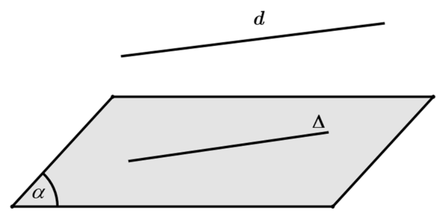
BÀI 12. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

- CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1. BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

$$\begin{cases} d // \Delta \\ d \not\subset (\alpha) \\ \Delta \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d // (\alpha).$$



Câu 1. **(SGK-KNTT 11- Tập 1)** Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P).
b) Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau.
c) Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P).
d) Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b.

Lời giải

a) Mệnh đề a) là mệnh đề đúng vì nếu a và (P) có điểm chung thì a cắt (P) hoặc a nằm trong (P) nên a không song song với ((P).
b) Mệnh đề b) là mệnh đề sai vì nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau hoặc a nằm trong (P).
c) Mệnh đề c) là mệnh đề sai vì a có thể nằm trong (P).
d) Mệnh đề d) là mệnh đề sai vì a và b có thể cắt nhau.

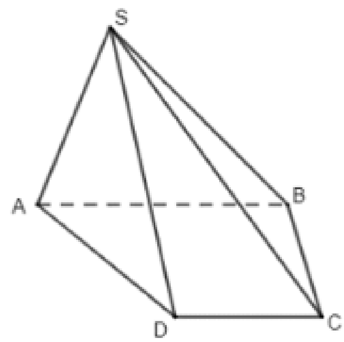
Câu 2. **(SGK-KNTT 11- Tập 1)** Bạn Nam quan sát thấy dù cửa ra vào được mở ở vị trí nào thì mép trên của cửa luôn song song với một mặt phẳng cố định. Hãy cho biết đó là mặt phẳng nào và giải thích tại sao.

Lời giải

Cánh cửa có dạng hình chữ nhật nên mép trên cửa song song với mép dưới cửa. Mà mép dưới của cửa luôn tạo với mặt sàn một đường thẳng, do đó mép trên của cửa luôn song song với mặt sàn nhà.

Câu 3. **(SGK-KNTT 11- Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB//CD)$. Hai đường thẳng SD và AB có chéo nhau hay không? Chỉ ra mặt phẳng chứa đường thẳng SD và song song với AB.

Lời giải



Nếu hai đường thẳng SD và AB không chéo nhau thì SD và AB đồng phẳng hay bốn điểm S, A, B, D đồng phẳng, trái với giả thiết $S.ABCD$ là hình chóp. Do đó, hai đường thẳng SD và AB chéo nhau.

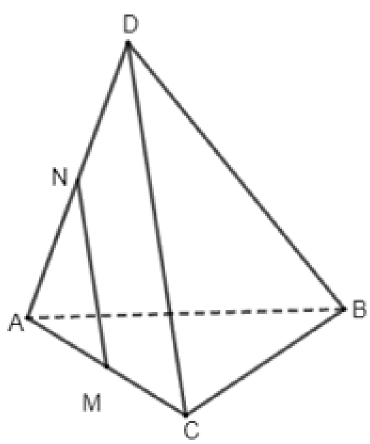
Ta có đường thẳng AB không nằm trong mặt phẳng (SCD) và có $AB//CD$ (giả thiết), đường thẳng CD nằm trong mặt phẳng (SCD), do đó đường thẳng AB song song với mặt phẳng (SCD). Mà mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng SD. Vậy mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng SD và song song với AB.

Câu 4. **(SGK-KNTT 11- Tập 1)** Cho hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AD.

a) Đường thẳng AM có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.

b) Đường thẳng MN có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.

Lời giải



a) Vì M là trung điểm của cạnh AC nên đường thẳng AM chứa điểm C.

Lại có điểm C thuộc mặt phẳng (BCD) và điểm A không thuộc mặt phẳng (BCD) (do bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng). Do đó, đường thẳng AM cắt mặt phẳng (BCD) tại điểm C. Vậy đường thẳng AM không song song với mặt phẳng (BCD).

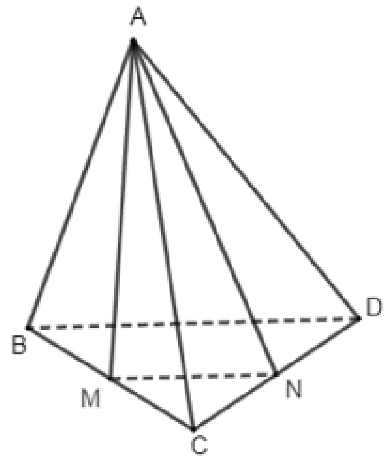
b) Vì M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AD nên MN là đường trung bình của tam giác ACD, suy ra $MN /\!/ CD$.

Lại có đường thẳng CD nằm trong mặt phẳng (BCD) và đường thẳng MN không nằm trong mặt phẳng (BCD).

Vậy đường thẳng MN song song với mặt phẳng (BCD).

Câu 5. **(SGK-KNTT 11- Tập 1)** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC, CD. Chứng minh rằng đường thẳng BD song song với mặt phẳng (AMN).

Lời giải

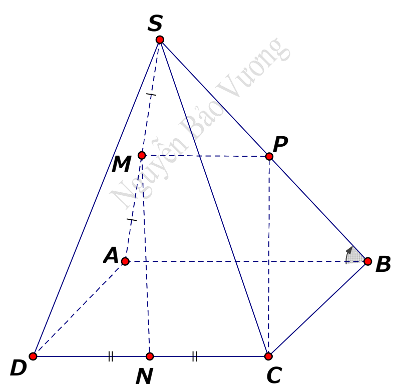


Vì M , N lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC, CD nên MN là đường trung bình của tam giác BCD, suy ra $MN \parallel BD$. Mà đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (AMN).

Do đó, đường thẳng BD song song với mặt phẳng (AMN).

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, $ABCD$ là hình bình hành. M, N là trung điểm của SA, CD. Chứng minh $MN // \left(SBC\right)$.

Lời giải



*) Trong ΔSAB: Gọi P là trung điểm của SB khi đó

Ta có MP là đường trung bình $\Rightarrow MP // = \frac{1}{2}AB$ (1)

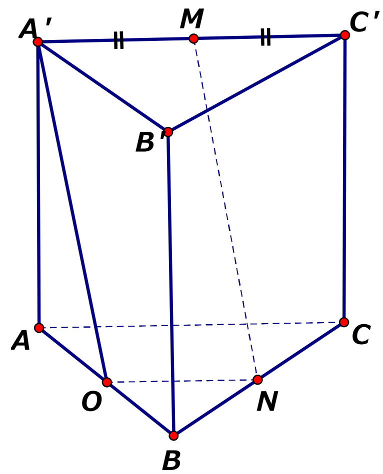
*) Lại có $AB // = CD \Rightarrow CN // = \frac{1}{2}AB$ (2) (Do N là trung điểm của CD)

*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow MP // = CN \Rightarrow$ Tứ giác $MNCP$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN // CP \subset \left(SBC\right) \Rightarrow MN // \left(SBC\right)$. (Điều phải chứng minh).

Câu 7. Lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M, N là trung điểm của $A'C', BC$. Chứng minh $MN // \left(ABB'A'\right)$

Lời giải



*) Trong ΔABC: Gọi O là trung điểm của AB;

Khi đó ON là đường trung bình $\Rightarrow ON \,//=\dfrac{1}{2}AC$ (1)

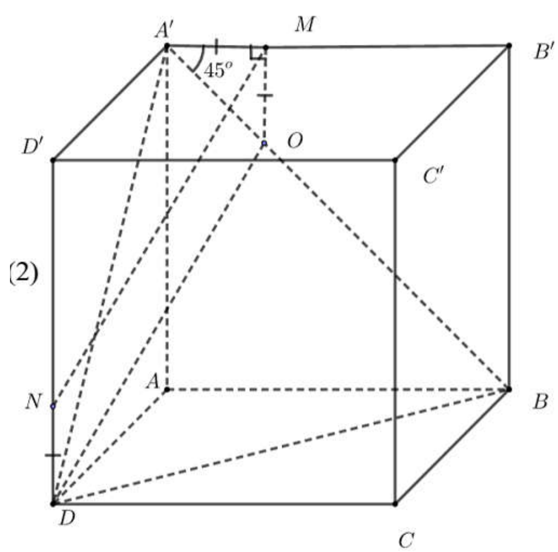
*) $ACC'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow AC \,//= A'C' \Rightarrow A'M \,//=\dfrac{1}{2}AC$ (2)

*) $ON \,//= A'M \Rightarrow$ Từ giác $A'ONM$ là hình bình hành

$\Rightarrow \begin{cases} MN \,//\, A'O \\ A'O \subset (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, (ABB'A')$.

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. M, N thuộc hai đoạn $A'B'$ và DD' để $A'M = DN$. Chứng minh song song với một mặt phẳng cố định.

Lời giải

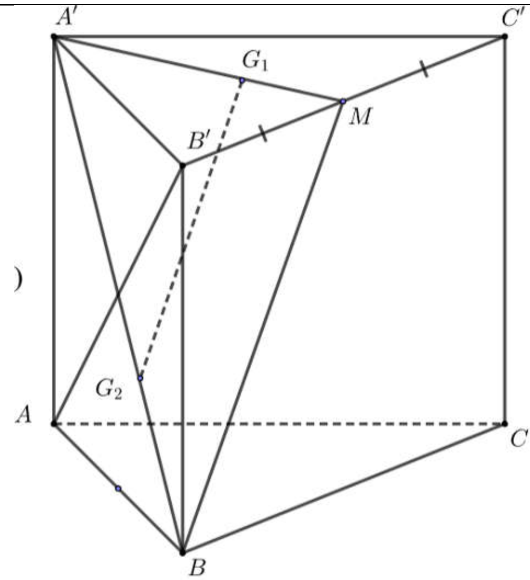


Gọi $O \in A'B$ sao cho $MO//BB'$. Khi đó $\dfrac{A'M}{A'B'} = \dfrac{MO}{BB'}$.

Mà theo giả thiết $A'M = DN$, $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên ta có : $\begin{cases} MO = DN \\ MO//DN \end{cases}$ nên tứ giác $MODN$ là hình bình hành. Do đó $MN//DO$, $DO \subset (A'DB) \Rightarrow MN//(A'DB)$.

Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác $A'B'C'$ và ABB'. Chứng minh rằng $G_1G_2//(BCC'B')$.

Lời giải



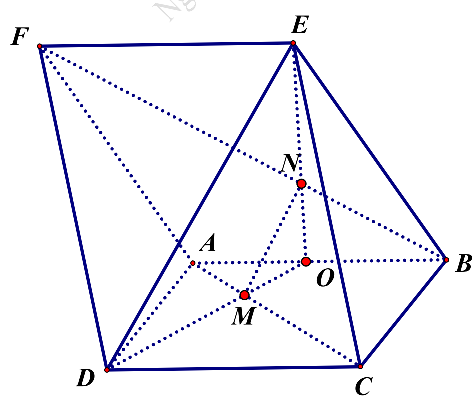
Gọi M là trung điểm của $B'C'$. G_1 là trọng tâm $\Delta A'B'C'$ nên ta có : $\frac{A'G_1}{A'M}=\frac{2}{3}$ (1).

G_2 là trọng tâm $\Delta ABB'$ nên $\frac{BG_2}{\frac{1}{2}A'B}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow \frac{BG_2}{A'B}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{A'G_2}{A'B}=\frac{2}{3}$ (2).

Từ (1), (2) ta có : $\frac{A'G_1}{A'M}=\frac{A'G_2}{A'B}\Rightarrow G_1G_2//BM$, $BM\subset(BCC'B')\Rightarrow G_1G_2//(BCC'B')$.

Câu 10. Cho hai hình bình hành $ABCD$, $ABEF$ không đồng phẳng. $M\in AC$, $N\in BF$ để $\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BF}=\frac{1}{3}$. Chứng minh $MN//(CDEF)$.

Lời giải



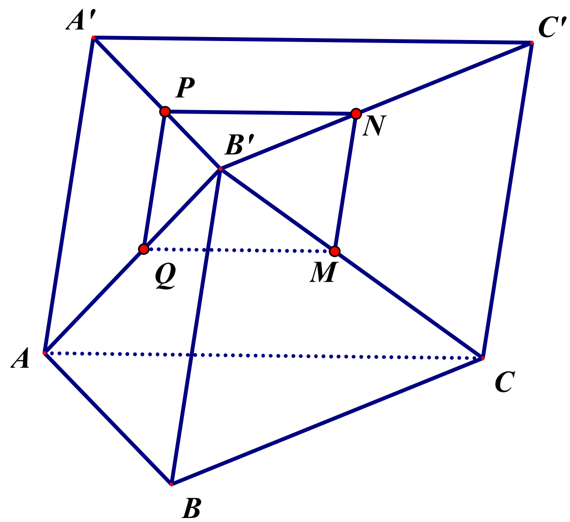
Dựng $O=DM\cap AB$, mà $AB//CD$ nên theo định lý Talet có $\frac{AO}{DC}=\frac{AM}{MC}=\frac{1}{2}\Rightarrow AO=\frac{1}{2}AB$, hay O là trung điểm của AB.

Dựng $O'=EN\cap AB$, mà $AB//EF$ nên theo định lý Talet có $\frac{BO}{EF}=\frac{BN}{NF}=\frac{1}{2}\Rightarrow BO'=\frac{1}{2}AB$, hay O' là trung điểm của AB.

Từ hai điều trên ta có $O\equiv O'$. Vậy suy ra $\frac{OM}{MD}=\frac{1}{2}=\frac{ON}{NE}\Rightarrow MN//DE\Rightarrow MN//(DCEF)$.

Câu 11. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, $M\in B'C$. Vẽ $MN//CC'$, $N\in B'C'$. Vẽ $NP//A'C'$, $P\in A'B'$. Vẽ $PQ//AA'$, $Q\in B'A$. Chứng minh $MQ//(ABC)$.

Lời giải



Xét hình chóp $B'.ACC'A'$ có $MN//CC'$, $NP//A'C'$, $PQ//AA'$ nên dễ dàng thấy ba đường MN, NP, PQ thuộc cùng một mặt phẳng $(MNPQ)$;

cũng dễ thấy ngay mặt phẳng $(MNPQ)//(ACC'A')$ (1).

Lại thấy $MQ=(MNPQ)\cap(B'AC)$ (2)

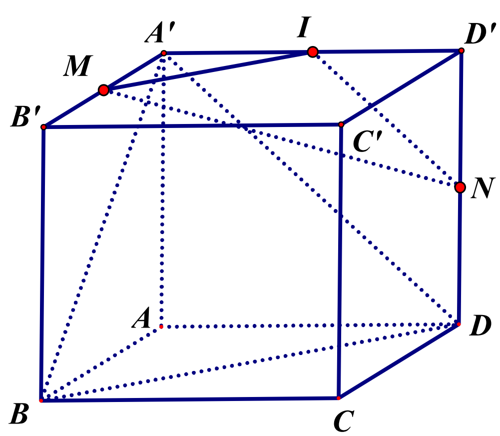
$AC=(ACC'A)\cap(B'AC)$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $MQ//AC$ (tính chất giao tuyến của một mặt với hai mặt song song)

$\Rightarrow MQ//(ABC)$.

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. M, N là trung điểm của $A'B'$, DD'. Chứng minh $MN//(A'BD)$.

Lời giải



Kẻ điểm I là trung điểm của $A'D'$, dễ dàng thấy $MI//B'D'//BD$ và $IN//A'D$

Mà MI, IN cắt nhau trong (MIN); $BD, A'D$ cắt nhau trong $(A'BD)$

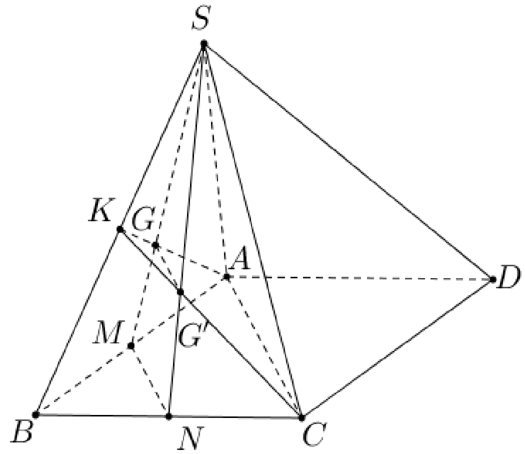
Vậy $(MIN)//(A'BD) \Rightarrow MN//(A'BD)$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC; G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SBC.

a) Chứng minh $MN//(SAC)$.

b) Chứng minh $GG'//(SAC)$.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} MN//AC \\ AC \subset (SAC) \\ MN \not\subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MN//(SAC)$.

b) Gọi K là trung điểm của SB suy ra G, G' thuộc mặt phẳng (KAC).

Ta có: G là trọng tâm tam giác SAB nên $\frac{KG}{KA}=\frac{1}{3}$;

Và G' là trọng tâm tam giác SBC nên $\frac{KG'}{KC}=\frac{1}{3}$;

Khi đó $\frac{KG}{KA}=\frac{KG'}{KC}$, suy ra $GG'//AC$.

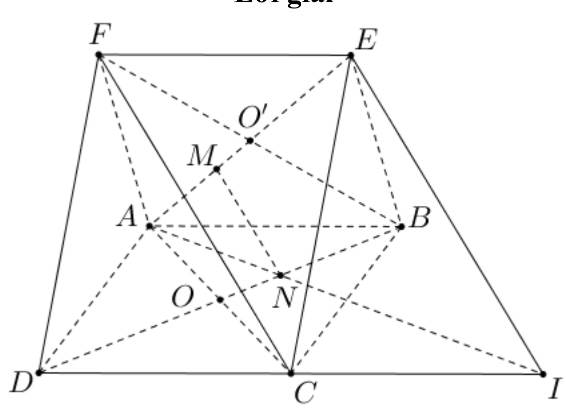
Vì $\begin{cases} GG'//AC \\ GG' \not\subset (SAC) \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow GG'//(SAC)$.

Câu 14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là O và O'.

a) Chứng minh rằng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM=\frac{1}{3}AE$, $BN=\frac{1}{3}BD$. Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng $(CDEF)$.

Lời giải



a) Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BFD ứng với cạnh DF nên $OO'//DF$, do $DF \subset (ADF)$ và $OO' \not\subset (ADF)$ $\Rightarrow OO'//(ADF)$.

Tương tự, OO' là đường trung bình của tam giác ACE ứng với cạnh CE nên $OO'//CE$ $CE \subset (CBE)$ và $CE \not\subset (CBE)$ $\Rightarrow OO'//(BCE)$.

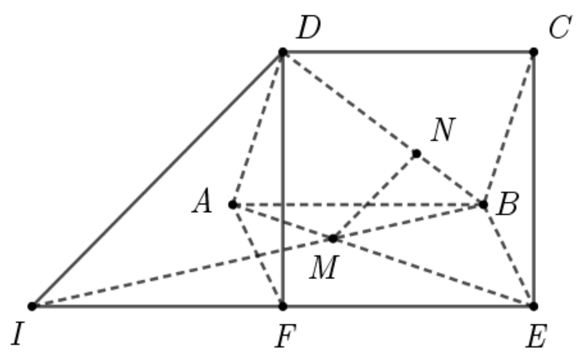
b) Trong $(ABCD)$, gọi $I = AN \cap CD$

Do $AB//CD$ nên $\frac{AN}{AI} = \frac{BN}{BD} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{1}{3}$.

Lại có $\frac{AM}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{AM}{AE} \Rightarrow MN//IE$. Mà $I \in CD \Rightarrow IE \subset (CDEF)$ và $MN \not\subset (CDEF)$ $\Rightarrow MN//(CDEF)$.

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên AE và BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE$, $BN = \frac{1}{x}BD, (x > 0)$. Tìm x để $MN//(CDFE)$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của BM và EF.

Trong mặt phẳng $(ABEF)$ ta có $AB//EI$ và AE cắt BI tại M nên $\frac{AM}{AE} = \frac{BM}{BI} = \frac{1}{3}$ (định lí Ta – lét đảo).

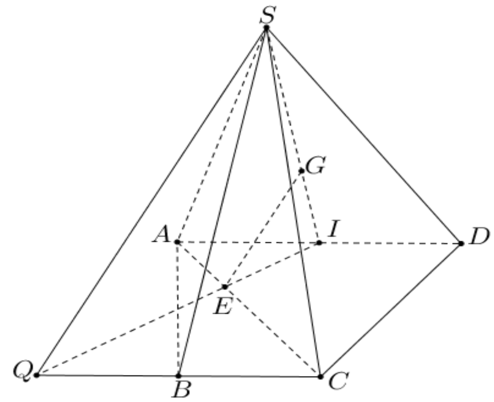
Ta lại có $\begin{cases} MN//(CDFE) \\ MN \subset (BDI) \\ (BDI) \cap (CDFE) = DI \end{cases} \Rightarrow MN//DI$.

Suy ra $\frac{BN}{BD} = \frac{BM}{BI}$ (định lí Ta – lét). Khi đó $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy $x = 3$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AD//BC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD; E là điểm thuộc đoạn AC sao cho $EC = xEA, (x > 0)$. Tìm x để $GE//(SBC)$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của cạnh AD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ giả sử IE và BC cắt nhau tại điểm Q.

Dễ thấy $SQ=(IGE)\cap(SBC)$.

Do đó : $GE//(SBC) \Leftrightarrow GE//SQ \Leftrightarrow \frac{IE}{IQ}=\frac{IG}{IS} \Rightarrow \frac{IE}{IQ}=\frac{1}{3}$ (1).

Mặt khác tam giác EIA đồng dạng với tam giác EQC nên $\frac{EI}{EQ}=\frac{EA}{EC}=\frac{EA}{xEA}=\frac{1}{x}$ suy ra

$EQ=x.EI$.

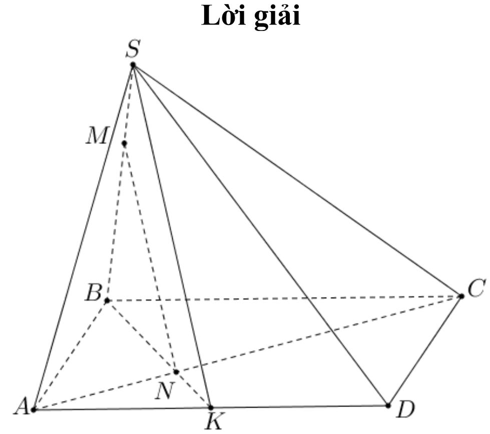
$\Rightarrow \frac{IE}{IQ}=\frac{IE}{IE+EQ}=\frac{IE}{IE+x.IE}=\frac{1}{1+x}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{1+x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=2$.

Vậy $GE//(SBC) \Leftrightarrow x=2$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh SB và đoạn AC sao cho $\frac{BM}{MS}=x$ và $\frac{NC}{NA}=y$, $(0<x,\ y\neq 1)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để $MN//(SAD)$.

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ giả sử BN và AD cắt nhau tại điểm K.

Dễ thấy $SK=(BMN)\cap(SAD)$.

Do đó : $MN//(SAD) \Leftrightarrow MN//SK \Leftrightarrow \frac{BM}{MS}=\frac{BN}{NK}$ (1)

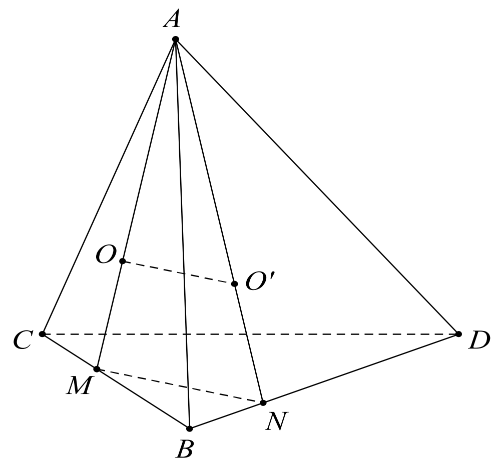
Mặt khác tam giác NCB đồng dạng với tam giác NAK $\Rightarrow \frac{BN}{NK}=\frac{CN}{NA}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BM}{MS} = \frac{NC}{NA} \Leftrightarrow x = y$.

Vậy $MN // (SAD) \Leftrightarrow x = y$.

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2AC = 3AD$. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC và ABD. Tính tỉ số $k = \frac{BC}{BD}$ khi $OO' // (BCD)$.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC): Giả sử AO và BC cắt nhau tại điểm M.

Trong mặt phẳng (ABD): Giả sử AO' và BD cắt nhau tại điểm N.

Ta có : $MN = (AOO') \cap (BCD)$.

Do đó : $OO' // (BCD) \Leftrightarrow OO' // MN \Leftrightarrow \frac{AO}{OM} = \frac{AO'}{O'N}$ (1)

Mặt khác theo tính chất đường phân giác ta có :

+ $\frac{AO}{OM} = \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Rightarrow \frac{AO}{OM} = \frac{AB+AC}{BM+CM} = \frac{AB+AC}{BC}$.

+ $\frac{AO'}{O'M} = \frac{AB}{BN} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow \frac{AO'}{O'M} = \frac{AB+AD}{BN+DN} = \frac{AB+AD}{BD}$.

Vậy đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \frac{AB+AC}{BC} = \frac{AB+AD}{BD} \Leftrightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB+AC}{AB+AD}$.

Theo giả thiết : $AB = 2AC = 3AD \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{\frac{3}{2}AB}{\frac{4}{3}AB} = \frac{9}{8}$.

Kết luận : $OO' // (BCD) \Leftrightarrow k = \frac{BC}{BD} = \frac{9}{8}$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA 2 MẶT PHẲNG

Phương pháp:

Để tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng, ngoài phương pháp "Tìm 2 điểm chung của 2 mặt phẳng", ta sử dụng định lí về giao tuyến như sau:

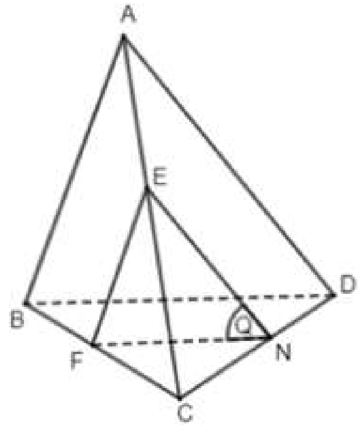
Bước 1: Chỉ ra rằng (α), (β) lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b.

Bước 2: Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.

Bước 3: Khi đó $(\alpha) \cap (\beta) = Mx // a // b$.

Câu 19. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho tứ diện $ABCD$, điểm E nằm giữa hai điểm A và C, gọi (Q) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, AD. Xác định giao tuyến của (Q) với các mặt của tứ diện.

Lời giải



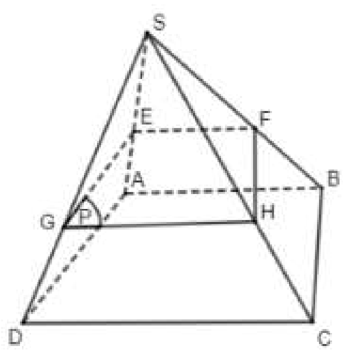
Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (Q) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến song song với AB. Vẽ $EF // AB$ (F thuộc BC) thì EF là giao tuyến của (Q) và (ABC).

Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng AD song song với mặt phẳng (Q) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến song song với AD. Vẽ $EN // AD$

(N thuộc CD) thì EN là giao tuyến của (Q) và (ACD). Khi đó FN là giao tuyến của (Q) và (BCD).

Câu 20. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB//CD)$. Gọi E là một điểm nằm giữa S và A. Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, AD. Xác định giao tuyến của (P) và các mặt bên của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Lời giải



+) Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB. Vẽ $EF // AB$ (F thuộc SB) thì EF là giao tuyến của (P) và (SAB).

+) Mặt phẳng (SAD) chứa đường thẳng AD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD. Vẽ $EG // AD$ (G thuộc SD) thì EG là giao tuyến của (P) và (SAD).

+) Trong mặt phẳng (SCD), qua G vẽ đường thẳng song song với CD cắt SC tại H.

Ta có: $GH // CD$ và $CD // AB$ nên $GH // AB$, do đó GH nằm trong mặt phẳng (P).

Vì G thuộc SD nên G thuộc mặt phẳng (SCD) và H thuộc SC nên H thuộc mặt phẳng (SCD), do đó GH nằm trong mặt phẳng (SCD).

Vậy GH là giao tuyến của (P) và (SCD).

+) Nối H với F, ta có H thuộc SC nên H thuộc mặt phẳng (SBC). Vì F thuộc SB nên F thuộc mặt phẳng (SBC). Do đó, HF nằm trong mặt phẳng (SBC).

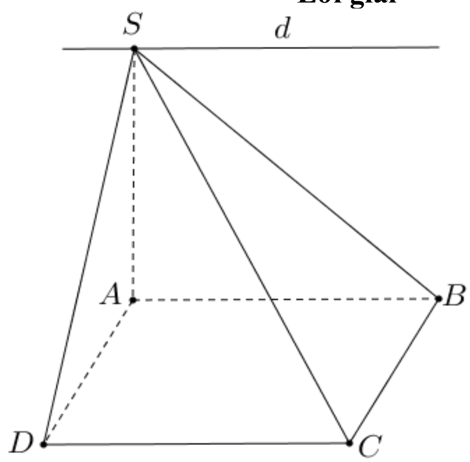
Lại có H và F đều thuộc (P) nên HF nằm trong mặt phẳng (P).

Vậy HF là giao tuyến của (P) và (SBC).

+) Ta có: $EF \parallel AB$ và $GH // AB$ nên $EF // GH$, do vậy tứ giác $EFHG$ là hình thang.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải



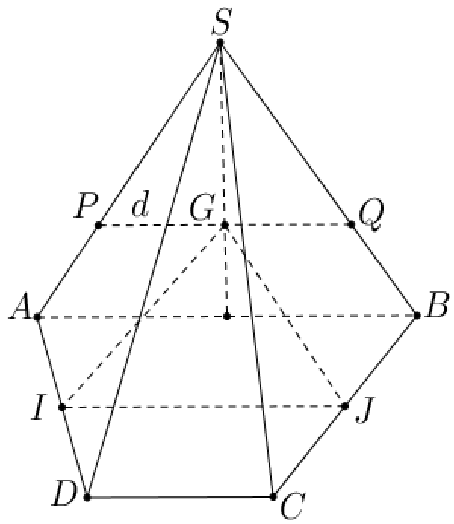
Ta có:

$$\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d$ thì $S \in d // AB // CD$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm của tam giác SAB. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG).

Lời giải



Ta có: I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC $\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ $\Rightarrow IJ//AB//CD$.

Gọi $d=(SAB)\cap(IJG)$.

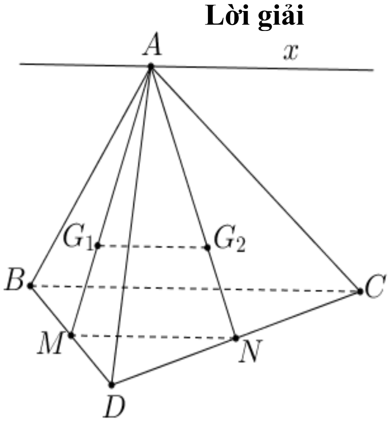
Ta có G là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG).

Mặt khác $\begin{cases} AB\subset(SAB); IJ\subset(IJG) \\ AB//IJ \end{cases}$

$\Rightarrow$ Giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với AB và IJ (đường thẳng PQ).

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm tam giác ABD và tam giác ACD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AG_1G_2) với mặt phẳng (ABC).

Lời giải



Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của BD và CD.

Trong tam giác ΔAMN, ta có:

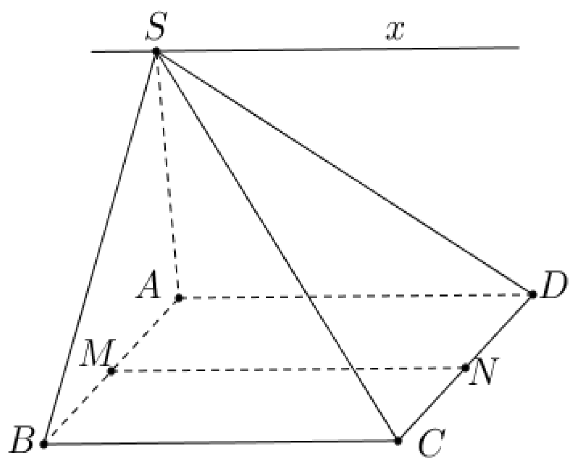
$\frac{AG_1}{AM}=\frac{AG_2}{AN}=\frac{2}{3}\Rightarrow G_1G_2//MN$.

Do $MN//BC$ $\Rightarrow G_1G_2//BC$.

Mà: $\begin{cases} A\in(AG_1G_2)\cap(ABC) \\ G_1G_2//BC \end{cases} \Rightarrow (AG_1G_2)\cap(ABC)=Ax//G_1G_2//BC$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Sx là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBD). M, N lần lượt là trung điểm của AB và DC. Chứng minh MN song song với giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Lời giải



Dễ thấy S là điểm chung của mặt phẳng (SAD) và (SBC)

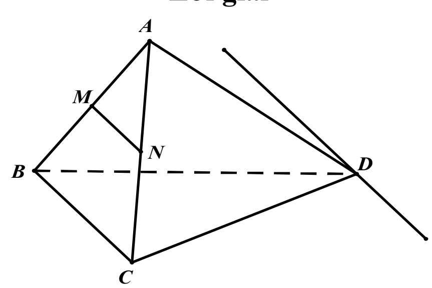
Ta có: $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx // AD // BC$

Do $\begin{cases} AD // MN // BC \\ MN \not\subset (SAD); MN \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // (SAD)$ và $MN // (SBC)$.

Mặt khác $Sx = (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow MN // Sx$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ Gọi M, N tương ứng là AB, AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN).

Lời giải



MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN // BC$.

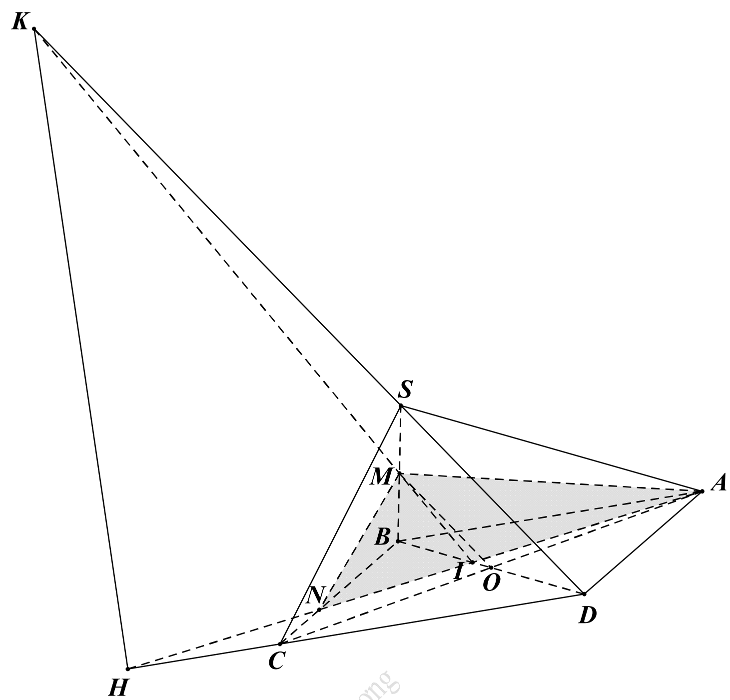
Ta có $\begin{cases} MN // BC \\ MN \subset (DMN) \\ BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (DMN) \cap (BCD) = \Delta,$ với Δ đi qua $D, \Delta // BC$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN = 2CN$.

a/ Chứng minh rằng: $OM // (SCD)$

b/ Xác định giao tuyến của (SCD) và (AMN).

Lời giải:



a/ Chứng minh $OM // (SCD)$.

Ta có $\begin{cases} BM = \dfrac{1}{2}BS \\ BO = \dfrac{1}{2}BD \end{cases} \Rightarrow OM // SD$ .Mà $SD \subset (SCD)$, suy ra $OM // (SCD)$ (đpcm).

b/ Gọi $H = AN \cap CD$ (cùng nằm trong $(ABCD)$).

Suy ra H là điểm chung thứ nhất của (AMN) và (SCD).

Ta có $I = AN \cap BD$, suy ra $IM \cap SD = K$ (cùng nằm trong (SBD)); nên K là điểm chung thứ hai của (AMN) và (SCD).

Do đó HK là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD).

DẠNG 3. THIẾT DIỆN ĐAI QUA MỘT ĐIỂM VÀ SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa thiết diện: Thiết diện (mặt cắt) là một đa giác phẳng thu được khi cắt một khối chóp bằng một mặt phẳng. (Các cạnh của đa giác thu được là các đoạn giao tuyến của mặt phẳng với mặt bên hoặc mặt đáy của hình chóp).

Phương pháp: Tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng (P):

Bước 1: Từ điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp (có thể là mặt phẳng trung gian).

Bước 2: Cho giao tuyến vừa tìm được cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp, ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác. Từ đó xác định được giao tuyến với các mặt này.

Bước 3: Tiếp tục như trên tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

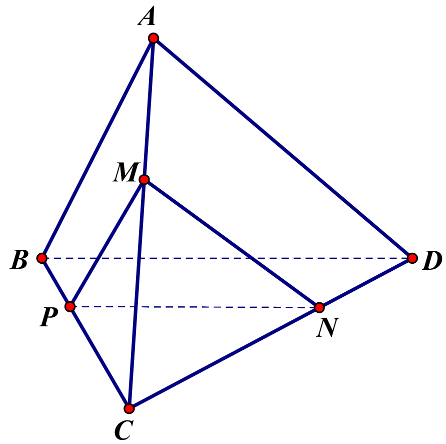
Chú ý:

+ Thiết diện của một khối chóp là một đa giác bao quanh viền ngoài khối chóp, không có đường thẳng nào đâm xuyên bên trong khối chóp đó.

+ Có thể tìm thiết diện bằng phương pháp dựng giao điểm.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$, điểm M thuộc AC. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD.

Lời giải



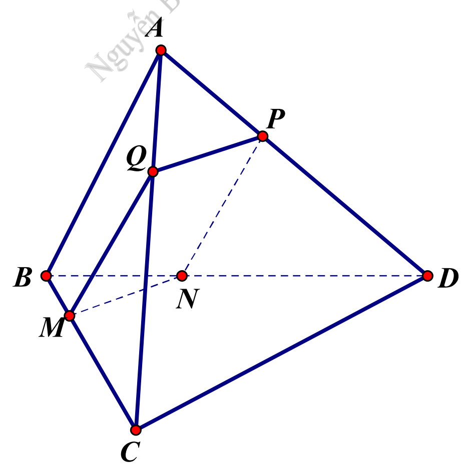
$(\alpha)//AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng qua M, song song với AB, cắt BC tại P.

$(\alpha)//AD$ nên giao tuyến của (α) với (ADC) là đường thẳng qua M, song song với AD cắt DC tại N.

Vậy thiết diện là tam giác MNP.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD.

Lời giải



$(\alpha)//AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB và cắt AC tại Q.

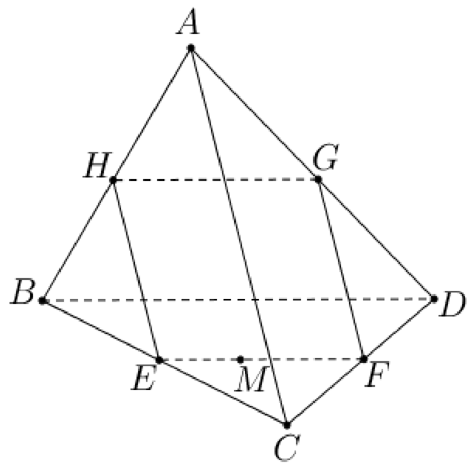
$(\alpha)//CD$ nên giao tuyến của (α) với (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD và cắt BD tại N.

$(\alpha)//AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB và cắt AD tại P.

Ta có $MN//PQ//CD, MQ//PN//AB$. Vậy thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$, lấy điểm M là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AC và BD. Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện $ABCD$. Thiết diện là hình gì ?

Lời giải



- M là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (BCD). Ta có $(\alpha)//BD$ nên giao tuyến của chúng qua M và song song với BD, giao tuyến này cắt BC tại E và cắt CD tại F.
- E là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABC). Ta có $(\alpha)//AC$ nên giao tuyến của chúng qua E và song song với AC, giao tuyến này cắt AB tại H.
- H là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABD). Ta có $(\alpha)//BD$ nên giao tuyến của chúng qua H và song song với BD, giao tuyến này cắt AD tại G.

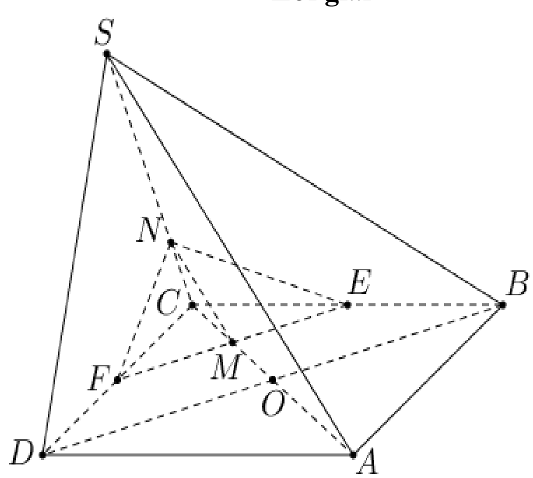
G và F là hai điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ACD). Vậy giao tuyến của chúng là FG.

Vì mặt phẳng $(\alpha)//AC$ nên giao tuyến $FG//AC$.

Kết luận: Thiết diện cần tìm là hình bình hành $EFGH$ vì $EF//BD//HG$ và $HE//FG//AC$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, M là trung điểm của OC. Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

Lời giải



Ta có:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha)//BD \subset (ABCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = EF//BD, \ (M \in EF, \ E \in BC, \ F \in CD).$$

Lại có:

$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (\alpha) // SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = MN // SA, \ (N \in SC)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác NEF .

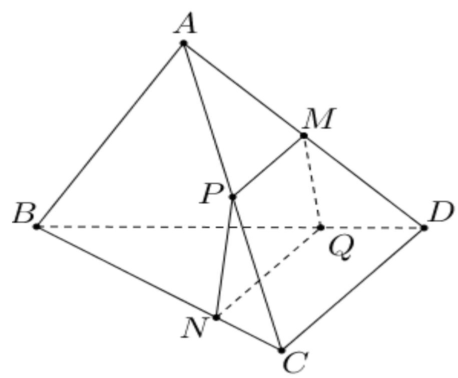
Nhận xét: Học sinh tìm thêm thiết diện khi điểm M di động trong đoạn AC .

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy trung điểm M , trên cạnh BC lấy điểm N bất kỳ. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD.

a) Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện $ABCD$.

b) Xác định vị trí của N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ACD) \\ M \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = MP, \ (MP // CD, P \in AC)$ (1)

Ta có $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (BCD) \\ N \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = NQ, \ (NQ // CD, Q \in BD)$ (2)

Và $(\alpha) \cap (ABD) = MQ$ (3)

$(\alpha) \cap (ABC) = PN$ (4)

Từ (1), (2) ta được : $MP // NQ$. Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$.

b) Xác định vị trí của N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành.

Ta có: $MP // NQ; \ MP = \frac{1}{2} CD$ (MP là đường trung bình của tam giác ACD)

$MNPQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} MP//NQ \\ MP = NQ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MP//NQ \\ MP = NQ = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Do đó N là trung điểm BC.

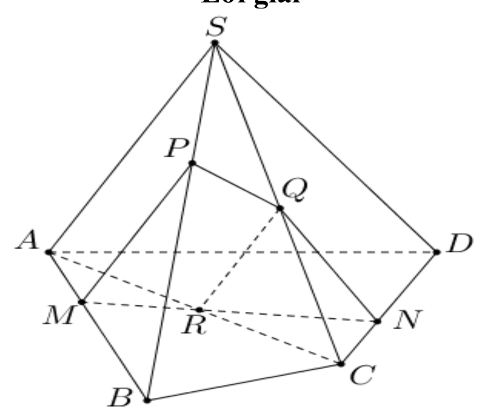
Vậy N là trung điểm BC thì $MPNQ$ là hình bình hành.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên đoạn AB, CD. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SA.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

Ta có : $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha)//SA, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MP$ (với $MP//SA, P \in SB$).

Gọi $R = MN \cap AC\ (MN, AC \subset (ABCD))$.

Ta có: $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (\alpha)//SA, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ$ (với $RQ//SA, Q \in SC$)

Vậy thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tứ giác $MPQN$

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Ta có $MPQN$ là hình thang $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} MP//QN\ (1) \\ MN//PQ\ (2) \end{array} \right.$

Xét (1) ta có $\begin{cases} SA//MP \\ MP//QN \end{cases} \Rightarrow SA//QN$.

Do đó: $\begin{cases} SA//QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA//(SCD)$ (vô lí).

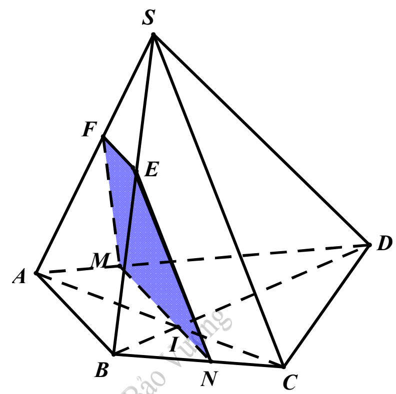
Xét (2) ta có $\begin{cases} BC=(ABCD)\cap(SBC) \\ MN\subset(ABCD), PQ\subset(SBC) \end{cases} \Rightarrow MN//BC$.

Ngược lại, nếu $MN//BC$ thì $\begin{cases} PQ=(\alpha)\cap(SBC) \\ MB\subset(\alpha), BC\subset(SBC) \end{cases} \Rightarrow MN//PQ$.

Vậy để thiết diện là hình thang thì $MN//BC$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua I và song song với AB, SC.

Lời giải



$AB//(P)$ khi đó $(P)\cap(ABCD)=d_1$ với d_1 đi qua I và $d_1//AB.$

Gọi $M=d_1\cap BC, N=d_1\cap AD.$

$SC//(P)$ khi đó $(P)\cap(SBC)=d_2$, với d_2 đi qua N và $d_2//SC.$

Gọi $E=d_2\cap SB.$

$AB//(P)$ khi đó $(P)\cap(SAB)=d_3$, với d_3 đi qua E và $d_3//AB.$

Gọi $F=d_3\cap SA.$

Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $AMEF$

Câu 34. Chóp $S.ABCD$ có $SA=2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB=a$, $SA\perp CD$, $M\in AD$ để $AM=x$ $(0<x<a)$. Mặt phẳng (P) qua M và $//SA, CD$. Dựng (P). Tìm thiệt diện. Tính S_{TD}.

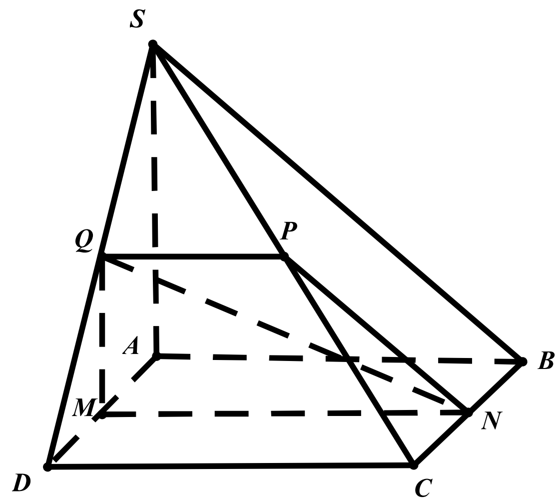
Lời giải

*) Dựng (P).

+) Qua M dựng $MN//CD$.

+) Qua M dựng $MQ//SA$.

$\Rightarrow(P)\equiv(QMN)$.



*) Tìm thiết diện; Trái, phải, trước, sau, đáy.

*) Ta có $\begin{cases}(QMN)\cap(Day)=MN \\ (QMN)\cap(Trai)=MQ\end{cases}$.

*) Định lý: $\begin{cases}Q\in(QMN), Q\in(Truoc)\Rightarrow(QMN)\cap(Truoc)=QP \\ MN//CD\Rightarrow(QMN)\cap(Phai)=PN\end{cases}$.

*) Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

*) Tính S_{TD}.

Ta có $\begin{cases}MN//CD \\ CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow MQ\perp MN$.

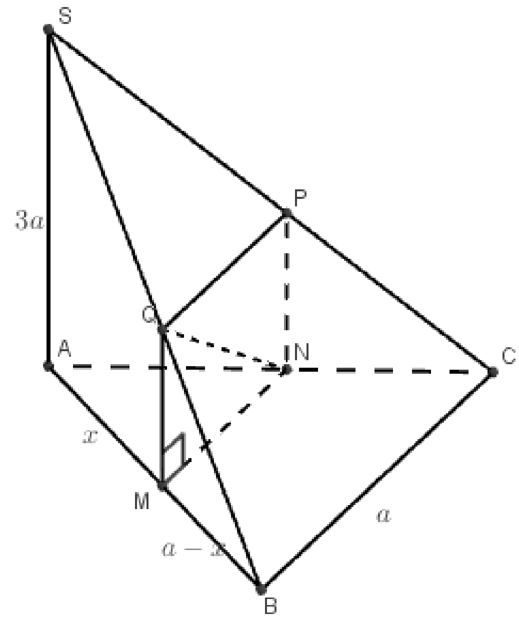
+) Tính QM : $QM//SA\Rightarrow\frac{QM}{SA}=\frac{DM}{DA}\Rightarrow QM=\frac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.

+) Tính PQ: $PQ//CD\Rightarrow\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow PQ=\frac{a.x}{a}=x$.

$\Rightarrow S_{TD}=\frac{(MN+PQ).QM}{2}=\frac{(a+x).2.(a-x)}{2}=a^2-x^2$.

Câu 35. Chóp $S.ABC$, $SA\perp BC$, $SA=3a$, ΔABC đều, $AB=a$. $M\in AB$ để $AM=x(0<x<a)$. (P) qua M và song song SA,BC. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải



Dựng (P):

- Qua M dựng $MN//BC$.

- Qua M dựng $MQ//A$

$\Rightarrow (P) \equiv (MNQ)$.

Tìm thiết diện:

- Ta có: $\begin{cases} (MNQ) \cap (ABCD) = MN \\ (MNQ) \cap (SAB) = MQ \end{cases}$.

$\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tính diện tích thiết diện: $SA \perp BC \Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật.

$MN//BC \Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \dfrac{ax}{a} = x$.

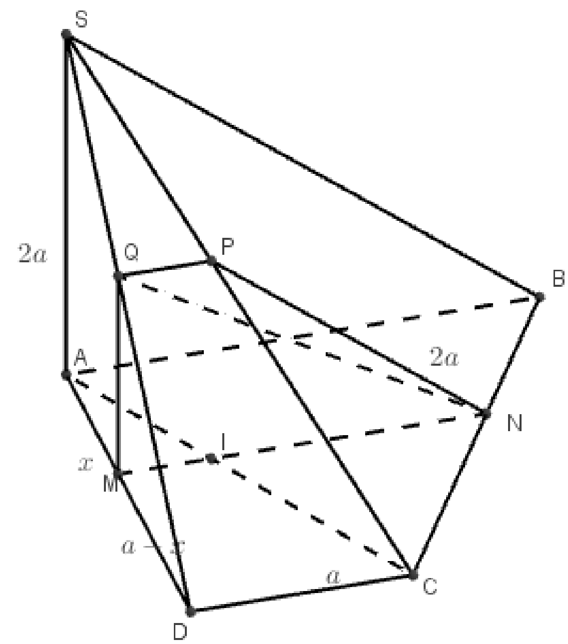
$MQ//SA \Rightarrow \dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{BM}{BA} \Rightarrow MQ = \dfrac{3a(a-x)}{a} = 3(a-x)$.

$S_{TD} = MN.MQ = x3(a-x) = 3(-x^2+ax), (0<x<a)$.

$S_{TD}max \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{a}{2(-1)} = \dfrac{a}{2}$.

Câu 36. Chóp $S.ABCD$, $SA \perp CD$, $SA = 2a$. $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D. $AD = DC = \dfrac{AB}{2} = a$, $M \in AD$ để $AM = x, (0<x<a)$. (P) qua M và song song SA, CD. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính diện tích thiết diện S_{TD}.

Lời giải



$(P)\equiv(QMN)\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tính MN:

- $IN//AB\Rightarrow\frac{IN}{AB}=\frac{CI}{CA}=\frac{DM}{DA}\Rightarrow IN=\frac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.

- $IM//CD\Rightarrow\frac{IM}{CD}=\frac{AM}{DA}\Rightarrow IM=\frac{ax}{a}=x$.

$\Rightarrow MN=IM+IN=x+2a-2x=2a-x$.

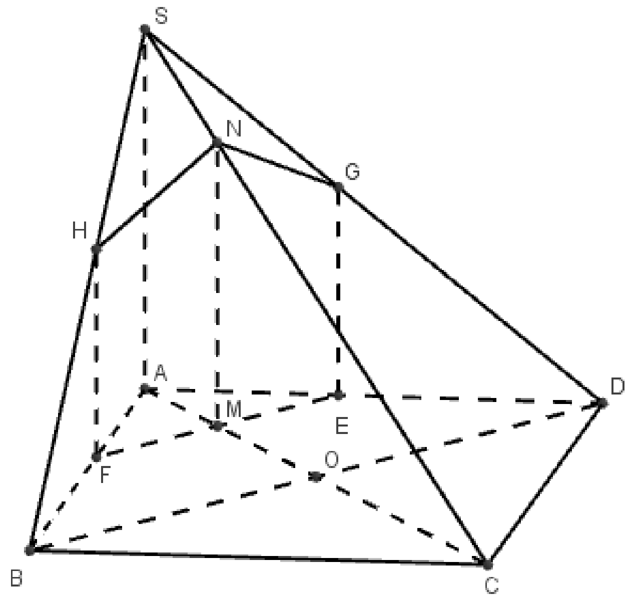
$\frac{MQ}{SA}=\frac{MD}{AD}\Rightarrow MQ=\frac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.

$\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow QP=\frac{ax}{a}=x$.

$S_{TD}=\frac{(PQ+MN)MQ}{2}=2a(a-x)$.

Câu 37. Chóp $S.ABCD$, $SA\perp BD$, $SA=a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $M\in AO$ để $AM=x\left(0<x<\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. (P) qua M và song song với SA, BD. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính S_{TD}

Lời giải



Qua M dựng EF song song $B\text{D}$.
Qua M dựng MN song song SA.
Qua E dựng EG song song SA.
Qua F dựng FH song song SA.
Vậy thiết diện là $EFHNG$.
Vì $SA \perp BD \Rightarrow MNHF, MNGE$ là hình thang vuông bằng nhau.

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{CM}{CA} = \frac{MN}{SA} \Rightarrow MN = \frac{SA.CM}{CA} = \frac{3a}{4}.$$

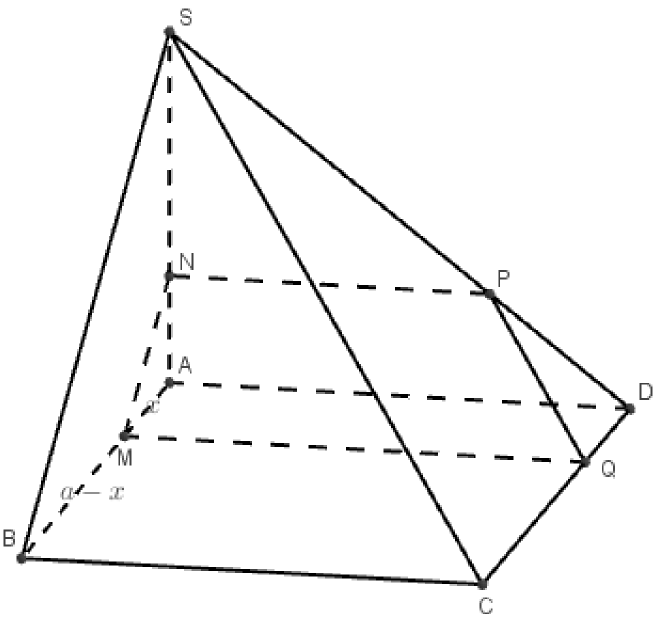
$$\frac{AF}{AB} = \frac{AM}{AO} = \frac{A\text{E}}{A\text{D}} = \frac{FM}{BO} \Rightarrow AF = \frac{AM.AB}{AO} = x\sqrt{2}, FM = AM = x.$$

$$\frac{BF}{BA} = \frac{FH}{SA} \Rightarrow FH = \frac{SA\left(BA - AF\right)}{BA} = a - x\sqrt{2}.$$

$$S_{DT} = 2.\frac{1}{2}.\left(MN + HF\right)FM = x\left(\frac{7a}{4} - x\sqrt{2}\right).$$

Câu 38. Chóp $S.ABCD$, $SA = a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $AD \perp SB$. $M \in AB$ để $AM = x\left(0 < x < a\right)$. $\left(P\right)$ qua M và song song với SB, AD.Dựng $\left(P\right)$. Tìm thiết diện. Tính S_{TD}.

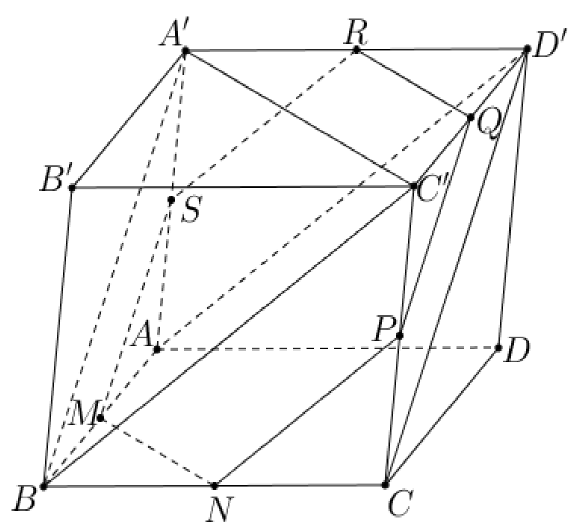
Lời giải



Qua M dựng MN song song SB.
Qua M dựng MQ song song AD.
Vậy thiết diện là $MNPQ$.
Vì $AD \perp SB \Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông.
Ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{AM}{AS}=\frac{MN}{SB} \Rightarrow AN=x, MN=\frac{AM.SB}{AB}=x\sqrt{2}$.
$\frac{SN}{SA}=\frac{NP}{AD} \Rightarrow NP=\frac{SN.AD}{SA}=a-x$.
$S_{TD}=\frac{1}{2}.MN.(NP+MQ)=\frac{x\sqrt{2}}{2}(2a-x)$.

Câu 39. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm AB, mặt phẳng (α) qua M, song song với CD', $A'C'$ và cắt CC' tại P. Tính tỉ số $\frac{PC'}{CC'}$.

Lời giải

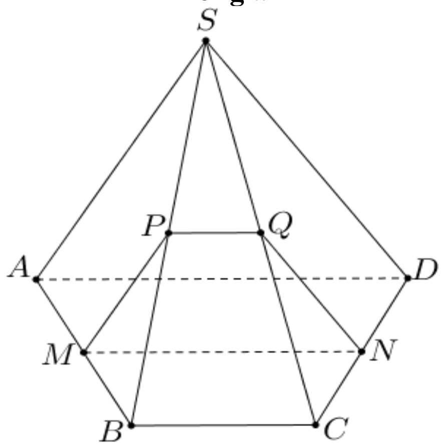


Hai mặt chéo tam giác $(A'BC')$, (ACD') song song với nhau nên $(A'BC')//(\alpha)//(ACD')$.

Suy ra (α) đi qua trung điểm M, N, P, Q, R, S của các cạnh bên AB, BC, CC', $C'D'$, $D'A'$, AA'. Vậy $\frac{PC'}{CC'}=\frac{1}{2}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. M, P lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SB. Biết $SA=SD=2a$, $AD=2a$, $BC=a$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α) qua M, P và song song BC.

Lời giải



Xét hai mặt phẳng (α) và (SBC)

Ta có $P\in(\alpha)\cap(SBC)$.

Mặt khác $\begin{cases} BC//(\alpha) \\ BC\subset(SBC) \end{cases}$

Nên giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (SBC) là đường thẳng d qua P song song với BC cắt SC tại Q. Khi đó Q là trung điểm của SC.

Xét hai mặt phẳng (α) và $(ABCD)$

Ta có $M\in(\alpha)\cap(ABCD)$.

Mặt khác $\begin{cases} BC//(\alpha) \\ BC\subset(ABCD) \end{cases}$

Nên giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng d_1 qua M song song với BC cắt CD tại N. Khi đó N là trung điểm của CD.

Do đó thiết diện của mặt phẳng (PMN) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $MNPQ$.

Vì $MP=\frac{1}{2}SA=a$, $NQ=\frac{1}{2}SD=a$ nên $MP=NQ$ do đó hình thang $MNPQ$ là hình thang cân.

$MN=\frac{3a}{2}$, $PQ=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$.

Chiều cao của hình thang cân là $h=\sqrt{MP^2-\left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MN+PQ).h=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.