BÀI 22. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

- **CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN**
- **|**FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m,n), là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n.

Chú ý

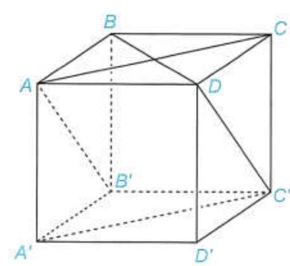
- Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b. Khi đó $(a,b)=\left(a,b'\right)$.

- Với hai đường thẳng a,b bất kì: $0^\circ \le (a,b) \le 90^\circ$.

Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì (a,b) và $\left(a',b'\right)$ có mối quan hệ gì?

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có các mặt là các hình vuông. Tính các góc $\left(AA',CD\right),\left(A'C',BD\right),\left(AC,DC'\right)$.

Giải. (H.7.3)



Hình 7.3

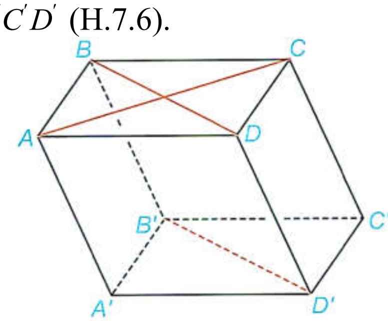
Vì $CD//AB$ nên $\left(AA',CD\right)=\left(AA',AB\right)=90^\circ$. Tứ giác $ACC'A'$ có các cặp cạnh đối bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó, $A'C'//AC$. Vậy $\left(A'C',BD\right)=(AC,BD)=90^\circ$.

Tương tự, $DC'//AB'$. Vậy $\left(AC,DC'\right)=\left(AC,AB'\right)$. Tam giác $AB'C$ có ba cạnh bằng nhau (vì là các đường chéo của các hình vuông có độ dài cạnh bằng nhau) nên nó là một tam giác đều. Từ đó, $\left(AC,DC'\right)=\left(AC,AB'\right)=60^\circ$.

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Hai đường thẳng a,b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a\perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ (H.7.6).



Hình 7.6

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AC và $B'D'$.

b) Chứng minh rằng AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thoi.

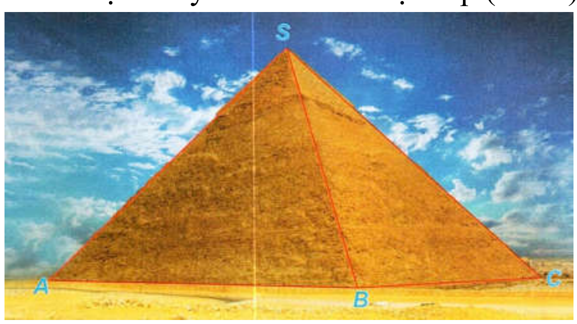
Giải

a) Hai đường thẳng AC và $B'D'$ lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $\left(A'B'C'D'\right)$ nên chúng không có điểm chung, tức là chúng không thể trùng nhau hoặc cắt nhau.
Tứ giác $BDD'B'$ có hai cạnh đối BB' và DD' song song và bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó $B'D'$ song song với BD. Mặt khác, BD không song song với AC nên $B'D'$ không song song với AC.
Từ những điều trên suy ra AC và $B'D'$ chéo nhau.
b) Do $B'D'$ song song với BD nên $\left(AC, B'D'\right)=(AC, BD)$. Do đó, AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi AC và BD vuông góc với nhau. Do $ABCD$ là hình bình hành nên AC vuông góc với BD khi và chỉ khi $ABCD$ là hình thoi.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng

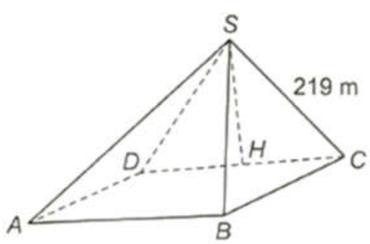
Câu 1. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Kim tự tháp Kheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219 m$ (kích thước hiện nay). (Theo britannica.com). Tính (gần đúng) góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (H.7.4).



Hình 7.4

Lời giải

Gọi H là trung điểm của CD thì $CH=115 m$.



Vì $DC // AB$ nên $(SC; AB)=(SC; CD)=\widehat{SCH}$.

Ta có: $\cos \widehat{SCH}=\dfrac{CH}{SC}=\dfrac{115}{219} \Rightarrow \widehat{SCH} \approx 58,3^{\circ}$.

Câu 2. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có các đáy là các tam giác đều. Tính góc $\left(AB, B'C'\right)$.

Lời giải

Ta có: $\left(AB, B'C'\right)=(AB, BC)=60^{\circ}$.

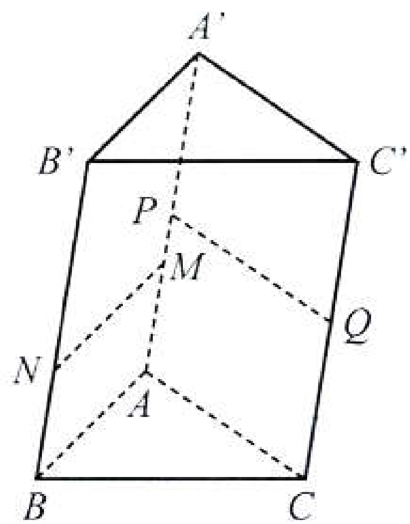
Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC}=120^0$. Các điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và BB' thoả mãn $MN // AB$, các điểm P, Q lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và CC' (P khác M) thoả mãn $PQ // AC$ (Hình 2). Tính các góc sau:

a) (AB, AC);

b) $\left(AB, B'C'\right)$;

c) (MN, PQ).

Giải



Hình 2

a) Trong mặt phẳng (ABC), vì $\widehat{BAC}=120^{\circ}$ nên $(AB, AC)=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}$.

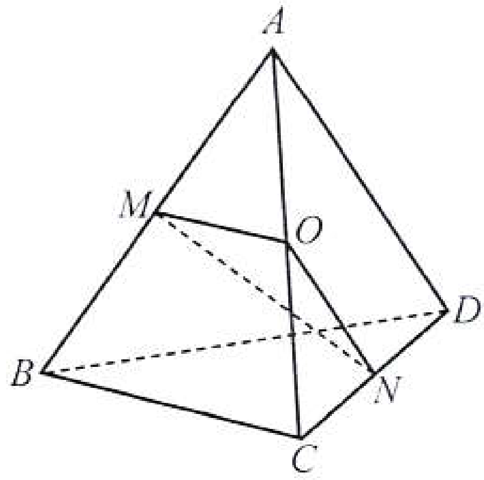
b) Vì tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\dfrac{180^{\circ}-\widehat{BAC}}{2}=\dfrac{180^{\circ}-120^{\circ}}{2}=30^{\circ}$.

Ta có $BC // B'C'$ nên $\left(AB, B'C'\right)=(AB, BC)=\widehat{ABC}=30^{\circ}$.

c) Vì $MN // AB, PQ // AC$ nên $(MN, PQ)=(AB, AC)=60^{\circ}$.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc giữa hai đường thẳng AD và BC, biết $MN=a\sqrt{3}$ và $AD=BC=2a$.

Lời giải

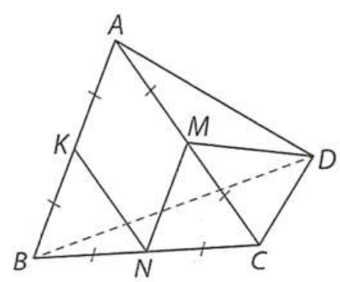


Hình 53

Gọi O là trung điểm AC.
Vì OM, ON lần lượt là đường trung bình của hai tam giác ABC, CAD nên $OM // BC, ON // AD$ và $OM = \frac{1}{2}CB = a, ON = \frac{1}{2}AD = a.$Khi đó $(AD, BC) = (ON, OM)$.
Xét tam giác OMN có:
$\cos\widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2a \cdot a} = -\frac{1}{2}$ nên $\widehat{MON} = 120^\circ$.
Suy ra $(AD, BC) = (ON, OM) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60°.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC và AB. Tính góc giữa đường thẳng MN và BD; góc giữa đường thẳng KN và MD.

Giải. (H.7.1)

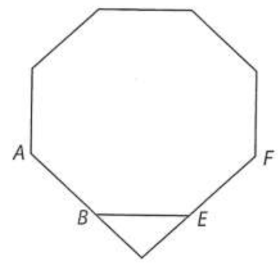


Hình 7.1

Vì $MN // AB$ nên góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng góc giữa hai đường thẳng AB và BD, mà tam giác ABD là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng AB và BD bằng 60°.
Do đó $(MN, BD) = (AB, BD) = 60^\circ$.
Vì $NK // AC$ nên góc giữa hai đường thẳng NK và MD bằng góc giữa hai đường thẳng AC và MD, mà tam giác ACD là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng AC và MD bằng 90°. Do đó $(NK, MD) = (AC, MD) = 90^\circ$.

Câu 6. Tháp Phước Duyên ở Chùa Thiên Mụ (Huế) cao bảy tầng, sàn của mỗi tầng đều là hình bát giác đều. Hãy tính góc giữa hai cạnh AB và CD được thể hiện trên hình sau:

Giải. (H.7.3)

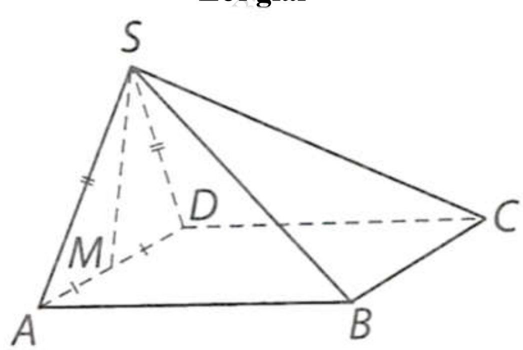


Hình 7.3

Ta có: $CD//EF$ nên $(AB,CD)=(AB,EF)$, với AB, EF là hai cạnh của một hình bát giác đều. Góc ngoài của một bát giác đều bằng $\frac{360^{\circ}}{8}=45^{\circ}$ nên $(AB,EF)=90^{\circ}$, suy ra $(AB,CD)=90^{\circ}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAD là tam giác đều và M là trung điểm của cạnh AD. Tính góc giữa hai đường thẳng BC và SA; BC và SM.

Lời giải

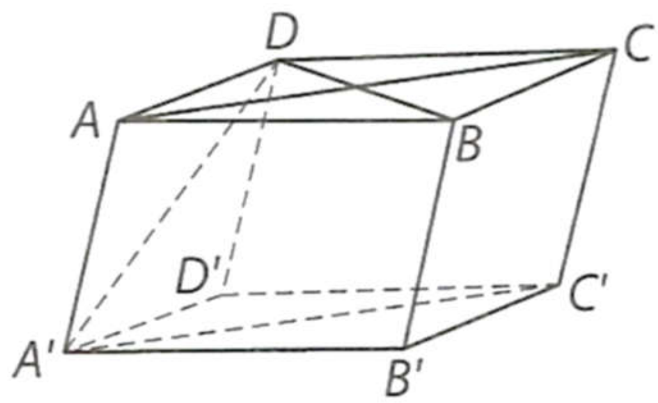


Hình 7.21

Vì $BC//AD$ nên $(BC,SA)=(AD,SA)=\widehat{SAD}=60^{\circ}$ và $(BC,SM)=(AD,SM)=90^{\circ}$.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và góc $A'AD$ bằng 120°. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: $A'C'$ và BD; AD và BB'; $A'D$ và BB'.

Lời giải



Hình 7.22

Vì $ABCD$ là hình thoi và $A'C'//AC$ nên $(A'C',BD)=(AC,BD)=90^0$.

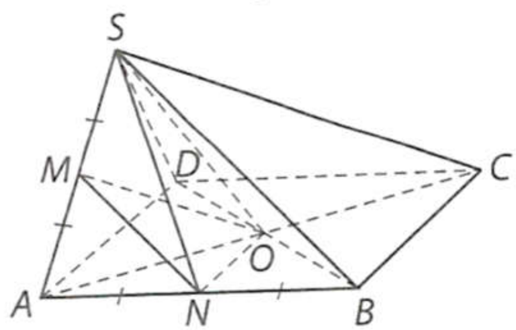
Vì $BB'//AA'$ nên $(AD,BB')=(AD,AA')=180^0-\widehat{A'AD}=60^0$ và $(A'D,BB')=(A'D,AA')=\widehat{AA'D}=30^0$.

Câu 9. Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SA,AB.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: MN và $SD;MO$ và SB.

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng SN và BC.

Lời giải



Hình 7.24

a) Ta có: $BD^2=SB^2+SD^2=2a^2$ nên ΔSBD vuông tại S, mà $MN//SB$, suy ra $(MN,SD)=(SB,SD)=90^\circ$.

Với O là giao điểm của AC và BD thì $MO//SC$.

Khi đó $(MO,SB)=(SC,SB)=\widehat{BSC}=60^\circ$.

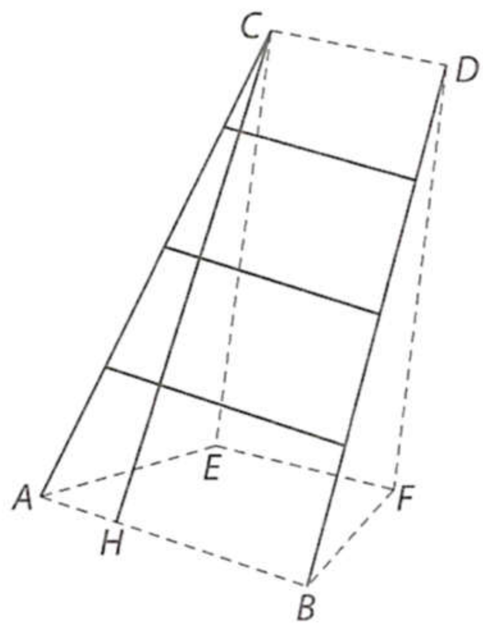
b) Vì $ON//BC$ nên $(SN,BC)=(SN,ON)=\widehat{SNO}$.

Ta có $SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2};ON=\dfrac{a}{2}$ và tam giác SNO

vuông tại O nên $\tan\widehat{SNO}=\dfrac{SO}{ON}=\sqrt{2}$. Vậy $\tan(SN,BC)=\sqrt{2}$.

Câu 10. Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao $6m$, hai chân thang cách nhau $80cm$, hai ngọn thang cách nhau $60cm$. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Hình 7.25

Gọi A, B là hai điểm tại hai vị trí chân thang và C, D là hai điểm tại hai vị trí ngọn thang, EF là đường chân tường.

Ta có $EF / / AB$ nên $(EF, AC)=(AB, AC)=\widehat{BAC}$.

Kẻ CH vuông góc với AB tại H, khi đó

$AH=\frac{AB-CD}{2}=10(cm)=0,1(m)$. Tam giác ACH vuông tại H nên

$\cos \widehat{CAH}=\frac{AH}{AC}=\frac{0,1}{6}=\frac{1}{60}$,

suy ra $\widehat{CAH} \approx 89,05^{\circ}$.

Vậy góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang bằng khoảng $89,05^{\circ}$.

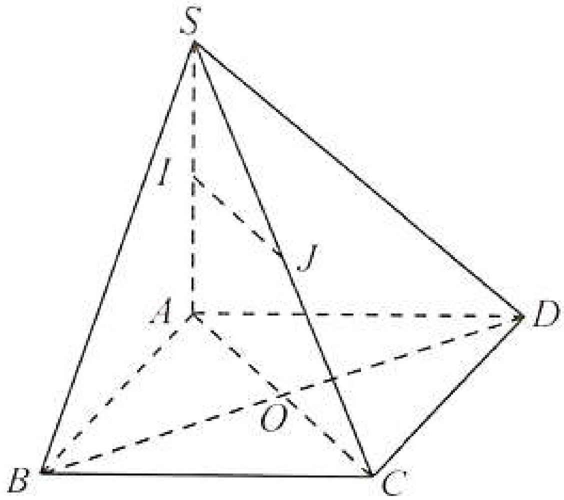
Câu 11. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, SA=a\sqrt{3}, SA \perp BC$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) IJ và BD;

b) SD và BC.

Giải



Hình 2

a) ΔSAC có I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC, suy ra IJ là đường trung bình của ΔSAC, suy ra $IJ // AC$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vậy $(IJ, BD) = (AC, BD) = \widehat{AOB} = 90^\circ$.

b) Ta có $AD // BC$, suy ra $(SD, BC) = (SD, AD)$.

Mặt khác: $\begin{cases} SA \perp BC \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow SA \perp AD$.

Vậy ΔSAD vuông tại A.

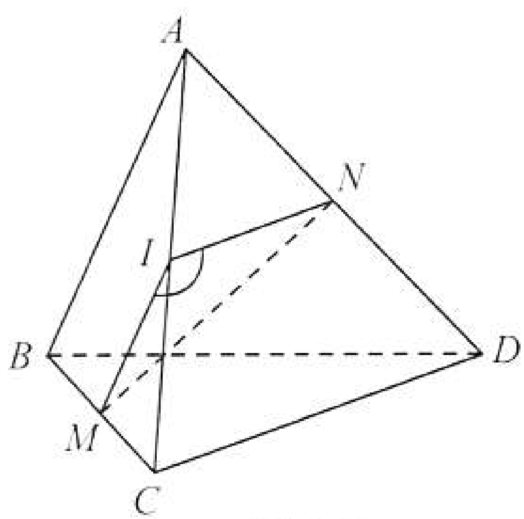
Suy ra $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{SDA} = 60^\circ$.

Vậy $(SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA} = 60^\circ$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung diểm của BC, AD. Cho biết $MN = a\sqrt{3}$, tính góc giữa AB và CD.

Giải



Hình 3

Gọi I là trung điểm AC.

ΔABC có I, M lần lượt là trung điểm của AC, BC, suy ra IM là đường trung bình của ΔABC, suy ra $IM // AB$ và $IM = \frac{1}{2}AB = a$.

Tương tự, ta có $IN // CD$ và $IN = a$.

Ta có $IM // AB$ và $IN // CD$, suy ra $(AB, CD) = (IM, IN)$. Áp dụng định lí côsin trong tam giác MIN :

$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2 \cdot IM \cdot IN \cdot \cos \widehat{MIN}$

$\Rightarrow 3a^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \widehat{MIN}$

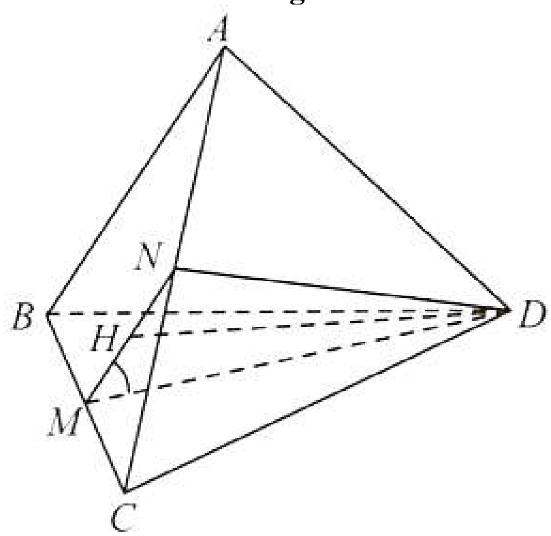
$\Rightarrow \cos \widehat{MIN} = \frac{3a^2 - 2a^2}{-2a^2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ$.

Vậy $(AB, CD) = (IM, IN) = 180^\circ - \widehat{MIN} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Câu 13. Cho tứ diện đều $ABCD, M$ là trung điểm của cạnh BC. Tính góc giữa AB và DM.

Lời giải



Hình 1

Đặt $2a$ là độ dài cạnh của tứ diện đều.

Gọi N là trung điểm của AC, H là trung điểm của MN, ta có:

$MN // AB$, suy ra $(AB, DM) = (MN, DM)$.

$DM = DN = a\sqrt{3}, MN = a$ nên ΔDMN cân tại D.

Suy ra $MH = \frac{a}{2}$ và $DH \perp MN$.

$\cos \widehat{DMN} = \frac{MH}{MD} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \widehat{DMN} \approx 73,2^\circ$.

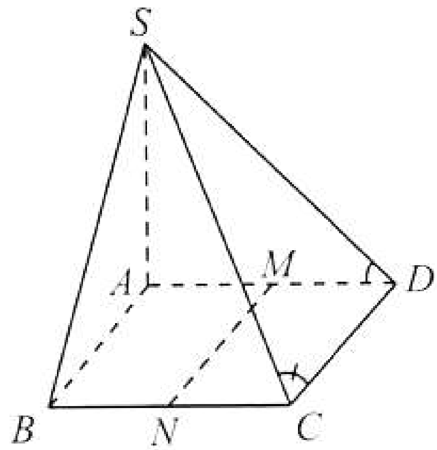
Vậy $(AB, DM) = (MN, DM) = \widehat{DMN} \approx 73,2^\circ$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a, SA = a\sqrt{3}, SA \perp AC$, $SA \perp BC, \widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) SD và BC.

b) MN và SC.

Lời giải



Hình 2

a) Vì $AD//BC$ nên $(SD,BC)=(SD,AD)$.

Vì $SA\perp BC$ và $AD//BC$ nên $SA\perp AD$ hay tam giác SAD vuông tại A.

Do đó $(SD,BC)=(SD,AD)=\widehat{SDA}=60^\circ$.

b) Vì $MN//CD$ nên $(SC,MN)=(SC,CD)$.

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{A}=120^\circ$ nên ACD là tam giác đều cạnh a.

Xét các tam giác vuông SAC,SAD có:

$SC=\sqrt{AC^2+SA^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$ và $SD=\sqrt{AD^2+SA^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác SCD :

$\cos\widehat{SCD}=\dfrac{SC^2+CD^2-SD^2}{2\cdot SC\cdot CD}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\widehat{SCD}\approx 75,5^\circ$.

Vậy $(SC,MN)=(SD,AD)=\widehat{SCD}=75,5^\circ$.

Câu 15. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M,N,I,J lần lượt là trung điểm của SA,SD,SC và BC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) IJ và DC;

b) MN và IJ.

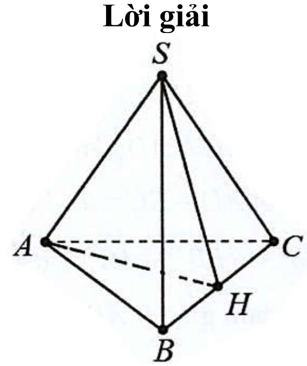
Lời giải

a) Ta có $IJ//SB,DC//AB$, suy ra $(IJ,DC)=(SB,AB)=\widehat{SBA}=60^\circ$.

b) Ta có $MN//AD//BC,IJ//SB$, suy ra $(MN,IJ)=(BC,SB)=\widehat{SBC}=60^\circ$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=AC,\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải



Cách 1:

Ta có: $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AS}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=AS\cdot AC\cdot\cos\widehat{SAC}-AS\cdot AB\cdot\cos\widehat{SAB}=0$

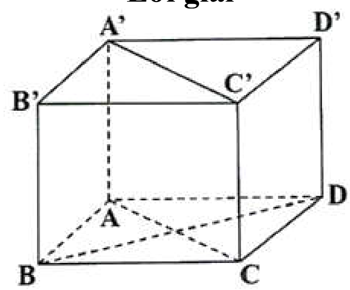
Do đó số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng 90.

Cách 2:

Vì $AB=AC,\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$ nên $\Delta SAC=\Delta SAB$, suy ra $SB=SC$, do đó hai tam giác ABC và SBC là tam giác cân. Chứng minh tương tự bài 1 (trang 194) ta được $SA\perp BC$.

Câu 17. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD.

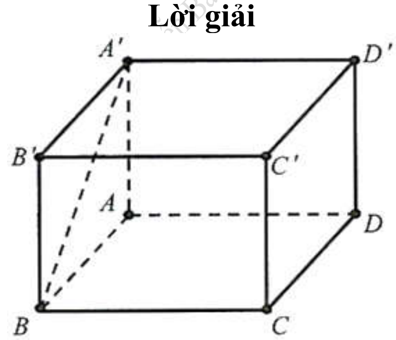
Lời giải



$AC//A'C'$ nên $\left(A'C';BD\right)=(AC;BD)=90$.

Câu 18. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng BA' và CD.

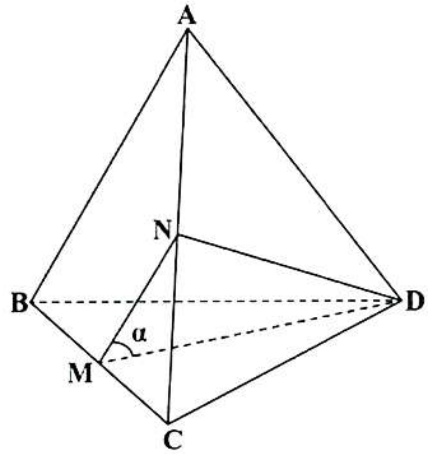
Lời giải



Có $CD//AB\Rightarrow\left(BA',CD\right)=\left(BA',BA\right)=\widehat{ABA'}=45^{\circ}$ (do $ABB'A'$ là hình vuông).

Câu 19. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Côsin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM bằng?

Lời giải



Kẻ $MN//AB$, có MN là đường trung bình của ΔABC.

Suy ra $MN=\dfrac{AB}{2}$.

Do đó: $(AB,DM)=(MN,DM)=\widehat{DMN}=\alpha$.

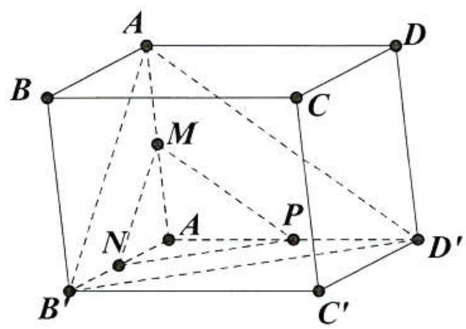
Gọi tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a.

$MN=\dfrac{a}{2}, DN=DM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{MN^2+DM^2-DN^2}{2\cdot MN\cdot DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của cạnh AA' và $A'B'$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và BD.

Lời giải



Gọi P là trung điểm cạnh AD'.

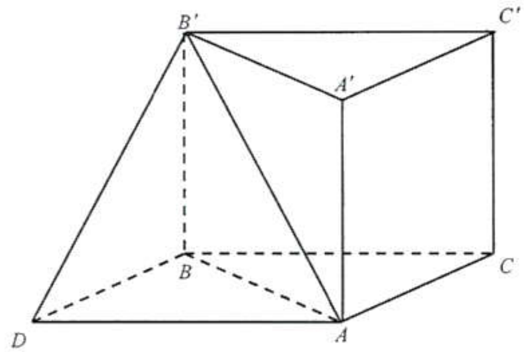
Vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a nên $AB'=B'D'=D'A=a\sqrt{2}$.

Suy ra $MN=NP=PM=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow (MN,BD)=(MN,NP)=60^\circ$.

Câu 21. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC\cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^\circ$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$ và $AA'\perp AB, AA'\perp AC$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC.

Lời giải



Trong (ABC), kẻ AD sao cho $ACBD$ là hình bình hành.

Ta có: $BC//AD$ nên $\left(AB';BC\right)=\left(AB';AD\right)=\widehat{B'AD}$.

Ta có: $AD=BC=a\sqrt{3}, AB'=\sqrt{AB^2+AB'^2}=a\sqrt{3}$,

$DB'=\sqrt{BB'^2+AC^2}=a\sqrt{3}$.

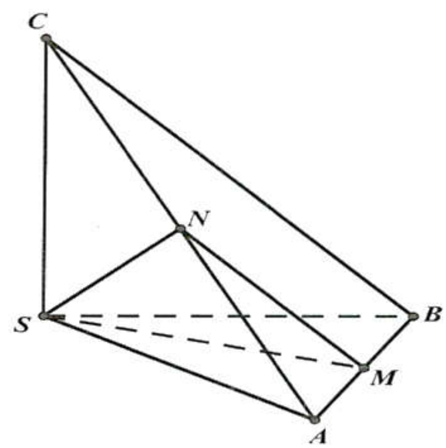
Vậy tam giác $B'AD$ đều nên $\widehat{B'AD}=60^\circ$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=SB=SC=a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC.

Lời giải

Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó góc giữa SM và BC bằng góc giữa SM và MN.

Ta có: $AB=BC=CA$



$SM=\frac{1}{2}AB$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

$SN=\frac{1}{2}AC$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

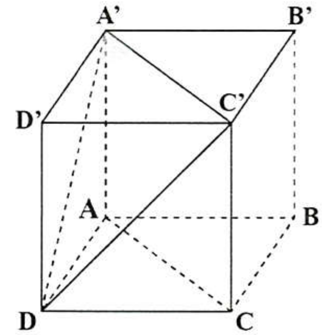
$MN=\frac{1}{2}BC$.

Suy ra $SM=MN=SN$ hay tam giác SMN đều.

Do đó $(SM;BC)=\widehat{SMN}=60^\circ$.

Câu 23. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$?

Lời giải

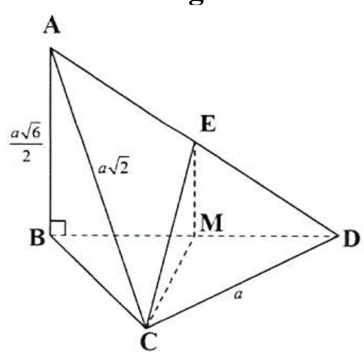


Ta có: $\left(AC, A'D\right) = \left(A'C', A'D\right) = \widehat{DA'C'} = 60^\circ$.

Vì $A'D = A'C' = C'D$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CE ?

Lời giải



Ta có: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, BD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm $BD \Rightarrow ME // AB$,

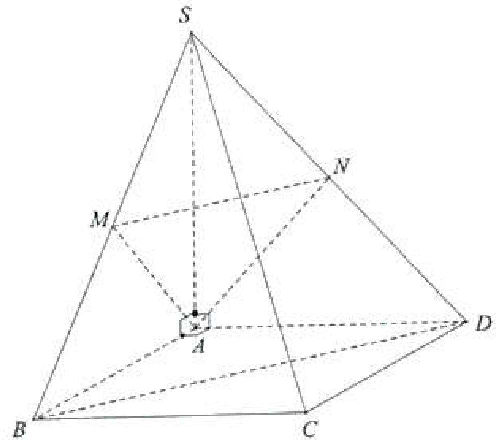
$ME = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}, CM = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

$\Rightarrow \Delta CME$ vuông cân tại M.

Ta có $(AB, CE) = (EM, CE) = \widehat{CEM} = 45^\circ$.

Câu 25. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với AB và $AD, SA = a$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính góc giữa AM và BD.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của SD khi đó ta có $MN//BD \Rightarrow (AM,BD)=(AM,MN)$.

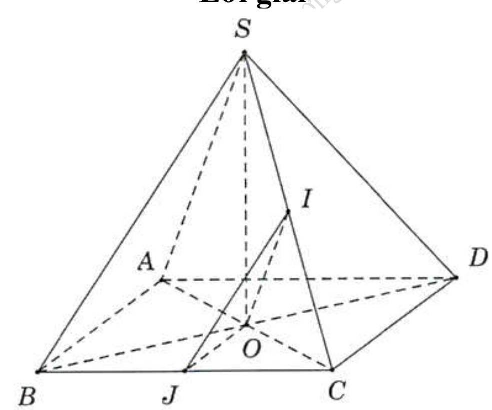
Theo giả thiết ta có: $AM=\frac{1}{2}SB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$AN=\frac{1}{2}SD=\frac{a\sqrt{2}}{2}; MN=\frac{1}{2}BD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \Delta AMN$ đều $\Rightarrow \widehat{AMN}=60^{\circ}$. Vậy $(AM,BD)=60^{\circ}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ,CD) bằng ?

Lời giải



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$

$\Rightarrow OJ$ là đường trung bình của ΔBCD. Suy ra $\begin{cases} OJ//CD \\ OJ=\frac{1}{2}CD \end{cases}$.

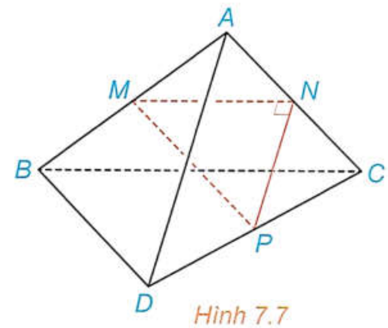
Vì $CD//OJ \Rightarrow (IJ,CD)=(IJ,OJ)$.

Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ=\frac{1}{2}SB=\frac{a}{2} \\ OJ=\frac{1}{2}CD=\frac{a}{2} \\ IO=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta IOJ$ đều.

Vậy $(IJ,CD)=(IJ,OJ)=\widehat{IJO}=60^{\circ}$.

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Câu 27. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho tam giác MNP vuông tại N và một điểm A nằm ngoài mặt phẳng (MNP). Lần lượt lấy các điểm B, C, D sao cho M, N, P tương ứng là trung điểm của AB, AC, CD (H.7.7).

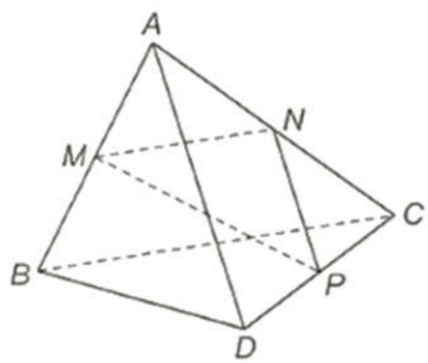


Hình 7.7

Chứng minh rằng AD và BC vuông góc với nhau và chéo nhau.

Lời giải

Vì $AD//NP, BC//MN$ và $(MN, NP) = 90^\circ$ nên $(AD, BC) = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BC$.



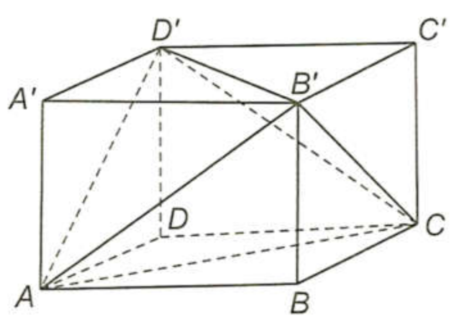
Hình 7.2

Nếu $D \in (ABC)$ thì $A \in (MNP)$ (vô lí).
Vậy $D \notin (ABC)$ nên AD, BC chéo nhau.

Câu 28. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng tứ diện $ACB'D'$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Lời giải

Vì $ABB'A'$ là hình thoi nên $AB' \perp A'B$, mà $A'B//CD' \Rightarrow AB' \perp CD'$.



Hình 7.3

Tương tự cho các cặp còn lại.

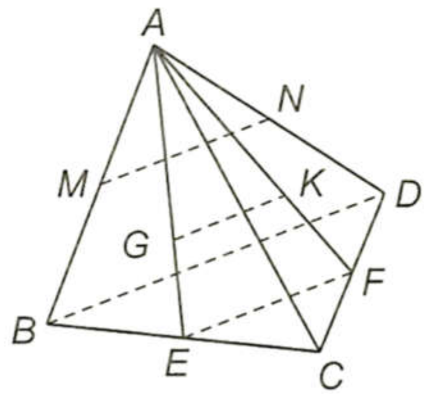
Câu 29. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CBD} = 90^\circ$.

a) Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AD. Chứng minh rằng MN vuông góc với BC.

b) Gọi G,K tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC,ACD. Chứng minh rằng GK vuông góc với BC.

Lời giải

a) Vì $MN//BD, BD\perp BC \Rightarrow MN\perp BC$.



Hình 7.4

b) $GK//EF, EF//BD \Rightarrow GK//BD, BD\perp BC \Rightarrow GK\perp BC$.

Câu 30. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện: hoành, quá giang, xà cái, rui, cột tương ứng được đánh số $1,2,3,4,5$ như trong Hình 7.8 , những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?

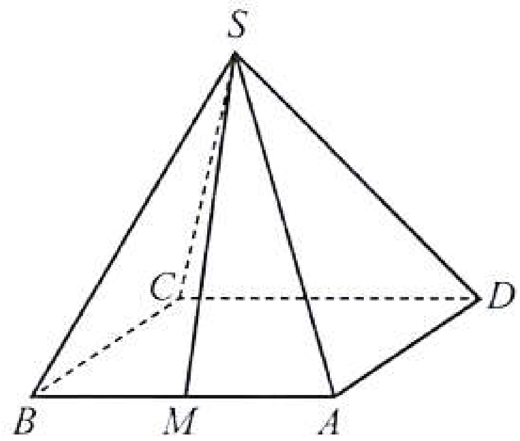
Hình 7.8

Lời giải

Những cặp đường thẳng sau vuông góc với nhau: hoành (1) và quá giang (2); hoành (1) và rui (4); hoành (1) và cột (5); quá giang (2) và xà cái (3); quá giang (2) và cột (5); xà cái (3) và rui (4); xà cái (3) và cột (5).

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, SAB là tam giác cân tại S. Gọi M là trung điểm AB (Hình 3). Chứng minh rằng $SM\perp CD$.

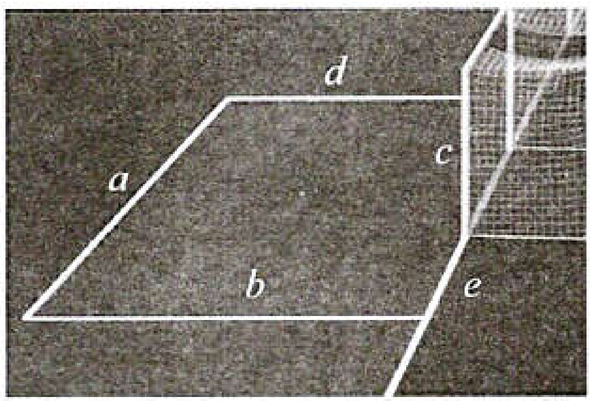
Giải



Hình 3

Vì $SA = SB, MA = MB$ nên SM là đường trung trực của AB trong (SAB). Suy ra $SM \perp AB$.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD$.
Từ đó, suy ra $SM \perp CD$.

Câu 32. Hình 5 gợi nên hình ảnh một số cặp đường thẳng vuông góc với nhau. Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng vuông góc với nhau.



Hình 5

Lời giải

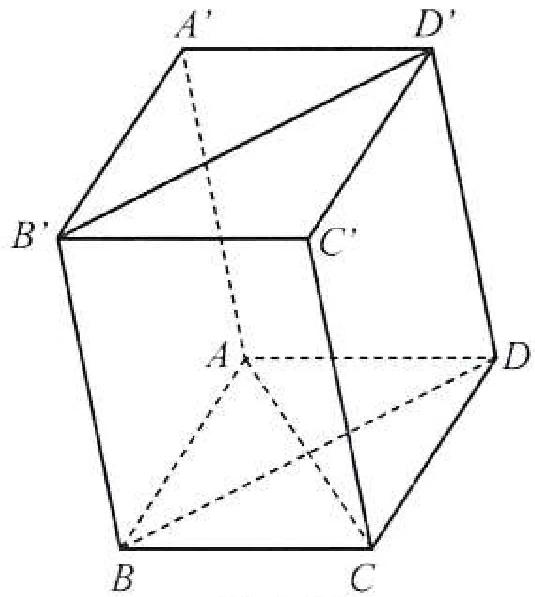
Ba cặp đường thẳng vuông góc có thể là a và b; b và c; c và d.

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông.

a) Chứng minh rằng $AB \perp A'D'$ và $AC \perp B'D'$.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$.

Lời giải

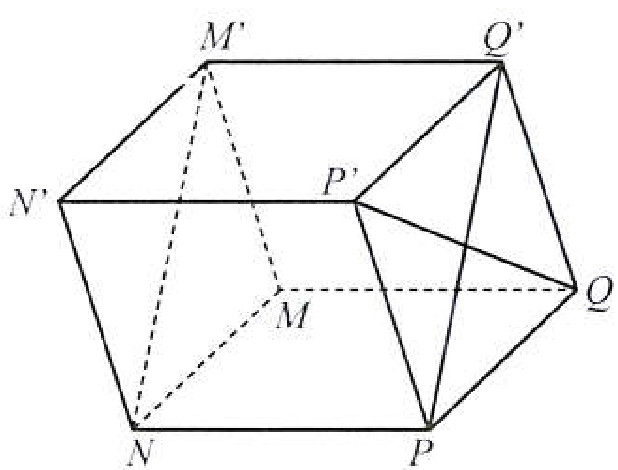


Hình 51

a) Vì $ABB'A'$ là hình bình hành nên $AB//A'B'$.
Do $A'B'C'D'$ là hình vuông nên $A'D' \perp A'B'$.
Từ đó, suy ra $AB \perp A'D'$.
Vì $BDD'B'$ có $BB'//DD'$ và $BB' = DD'$ nên $BDD'B'$ là hình bình hành, suy ra $BD//B'D'$. Mà $AC \perp BD$ do $ABCD$ là hình vuông. Như vậy, ta có $AC \perp B'D'$.
b) Xét hình vuông $ABCD$ có
$(AC, AB) = \widehat{CAB} = 45^\circ$.
Mà $AB//A'B'$ nên $\left(AC, A'B'\right) = (AC, AB) = 45^\circ$.
Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$ bằng 45°.

Câu 34. Cho hình lăng trụ $MNPQ \cdot M'N'P'Q'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng $M'N \perp P'Q$.

Lời giải



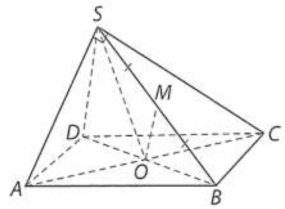
Hình 52

Vì $PQQ'P'$ là hình thoi (do các cạnh bằng nhau) nên $P'Q \perp PQ'$.
Do $NP = MQ = M'Q'$ và $NP//MQ//M'Q'$ nên $NPQ'M'$ là hình bình hành, suy ra $M'N//PQ'$.

Từ đó ta có $M'N \perp P'Q$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và tam giác SAC vuông tại S. Gọi M là trung điểm của cạnh SB. Chứng minh rằng đường thẳng OM vuông góc với đường thẳng SB.

Giải. (H.7.2)

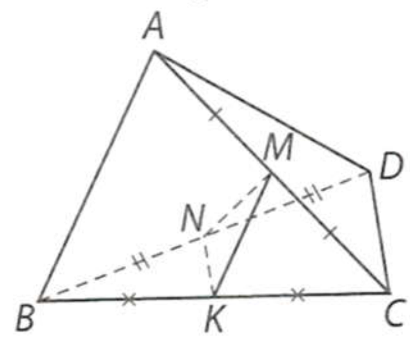


Hình 7.2

Ta có tam giác SAC vuông tại S và O là trung điểm của AC nên $SO=\frac{1}{2}AC$. Ta lại có $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC=BD$, suy ra $SO=\frac{1}{2}BD$, mà O là trung điểm của BD nên tam giác SBD vuông tại S hay $SD\perp SB$. Vì $OM//SD$ và $SD\perp SB$ nên $OM\perp SB$.

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Biết $MN=a\sqrt{3}; AB=2\sqrt{2}a$ và $CD=2a$. Chứng minh rằng đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng CD.

Lời giải



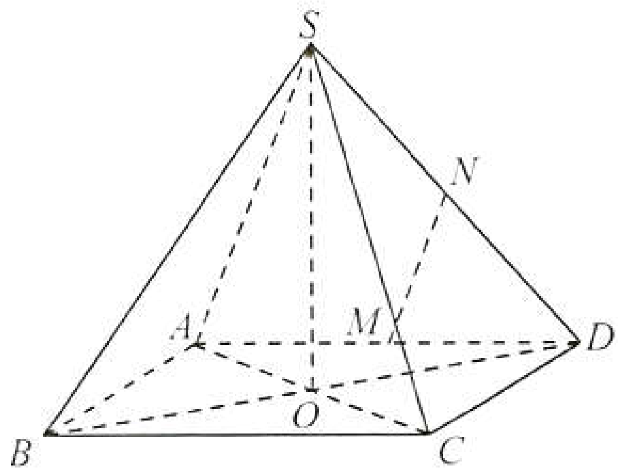
Hình 7.23

Lấy K là trung điểm của cạnh BC, ta có: NK và MK lần lượt là đường trung bình của tam giác BCD và tam giác ABC nên $NK=a$ và $MK=a\sqrt{2}$.

Do đó, $MN^2=3a^2=MK^2+NK^2$ suy ra tam giác MNK vuông tại K, hay $MK\perp NK$ mà $MK//AB$ và $NK//CD$ nên $(AB,CD)=(MK,NK)=90^0$, hay $AB\perp CD$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD,SD. Chứng minh rằng $MN\perp SC$.

Giải



Hình 4

ΔSAD có M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD, suy ra MN là đường trung bình của ΔSAD, suy ra $MN // SA$.

Vậy $(MN, SC) = (SA, SC)$.

ΔABC vuông tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSAC, nhận thấy: $AC^2 = SA^2 + SC^2$.

Theo định lí Pythagore đảo, ΔSAC vuông tại S.

Suy ra $\widehat{ASC} = 90^\circ$ hay $(MN, SC) = \widehat{ASC} = 90^\circ$.

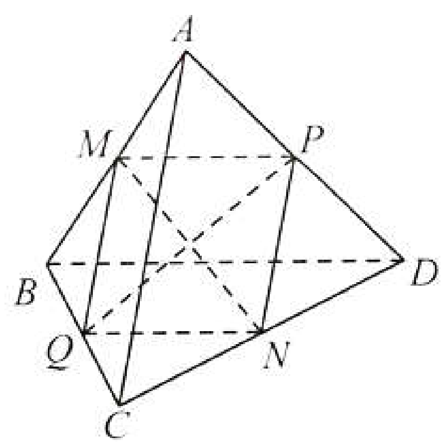
Vậy $MN \perp SC$.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD, AC = BD, AD = BC$.

a) Chứng minh đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Chứng minh hai đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với nhau.

Lời giải



Hình 3

a) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các canh AB, CD, AD, BC.

Ta có $\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.c.c), suy ra $AN = BN$, suy ra ΔNAB cân tại N. Mà M là trung điểm của AB, suy ra $NM \perp AB$.

Tương tự ta có $NM \perp CD$.

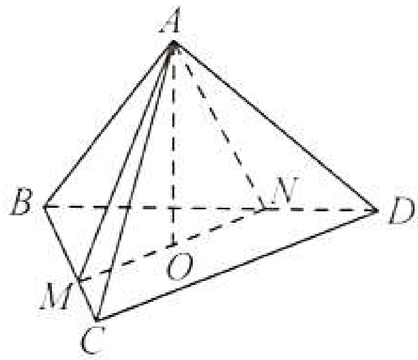
b) Ta có $MQ = PN = \dfrac{AC}{2}, MP = QN = \dfrac{BD}{2}, AC = BD$.

Suy ra $MQ = PN = MP = QN$.

Vậy tứ giác $MPNQ$ là hình thoi, suy ra $MN \perp PQ$.

Câu 39. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh hai đường thẳng OA và CD vuông góc với nhau.

Lời giải

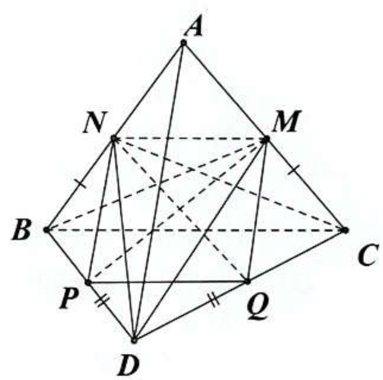


Hình 4

Qua O vẽ đường $MN // CD (M \in BC, N \in BD)$. Ta có $OM = ON, AM = AN$, suy ra ΔAMN cân tại A, suy ra $AO \perp MN$. Mà $MN // CD$ nên $AO \perp CD$.

Câu 40. Cho tứ diện $ABDC$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Chứng minh: $BC \perp AD$.

Lời giải



Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AB, BD, CD.

Dễ dàng chứng minh được $MNPQ$ là hình bình hành.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta MBD = \Delta NCD$ (c-c-c).

Suy ra hai trung tuyến tương ứng $NQ = MP$.

Suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MN \perp MQ$. Mà $AD // MQ$ và $BC // MN$ nên $AD \perp BC$.

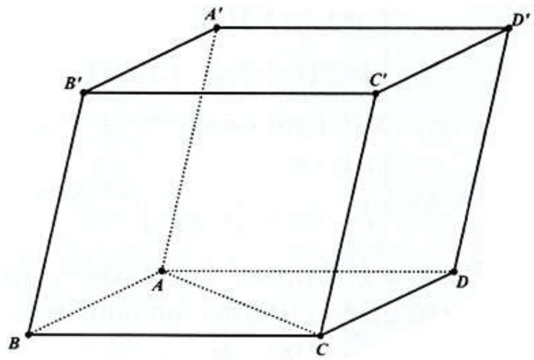
Câu 41. Trong hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh:

a) $A'C' \perp BD$.

b) $A'B \perp DC'$.

c) $BC' \perp A'D$.

Lời giải



Vì hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác $ABCD$, $A'B'BA, B'C'CB$ đều là hình thoi.

$AC \perp BD$ mà $AC // A'C' \Rightarrow A'C' \perp BD$.

$A'B \perp AB'$ mà $AB' // DC' \Rightarrow A'B \perp DC'$.

$BC' \perp B'C$ mà $B'C // A'D \Rightarrow BC' \perp A'D$.