CHUYÊN ĐỀ 16. TÍCH PHÂN

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TÍNH TÍCH PHÂN

Câu 1. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\frac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ và $F(1)=1$. Tính $F(e)$.

Lời giải

Ta có $F(e)-F(1)=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^e=1$.

Vậy $F(e)=F(1)+1=1+1=2$.

Câu 2. Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:

a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$

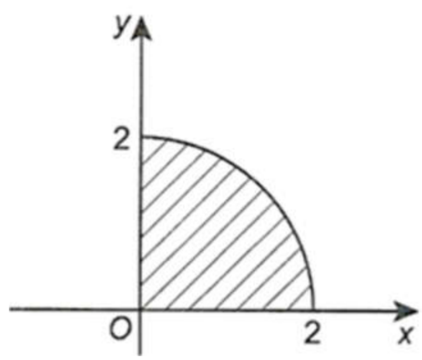
b) $\int_{-2}^2 \left(1-\left|\frac{1}{2}x\right|\right)dx$.

c) $\int_0^3 (2x+1)dx$

d) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$

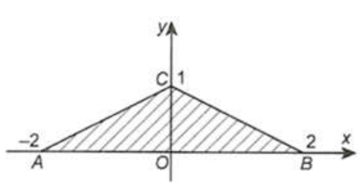
Lời giải

a) Ta có $y=\sqrt{4-x^2}, 0\le x\le 2$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I. Do đó, tích phân cần tính là một phần tư diện tích của hình tròn như Hình.



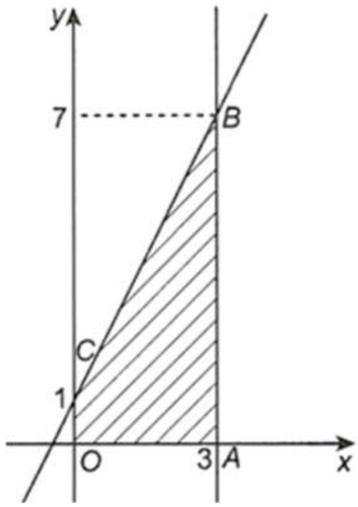
Vậy $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\pi$.

b) Tích phân cần tính là diện tích của tam giác ABC, có đáy $AB=4$, đường cao $CO=1$.



Do đó $\int_{-2}^{2}\left(1-\left|\frac{1}{2}x\right|\right)dx = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot OC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1 = 2$.

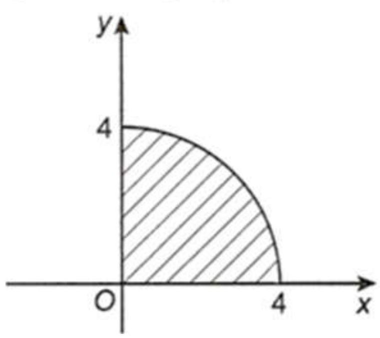
c) Tích phân cần tính là diện tích của hình thang vuông $OABC$, có đáy lớn $AB = 7$, đáy nhỏ $CO = 1$, đường cao $OA = 3$



Do đó

$$\int_0^3 (2x+1)dx = S_{OABC} = \frac{1}{2}(AB+CO)OA = \frac{1}{2}\cdot(7+1)\cdot 3 = 12.$$

d) Tích phân cần tính là diện tích của $\frac{1}{4}$ hình tròn có tâm tại gốc tọ độ O và bán kính $R = 4$ (phần nằm ở góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng toạ độ) như Hình.



Vậy $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4^2 = 4\pi$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}, x > 0$. Tính giá trị của $f(4) - f(1)$.

Lời giải

$$f(4) - f(1) = \int_1^4 f'(x)dx = \int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{x}dx = \int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= (2\sqrt{x} - \ln x)\Big|_1^4 = 2 - 2\ln 2.$$

Câu 4. Cho $\int_{-1}^{2} g(x)dx = 6, G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ và $G(-1) = 8$. Tính $G(2)$.

Lời giải

Vì $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ nên ta có $\int_{-1}^{2} g(x)dx = G(2) - G(-1)$ hay $6 = G(2) - 8$.

Suy ra $G(2) = 14$. $6 = G(2) - 8$. Suy ra $G(2) = 14$.

Câu 5. Cho $\int_0^1 [2f(x) - 1]dx = 3$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \left[2f(x) - 1\right]dx = 2\int_0^1 f(x)xdx - \int_0^1 dx = 3$ mà $\int_0^1 dx = 1$ nên $2\int_0^1 f(x)dx - 1 = 3$ hay $\int_0^1 f(x)dx = 2$.

Câu 6. Cho $\int_{-2}^{1} f(x)dx = 5$ và $\int_{-2}^{1} g(x)dx = -4$. Tính:

a) $\int_1^{-2} f(x)dx$

b) $\int_{-2}^{1} -4f(x)dx$;

c) $\int_{-2}^{1} \frac{-2g(x)}{3}dx$;

d) $\int_{-2}^{1} \left[f(x) + g(x)\right]dx$;

e) $\int_{-2}^{1} \left[f(x) - g(x)\right]dx$

g) $\int_{-2}^{1} \left[3f(x) - 5g(x)\right]dx$

Lời giải

a) $\int_1^{-2} f(x)dx = -\int_{-2}^{1} f(x)dx = -5$.

b) $\int_{-2}^{1} -4f(x)dx = -4\int_{-2}^{1} f(x)dx = -4 \cdot 5 = -20$.

c) $\int_{-2}^{1} \frac{-2g(x)}{3}dx = \frac{-2}{3}\int_{-2}^{1} g(x)dx = \frac{-2}{3} \cdot (-4) = \frac{8}{3}$.

d) $\int_{-2}^{1} \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{-2}^{1} g(x)dx = 5 + (-4) = 1$;

e) $\int_{-2}^{1} \left[f(x) - g(x)\right]dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx - \int_{-2}^{1} g(x)dx = 5 - (-4) = 9$

g) $\int_{-2}^{1} \left[3f(x) - 5g(x)\right]dx = 3\int_{-2}^{1} f(x)dx - 5\int_{-2}^{1} g(x)dx = 3.5 - 5.(-4) = 35$

Câu 7. Cho $\int_0^5 f(x)dx = 6$ và $\int_0^5 g(x)dx = 2$. Hãy tính:

a) $\int_{0}^{5}\left[2f(x)+3g(x)\right]dx$

b) $\int_{0}^{5}\left[2f(x)-3g(x)\right]dx$

Lời giải

a) $\int_{0}^{5}\left[2f(x)+3g(x)\right]dx=2\int_{0}^{5}f(x)\,dx+3\int_{0}^{5}g(x)\,dx=2.6+3.2=18$

b) $\int_{0}^{5}\left[2f(x)-3g(x)\right]dx=2\int_{0}^{5}f(x)\,dx-3\int_{0}^{5}g(x)\,dx=2.6-3.2=6$

Câu 8. Cho các hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên đoạn [1; 3] và $\int_{1}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2},\int_{2}^{3}f(x)dx=\frac{3}{2}$, $\int_{1}^{3}g(x)dx=-1$. Tính:

a) $\int_{1}^{3}\left[2f(x)+g(x)\right]dx$

b) $\int_{1}^{3}\left[5f(x)-4\right]dx$.

Lời giải

a) Ta có $\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$.

$\int_{1}^{3}\left[2f(x)+g(x)\right]dx=2\int_{1}^{3}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}g(x)\,dx=2.2-1=3$

b) $\int_{1}^{3}\left[5f(x)-4\right]dx=5\int_{1}^{3}f(x)\,dx-\int_{1}^{3}4dx=5.2-(4x)\Big|_{1}^{3}=10-8=2$.

Câu 9. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $(0;2)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x;f(x))$ có hệ số góc là $2x-3$. Tìm $f(4)$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $f(0)=2$ và $f'(x)=2x-3$.

Từ đó, $f(4)=f(0)+\int_{0}^{4}f'(x)dx=2+\int_{0}^{4}(2x-3)dx=2+\left(x^2-3x\right)\Big|_{0}^{4}=2+4=6$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\int_{0}^{4}f(x)dx=-2;\int_{0}^{5}f(t)dt=4$. Tính $\int_{4}^{5}f(x)dx$.

Lời giải

$\int_{0}^{5}f(x)dx=\int_{0}^{5}f(t)dt=4$.

Ta có $\int_{4}^{5}f(x)dx=\int_{0}^{5}f(x)dx-\int_{0}^{4}f(x)dx=4-(-2)=6$.

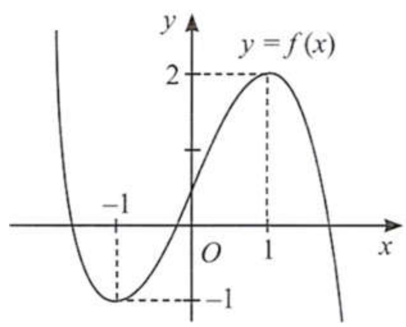
Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$. Tính $\int_0^5 f(x)dx$, biết rằng $\int_0^3 f(x)dx = 4; \int_1^5 f(x)dx = 6; \int_1^3 f(x)dx = 3$.

Lời giải

Ta có $\int_3^5 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx = 6 - 3 = 3$.

Do đó, $\int_0^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = 4 + 3 = 7$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\int_{-1}^1 f'(x)dx$.



Lời giải

$\int_{-1}^1 f'(x)dx = f(1) - f(-1) = 2 - (-1) = 3$.

Câu 13. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(-1;3)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x; f(x))$ có hệ số góc là $3x^2 - 4x + 1$. Tìm $f(2)$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $f(-1) = 3$ và $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Từ đó, $f(2) = f(-1) + \int_{-1}^2 f'(x)dx = 3 + \int_{-1}^2 \left(3x^2 - 4x + 1\right)dx$

$= 3 + \left(x^3 - 2x^2 + x\right)\Big|_{-1}^2 = 3 + 6 = 9.$

Câu 14. Tính:

a) $A = \int_{-1}^2 \left(x - 4x^2\right)dx + 4\int_{-1}^2 \left(x^2 - 1\right)dx$

b) $B = \int_{-1}^0 \left(x^3 - 6x\right)dx + \int_0^1 \left(t^3 - 6t\right)dt$

Lời giải

a) $A = \int_{-1}^2 \left(x - 4x^2\right)dx + \int_{-1}^2 \left(4x^2 - 4\right)dx = \int_{-1}^2 (x-4)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Big|_{-1}^2 = -\frac{21}{2}$;

b) $B = \int_{-1}^0 \left(x^3 - 6x\right)dx + \int_0^1 \left(x^3 - 6x\right)dx = \int_{-1}^1 \left(x^3 - 6x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3x^2\right)\Big|_{-1}^1 = 0$.

Câu 15. Tính:

1) $\int_1^2 (2x-3)^2 dx$	2) $\int_1^4 \left(x^2+6\sqrt{x}\right)dx$	3) $\int_1^2 x^2\, dx$	4) $\int_2^3 3x^2\, dx$
5) $\int_0^1 e^t\, dt$	6) $\int_2^3 6x\, dx$	7) $\int_0^1 e^t\, dt$	8) $\int_0^1 \left(x^2+x\right)dx$
9) $\int_0^1 (1-2x)^2 dx$	10) $\int_1^4 \frac{x-2}{\sqrt{x}}dx$	11) $\int_0^1 x^6\, dx$	12) $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x}}dx$
13) $\int_0^1 -2\, dx$	14) $\int_0^1 \frac{2x}{3}dx$	15) $\int_0^1 x^4\, dx$	16) $\int_1^3 2\sqrt[3]{x}\, dx$
17) $\int_1^9 (x\sqrt{x}-2)dx$	18) $\int_0^2 (3x-2)(3x+2)dx$	19) $\int_1^2 t^2\left(5t^2-2\right)dt$	20) $\int_{-1}^1 (x-2)\left(x^2+2x+4\right)dx$
21) $\int_0^1 \left(4x^3+3x^2-2\right)dx$	22) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$	23) $\int_1^3 x^{\sqrt{2}}\, dx$	24) $\int_1^2 \frac{1}{4x^2}dx$
25) $\int_{-1}^2 \left(3x^2-8x\right)dx$	26) $\int_{-1}^1 (x+1)\left(x^2-x+1\right)dx$		

Lời giải

1) $\int_1^2 (2x-3)^2\, dx = \int_1^2 \left(4x^2-12x+9\right)dx = 4\int_1^2 x^2\, dx - 12\int_1^2 x\, dx + \int_1^2 9\, dx$

$= \left.\left(\frac{4}{3}x^3\right)\right|_1^2 - \left.\left(6x^2\right)\right|_1^2 + \left.(9x)\right|_1^2 = \frac{1}{3}$.

2) $\int_1^4 \left(x^2+6\sqrt{x}\right)dx = \int_1^4 x^2\, dx + 6\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 + 6\left.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right|_1^4 = \frac{4^3-1}{3} + 4\left(2^3-1\right) = 49.$

3) $\int_1^2 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}\left(2^3-1^3\right) = \frac{7}{3}$

4) $\int_2^3 3x^2 dx = \left.x^3\right|_2^3 = 3^3-2^3 = 27-8 = 19$.

5) $\int_0^1 e^t\, dt = \left.e^t\right|_0^1 = e^1-e^0 = e-1$.

6) $\int_2^3 6x\, dx = \left.3x^2\right|_2^3 = 3\left(3^2-2^2\right) = 3(9-4) = 15$.

7) $\int_0^1 e^t\, dt = \left.e^t\right|_0^1 = e^1-e^0 = e-1$.

8) Ta có: $\int_0^1 \left(x^2+x\right)dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \left(\frac{1}{3}-0\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{5}{6}$.

9) $\int_0^1 (1-2x)^2 dx = \int_0^1 \left(1-4x+4x^2\right)dx = \left.\left(x-2x^2+\frac{4}{3}x^3\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

10) $\int_1^4 \frac{x-2}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - 2\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left.\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right|_1^4 = \frac{2}{3}$.

11) $\int_0^1 x^6\,dx = \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 = \frac{1}{7}$

12) $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{\frac{5}{2}}\,dx = \left.\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right|_1^4 = \frac{256}{7} - \frac{2}{7} = \frac{254}{7}$.

13) $\int_0^1 -2\,dx = -2x\Big|_0^1 = -2$.

14) $\int_0^1 \frac{2x}{3}dx = \left.\frac{x^2}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$

15) $\int_0^1 x^4\,dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}$

16) $\int_1^3 2\sqrt[3]{x}\,dx = 2\int_1^3 x^{\frac{1}{3}}\,dx = \left.\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}\right|_1^3 = \frac{9\sqrt[3]{3}-3}{2}$

17) $\int_1^9 (x\sqrt{x}-2)dx = \int_1^9 \left(\frac{3}{x^2}-2\right)dx = \left.\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x\right)\right|_1^9 = \frac{404}{5}$.

18) $\int_0^2 (3x-2)(3x+2)dx = \int_0^2 \left(9x^2-4\right)dx = \left(3x^3-4x\right)\Big|_0^2 = 16$

19) $\int_1^2 t^2\left(5t^2-2\right)dt = \int_1^2 \left(5t^4-2t^2\right)dt = \left.\left(t^5 - 2\cdot\frac{t^3}{3}\right)\right|_1^2 = \frac{79}{3}$

20) $\int_{-1}^1 (x-2)\left(x^2+2x+4\right)dx = \int_{-1}^1 \left(x^3-8\right)dx = \left.\left(\frac{x^4}{4}-8x\right)\right|_{-1}^1 = -16$

21) $\int_0^1 \left(4x^3+3x^2-2\right)dx = \int_0^1 4x^3\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx - \int_0^1 2\,dx$

$= x^4\Big|_0^1 + x^3\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1$

$= \left(1^4-0^4\right)+\left(1^3-0^3\right)-(2.1-2\cdot 0) = 0.$

22) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

23) $\int_1^3 x^{\sqrt{2}}\,dx = \left.\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}\right|_1^3 = \frac{3^{\sqrt{2}+1}-1}{\sqrt{2}+1}$.

24) $\int_1^2 \frac{1}{4x^2}dx = \frac{1}{4}\int_1^2 x^{-2}\,dx = \left.\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-1}x^{-1}\right|_1^2 = \left.-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}\right|_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{8}$;

25) $\int_{-1}^{2}(3x^2-8x)dx=\int_{-1}^{2}3x^2\,dx-\int_{-1}^{2}8x\,dx=3\int_{-1}^{2}x^2\,dx-8\int_{-1}^{2}x\,dx$

$=3\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}-8\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2}=\left[2^3-(-1)^3\right]-4\left[2^2-(-1)^2\right]=-3;$

26) $\int_{-1}^{1}(x+1)\left(x^2-x+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+1\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3\,dx+\int_{-1}^{1}dx=\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}+x\Big|_{-1}^{1}=2$

Câu 16. Tính:

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$	**2)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx$	**3)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}dx$	**4)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$
5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-2)dx$	6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(3\cos x+2)dx$	**7)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx$	**8)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$
9) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x+2\sin x)dx$	**10)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$	**11)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\sin x+\cos x)dx$	**12)** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos^2 x}dx$
13) $\int_{0}^{\pi}(2\cos x+1)dx$	**14)** $\int_{0}^{\pi}(1+\cot x)\sin x dx$	**15)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx$	**16)** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$
17) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin x-\cos x)dx$	**18)** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(2\tan^2 x+5\right)dx$	**19)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{3\sin^2 x}dx$	**20)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)dx$
21) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^3 x-3}{\cos^2 x}dx$	**22)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos^2 x}dx$.	**23)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx$	
24) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx$			

Lời giải

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 2)dx = (-\cos x - 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \pi$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\cos x + 2)dx = (3\sin x + 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}$.

7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= -\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0) + \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = 1$.

8) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= -\cot\frac{\pi}{4} - \left(-\cot\frac{\pi}{6}\right) - \tan\frac{\pi}{4} - \left(-\tan\frac{\pi}{6}\right)$

$= -1 + \sqrt{3} - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = -2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x + 2\sin x)dx = (3\sin x - 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5$.

10) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x}dx = \tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \cot x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$

11) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x)dx = (-\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 1$

12) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos^2 x}dx = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = -\tan x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -1 - 1 = -2$.

13) $\int_0^{\pi} (2\cos x + 1)dx = (2\sin x + x)\Big|_0^{\pi} = \pi$;

14) $\int_0^{\pi} (1 + \cot x)\sin x dx = \int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)dx = (-\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = 2$;

15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = (\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

16) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = -(\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -2$.

17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - \cos x)dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (-3\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3(0-1)-(1-0) = 2.$

18) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(2\tan^2 x + 5\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left[2\left(1+\tan^2 x\right)+3\right]dx = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} 3\,dx$

$= (2\tan x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + (3x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{3\pi+8}{4}$.

19) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{3\sin^2 x}dx = -\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{2}{3}(-\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(\cot\frac{\pi}{2} - \cot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}(0-1) = -\frac{2}{3}$;

20) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}dx + \sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}dx = (\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \sqrt{3}(-\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left(\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3}\left(\cot\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{4}\right)$

$= (\sqrt{3}-1) - \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) = 2\sqrt{3}-2.$

21) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^3 x - 3}{\cos^2 x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 3\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-3$.

22) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx = -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}$.

23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx = (-\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

24) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1)+(1-0) = 2$

Câu 17. Tính:

1) $\int_0^2 e^{-5x}\,dx$	**2)** $\int_0^1 3^{x+2}dx$	**3)** $\int_{-1}^1 3^{2x}dx$	**4)** $\int_0^1 e^x\,dx$
5) $\int_0^1 2^x\,dx$	**6)** $\int_0^1 \left(3\cdot 2^x - e^x\right)dx$.	**7)** $\int_0^1 \left(3^x - 2e^x\right)dx$	**8)** $\int_0^1 \frac{\left(e^x-1\right)^2}{2e^x}dx$

9) $\int_0^1 e^{-2x}\,dx$	**10)** $\int_{-1}^0 \frac{1}{2^{3x}}\,dx$;	**11)** $\int_0^1 \left(2^{2x}\cdot 3^{x-1}\right)dx$	**12)** $\int_0^1 \frac{2^{x+1}}{3^x}\,dx$
13) $\int_1^3 e^{x-2}\,dx$	**14)** $\int_0^1 \left(2^x-1\right)^2 dx$;	**15)** $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\,dx$.	**16)** $\int_{-1}^0 5^{2x-1}\,dx$
17) $\int_0^2 2^{x+3}\,dx$	**18)** $\int_0^1 \left(3x^2-2e^x\right)dx$	**19)** $\int_0^2 \left(e^x-4x^3\right)dx$	**20)** $\int_0^1 \frac{8^x+1}{2^x+1}\,dx$;

Lời giải

1) $\int_0^2 e^{-5x}\,dx=\int_0^2 \left(e^{-5}\right)^x dx=\left.\frac{\left(e^{-5}\right)^x}{\ln e^{-5}}\right|_0^2=-\left.\frac{e^{-5x}}{5}\right|_0^2=-\frac{1}{5e^{10}}+\frac{1}{5}$.

2) $\int_0^1 3^{x+2}dx=9\int_0^1 3^x dx=\left.\frac{3^{x+2}}{\ln 3}\right|_0^1=\frac{18}{\ln 3}$.

3) $\int_{-1}^1 3^{2x}\,dx=\int_{-1}^1 9^x\,dx=\left.\frac{9^x}{\ln 9}\right|_{-1}^1=\frac{80}{9\ln 9}$.

4) $\int_0^1 e^x\,dx=\left.e^x\right|_0^1=e^1-e^0=e-1$.

5) $\int_0^1 2^x\,dx=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^1=\frac{2^1}{\ln 2}-\frac{2^0}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$.

6) $\int_0^1 \left(3.2^x-e^x\right)dx=\int_0^1 3.2^x\,dx-\int_0^1 e^x\,dx=3\int_0^1 2^x\,dx-\int_0^1 e^x\,dx$

$=\frac{3}{\ln 2}-(e-1)=\frac{3}{\ln 2}-e+1$.

7) $\int_0^1 \left(3^x-2e^x\right)dx=\int_0^1 3^x dx-2\int_0^1 e^x dx=\left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_0^1-\left.2e^x\right|_0^1=\frac{2}{\ln 3}-2e+2$

8) $\int_0^1 \frac{\left(e^x-1\right)^2}{2e^x}dx=\int_0^1 \frac{e^{2x}-2e^x+1}{2e^x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^x-2+e^{-x}\right)dx$

$=\left.\frac{1}{2}\left(e^x-2x-e^{-x}\right)\right|_0^1=\frac{e-2-e^{-1}}{2}$.

9) $\int_0^1 e^{-2x}\,dx=\int_0^1 \left(e^{-2}\right)^x dx=\left.\frac{\left(e^{-2}\right)^x}{\ln\left(e^{-2}\right)}\right|_0^1=-\left.\frac{1}{2}e^{-2x}\right|_0^1=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}$.

10) $\int_{-1}^0 \frac{1}{2^{3x}}dx=\int_{-1}^0 \left(2^{-3}\right)^x dx=\left.\frac{\left(2^{-3}\right)^x}{\ln\left(2^{-3}\right)}\right|_{-1}^0=\left.\frac{-2^{-3x}}{3\ln 2}\right|_{-1}^0=\frac{-1}{3\ln 2}+\frac{8}{3\ln 2}=\frac{7}{3\ln 2}$.

11) $\int_0^1 \left(2^{2x}\cdot 3^{x-1}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 12^x\,dx=\frac{1}{3}\cdot\left.\frac{12^x}{\ln 12}\right|_0^1=\frac{4}{\ln 12}-\frac{1}{3\ln 12}=\frac{11}{3\ln 12}$.

12) $\int_0^1 \frac{2^{x+1}}{3^x}dx = 2\int_0^1 \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 2\cdot\left.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}\right|_0^1 = \frac{\frac{4}{3}}{\ln\frac{2}{3}} - \frac{2}{\ln\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3(\ln 2-\ln 3)}$.

13) $\int_1^3 e^{x-2}\,dx = \int_1^3 \frac{e^x}{e^2}dx = \left.\frac{e^x}{e^2}\right|_1^3 = e-\frac{1}{e}$;

14) $\int_0^1 \left(2^x-1\right)^2 dx = \int_0^1 \left(4^x-2\cdot 2^x+1\right)dx = \left.\left(\frac{4^x}{\ln 4}-2\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+x\right)\right|_0^1 = 1-\frac{1}{2\ln 2}$;

15) $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int_0^1 \left(e^x-1\right)dx = \left.\left(e^x-x\right)\right|_0^1 = (e-1)-1 = e-2$.

16) $\int_{-1}^0 5^{2x-1}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^0 5^{2x}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^0 25^x\,dx = \left.\frac{25^x}{5\ln 25}\right|_{-1}^0 = \frac{24}{125\ln 25}$.

17) $\int_0^2 2^{x+3}\,dx = \int_0^2 2^x\cdot 2^3\,dx = 8\int_0^2 2^x\,dx = 8\cdot\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2 = \frac{8}{\ln 2}(4-1) = \frac{24}{\ln 2}$.

18) $\int_0^1 \left(3x^2-2e^x\right)dx = 3\int_0^1 x^2dx - 2\int_0^1 e^x dx = x^3\Big|_0^1 - 2e^x\Big|_0^1 = 3-2e$.

19) $\int_0^2 \left(e^x-4x^3\right)dx = \left.\left(e^x-x^4\right)\right|_0^2 = e^2-17$

20) $\int_0^1 \frac{8^x+1}{2^x+1}dx = \int_0^1 \frac{2^{3x}+1}{2^x+1}dx = \int_0^1 \left(4^x-2^x+1\right)dx = \left.\left(\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x\right)\right|_0^1 = 1+\frac{1}{2\ln 2}$

Câu 18. Tính:

1) $\int_2^4 \frac{2}{x}dx$	2) $\int_1^2 \frac{2}{3x}dx$	**3)** $\int_1^2 \frac{1-2x}{x^2}dx$	**4)** $\int_1^2 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$
5) $\int_1^4 \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}dx$	6) $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x}dx$	**7)** $\int_1^e \frac{1}{t}dt$	**8)** $\int_1^2 \frac{3x^3+5x^2-6x+4}{2x}dx$
9) $\int_1^e \frac{x^2-3\sqrt{x}+x\cdot 2^x}{x}dx$	**10)** $\int_1^2 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}dx$	**11)** $\int_0^1 \frac{4^x-1}{2^x-1}dx$	**12)** $\int_1^2 \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2}dx$
13) $\int_1^2 \frac{xe^x+1}{x}dx$			

Lời giải

1) $\int_2^4 \frac{2}{x}dx = 2\int_2^4 \frac{1}{x}dx = 2\ln|x|\Big|_2^4 = 2(\ln 4-\ln 2) = 2\ln 2$.

2) $\int_1^2 \frac{2}{3x}dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \frac{2}{3}\ln|x|\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\ln 2$.

3) $\int_1^2 \frac{1-2x}{x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)dx = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^2 - 2\ln x\Big|_1^2 = \frac{1}{2}-2\ln 2$;

4) $\int_1^2 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx=\int_1^2\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x+\ln x\right)\Big|_1^2=\frac{7}{2}+\ln 2$;

5) $\int_1^4 \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}dx=\int_1^4(\sqrt{x}-2)dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x\right)\Big|_1^4=-\frac{4}{3}$.

6) $\int_{-e}^{-1}\frac{2}{x}dx=2\ln|x|\big|_{-e}^{-1}=2\ln|-1|-2\ln|-e|=-2$.

7) $\int_1^e \frac{1}{t}dt=\ln t\big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$

8) $\int_1^2\frac{3x^3+5x^2-6x+4}{2x}dx=\int_1^2\left(\frac{3x^3}{2x}+\frac{5x^2}{2x}-\frac{6x}{2x}+\frac{4}{2x}\right)dx$

$=\frac{3}{2}\int_1^2 x^2dx+\frac{5}{2}\int_1^2 xdx-3\int_1^2 dx+2\int_1^2\frac{1}{x}dx$

$=\frac{x^3}{2}\Big|_1^2+\frac{5x^2}{4}\Big|_1^2-3x\big|_1^2+2\ln|x|\big|_1^2=\frac{17}{4}+2\ln 2$.

9) $\int_1^e\frac{x^2-3\sqrt{x}+x\cdot 2^x}{x}dx=\int_1^e xdx-3\int_1^e x^{-\frac{1}{2}}dx+\int_1^e 2^x dx$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_1^e-6\sqrt{x}\big|_1^e+\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-6\sqrt{e}+\frac{11}{2}+\frac{2^e-2}{\ln 2}$.

10) $\int_1^2\frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}dx=\int_1^2\frac{1+2\sqrt{x}+x}{x}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

$=\int_1^2\frac{1}{x}dx+4\int_1^2\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+\int_1^2 dx=\ln x\big|_1^2+4\sqrt{x}\big|_1^2+x\big|_1^2$

$=\ln 2+4(\sqrt{2}-1)+1=\ln 2+4\sqrt{2}-3$

11) $\int_0^1\frac{4^x-1}{2^x-1}dx=\int_0^1\frac{\left(2^x-1\right)\left(2^x+1\right)}{2^x-1}dx=\int_0^1\left(2^x+1\right)dx=\int_0^1 2^x\,dx+\int_0^1 dx$

$=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1+x\big|_0^1=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}+1=1+\frac{1}{\ln 2}$

12) $\int_1^2\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2}dx=\int_1^2\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\ln 2+\frac{16}{3}$

13) $\int_1^2\frac{xe^x+1}{x}dx=\int_1^2\left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(e^x+\ln|x|\right)\big|_1^2=\ln 2-e+e^2$;

Câu 19. Tính

1) $\int_{-1}^{1}|x|\,dx$	2) $\int_0^3\left|x^2-2x\right|dx$	**3)** $\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx$	**4)** $\int_{-2}^{3}|x-2|\,dx$

5) $\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2+x-2\right|dx$	**6)** $\int\limits_{-1}^{1}\left|e^x-1\right|dx$	**7)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left|\cos x-\sin x\right|dx$

Lời giải

1) Ta có: $\int\limits_{-1}^{1}|x|\,dx=\int\limits_{-1}^{0}|x|\,dx+\int\limits_{0}^{1}|x|\,dx=\int\limits_{-1}^{0}(-x)dx+\int\limits_{0}^{1}x\,dx=-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1}=\left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

2) Ta cós $\left|x^2-2x\right|=\begin{cases}-\left(x^2-2x\right), & 0\le x\le 2\\ x^2-2x, & 2<x\le 3.\end{cases}$

Do đó, $\int\limits_{0}^{3}\left|x^2-2x\right|dx=\int\limits_{0}^{2}\left|x^2-2x\right|dx+\int\limits_{2}^{3}\left|x^2-2x\right|dx$

$=\int\limits_{0}^{2}\left(-x^2+2x\right)dx+\int\limits_{2}^{3}\left(x^2-2x\right)dx=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\right|_{0}^{2}+\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_{2}^{3}=\frac{8}{3}.$

3) $\int\limits_{0}^{2\pi}|\sin x|\,dx=\int\limits_{0}^{\pi}|\sin x|\,dx+\int\limits_{\pi}^{2\pi}|\sin x|\,dx=\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\,dx-\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{0}^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4.$

4) $\int\limits_{-2}^{3}|x-2|\,dx=\int\limits_{-2}^{2}|x-2|\,dx+\int\limits_{2}^{3}|x-2|\,dx=-\int\limits_{-2}^{2}(x-2)dx+\int\limits_{2}^{3}(x-2)dx=-\left.\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\right|_{-2}^{2}+\left.\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\right|_{2}^{3}=\frac{17}{2}.$

5) $x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2\notin[-1;2]$.

Ta có $x^2+x-2\le 0$ với mọi $x\in[-1;1]$ và $x^2+x-2\ge 0$ với mọi $x\in[1;2]$.

Từ đó, $\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2+x-2\right|dx=\int\limits_{-1}^{1}\left[-\left(x^2+x-2\right)\right]dx+\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+x-2\right)dx$

$=-\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\right|_{-1}^{1}+\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\right|_{1}^{2}=\frac{31}{6}.$

6) Ta có $e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$.

Ta có $e^x-1\le 0$ với mọi $x\in[-1;0]$ và $e^x-1\ge 0$ với mọi $x\in[0;1]$.

Từ đó, $\int\limits_{-1}^{1}\left|e^x-1\right|dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(1-e^x\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(e^x-1\right)dx$

$=\left.\left(x-e^x\right)\right|_{-1}^{0}+\left.\left(e^x-x\right)\right|_{0}^{1}=e+\frac{1}{e}-2.$

7) Ta có $\cos x-\sin x=0$ có nghiệm $x=\frac{\pi}{4}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$. Do đó:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}|\cos x-\sin x|\,dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}|\cos x-\sin x|\,dx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}|\cos x-\sin x|\,dx$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}$$

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

DẠNG 2. ỨNG DỤNG

Bài toán 1. BÀI TOÁN VỀ QUÃNG ĐƯỜNG

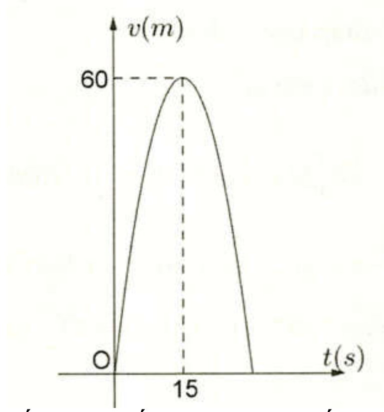
Phương pháp giải

- Quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm a đến thời điểm b là:

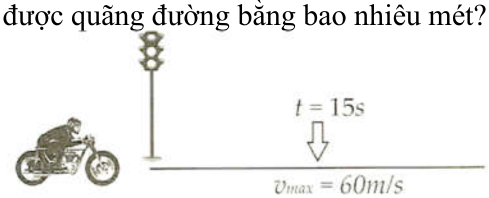
$$s(t)=\int_a^b v(t)dt$$

- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1. Một xe môtô phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình vẽ



Biết rằng, sau 15 s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất $60\,m/s$ và bắt đâu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bằng bao nhiêu mét?



Bài giải

Hàm vận tốc $v(t)=at^2+bt+C$ có dạng là đường parabol có đỉnh $I(15;60)$, đồng thời đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$, suy ra

$$\begin{cases} a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=15 \\ a\cdot 15^2+b\cdot 15+c=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 30a+b=0 \\ a\cdot 15^2+b\cdot 15+0=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-\dfrac{4}{15} \\ b=8. \end{cases}$$

Theo đồ thị thì xe bắt đầu tăng tốc lúc $t=0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t=15$ s nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$\int_0^{15} v(t)dt=\int_0^{15}\left(-\frac{4}{15}t^2+8t\right)dt=\left.\left(-\frac{4}{45}t^3+4t^2\right)\right|_0^{15}=600(m).$$

Vậy từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được một quãng đường dài $600\,m$.

Bài toán 2. BÀI TOÁN VỀ CÔNG CỦA LỰC TÁC DỤNG VÀO VẬT

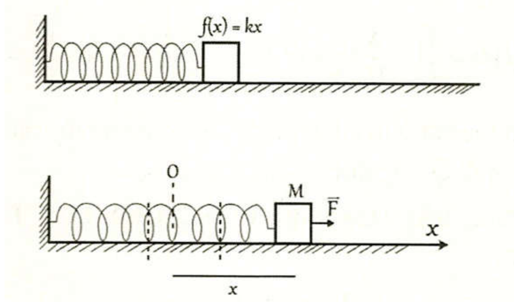
Phương pháp giải

- Nếu một lực không đổi F tác dụng lên vật M dọc theo một khoảng cách (độ dời) d, thì công W sinh ra trong quá trình dịch chuyển bằng tích của lực F và độ dài khoảng cách d mà nó đã tác dụng, ta có công thức $W=F\,.\,d$.

- Định nghĩa trên luôn đúng khi lực F không đổi. Tuy nhiên, nhiều trường hợp lực $\vec{F}$ biến thiên trong suốt quá trình thực hiện công. Trong các tình huống như vậy, người ta thường chia quá trình này thành nhiều phần nhỏ và tính công toàn phần nhờ lấy tổng các công tương ứng với các phần được chia (được tính nhờ phép tính tích phân).

- Giả sử $f(x)$ là lực tác dụng lên vật tại vị trí x, đường đi của lực tác dụng (quỹ đạo của vật được tác dụng lực) tương ứng với trục tọa độ Ox. Khi đó, công toàn phần sinh ra trong cả quá trình chuyển động của vật từ vị trí $x=a$ đến vị trí $x=b$ là: $W=\int_a^b f(x)dx$

Ví dụ 2. Một lực $40N$ cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$. Hãy tính công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài $15cm$ đến $18cm$.



Bài giải

Ban đầu, lò xo có độ dài tự nhiên $10cm$. Dừng một lực $40N$ kéo giãn lò xo có độ dài $15cm$ thì lò xo bị kéo dãn một đoạn có độ dài $5cm=0,05m$.

Vậy ta có $f(0,05)=40 \Leftrightarrow 0,05k=40 \Leftrightarrow k=800.$

Suy ra $f(x)=800x$.

Vậy công sinh ra khi kéo căng lò xo từ $15cm$ đến $18cm$ là

$$W=\int_{0,05}^{0,08} 800xdx=800\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,05}^{0,08}=1,56(J).$$

Bài toán 3. BÀI TOÁN VỀ TĂNG TRƯỞNG, PHÁT TRIỂN

Phương pháp giải

- Cho hàm số $f(x)$ biểu diễn cho sự tăng (hay giảm) số lượng của một đối tượng nào đó (số người, vi khuẩn, vi trùng, lượng nước chảy, ...)
- Giá trị $f(x)$ là số lượng của đối tượng đó tại thời điểm x.
- Đạo hàm $f'(x)$ chính là tốc độ tăng (hay giảm) của đối tượng đó tại thời điểm x.
- Số lượng tăng thêm (hoặc giảm đi) của đối tượng trong khoảng $x\in[a;b]$ là $\int_a^b f(x)dx$

Ví dụ 3. Tốc độ thay đổi của số lượng người V (tính bằng ngàn người) tham gia công tác tình nguyện ở nước Mĩ từ năm 2000 đến năm 2006 có thể được mô hình bởi hàm số $V(t)=119,85t^2-30e^t+37,26e^{-t}$ với t là năm ($t=0$ ứng với năm 2000). Hỏi số lượng người tham gia tình nguyện trong giai đoạn tăng lên hay giảm đi với số lượng bao nhiêu?

Lời giải

Sự chênh lệch của số người tham gia tình nguyện trong giai đoạn từ năm 2000 đến năm 2006 là:

$$\int_0^6 V(t)dt \quad =\int_0^6\left(119,85t^2-30e^t+37,261e^{-t}\right.$$

$$=\left.\left(\frac{119,85}{3}t^3-30e^t-37,261e^{-t}\right)\right|_0^6$$

$$=-3473,756166-(-67,261)\approx 3406.$$

Vậy trong khoảng thời gian từ năm 2000 đến năm 2006, số lượng người tham gia công tác tình nguyện đã giảm đi khoảng 3406 người.

Bài toán 4. BÀI TOÁN VỀ KINH TẾ

Phương pháp giải

- Nếu biết $f(x)$ là hàm giá trị biên, thì hàm mục tiêu sẽ là $\int f(x)dx=F(x)+C.$
- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 4. Lợi nhuận biên của một sản phẩm được xác định bởi $\pi'(x) = -0,0005x + 12,2$.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi sản lượng bán tăng từ 100 lên 101 đơn vị?

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi sản lượng bán tăng từ 100 lên 110 đơn vị?

Bài giải

a) Sự thay đổi của lợi nhuận khi tăng sản lượng bán từ 100 lên 101 đơn vị là

$$\int_{100}^{101} \frac{d\pi}{dx} = \int_{100}^{101} (-0,0005x + 12,2)dx = \left(-0,00025x^2 + 12,2x\right)\Big|_{100}^{101} = 12,15 \text{ (đơn vị tiền)}$$

b) Sự thay đổi của lợi nhuận khi tăng sản lượng bán từ 100 lên 110 đơn vị là

$$\int_{100}^{110} \frac{d\pi}{dx} = \int_{100}^{110} (-0,0005x + 12,2)dx = \left(-0,00025x^2 + 12,2x\right)\Big|_{100}^{110} = 121,48 \text{ (đơn vị tiền)}$$

Ví dụ 5. Trong kì kinh doanh 2 năm, chi phí sản xuất một đơn vị sản phẩm được cho bởi phương trình $C = 0,005t^2 + 0,01t + 13,15; 0 \le t \le 24, t$ tính bằng tháng.

Tìm chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm trong kì kinh doanh này.

Bài giải

Chi phí trung bình được xác định bởi

$$\frac{1}{24}\int_0^{24}\left(0,005t^2 + 0,01t + 13,15\right)dt = \frac{1}{24}\left(\frac{0,005t^3}{3} + \frac{0,01t^2}{2} + 13,15t\right)\Bigg|_0^{24}.$$

Hay $\frac{1}{24}\int_0^{24}\left(0,005t^2 + 0,01t + 13,15\right)dt = \frac{1}{24}(341,52) = 14,23$ (đơn vị tiền)

Câu 32. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 5 - 2\cos t\,(m/s)$. Tính quãng đường vật chuyển động trong khoảng thời gian từ lúc $t = 0(s)$ đến $t = \frac{\pi}{2}(s)$.

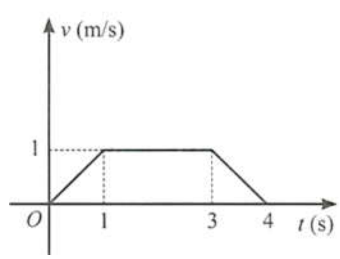
Lời giải

Ta có công thức tính quãng đường vật đi được là $s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)dt$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là:

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 - 2\cos t)dt = (5t - 2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{2} - 2(m).$$

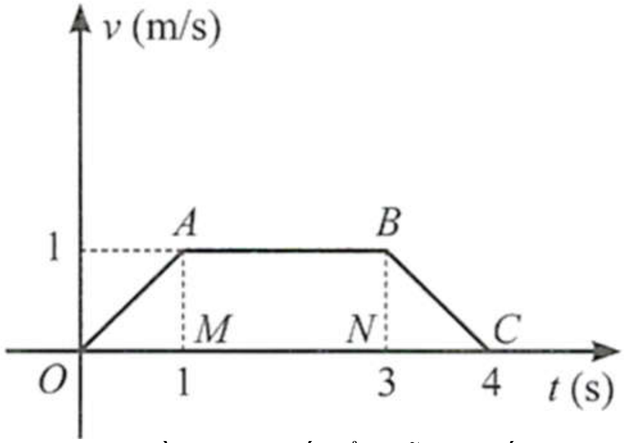
Câu 33. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ được cho bởi đồ thị như Hình.



a) Tính quãng đường vật đi được từ lúc $t = 1$ (s) đến lúc $t = 3(s)$.

b) Tính quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên.

Lời giải



a) Dựa vào đồ thị, hàm số biểu diễn vận tốc của vật từ lúc $t=1$ đến lúc $t=3$ là $v(t)=1$. Suy ra quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó là:

$$s=\int_1^3 v(t)dt=\int_1^3 1\,dt=t\Big|_1^3=2(m).$$

b) Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên là:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 v(t)dt=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^3 v(t)dt+\int_3^4 v(t)dt \\ &= \int_0^1 t\,dt+\int_1^3 1\,dt+\int_3^4 (-t+4)dt \\ &= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1+t\Big|_1^3+\left(\frac{-t^2}{2}+4t\right)\Bigg|_3^4=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=3(m). \end{aligned}$$

Câu 34. Một chiếc xe đang chuyển động với tốc độ $v_0=5m/s$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a=3m/s^2$.

a) Sau 5 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc, tốc độ của xe là bao nhiêu?
b) Tính quãng đường xe đi được trong 5 giây đầu kể từ khi tăng tốc.

Lời giải

a) Ta có $v(t)=\int a\,dt=\int 3\,dt=3t+C$.

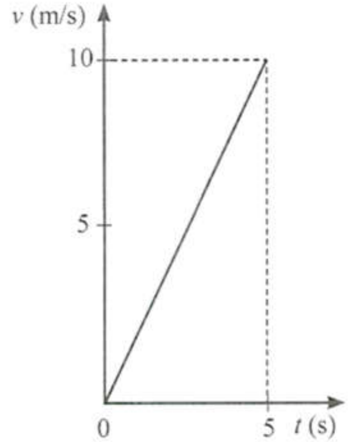
Mà $v(0)=v_0=5$ nên $3.0+C=5$ hay $C=5$.

Suy ra $v(t)=3t+5(m/s)$, do đó $v(5)=20(m/s)$.

b) Quãng đường xe đi được là

$$s=\int_0^5 v(t)dt=\int_0^5 (3t+5)dt=\left(\frac{3t^2}{2}+5t\right)\Bigg|_0^5=62,5(m).$$

Câu 35. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở Hình



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 5 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm 1 giây đến 5 giây.

Lời giải

Đồ thị hàm số biểu diễn vận tốc theo thời gian là một đường thẳng qua gốc toạ độ, nên ta có: $v(t)=at(a\in\mathbb{R})$.

Vì khi $t=5$ thì $v=10$ nên ta có: $10=a\,.\,5$ hay $a=2$. Vậy $v(t)=2t$.

a) Quãng đường mà vật di chuyển được trong 5 giây đầu tiên là:

$$\int_0^5 v(t)dt=\int_0^5 2t\,dt=t^2\Big|_0^5=25(m).$$

b) Quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm 1 giây đến 5 giây là:

$$\int_1^5 v(t)dt=\int_1^5 2t\,dt=t^2\Big|_1^5=25-1=24(m)$$

Câu 36. Dọc theo đường thẳng (gắn trục toạ độ Ox có độ dài đơn vị bằng 1m), một vật chuyển động với vận tốc (m/s) $v(t)=12-4t, 0\le t\le 10$.

a) Tính hiệu số tọa độ (độ dịch chuyển) của vật giữa hai thời điểm $t=2$ và $t=5$.

b) Tính quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ $t=2$ đến $t=5$.

Lời giải

a) Hiệu số tọa độ của vật giữa hai thời điểm $t=2$ và $t=5$ là

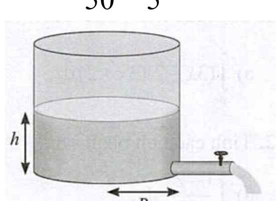
$$d=\int_2^5 v(t)dt=\int_2^5 (12-4t)dt=\left(12t-2t^2\right)\Big|_2^5=-6(m).$$

b) Quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ $t=2$ đến $t=5$ là

$$s=\int_2^5 |v(t)|\,dt=\int_2^5 |12-4t|\,dt=\int_2^3 (12-4t)dt+\int_3^5 (4t-12)dt$$

$$=\left(12t-2t^2\right)\Big|_2^3+\left(2t^2-12t\right)\Big|_3^5=2+8=10(m).$$

Câu 37. Một bồn chứa nước có dạng hình trụ với chiều cao 4 m và bán kính đáy $0,5m$. Lúc đầu bình chứa đầy nước. Kể từ khi bắt đầu xả nước, tốc độ thay đổi chiều cao của mực nước trong bồn theo thời gian t là $h'(t)=\frac{t}{50}-\frac{2}{5}$ (m/phút)



a) Tìm chiều cao $h(t)$ của mực nước trong bồn sau t phút kể từ khi bắt đầu xả nước.

b) Cần thời gian bao lâu để xả hết nước trong bồn?

c) Sau khi xả 5 phút, trong bồn còn bao nhiêu lít nước?

Lời giải

a) $h(t)=\int h^{'}(t)dt=\int\left(\frac{t}{50}-\frac{2}{5}\right)dt=\frac{t^2}{100}-\frac{2t}{5}+C$.

Ta có $h(0)=4$, suy ra $C=4$.

Vậy $h(t)=\frac{t^2}{100}-\frac{2t}{5}+4(m)$.

b) Ta có $h(t)=0\Leftrightarrow\frac{t^2}{100}-\frac{2t}{5}+4=0\Leftrightarrow t^2-40t+400=0$

$\Leftrightarrow(t-20)^2=0\Leftrightarrow t=20.$

Suy ra cần 20 phút để xả hết nước trong bồn.

c) Sau khi xả 5 phút, chiều cao của mực nước trong bồn là

$h(5)=\frac{5^2}{100}-\frac{2.5}{5}+4=2,25(m).$

Thể tích nước trong bồn lúc đó là

$V=\pi.(0,5)^2\cdot 2,25=\frac{9\pi}{16}\approx 1,767\left(m^3\right).$

Ta có $1,767\,m^3=1767l$. Vậy sau khi xả 5 phút, trong bồn còn khoảng $1767l$ nước.

Câu 38. Sau khi được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng, một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=20-10t(m/s)$ với $0\le t\le 4$.

a) Xác định độ cao của vật (tính theo mét) tại thời điểm $t=3$.

b) Tính quãng đường vật đi được trong 3 giây đầu.

Lời giải

a) Kí hiệu $h(t)$ là độ cao của vật (tính theo mét) tại thời điểm $t(0\le t\le 4)$.

Ta có $h^{'}(t)=v(t)$ và $h(0)=0$. Từ đó

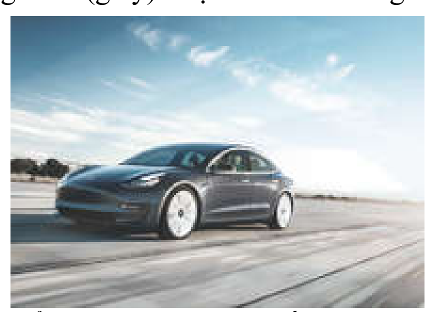
$h(3)=h(3)-h(0)=\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3(20-10t)dt=\left(20t-5t^2\right)\Big|_0^3=15(m).$

b) Quãng đường vật đi được trong 3 giây đầu là

$$s=\int_0^3|v(t)|\,dt=\int_0^3|20-10t|\,dt=\int_0^2(20-10t)dt+\int_2^3(10t-20)dt$$

$$=\left(20t-5t^2\right)\Big|_0^2+\left(5t^2-20t\right)\Big|_2^3=20+5=25(m).$$

Câu 39. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ $20\,m/s$ thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t)=20-5t(0\le t\le 4)$.



Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng, ô tô đi được quãng đường bao nhiêu?

a) Tính quãng đường xe di chuyển từ khi hãm phanh đến khi dừng

b) Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian đó.

Lời giải

a) Xe dừng khi $v(t)=20-5t=0$ hay $t=4(v(t)=20-5t\ge 0$ với mọi $t\in[0;4])$.

Từ đó, quãng đường xe di chuyển từ khi bắt đầu hãm phanh đến khi dừng là

$$s=\int_0^4 v(t)dt=\int_0^4(20-5t)dt=\left(20t-\frac{5t^2}{2}\right)\Big|_0^4=40(m)$$

b) Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian đó là: $v_{tb}=\frac{s}{4}=\frac{40}{4}=10(m/s)$

Câu 40. Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t)=2t-0,03t^2\,(0\le t\le 10)$ trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo giây với $t=0$ là thời điểm xe xuất phát.

a) Tính quãng đường xe đi được sau 5 giây, sau 10 giây.

b) Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian từ $t=0$ đến $t=10$.

Lời giải

Gọi $s(t)(m)$ là quãng đường ô tô đi được sau t giây.

Ta có $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$.

a) Quãng đường xe đi được sau 5 giây là

$$s(5)-s(0)=\int_0^5 v(t)dt=\int_0^5\left(2t-0,03t^2\right)dt=\left(t^2-0,01t^3\right)\Big|_0^5$$

$$=\left(5^2-0,01.5^3\right)-\left(0^2-0,01.0^3\right)=23,75$$

Quãng đường xe đi được sau 10 giây là

$$s(10)-s(0)=\int_0^{10} v(t)dt=\int_0^{10}\left(2t-0,03t^2\right)dt=\left(t^2-0,01t^3\right)\Big|_0^{10}$$

$$=\left(10^2-0,01.10^3\right)-\left(0^2-0,01.0^3\right)=90$$

b) Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian từ $t=0$ đến $t=10$ là:

$$v_{tb}=\frac{s}{t}=\frac{90}{10}=9(m/s)$$

Câu 41. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6(m/s)$.

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$, tức là tính $\int_1^4 v(t)dt$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int_1^4 |v(t)|\,dt$.

Lời giải

Giả sử vật chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương hướng từ trái sang phải.

a) Ta có $\int_1^4 v(t)dt=\int_1^4\left(t^2-t-6\right)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-6t\right)\Big|_1^4=-\frac{9}{2}$.

Vậy trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$, vật dịch chuyển sang bên trái được $4,5m$ so với vị trí tại thời điểm $t=1$ (giây).

(Trong quá trình chuyển động, lúc thì vật đi sang trái, lúc thì đi sang phải, nhưng tại thời điểm $t=4$ (giây) thì vật có vị trí nằm ở phía bên trái và cách vị trí của vật tại thời điểm $t=1$ (giây) một khoảng là 4,5 mét).

b) Ta có

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = \int_1^4 \left|t^2-t-6\right|dt = \int_1^3 \left|t^2-t-6\right|dt + \int_3^4 \left|t^2-t-6\right|dt$$

$$= \int_1^3 \left(-t^2+t+6\right)dt + \int_3^4 \left(t^2-t-6\right)dt$$

$$= \left.\left(\frac{-1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+6t\right)\right|_1^3 + \left.\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-6t\right)\right|_3^4 = \frac{22}{3}+\frac{17}{6}=\frac{61}{6}.$$

Vậy tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$ (giây) (tính cả quãng đường lúc đi sang trái, quãng đường lúc đi sang phải) là $\frac{61}{6}$ (m).

Câu 42. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hoá bằng công thức $P'(x) = -0,0005x + 12,2$

Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

a) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm là

$$\int_{100}^{101} (-0,0005x+12,2)dx = \left.\left(-\frac{1}{4000}x^2+12,2x\right)\right|_{100}^{101} = 12,14975 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm là

$$\int_{100}^{110} (-0,0005x+12,2)dx = \left.\left(-\frac{1}{4000}x^2+12,2x\right)\right|_{100}^{110} = 121,475 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 43. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hoá bởi công thức

$v = k\left(R^2 - r^2\right)$ trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

Lời giải

Vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$ là

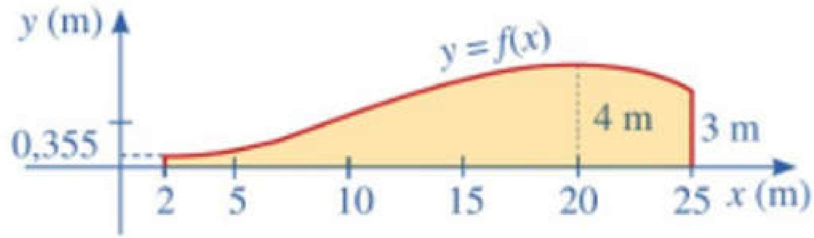
$$\frac{1}{R-0}\int_0^R k\left(R^2-r^2\right)dr = \frac{1}{R}\left.\left(kR^2r - k\frac{r^3}{3}\right)\right|_0^R = \frac{1}{R}\left(kR^3 - k\frac{R^3}{3}\right) = kR^2 - k\frac{1}{3}R^2 = \frac{2}{3}kR^2.$$

Xét hàm số $v(r) = k\left(R^2 - r^2\right), 0 \le r \le R$. Ta có $v'(r) = -2kr; v'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$.

Suy ra vận tốc lớn nhất của dòng máu là $v_{CD} = kR^2$.

Vậy vận tốc lớn nhất của dòng máu lớn hơn vận tốc trung bình là 1,5 lần.

Câu 44. Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường các chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành điện năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (tô màu vàng) trong Hình mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh turbine, được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 2, x = 25$, trục Ox và đồ thị hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{800}\left(x^3 - 33x^2 + 120x - 400\right)$.



Hãy tính diện tích hình thang cong đó.

Lời giải

Diện tích của hình thang cong được tô màu vàng là:

$$I = \int_2^{25} -\frac{1}{800}\left(x^3 - 33x^2 + 120x - 400\right)dx$$

$$= -\frac{1}{800}\left(\int_2^{25} x^3\,dx - 33\int_2^{25} x^2\,dx + 120\int_2^{25} x\,dx - 400\int_2^{25} dx\right)$$

$$= -\frac{1}{800}\left(\left.\frac{x^4}{4}\right|_2^{25} - 11x^3\Big|_2^{25} + 60x^2\Big|_2^{25} - 400x\Big|_2^{25}\right) = \frac{184299}{3200}\left(m^2\right).$$

Câu 45. **a)** Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t)(m/s)$. Cho $0 < a < b$ và $v(t) > 0$ với mọi $t \in [a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t)dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (a, b tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 - \sin t(m/s)$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}(s)$.

Lời giải

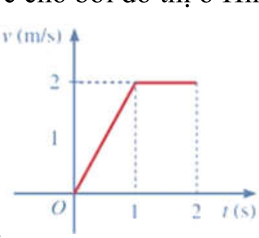
a) Vì vận tốc là đạo hàm của quãng đường nên $\int_a^b v(t)dt = s(t)\Big|_a^b$

Do đó $\int_a^b v(t)dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b

b) Quãng đường vật di chuyển trong khoảng

$$s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} v(t)dt = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (2 - -\sin t)dt = (2x + \cos x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2+\sqrt{2}}{2} \approx 3(m/s)$$

Câu 46. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở Hình.



a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.
b) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Trong 1 giây đầu tiên, vận tốc được biểu diễn bởi hàm số: $v(t) = 2t$

Quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên: $s(1) = \int_0^1 v(t)dt = \int_0^1 2tdt = 1(m)$

b) Trong 1 giây tiếp theo, $v = 2(m/s)$

Quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên: $s(2) = \int_0^1 v(t)dt + \int_1^2 v(t)dt = \int_0^1 2tdt + \int_0^1 2dt = 3$ (m)

Câu 47. Ở nhiệt độ $37^{\circ}C$, một phản ứng hoá học từ chất đầu A, chuyển hoá thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị $molL^{-1}$) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thoả mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05\, mol\, L^{-1}$.

a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$, từ đó hãy tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị $molL^{-1}$) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

Lời giải

a) $f(x) = \ln y(x) \rightarrow f'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -7.10^{-4} \rightarrow f(x) = -7.10^{-4}x$

b) $f(x) = -7.10^{-4}x \rightarrow \ln y(x) = -7.10^{-4}x \Leftrightarrow y(x) = e^{-7.10^{-4}x}$

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây:

$$\frac{1}{30-15}\int_{15}^{30} y(x)dx = \frac{1}{15}\int_{15}^{30} e^{-7.10^{-4}x}dx = \frac{1}{15}\cdot\left.\frac{e^{-7.10^{-4}x}}{-7.10^{-4}}\right|_{15}^{30} = 0,98\left(L^{-1}\right)$$

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

DẠNG 3. NÂNG CAO

Câu 58. **(Chuyên Vinh 2024)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $2x^2 + f(x) = 2xf'(x)$ với mọi $x > 0$. Biết $f(1) = 1$, giá trị của $f(9)$ bằng

Lời giải

$2x^2 + f(x) = 2xf'(x) \Rightarrow 2xf'(x) - f(x) = 2x^2$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{f(x)}{2x\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \frac{f'(x)\sqrt{x} - f(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\right)' = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \int\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\right)'dx = \int\sqrt{x}\,dx$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{3} \Rightarrow f(9) = 55$.

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

NHÓM DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH

Câu 1. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x),G(x)$ là các nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

A. $F(a)-F(b)=G(a)-G(b)$.

B. $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

C. $\int_a^b f(x)dx=f(b)-f(a)$.

D. $\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b x^\alpha dx=b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}$.

B. $\int_a^b x^\alpha dx=\alpha\left(b^{\alpha-1}-a^{\alpha-1}\right)$.

C. $\int_a^b x^\alpha dx=\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\alpha\neq-1)$.

D. $\int_a^b x^\alpha dx=\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha}(\alpha\neq0)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 3. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b \sin x\,dx=\sin a-\sin b$.

B. $\int_a^b \sin x\,dx=\sin b-\sin a$.

C. $\int_a^b \sin x\,dx=\cos a-\cos b$.

D. $\int_a^b \sin x\,dx=\cos b-\cos a$.

Lời giải

Chọn C

Câu 4. Phát biểu nào sau đây là đúng? Biết $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ liên tục trên $[a;b]$.

A. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x}dx=\cot a-\cot b$.

B. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x}dx=\cot b-\cot a$.

C. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x}dx=\tan a-\tan b$.

D. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan b - \tan a$.

Lời giải

Chọn A

Câu 5. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b e^x\, dx = e^{b+1} - e^{a+1}$.

B. $\int_a^b e^x\, dx = e^{a+1} - e^{b+1}$.

C. $\int_a^b e^x\, dx = e^b - e^a$.

D. $\int_a^b e^x\, dx = e^a - e^b$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6. Tích phân $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ bằng:

A. $\ln b - \ln a$.
B. $|\ln b| - |\ln a|$.
C. $\ln|b| - \ln|a|$.
D. $\ln|a| - \ln|b|$.

Lời giải

Chọn C

Câu 7. Biết $F(x) = e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^1 \left[3 + f\left(x\right)\right] dx$ bằng:

A. $2+e$. **B.** $3+e$. **C.** 3. **D.** $3x+e^x$.

Lời giải

Chọn A

Câu 8. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b \cos x\, dx = \sin a - \sin b$.

B. $\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a$.

C. $\int_a^b \cos x\, dx = \cos a - \cos b$.

D. $\int_a^b \cos x\, dx = \cos b - \cos a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 9. Phát biểu nào sau đây là đúng? Biết $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ liên tục trên $[a;b]$.

A. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx = \cot a - \cot b$.

B. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx = \cot b - \cot a$.

C. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan a - \tan b$.

D. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan b - \tan a$.

Lời giải

Chọn D

Câu 10. Cho m thoả mãn $m > 0, m \neq 1$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b m^x\,dx = m^b - m^a$.

B. $\int_a^b m^x\,dx = m^a - m^b$.

C. $\int_a^b m^x\,dx = \frac{m^b}{\ln m} - \frac{m^a}{\ln m}$.

D. $\int m\,dx = \frac{m^a}{\ln m} - \frac{m^b}{\ln m}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 11. Tích phân $\int_1^2 \frac{-3}{x^3}dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{9}{8}$. **B.** $-\frac{45}{64}$. **C.** $\frac{15}{8}$. **D.** $-\frac{9}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 12. Tích phân $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ có giá trị bằng:

A. $2-\sqrt{2}$. **B.** $2+\sqrt{2}$. **C.** $\frac{-\sqrt{2}+8}{20}$. **D.** $\frac{-\sqrt{2}-8}{20}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 13. Nếu $\int_0^1 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x)dx$ bằng:

A. 16. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Câu 14. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = -2$ và $\int_2^3 f(x)dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng:

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Câu 15. Cho $\int_2^3 f(x)dx = 3$ và $\int_2^3 g(x)dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 \left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]dx$ bằng:

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=4\sqrt[3]{x}$. Giá trị của $\int_1^3 f(x)dx-\int_8^3 f(x)dx$ bằng

A. 45. **B.** 80. **C.** 15. **D.** $18\sqrt[3]{3}-51$.

Lời giải

Chọn A

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=3x-1$. Biết rằng a là số thoả mãn $\int_0^1 f^2(x)dx=a\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$. Giá trị của a là

A. 2. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 4. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và thoả mãn

$\int_1^3\left[3x^2-2f'(x)\right]dx=4; f(1)=-2.$

Giá trị $f(3)$ là

A. 9. **B.** 11. **C.** -13. **D.** 19.

Lời giải

Chọn A

Câu 19. **(Mã 101-2021-Lần 2)** Cho f là hàm số liên tục trên $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên $[1;2]$ thỏa $F(1)=-2$ và $F(2)=4$. Khi đó $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng.

A. 6. **B.** 2. **C.** -6. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa tích phân ta có: $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(1)=6$.

Câu 20. **(Mã 102-2021-Lần 2)** Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1)=-2$ và $F(2)=3$. Khi đó $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(1)=3-(-2)=5$.

Câu 21. Tích phân $\int_1^2 x^3dx$ bằng

A. $\frac{15}{3}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$\int_1^2 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2=\frac{15}{4}$.

Câu 22. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính tích phân $I=\int_{-1}^{0}(2x+1)\,dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

$I=\int_{-1}^{0}(2x+1)\,dx=\left(x^2+x\right)\Big|_{-1}^{0}=0-0=0$.

Câu 23. Tích phân $\int_{1}^{4}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_{1}^{4}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{x}\Big|_{1}^{4}=1$.

Câu 24. Tích phân $\int_{0}^{1}(3x+1)(x+3)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\int_{0}^{1}(3x+1)(x+3)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(3x^2+10x+3\right)\mathrm{d}x=\left(x^3+5x^2+3x\right)\Big|_{0}^{1}=9$.

Vậy : $\int_{0}^{1}(3x+1)(x+3)\,\mathrm{d}x=9$.

Câu 25. Tích phân $\int_{0}^{1}x(1+x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}$. **B.** $(1+2x)\Big|_{0}^{1}$. **C.** $\left(x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}$. **D.** $\int_{0}^{1}\left(x^2+x^3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_{0}^{1}x(1+x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(x^2+x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}$

Câu 26. $\int_{1}^{2}3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $4\sqrt{2}-2$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $4\sqrt{2}-1$. **D.** $2\sqrt{2}-2$.

Lời giải

Ta có $\int_{1}^{2}3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{2}=4\sqrt{2}-1$.

Câu 27. **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ -2019)** Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

+ Tính được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Câu 28. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x+1)dx$

A. $I = 5$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int_0^2 (2x+1)dx = \left(x^2 + x\right)\Big|_0^2 = 4 + 2 = 6$.

Câu 29. Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b \left(3x^2 - 2ax - 1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $b^3 - b^2a - b$. **B.** $b^3 + b^2a + b$. **C.** $b^3 - ba^2 - b$. **D.** $3b^2 - 2ab - 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^b \left(3x^2 - 2ax - 1\right)\mathrm{d}x = \left(x^3 - ax^2 - x\right)\Big|_0^b = b^3 - ab^2 - b$.

Câu 30. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 1 - \ln 2$. **B.** $I = \frac{7}{4}$. **C.** $I = 1 + \ln 2$. **D.** $I = 2\ln 2$.

Lời giải

Ta có $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(x - \ln|x|\right)\Big|_1^2 = (2 - \ln 2) - (1 - \ln 1) = 1 - \ln 2$.

Câu 31. **(Mã 101-2023)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $F(2) = 6$, $F(4) = 12$. Tích phân $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 18. **D.** -6.

Lời giải

Ta có $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_2^4 = F(4) - F(2) = 12 - 6 = 6$.

Câu 32. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-0=1$.

Câu 33. Tích phân $\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x}+2\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\ln 2-1$. **B.** $\ln 2+1$. **C.** $\ln 2+3$. **D.** $\ln 2+2$.

Lời giải

Chọn D

$\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x}+2\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x|+2x\right)\Big|_1^2 = \ln 2+4-\ln 1-2=\ln 2+2$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[-3;5]$, biết $f(-3)=1$ và $f(5)=9$. Tính $I=\int\limits_{-3}^{5} 4f'(x)dx$.

A. $I=32$. **B.** $I=44$. **C.** $I=40$. **D.** $I=36$.

Lời giải

Chọn A

$I=\int\limits_{-3}^{5} 4f'(x)dx = 4\int\limits_{-3}^{5} f'(x)dx = 4.f(x)\Big|_{-3}^{5} = 4\left[f(5)-f(-3)\right]=4.(9-1)=32$.

Câu 35. Tích phân $\int\limits_a^b 3^x\,dx$ bằng

A. $\frac{4^b-4^a}{4}$ **B.** $\frac{3^b-3^a}{\ln 3}$. **C.** $\frac{3^a-3^b}{\ln 3}$. **D.** $\frac{3^{b+1}-3^{a+1}}{x+1}$.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_a^b 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_a^b = \frac{3^b-3^a}{\ln 3}$

Chọn B

Câu 36. Tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{5}} \sin x dx$ có giá trị bằng:

A. $\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{7}$. **B.** $\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{5}$. **C.** $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{7}$. **D.** $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn **D.**

Câu 37. Tích phân $\int\limits_0^1 e^x\,dx$ bằng

A. e. **B.** $e-1$. **C.** $\frac{e-1}{2}$. **D.** e^2-1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e-1$.

Câu 38. Tích phân $\int_0^3 x^{2027}\,dx$ bằng

A. $\frac{3^{2028}}{\ln 3}$. **B.** $\frac{3^{2028}-1}{2028}$. **C.** $\frac{3^{2027}}{\ln 3}$. **D.** $\frac{3^{2028}}{2028}$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^3 x^{2027}\,dx = \frac{x^{2028}}{2028}\Big|_0^3 = \frac{3^{2028}}{2028}$.

Chọn D

Câu 39. Tích phân $\int_0^1 \frac{3^x}{2}dx$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{\ln 3}$. **B.** $\frac{1}{\ln 3}$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn **B.**

Câu 40. Tính tích phân $I = \int_0^{2016} 7^x dx$.

A. $I = \frac{7^{2017}}{2017} - 7$. **B.** $I = \left(7^{2016}-1\right)\ln 7$. **C.** $I = \frac{7^{2016}-1}{\ln 7}$. **D.** $I = 2016.7^{2015}$.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^{2016} 7^x\,dx = \frac{1}{\ln 7}7^x\Big|_0^{2016} = \frac{7^{2016}-1}{\ln 7}$. **Chọn C**

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

NHÓM DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ GIỎI

Câu 83. Giá trị của $\int_1^4 (|x-2|+|x-3|)dx$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

$$\int_1^4 (|x-2|+|x-3|)dx = \int_1^2 (5-2x)dx + \int_2^3 dx + \int_3^4 (2x-5)dx = \left(5x-x^2\right)\Big|_1^2 + x\Big|_2^3 + \left(x^2-5x\right)\Big|_3^4$$
$$= (6-4)+(3-2)+(-4+6) = 5.$$

Câu 84. **(Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1}\left|2^x - 2^{-x}\right|dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\frac{2}{\ln 2}$.

Lời giải

$I = \int_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx$ ta có $2^x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx = \int_{-1}^{0}\left|2^x-2^{-x}\right|dx + \int_0^1\left|2^x-2^{-x}\right|dx = \left|\int_{-1}^{0}\left(2^x-2^{-x}\right)dx\right| + \left|\int_0^1\left(2^x-2^{-x}\right)dx\right|$$

$$=\left|\left.\left(\frac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}\right)\right|_{-1}^{0}\right|+\left|\left.\left(\frac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}\right)\right|_{0}^{1}\right|=\frac{1}{\ln 2}.$$

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ thõa mãn $f(0)=4$ và $f'(x)=x+\mathrm{e}^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{6\mathrm{e}+13}{6}$. **B.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{6}$. **C.** $\frac{6\mathrm{e}+25}{3}$. **D.** $\frac{6\mathrm{e}+19}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^x+x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$.

Nếu: $f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$ và $f(0)=4$ thì: $1+C=4\Leftrightarrow C=3$.

Vậy: $f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+3$.

$$\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+3\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{6}x^3+3x\right)\right|_0^1=\mathrm{e}+\frac{13}{6}=\frac{6\mathrm{e}+13}{6}.$$

Câu 86. Cho tích phân $\int\limits_0^e(3x^2-2x)dx=me^3+ne^2$ với $m,n\in\mathbb{Z}$, khi đó $|m-n|$ bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^e(3x^2-2x)dx=e^3-e^2$

Suy ra $m=1,\ n=-1$

Vậy $|m-n|=2$.

Câu 87. Có bao nhiêu số thực a để $\int\limits_0^1(4ax^3-3a^2x^2+2x+1)\mathrm{d}x=0$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

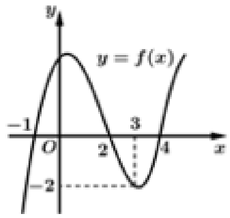
Chọn A

Ta có:

$$\int\limits_0^1(4ax^3-3a^2x^2+2x+1)\mathrm{d}x=\left.(ax^4-a^2x^3+x^2+x)\right|_0^1=-a^2+a+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=2\end{array}\right..$$

Vậy có hai số thực a thỏa mãn.

Câu 88. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^3\left[x+f'(x)\right]dx$.



A. $I=4$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta thấy $y=f(x)$ là hàm số bậc ba.

Giả sử $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua các điểm $(-1;0),(3;-2),(2;0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=-2 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1. \Rightarrow f'(x)=-x+\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{3}\left[x+f'(x)\right]dx=\int_{-1}^{3}\left[x-x+\frac{1}{2}\right]dx=\int_{-1}^{3}\frac{1}{2}dx=2.$$

Câu 89. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x & khi\ x\le 0 \\ a\left(x-x^2\right) & khi\ \ x>0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{a}{6}-1$. **B.** $\frac{2a}{3}+1$. **C.** $\frac{a}{6}+1$. **D.** $\frac{2a}{3}-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy, $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} 2xdx+\int_{0}^{1} a\left(x-x^2\right)dx$

$$=\left(x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+a\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=-1+a\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{a}{6}-1.$$

Câu 90. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho $I=\int_{0}^{1}\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I+6>0$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa tích phân ta có $I=\int_{0}^{1}\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2-2m^2x\right)\Big|_{0}^{1}=-2m^2+2$.

Khi đó $I+6>0 \Leftrightarrow -2m^2+2+6>0 \Leftrightarrow -m^2+4>0 \Leftrightarrow -2<m<2$

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 91. **(THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - TPHCM - 2018)** Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\,\text{m/s}$ thì người lái xe đạp phanh, thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(\text{m/s})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. $0,2\text{m}$. **B.** 2m. **C.** 10m. **D.** 20m.

Lời giải

Thời gian ô tô chuyển động từ lúc đạp phanh cho đến khi dừng hẳn: $v(t)=0 \Leftrightarrow t=2$.

Quảng đường mà ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là: $S=\int_0^2(-5t+10)\,\text{d}t$

$=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=-10+20=10(\text{m})$.

Câu 92. **(THPT KINH MÔN - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018)** Một chất điểm chuyển động thẳng trên trục Ox với vận tốc cho bởi công thức $v(t)=3t^2+6t$ (m/s) (t là thời gian). Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x=2$. Tìm tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động.

A. $x=9$. **B.** $x=11$. **C.** $x=4$. **D.** $x=6$.

Lời giải

Quảng đường mà vậ đi được sau 1 giây là

$S=\int_0^1 v(t)\,\text{d}t=\int_0^1\left(3t^2+6t\right)\text{d}t=\left(t^3+3t^2\right)\Big|_0^1=4\ \ (m)$.

Vậy tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là $x=6$.

Câu 93. **(THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - NĐ - LẦN 1 - 2018)** Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15\,\text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(\text{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $70,25\text{ m}$. **B.** $68,25\text{ m}$. **C.** $67,25\text{ m}$. **D.** $69,75\text{ m}$.

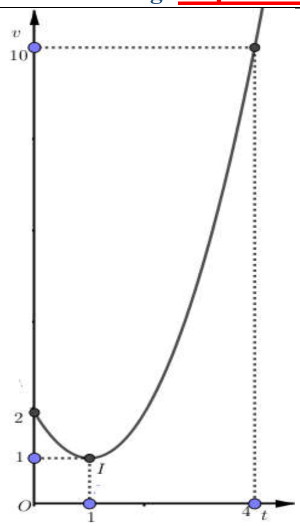
Lời giải

$a(t)=t^2+4t \Rightarrow v(t)=\int a(t)\,\text{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C\ \ (C\in\mathbb{R})$.

Mà $v(0)=C=15 \Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$.

Vậy $S=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+2t^2+15\right)\text{d}t=69,75\text{ m}$.

Câu 94. **(THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018)** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=6$ (km). **B.** $s=8$ (km). **C.** $s=\dfrac{40}{3}$ (km). **D.** $s=\dfrac{46}{3}$ (km).

Lời giải

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t)=at^2+bt+c$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} c=2 \\ \dfrac{-b}{2a}=1 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t)=t^2-2t+2.$$

Với $t=4 \Rightarrow v(4)=10$ (thỏa mãn).

Từ đó $s=\int\limits_0^4 \left(t^2-2t+2\right)dt=\dfrac{40}{3}(km)$.

Câu 95. Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-2t\ (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ôtô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

A. $18m$. **B.** $36m$. **C.** $22,5m$. **D.** $6,75m$.

Lời giải

$a(t)=6-2t\ (m/s^2) \Rightarrow v(t)=\int(6-2t)dt=6t-t^2+C$

Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t=0$ thì $v=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow v(t)=6t-t^2$.

$v(t)=6t-t^2$ là hàm số bậc 2 nên đạt GTLN khi $t=-\dfrac{b}{2a}=3\ (s)$

Quảng đường xe đi trong 3 giây đầu là: $S=\int\limits_0^3 \left(6t-t^2\right)dt=18m$.

Câu 96. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t)=6t$ m/s^2. Vận tốc của vật tại thời điểm $t=2$ giây là $17t$ m/s. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là.

A. 966 m. **B.** 36 m. **C.** 1200 m. **D.** 1014 m.

Lời giải

Chọn A

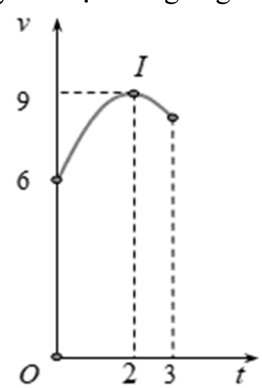
Từ giả thiết suy ra $v'(t)=a(t)\Rightarrow v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 6t\mathrm{d}t=3t^2+C$.

Mặt khác $v(2)=17$ nên $3.2^2+C=17\Rightarrow C=5$. Do đó $v(t)=3t^2+5$.

Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=4$ giây đến thời điểm $t=10$ giây là

$$s=\int_4^{10} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_4^{10}\left(3t^2+5\right)\mathrm{d}t=\left(t^3+5t\right)\Big|_4^{10}=1050-84=966\text{ m}.$$

Câu 97. **(Mã 110 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s=25,25(\text{km})$ **B.** $s=24,25(\text{km})$ **C.** $s=24,75(\text{km})$ **D.** $s=26,75(\text{km})$

Lời giải

Chọn C

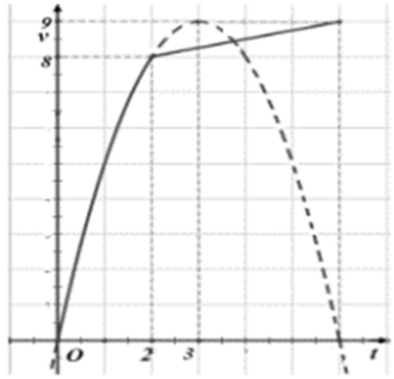
Gọi $v(t)=a.t^2+bt+c$.

Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ a.2^2+b.2+c=9\\ a.0^2+b.0+c=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3}{4}\\ b=3\\ c=6\end{cases}$$. Tìm được $v(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6$

Vậy $S=\int_0^3\left(-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6\right)dt=24,75$ (km)

Câu 98. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\dfrac{1}{4}$. Tính quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



A. $\dfrac{130}{3}(km)$.　　**B.** $9(km)$.　　**C.** $40(km)$.　　**D.** $\dfrac{134}{3}(km)$.

Lời giải

Chọn A

+ Vì Parabol đi qua O(0; 0) và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên thiết lập được phương trình Parabol là $(P): y = v(t) = -t^2 + 6t; \forall t \in [0;2]$

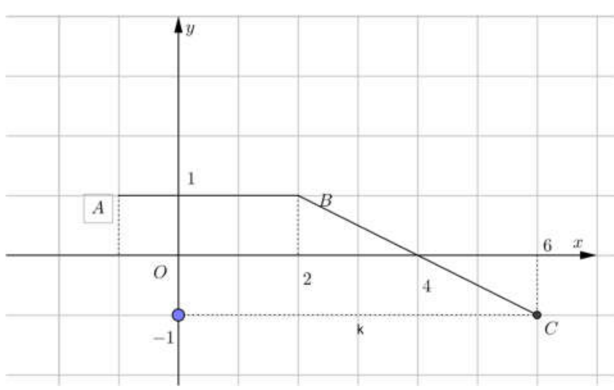
+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y = \dfrac{1}{4}t + m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m = \dfrac{15}{2}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $y = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{15}{2}; \forall t \in [2;6]$

+ Quảng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 \left(-t^2 + 6t\right)dt + \int_2^6 \left(\frac{1}{4}t + \frac{15}{2}\right)dt = \frac{130}{3}(km)$$

Câu 99. **(Mã 101-2021-Lần 2)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1;6]$ và có đồ thị đường gấp khúc ABC như hình bên. Biết F là một nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng



A. 10.　　**B.** 5.　　**C.** 6.　　**D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 \quad khi \ -1 \le x \le 2 \\ -\dfrac{1}{2}x + 2 \ khi \ 2 < x \le 6 \end{cases}$.

$$F(x)=\begin{cases} x+C_1 & khi\ -1\le x\le 2 \\ -\dfrac{1}{4}x^2+2x+C_2 & khi\ 2<x\le 6\end{cases}.$$

Vì $F(-1)=-1\Rightarrow -1+C_1=-1\Leftrightarrow C_1=0$ nên $F(x)=\begin{cases} x & khi\ -1\le x\le 2 \\ -\dfrac{1}{4}x^2+2x+C_2 & khi\ 2<x\le 6\end{cases}$.

Mặt khác $\int\limits_2^4 f(x)dx+\int\limits_4^6 f(x)dx=0\Rightarrow F(4)-F(2)+F(6)-F(4)=0$.

$\Rightarrow F(6)=F(2)=2$.

$\int\limits_2^4 f(x)dx-\int\limits_4^6 f(x)dx=2\Rightarrow F(4)-F(2)-F(6)+F(4)=2$.

$\Rightarrow 2F(4)=6\Leftrightarrow F(4)=3$.

Vậy $F(4)+F(6)=2+3=5$.

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[a;b]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\int\limits_a^b f''(x)dx=f'(b)-f'(a)$.

b) $\int\limits_a^b f''(x)dx=f(b)-f(a)$.

c) $\int\limits_a^b f''(x)dx=f'(a)-f'(b)$.

d) $\int\limits_a^b f''(x)dx=f(a)-f(b)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

Câu 2. Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây). Xét chuyển động trong khoảng thời gian từ c (giây) đến b (giây). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\int\limits_c^b a(t)dt=v(b)-v(c)$.

b) $\int\limits_c^b v(t)dt=a(b)-a(c)$.

c) $\int\limits_c^b v'(t)dt=v(c)-v(b)$.

d) $\int_c^b v'(t)dt = v(b) - v(c)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

Câu 3. Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\int_a^a f(x)dx = 1$.

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

c) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,\ c \in (a;b)$.

d) $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Sai Ta có: $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.

d) Sai

Câu 4. Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x)\mathrm{d}x$ được viết ở dạng $\pi\left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b}\right) - 1$ $a, b \in \mathbb{Z}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) $a + 2b = 8$.
b) $a + b = 5$.
c) $2a - 3b = 2$.
d) $a - b = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x)\mathrm{d}x = \left(x^2 - x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} - 1 = \pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - 1.$$

Vậy $a = 4$, $b = 2$. Suy ra $a + b = 6$.

Câu 5. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 5$; $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 7$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 10$.

b) $\int_{-1}^1 \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$.

c) $\int_{-1}^1 \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$.

d). $\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 14$.

Lời giải

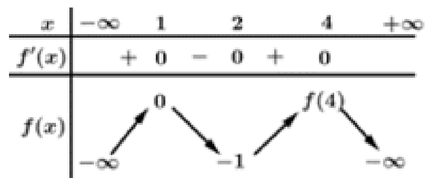
a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2.5 = 10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$ và $\int_{-1}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\int_{1}^{2} f'(x)dx = 1$.

b) $\int_{1}^{4}\left[3 + f'(x)\right]dx = f(4) + 3$.

c) $\int_{1}^{2}\left|f'(x)\right|dx = f(1) - f(2)$.

d) Nếu $\int_{1}^{4}\left|f'(x)\right|dx = 5$ thì $f(4) = 3$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai. $\int_{1}^{2} f'(x)dx = f(2) - f(1) = -1 - 0 = -1$.

b) Sai. $\int_{1}^{4}\left[3 + f'(x)\right]dx = f(4) + 9$.

c) Đúng. $\int_{1}^{2}\left|f'(x)\right|dx = -\int_{1}^{2} f'(x)dx = f(1) - f(2)$.

d) Đúng. Từ đồ thị, ta có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

$$5 = \int_{1}^{4}\left|f'(x)\right|dx = \int_{1}^{2}\left|f'(x)\right|dx + \int_{2}^{4}\left|f'(x)\right|dx \Leftrightarrow 5 = -\int_{1}^{2} f'(x)dx + \int_{2}^{4} f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 5 = -f(x)\Big|_{1}^{2} + f(x)\Big|_{2}^{4} \Leftrightarrow 5 = -[f(2) - f(1)] + [f(4) - f(2)]$$

$$\Leftrightarrow 5 = -2f(2) + f(1) + f(4) \Leftrightarrow 5 = -2.(-1) + 0 + f(4) \Leftrightarrow f(4) = 3.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) \geq x^4 + \dfrac{2}{x^2} - 2x \ \forall x > 0$ và $f(1) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0;1)$.

b) Phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0;+\infty)$.

c) Phương trình $f\left(x\right)=0$ có 1 nghiệm trên $\left(1;2\right)$.

d) Phương trình $f\left(x\right)=0$ có 1 nghiệm trên $\left(2;5\right)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

$f'\left(x\right)\geq x^4+\frac{2}{x^2}-2x=\frac{x^6-2x^3+2}{x^2}=\frac{\left(x^3-1\right)^2+1}{x^2}>0\ \forall x>0$

$\Rightarrow y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

$\Rightarrow f\left(x\right)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ $\left(1\right)$.

$f'\left(x\right)\geq x^4+\frac{2}{x^2}-2x>0\ \forall x>0\Rightarrow\int\limits_1^2 f'\left(x\right)\mathrm{d}x\geq\int\limits_1^2\left(x^4+\frac{2}{x^2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{21}{5}$

$\Rightarrow f\left(2\right)-f\left(1\right)\geq\frac{21}{5}\Rightarrow f\left(2\right)\geq\frac{17}{5}$.

Kết hợp giả thiết ta có $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[1;2\right]$ và $f\left(2\right).f\left(1\right)<0$ $\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có 1 nghiệm trên $\left(1;2\right)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+1(a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $\int\limits_0^1 f(x)dx=4$ và $\int\limits_1^2 f(x)dx=14$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $\int\limits_2^1 f(x)dx=-14$.

b) $\int\limits_0^2 f(x)dx=18$.

c) $a+b=6$.

d) $\int\limits_0^3 f(x)dx=44$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Mệnh đề a) đúng. $\int\limits_2^1 f(x)dx=-\int\limits_1^2 f(x)dx=-14$.

b) Mệnh đề b) đúng. Ta có: $\int\limits_0^1 f(x)dx=1,\int\limits_1^2 f(x)dx=14$.

Suy ra $\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_1^2 f(x)dx=4+14=18$

c) Mệnh đề c) sai. Ta có:

$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(ax^2+bx+1\right)dx=\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1=4\Rightarrow\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=3$

$\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2\left(ax^2+bx+1\right)dx=\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^2=\frac{7a}{3}+\frac{3b}{2}+1=14.\Rightarrow\frac{7a}{3}+\frac{3b}{2}=13$

(2) Từ (1), (2) suy ra $a=3,b=4$. Vậy $a+b=7$.

d) Mệnh đề d) sai. Ta có: $f(x)=3x^2-4x+1$ nên $\int_0^3\left(3x^2+4x+1\right)dx=48$.

Câu 9. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\int_{-1}^{1}|x|^3\,\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\right|$.

b) $\int_{-1}^{2018}\left|x^4-x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2018}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

c) $\int_{-2}^{3}\left|e^x(x+1)\mathrm{d}x\right|=\int_{-2}^{3}e^x(x+1)\mathrm{d}x$.

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

Ta có: $x^4-x^2+1=x^4-2.x^2.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $\int_{-1}^{2018}\left|x^4-x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2018}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+m & \text{khi } x<1\\ -2x+n & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ $(m,n\in\mathbb{R})$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\int_1^2 f(x)dx=0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $n=3$.
b) $m=1$.
c) $f(-1)=7$.
d) $\int_0^2 f(x)dx=\frac{11}{6}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Mệnh đề a) đúng Ta có: $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(-2x+n)dx=\left(-x^2+nx\right)\Big|_1^2=-3+n=0\Rightarrow n=3$.

Vậy $n=3$.

b) Mệnh đề b) sai

Vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2-3x+m\right)=\lim\limits_{x\to1^+}(-2x+3)$

$\Rightarrow m-2=1\Rightarrow m=3$ Vậy $m=3$.

c) Mệnh đề c) đúng.

Ta có: $f(x)=x^2-3x+3$ khi $x<1$ nên $f(-1)=7$.

d) Mệnh đề d) đúng

Ta có: $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-3x+3\right)dx+\int_1^2(-2x+3)dx=\frac{11}{6}$.

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

Câu 30. Giả sử chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa theo công thức $C=5000\left(25+3\int_0^x t^{\frac{1}{4}}dt\right)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Chi phí mua 1 sản phẩm là 100.000 đồng.
b) Chi phí bảo trì năm đầu tiên của 1 sản phẩm là 12.000 đồng.
c) Sau 6,5 năm thì số tiền mua một sản phẩm bằng số tiền bảo trì sản phẩm đó.
d) Nếu một nhà đầu tư có 10 triệu, thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 30 sản phẩm trong 10 năm.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Chi phí mua 1 sản phẩm ứng với $x=0$, sau ra $C=5000.25=125.000$. Suy ra mệnh đề a sai.

b) Với $x=1$ ta có: $C=5000\left(25+3\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}dt\right)=137.000$. Suy ra chi phí bảo trì năm đầu tiên của sản phẩm là $137.000-125.000=12.000$ đồng. Suy ra mệnh đề b đúng.

c) Gọi x là số năm mà số tiền bảo trì bằng số tiền mua sản phẩm. Khi đó tổng số tiền mua và số tiền bảo trì là $2^{*}125.000=250.000$.

Khi đó:

$$5000\left(25+3\int_0^x t^{\frac{1}{4}}dt\right)=250.000 \Leftrightarrow 25+3\left(\left.\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}\right|_0^x\right)=50 \Leftrightarrow \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}}=25 \Leftrightarrow x=\left(\frac{75}{2}\right)^{\frac{4}{5}} \approx 6.52 \text{ năm.}$$

Vậy mệnh đề c sai.

d) Số tiền mua và bảo trì 1 sản phẩm trong 10 năm là:

$$C=5000\left(25+3\int_0^{10} t^{\frac{1}{4}}dt\right)=5000(25+24\sqrt[4]{10})\approx 338.393,53. \text{ Ta có: } \frac{10.000.000}{338.393,53}\approx 29,55$$

Vậy với 10 triệu thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 29 sản phẩm. Suy ra mệnh đề d sai.

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. $\int_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}}dx$ có giá trị bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}}dx=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{3}{4}\right)^x dx=\left.\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{9\ln\frac{3}{4}}\right|_0^1=-\frac{1}{36\ln\frac{3}{4}}\approx 0,1$.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để $\int_0^3 (10x-2m)dx>0$?

Lời giải

Ta có $\int_0^3 (10x-2m)dx=\left.\left(5x^2-2mx\right)\right|_0^3=45-6m>0$.

Từ đó suy ra $m<\frac{45}{6}=7,5$. Vậy $m\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$. Có 7 giá trị nguyên dương m thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 3. Giả sử $\forall a,b\in\mathbb{R}, a<0<b, \int_a^b |x|^7 dx=ma^8+nb^8$ trong đó m,n là các hằng số thực (không phụ thuộc vào a và b). Giá trị của biểu thức $P=m-5n$ là bao nhiêu?

Lời giải

$\forall a,b\in\mathbb{R}, a<0<b, \int_a^b |x|^7\,dx=\int_a^0 |x|^7\,dx+\int_0^b |x|^7\,dx$

$=\int_a^0\left(-x^7\right)dx+\int_0^b x^7dx=\frac{1}{8}a^8+\frac{1}{8}b^8.$

$P=\frac{1}{8}-\frac{5}{8}=-0,5$

Câu 4. Nước chảy từ đáy bể chứa với tốc độ $r(t)=200-4t$ (lít/phút), trong đó $0\le t\le 50$. Tìm lượng nước chảy ra khỏi bể trong 10 phút đầu tiên.

Lời giải

Lượng nước chảy ra khỏi bể trong 10 phút đầu tiên là

$$V=\int_0^{10} r(t)dt=\int_0^{10}(200-4t)dt=\left(200t-2t^2\right)\Big|_0^{10}=1800 \text{ (lít)}.$$

Câu 5. Mật độ khối lượng của một thanh kim loại có chiều dài 4 mét được cho bởi công thức $\rho(x)=1000+x-\sqrt{x}\left(kg/m^3\right)$, trong đó x là khoảng cách bằng mét tính từ một đầu của thanh. Mật độ khối lượng trung bình trên toàn bộ chiều dài của thanh là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Mật độ khối lượng trung bình trên toàn bộ chiều dài của thanh là

$$\frac{1}{4}\int_0^4 \rho(x)dx=\frac{1}{4}\int_0^4(1000+x-\sqrt{x})dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(1000x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right)\Bigg|_0^4=\frac{3002}{3}\approx 1001\left(kg/m^3\right).$$

Câu 6. Một ô tô đồ chơi trượt xuống dốc và dừng sau 5 giây, vận tốc của ô tô đồ chơi từ thời điểm $t=0$ giây đến $t=5$ giây được cho bởi công thức $v(t)=\frac{1}{2}t^2-0,1t^3(m/s)$

Tìm quãng đường ô tô đồ chơi đi đến khi dừng lại (làm tròn kết quả theo đơn vị mét đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Quãng đường ô tô đồ chơi đi đến khi dừng lại là

$$S(t)=\int_0^5 v(t)dt=\int_0^5\left(\frac{1}{2}t^2-0,1t^3\right)dt$$

$$=\left(\frac{t^3}{6}-\frac{0,1t^4}{4}\right)\Bigg|_0^5=\frac{5^3}{6}-\frac{0,1\cdot 5^4}{4}\approx 5,21(m).$$

Câu 7. Một ô tô đang chạy với vận tốc $18\,m/s$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-36t+18(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

Lời giải

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu hãm phanh.
Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T)=0$ suy ra $-36T+18=0\Rightarrow T=0,5$ (s). Khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc ô tô dừng hẳn là $0,5s$. Trong khoảng thời gian đó, ô tô di chuyển được quãng đường là

$$S=\int_0^{0,5}(-36t+18)dt=\left(-18t^2+18t\right)\Big|_0^{0,5}=4,5(m).$$

Câu 8. Một ô tô đang chạy với vận tốc $18\,m/s$ thì người lái ô tô đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-6t+18(m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

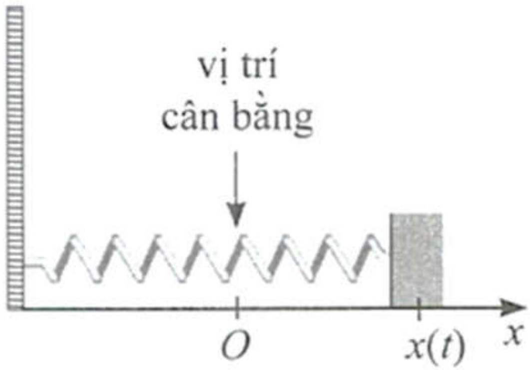
Lời giải

Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t)=0$, tức là $-6t+18=0$ hay $t=3(s)$.

Quãng đường mà ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$\int_0^3(-6t+18)dt=\left(-3t^2+18t\right)\Big|_0^3=27(m).$$

Câu 9. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình, có vận tốc tức thời cho bởi $v(t)=2\cos t$, trong đó t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng cm/s. Tại thời điểm $t=0$, con lắc đó ở vị trí cân bằng.



Tính quãng đường mà con lắc lò xo di chuyển được sau 1 giây kể từ vị trí cân bằng theo đơn vị centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Quãng đường mà con lắc di chuyển sau 1 giây kể từ vị trí cân bằng là:

$$S=\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1 2\cos t\,dt=2\sin t\Big|_0^1=2\sin 1\approx 1,68(cm).$$

Câu 10. Một vật đang ở nhiệt độ $100^\circ C$ thì được đặt vào môi trường có nhiệt độ $30^\circ C$. Kể từ đó, nhiệt độ của vật giảm dần theo tốc độ $T'(t)=-140.e^{-2t}\left({}^\circ C/\text{ phút}\right)$, trong đó $T(t)$ là nhiệt độ tính theo ${}^\circ C$ tại thời điểm t phút kể từ khi được đặt vào môi trường. Xác định nhiệt độ của vật ở thời điểm 3 phút kể từ khi được đặt vào môi trường (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của ${}^\circ C$).

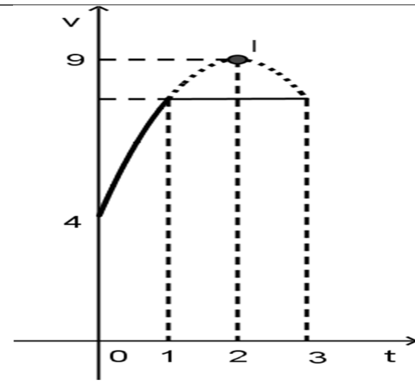
Lời giải

$$T(3)=T(0)+\int_0^3 T'(t)dt=100+\int_0^3\left(-140\cdot e^{-2t}\right)dt=100-140\cdot\int_0^3\left(e^{-2}\right)^t dt$$

$$=100-140\cdot\frac{1}{\ln e^{-2}}\cdot e^{-2t}\Big|_0^3=100+70\left(e^{-6}-1\right)\approx 30,2\left({}^\circ C\right).$$

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

Câu 71. **(Mã 123 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



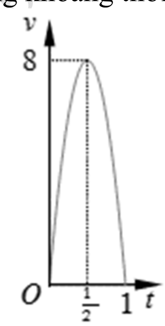
Lời giải

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau: $\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

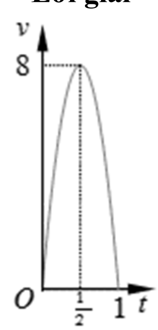
Với $t = 1$ ta có $v = \dfrac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s = \int\limits_0^1 \left(-\dfrac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right)dt + \int\limits_1^3 \dfrac{31}{4}dt = \dfrac{259}{12} \approx 21,583$

Câu 72. **(Mã 104 2017)** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



Lời giải



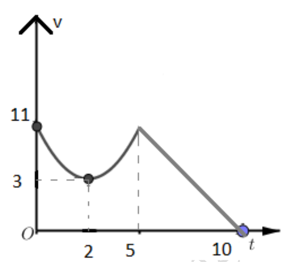
Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ và điểm $I\left(\dfrac{1}{2};\ 8\right)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \\ \dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=32 \\ c=0 \end{cases}$.

Suy ra $(P): y=-32x^2+32x$.

Vậy quảng đường người đó đi được là $s=\int_0^{\frac{3}{4}}\left(-32x^2+32x\right)\mathrm{d}x=4,5$ (km).

Câu 73. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parapol khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$.Cho đỉnh Parapol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Lời giải

Gọi Parapol $(P): y=ax^2+bx+c$ khi $0\le t\le 5(s)$

Do $(P): y=ax^2+bx+c$ đi qua $I(3;2); A(0;11)$ nên

$\begin{cases} 4a+2b+c=3 \\ c=11 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-8. \\ c=11 \end{cases}$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0\le t\le 5(s)$ là $S=\int_0^5\left(2x^2-8x+11\right)dx=\dfrac{115}{3}(m)$

Ta có $f(5)=21$

Gọi $d: y=ax+b$ khi $5\le t\le 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5;21)$ và $C(10;0)$ nên:

$\begin{cases} 5a+b=11 \\ 10a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{21}{5} \\ b=42 \end{cases}.$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $5\le t\le 10(s)$ là $S=\int_5^{10}\left(-\dfrac{26}{5}x+52\right)dx=\dfrac{105}{2}(m)$

Quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là $S=\dfrac{115}{3}+\dfrac{105}{2}=\dfrac{545}{6}$.