$ .

Lập bảng biến thiên của hàm số:

$x$	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
$y'$		+	0	-	0	+
$y$			-4		8	

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại  $x = -1$  và  $y_{CD} = y(-1) = -4$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 5$  và  $y_{CT} = y(5) = 8$ .

**Ví dụ 4.** Tìm cực trị của hàm số  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .

**Giải**

Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Ta có:  $y' = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$ , với mọi  $x \neq 1$ .

Lập bảng biến thiên của hàm số:

$x$	$-\infty$		$1$		$+\infty$
$y'$		-		-	
$y$		$1$		$+\infty$	
		$\searrow$		$\searrow$	
		$-\infty$		$1$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực trị.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên, đồ thị của hàm số $y, y'$

**- Định lý cực trị**

• **Điều kiện cần (định lý 1):** Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$  và đạt cực đại

(hoặc cực tiểu) tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .

• **Điều kiện đủ (định lý 2):**

Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương khi  $x$  đi qua điểm  $x_0$  (theo chiều tăng) thì hàm số  $y = f(x)$

đạt cực tiểu tại điểm  $x_0$ .

Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm khi  $x$  đi qua điểm  $x_0$  (theo chiều tăng) thì hàm số  $y = f(x)$

đạt cực đại tại điểm  $x_0$ .

• **Định lý 3:** Giả sử  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trong khoảng  $(x_0 - h; x_0 + h)$ , với  $h > 0$ .

Khi đó:

Nếu  $y'(x_0) = 0$ ,  $y''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu.

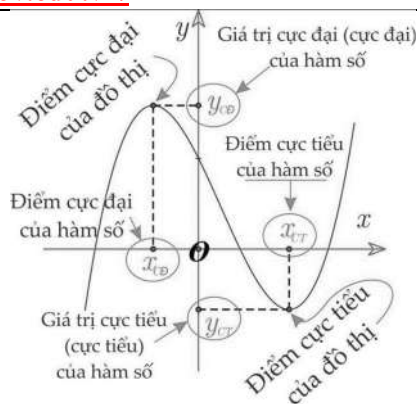
Nếu  $y'(x_0) = 0$ ,  $y''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại.

**- Các THUẬT NGỮ cần nhớ**

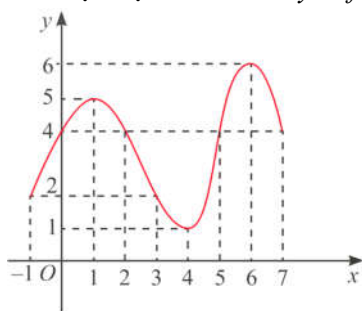
• Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là  $x_0$ , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là  $f(x_0)$

(hay  $y_{CD}$  hoặc  $y_{CT}$ ). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là  $M(x_0; f(x_0))$ .

• Nếu  $M(x_0; y_0)$  là điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$ .



**Câu 1.** Tìm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị được cho ở Hình.



**Câu 2.** Xét hàm số  $y = f(x)$  trên khoảng  $(-1; 4)$ , ta có bảng biến thiên như sau:

$x$	-1	1	2	3	4
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$		-1	-5	-1	

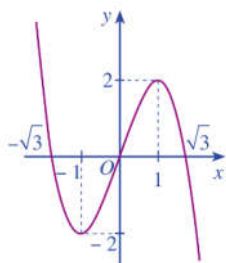
$x_0 = 2$  là điểm cực tiểu hay điểm cực đại của hàm số đã cho? Tìm giá trị cực trị tương ứng.

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+		-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-3	$+\infty$	

Xác định các cực trị của hàm số  $f(x)$ .

**Câu 4.** Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x) = -x^3 + 3x$  ở Hình, hãy chỉ ra các điểm cực trị của hàm số đó.



## Dạng 2. Tìm cực trị của hàm số khi biết $y, y'$

★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số  $y = f(x)$ .

✎ **Phương pháp:** Sử dụng 2 quy tắc tìm cực trị sau:

### Quy tắc I: sử dụng nội dung định lý 1

- **Bước 1.** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm  $y' = f'(x)$ . Tìm các điểm  $x_i$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm  $x_i$  theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

**Quy tắc II: sử dụng nội dung định lý 2**

- **Bước 1.** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm  $y' = f'(x)$ . Giải phương trình  $f'(x) = 0$  và kí hiệu  $x_i$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính  $f''(x)$  và  $f''(x_i)$ .
- **Bước 4.** Dựa vào dấu của  $y''(x_i)$  suy ra tính chất cực trị của điểm  $x_i$ :  
 + Nếu  $f''(x_i) < 0$  thì hàm số đạt cực đại tại điểm  $x_i$ .  
 + Nếu  $f''(x_i) > 0$  thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x_i$ .

**Câu 5.** Tìm cực trị của hàm số  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$ .

**Câu 6.** Tìm cực trị của hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ .

**Câu 7.** Tìm cực trị của hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$ .

**Câu 8.** Tìm điểm cực trị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ .

**Câu 9.** Tìm điểm cực trị của hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Xác định số điểm cực trị của hàm số đã cho

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-2)(x^2-3)(x^4-9)$ . Xác định số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$

**Dạng 3. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại  $x = x_0$**

**Bước 1.** Tính  $y'(x_0), y''(x_0)$

**Bước 2.** Giải phương trình  $y'(x_0) = 0 \Rightarrow m?$

**Bước 3.** Thế  $m$  vào  $y''(x_0)$  nếu giá trị  $\begin{cases} y'' > 0 \rightarrow x_0 = CT \\ y'' < 0 \rightarrow x_0 = CD \end{cases}$

**Câu 12.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

**Câu 13.** (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019) Tìm các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$  đạt cực đại tại  $x = 3$ .

**Câu 14.** (THPT Thăng Long - Hà Nội - Lần 2 - 2019) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = x^3 + (3m-1)x^2 + m^2x - 3$  đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .

**Dạng 4. Tìm m để hàm số có n cực trị**

- Hàm số có  $n$  cực trị  $\Leftrightarrow y' = 0$  có  $n$  nghiệm phân biệt.

- Xét hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ :

+ Hàm số có hai điểm cực trị khi  $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$ .

+ Hàm số không có cực trị khi  $y' = 0$  vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

- Xét hàm số bậc bốn trùng phương  $y = ax^4 + bx^2 + c$ .

+ Hàm số có ba cực trị khi  $ab < 0$ . + Hàm số có 1 cực trị khi  $ab \geq 0$ .

**Câu 15.** (Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = -x^4 - (m-3)x^2 + m + 1$  có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu

**Câu 16.** (Quang Trung - Bình Phước - Lần 5 - 2019) Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + m$ . Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để hàm số có 3 cực trị

**Câu 17. (THPT Ba Đình 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$  có cực đại và cực tiểu?

**Câu 18. (THPT Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số  $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

**Dạng 5. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị**

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của  $y$  cho  $y'$

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức  $y$  cho  $y'$ ):  $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$ .

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là  $y = h(x)$ .

**Câu 19. (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc- 2018)** Biết đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  có hai điểm cực trị  $A$ ,  $B$ . Viết phương trình đường thẳng  $AB$

**Câu 20. (Mã 104 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = (2m-1)x + 3 + m$  vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ .

**Câu 21. (Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $d: y = (3m+1)x + 3 + m$  vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ .

**Dạng 6. Tìm  $m$  để hàm số bậc 3 có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước**

★ **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số  $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Tìm tham số  $m$  để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện  $K$  cho trước?

✎ **Phương pháp:**

— **Bước 1.** Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ . Tính đạo hàm:  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ .

— **Bước 2.** Để hàm số có 2 cực trị  $\Leftrightarrow y' = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = (2b)^2 - 4.3ac > 0 \end{cases}$  và giải hệ này sẽ tìm được  $m \in D_1$ .

— **Bước 3.** Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $y' = 0$ . Theo Viét, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

— **Bước 4.** Biến đổi điều kiện  $K$  về dạng tổng  $S$  và tích  $P$ . Từ đó giải ra tìm được  $m \in D_2$ .

— **Bước 5.** Kết luận các giá trị  $m$  thỏa mãn:  $m = D_1 \cap D_2$ .

📖 **Lưu ý:**

— Hàm số bậc 3 không có cực trị  $\Leftrightarrow y' = 0$  không có 2 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$ .

— Trong trường hợp điều kiện  $K$  liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  với  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của  $y' = 0$ . Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

• Nếu giải được nghiệm của phương trình  $y' = 0$ , tức tìm được  $x_1, x_2$  cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề  $y = f(x; m)$  để tìm tung độ  $y_1, y_2$  tương ứng của  $A$  và **B**.

• Nếu tìm không được nghiệm  $y' = 0$ , khi đó gọi 2 nghiệm là  $x_1, x_2$  và tìm tung độ  $y_1, y_2$  bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia  $y$  cho  $y'$ ), nghĩa là:

- Phân tích (bằng cách chia đa thức  $y$  cho  $y'$ ):  $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$ .
- Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là  $y = h(x)$ .

**Dạng toán:** Tìm tham số  $m$  để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**cùng phía, khác phía d**):

**Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:**

Cho 2 điểm  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  và đường thẳng  $d: ax + by + c = 0$ . Khi đó:

- Nếu  $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$  thì  $A, B$  nằm về 2 phía so với đường thẳng  $d$ .
- Nếu  $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$  thì  $A, B$  nằm cùng phía so với đường  $d$ .

**Trường hợp đặc biệt:**

- Để hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung  $Oy \Leftrightarrow$  phương trình  $y' = 0$  có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.
- Để hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành  $Ox \Leftrightarrow$  đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục  $Ox$  tại 3 điểm phân biệt  $\Leftrightarrow$  phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhắm được nghiệm).

**Dạng toán:** Tìm  $m$  để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**đối xứng và cách đều**):

★ **Bài toán 1.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị  $A, B$  đối xứng nhau qua đường  $d$ :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu  $\Rightarrow m \in D_1$ .

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị  $A, B$ . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là  $y' = 0$  có nghiệm đẹp  $x_1, x_2$ , tức có  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ .

+ Hai là  $y' = 0$  không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là  $\Delta$  và lấy  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$ .

— **Bước 3.** Gọi  $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

Do  $A, B$  đối xứng qua  $d$  nên thỏa hệ  $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2$ .

— **Bước 4.** Kết luận  $m = D_1 \cap D_2$ .

★ **Bài toán 2.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị  $A, B$  cách đều đường thẳng  $d$ :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu  $\Rightarrow m \in D_1$ .

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị  $A, B$ . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là  $y' = 0$  có nghiệm đẹp  $x_1, x_2$ , tức có  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ .

+ Hai là  $y' = 0$  không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là  $\Delta$  và lấy  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$ .

— **Bước 3.** Do  $A, B$  cách đều đường thẳng  $d$  nên  $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$ .

— **Bước 4.** Kết luận  $m = D_1 \cap D_2$ .

☞ **Lưu ý:** Để 2 điểm  $A, B$  đối xứng nhau qua điểm  $I \Leftrightarrow I$  là trung điểm  $AB$ .

**Câu 22.** Với giá trị nào của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + m$  có hai điểm cực trị  $A, B$  thỏa mãn  $OA = OB$  ( $O$  là gốc tọa độ)?



**Câu 23. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$  có hai điểm cực trị có hoành độ  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ .

**Câu 24. (Chuyên Hạ Long 2019)** Cho hàm số  $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1$ . Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên  $m < 20$  để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

**Câu 25. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ , với  $m$  là tham số; gọi  $(C)$  là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi  $m$  thay đổi, điểm cực đại của đồ thị  $(C)$  luôn nằm trên một đường thẳng  $d$  cố định. Xác định hệ số góc  $k$  của đường thẳng  $d$ .

**Câu 26. (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số  $y = \frac{m}{3}x^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + 2$ .

Hàm số đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + 2x_2 = 1$  khi  $m = a$  và  $m = b$ . Hãy tính tổng  $a + b$ .

### Dạng 7. Tìm $m$ để hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Một số công thức tính nhanh “thường gặp”

liên quan cực trị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$

1 cực trị: $ab \geq 0$		3 cực trị: $ab < 0$	
$a > 0$ : 1 cực tiểu	$a < 0$ : 1 cực đại	$a > 0$ : 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a < 0$ : 2 cực đại, 1 cực tiểu

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với  $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình qua điểm cực trị:  $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$  và  $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gọi  $\widehat{BAC} = \alpha$ , luôn có:  $8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$  và  $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua  $A, B, C: x^2 + y^2 - (c + n)x + c.n = 0$ , với  $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$  và bán

kinh đường tròn ngoại tiếp tam giác là  $R = \left| \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right|$

**Câu 27. (THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2m^2x^2 + m + 4$  có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

**Câu 28. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$  có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

**Câu 29. (Toán Học Tuổi Trẻ Số 5)** Tìm tất cả các giá trị  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = x^4 + (m + 1)x^2 - 2m - 1$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng  $120^\circ$ .

**Câu 30. (CHUYÊN ĐHSPTN - 2018)** Gọi  $A, B, C$  là các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 4$ . Tìm bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$

**Câu 31. (Liên Trường - Nghệ An -2018)** Tìm giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 - 1$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng  $4\sqrt{2}$ .



**Câu 32.** (THPT Triệu Thị Trinh - 2018) Cho hàm số:  $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ . Tìm  $m$  để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng  $120^\circ$ .

**Câu 33.** Hãy tìm tất cả của tham số  $e$  để hàm số  $y = 3x^4 + 2x^3 + ex$  có đúng ba điểm cực trị

**Dạng 8. Tìm  $m$  để hàm số bậc 2 trên bậc 1 có cực trị thỏa mãn yêu cầu bài toán**

**Câu 34.** (ĐHQG Hà Nội - 2020) Tìm tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$  có cực đại và cực tiểu

**Câu 35.** (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Tìm tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{2x - 2m}$  có cực đại và cực tiểu

**Dạng 9. Bài toán cực trị hàm số chứa dấu trị tuyệt đối**

**Bài toán:** Đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có bao nhiêu điểm cực trị

(Áp dụng định nghĩa).  $y = f(x) = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0(1) \\ f'(x) = 0(2) \end{cases}$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị  $y = f(x)$  và trục hoành  $y = 0$ . Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số  $y = f(x)$ , dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

**Câu 36.** (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019) Tìm số các giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$  có bảy điểm cực trị

**Câu 37.** (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hàm số  $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m - 1|$  với  $m$  là tham số thực. Tìm số giá trị nguyên trong khoảng  $[-2; 2]$  của  $m$  để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị

**Câu 38.** (Mã 103 - 2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $a$  để hàm số  $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$  có đúng 3 điểm cực trị?

**Câu 39.** (Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2022) Có bao nhiêu số nguyên  $a$  thuộc đoạn  $[-20; 20]$  sao cho hàm số  $y = -2x + 2 + a\sqrt{x^2 - 4x + 5}$  có cực đại?

**Dạng 10. Số điểm cực trị của hàm hợp không chứa dấu GTTĐ**

**Bài toán:** Cho hàm số  $y = f(x)$  (Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của  $f(x), f'(x)$ ). Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(u)$  trong đó  $u$  là một hàm số đối với  $x$ . Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$

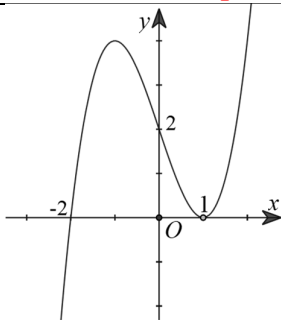
**Bước 1.** Tính đạo hàm  $y' = u' \cdot f'(u)$

**Bước 2.** Giải phương trình  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$

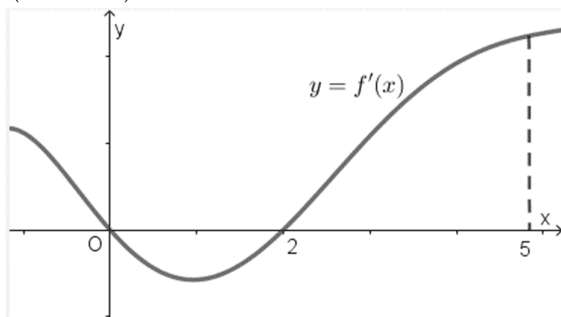
**Bước 3.** Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà  $y'$  không xác định.

**Kết luận**

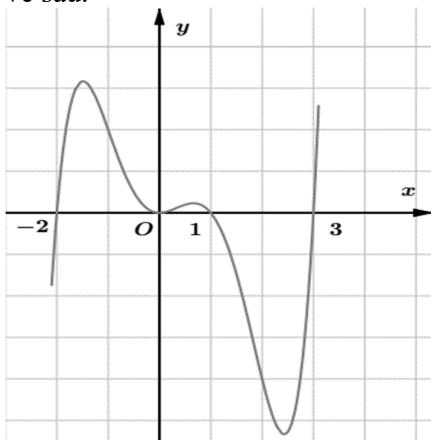
**Câu 40.** (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2 - 3)$ .



**Câu 41. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2)$  trên khoảng  $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$ .



**Câu 42. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ sau.



Hàm số  $g(x) = f(x^2)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

**Câu 43. (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-1$	$3$	$-1$	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = x^4[f(x-1)]^2$

**Câu 44. (Sở Hà Tĩnh 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên

như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = 2^{-\frac{1}{x^4}} [f(2x+1)]^3$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$-2$	$3$	$-2$	$+\infty$

### Dạng 11. Số điểm cực trị của hàm hợp chứa dấu GTTĐ

Bài toán tìm cực trị của hàm số  $g(x) = |f[u(x)] + h(x)|$

**Bước 1.** Tìm cực trị của hàm số  $v(x) = f[u(x)] + h(x)$

**Bước 2.** Sử dụng phương pháp biến đổi đồ thị hàm số trị tuyệt đối để tìm số cực trị của hàm số  $g(x)$

**Câu 45.** Cho  $f(x)$  là hàm số bậc bốn thỏa mãn  $f(0) = -\frac{1}{\ln 2}$ . Hàm số  $f'(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$-4$	$-1$	$-\infty$

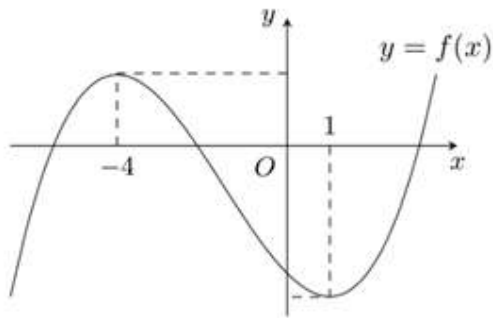
Hàm số  $g(x) = \left| f(-x^2) - x^2 + \frac{2x^2}{\ln 2} \right|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

**Câu 46. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2021)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên  $f'(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-1$	$-3$	$-1$	$+\infty$

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số  $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$ .

**Câu 47. (Cụm Ninh Bình - 2021)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $g(x) = f(x^2 - 4|x|)$  có bao nhiêu điểm cực trị?



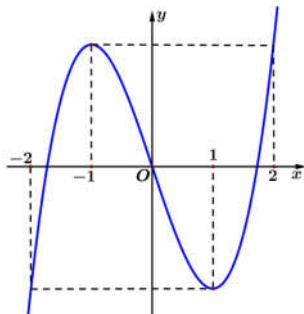
**Câu 48. (Sở Quảng Bình - 2021)** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ , ( $a \neq 0$ ) với các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c > 2019$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = |g(x - 2019)|$  với  $g(x) = f(x) - 2020$

**Câu 49. (Sở Nam Định - 2021)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(-3) = 0$  đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

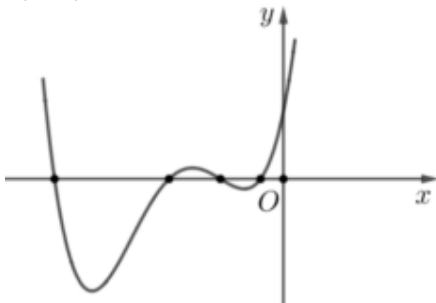
$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Hàm số  $g(x) = \left| 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

**Câu 50. (THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = \sqrt{4 - f^2(x)}$  có bao nhiêu điểm cực trị?



**Câu 51. (Sở Bắc Giang 2022)** Biết rằng  $f(0) = 0$ . Hỏi hàm số  $g(x) = |f(x^6) - x^3|$  có bao nhiêu điểm cực đại?

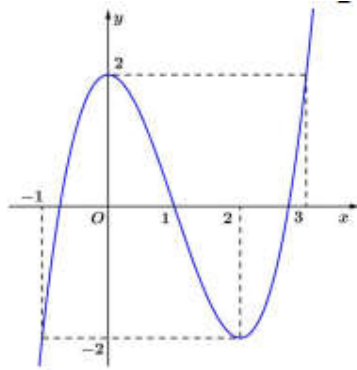


**Câu 52. (Sở Vĩnh Phúc 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$4$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$-$	$0$	$+$

Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^3 + 2|x| - 4)$

**Câu 53. (Sở Thái Nguyên 2022)** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = \frac{1}{2}$ , hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.

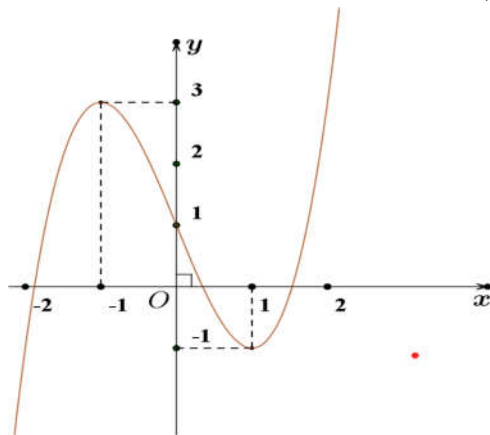


Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$

**Dạng 12. Tìm m để hàm số  $f(u)$  không chứa dấu GTTĐ thỏa mãn điều kiện cho trước**

**Câu 54. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x-a)(13x-15)^3$ . Tìm tập hợp các giá trị của  $a$  để hàm số  $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$  có 6 điểm cực trị

**Câu 55. (Sở Vĩnh Phúc - 2021)** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f'(x)$  là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên  $m \in [-10, 10]$  để hàm số  $g(x) = f(x) + mx + 2021$  có đúng 1 cực trị?

**Câu 56. (Sở Hưng Yên 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+3)^2(x^2 - x)$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x^2 - 6x + m)$  có 5 điểm cực trị?

**Câu 57. (THPT Đồng Lộc - Hà Tĩnh 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , và có bảng xét đạo hàm như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f\left(\sqrt{x^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) - m\right)$  có ít nhất 4 điểm cực trị.

**Câu 58. (THPT Phan Châu Trinh - Đà Nẵng 2022)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để hàm số  $y = f(x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1)$  có đúng 8 cực trị?

**Câu 59. (Sở Nam Định 2023)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Tìm giá trị tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$  có 8 điểm cực trị

**Dạng 13. Tìm  $m$  để hàm số  $f(u)$  chứa dấu GTTĐ thỏa mãn điều kiện cho trước**

**Câu 60. (Mã 102 - 2021 Lần 1)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-8)(x^2 - 9), \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$  có ít nhất 3 điểm cực trị?

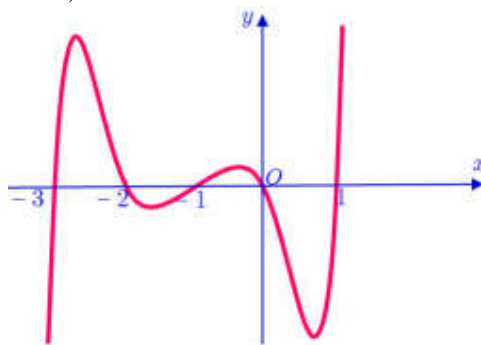
**Câu 61. (Chuyên Bắc Giang - Lần 4 - 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có 5 điểm cực trị?

**Câu 62. (Chuyên Long An - 2021)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên dưới đây

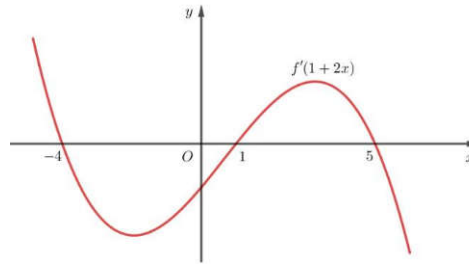
$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-2$	$3$	$-4$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |f(|6x-5|) + 2021 + m|$  có 3 điểm cực đại?

**Câu 63. (Đại học Hồng Đức 2022)** Cho hàm đa thức  $y = [f(x^2 + 2x)]'$  có đồ thị cắt trục  $Ox$  tại 5 điểm phân biệt như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  với  $2022m \in \mathbb{Z}$  để hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$  có 9 điểm cực trị?



**Câu 64. (Sở Nam Định 2023)** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e (a \neq 0)$ , hàm số  $y = f'(1+2x)$  có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$  có ít nhất 5 điểm cực trị?

### PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### NHÓM CÂU HỎI CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

**Câu 1.** (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$2$	$-4$	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2.                      B. 3.                      C. 0.                      D. -4.

**Câu 2.** (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 2) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$-2$	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A.  $x = -2$ .                      B.  $x = 2$ .                      C.  $x = 1$ .                      D.  $x = -1$ .

**Câu 3.** (Mã 101 – 2020 Lần 1) Cho hàm  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-5	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 3.                      B. -5.                      C. 0.                      D. 2.

**Câu 4.** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau.



$x$	$-\infty$	$-2$	$3$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-3$		$2$		$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3.                      B. 2.                      C. -2.                      D. -3.

**Câu 5.** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-2$		$2$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-1$		$3$		$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2.                      B. -2.                      C. 3.                      D. -1.

**Câu 6.** (Mã 103 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

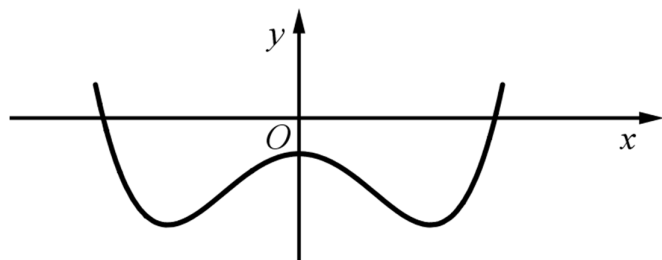
$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$						

$+\infty \nearrow 3 \searrow -2 \nearrow +\infty$

Hàm số đạt cực đại tại:

- A.  $x = -2$ .                      B.  $x = 3$ .                      C.  $x = 1$ .                      D.  $x = 2$ .

**Câu 7.** (Mã 103 - 2018) Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên.

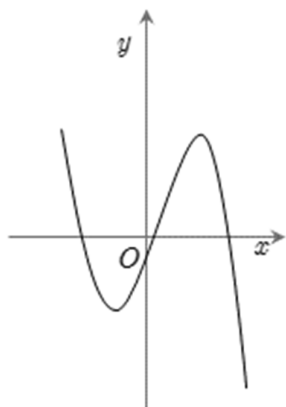


Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3                      B. 0                      C. 1                      D. 2

**Câu 8.** (Mã 102 - 2018) Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số này là



### D. 1

(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$ , bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

### D. 3 .

(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 2) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

### D. 1.

**(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$		$-1$		$0$		$1$		$2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$\parallel$	$-$	$0$	$-$	

**D. 3.**

**(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$+$

#### D. 4 .

**(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

### D. 1.

**(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

### D. 1.

**(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f'(x) = x(x+1)(x-4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

### D. 2.

**(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

### D. 1

**(THPT Cù Huy Cận 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .  
Số điểm cực trị của hàm số là?

### D. 3.

**(Mã 102-2023)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+2)(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

### D. 1.

- Câu 19. (Sở Bình Phước 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là  
A. 3 B. 5 C. 2 D. 4
- Câu 20. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)(x-2)^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là  
A. 5. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 21. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x+3)$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:  
A. 3 B. 1 C. 0 D. 2
- Câu 22. (Đề Minh Họa 2017)** Tìm giá trị cực đại  $y_{CB}$  của hàm số  $y = x^3 - 3x + 2$ .  
A.  $y_{CB} = -1$  B.  $y_{CB} = 4$  C.  $y_{CB} = 1$  D.  $y_{CB} = 0$
- Câu 23. (Mã 104 - 2017)** Hàm số  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  có bao nhiêu điểm cực trị?  
A. 1 B. 3 C. 0 D. 2
- Câu 24.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?  
A. Cực tiểu của hàm số bằng  $-3$  B. Cực tiểu của hàm số bằng  $1$   
C. Cực tiểu của hàm số bằng  $-6$  D. Cực tiểu của hàm số bằng  $2$
- Câu 25. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm giá trị cực tiểu  $y_{CT}$  của hàm số  $y = -x^3 + 3x - 4$ .  
A.  $y_{CT} = -6$  B.  $y_{CT} = -1$  C.  $y_{CT} = -2$  D.  $y_{CT} = 1$
- Câu 26. (THPT Cù Huy Cận 2019)** Giá trị cực tiểu  $y_{CT}$  của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  là:  
A.  $y_{CT} = 0$ . B.  $y_{CT} = 3$ . C.  $y_{CT} = 2$ . D.  $y_{CT} = 4$ .
- Câu 27. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019)** Đồ thị hàm số  $y = x^4 - x^2 + 1$  có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?  
A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.
- Câu 28. (Hsg Bắc Ninh 2019)** Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?  
A.  $y = \frac{x^2+1}{x}$  B.  $y = \frac{2x-2}{x+1}$  C.  $y = x^2 - 2x + 1$  D.  $y = -x^3 + x + 1$
- Câu 29. (THPT Ba Đình 2019)** Tìm giá trị cực đại của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 2$ .  
A.  $-2$ . B.  $0$ . C.  $2$ . D.  $1$ .
- Câu 30. (Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019)** Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = -x^3 + x^2 + 5x - 5$  là  
A.  $(-1; -8)$  B.  $(0; -5)$  C.  $\left(\frac{5}{3}; \frac{40}{27}\right)$  D.  $(1; 0)$

### NHÓM CÂU HỎI CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ, GIỎI

- Câu 31. (Mã 110 - 2017)** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$  đạt cực đại tại  $x = 3$ .  
A.  $m = -1$  B.  $m = -7$  C.  $m = 5$  D.  $m = 1$
- Câu 32. (Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$   
A. không tồn tại  $m$ . B.  $m = \pm 1$ . C.  $m = 1$ . D.  $m \in \{1; 2\}$ .
- Câu 33. (Chuyên QH Huế - Lần 2 - 2019)** Xác định tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = x + m\sqrt{x}$  đạt cực trị tại  $x = 1$ .  
A.  $m = -2$ . B.  $m = 2$ . C.  $m = -6$ . D.  $m = 6$ .

- Câu 34. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập số thực  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (x - \sin x)(x - m - 3)\left(x - \sqrt{9 - m^2}\right)^3 \forall x \in \mathbb{R}$  ( $m$  là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ ?
- A. 6                                      B. 7                                      C. 5                                      D. 4
- Câu 35. (Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$  đạt cực đại tại  $x = 0$  là:
- A.  $m \in \mathbb{R}$ .                              B.  $m < 0$ .  
C. Không tồn tại  $m$ .                      D.  $m > 0$ .
- Câu 36.** Biết rằng hàm số  $y = (x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3$  có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A.  $ab \leq 0$ .                              B.  $ab < 0$ .                              C.  $ab > 0$ .                              D.  $ab \geq 0$ .
- Câu 37. (THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = mx^3 - 2mx^2 + (m - 2)x + 1$  không có cực trị
- A.  $m \in (-\infty; 6) \cup (0; +\infty)$ . B.  $m \in (-6; 0)$ .                              C.  $m \in [-6; 0)$ .                              D.  $m \in [-6; 0]$ .
- Câu 38. (HSG - TP Đà Nẵng - 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m + 1)x^2 + 1$  có cực tiểu mà không có cực đại.
- A.  $m \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{7}}{3}\right]$ .                      B.  $m \in \left[\frac{1 - \sqrt{7}}{3}; 1\right] \cup \{-1\}$ .  
C.  $m \in \left[\frac{1 + \sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$ .                      D.  $m \in \left[\frac{1 - \sqrt{7}}{3}; \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$ .
- Câu 39. (HSG 12 - Bắc Ninh - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x + 1)(x^2 + 2mx + 5)$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số có đúng một điểm cực trị?
- A. 0.                                      B. 5.                                      C. 6.                                      D. 7.
- Câu 40. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập hợp các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 1$  có hai cực trị là:
- A.  $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$                       B.  $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$                       C.  $(-1; 2)$                               D.  $[-1; 2]$
- Câu 41. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hàm số  $y = mx^4 - x^2 + 1$ . Tập hợp các số thực  $m$  để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là
- A.  $(0; +\infty)$ .                              B.  $(-\infty; 0]$ .                              C.  $[0; +\infty)$ .                              D.  $(-\infty; 0)$ .
- Câu 42. (Mã 123 - 2017)** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  có hai cực trị  $A$  và  $B$ . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $AB$ ?
- A.  $M(0; -1)$                               B.  $N(1; -10)$                               C.  $P(1; 0)$                               D.  $Q(-1; 10)$
- Câu 43.** Đồ thị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$ . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $AB$ .
- A.  $P(1; 0)$ .                              B.  $M(0; -1)$ .                              C.  $N(1; -10)$ .                              D.  $Q(-1; 10)$ .
- Câu 44. (Đề Tham Khảo 2017)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$  có hai điểm cực trị  $A$  và  $B$  sao cho  $A, B$  nằm khác phía và cách đều đường thẳng  $d: y = 5x - 9$ . Tính tổng tất cả các phần tử của  $S$ .
- A. 3                                      B. 6                                      C. -6                                      D. 0
- Câu 45. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số  $y = x^3 - (m + 6)x^2 + (2m + 9)x - 2$ . Tìm  $m$  để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq -6 \end{cases} & \text{B. } m \geq -2. & \text{C. } m \leq -6. & \text{D. } \begin{cases} m > -2 \\ m < -6 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \end{array}$$

**Câu 46. (THPT Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$  với  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng  $(-2; 3)$ .

$$\text{A. } m \in (-1; 3) \cup (3; 4). \quad \text{B. } m \in (1; 3). \quad \text{C. } m \in (3; 4). \quad \text{D. } m \in (-1; 4).$$

**Câu 47. (HSG Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực  $m$  để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3mx + 2$  cắt đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; 1)$ , bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho diện tích tam giác  $IAB$  đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{A. } m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3} \quad \text{B. } m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \quad \text{C. } m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \quad \text{D. } m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$$

**Câu 48.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6mx + 4$  có đồ thị  $(C_m)$ . Gọi  $m_0$  là giá trị của  $m$  để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của  $(C_m)$  cắt đường tròn tâm  $I(1; 0)$ , bán kính  $\sqrt{2}$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho tam giác  $IAB$  có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

$$\text{A. } m_0 \in (3; 4). \quad \text{B. } m_0 \in (1; 2). \quad \text{C. } m_0 \in (0; 1). \quad \text{D. } m_0 \in (2; 3).$$

**Câu 49. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Biết  $m_0$  là giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$\text{A. } m_0 \in (-1; 7). \quad \text{B. } m_0 \in (7; 10). \quad \text{C. } m_0 \in (-15; -7). \quad \text{D. } m_0 \in (-7; -1).$$

**Câu 50. (THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = x^3 - 5x^2 + (m+4)x - m$  có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

$$\text{A. } \emptyset. \quad \text{B. } (-\infty; 3) \cup (3; 4]. \quad \text{C. } (-\infty; 3) \cup (3; 4). \quad \text{D. } (-\infty; 4).$$

**Câu 51. (Mã 102-2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho ứng với mỗi  $m$ , hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3}$  có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng  $(0; 6)$ .

$$\text{A. } 24. \quad \text{B. } 25. \quad \text{C. } 26. \quad \text{D. } 23.$$

**Câu 52. (Đề Minh Họa 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 + 1$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

$$\text{A. } m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}. \quad \text{B. } m = 1. \quad \text{C. } m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}. \quad \text{D. } m = -1.$$

**Câu 53. (Mã 105 -2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2mx^2$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

$$\text{A. } 0 < m < 1 \quad \text{B. } m > 0 \quad \text{C. } 0 < m < \sqrt[3]{4} \quad \text{D. } m < 1$$

**Câu 54. (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$  có đồ thị  $(C)$ . Biết đồ thị  $(C)$  có ba điểm cực trị  $A, B, C$  thỏa mãn  $ABCD$  là hình thoi với  $D(0; -3)$ . Số  $m$  thuộc khoảng nào sau đây?

$$\text{A. } m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right). \quad \text{B. } m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right). \quad \text{C. } m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right). \quad \text{D. } m \in (2; 3).$$

**Câu 55. (THPT Đoàn Thượng - Hải Phòng 2019)** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 1$  (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính  $R = 1$  bằng

A.  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ .

B.  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

C.  $2+\sqrt{5}$ .

D.  $-1+\sqrt{5}$ .

**Câu 56. (Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$  có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và ABDC là hình thoi trong đó  $D(0; -3)$ , A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A.  $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$ .

B.  $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$ .

C.  $m \in (2; 3)$ .

D.  $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$ .

**Câu 57. (Chuyên Vĩnh Phúc 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2mx^2$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A.  $m < 1$ .

B.  $0 < m < 1$ .

C.  $0 < m < \sqrt[3]{4}$ .

D.  $m > 0$ .

**Câu 58. (THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 - m$  có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của m là:

A.  $m = 1; m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

B.  $m = 1; m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

C.  $m = -1; m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

D.  $m = -1; m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 59. (Toán Học Tuổi Trẻ Số 5)** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$ .

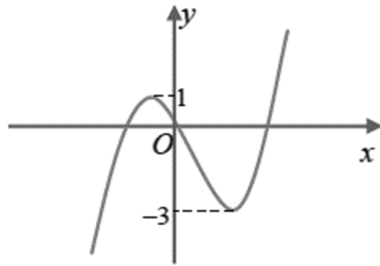
A.  $y = 2x + 2$ .

B.  $y = x + 1$ .

C.  $y = 2x + 1$ .

D.  $y = 1 - x$ .

**Câu 60. (Chuyên Vinh - Lần 2).** Đồ thị (C) có hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số  $y = |f(x) + m|$  có ba điểm cực trị là:

A.  $m \leq -1$  hoặc  $m \geq 3$ .

B.  $m \leq -3$  hoặc  $m \geq 1$ .

C.  $m = -1$  hoặc  $m = 3$ .

D.  $1 \leq m \leq 3$ .

**Câu 61. (Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có 7 điểm cực trị?

A. 5

B. 6

C. 4

D. 3

**Câu 62. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có 5 điểm cực trị.

A. 16

B. 44

C. 26

D. 27

**Câu 63. (Sở Nam Định - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							

The graph illustrates the function  $f(x)$  across various intervals of  $x$ . The x-axis is marked with  $-\infty$ , 1, 2, and  $+\infty$ . The function starts at  $-\infty$  for  $x = -\infty$ , rises to a peak of 11 at  $x = 1$ , falls to a trough of 4 at  $x = 2$ , and then ascends towards  $+\infty$  as  $x$  approaches  $+\infty$ .

Đồ thị hàm số  $y = |f(x) - 2m|$  có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

- A.  $m \in (4; 11)$ . B.  $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$ . C.  $m = 3$ . D.  $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$ .

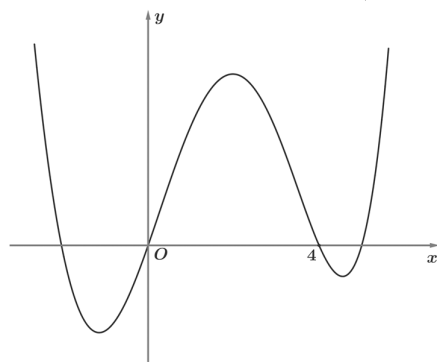
**Câu 64.** (THPT Nguyễn Huệ - Tt Huế - 2018) Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ . Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = |f(x-2) + m|$  có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của  $S$  bằng

- A. 15. B. 18. C. 9. D. 12.

**Câu 65.** (Mã 104-2022) Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^4 - mx^2 - 64x|$  có đúng 3 điểm cực trị?

- A. 23. B. 12. C. 24. D. 11.

**Câu 66.** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$  là



- A. 5. B. 3. C. 7. D. 11.

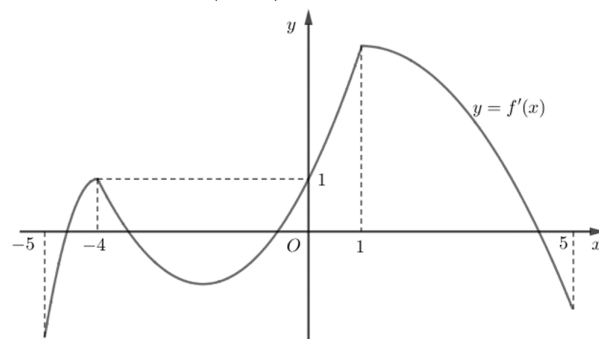
**Câu 67.** (Mã 101 - 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		$2$		$+\infty$
		$-3$		$-1$	

Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  là

- A. 9. B. 3. C. 7. D. 5.

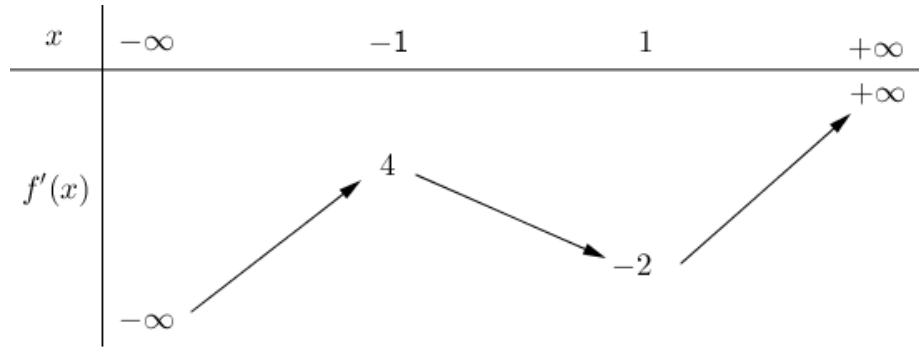
**Câu 68.** (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$  có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng  $(-5; 1)$ ?



- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.



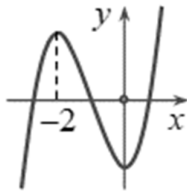
**Câu 69. (Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau:



Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x^2 + 2x)$  là

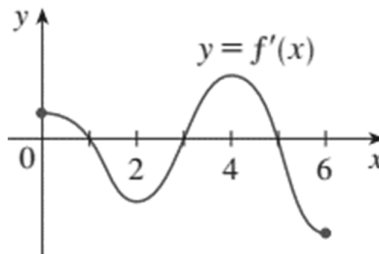
- A. 4. B. 5. C. 1. D. 7.

**Câu 70.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?



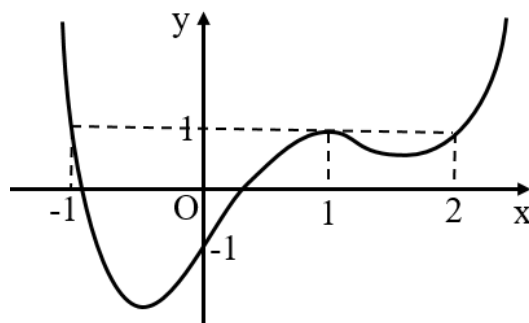
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

**Câu 71. (Sở Bình Phước - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có đạo hàm trên  $[0; 6]$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  trên đoạn  $[0; 6]$  được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số  $y = [f(x)]^2$  có tối đa bao nhiêu cực trị.



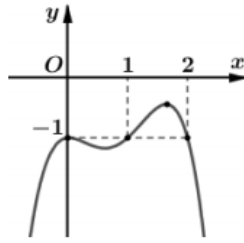
- A. 3. B. 7. C. 6. D. 4.

**Câu 72. (Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $f'(x)$  như hình vẽ bên. Đặt  $g(x) = f(x) - x$ . Hàm số đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



- A.  $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$  B.  $(-2; 0)$  C.  $(0; 1)$  D.  $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

**Câu 73.** (Kim Liên - Hà Nội 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số  $g(x) = f(x) + x$  đạt cực tiểu tại điểm

- A.  $x = 1$ .                      B.  $x = 2$ .  
C. Không có điểm cực tiểu.                      D.  $x = 0$ .

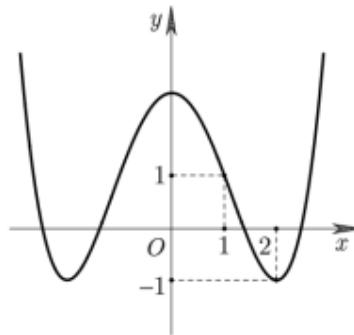
**Câu 74.** (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$2$	$5$	$-\infty$	

Số điểm cực đại của hàm số  $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$  là

- A. 3.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 1.

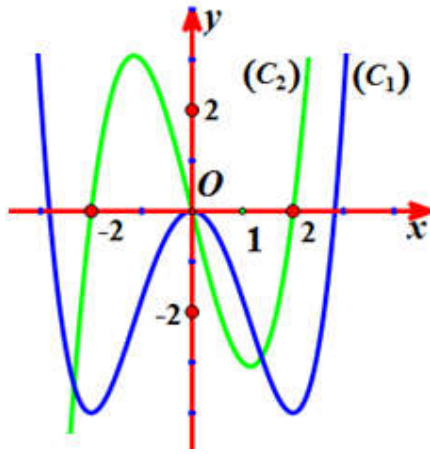
**Câu 75.** (Chuyên Vinh -2022) Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(1 - x^2)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}$  là

- A. 5.  
B. 4.  
C. 3.  
D. 7.

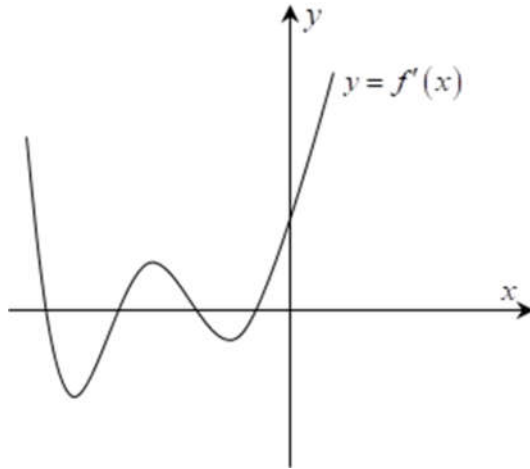
**Câu 76.** (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022) Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C_1)$  và  $y = f'(x)$  có đồ thị  $(C_2)$  như hình vẽ dưới.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số  $g(x) = f[e^{-x}f(x)]$  trên khoảng  $(-\infty; 3)$  là

- A. 5.                      B. 3.                      C. 6.                      D. 4.

**Câu 77. (Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 0$ . Biết  $y = f'(x)$  là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = |f(x^4) - x^2|$  là



- A. 4.                      B. 3.                      C. 6.                      D. 5.

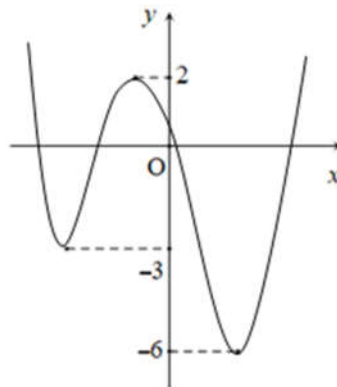
**Câu 78. (Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	—	0	+	0	—	0	+

Hỏi hàm số  $y = f(x^2 - 2|x|)$  có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4                      B. 7                      C. 9                      D. 11

**Câu 79. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho  $y = f(x)$  là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-12; 12]$  để hàm số  $g(x) = |2f(x-1) + m|$  có 5 điểm cực trị?



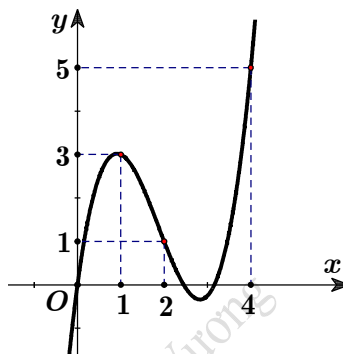
A. 13.

B. 14.

C. 15.

D. 12.

**Câu 80.** (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(0) = 0; f(4) > 4$ . Biết hàm  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = |f(x^2) - 2x|$  là

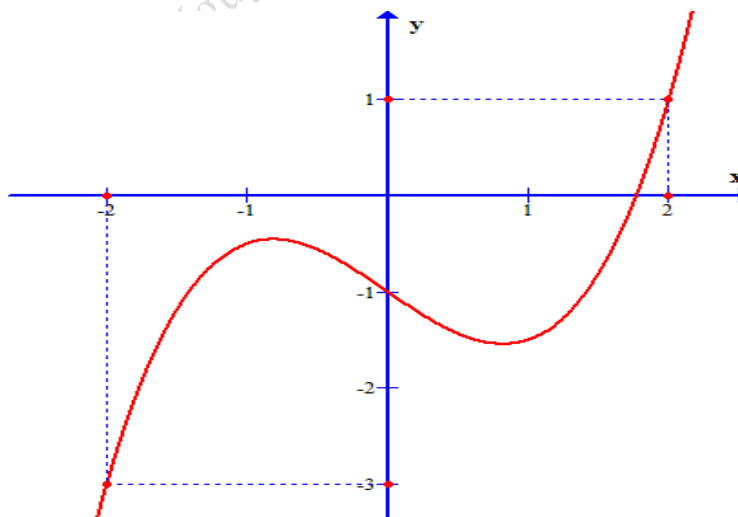
A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

**Câu 81.** Cho  $f(x)$  là hàm bậc bốn thỏa mãn  $f(0) = 0$ . Hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ



Hàm số  $g(x) = |2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

**Câu 82.** (Chuyên Biên Hòa - 2021) Hàm số  $f(x) = \begin{cases} 1 + x - e^x & \text{khi } x > 0 \\ x^2 + 6x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ . Số điểm cực trị của hàm

số  $y = |f(x)|$  là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

**Câu 83. (Chuyên Quang Trung - Bình Phước 2022)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $|f(1 - 2022x)|$  có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 12. B. 10. C. 9. D. 11.

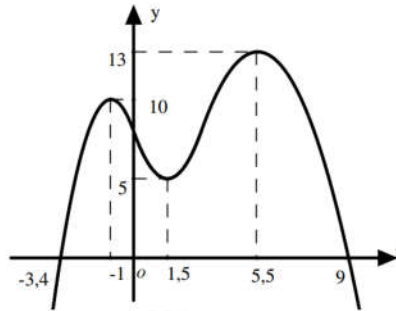
**Câu 84. (Đề minh họa 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$  có đúng 9 điểm cực trị?

- A. 16. B. 9. C. 15. D. 10.

**Câu 85. (Chuyên Vinh - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $f(x^2 - 8x + m)$  có 5 điểm cực trị?

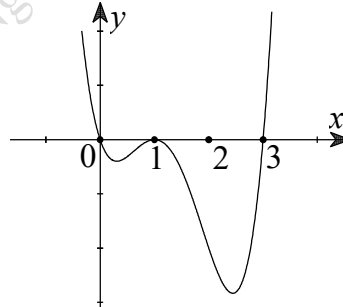
- A. 15. B. 17. C. 16. D. 18.

**Câu 86.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Biết rằng  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x) - mx + 5$  có đúng hai điểm cực trị.



- A. 7. B. 8. C. 6. D. 5.

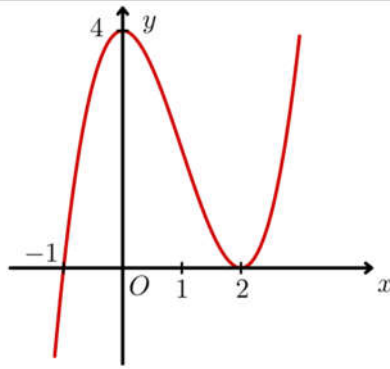
**Câu 87. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm  $m$  để hàm số  $y = f(x^2 + m)$  có 3 điểm cực trị.

- A.  $m \in (3; +\infty)$ . B.  $m \in [0; 3]$ . C.  $m \in [0; 3)$ . D.  $m \in (-\infty; 0)$ .

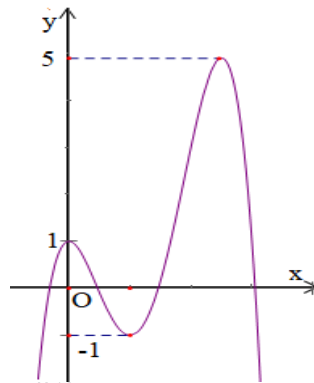
**Câu 88. (Sở Lào Cai - 2021)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$  có đồ thị  $(C)$  của hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ sau:



Đặt  $g(x) = f(f'(x))$ ,  $h(x) = f'(f(x))$ . Tổng số điểm cực trị của  $g(x)$  và  $h(x)$  là:

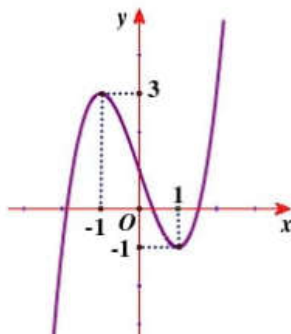
- A. 12.                      B. 11.                      C. 8.                      D. 13.

**Câu 89.** (Liên Trường Nghệ An – 2021) Cho đồ thị hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2020; 2021]$  để hàm số  $g(x) = f^2(x) - mf(x)$  có đúng hai điểm cực đại là.



- A. 2027.                      B. 2021.                      C. 2019.                      D. 2022.

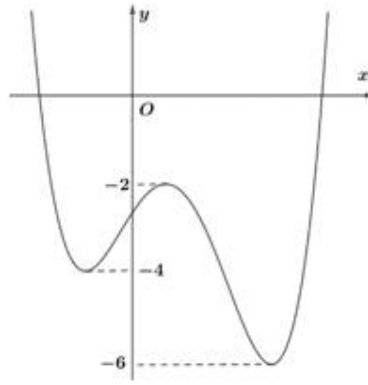
**Câu 90.** (Liên trường Quảng Nam 2022) Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(f^2(x) - 3f(x) - m)$  có ít nhất 13 điểm cực trị?

- A. 1.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 2.

**Câu 91.** (Sở Hà Nội 2023) Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ



Số giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = (f(x) + m)^2$  có 5 điểm cực trị là

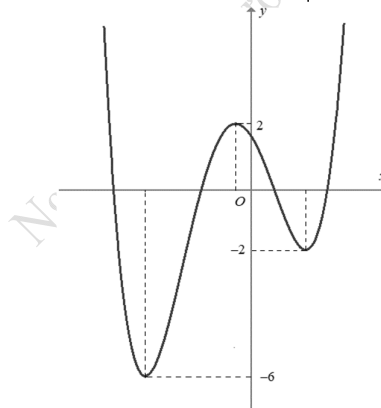
- A. 3.  
B. 5.  
C. 4.  
D. 6.

**Câu 92.** (Mã 104 - 2021 Lần 1) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-9)(x^2-16), \forall x \in \mathbb{R}$ .

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x^3 + 7x| + m)$  có ít nhất 3 điểm cực trị?

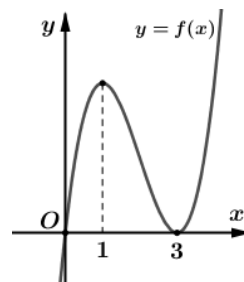
- A. 16.                      B. 9.                      C. 4.                      D. 8.

**Câu 93.** (Sở Bình Phước - 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực  $m$  để hàm số  $g(x) = |f(x+2020) + m^2|$  có 5 điểm cực trị?



- A. 1.                      B. 2.                      C. 4.                      D. 5.

**Câu 94.** (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $h(x) = |f^2(x) + 2f(x) + 2m|$  có đúng 3 điểm cực trị.

- A.  $m > 1$                       B.  $m \geq 1$                       C.  $m \leq 2$                       D.  $m > 2$

**Câu 95.** (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x-1)(x^2+2mx+m+1)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m > -10$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có 5 điểm cực trị?



A. 6.

B. 7.

C. 9.

D. 8.

**Câu 96. (Chuyên ĐHSPT - 2021)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$a$	$b$	$+\infty$				
$y'$		-	0	+	0	-		
$y$		$+\infty$		$-5$		$6$		$-\infty$

Đặt  $h(x) = |m - f(x - 2)|$  ( $m$  là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  sao cho hàm số  $y = h(x)$  có đúng 5 điểm cực trị?

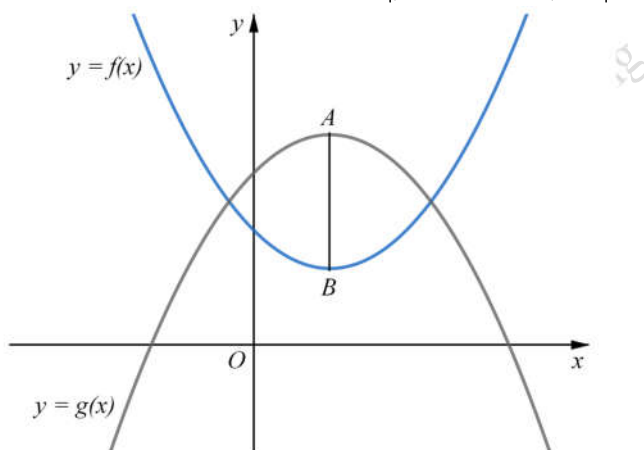
A. Vô số.

B. 12.

C. 0.

D. 10.

**Câu 97. (Chuyên Tuyên Quang - 2021)** Cho hai hàm đa thức  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  có đồ thị là các đường cong như hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có đúng một điểm cực trị là  $B$ , đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có đúng một điểm cực trị là  $A$  và  $AB = \frac{7}{4}$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-2021; 2021)$  để hàm số  $y = |f(x) - g(x)| + m$  có đúng 5 điểm cực trị?



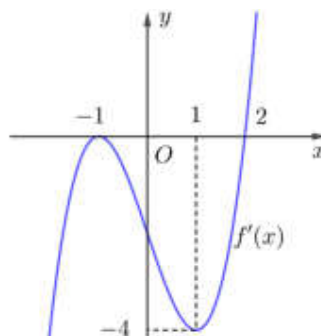
A. 2019.

B. 2021.

C. 2022.

D. 2020.

**Câu 98. (THPT Phù Cừ - Hưng Yên - 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(2x^2 - 4|x| + m - 3)$  có 7 điểm cực trị.

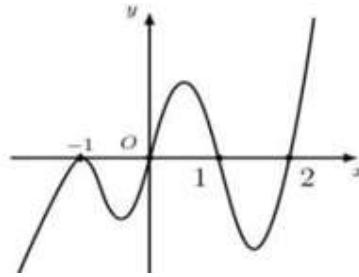
A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

**Câu 99. (Thị xã Quảng Trị 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số  $m \in (-10; 10)$  để hàm số  $y = f\left(x^2 - 2|x| + \frac{m}{2}\right)$  có 9 điểm cực trị là

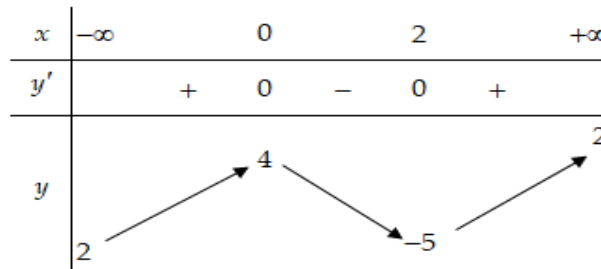
- A.** 11.  
**B.** 13.  
**C.** 10.  
**D.** 12.

**Câu 100. (Chuyên Vinh 2023)** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ . Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = \left| f(x^2 + m - 5) \right|$  có ít nhất 7 điểm cực trị?

- A. 6.**                      **B. 8.**                      **C. 7.**                      **D. 3.**

## PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

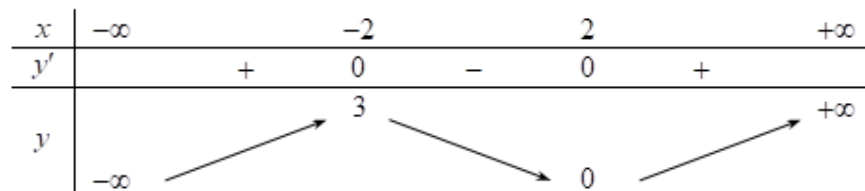
**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; 2)$		
b)	Hàm số có bốn điểm cực trị		
c)	Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$		
d)	Hàm số một cực đại		

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$		
b)	Hàm số có ba điểm cực trị		
c)	Hàm số có $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$ .		
d)	Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng $2x + 2y - 4 = 0$		

**Câu 3.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$		
b)	Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$		
c)	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$		
d)	Hàm số có hai điểm cực trị		

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$		
b)	Hàm số có 2 điểm cực trị		
c)	Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 3		
d)	Điểm cực đại của đồ thị hàm số có tổng hoành độ và tung độ bằng 4		

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số có 3 điểm cực trị.		
b)	Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0); (1; +\infty)$ .		
c)	Đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại.		
d)	Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1); (0; 1)$ .		

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$  ( $m$  là tham số).

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Với $m = -1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$		
b)	Với $m = -1$ thì đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu là $(0; 2)$		
c)	Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$ .		
d)	Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$ thì $m = k$ , khi đó phương trình $2^{x+k} = 4$ có nghiệm là $x = 3$		

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2$  ( $m$  là tham số).

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 0$ hàm số có 3 điểm cực trị		
b)	Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $M(a; b)$ , khi đó $a + b = 2$		
c)	Với $m = 2$ hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ .		
d)	Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ thì $m = k$ , khi đó $\log_k 8 = 2$		

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$  ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Nếu $m = 1$ thì hàm số không có cực đại		
b)	Nếu $m = 2$ thì hàm số có 1 điểm cực trị		
c)	Nếu $m = 0$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(a; b)$ khi đó $ab = 1$		

d)	Đề hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại thì $m \in [a; b]$ khi đó $a + b = 3$		
----	---	--	--

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$  ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 0$ hàm số có một điểm cực trị		
b)	Khi $m = 1$ thì giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0		
c)	Khi $m = \frac{1}{2}$ thì điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(a; b)$ khi đó $2024^a + 2023^b = 2$		
d)	Đề hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một cực trị thì $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ khi đó $a + b = 3$		

**Câu 10.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$

( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = -2$ thì hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị		
b)	Khi $m = -3$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị		
c)	Khi $m = 5$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị		
d)	Tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị bằng 5		

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$  ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 1$ thì $f(2024) < f(2023)$		
b)	Khi $m < -3$ thì hàm số có 2 điểm cực trị		
c)	Khi $m > 3$ thì hàm số có 2 điểm cực trị		
d)	Gọi $S$ là tập các giá trị dương của tham số $m$ sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại $x_1, x_2$ thỏa mãn $ x_1 - x_2  \leq 5$ . Biết $S = (a; b]$ . Khi đó $2b - a = \frac{\sqrt{61}}{2} - 3$ .		

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$  ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = \frac{1}{3}$ thì hàm số có hai điểm cực trị		
b)	Với $m \neq \frac{a}{b}$ (phân số tối giản) thì hàm số có hai điểm cực trị, khi đó $a + b = 4$		
c)	Với $m = 2$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$		
d)	Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho song song đường thẳng $y = -4x$ , khi đó tổng tất cả các giá trị thực của tham số $m$ bằng $\frac{2}{3}$		

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$  ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 1$ thì hàm số có 2 điểm cực trị		
b)	Khi $m = 1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$		
c)	Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{13} \\ m < -2\sqrt{13} \end{cases}$		
d)	Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}^*$ ) là giá trị của tham số $m$ để hàm số có 2 điểm cực trị $x_1, x_2$ sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ . Khi đó giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2 = 11$ .		

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$  ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 1$ hàm số có 2 điểm cực trị		
b)	Khi $m = 1$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$		
c)	Biết $m < a$ thì hàm số có cực trị, khi đó phương trình $\log_2(x + a) = 3$ có nghiệm là $x = 7$		
d)	Có 6 giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho ứng với mỗi $m$ , hàm số có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$ ?		

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x) = -3x^4 + 8x^2 + bx$  ( $b$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $b = 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{2}{3}\right)$		
b)	Khi $b = 0$ thì $f(2024) < f(2023)$		
c)	Khi $b = 0$ thì đồ thị hàm số có điểm cực đại là $\left(\frac{64}{9}; \frac{2}{3}\right)$		
d)	Có 13 giá trị nguyên của tham số $b$ để hàm số $y = -3x^4 + 8x^2 + bx$ có đúng ba điểm cực trị		

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$  ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số có 3 điểm cực trị		
b)	Khi $m = 0$ thì hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$		
c)	Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số $y = -f(x)$ có 2 điểm cực đại là $(-1; 5)$ và $(0; 0)$		
d)	Có 6 giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y =  f(x) $ có đúng 5 điểm cực trị		

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$  với  $m$  là một tham số thực. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

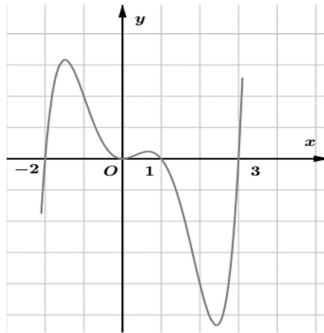
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 0$ hàm số không có điểm cực trị		
b)	Khi $m \neq 0$ hàm số có hai điểm cực trị		
c)	Khi $m = 1$ thì tọa độ trung điểm của hai điểm cực trị đồ thị hàm số là $I(1; 2)$		

d)	Để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$ thì $m \in (1; 3]$		
----	---	--	--

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = -x^4 + 2mx^2 + 2$  có đồ thị  $(C_m)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 0$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$		
b)	Khi $m = 0$ hàm số có một điểm cực trị		
c)	Để hàm số có ba cực trị thì $m > 0$		
d)	Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông thì $m = a$ , khi đó thể tích khối chóp có đáy $S = 4$ chiều cao $h = a$ bằng 4		

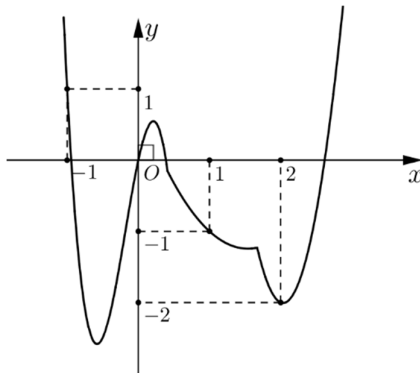
**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị		
b)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$		
c)	Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{3}; +\infty)$		
d)	Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị?		

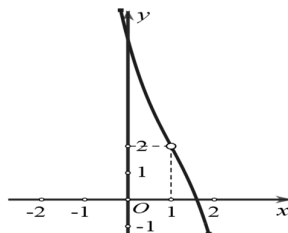
**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Đặt  $g(x) = 2f(x) + x^2 + 1$ .



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ .		
b)	Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ .		
c)	Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ .		
d)	Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$ .		

**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và không có cực trị, đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  là đường cong của như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số  $h(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2 - 2x \cdot f(x) + 2x^2$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Đồ thị của hàm số có điểm cực tiểu là $M(1;0)$ .		
b)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ .		
c)	Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $N(1;2)$ .		
d)	Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $M(1;0)$ .		

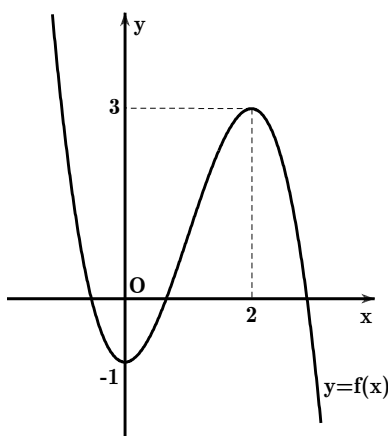
**Câu 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm đến cấp hai trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của hàm số  $y = f'(x)$  như hình sau:

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$4$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$

Và hàm số  $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị		
b)	$x = 0$ là điểm cực đại của $y = f(x)$		
c)	$x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $y = g(x)$		
d)	Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$ .		

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị  $f(x)$  như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị		
b)	$y = 2$ là giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$		
c)	Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$		



d)	Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0$ . Khi đó giá trị $x_0$ thuộc khoảng $(-1; 1)$		
----	--	--	--

**PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN**

**Câu 1. (THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Có bao nhiêu số thực  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

Trả lời : .....

**Câu 2. (THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Tìm các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$  đạt cực đại tại  $x = 3$ .

Trả lời : .....

**Câu 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  thuộc khoảng  $(-2019; 2019)$  để hàm số  $y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m + 5$  đạt cực đại tại  $x = 0$ ?

Trả lời : .....

**Câu 4. (Mã 104 - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ ?

Trả lời : .....

**Câu 5. (Chuyên Hà Tĩnh - Lần 1 - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$  có đúng một cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 6. (THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số  $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$ . Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số không có cực trị. Tìm số phần tử của  $S$ ?

Trả lời : .....

**Câu 7. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$  có hai điểm cực trị.

Trả lời : .....

**Câu 8. (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm số các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$  có ba điểm cực trị.

Trả lời : .....

**Câu 9. (THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số  $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại?

Trả lời : .....

**Câu 10. (Chuyên Sơn La - 2020)** Gọi  $S$  là tập hợp những giá trị của tham số  $m$  để hàm số sau không có cực trị trên  $\mathbb{R}$ .  $f(x) = \frac{1}{4}m^2 \cdot e^{4x} + \frac{1}{3}m \cdot e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x$ . Tính tổng tất cả các phần tử của tập  $S$ ?

Trả lời : .....

**Câu 11.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = (2m-1)x + m + 3$  song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$

Trả lời : .....

**Câu 12. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$  có hai điểm cực trị và điểm  $M(9; -5)$  nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

Trả lời : .....

**Câu 13. (Nguyễn Khuyến 2019)** Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 2x + m$  đi qua điểm  $M(-3; 7)$  khi  $m$  bằng bao nhiêu?

Trả lời : .....

**Câu 14. (TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Giả sử  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  và đường thẳng  $AB$  đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = abc + ab + c$ .

Trả lời : .....

**Câu 15. (Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1$  có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

Trả lời : .....

**Câu 16. (THPT Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$  với  $m$  là tham số. Tính tổng bình phương tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số có hai điểm cực trị  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $x_1 + 2x_2 = 1$

Trả lời : .....

**Câu 17. (THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $C(1; 4)$ . Tính tổng các giá trị nguyên dương của  $m$  để  $(C)$  có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho tam giác  $ABC$  có diện tích bằng 4.

Trả lời : .....

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$  ( $m$  là tham số). Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và  $I(2; -2)$ . Tính tổng tất cả các giá trị của  $m$  để ba điểm  $I, A, B$  tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng  $\sqrt{5}$

Trả lời : .....

**Câu 19. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$ , với  $m$  là tham số; gọi  $x_1, x_2$  là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$

Trả lời : .....

**Câu 20.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 + x^2 + mx - 1$  nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp  $(-5; 6) \cap S$ .

Trả lời : .....

**Câu 21. (Cụm Trường Vĩnh Phúc 2023)** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx + 6, & x \leq 2 \\ \frac{n}{2}x - 4, & x > 2 \end{cases}, (m, n \in \mathbb{R})$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  có đúng hai điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 22. (Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Trả lời : .....

**Câu 23. (Liên trường Nghệ An 2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = 3x^4 - 4(4+m)x^3 + 12(3-m)x + 2$  có ba điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 24. (Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 2m}{x + 1}$  có hai điểm cực trị  $A, B$  và tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ . Tính tổng tất cả các phần tử của  $S$

Trả lời : .....

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$  ( với  $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Trả lời : .....

**Câu 26. (Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tập hợp các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$  có 7 điểm cực trị

Trả lời : .....

**Câu 27. (THPT Kinh Môn - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(|x|)$  có 5 điểm cực trị.

Trả lời : .....

**Câu 28. (THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$  có 5 điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 29. (Liên trường Hà Tĩnh - 2022)** Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 14x^3 + 36x^2 + (16 - m)x$  với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có 7 điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 30. (THPT Nguyễn Huệ - Huế - 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x + 1)^4 (x - m)^5 (x + 3)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m \in [-5; 5]$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có 3 điểm cực trị?

Trả lời : .....

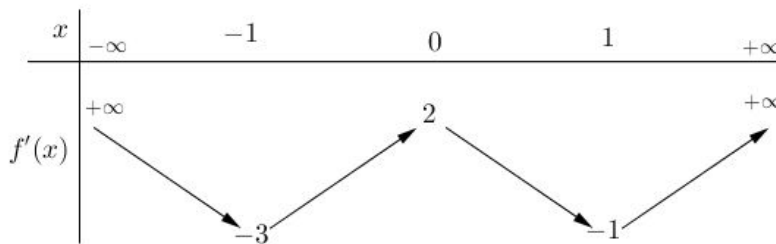
**Câu 31. (Sở Bắc Ninh 2023)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = |x^4 + x^3 - 5x^2 - x + m|$  có bốn điểm cực tiểu  $x_1, x_2, x_3, x_4$  thỏa mãn  $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) \geq 68$ . Tập  $S$  có bao nhiêu tập con?

Trả lời : .....

**Câu 32. (Sở Ninh Bình 2023)** Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-2023; 2023)$  để hàm số  $y = x^2 - 2m|x - m + 6| + 1$  có ba điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 33. (Mã 104 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng biến thiên của hàm số  $f'(x)$  như sau:



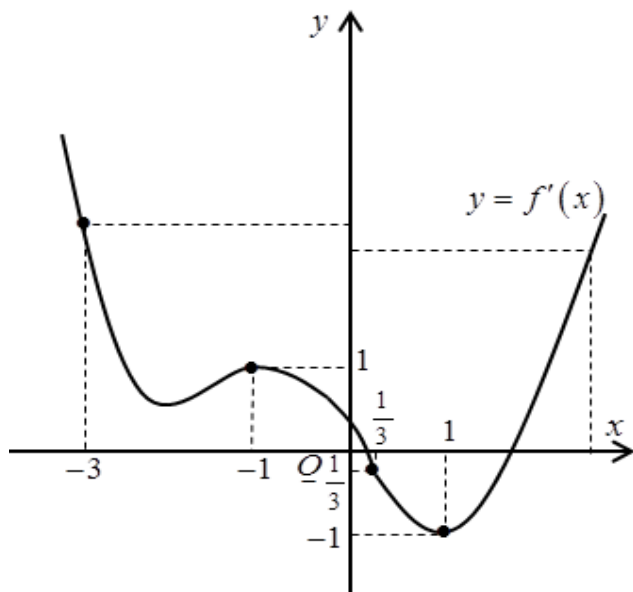
Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(4x^2 + 4x)$

Trả lời : .....

**Câu 34. (Sở Bắc Giang - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đúng ba điểm cực trị là  $-2; -1; 0$  và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 35. (THPT Thăng Long - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$ , hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$  có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng  $(0; 2\pi)$ .



Trả lời : .....

**Câu 36. (Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số bậc bốn  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

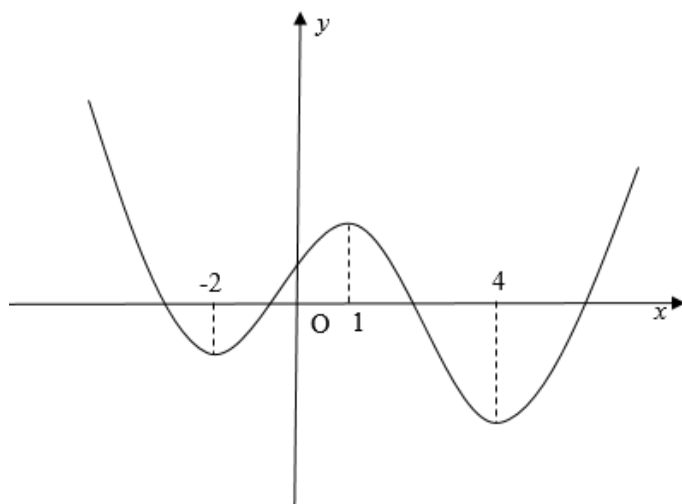
$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$-2$	$3$	$-2$	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$

Trả lời : .....

**Câu 37. (Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$g(x) = f\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right)$  có bao nhiêu điểm cực trị?



Trả lời : .....

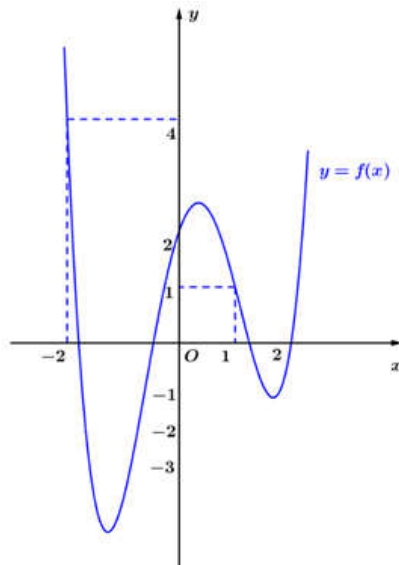
**Câu 38. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021)** Cho hàm số bậc bốn  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$		
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$-\infty$	$3$	$-1$	$3$	$-\infty$		

Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = \frac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$

Trả lời : .....

**Câu 39. (THPT Quảng Xương 1-Thành Hóa - 2021)** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số  $y = g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^4$

Trả lời : .....

**Câu 40. (Sở Thái Nguyên 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)(2x^2 - 3x - 9), \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$  có bao nhiêu điểm cực trị?

Trả lời : .....

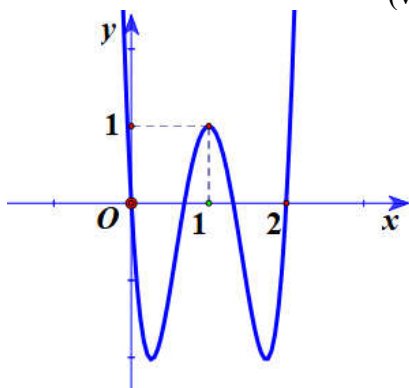
**Câu 41. (Sở Thái Nguyên 2022)** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		$-1$		$0$		$1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = (x^3 - x)[f(x+1)]^2$

Trả lời : .....

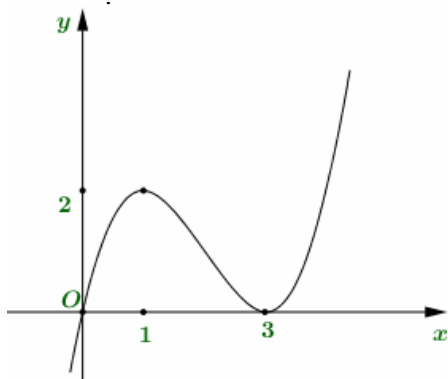
**Câu 42. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  (với  $a \neq 0; \{b, c, d, e\} \subset \mathbb{R}$ ) và  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Biết đồ thị hàm số  $y = f'(x) + x^2 - 2x$  tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ  $x = 1$ . Tìm tích các điểm cực đại của hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2) + \frac{x^6}{3} - 3x^4 + 8x^2$

Trả lời : .....

**Câu 43. (Sở Vĩnh Phúc 2022)** Cho hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ . Hàm số  $f'(1-x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



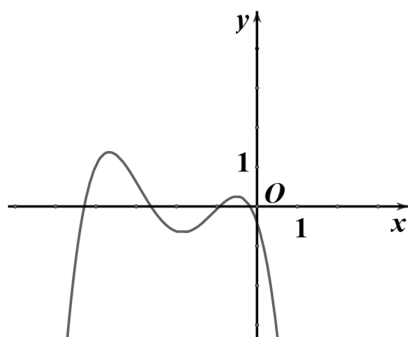
Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - x^2$

Trả lời : .....

**Câu 44. (Sở Cà Mau 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = 4x^3 - 16x$  và  $f(0) = 3$ . Gọi  $k$  là số điểm cực tiểu của hàm số  $g(x) = [f(x^2)]^2 + 1$ . Tính giá trị biểu thức  $T = -2k^2 + k - 5$ .

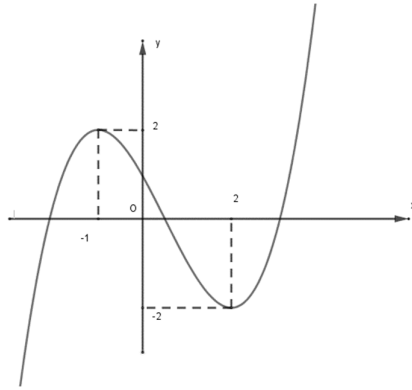
Trả lời : .....

**Câu 45. (Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 0$ . Biết  $y = f'(x)$  là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = |f(x^4) + x^2|$



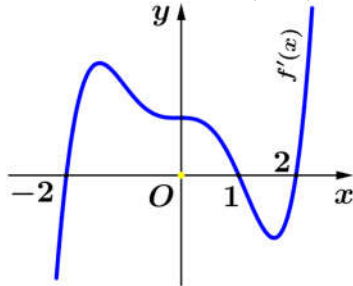
Trả lời : .....

**Câu 46. (HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số  $h(x) = \left| [f(x)]^2 - 4f(x) + 1 \right|$  có bao nhiêu điểm cực trị?



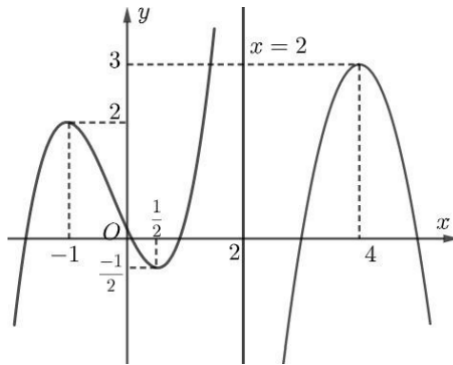
Trả lời : .....

**Câu 47. (THPT Mai Anh Tuấn - Thanh Hóa - 2021)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(-2) < f(2) = 0$ , đồ thị  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình bên. Hàm số  $g(x) = \left| f(x) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right|$  có bao nhiêu điểm cực trị?



Trả lời : .....

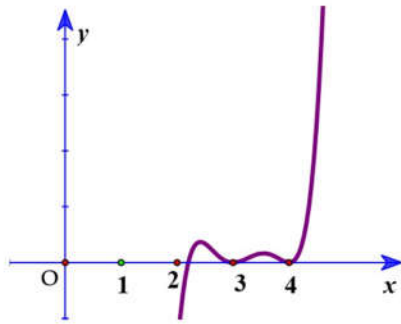
**Câu 48. (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$  có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(|2x - 1| + 2)$

Trả lời : .....

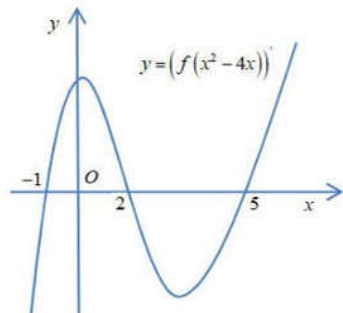
**Câu 49. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2022)** Cho  $f(x)$  là hàm đa thức bậc 6 sao cho đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ và  $f(2) < 0, f(1) > 0$ .



Tìm số điểm cực tiểu của hàm số  $y = \left| f(x^2 + 4x + 5) \right|$

Trả lời : .....

**Câu 50. (THPT Thị xã Quảng Trị 2023)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng hàm số  $y = f(x^2 - 4x)$  có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ dưới. Số điểm cực đại của hàm số  $y = f(x^4 - 6|x|^3 + 5x^2 + 12|x|)$  bằng



Tìm số điểm cực đại của hàm số  $y = f(x^4 - 4|x|^3 + 6x^2 - 4|x|)$

Trả lời : .....

**Câu 51. (Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m+18]$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $f(x)$  có đúng một điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 52. (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-2)^2(x^2-x)$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$  có 5 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của  $S$ ?

Trả lời : .....

**Câu 53. (THPT Hồ Nghinh - Quảng Nam - 2022)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)^2(x^2-4x)$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$  có đúng 5 điểm cực trị?

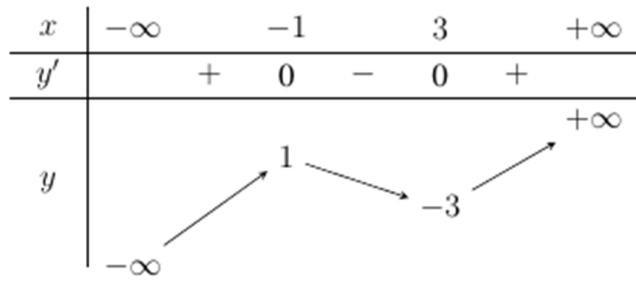
Trả lời : .....

**Câu 54. (THPT Bùi Thị Xuân - Huế - 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $f(x^2 - 8x + m)$  có 5 điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 55. (Chuyên Quốc Học Huế 2022)** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau





Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x^2 - 2x + m + 1)$  có 3 điểm cực trị?

Trả lời : .....

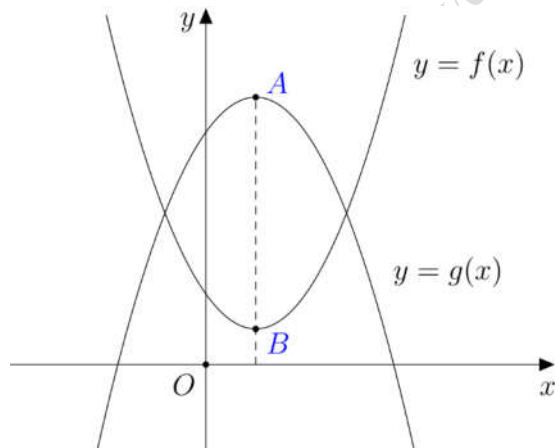
**Câu 56. (THPT Trần Quốc Tuấn - Quảng Ngãi - 2022)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f'(x) = (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 2(m+1)x + 2m + 6)$ . Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên  $m$  không vượt quá số 2022 sao cho hàm số  $g(x) = f(x^2 + 1)$  có 9 điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 57. (Mã 101 - 2021 Lần 1)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x - 7)(x^2 - 9), \forall x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$  có ít nhất 3 điểm cực trị?

Trả lời : .....

**Câu 58. (Sở GD Quảng Nam - 2019)** Cho hai hàm đa thức  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có đúng một điểm cực trị là  $A$ , đồ thị hàm số  $y = g(x)$  có đúng một điểm cực trị là  $B$  và  $AB = \frac{7}{4}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-5; 5)$  để hàm số  $y = |f(x) - g(x)| + m$  có đúng 5 điểm cực trị?

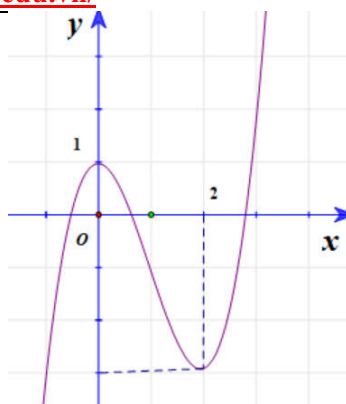


Trả lời : .....

**Câu 59. (Chuyên Vinh - 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = (x^2 + 9x)(x^2 - 9)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = g(x) = f(|x^3 + 3x| + 2m - m^2)$  có không quá 6 điểm cực trị?

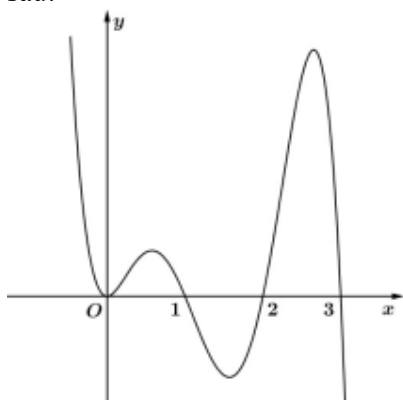
Trả lời : .....

**Câu 60. (Cụm Trường Nghệ An - 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2021; 2021]$  để hàm số  $g(x) = f(|x^5 + 4x| + m)$  có ít nhất 5 điểm cực trị.



Trả lời : .....

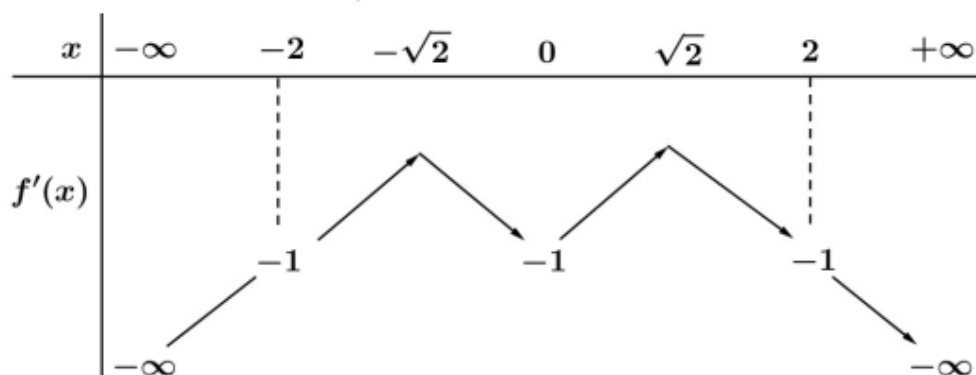
**Câu 61. (Chuyên Sơn La 2022)** Cho hàm đa thức  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để  $m \in [0; 6]$ ,  $2m \in \mathbb{Z}$  để hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$  có đúng 9 điểm cực trị.

Trả lời : .....

**Câu 62. (THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức có  $f(2) = 36$ ,  $f(-2) = -32$ . Hàm số  $f'(x)$  có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-50; 50)$  để hàm số

$$g(x) = \left| f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - \frac{6}{2x-1} + m \right|$$

có 5 điểm cực trị ?

Trả lời : .....