

**TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM****Dạng 1. Tích phân cơ bản có điều kiện**

**1. Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $K$ ;  $a, b$  là hai phần tử bất kì thuộc  $K$ ,  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$ . Hiệu số  $F(b) - F(a)$  gọi là tích phân của của  $f(x)$  từ  $a$  đến  $b$  và được kí hiệu:  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

**2. Các tính chất của tích phân:**

$+ \int_a^a f(x) dx = 0$	$+ \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
$+ \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$	$+ \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
$+ \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$	$+ \text{Nếu } f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$

**Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp**

$\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b  + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) \cdot dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} \cdot dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$
$\int e^x \cdot dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$

**Nhận xét.** Khi thay  $x$  bằng  $(ax+b)$  thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm  $\frac{1}{a}$ .

- Câu 1. (Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{2}{x+2}$ . Biết  $F(-1) = 0$ . Tính  $F(2)$  kết quả là.
- A.  $\ln 8 + 1$ .      B.  $4 \ln 2 + 1$ .      C.  $2 \ln 3 + 2$ .      D.  $2 \ln 4$ .
- Câu 2. (Mã 103 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng
- A.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$ .      B.  $\frac{\pi^2 - 4}{16}$ .      C.  $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$ .      D.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$ .
- Câu 3. (Mã 104 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \sin^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng
- A.  $\frac{\pi^2 - 2}{8}$ .      B.  $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8}{8}$ .      C.  $\frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}$ .      D.  $\frac{3\pi^2 + 2\pi - 3}{8}$ .
- Câu 4. (Mã 102 - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng?
- A.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$ .      B.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$ .      C.  $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$ .      D.  $\frac{\pi^2 + 2}{8}$ .
- Câu 5.** Biết rằng hàm số  $f(x) = mx + n$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = 3, \int_0^2 f(x) dx = 8$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?
- A.  $m + n = 4$ .      B.  $m + n = -4$ .      C.  $m + n = 2$ .      D.  $m + n = -2$ .
- Câu 6.** Biết rằng hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}, \int_0^2 f(x) dx = -2$  và
- A.  $-\frac{3}{4}$ .      B.  $-\frac{4}{3}$ .      C.  $\frac{4}{3}$ .      D.  $\frac{3}{4}$ .
- Câu 7. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Có hai giá trị của số thực  $a$  là  $a_1, a_2$  ( $0 < a_1 < a_2$ ) thỏa mãn  $\int_1^a (2x - 3) dx = 0$ . Hãy tính  $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left( \frac{a_2}{a_1} \right)$ .
- A.  $T = 26$ .      B.  $T = 12$ .      C.  $T = 13$ .      D.  $T = 28$ .
- Câu 8. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho  $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$ . Giá trị của tham số  $m$  thuộc khoảng nào sau đây?
- A.  $(-1; 2)$ .      B.  $(-\infty; 0)$ .      C.  $(0; 4)$ .      D.  $(-3; 1)$ .

- Câu 9.** (Thi thử Lâmônôxốp - Hà Nội 2019) Cho  $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để  $I + 6 > 0$ ?
- A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.
- Câu 10.** (Sở GD Kon Tum - 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $a$  để  $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$ ?
- A. 5. B. 6. C. 4. D. 3.
- Câu 11.** (THPT Lương Thế Vinh - HN 2018). Có bao nhiêu số thực  $b$  thuộc khoảng  $(\pi; 3\pi)$  sao cho  $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$ ?
- A. 8. B. 2. C. 4. D. 6.
- Câu 12.** (Cần Thơ - 2018) Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$ ,  $f(-3) + f(3) = f(-1) + f(1) = 2$ . Giá trị biểu thức  $f(-4) + f(0) + f(4)$  bằng
- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 13.** (Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018) Biết  $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = a + e^b - e^c$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $T = a + b + c$
- A.  $T = -3$ . B.  $T = 3$ . C.  $T = -4$ . D.  $T = -5$ .
- Câu 14.** (Sở Bạc Liêu - 2018) Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$ ,  $f(-2) = \frac{3}{2}$  và  $f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $f(-1) + f(4)$  bằng
- A.  $\frac{6 \ln 2 - 3}{4}$ . B.  $\frac{6 \ln 2 + 3}{4}$ . C.  $\frac{8 \ln 2 + 3}{4}$ . D.  $\frac{8 \ln 2 - 3}{4}$ .
- Câu 15.** (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  Khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng.
- A.  $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$ . B.  $\frac{\pi^2 + 4}{16}$ . C.  $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$ . D.  $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$ .
- Câu 16.** (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 0$  và  $f'(x) = \sin^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$  bằng
- A.  $\frac{\pi^2 - 6}{18}$ . B.  $\frac{\pi^2 - 3}{32}$ . C.  $\frac{3\pi^2 - 16}{64}$ . D.  $\frac{3\pi^2 - 6}{112}$ .

### Dạng 2. Tích phân hàm số hữu tỷ

Tính  $I = \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  với  $P(x)$  và  $Q(x)$  là các đa thức không chứa căn.

□ Nếu bậc của tử  $P(x) \geq$  bậc mẫu  $Q(x) \xrightarrow{PP}$  chia đa thức.

- Nếu bậc của tử  $P(x) <$  bậc mẫu  $Q(x)$  mà mẫu số **phân tích được thành tích số**  $\xrightarrow{PP}$  đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

$$+ \frac{1}{(ax+m)(bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \left( \frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right) \quad (1)$$

$$+ \frac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

$$+ \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$$

- Nếu bậc tử  $P(x) <$  bậc mẫu  $Q(x)$  mà **mẫu không phân tích được thành tích số**, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

$$+ I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, (n \in \mathbb{N}^*) \xrightarrow{PP} x = a \cdot \tan t.$$

$$+ I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, (\Delta < 0) = \int \frac{dx}{a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( -\frac{\Delta}{4a} \right) \right]}. \text{ Ta sẽ đặt } \longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} \tan t.$$

$$+ I_3 = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \cdot dx \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0. \text{ Ta sẽ phân tích:}$$

$$I_3 = \frac{p}{2a} \int \underbrace{\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}}_A + \left( q - \frac{b \cdot p}{2a} \right) \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2} \text{ và giải A bằng cách đặt } t = \text{mẫu số}.$$

**Câu 1.** (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ . Khi đó giá trị

$a+b+c$  bằng

- A. -3. B. 2. C. 1. D. 0.

**Câu 2.** (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Biết  $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b, (a, b \in \mathbb{R})$ . Khi đó giá trị

của  $a+4b$  bằng

- A. 50 B. 60 C. 59 D. 40

**Câu 3.** Biết  $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$ , với  $m, n$  là các số nguyên. Tính  $m+n$ .

- A.  $S=1$ . B.  $S=4$ . C.  $S=-5$ . D.  $S=-1$ .

**Câu 4.** (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Tích phân  $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a - \ln b$  trong đó  $a, b$  là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức  $a+b$ .

- A. 1.                                      B. 0.                                      C. -1.                                      D. 3.
- Câu 5. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết  $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - 2b$ .
- A.  $S = 2$ .                                      B.  $S = -2$ .                                      C.  $S = 5$ .                                      D.  $S = 10$ .
- Câu 6. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho  $\int_1^2 \left( x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $P = a + b$ ?
- A.  $P = 1$ .                                      B.  $P = 5$ .                                      C.  $P = 7$ .                                      D.  $P = 2$ .
- Câu 7. (Chuyên Sơn La 2019)** Cho  $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị của  $a + b + c$  bằng
- A. 0.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. 1.
- Câu 8. (Sở Phú Thọ 2019)** Cho  $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị của  $2^{a-3b+c}$  bằng
- A. 12                                      B. 6                                      C. 1                                      D. 64
- Câu 9.** Biết  $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - 2b$ .
- A.  $S = 2$ .                                      B.  $S = -2$ .                                      C.  $S = 5$ .                                      D.  $S = 10$ .
- Câu 10.** Biết rằng  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{\pi\sqrt{a}}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}, a < 10$ ). Khi đó  $a + b$  có giá trị bằng
- A. 14.                                      B. 15.                                      C. 13.                                      D. 12.
- Câu 11. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Biết  $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $abc$  bằng
- A. -8.                                      B. -10.                                      C. -12.                                      D. 16.
- Câu 12. (THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Giả sử rằng  $\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$ . Khi đó, giá trị của  $a + 2b$  là
- A. 30.                                      B. 60.                                      C. 50.                                      D. 40.
- Câu 13. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Biết  $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $P = a - b^2 - c^3$ .
- A. -5.                                      B. -4.                                      C. 5.                                      D. 0.
- Câu 14.** Cho  $\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Biểu thức  $T = a.c - b$  bằng

- A. 4.                      B. 6.                      C.  $\frac{-1}{2}$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 15. (SGD Bến Tre 2019)** Biết  $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$ , với  $m, n$  là các số nguyên. Tính  $S = m + n$ .

- A.  $S = -1$ .                      B.  $S = -5$ .                      C.  $S = 1$ .                      D.  $S = 4$ .

**Câu 16. (THPT Cẩm Bình 2019)** Cho  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ , với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Khi đó  $a + b$  bằng

- A. 0.                      B. 2.                      C. 1.                      D. -1.

**Câu 17. (Sở Hà Nam - 2019)** Cho  $\int_0^1 \frac{2x^2+3x}{x^2+3x+2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tổng  $a + b + c$  bằng

- A. 3.                      B. 2.                      C. 1.                      D. -1.

**Câu 18. (Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho biết  $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $T = a^2 + b^2$  bằng

- A. 13.                      B. 10.                      C. 25.                      D. 5.

**Câu 19. (Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Biết  $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $abc$  bằng

- A. -8.                      B. -10.                      C. -12.                      D. 16.

**Câu 20. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết  $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của  $P = a - b^2 - c^3$ .

- A. -5.                      B. -3.                      C. 6.                      D. -4.

**Câu 21. (Bình Phước - 2019)** Cho  $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Giá trị của  $a + b^2 - c^3$  bằng

- A. 3.                      B. 6.                      C. 5.                      D. 4.

**Câu 22. (SGD Đà Nẵng 2019)** Cho  $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 7$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Giá trị của  $2a + 3b + 7c$  bằng

- A. -9.                      B. 6.                      C. 15.                      D. 3.

**Câu 23. (SGD Điện Biên - 2019)** Cho  $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Giá trị  $6a + b + c$  bằng:

- A. -2.                      B. 1.                      C. 2.                      D. -1.

**Câu 24.** (SP Đồng Nai - 2019) Biết  $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$ . Tính  $S = 3a + 2b + c$ .

A. -11.

B. -14.

C. -2.

D. 3.

### Dạng 3. Tích phân đổi biến

② **Tích phân đổi biến:**  $\int_a^b [f(x)] \cdot u'(x) \cdot dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)]$ .

$\swarrow$  Có sẵn       $\downarrow$  Tách từ hàm       $\searrow$  Nhân

#### Các bước tính tích phân đổi biến số

- **Bước 1.** Biến đổi để chọn phép đặt  $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) \cdot dx$  (quan trọng)
- **Bước 2.** Đổi cận:  $\begin{cases} x=b \\ x=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=u(b) \\ t=u(a) \end{cases}$  (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)
- **Bước 3.** Đưa về dạng  $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \cdot dt$  đơn giản hơn và dễ tính toán.

#### Một số phương pháp đổi biến số thường gặp

**Đổi biến dạng 1.**  $I = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} \cdot dx = \underbrace{\int_a^b h(x) \cdot dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^b f(g(x)) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot dx}_{I_2}$  với

#### Đổi biến dạng 2.

Nghĩa là nếu gặp tích phân **chứa căn thức** thì có khoảng 80% sẽ đặt  $t =$  căn trừ một số trường hợp ngoại lệ sau:

1/  $I_1 = \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) \cdot x^{\text{chẵn}} \cdot dx \longrightarrow$  đặt  $x = a \cdot \sin t$  hoặc  $x = a \cdot \cos t$ .

(xuất phát từ công thức  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{cases}$ )

2/  $I_2 = \int f(\sqrt{x^2 + a^2}) \cdot x^{\text{chẵn}} \cdot dx \longrightarrow$  đặt  $x = a \cdot \tan t$  hoặc  $x = a \cdot \cot t$ .

(mẫu chốt xuất phát từ công thức  $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ )

3/  $I_3 = \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) \cdot x^{\text{chẵn}} \cdot dx \longrightarrow$  đặt  $x = \frac{a}{\sin t}$  hoặc  $x = \frac{a}{\cos t}$ .

4/  $I_4 = \int f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right) dx \longrightarrow$  đặt  $x = a \cdot \cos 2t$ .

$$5/ \quad I_5 = \int \frac{dx}{(a+bx^n)^n \sqrt[n]{a+bx^n}} \longrightarrow \text{đặt } x = \frac{1}{t}.$$

$$6/ \quad I_6 = \int R\left[\sqrt[s_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[s_k]{ax+b}\right] dx \longrightarrow \text{đặt } t^n = ax+b.$$

(trong đó  $n$  là bội số chung nhỏ nhất của  $\{s_1; s_2; \dots; s_k\}$ )

$$7/ \quad I_7 = \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \longrightarrow \text{đặt } t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}.$$

**Đổi biến dạng 3.**  $\int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \longrightarrow t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

**Đổi biến dạng 4.**  $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx \longrightarrow t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

**Đổi biến dạng 5.**  $\int f(\cos x) \cdot \sin x dx \longrightarrow t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

**Đổi biến dạng 6.**  $\int f(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \longrightarrow t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

**Đổi biến dạng 7.**  $\int f(\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx \longrightarrow t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

**Đổi biến dạng 8.**  $\begin{cases} \int f(\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x) dx \\ \int f(\sin x - \cos x) \cdot (\sin x + \cos x) dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = \sin x + \cos x \\ t = \sin x - \cos x \end{cases}$

**Đổi biến dạng 9.**  $\begin{cases} \int f(ax^2 + b)^n \cdot x dx \longrightarrow t = ax^2 + b \Rightarrow dt = 2ax dx \\ \int f(ax + b)^n \cdot x dx \longrightarrow t = ax + b \Rightarrow dt = a dx \end{cases}$

**Câu 1. (Đề Tham Khảo -2019)** Cho  $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Giá trị của

$3a + b + c$  bằng

A. 2

B. 1

C. -2

D. -1

**Câu 2.** Tính  $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx$  bằng

A.  $K = \ln 2$ .

B.  $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$ .

C.  $K = 2 \ln 2$ .

D.  $K = \ln \frac{8}{3}$ .

**Câu 3. (Chuyên Long An - 2018)** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$ , giả sử đặt  $t = 1 + x^2$ . Tìm mệnh đề đúng.



$$\begin{aligned} \text{A. } I &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt. & \text{B. } I &= \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt. \\ \text{C. } I &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt. & \text{D. } I &= \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt. \end{aligned}$$

**Câu 4. (KTNL Gia Bình Năm 2019)** Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1$ .

A. 2                                      B. 1                                      C. 0                                      D. 3

**Câu 5. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(1)=0$  và  $f'(x)=2019.2020.x(x-1)^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

A.  $\frac{2}{2021}$ .                                      B.  $\frac{1}{1011}$ .                                      C.  $-\frac{2}{2021}$ .                                      D.  $-\frac{1}{1011}$ .

**Câu 6. (Đề Tham Khảo 2019)** Cho  $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Giá trị của

$3a+b+c$  bằng

A. -2                                      B. -1                                      C. 2                                      D. 1

**Câu 7. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho  $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$  với  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . Tính giá trị của biểu thức  $12A+7B$ .

A.  $\frac{23}{252}$                                       B.  $\frac{241}{252}$                                       C.  $\frac{52}{9}$                                       D.  $\frac{7}{9}$

**Câu 8. (Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Biết  $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1} dx = a - \ln b$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính

$P = a^2 + b^2$ .

A. 13.                                      B. 5.                                      C. 4.                                      D. 10.

**Câu 9. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho  $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$  với  $m, p, q \in \mathbb{Q}$  và là các phân số tối giản. Giá trị  $m+p+q$  bằng

A. 10.                                      B. 6.                                      C.  $\frac{22}{3}$ .                                      D. 8.

**Câu 10.** Biết rằng  $\int_0^1 xe^{x^2+2} dx = \frac{a}{2}(e^b - e^c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Giá trị của  $a+b+c$  bằng

A. 4.                                      B. 7.                                      C. 5.                                      D. 6.

**Câu 11. (KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Biết  $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x \ln x} dx = \ln(ae+b)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương.

Tính giá trị của biểu thức  $T = a^2 - ab + b^2$ .

A. 3.                                      B. 1.                                      C. 0.                                      D. 8.

- Câu 12. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết  $\int_1^2 (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = me^q - n$ , trong đó  $m, n, p, q$  là các số nguyên dương và  $\frac{p}{q}$  là phân số tối giản. Tính  $T = m + n + p + q$ .
- A.  $T = 11$ .                      B.  $T = 10$ .                      C.  $T = 7$ .                      D.  $T = 8$ .
- Câu 13.** Số điểm cực trị của hàm số  $f(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{2tdt}{1+t^2}$  là
- A. 0                                  B. 1                                  C. 2                                  D. 3
- Câu 14. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa mãn  $f(0) = f(1) = 5$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx$ .
- A.  $I = 10$                       B.  $I = -5$                       C.  $I = 0$                       D.  $I = 5$
- Câu 15. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(3) = 3$  và  $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$ ,  $\forall x > 0$ . Khi đó  $\int_3^8 f(x) dx$  bằng
- A. 7.                                  B.  $\frac{197}{6}$ .                                  C.  $\frac{29}{2}$ .                                  D.  $\frac{181}{6}$ .
- Câu 16. (Mã 102 2018)** Cho  $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.  $a - b = -2c$                       B.  $a + b = -2c$                       C.  $a + b = c$                       D.  $a - b = -c$
- Câu 17. (Mã 101 2018)** Cho  $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.  $a + b = 3c$                       B.  $a - b = -3c$                       C.  $a - b = -c$                       D.  $a + b = c$
- Câu 18. (Đề Tham Khảo 2017)** Tính tích phân  $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$  bằng cách đặt  $u = x^2 - 1$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$                       B.  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$                       C.  $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$                       D.  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$
- Câu 19. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Giả sử tích phân  $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ . Lúc đó
- A.  $a + b + c = \frac{5}{3}$ .                      B.  $a + b + c = \frac{4}{3}$ .                      C.  $a + b + c = \frac{7}{3}$ .                      D.  $a + b + c = \frac{8}{3}$ .

**Câu 20. (Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(2)=0$  và

$$f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right). \text{ Biết rằng } \int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{a}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản}).$$

Khi đó  $a+b$  bằng

- A. 250.                      B. 251.                      C. 133.                      D. 221.

**Câu 21. (Nam Định - 2018)** Biết tích phân  $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx = a+b \ln 2 + c \ln 3$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $T = a+b+c$ .

- A.  $T = -1$ .                      B.  $T = 0$ .                      C.  $T = 2$ .                      D.  $T = 1$ .

**Câu 22. (Chuyên Vinh - 2018)** Tích phân  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$  bằng

- A.  $\frac{4}{3}$ .                      B.  $\frac{3}{2}$ .                      C.  $\frac{1}{3}$ .                      D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 23. (Đề Tham Khảo 2018)** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} dx = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a+b+c$

- A.  $P = 18$                       B.  $P = 46$                       C.  $P = 24$                       D.  $P = 12$

**Câu 24. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết  $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a+b\sqrt{2}$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Tính  $S = a+b$ .

- A.  $S = 1$ .                      B.  $S = \frac{1}{2}$ .                      C.  $S = \frac{3}{4}$ .                      D.  $S = \frac{2}{3}$ .

**Câu 25. (Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho tích phân  $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2} dx$  và  $x = 4 \sin t$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$ .    B.  $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$ .  
C.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$ .    D.  $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$ .

**Câu 26.** Biết  $\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a+b \ln 3 + c \ln 5$  ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $a+b+c$  bằng

- A.  $\frac{7}{3}$ .                      B.  $\frac{5}{3}$ .                      C.  $\frac{8}{3}$ .                      D.  $\frac{4}{3}$ .

**Câu 27.** Cho  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{b}{c} + \sqrt{d}\right)$ , với  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương và  $\frac{b}{c}$  tối giản. Giá trị của  $a+b+c+d$  bằng

- A. 12                      B. 10                      C. 18                      D. 15

- Câu 28. (Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Cho biết  $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$  với  $\frac{m}{n}$  là một phân số tối giản. Tính  $m - 7n$   
 A. 0. B. 1. C. 2. D. 91.
- Câu 29. (Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Biết rằng  $\int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị của  $a + b + c$  bằng  
 A.  $-\frac{10}{3}$  B.  $-\frac{5}{3}$  C.  $\frac{10}{3}$  D.  $\frac{5}{3}$
- Câu 30.** Biết  $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Tính  $S = a + b$ .  
 A.  $S = 1$ . B.  $S = \frac{1}{2}$ . C.  $S = \frac{3}{4}$ . D.  $S = \frac{2}{3}$ .
- Câu 31. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho  $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị  $a + b + c$  bằng:  
 A. 9 B. 2 C. 1 D. 7
- Câu 32. (THPT Ba Đình 2019)** Cho  $I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{d} + b \ln 2 + c \ln d$ , với  $a, b, c, d$  là các số nguyên và  $\frac{a}{d}$  là phân số tối giản. Giá trị của  $a + b + c + d$  bằng  
 A. 16. B. 4. C. 28. D. -2.
- Câu 33.** Tính  $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ .  
 A.  $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1$ . B.  $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1]$ .  
 C.  $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1]$ . D.  $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1$ .
- Câu 34. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Giá trị của tích phân  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$  bằng tích phân nào dưới đây?  
 A.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy$ . B.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$ . C.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy$ . D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 y dy$ .
- Câu 35. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Biết  $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x^2 - 1} dx = \frac{b}{a} \ln 5 - c \ln 2$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và phân số  $\frac{a}{b}$  là tối giản. Tính  $P = 3a + 2b + c$ .  
 A. 11. B. 12. C. 14. D. 13.

**Câu 36. (Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Cho tích

phân  $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx = a + b\sqrt{6} + c \ln \left( \frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12} \right) + d \ln 2$  với  $a, b, c, d$  là các số hữu tỉ. Tính tổng  $a+b+c+d$ .

- A.  $-\frac{1}{3}$ . B.  $-\frac{3}{25}$ . C.  $-\frac{3}{2}$ . D.  $-\frac{3}{20}$ .

**Câu 37. (Sở Hưng Yên - 2018)** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$  nếu đổi biến số  $x = 2 \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  thì ta được.

- A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$ . B.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$ . C.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt$ . D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$ .

**Câu 38. (THPT Phú Lương - Thái Nguyên - 2018)** Biết  $\int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{a\sqrt{b}+c}{15}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và  $b \geq 0$ . Tính  $P = a + b^2 - c$ .

- A.  $P = 3$ . B.  $P = 7$ . C.  $P = -7$ . D.  $P = 5$ .

**Câu 39.** Cho  $n$  là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân  $I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$  theo  $n$ .

- A.  $I = \frac{1}{2n+2}$ . B.  $I = \frac{1}{2n}$ . C.  $I = \frac{1}{2n-1}$ . D.  $I = \frac{1}{2n+1}$ .

**Câu 40. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Giả sử  $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$  với  $a, b$  là số nguyên.

Khi đó giá trị  $a-b$  là

- A.  $-17$ . B.  $5$ . C.  $-5$ . D.  $17$ .

**Câu 41. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(\sqrt{2}) = -2$  và

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{6-x^2}}, \forall x \in (-\sqrt{6}; \sqrt{6})$ . Khi đó  $\int_0^{\sqrt{3}} f(x).dx$  bằng

- A.  $-\frac{3\pi}{4}$ . B.  $\frac{3\pi+6}{4}$ . C.  $\frac{\pi+2}{4}$ . D.  $-\frac{3\pi+6}{4}$ .

**Câu 42. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Biết  $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2-1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ, tính  $P = a + 2b + c - 7$ .

- A.  $-\frac{1}{9}$ . B.  $\frac{86}{27}$ . C.  $-2$ . D.  $\frac{67}{27}$ .

**Câu 43. (THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a + b + c$ .

- A.  $P = 44$ . B.  $P = 42$ . C.  $P = 46$ . D.  $P = 48$ .

- Câu 44. (Sở Phú Thọ - 2018)** Biết  $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = a + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3} (a, b, c \in \mathbb{Z})$ . Tính  $T = 2a + b + c$ .
- A.  $T = 4$ .                      B.  $T = 2$ .                      C.  $T = 1$ .                      D.  $T = 3$ .
- Câu 45. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = 0$  và  $f'(x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ .  
 Khi đó  $\int_0^{\pi} f(x)dx$  bằng
- A.  $\frac{1042}{225}$ .                      B.  $\frac{208}{225}$ .                      C.  $\frac{242}{225}$ .                      D.  $\frac{149}{225}$ .
- Câu 46. (Sở Bình Phước - 2020)** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{b}$ . Giá trị của  $a + b$  bằng
- A. 0.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 3.
- Câu 47. (Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$ .
- A.  $I = -\frac{1}{4}$                       B.  $I = -\frac{1}{4}\pi^4$                       C.  $I = -\pi^4$                       D.  $I = 0$
- Câu 48. (THPT Kinh Môn - 2018)** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ , tính tổng  $S = a + b + c$
- A.  $S = 1$ .                      B.  $S = 4$ .                      C.  $S = 3$ .                      D.  $S = 0$ .
- Câu 49. (Bình Dương 2018)** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \cdot \sin x dx$ . Nếu đặt  $t = 2 + \cos x$  thì kết quả nào sau đây đúng?
- A.  $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .                      B.  $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$ .                      C.  $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .                      D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$ .
- Câu 50. (Đồng Tháp - 2018)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$  bằng cách đặt  $u = \tan x$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du$ .                      B.  $I = \int_0^2 \frac{1}{u^2} du$ .                      C.  $I = -\int_0^1 u^2 du$ .                      D.  $I = \int_0^1 u^2 du$ .
- Câu 51. (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội - 2018)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ .
- A.  $I = \frac{5}{2}$ .                      B.  $I = \frac{3}{2}$ .                      C.  $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$ .                      D.  $I = \frac{9}{4}$ .

**Câu 52.** (THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018) Cho tích phân  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $2a + b = 0$ . B.  $a - 2b = 0$ . C.  $2a - b = 0$ . D.  $a + 2b = 0$ .

**Câu 53.** (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Có bao nhiêu số  $a \in (0; 20\pi)$  sao cho  $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$ .

- A. 10. B. 9. C. 20. D. 19.

**Câu 54.** (HSG Bắc Ninh 2019) Biết  $F(x)$  nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$  và  $F(0) = 2$ .

Tính  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- A.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} - 8}{3}$  B.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} + 8}{3}$  C.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2} - 8}{3}$  D.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2} + 8}{3}$

**Câu 55.** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$  và  $a, b, c$  là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng  $a + b + c$  bằng

- A. 5. B. 12. C. 7. D. -1.

**Câu 56.** Cho tích phân số  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $2a + b = 0$ . B.  $a - 2b = 0$ . C.  $2a - b = 0$ . D.  $a + 2b = 0$ .

**Câu 57.** (THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018) Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ , với  $a, b$  là các số

hữu tỉ,  $c > 0$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = 3$ . B.  $S = 0$ . C.  $S = 1$ . D.  $S = 4$ .

**Câu 58.** (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(0) = 1$  và

$f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a + \pi}{b}; a, b \in \mathbb{Q}$ , khi đó  $b - a$  bằng

- A. 4. B. 12. C. 0. D. -4.

**Câu 59.** (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(0) = 0$  và

$f'(x) = \sin^8 x - \cos^8 x - 4 \sin^6 x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tính  $I = \int_0^{\pi} 16f(x) dx$ .

- A.  $I = 10\pi^2$ . B.  $I = 160\pi$ . C.  $I = 16\pi^2$ . D.  $I = -10\pi^2$ .

**Câu 60.** (Đề Tham Khảo 2017) Cho  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $S = a^3 + b^3$ .

- A.  $S = -2$ . B.  $S = 0$ . C.  $S = 1$ . D.  $S = 2$ .

**Câu 61. (Cần Thơ - 2018)** Cho tích phân  $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$ . Nếu đặt  $t = \ln x$  thì

A.  $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt$ .      B.  $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt$ .      C.  $I = \int_1^e (3t+1) dt$ .      D.  $I = \int_0^1 (3t+1) dt$ .

**Câu 62. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$ , với

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Khẳng định nào sau đây đúng.

A.  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .      B.  $a^2 + b^2 + c^2 = 11$ .      C.  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ .      D.  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

**Câu 63. (Việt Đức Hà Nội 2019)** Biết  $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$  trong đó  $a, b, c$  là các số

thực. Giá trị của biểu thức  $T = a + b + c$  là:

A.  $T = 11$ .      B.  $T = 9$ .      C.  $T = 10$ .      D.  $T = 8$ .

**Câu 64.** Cho  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$  có kết quả dạng  $I = \ln a + b$  với  $a > 0, b \in \mathbb{R}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $2ab = -1$ .      B.  $2ab = 1$ .      C.  $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$ .      D.  $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$ .

**Câu 65. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho  $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2} dx = \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$  với  $a, b, c$  là các số

nguyên dương, biết  $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$  là các phân số tối giản. Tính giá trị  $a + b + c + d$ ?

A. 18.      B. 15.      C. 16.      D. 17.

**Câu 66. (Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Biết  $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + e x^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e \ln n} \ln \left( p + \frac{e}{e + \pi} \right)$  với  $m, n, p$

là các số nguyên dương. Tính tổng  $S = m + n + p$ .

A.  $S = 6$ .      B.  $S = 5$ .      C.  $S = 7$ .      D.  $S = 8$ .

**Câu 67. (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho  $\int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = a \cdot e^3 + b + c \cdot \ln(e + 1)$  với

$a, b, c$  là các số nguyên và  $\ln e = 1$ . Tính  $P = a^2 + b^2 + c^2$ .

A.  $P = 9$ .      B.  $P = 14$ .      C.  $P = 10$ .      D.  $P = 3$ .

**Câu 68.** Biết  $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c} (\ln a - \ln b + \ln c)$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương.

Tính  $P = 2a - b + c$ .

A.  $P = -3$ .      B.  $P = -1$ .      C.  $P = 4$ .      D.  $P = 3$ .

**Câu 69. (Chuyên Hạ Long - 2018)** Biết  $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx = \ln(\ln a + b)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương.

Tính  $P = a^2 + b^2 + ab$ .

A. 10.      B. 8.      C. 12.      D. 6.



**Câu 70. (Chuyên Thái Bình 2018)** Cho  $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính

$$P = a + 2b - c.$$

A.  $P = 1$ .

B.  $P = -1$ .

C.  $P = 0$ .

D.  $P = -2$ .

**Câu 71. (Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  biết  $f(0) = \frac{1}{2}$  và  $f'(x) = xe^{x^2}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

Khi đó  $\int_0^1 xf'(x)dx$  bằng

A.  $\frac{e+1}{4}$ .

B.  $\frac{e-1}{4}$ .

C.  $\frac{e-1}{2}$ .

D.  $\frac{e+1}{2}$ .

**Câu 72. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Biết rằng  $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$

với  $a, b, c$  là các số nguyên dương và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $S = a + b + c$ .

A.  $S = 3$ .

B.  $S = 7$ .

C.  $S = 10$ .

D.  $S = 5$ .

#### Dạng 4. Tích phân từng phần

Nếu  $u, v$  có đạo hàm liên tục trên  $(a; b)$  thì  $I = \int_a^b u.dv = u.v \Big|_a^b - \int_a^b v.du$ .

Chọn  $\begin{cases} u = \dots\dots\dots & \xrightarrow{\text{Vi phân}} du = \dots\dots\dots dx \\ dv = \dots\dots\dots dx & \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v = \dots\dots\dots \end{cases}$

Nhận dạng: **tích hai hàm khác loại nhân nhau** (ví dụ: mũ nhân lượng giác,...)

Thứ tự ưu tiên **chọn u** là: "**log – đa – lượng – mũ**" và **dv** là **phần còn lại**.

Nghĩa là nếu có  $\ln$  hay  $\log_a x$  thì chọn  $u = \ln$  hay  $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$  và  $dv =$  còn lại. Nếu không có  $\ln$ ;  $\log$  thì chọn  $u =$  đa thức và  $dv =$  còn lại,...

**CHÚ Ý:**  $\int_a^b$  (hàm mũ). (lượng giác).  $dx \longrightarrow$  tích phân từng phần luân hồi.

Nghĩa là sau khi đặt  $u, dv$  để tính tích phân từng phần và tiếp tục tính  $\int u.dv$  sẽ xuất hiện lại tích phân ban đầu. Giả sử tích phân được tính ban đầu là  $I$  và nếu lặp lại, ta sẽ không giải tiếp mà xem đây là phương trình bậc nhất ẩn là  $I \xrightarrow{\text{giải}} I$ .

**Câu 1. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét  $\int_0^2 xe^{x^2} dx$ , nếu đặt  $u = x^2$  thì  $\int_0^2 xe^{x^2} dx$  bằng

A.  $2 \int_0^2 e^u du$ .

B.  $2 \int_0^4 e^u du$ .

C.  $\frac{1}{2} \int_0^2 e^u du$ .

D.  $\frac{1}{2} \int_0^4 e^u du$ .

**Câu 2. (Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân  $I = \int_1^e x \ln x dx$ :

A.  $I = \frac{e^2 - 1}{4}$

B.  $I = \frac{1}{2}$

C.  $I = \frac{e^2 - 2}{2}$

D.  $I = \frac{e^2 + 1}{4}$

- Câu 3. (Mã 103 2018)** Cho  $\int_1^e (1+x \ln x) dx = ae^2 + be + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?  
A.  $a+b=c$                       B.  $a+b=-c$                       C.  $a-b=c$                       D.  $a-b=-c$
- Câu 4. (Mã 104 2018)** Cho  $\int_1^e (2+x \ln x) dx = ae^2 + be + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $a+b=c$                       B.  $a-b=c$                       C.  $a-b=-c$                       D.  $a+b=-c$
- Câu 5. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Biết  $\int_0^1 x \ln(x^2+1) dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$  và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản). Tính  $P = 13a + 10b + 84c$ .  
A. 193.                      B. 191.                      C. 190.                      D. 189.
- Câu 6. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho  $a$  là số thực dương. Tính  $I = \int_0^a \sin^{2016} x \cdot \cos(2018x) dx$  bằng:  
A.  $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \sin 2017a}{2016}$ .                      B.  $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}$ .  
C.  $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2016}$ .                      D.  $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}$ .
- Câu 7. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(0) = -1$  và  $f'(x) = x(6+12x+e^{-x})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng  
A.  $3e$ .                      B.  $3e^{-1}$ .                      C.  $4-3e^{-1}$ .                      D.  $-3e^{-1}$ .
- Câu 8. (Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Biết  $I = \int_0^4 x \ln(x^2+9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực. Tính giá trị của biểu thức  $T = a + b + c$ .  
A.  $T = 9$ .                      B.  $T = 11$ .                      C.  $T = 8$ .                      D.  $T = 10$ .
- Câu 9. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Xét hàm số  $f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x) dx$ . Giá trị của  $f(\ln(5620))$  bằng  
A. 5622.                      B. 5620.                      C. 5618.                      D. 5621.
- Câu 10.** Tích phân  $\int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$  bằng  
A.  $\frac{-5-3e^2}{4}$ .                      B.  $\frac{5-3e^2}{4}$ .                      C.  $\frac{5-3e^2}{2}$ .                      D.  $\frac{5+3e^2}{4}$ .
- Câu 11. (THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Biết rằng tích phân  $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b \cdot e$ , tích  $a \cdot b$  bằng  
A. -15.                      B. -1.                      C. 1.                      D. 20.

**Câu 12. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho tích phân  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$  với  $a$  là số thực,  $b$  và  $c$  là các số dương, đồng thời  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức  $P = 2a + 3b + c$ .

- A.  $P = 6$ . B.  $P = 5$ . C.  $P = -6$ . D.  $P = 4$ .

**Câu 13. (THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$ . Tìm đẳng thức đúng?

- A.  $I = -(x-1) \cos 2x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ . B.  $I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .  
C.  $I = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ . D.  $I = -(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ .

**Câu 14. (Chuyên KHTN 2019)** Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên  $a, b, c$  sao cho  $\int_2^3 (4x+2) \ln x dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ . Giá trị của  $a + b + c$  bằng

- A. 19. B. -19. C. 5. D. -5.

**Câu 15. (HSG Bắc Ninh 2019)** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $P = a + 4b$ .

- A.  $P = 0$  B.  $P = 1$  C.  $P = 3$  D.  $P = -3$

**Câu 16.** Tính tích phân  $I = \int_1^{2^{1000}} \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ , ta được

- A.  $I = -\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} + 1001 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}$ . B.  $I = -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$ .  
C.  $I = \frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} - 1001 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}$ . D.  $I = \frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} - \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$ .

**Câu 17.** Biết  $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \ln b$ , với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $b$  là số nguyên tố. Tính  $6a + 7b$ .

- A.  $6a + 7b = 33$ . B.  $6a + 7b = 25$ . C.  $6a + 7b = 42$ . D.  $6a + 7b = 39$ .

**Câu 18. (Chuyên Hưng Yên 2019)** Biết rằng  $\int_1^a \ln x dx = 1 + 2a$ , ( $a > 1$ ). Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A.  $a \in (18; 21)$ . B.  $a \in (1; 4)$ . C.  $a \in (11; 14)$ . D.  $a \in (6; 9)$ .

**Câu 19. (KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân  $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tổng  $a + b$  bằng

- A. 1. B. -3. C. 5. D. -1.

**Câu 20. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh -2019)** Tính tích phân  $I = \int_1^2 x e^x dx$ .

- A.  $I = e^2$ .                      B.  $I = -e^2$ .                      C.  $I = e$ .                      D.  $I = 3e^2 - 2e$ .

**Câu 21. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Biết rằng  $\int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$  trong đó  $m, n, p \in \mathbb{Q}$ . Tính  $m + n + 2p$

- A.  $\frac{5}{4}$ .                      B.  $\frac{9}{2}$ .                      C. 0.                      D.  $-\frac{5}{4}$ .

**Câu 22. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Biết  $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \ln b$ , với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $b$  là số nguyên tố. Tính  $3a + 4b$ .

- A. 42.                      B. 21.                      C. 12.                      D. 32.

**Câu 23. (Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho tích phân  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$  với  $a$  là số thực,  $b$  và  $c$  là các số nguyên dương, đồng thời  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức  $P = 2a + 3b + c$ .

- A.  $P = 6$                       B.  $P = -6$                       C.  $P = 5$                       D.  $P = 4$

**Câu 24.** Biết  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$ . Khi đó, giá trị của  $a^2 + b$  bằng

- A. 11.                      B. 7.                      C. 13.                      D. 9.

**Câu 25.** Cho  $\int \ln(x^2 - x) dx = F(x)$ ,  $F(2) = 2 \ln 2 - 4$ . Khi đó  $I = \int_2^3 \left[ \frac{F(x) + 2x + \ln(x-1)}{x} \right] dx$  bằng

- A.  $3 \ln 3 - 3$ .                      B.  $3 \ln 3 - 2$ .                      C.  $3 \ln 3 - 1$ .                      D.  $3 \ln 3 - 4$

**Câu 26. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Biết  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$ , với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức  $T = a^2 + b$ .

- A.  $T = 9$ .                      B.  $T = 13$ .                      C.  $T = 7$ .                      D.  $T = 11$ .

**Câu 27. (Thpt Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} dx = \frac{a}{2} \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị của  $a + 2(b+c)$  là:

- A. 0.                      B. 9.                      C. 3.                      D. 5.

**Câu 28.** Cho  $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $P = ab$ .

- A.  $P = \frac{3}{2}$ .                      B.  $P = 0$ .                      C.  $P = \frac{-9}{2}$ .                      D.  $P = -3$ .

**Câu 29. (KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân  $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a + be$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tổng  $a + b$  bằng

A. 1.                                      B. -3.                                      C. 5.                                      D. -1.

**Câu 30. (Sở Phú Thọ 2019)** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c\pi$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Giá trị của  $abc$  bằng

A.  $\frac{15}{8}$                                       B.  $\frac{5}{8}$                                       C.  $\frac{5}{4}$                                       D.  $\frac{17}{8}$

**Câu 31. (Chuyên Thái Bình 2019)** Biết  $\int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{x+1}{x}} dx = \frac{a}{b} e^{\frac{c}{d}}$  trong đó  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương và các phân số  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  là tối giản. Tính  $bc - ad$ .

A. 12.                                      B. 1.                                      C. 24.                                      D. 64.

**Câu 32. (THPT Yên Khánh A 2018)** Cho  $\int_0^2 \frac{x + \ln(x+1)}{(x+2)^2} dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ln 3$  (với  $a, c \in \mathbb{Z}; b, d \in \mathbb{N}^*; \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  là các phân số tối giản). Tính  $P = (a+b)(c+d)$ .

A. 7.                                      B. -7.                                      C. 3.                                      D. -3.

**Câu 33. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(1) = \frac{1}{2}$  và  $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  với  $x > -1$ . Biết  $\int_1^2 f(x) dx = a \ln \frac{b}{c} - d$  với  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương,  $b \leq 3$  và  $\frac{b}{c}$  tối giản. Khi đó  $a + b + c + d$  bằng

A. 8.                                      B. 5.                                      C. 6.                                      D. 10.

Hoặc Facebook: Nguyễn Vương 🔗 <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: [Nhóm Nguyễn Bào Vương \(TÀI LIỆU TOÁN\)](#) 🔗 <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương  
🔗 [https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5glEI1iRUbT3nwJfA?view\\_as=subscriber](https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5glEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber)

🔗 Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>

Nguyễn Bảo Vương