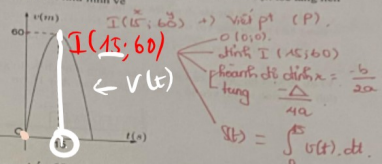


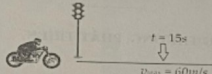
$$= \begin{cases} 4-3x^2, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \text{ Tính } f(2) = 1$$

Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1. Một xe máy phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình vẽ



Biết rằng, sau 15 s thì xe đạt vận tốc cao nhất là 60 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bằng bao nhiêu mét?



Bài giải

Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường parabol có đỉnh $I(15; 60)$, đồng thời đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$, suy ra $\begin{cases} c = 0 \\ 30a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{b}{30} \end{cases}$

$$\begin{cases} a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c = 60 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot 15^2 + b \cdot 15 = 60 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot 15^2 + b \cdot 15 = 60 \\ 30a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{15} \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\frac{4}{15}t^2 + 8t$$

Theo đồ thị thì xe bắt đầu tăng tốc lúc $t = 0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t = 15$ s nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$\int_0^{15} v(t) dt = \int_0^{15} \left(-\frac{4}{15}t^2 + 8t \right) dt = \left(-\frac{4}{45}t^3 + 4t^2 \right) \Big|_0^{15} = 600(m)$$

Vậy từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được một quãng đường dài 600 m.

Bài toán 2. BÀI TOÁN VỀ CÔNG CỦA LỰC TÁC DỤNG VÀO VẬT

Phương pháp giải

- Nếu một lực không đổi F tác dụng lên vật M dọc theo một khoảng cách (độ dời) d , thì công W sinh ra trong quá trình dịch chuyển bằng tích của lực F và độ dài khoảng cách d mà nó đã tác dụng, ta có công thức $W = F \cdot d$.

- Định nghĩa trên luôn đúng khi lực F không đổi. Tuy nhiên, nhiều trường hợp lực \vec{F} biến thiên trong suốt quá trình thực hiện công. Trong các tình huống như vậy, người ta thường chia quá trình này thành

NX: $v(t)$: parabol $\rightarrow y = ax^2 + bx + c$

$v(t)$ đi qua $(0, 0) \Rightarrow 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$$\Rightarrow c = 0 \quad (3)$$

$v(t)$ đi qua $I(15; 60) \Rightarrow 60 = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + 0 \quad (2)$

NX: $I(15; 60)$ là cực trị $\Rightarrow x = 15$ là Nº của đạo hàm

$$v'(t) = 2ax + b \Rightarrow 2 \cdot a \cdot 15 + b = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 30a + b = 0 & (1) \\ 225a + 15b + 0 = 60 & (2) \\ c = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{15} \\ b = 8 \\ c = 0 \end{cases}$$

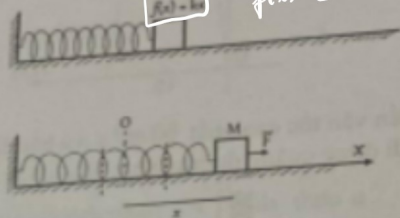
$$\Rightarrow v(t) = -\frac{4}{15}t^2 + 8t$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{15} v(t) dt = \int_0^{15} \left(-\frac{4}{15}t^2 + 8t \right) dt = 600(m)$$

$$\begin{cases} W = F \cdot d \\ W = \int_a^b f(x) dx \\ \boxed{F = f(x)} \end{cases}$$

động lực) tương ứng với trục tọa độ x của vật từ vị trí $x = a$ đến vị trí $x = b$ là: $W = \int_a^b f(x) dx$

Ví dụ 2. Một lực $40N$ cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$ tính công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài $15cm$ đến $16cm$.



$$x = 15 - 10 = 5cm$$

$$f(x) = kx$$

$$F = f(x) = kx$$

$$5cm = 0,05m$$

$$\Rightarrow 40 = k \cdot 0,05 \Rightarrow k = \frac{40}{0,05} = 800$$

$$\Rightarrow f(x) = 800 \cdot x$$

$$\begin{matrix} 10 \rightarrow 15 \rightarrow 5cm & 0,05 \\ 10 \rightarrow 18 \rightarrow 8cm & 0,08 \end{matrix} \Rightarrow \int_{0,05}^{0,08} 800 \cdot x dx = 1,56(J)$$

Bài toán 3. BÀI TOÁN VỀ TĂNG TRƯỞNG, PHÁT TRIỂN

Phương pháp giải

- Cho hàm số $f(x)$ biểu diễn cho sự tăng (hay giảm) số lượng của một đối tượng nào đó (số người, khuẩn, vi trùng, lượng nước chảy, ...)

- Giá trị $f(x)$ là số lượng của đối tượng đó tại thời điểm x .

- Đạo hàm $f'(x)$ chính là tốc độ tăng (hay giảm) của đối tượng đó tại thời điểm x .

- Số lượng tăng thêm (hoặc giảm đi) của đối tượng trong khoảng $x \in [a; b]$ là $\int_a^b f'(x) dx$

- Số lượng tăng thêm (hoặc giảm đi) của đối tượng

Ví dụ 3. Tốc độ thay đổi của số lượng người V (tính bằng ngàn người) tham gia công tác tình nguyện nước Mỹ từ năm 2000 đến năm 2006 có thể được mô hình bởi hàm số $V(t) = 119,85t^2 - 30e^t + 37,26$ với t là năm ($t = 0$ ứng với năm 2000). Hỏi số lượng người tham gia tình nguyện trong giai đoạn tăng hay giảm đi với số lượng bao nhiêu?

Phương pháp giải

- Nếu biết $f(x)$ là hàm giá trị biến, thì hàm mục tiêu sẽ là $\int f(x) dx = F(x) + C$.

- Rút ra kết luận bài toán.

- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 4. Lợi nhuận biên của một sản phẩm được xác định bởi $\pi'(x) = -0,0005x + 12,2$.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi sản lượng bán tăng từ 100 lên 101 đơn vị?

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi sản lượng bán tăng từ 100 lên 110 đơn vị?

$$V(t) = 119,85t^2 - 30 \cdot e^t + 37,26e^{-t}$$

$$2000 \rightarrow t = 0$$

$$2006 \rightarrow t = 6$$

$$\Rightarrow \int_0^6 119,85t^2 - 30 \cdot e^t + 37,26 \cdot e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \text{Giảm: } 3406 \text{ người}$$

$$f(x) = -0,0005x + 12,2$$

$$\Rightarrow \int_{100}^{101} f(x) dx = 12,15$$

$$\Rightarrow \int_{100}^{110} f(x) dx = 121,475$$

Ví dụ 5. Trong kì kinh doanh 2 năm, chi phí sản xuất một đơn vị sản phẩm được cho bởi phương trình $C = 0,005t^2 + 0,01t + 13,15; 0 \leq t \leq 24, t$ tính bằng tháng.

$$C = 0,005t^2 + 0,01t + 13,15$$

$$\int_0^{24} (0,005t^2 + 0,01t + 13,15) dt = 341,52$$

$$\Rightarrow \text{Chi phí} = \frac{341,52}{24} = 14,23$$

SΔ vuông = $\frac{1}{2}$ tích 2 cạnh góc vuông

$$\Rightarrow V(t) = 2t$$

$$\int_0^{2016} t^{\ln t} dt = \frac{t^x}{\ln t} \Big|_0^{2016}$$

$$\Rightarrow \frac{7^{2016}}{\ln 7} - \frac{7^0}{\ln 7} = \frac{7^{2016}}{\ln 7} - \frac{1}{\ln 7} = \frac{7^{2016} - 1}{\ln 7}$$

$$S = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^1 v(t) dt + \int_1^2 v(t) dt$$

$$= \int_0^1 2t dt + \int_1^2 2 dt = 3$$

Câu 43. Giá trị của $\int_0^1 (2019x^{2018} - 1) dx$ bằng

- A. 0. B. $2^{2017} + 1$. C. $2^{2017} - 1$. D. 1.

$$\int_0^1 (2019x^{2018} - 1) dx = x^{2019} - x \Big|_0^1 = 1^{2019} - 1 - (0^{2019} - 0) = 1 - 1 - 0 + 0 = 0$$

$$\int 2019 \cdot x^{2018} - 1 dx = \int 2019 \cdot x^{2018} dx - \int 1 dx$$

$$= \frac{2019 \cdot x^{2019}}{2019} - x = x^{2019} - x$$

Câu 44. $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 6$.

B. $S = 7$.

C. $S = 5$.

D. $S = 8$.

$$\int \frac{x+2}{x} dx = \int \frac{x}{x} + \frac{2}{x} dx = \int 1 + \frac{2}{x} dx = x + 2 \ln|x|$$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = x + 2 \ln|x| \Big|_1^3 = 3 + 2 \ln 3 - (1 + 2 \ln 1)$$

$$= 3 + 2 \ln 3 - 1 = \underbrace{2}_{a} + \underbrace{2 \ln 3}_{b \ln c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 7$$

Câu 46. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$ bằng

A. $2\sqrt{3} - 1$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $2 + \sqrt{3}$.

D. $1 + \sqrt{3}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -2 \cos x + \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -2 \cos \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{3} - (-2 \cos 0 + \tan 0)$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} - (-2 \cdot 1 + 0) = -1 + \sqrt{3} + 2 + 0 = 1 + \sqrt{3}$$

Câu 47. Giá trị của $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x dx$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}$.

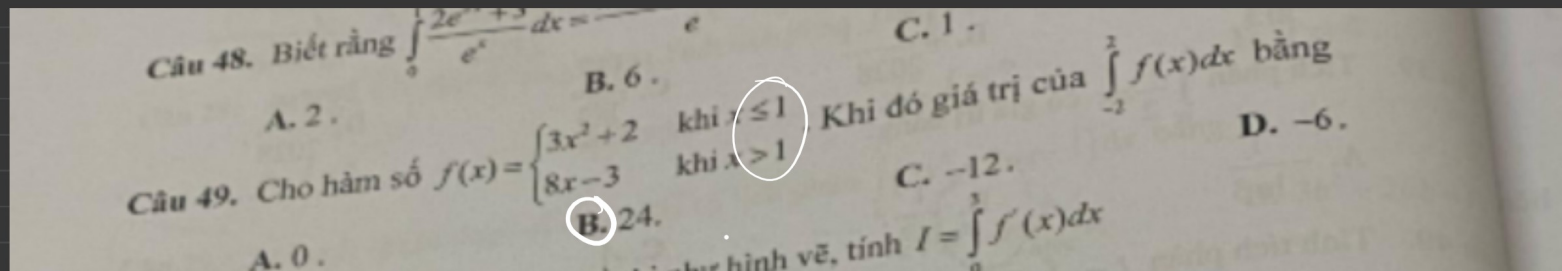
D. $\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}$.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x dx$$

$$\int \cot^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\cot x - x \\
 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x \, dx &= -\cot x - x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \left(-\cot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= -\cot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &\downarrow \\
 F(x) &= \begin{cases} x^3 + 2x + C_1 & x \leq 1 \\ 4x^2 - 3x + C_2 & x > 1 \end{cases} \text{ h/s tại } x=1 \Rightarrow \begin{aligned} &1^3 + 2 \cdot 1 + C_1 = 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + C_2 \\ \Rightarrow &1 + 2 + C_1 = 4 - 3 + C_2 \\ \Rightarrow &C_1 + 3 = C_2 + 1 \Rightarrow C_2 = C_1 + 2 \end{aligned} \\
 \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-2}^1 (3x^2 + 2) dx + \int_1^2 (8x - 3) dx \\
 &= 24 \Rightarrow \text{B}
 \end{aligned}$$