PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

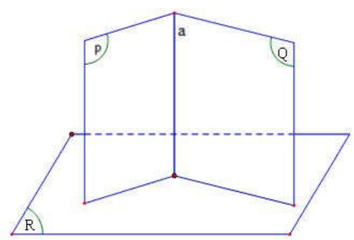
C. Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 0^0.

D. Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn 0^0 và nhỏ hơn 90^0.

Lời giải:

Chọn B

A sai vì hai mặt phẳng đó có thể cắt nhau.



C Sai vì hai đường thẳng đó có thể trùng nhau.

D Sai vì hai đường thẳng đó có thể cheo nhau.

Câu 2. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng tùy ý nằm trong mỗi mặt phẳng.

B. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

D. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai vec tơ chỉ phương của hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Lời giải

Chọn B

Câu 3. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau.
B. Hình chóp tứ giác đều có các cạnh bên bằng nhau.
C. Hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông.
D. Hình chóp tứ giác đều có hình chiếu vuông góc của đỉnh lên đáy trùng với tâm của đáy.

Lời giải

Chọn A
Lý thuyết.

Câu 4. Cho các đường thẳng a,b và các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau

A. $\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ a\subset(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

B. $\begin{cases} a\perp b \\ a\perp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow b//(\alpha)$.

C. $\begin{cases} a\perp b \\ a\subset(\alpha) \\ b\subset(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$.

D. $\begin{cases} (\alpha)\perp(\beta) \\ a\subset(\alpha) \\ b\subset(\beta) \end{cases} \Rightarrow a\perp b$.

Lời giải

Chọn A

Câu 5. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

D. Đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đườngthẳng chéo nhau a,b khi và chỉ khi d vuông góc với cả a và b.

Lời giải

Chọn A

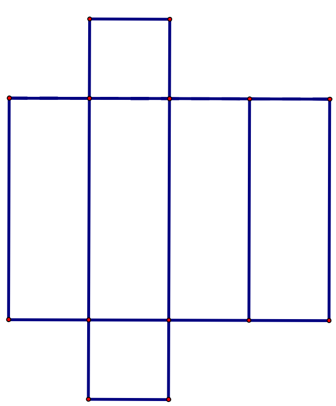
Câu 6. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α). có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và vuông góc với (α).

A. 2. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 1.

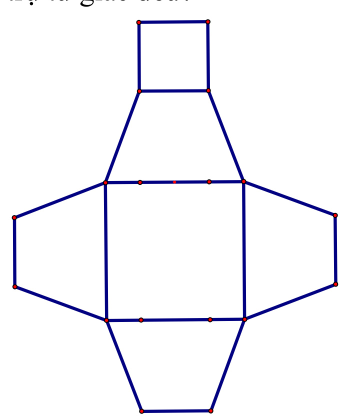
Lời giải

Chọn D

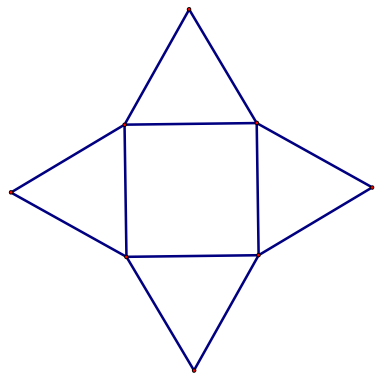
Câu 7. Mảnh bìa **phẳng** nào sau đây có thể xếp thành lăng trụ tứ giác đều?

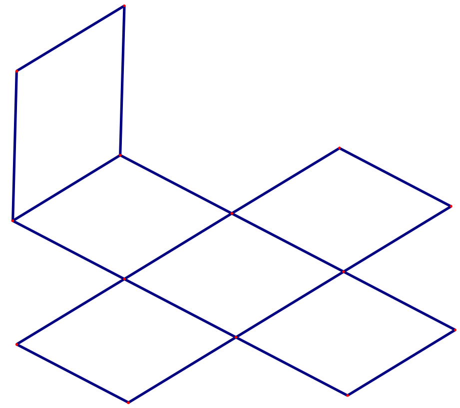


A.



B.

C. 

D. 

Lời giải

Chọn A

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng vuông góc nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

C. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều vuông góc với mặt phẳng kia.

D. Nếu hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì chúng vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn A

Câu 9. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α). Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và vuông góc với (α)?

A. 2. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Câu 10. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

i) Hình hộp đứng có đáy là hình vuông là hình lập phương

ii) Hình hộp chữ nhật có tất cả các mặt là hình chữ nhật

iii) Hình lăng trụ đứng có các cạnh bên vuông góc với đáy

iv) Hình hộp có tất cả các cạnh bằng nhau là hình lập phương

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Có hai mệnh đề đúng là ii) và iii)

Câu 11. Trong không gian cho hai đường thẳng a,b và mặt phẳng (P), xét các phát biểu sau:

(I). Nếu $a//b$ mà $a\perp(P)$ thì luôn có $b\perp(P)$.

(II). Nếu $a \perp (P)$ và $a \perp b$ thì luôn có $b // (P)$.

(III). Qua đường thẳng a chỉ có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

(IV). Qua đường thẳng a luôn có vô số mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

Số khẳng định đúng trong các phát biểu trên là

A. 1.

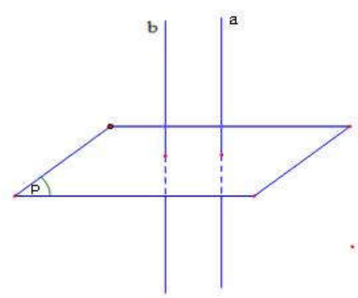
B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

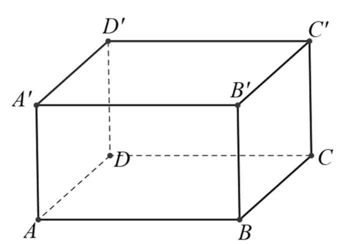
Chọn A



Khẳng định (I) đúng (Hình vẽ trên)

Khẳng định (II) sai vì nếu $a \perp (P)$ và $a \perp b$ thì $b // (P)$ hoặc $b \subset (P)$

Khẳng định (III) sai trong trường hợp đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó có vô sô mặt phẳng chứa đường thẳng a và vuông góc với mặt phẳng (P). Ví dụ hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ thì qua đường thẳng AA' ta chỉ ra được ít nhất ba mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.



Khẳng định (IV) sai trong trường hợp đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì qua đường thẳng a có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

Câu 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định sai?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

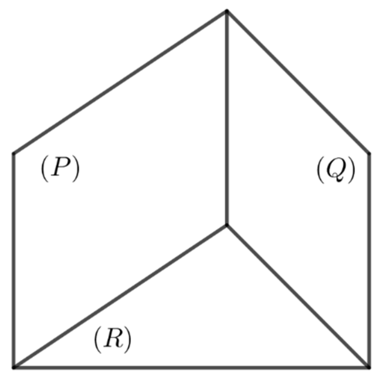
B. Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn A



Hình ảnh minh họa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) nhưng không song song với nhau.

Câu 13. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q).

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

+ Qua M có duy nhất một đường thẳng d vuông góc với (P) và (Q).

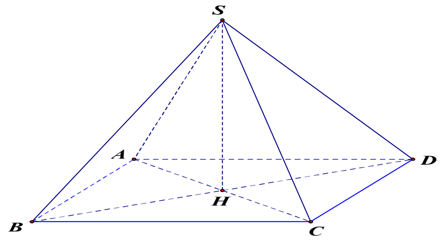
+ Mọi mặt phẳng chứa d đều vuông góc với (P) và (Q) nên có vô số mặt phẳng qua M vuông góc với (P) và (Q)

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều. Gọi H là trung điểm của cạnh AC. Tìm mệnh đề **sai?**

A. $(SAC)\perp(SBD)$. **B.** $SH\perp(ABCD)$. **C.** $(SBD)\perp(ABCD)$. **D.** $CD\perp(SAD)$.

Lời giải

Chọn D



Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $SC \perp (SBD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$.

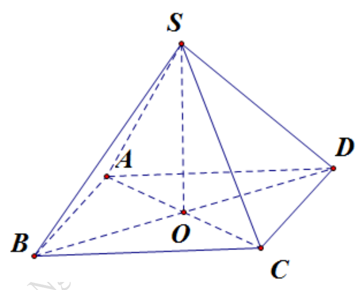
C. $(SBD) \perp (ABCD)$. **D.** $(SAC) \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $SO \perp AC; SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ mà $SO \subset (SBD)$, $SO \subset (SAC)$

$\Rightarrow (SBD) \perp (ABCD); (SAC) \perp (ABCD)$. Vậy $SC \perp (SBD)$ là mệnh đề **sai.**

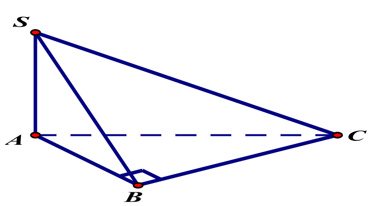


Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AB \perp BC$. **C.** $AB \perp SC$. **D.** $SB \perp BC$.

Lời giải

Chọn C



$SA \perp BC$ đúng vì $SA \perp (ABC)$.

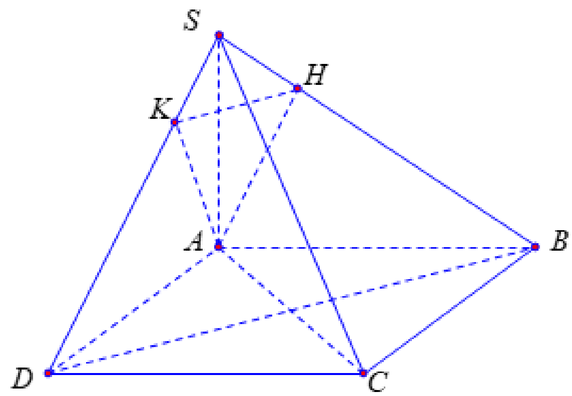
$AB \perp BC$ đúng vì ΔABC vuông tại B.

$SB \perp BC$ đúng vì $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với mặt đáy. AH, AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, SAD. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $BC \perp AH$. **B.** $SA \perp AC$. **C.** $HK \perp SC$. **D.** $AK \perp BD$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD)\end{cases}$ nên $SA \perp (ABCD)$

Suy ra $SA \perp AC$ (B đúng); $SA \perp BC$; $SA \perp BD$.

Mặt khác $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$ suy ra $BC \perp AH$ (A đúng).

và $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$ suy ra $BD \perp SC$;

Đồng thời $HK // BD$ nên $HK \perp SC$ (C đúng).

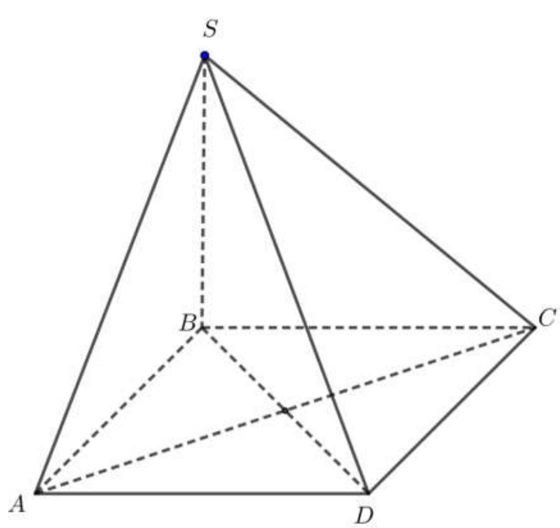
Vậy mệnh đề sai là $AK \perp BD$ (vì không đủ điều kiện chứng minh).

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD)?

A. (SBC). **B.** (SAD). **C.** (SCD). **D.** (SAC).

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

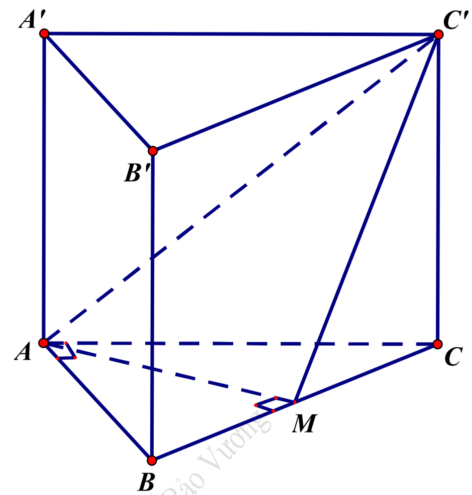
Câu 19. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $(ABB') \perp (ACC')$. **B.** $(AC'M) \perp (ABC)$.

C. $(AMC') \perp (BCC')$. **D.** $(ABC) \perp (ABA')$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp AM$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (AA'M) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'B'B)$.

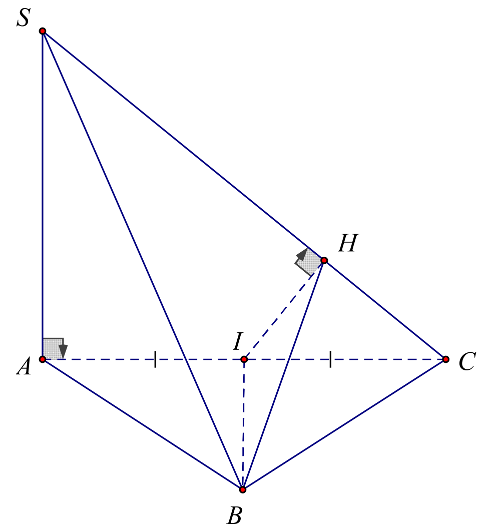
Nếu $(AC'M) \perp (ABC)$ thì suy ra $(AC'M) \equiv (AA'B'B)$: Vô lý.

Do đó B **sai**.

Câu 20. .Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH) \perp (SBC)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SBC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

Lời giải

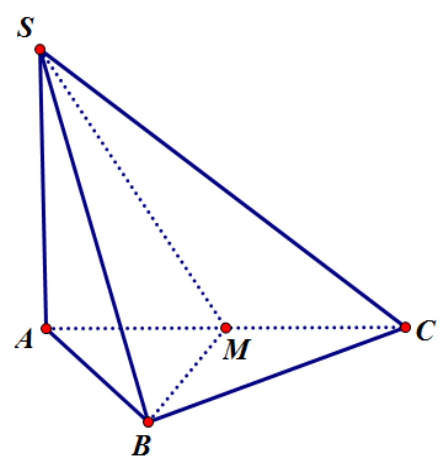


Ta có: $\begin{cases} BI \perp AC(\text{gt}) \\ BI \perp SA\left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \supset SC \Rightarrow SC \perp BI \quad (1)$.

Theo giả thiết: $SC \perp IH \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BIH)$. Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BIH) \perp (SBC)$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$, gọi M là trung điểm của AC. Mệnh đề nào **sai** ?



A. $(SAB) \perp (SAC)$. **B.** $\mathrm{BM} \perp \mathrm{AC}$. **C.** $(\mathrm{SBM}) \perp (\mathrm{SAC})$. **D.** $(\mathrm{SAB}) \perp (\mathrm{SBC})$.

Lời giải

Chọn A

+ Có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B, M là trung điểm của AC $\Rightarrow BM \perp AC$

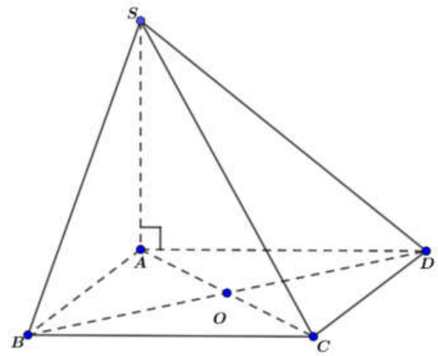
+ Có $\left.\begin{matrix} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$.

+ Có $\left.\begin{matrix} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

Vậy A sai.

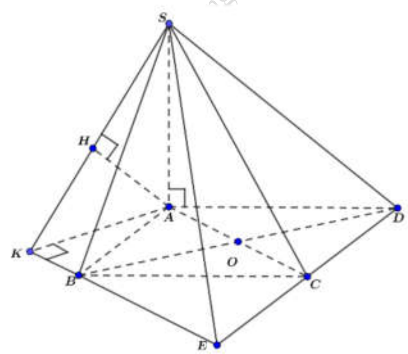
Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào sau đây là đúng?.

A. $(SBC) \perp (ABCD)$. **B.** $(SBC) \perp (SCD)$. **C.** $(SBC) \perp (SAD)$ **D.** $(SBC) \perp (SAB)$.



Lời giải

Chọn D



$\left.\begin{matrix} BC \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABCD)) \\ BC \perp AB \ (\text{gt}) \\ SA \cap AB = A \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ mà $BC \subset (SBC)$. Vậy $(SBC) \perp (SAB)$.

Câu 23. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'C)$ vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(D'BC)$. **B.** $(B'BD)$. **C.** $(D'AB)$. **D.** $(BA'C')$.

Lời giải

Chọn B

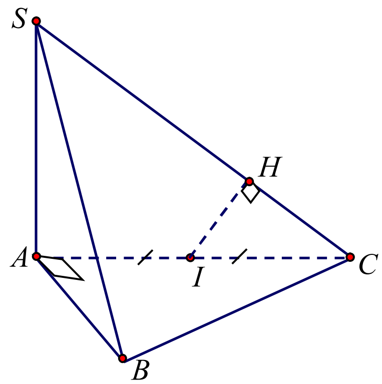
Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'D)$ mà $AC \subset (AB'C) \Rightarrow (AB'C) \perp (BB'D)$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm cạnh AC, H là hình chiếu của I trên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SBC)\perp(IHB)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(SAC)\perp(SBC)$. **D.** $(SBC)\perp(SAB)$.

Lời giải

Chọn B.



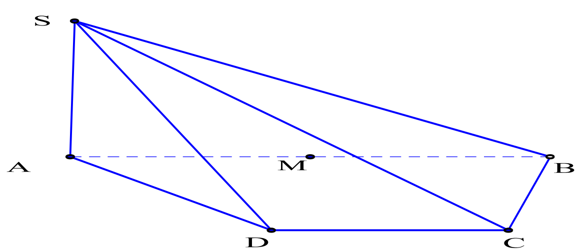
Vì $AB\perp(SAC)$ nên $(SAC)\perp(SAB)$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Biết $SA=AD=DC=a$, $AB=2a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SBD)\perp(SAC)$. **B.** $(SAB)\perp(SAD)$. **C.** $(SAC)\perp(SBC)$. **D.** $(SAD)\perp(SCD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} AB\perp AD \\ AB\perp SA \end{cases} \Rightarrow AB\perp(SAD)\Rightarrow(SAB)\perp(SAD)$, suy ra phương án B đúng.

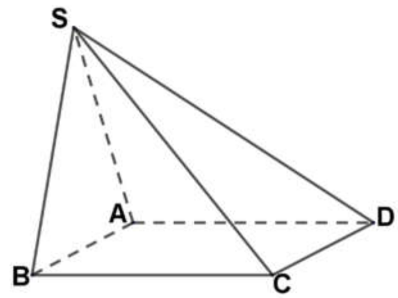
Lại có $AC^2=AD^2+DC^2=a^2+a^2=2a^2 \Rightarrow AC=a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $BC^2=MB^2+MC^2=a^2+a^2=2a^2 \Rightarrow BC=a\sqrt{2}$. Ta thấy $AB^2=AC^2+CB^2 \Rightarrow BC\perp AC$.

Như vậy $\begin{cases} BC\perp AC \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow(SBC)\perp(SAC)$, suy ra phương án C đúng.

Ta có $\begin{cases} DC\perp AD \\ DC\perp SA \end{cases} \Rightarrow DC\perp(SAD)\Rightarrow(SCD)\perp(SAD)$, suy ra phương án D đúng.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.Trong số các mặt phẳng chứa mặt đáy và các mặt bên của hình chóp, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (SAB)?



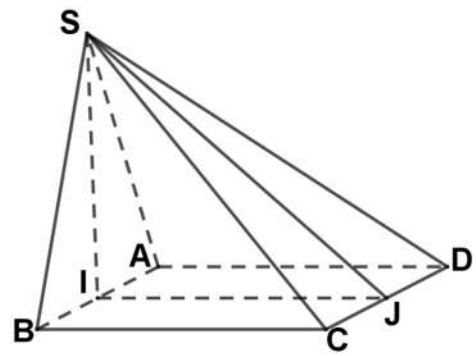
A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=\text{AB}\Rightarrow BC\perp(SAB)\\ \text{BC}\perp\text{AB}\end{cases}$$

$\Rightarrow(SBC)\perp(\text{SAB})$



Tương tự suy ra $(SAD)\perp(SAB)$.

$$\left(\widehat{(SCD);(SAB)}\right)=\widehat{ISJ}\neq 90^0$$

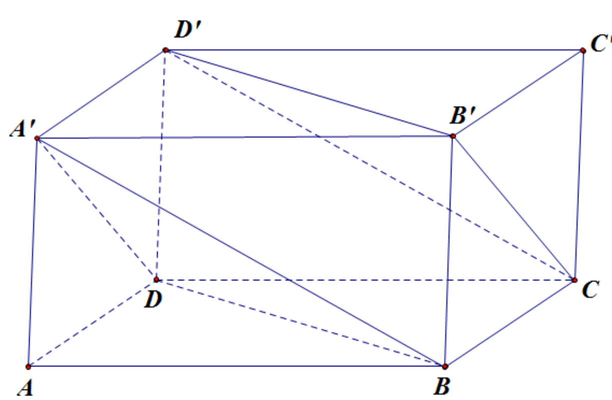
Vậy có 3 mặt phẳng $(ABCD);(SAD);(SBC)$ vuông góc với (SAB).

Câu 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, khẳng định nào **đúng** về hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$.

A. $(A'BD)\perp(CB'D')$. **B.** $(A'BD)//(CB'D')$.

C. $(A'BD)\equiv(CB'D')$. **D.** $(A'BD)\cap(CB'D')=BD'$.

Lời giải



Ta có $CD'//A'B$ mà $A'B\subset(A'BD)$ nên $CD'//(A'BD)$.

$CB' // A'D$ mà $A'D \subset (A'BD)$ nên $CB' // (A'BD)$.

Vậy $(CB'D')$ chứa hai đường thẳng CD', CB' cắt nhau và cùng song song với $(A'BD)$ từ đó ta có $(A'BD) // (CB'D')$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA = SC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

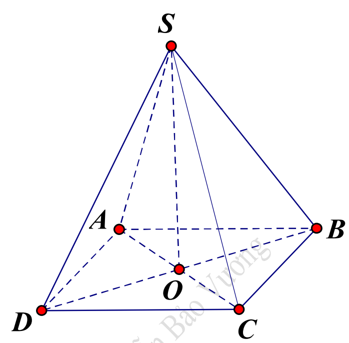
A. Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

B. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

C. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

D. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$ (1).

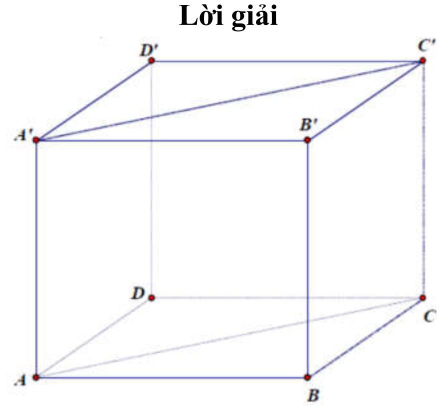
Mặt khác tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SBD)$ nên $(SBD) \perp (ABCD)$.

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'BC'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$.

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải



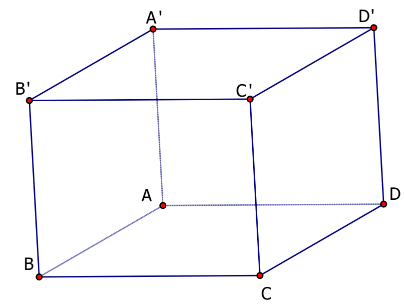
Do $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow (ACC'A') \perp (ABCD)$.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $0°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



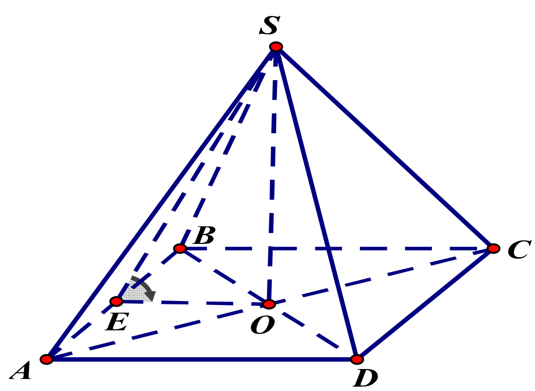
Ta thấy hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là hai mặt đáy của hình lập phương nên chúng song song với nhau.

Vậy góc giữa $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng $\left(\widehat{(ABCD),(A'B'C'D')}\right)=0°$.

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tang của góc nhị diện $[S,AB,O]$

A. 1. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

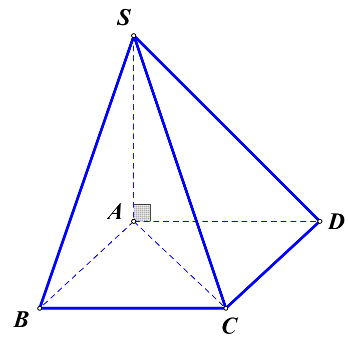
Lời giải



Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $\widehat{SEO}$; $EO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔSEO vuông tại O, ta có $\tan\widehat{SEO}=\frac{SO}{EO}=1$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng



A. Góc $\widehat{SDA}$. **B.** Góc $\widehat{SCA}$. **C.** Góc $\widehat{SCB}$. **D.** Góc $\widehat{ASD}$.

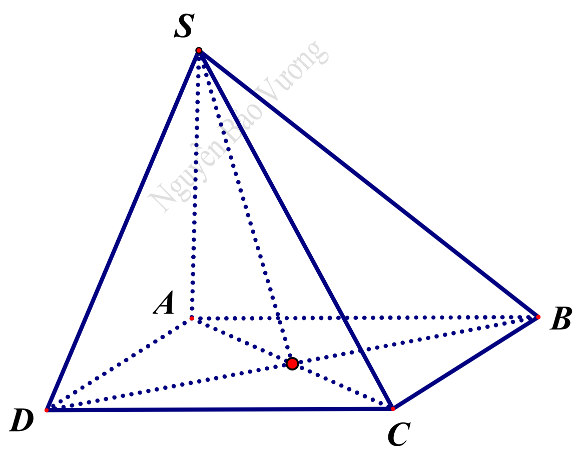
Lời giải

Ta có $\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ (ABCD) \cap (SCD) = CD \end{cases} \Rightarrow ((ABCD),(SCD)) = \widehat{SDA}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Góc nhị diện $[S, BD, A]$?

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0. **D.** 60^0.

Lời giải



Từ A ta kẻ đường vuông góc tới BD, thì chân đường vuông góc là tâm O của hình vuông, từ đây dễ thấy $SO \perp BD$, nên góc giữa hai mặt phẳng là góc SOA.

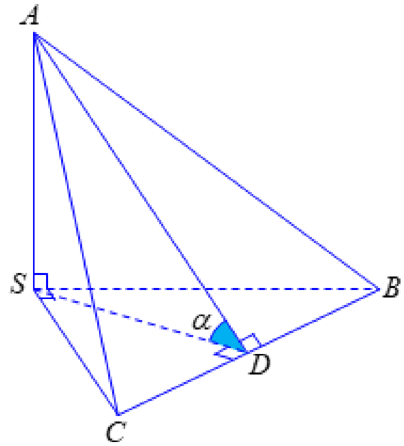
Xét tam giác ΔSOA có $\tan SOA = \dfrac{SA}{OA} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$. Vậy góc cần tìm bằng 60^0.

Câu 34. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB; SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Tính $\cos\alpha$, trong đó α là góc nhị diện $[S, BC, A]$

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

❍ **Cách 1:**



Gọi D là trung điểm cạnh BC.

Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $SD \perp BC$ nên $BC \perp (SAD)$.

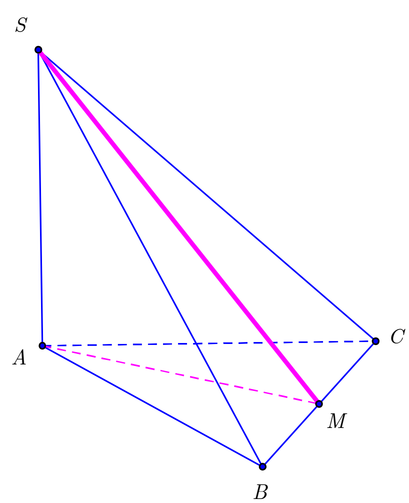
$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SDA} = \alpha$.

Khi đó tam giác SAD vuông tại S có $SD = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ và $\cos\alpha = \frac{SD}{AD} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc nhị diện $[S, BC, A]$

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Kẻ $AM \perp BC$ tại M. Ta có $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\(SAM)\perp BC\\(SAM)\cap(SBC)=SM\\(SAM)\cap(ABC)=AM\end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\left(\widehat{SM,AM}\right)$.

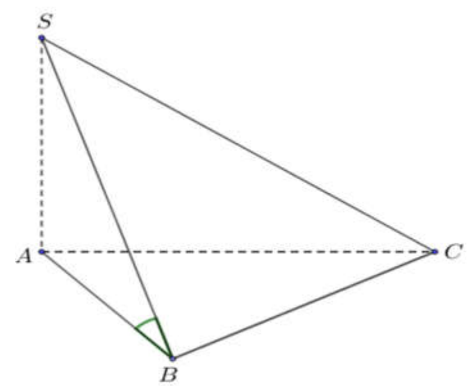
Góc nhị diện $[S,BC,A]$ bằng góc $\widehat{SMA}$.

Ta có $\tan\widehat{SMA}=\dfrac{SA}{AM}=\dfrac{a}{a}=1\Rightarrow\widehat{SMA}=45°$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=BC=a$, $SA=a\sqrt{3}$, $SA\perp(ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải



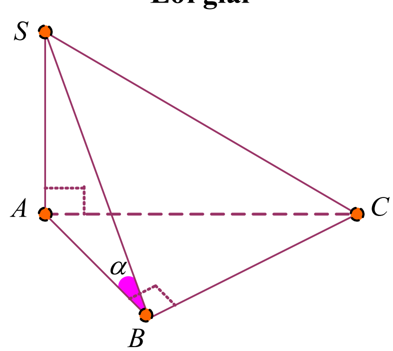
Ta có $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SA$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

$\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=60^{\circ}$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$, $SA=\sqrt{3}$ cm, $AB=1$ cm, $BC=\sqrt{2}$ cm. Mặt bên (SBC) hợp với đáy một góc bằng:

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải



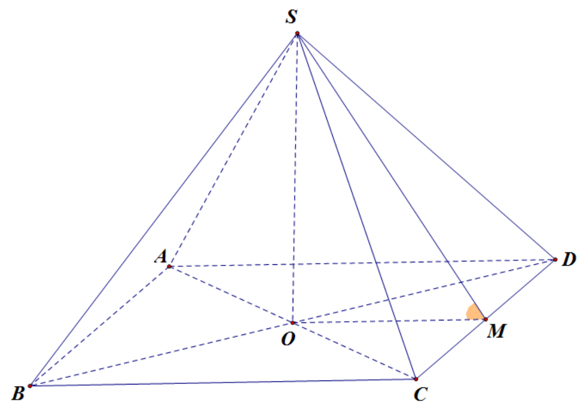
Theo giả thiết vì $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp AB$, $SA\perp BC$. Mặt khác $BC\perp AB$ nên $BC\perp SB$. Vậy góc giữa (SBC) và đáy là góc $\widehat{SBA}=\alpha$.

Trong tam giác vuông SAB ta có: $\tan\alpha = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$.

Câu 38. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\frac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng:

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$; M là trung điểm của CD.

Góc giữa mặt bên và mặt đáy là $\widehat{SMO}$.

Ta có $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SOM vuông tại O, ta có $\tan\widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60°$.

Câu 39. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng

A. 90^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 30^0

Lời giải

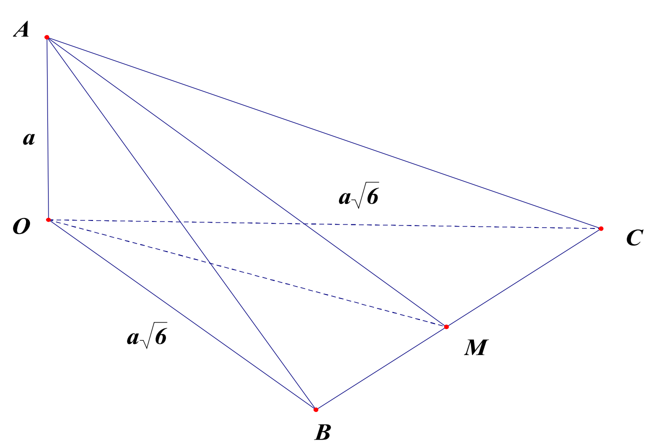
Chọn D

Gọi M là trung điểm của BC. Suy ra $OM \perp BC$. Nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) chính là góc $\widehat{OMA}$.

Ta có: Tam giác OBC vuông cân tạ O nên

$OM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác OAM vuông tại O có



$\tan\widehat{OMA}=\dfrac{OA}{OM}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\widehat{OMA}=30^0$

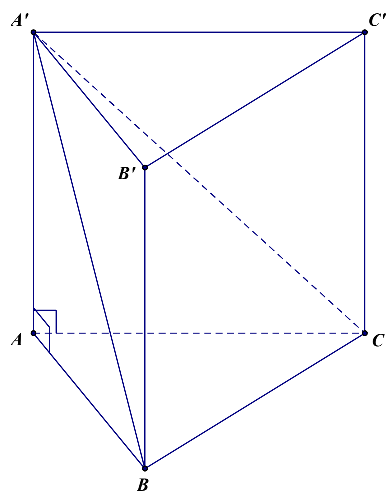
Vây, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng 30^0

Câu 40. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\sqrt{3}a^2$ (đvdt), diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$ (đvdt). Tính góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$?

A. 120°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn C



+) Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta A'BC$ trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$

+) Gọi φ là góc giữa $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$.

Ta có: $\cos\varphi=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'BC}}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2a^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=30^\circ$.

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, đường cao bằng $\dfrac{3a}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $45°$.

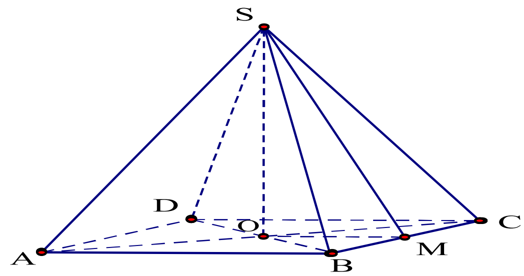
B. $30°$.

C. $60°$.

D. $75°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$ thì $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của BC thì $\widehat{SMO}$ là góc cần tìm.

Xét ΔSMO vuông tại O có:

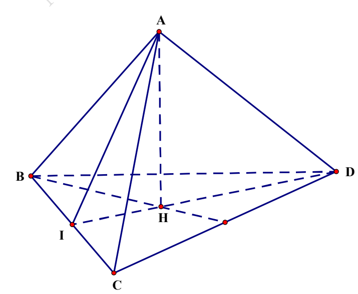
$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} = 60°.$$

Câu 42. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Côsin của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D



Hình chóp tứ giác đều $ABCD$ có H là trọng tâm của tam giác đáy BCD và DH cắt BC tại I

Ta có $AH \perp (BCD)$

Tam giác BCD đều và H là trọng tâm của tam giác BCD nên $DI \perp BC$.

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases} \Rightarrow AI \perp BC$$

$\Rightarrow$ góc giữa mặt bên (ABC) và mặt đáy (BCD) là $\widehat{AID}$

Tam giác ABC đều có AI là đường trung tuyến nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác BCD đều có H là trọng tâm nên $IH=\dfrac{1}{3}DI=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

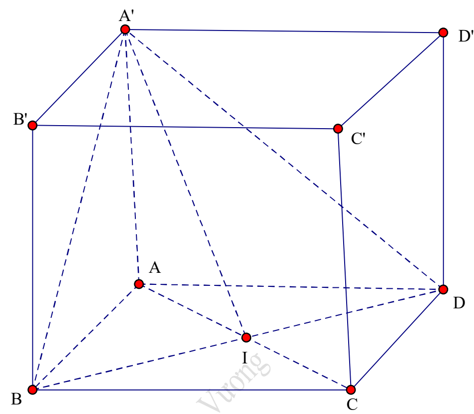
$AH\perp(BCD)$ nên tam giác AIH vuông tại H. Khi đó $\cos\widehat{AIH}=\dfrac{IH}{AH}=\dfrac{1}{3}$

Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Giá trị sin của góc nhị diện $[A',BD,A]$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I=AC\cap BD$. Ta có: $\begin{cases}BD\perp AI\\BD\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BD\perp(AIA')$; $\quad BD=(BDA')\cap(ABCD)$.

Do đó góc nhị diện $[A',BD,A]$ là $\widehat{AIA'}$.

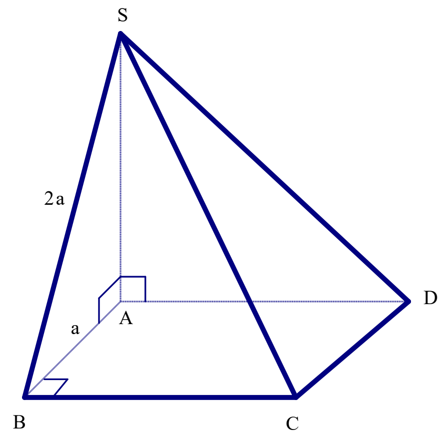
Ta có: $\Delta AA'I$ vuông tại A, có: $AA'=a; AI=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow A'I=\sqrt{AA'^2+AI^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow \sin\widehat{AIA'}=\dfrac{AA'}{A'I}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh AB $=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB=2a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) mặt phẳng đáy bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp AB$

$BC \perp SA$ vì $SA \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

$(SBC) \cap (ABCD) = BC$

$SB \subset (SBC)$, $SB \perp BC$

$AB \subset (ABCD), AB \perp BC$

$\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (SBC)mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SB, AB bằng góc $\widehat{SBA}$.

$\Delta_v SAB : \cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$.

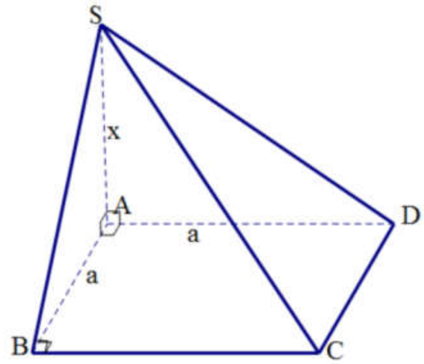
Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC)mặt phẳng đáy bằng 60°.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao $SA = x$. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60^0. Khi đó x bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SAB) \perp BC \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases}$

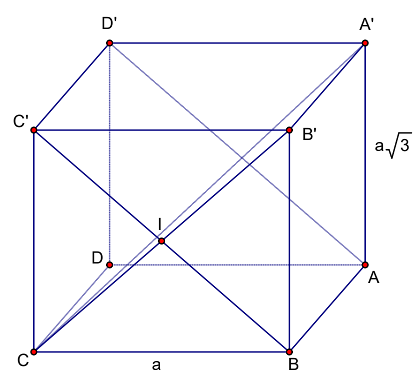
Suy ra góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng góc $S\hat{B}A = 60^0$. Do đó $\tan 60^0 = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.

Câu 46. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $BC = a, BB' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(ABC'D')$ bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $((A'B'C);(ABC'D')) = (BC';B'C)$

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo BC' và $B'C$.

+) $\tan \widehat{CB'B} = \dfrac{CB}{BB'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CB'B} = 30^\circ$.

Tam giác IBB' cân tại I, suy ra: $\widehat{BIB'} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CIB} = 60^\circ$.

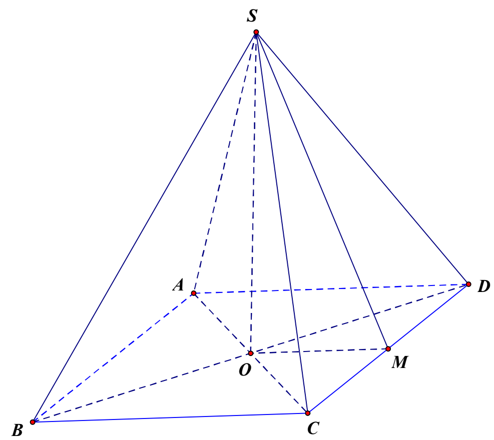
Vậy $((A'B'C);(ABC'D')) = 60^\circ$.

Câu 47. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa một mặt bên và mặt đáy.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm của cạnh $CD \Rightarrow OM = \frac{a}{2}$ và $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp SM$.

Vậy $((SCD),(ABCD)) = (OM, SM) = \widehat{SMO}$.

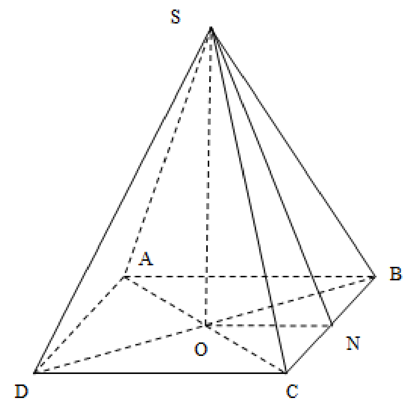
Xét tam giác vuông SOM ta có $\cos \widehat{SOM} = \frac{OM}{SM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{14}}{14}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và BD, N là trung điểm của BC.

$\alpha = \left((SBC),(ABCD)\right) = (SN,ON) = \widehat{SNO}$

$OB = \dfrac{1}{2}BD = \sqrt{2}a$

Xét ΔSOB vuông tại O: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = a\sqrt{7}$

Xét ΔSON vuông tại O: $SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = 2\sqrt{2}a$

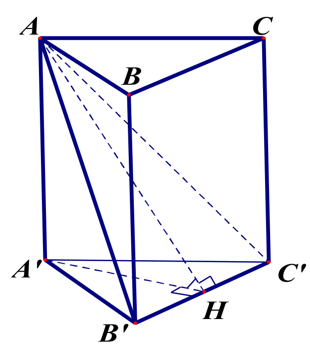
Xét ΔSON vuông tại O: $\cos\alpha = \dfrac{ON}{SN} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 49. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi α là góc nhị diện $[A,B'C',A']$. Tính giá trị của $\tan\alpha$?

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $B'C'$

$\Rightarrow AH \perp B'C'$ (do $\Delta AB'C'$ cân tại A) và $A'H \perp B'C'$(do $\Delta A'B'C'$đều).

Suy ra $[A,B'C',A'] = \widehat{AHA'}$.

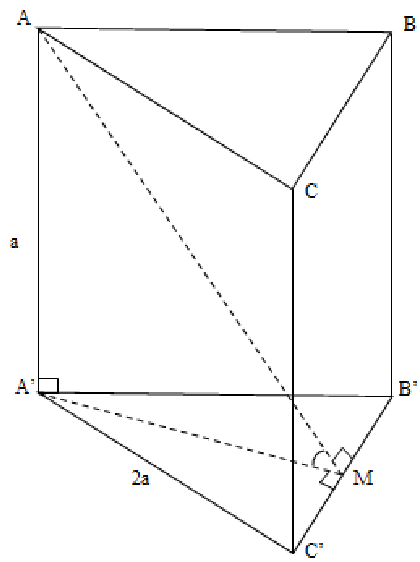
Vậy $\tan \widehat{AHA'} = \frac{AA'}{A'H} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 50. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $B'C'$. Do lăng trụ đều nên ta có: $A'M \perp B'C'$, $AM \perp B'C'$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AMA'}$.

Lại có tam giác đều $A'B'C'$ nên $A'M = 2a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Từ đó: $\tan\widehat{AMA'} = \frac{AA'}{A'M} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

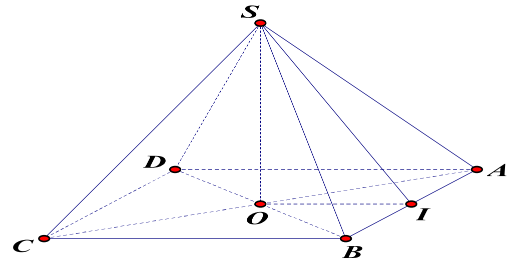
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ bằng $30°$.

Câu 51. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và chiều cao $SO = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Tính góc nhị diện $[S, AB, O]$

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = a$, gọi I là trung điểm của AB. Ta có:

$$\begin{cases} (SAB)\cap(ABCD) = AB \\ SI \perp AB \\ OI \perp AB \end{cases} \Rightarrow [S, AB, O] = \widehat{SIO}$$

Mặt khác, ta lại có:

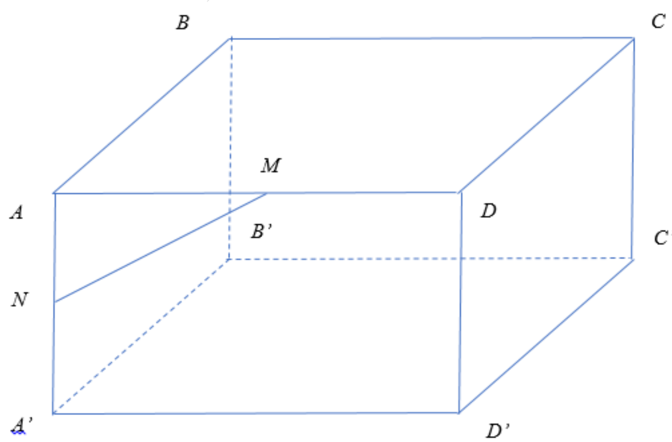
$$AB = a,\ SO = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ OI = \frac{1}{2}a \Rightarrow \tan\widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIO} = 60^o$$

Câu 52. Cho hình hộp chữ nhật $ABCB.A'B'C'D'$ có $AB = a,\ AD = a\sqrt{3},\ AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, AA'. Góc giữa hai đường thẳng MN và BB' bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C



Vì $AA' // BB'$ nên góc giữa hai đường thẳng MN và BB' bằng góc giữa MN và AA' và bằng góc $\widehat{ANM}$.

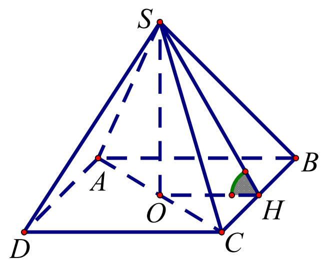
Xét tam giác ANM vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{ANM} = \frac{AM}{AN} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ANM} = 60°$.

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 53. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S,BC,O]$

A. $\alpha \approx 75°46'$. **B.** $\alpha \approx 71°21'$. **C.** $\alpha \approx 68°31'$. **D.** $\alpha \approx 65°21'$.

Lời giải



Gọi O, H lần lượt là trung điểm của AC và BC.

Xét tam giác SHC vuông tại H ta có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{(5a)^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{91}a}{2}$.

Vì $SA = SB = SC = SD = 5a$ nên $SO \perp (ABCD)$.

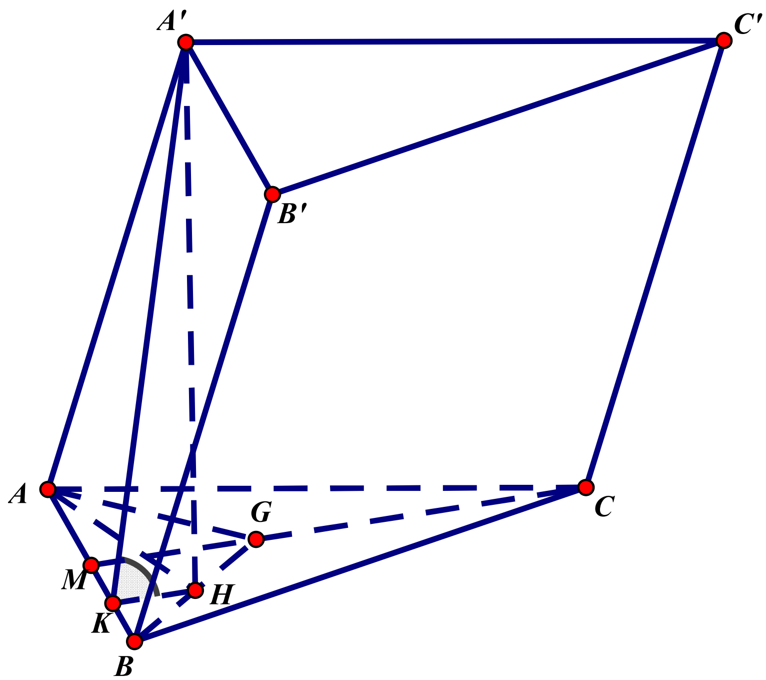
Ta có: $(SBC) \cap (ABCD) = BC$, $SH \perp BC$, $OH \perp BC$, suy ra góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SHO} = \alpha$.

Xét tam giác SOH vuông tại O, ta có: $\cos\alpha = \frac{OH}{SH} = \frac{2a}{\frac{\sqrt{91}a}{2}} = \frac{4\sqrt{91}}{91} \Rightarrow \alpha \approx 65°21'$.

Câu 54. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn BG (với G là trọng tâm tam giác ABC). Tính cosin của góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{95}}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{165}}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{134}}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{126}}$.

Lời giải



- Gọi H là trung điểm BG, theo giả thiết $A'H \perp (ABC)$.

- Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AB và BM

$\Rightarrow \begin{cases} CM \perp AB \\ HK // CM \end{cases} \Rightarrow HK \perp AB \Rightarrow (A'HK) \perp AB$

$\Rightarrow \widehat{A'KH} = \varphi$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$

- Ta có: $AB = a$, $AG = BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{AB^2 + AG^2}{2} - \dfrac{BG^2}{4} = \dfrac{7a^2}{12}$

$\Rightarrow A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \dfrac{41a^2}{12}$; $HK = \dfrac{1}{2}GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{12} \Rightarrow A'K^2 = A'H^2 + HK^2 = \dfrac{165a^2}{48}$

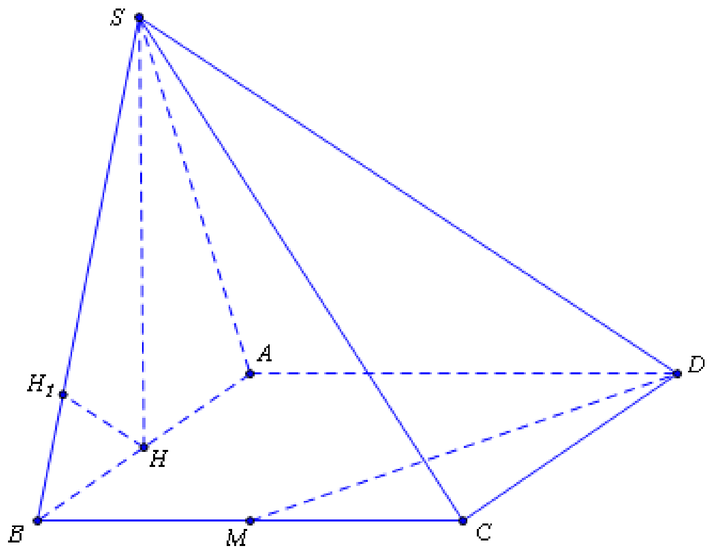
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{HK}{A'K} = \dfrac{1}{\sqrt{165}}$.

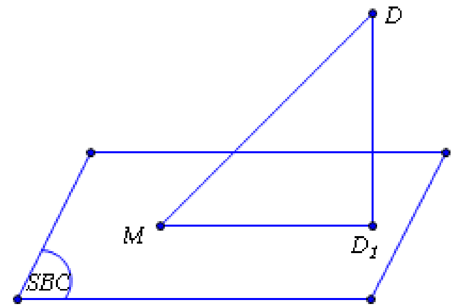
Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi đường MD và mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn C





Gọi D_1 là hình chiếu vuông góc của D trên (SBC).

Gọi α là góc tạo bởi đường MD và mặt phẳng (SBC). Khi đó:

$\sin\alpha = \dfrac{DD_1}{MD}$.

Ta có $MD = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ S của ΔSAB. Khi đó do tam giác SAB đều và $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $HH_1 \perp SB \Rightarrow HH_1 \perp (SBC) \Rightarrow d\left(H,(SBC)\right) = HH_1$ và ta có

$$\frac{1}{HH_1^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow HH_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

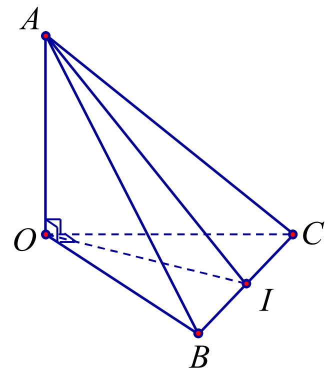
Ta có $DD_1 = d\left(D,(SBC)\right) = d\left(A,(SBC)\right) = 2d\left(H,(SBC)\right) = 2HH_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $\sin\alpha = \dfrac{DD_1}{MD} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 56. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc nhị diện $[A, BC, O]$

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Mà $OA \perp BC$ nên $AI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow \widehat{((OBC),(ABC))} = \widehat{(OI, AI)} = \widehat{OIA}$.

Ta có: $OI = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan \widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30°$.

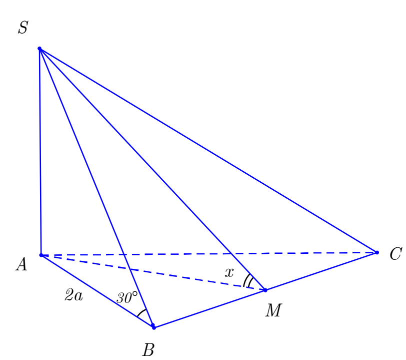
Vậy $[A, BC, O] = 30°$.

Câu 57. Cho hình chop $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh $2a$, SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Khi đó $\text{mp}(SBC)$ tạo với đáy một góc x. Tính $\tan x$.

A. $\tan x = 2$. **B.** $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\tan x = \frac{3}{2}$. **D.** $\tan x = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của AB lên (ABC).

Do đó $\widehat{SBA} = \widehat{(SB; (ABC))} = 30°$, $SA = AB \tan 30° = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có

ΔABC đều cạnh $2a \Rightarrow AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2}$

Và $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ AM\perp BC\\ SM\perp BC\end{cases} \Rightarrow \widehat{SMA}=(\widehat{SBC;ABC})=x$.

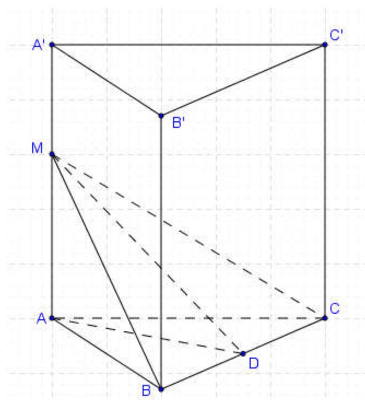
Vậy $\tan x=\dfrac{SA}{AM}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2}{2a\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 58. Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM=\dfrac{3a}{4}$. Tang của góc nhị diện $[M,BC,A]$:

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi D là trung điểm của BC.

Ta có $(MBC)\cap(ABC)=BC$.

Và $\begin{cases}BC\perp AD\\ BC\perp AM\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AMD)$.

Do đó $\alpha=[M,BC,A]=\widehat{MDA}$, (vì tam giác MAD vuông tại A).

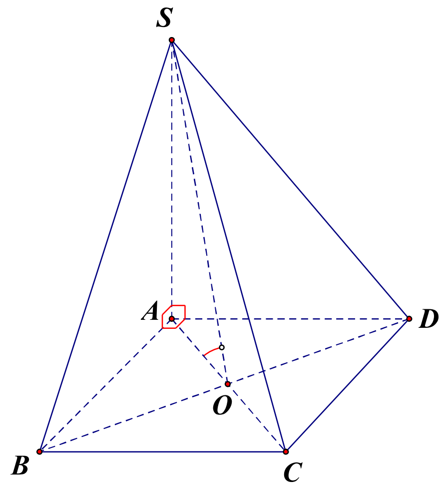
Vậy $\tan\alpha=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{3a}{4}.\dfrac{2}{a\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó góc nhị diện $[S,BD,A]$.

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $30°$ **D.** $75°$

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$ ta có $SO \perp BD, AO \perp BD$

Khi đó góc nhị diện $[S, BD, A]$ là góc $\widehat{SOA}$

Xét tam giác vuông SOA có $SA = \frac{a\sqrt{6}}{6}; OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Nên $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, suy ra góc $\widehat{SOA} = 30°$

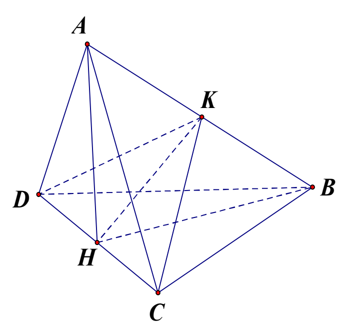
Khi đó góc nhị diện $[S, BD, A]$.bằng $30°$

Câu 60. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a,\ CD = 2x$. Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $x = \frac{a}{3}$. **B.** $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $x = \frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Do tam giác ACD cân tại A nên $AH \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp HB$

$\Rightarrow AB = \sqrt{HA^2 + HB^2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$ và $HK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$.

Do các tam giác ABC, ABD cân tại C và D nên $CK \perp AB, DK \perp AB \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $(\widehat{KC, KD})$. Khi đó:

$(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow \widehat{CKD} = 90° \Leftrightarrow KH = \dfrac{CD}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2} = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

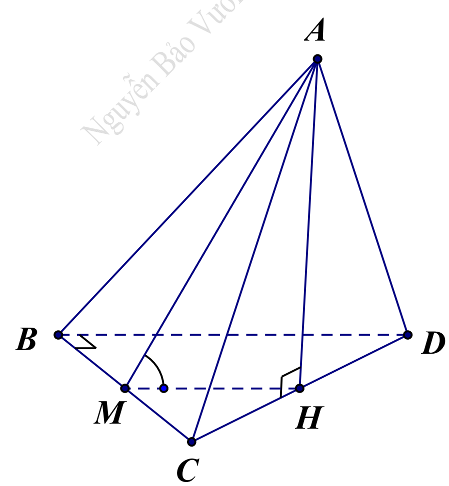
Vậy $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 61. Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác vuông tại đỉnh B, cạnh $CD = a$, $BD = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $AB = AC = AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc nhị diện $[A, BC, D]$

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\arctan 3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M và H lần lượt là trung điểm BC và CD. Do $AB = AC = AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và H là chân đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy BCD nên $AH \perp (BCD)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp MH \\ BC \perp AH \\ MH, AH \subset (AMH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMH)$.

Suy ra $\begin{cases} BC \perp MH \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow [A, BC, D] = \widehat{AMH}$.

$$\tan\widehat{AMH} = \frac{AH}{MH} = \frac{\sqrt{AB^2 - BH^2}}{\frac{1}{2}BD} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{3}.$$

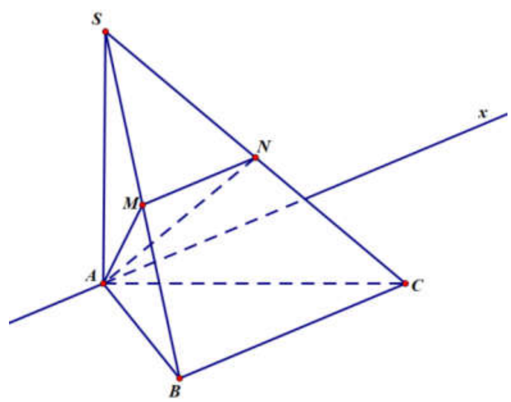
Suy ra $\widehat{AMH} = \frac{\pi}{3}$.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC), $AB = a$, $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $MN // BC$ (tính chất đường trung bình) $\Rightarrow MN // (ABC) \Rightarrow (AMN) \cap (ABC) = Ax$.

Dễ thấy, $BC \perp (SAB) \Rightarrow Ax \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} Ax \perp AB \\ Ax \perp AM \end{cases}$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là $\widehat{MAB}$. Vì tam giác SAB vuông, nên $\widehat{MAB} = \widehat{SBA}$. Ta có:

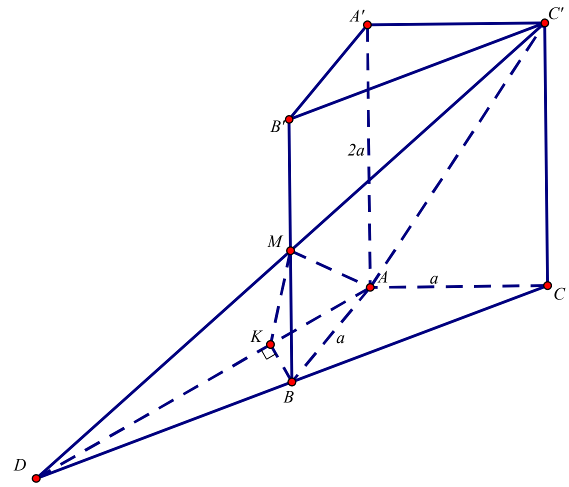
$$\cos\widehat{MAB} = \cos\widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{a}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 63. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$, $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm BB' thì côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AC'M)$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{31}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\frac{\sqrt{93}}{31}$.

Lời giải

Chọn D

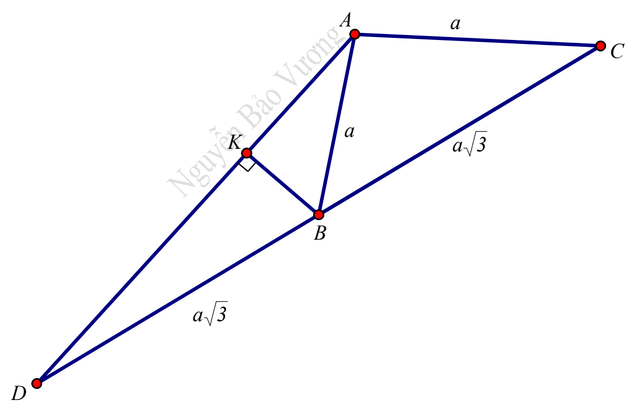


Kéo dài BC cắt $C'M$ tại D, khi đó giao tuyến của (ABC) và $(AC'M)$ là AD.

Do M là trung điểm của BB' suy ra $DB = BC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120} = a\sqrt{3}$

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BK \perp AD, K \in AD$.

Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AC'M)$. Ta có $\cos\varphi = \dfrac{BK}{MK}$.



Do tam giác ABC cân tại A và góc $\widehat{BAC} = 120^0$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^0$ suy ra $\widehat{ABD} = 150^0$.

Ta có $AD^2 = BD^2 + AB^2 - 2BD.AB.\cos 150^0 = 3a^2 + a^2 + 2a^2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 7a^2$.

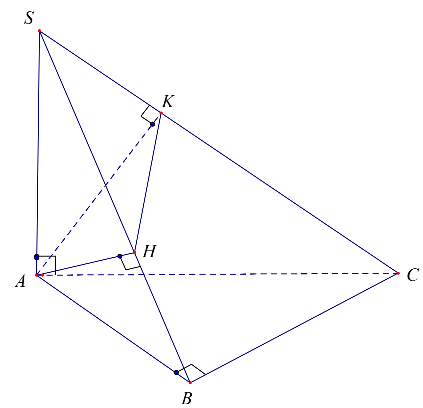
Suy ra $AD = a\sqrt{7} \Rightarrow \sin\widehat{DAB} = \dfrac{\sin 150^0.a\sqrt{3}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow BK = AB.\sin\widehat{DAB} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

$\Rightarrow MK = \sqrt{BM^2 + BK^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{28}} = \dfrac{a\sqrt{31}}{2\sqrt{7}}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{BK}{MK} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}}{\dfrac{a\sqrt{31}}{2\sqrt{7}}} = \dfrac{\sqrt{93}}{31}$.

Câu 64. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(SAC),(SBC)$. Tính $\cos\varphi = ?$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Mặt khác $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (1).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC khi đó ta có. $AH \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (3).

Mặt khác ta lại có $AK \perp SC$ (4).

Từ (3) và (4) ta có $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp HK$.

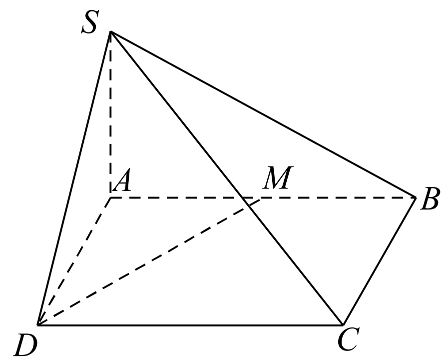
Vậy $((SAC),(SBC)) = (AK, HK) = \widehat{AKH}$.

Do $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HK$ hay tam giác AHK vuông tại H.

Ta có $AH = \frac{AB.SA}{\sqrt{AB^2 + SA^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$; $AK = \frac{AC.SA}{\sqrt{AC^2 + SA^2}} = a\sqrt{2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

Vậy $\cos AKH = \frac{HK}{AK} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

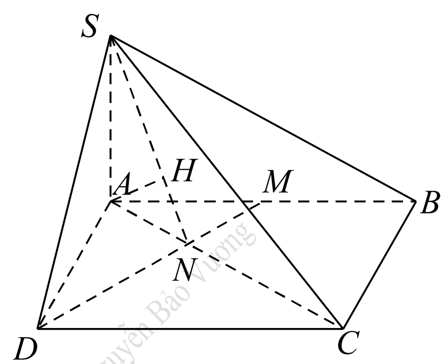
Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

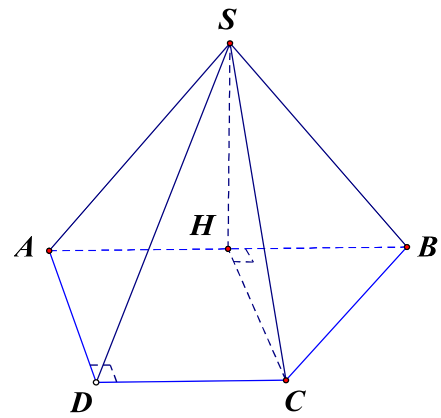


Gọi $N = AC \cap DM$. Ta có $\dfrac{AM}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, do đó hai tam giác ABC và DAM đồng dạng, suy ra $\widehat{AMN} + \widehat{MAN} = 90^\circ$. Vậy $AC \perp DM \Rightarrow DM \perp (SAC)$ mà $DM \subset (SDM)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) là 90°.

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = DC = a$. Biết SAB là tam giác đều cạnh $2a$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

A. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải



Theo giả thuyết H là hình chiếu của C lên AB nên hình chiếu của mặt phẳng (SBC) lên mặt phẳng (SAB) là (SBH). Đặt $\alpha=\widehat{((SBC),(SAB))}$ ta có: $\cos\alpha=\frac{S_{\Delta SBH}}{S_{\Delta SBC}}$.

Mặt khác ta có:

$S_{\Delta SHB}=\frac{1}{2}a.a\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$SB=SC=2a; BC=a\sqrt{2}$.

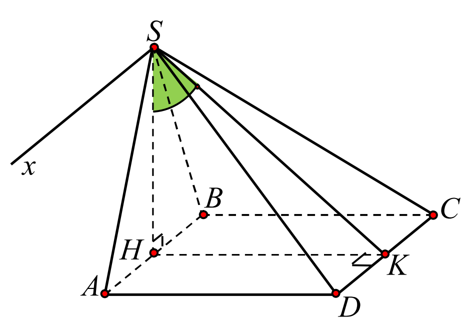
$S_{\Delta SBC}=\sqrt{\frac{a\left(4+\sqrt{2}\right)}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\left(4-\sqrt{2}\right)}{2}}=\frac{a^2\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $\cos\alpha=\frac{S_{\Delta SBH}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có $\tan$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Ta có: H là trung điểm AB thì $SH\perp AB$ (vì tam giác SAB đều)

Mà $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Mặt khác $\begin{cases}AB\parallel CD\\S\in(SAB)\cap(SCD)\end{cases}\Rightarrow(SAB)\cap(SCD)=Sx\ //\ AB\ //\ CD$

Mà $Sx\perp(SHK)\Rightarrow\begin{cases}Sx\perp SH\\Sx\perp SK\end{cases}$, với K là trung điểm CD.

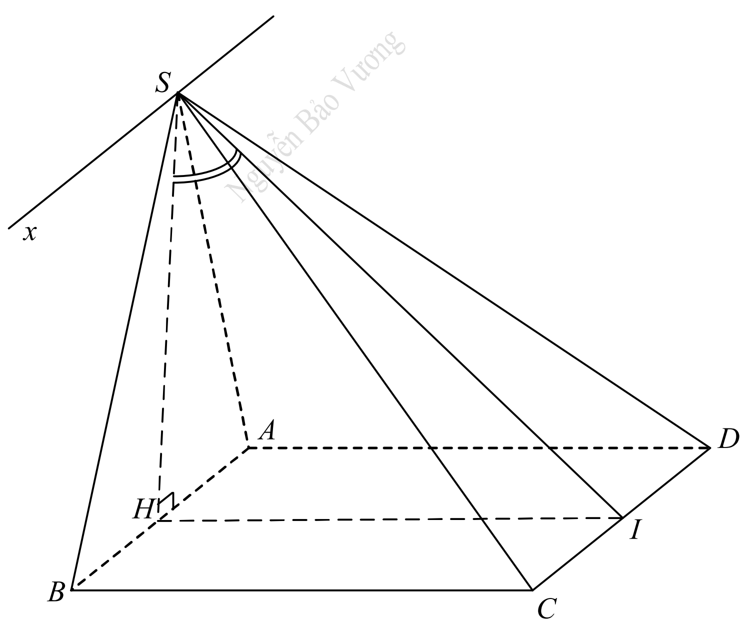
$\Rightarrow\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right)=\widehat{HSK}$.

Khi đó $\tan\widehat{HSK}=\dfrac{HK}{SH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 68. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Góc φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow SH$ là trung tuyến đồng thời là đường cao của tam giác SAB

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\AB=(SAB)\cap(ABCD)\\SH\subset(SAB),SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Gọi I là trung điểm của CD $\Rightarrow HI$ là đường trung bình của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow HI=a,\ HI\perp CD$

Do $\begin{cases} CD \perp SH \\ CD \perp HI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp SI$

Lại có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB);\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow Sx = (SAB) \cap (SCD)$ với $Sx // AB // CD$

Ta có: $\begin{cases} Sx // AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow SH \perp Sx$. Chứng minh tương tự: $Sx \perp SI$.

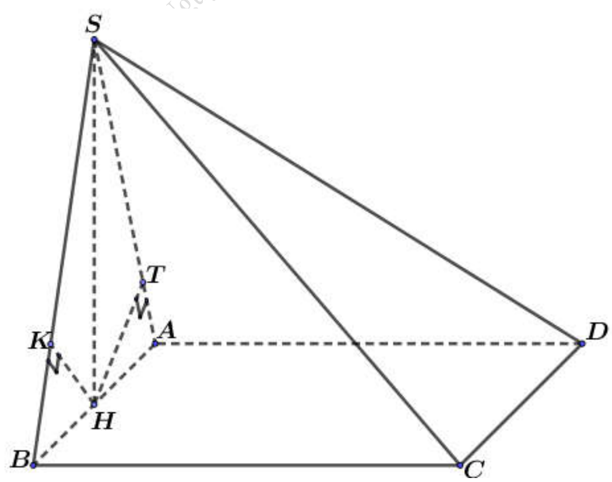
Khi đó: $\begin{cases} Sx = (SCD) \cap (SAB) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \\ SI \subset (SCD), SI \perp CD \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{(SAB),(SCD)}\right] = \left(\widehat{SH, SI}\right) = \widehat{HSI} = \varphi$

Xét ΔSHI có: $\tan \varphi = \dfrac{HI}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $\widehat{ASB} = 120°$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng:

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB, theo đề ra ta được $SH \perp (ABCD)$.

Dựng T, K lần lượt là hình chiếu của H lên SA, $SB \Rightarrow HT \perp (SAD)$ và $HK \perp (SBC)$.

Vậy $\left(\widehat{(SAD);\ (SBC)}\right) = \left(\widehat{HT;\ HK}\right)$.

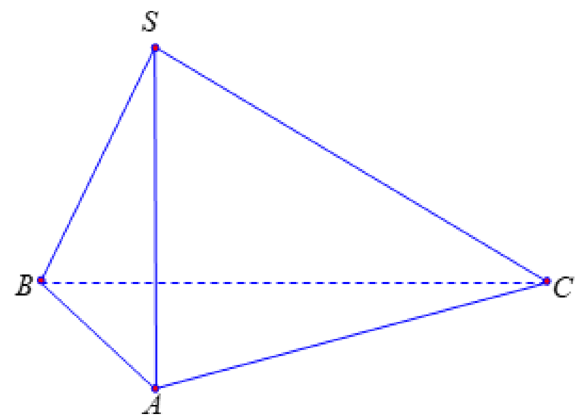
Xét tứ giác $SKHT$ có hai góc vuông đối diện nhau nên $SKHT$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KHT} = 60°$ do $\widehat{ASB} = 120°$.

Vậy $\left(\widehat{(SAD);\ (SBC)}\right)=\left(\widehat{HT;\ HK}\right)=\widehat{KHT}=60^\circ$.

Câu 70. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB=AC=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Tính góc nhị diện $[B,SA,C]$

A. 30°. **B.** 150°. **C.** 60°. **D.** 120°.

Lời giải



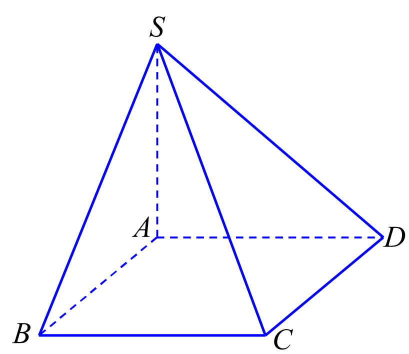
Vì $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp AB$ và $SA\perp AC$.

ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SAC)=SA\\ SA\perp AB\\ SA\perp AC\end{cases}\Rightarrow[B,SA,C]=\widehat{BAC}$.

Xét ΔABC có $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{a^2+a^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=120^\circ$.

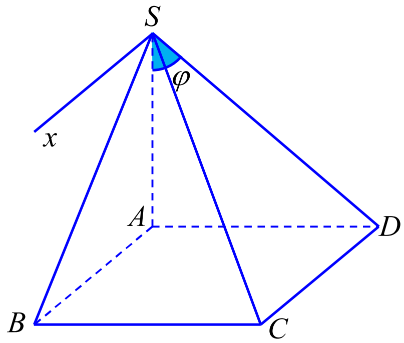
Vậy $[B,SA,C]=120^\circ$.

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng?



A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} CD \perp (SAD) \\ CD // Sx \end{cases} \Rightarrow Sx \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} Sx \perp SA \\ Sx \perp SD \end{cases}$ và $(SAB) \cap (SCD) = Sx // AB // CD$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \widehat{ASD} = \varphi$.

Tam giác SAD vuông tại A có $SA = AD = a$ $\Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại A

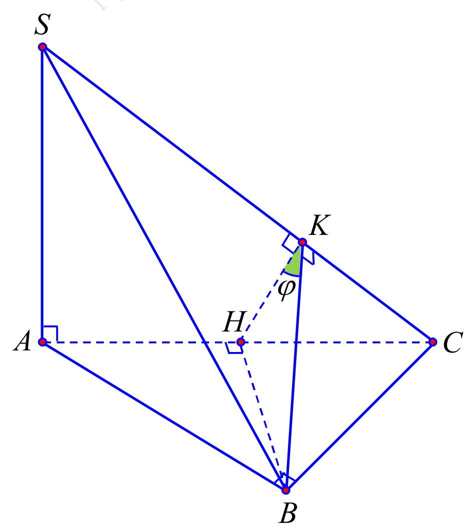
$\Rightarrow \varphi = 45°$

Vậy $\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = 45°$.

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = BC = a$ và $SA = a$. Góc nhị diện $[B, SC, A]$

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AC

Ta có $(SAC) \perp (ABC)$ (vì $SA \perp (ABC)$) và $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $HK \perp SC$ thì $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp BK$.

$\Rightarrow [B, SC, A] = \widehat{SKH} = \varphi$.

Mặt khác

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB=BC=a$ nên $AC=a\sqrt{2}$ và $BH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hai tam giác CKH và CAS đồng dạng nên $HK=\frac{HC.SA}{SC}\Leftrightarrow HK=\frac{HC.SA}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

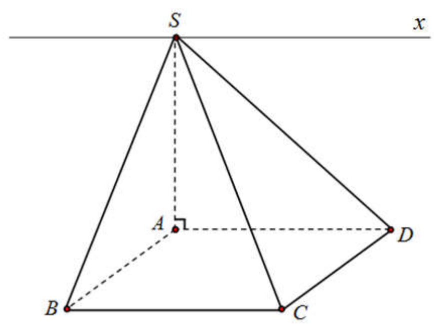
Tam giác BHK vuông tại H có $\tan\varphi=\frac{BH}{BK}=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=60°$.

Vậy $[B,SC,A]=60°$.

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$ (hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng:

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Ta có: $(SBC)\cap(SAD)=Sx\,//\,BC\,//\,AD$.

Ta chứng minh được $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow Sx\perp SB$.

Lại có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AD\Rightarrow SA\perp Sx$.

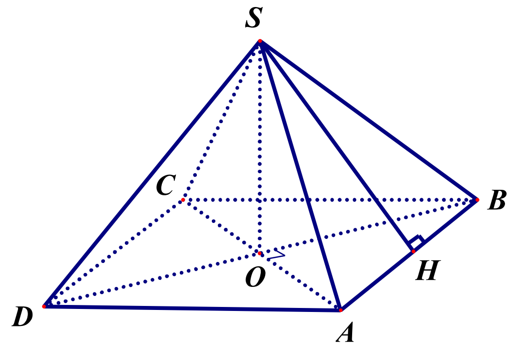
Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc $\widehat{BSA}=45°$.

Câu 74. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$. Gọi α là góc của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SAB). Khi đó $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



$AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác đều $\Rightarrow S_{\Delta SAC} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta SAO} = \sqrt{3}$

$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{7} \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \sqrt{7}$.

Hình chiếu vuông góc của ΔSAB lên mặt phẳng (SAC) là ΔSAO.

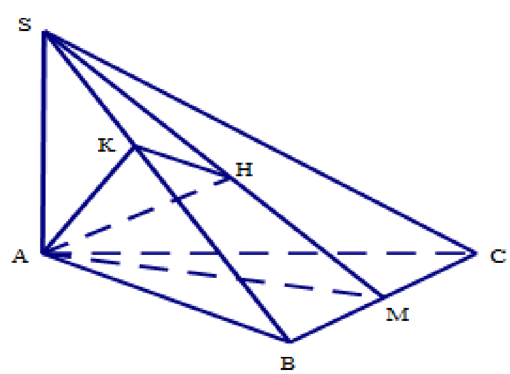
Suy ra: $\cos\alpha = \dfrac{S_{\Delta SAO}}{S_{\Delta SAB}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$ và

$AM = AB\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SM, SB.

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AM$. Trong các tam giác vuông SAB, SAM, ta có:

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

$\begin{cases} BC \perp SA\left(do\ SA \perp (ABC)\right) \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$

$\begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \begin{cases} AH \perp KH \\ AH \perp SB \end{cases}$. $\begin{cases} SB \perp AH \\ SB \perp AK \end{cases} \Rightarrow SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$.

Từ $AH \perp KH \Rightarrow KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$

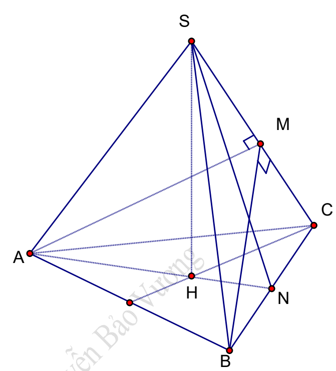
Từ $\begin{cases} SB \perp AK \\ SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow ((SAB),(SBC)) = \widehat{AKH} \Rightarrow \cos((SAB),(SBC)) = \dfrac{HK}{AK} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Câu 76. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{8}{15}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{7}{15}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, S của tam giác SBC. H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

Ta có: $AB \perp (SHC) \Rightarrow AB \perp SC$

Mặt khác $SC \perp BM \Rightarrow SC \perp (ABM) \Rightarrow SC \perp AM$

Vậy $\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ AM \subset (SAC) \\ BM \subset (SBC) \\ SC \perp AM, SC \perp BM \end{cases} \Rightarrow ((SAC);(SBC)) = (AM;BM)$.

Ta tính góc $\widehat{AMB}$. Xét tam giác AMB.

Tam giác SBC cân tại S nên N là trung điểm của BC.

+) $SN = \sqrt{SC^2 - NC^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

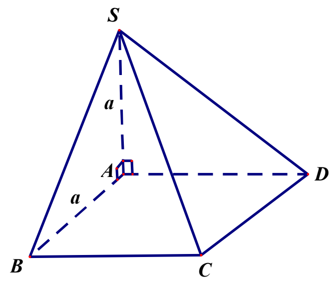
+) $BM = \dfrac{SN.BC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{15}.a}{2.2a} = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$.

+) $AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{BC^2 - MC^2} = BM$.

Ta có $\cos\widehat{AMB}=\dfrac{AM^2+BM^2-AB^2}{2.MA.MB}=\dfrac{\dfrac{15a^2}{16}+\dfrac{15a^2}{16}-a^2}{2.\dfrac{15a^2}{16}}=\dfrac{7}{15}>0$, suy ra góc $\widehat{AMB}$ nhọn.

Vậy $\alpha=\left((SAC);(SBC)\right)=(AM;BM)=\widehat{AMB}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{7}{15}$.

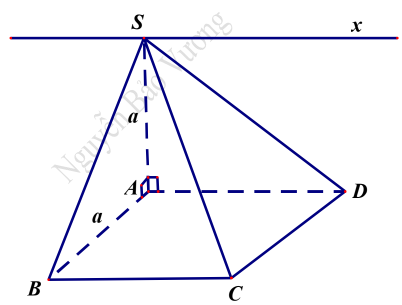
Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng



A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases}S\in[(SAD)\cap(SBC)]\\BC//AD\end{cases}\Rightarrow(SAD)\cap(SBC)=Sx//BC,\ Sx//AD$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$.

Mà $Sx//BC\Rightarrow Sx\perp SB$ tại S. (1)

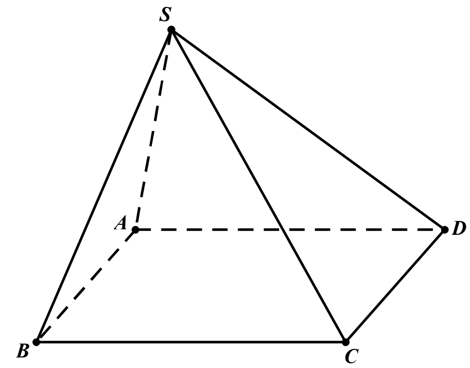
Ta lại có: $\begin{cases}SA\perp AD\\Sx//AD\end{cases}\Rightarrow SA\perp Sx$ tại S. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\left(\widehat{(SBC),(SAD)}\right)=\left(\widehat{SB,SA}\right)=\widehat{ASB}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có: $SA=AB\Rightarrow\Delta SAB$ vuông cân tại $A\Rightarrow\widehat{ASB}=45°$

$\Rightarrow\left(\widehat{(SBC),(SAD)}\right)=45°$.

Câu 78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3$, $BC=4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4.

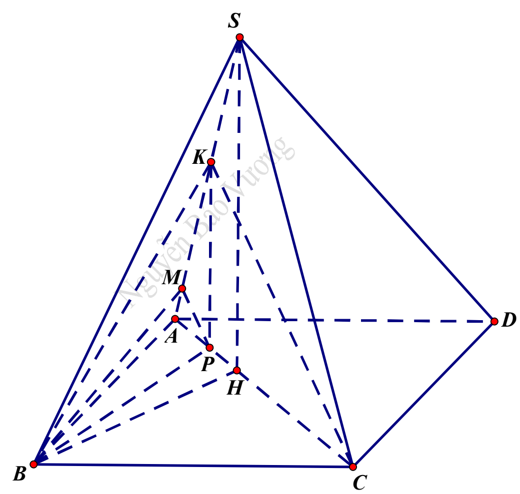


Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\frac{3\sqrt{34}}{34}$. **C.** $\frac{2\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\frac{5\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ABC vuông tại B ta có: $AC^2=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống SA. Xét tam giác CAK vuông tại K ta có:

$AK=\sqrt{CA^2-CK^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Kẻ $SH\perp AC$, $H\in AC$ và $KP//SH$, $P\in AC$ thì $KP\perp(ABCD)$.

Xét tam giác BAC vuông tại B và tam giác KAC vuông tại K ta thấy các cạnh tương ứng bằng nhau và KP là đường cao của tam giác KAC nên BP là đường cao của tam giác BAC.

Kẻ $PM\perp KA$, $M\in KA$. Vì $KA\perp PB$ và $KA\perp PM$ nên $KA\perp(PMB)$. Suy ra $KA\perp MB$.

Như vậy, góc giữa mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc $\widehat{PMB}$.

Xét tam giác KAC vuông tại K ta có: $KP.AC = KA.KC \Rightarrow KP = \frac{KA.KC}{AC} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}$.

Suy ra $BP = KP = \frac{12}{5}$.

Xét tam giác KPA vuông tại P ta có $PA = \sqrt{KA^2 - KP^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{9}{5}$.

Lại có $PM.AK = PA.PK \Rightarrow PM = \frac{PA.PK}{AK} = \frac{36}{25}$.

Xét tam giác PMB vuông tại P ta có $MB = \sqrt{PB^2 + PM^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{36}{25}\right)^2} = \frac{12\sqrt{34}}{25}$.

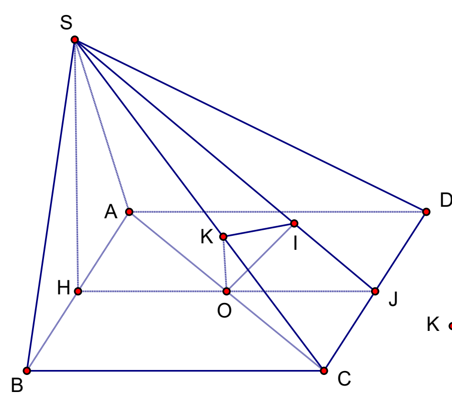
Ta có: $\cos\widehat{PMB} = \frac{MP}{MB} = \frac{36}{25}.\frac{25}{12\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$.

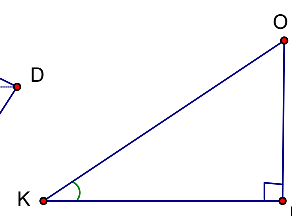
Câu 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD).

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{7}$. **C.** $\frac{5}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải

Chọn C





Gọi H, O, J lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD.

I là hình chiếu vuông góc của O lên SJ, K là hình chiếu vuông góc của I lên SC.

$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow SH \perp CD$.

Mặt khác, $CD \perp HJ \Rightarrow CD \perp (SHJ) \Rightarrow CD \perp OI$.

$\begin{cases} OI \perp SJ \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow OI \perp (SCD) \Rightarrow OI \perp SC$, Có $\begin{cases} SC \perp OI \\ SC \perp IK \end{cases} \Rightarrow SC \perp OK$.

Suy ra $\left(\widehat{(SAC),(SCD)}\right) = \left(\widehat{KO,KI}\right) = \widehat{OKI}$ (do ΔOKI vuông tại I nên $\widehat{OKI}$ nhọn)

$SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SC = SD = \sqrt{SB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$, $SJ = \sqrt{SH^2 + HJ^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

$\Delta SHJ \backsim \Delta OIJ \Rightarrow \dfrac{OI}{SH} = \dfrac{OJ}{SJ} = \dfrac{IJ}{HJ} \Rightarrow OI = \dfrac{OJ.SH}{SJ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

$IJ = \dfrac{OJ.HJ}{SJ} = \dfrac{a}{\sqrt{7}}$.

Có $SI = SJ - IJ = \dfrac{5\sqrt{7}a}{14}$.

$\Delta SKI \sim \Delta SJC \Rightarrow \dfrac{SI}{SC} = \dfrac{KI}{JC} \Rightarrow KI = \dfrac{SI.JC}{SC} = \dfrac{\dfrac{5\sqrt{7}a}{14}.\dfrac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{14}a}{56}$.

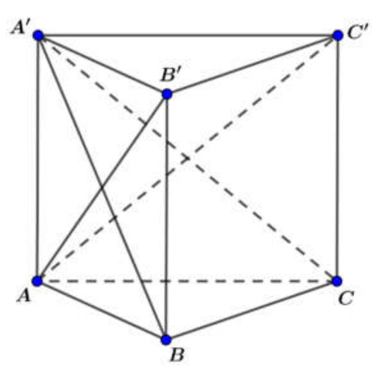
ΔOKI vuông tại I

$\tan\varphi = \dfrac{OI}{KI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.\dfrac{56}{5\sqrt{14}a} = \sqrt{\dfrac{24}{25}}$

Có $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\tan^2\varphi} = \dfrac{25}{49} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{5}{7}$ (do $\cos\varphi > 0$)

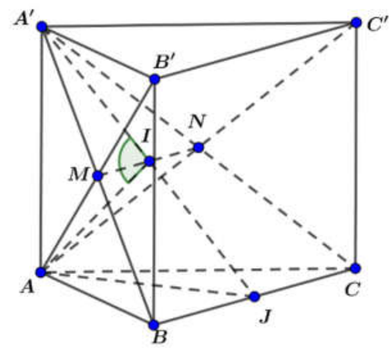
Vậy $\cos\varphi = \dfrac{5}{7}$.

Câu 80. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$, tính $\cos\alpha$



A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{4}{7}$.

Lời giải



Giả sử cạnh của hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài bằng a.

Gọi $M = A'B \cap AB'$ và $N = A'C \cap AC'$.

Khi đó $(AB'C') \cap (A'BC) = MN$.

Kẻ $A'I \perp MN$ $(I \in MN)$ mà $AA' \perp BC$, $BC // MN \Rightarrow AA' \perp MN$. Vậy $AI \perp MN$.

Khi đó $((AB'C'),(A'BC)) = (AI, A'I) = \alpha$.

Gọi J là trung điểm BC.

$AJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'J = \sqrt{AA'^2 + AJ^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a \Rightarrow A'I = \frac{1}{2}A'J = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Xét tam giác $\Delta A'IA$ có:

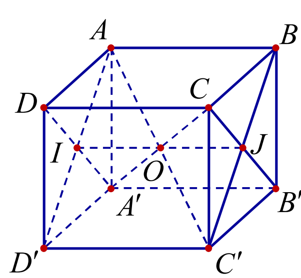
$$\cos\widehat{A'IA} = \frac{AI^2 + A'I^2 - AA'^2}{2.AI.A'I} = \frac{-1}{7} \Rightarrow \cos\alpha = \cos(AI, A'I) = \cos\left(180^\circ - \widehat{A'IA}\right) = \frac{1}{7}.$$

Câu 81. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $CD \perp (ADD'A') \Rightarrow CD \perp A'D$

$\begin{cases} A'D \perp AD' \\ CD \perp AD' \end{cases} \Rightarrow AD' \perp (A'B'CD)$

Mà $AD' \subset (ABC'D') \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$

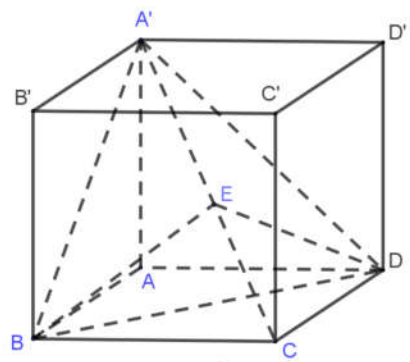
Do đó: góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng $90°$.

Câu 82. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

A. $90°$. **B.** $120°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $(A'BC) \cap (A'CD) = A'C$. Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp A'C$.

Kẻ $BE \perp A'C = \{E\}$, thì $(BDE) \perp A'C$.

$(BDE) \cap (A'BC) = EB$; $(BDE) \cap (A'CD) = ED$.

Vậy $\left(\widehat{(A'BC);(A'CD)}\right) = \left(\widehat{EB;ED}\right)$.

Có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp A'B$.

Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tam giác $A'BC$ vuông tại B với đường cao là BE, ta có:

$\dfrac{1}{BE^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BA'^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow BE = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Tương tự ta có $DE = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác BDE:

$$\cos\widehat{BED} = \frac{BE^2 + DE^2 - BD^2}{2.BE.DE} = \frac{\frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - 2a^2}{2.\frac{2a^2}{3}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{BED} = 120°.$$

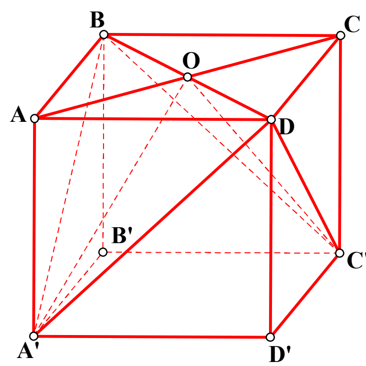
Vậy $\left(\widehat{(A'BC);(A'CD)}\right)=\left(\widehat{EB;ED}\right)=180^\circ-\widehat{BED}=60^\circ$.

Câu 83. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC=2AA'=2a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp A'A \end{cases} \to BD\perp (ACC'A') \to BD\perp OA', BD\perp OC'$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ là góc giữa hai đường thẳng OA' và OC'.

Theo giả thiết: $AC=2A'A=2a\sqrt{3} \Rightarrow AO=A'A=a\sqrt{3} \to OA'=OC'=a\sqrt{6}$

Trong tam giác $OA'C'$: $\cos O=\dfrac{OA'^2+OC'^2-A'C'^2}{2.OA'.OC'}=\dfrac{6a^2+6a^2-12a^2}{2.6a^2}=0$

Suy ra $\widehat{A'OC'}=90^0$.

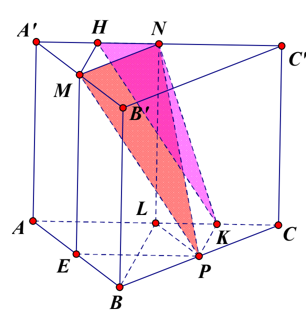
Chú ý: có thể suy ra góc $\widehat{A'OC'}$ vuông bằng cách nhận xét 2 tam giác AOA', COC' vuông cân.

Câu 84.) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$có $AB=2\sqrt{3}, BB'=2$. Gọi M,N,P tương ứng là trung điểm của $A'B',A'C',BC$. Nếu gọi α là độ lớn của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC') thì $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên nó là lăng trụ đứng và có đáy là tam giác đều. Ta lấy thêm các trung điểm của AB, AC lần lượt là các điểm E, L. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của

$A'N, CL$. Khi đó thực hiện phép chiếu vuông góc tam giác MNP lên mặt phẳng $(ACC'A')$ ta được tam giác KNH.

Tam giác MNP có $MN=\sqrt{3}, MP=NP$

với $MP=\sqrt{PE^2+ME^2}=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$.

Tam giác MNP cân tại P nên độ dài đường cao kẻ từ P tính được là $\sqrt{7-\frac{3}{4}}=\frac{5}{2}$.

Nên diện tích là: $S_{MNP}=\frac{1}{2}\frac{5}{2}.\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác KHN có diện tích được tính là

$$S_{KHN}=S_{ACC'A'}-S_{AKHA'}-S_{KCC'N}=4\sqrt{3}-\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).2}{2}-\frac{\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Áp dụng công thức hình chiếu ta có $S_{KHN}=S_{MNP}.\cos\alpha$.

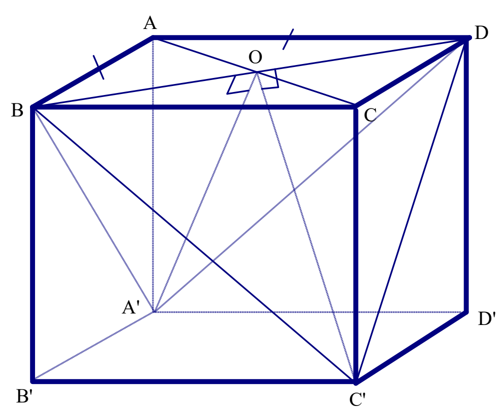
Vậy $\cos\alpha=\frac{S_{KHN}}{S_{MNP}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{4}}=\frac{2}{5}$.

Câu 85. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt $ABCD$ là hình vuông, $AA'=\frac{AB\sqrt{6}}{2}$. Xác định góc nhị diện $[A', BD, C']$

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C



+ Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$.

Đặt $AB = x \Rightarrow BC = x; AA' = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$.

$$A'B = A'D = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{6}}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{x\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \Delta A'BD \text{ cân } \Rightarrow A'O \perp BD.$$

$$C'B = C'D = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{6}}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{x\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \Delta C'BD \text{ cân } \Rightarrow C'O \perp BD.$$

+ $(A'BD) \cap (C'BD) = BD$

$A'O \perp BD, A'O \subset (A'BD)$

$C'O \perp BD, C'O \subset (C'BD)$

$\Rightarrow$ góc $[A', BD, C']$ bằng góc giữa $A'O$ và $C'O$.

+ Tính $\widehat{A'OC'}$.

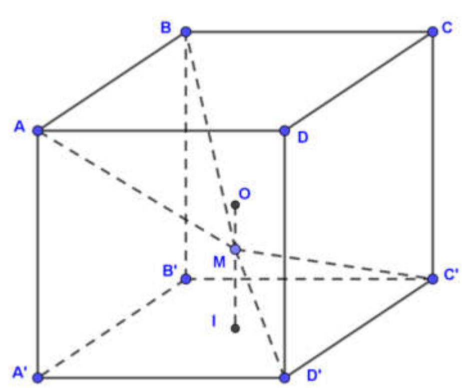
$$A'O = C'O = \sqrt{A'B^2 - BO^2} = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = x\sqrt{2}.$$

$A'C' = x\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \Delta A'OC'$ đều $\Rightarrow \widehat{A'OC'} = 60^0$.

Vậy góc $[A', BD, C']$ bằng 60^0.

Câu 86. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = \dfrac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ).

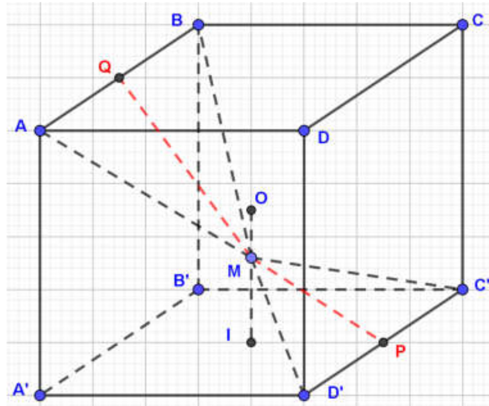


Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng.

A. $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn D



Ta chọn hình lập phương có cạnh bằng 6.

Gọi P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh $C'D'$ và AB. Khi đó ta có

$MP=\sqrt{MI^2+IP^2}=\sqrt{13}$, $MQ=5, PQ=6\sqrt{2}$

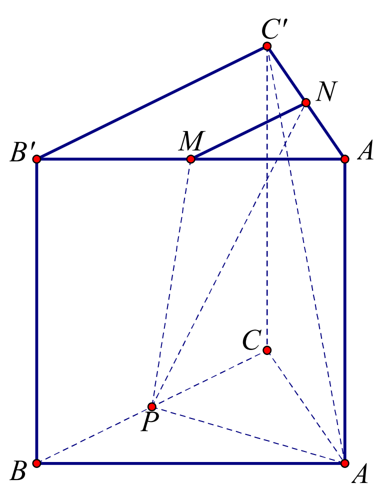
Áp dụng định lý hàm $\cos$ ta được:

$$\cos\widehat{PMQ}=\frac{MP^2+MQ^2-PQ^2}{2MP.MQ}=-\frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Gọi α là góc giữa $(MC'D')$ và (MAB):

$$\sin\alpha=\frac{6\sqrt{13}}{65}.$$

Câu 87. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2\sqrt{3}$ và $AA'=2$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B',A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng



A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn B

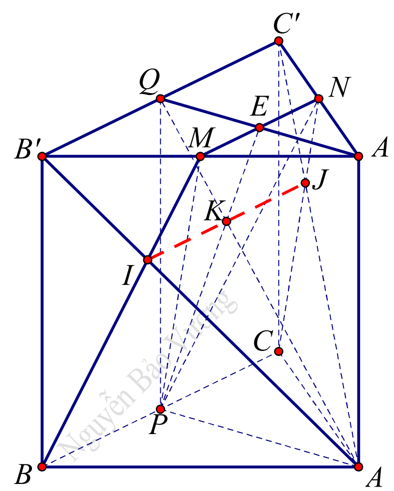
Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$; $I=BM\cap AB', J=CN\cap AC', E=MN\cap A'Q.$

Suy ra, $(MNP)\cap(AB'C')=(MNCB)\cap(AB'C')=IJ$ và gọi $K=IJ\cap PE\Rightarrow K\in AQ$ với E là trung điểm MN (hình vẽ).

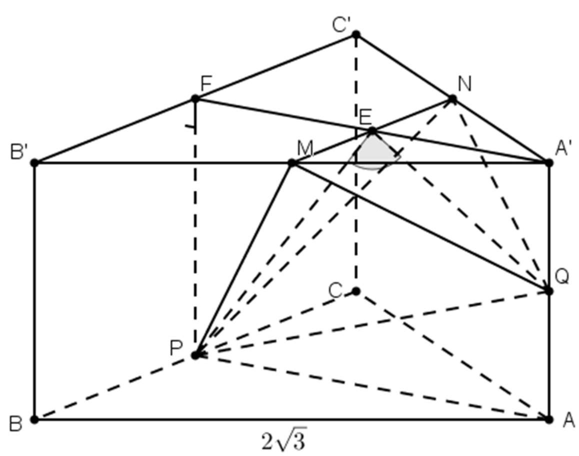
$(AA'QP)\perp IJ\Rightarrow AQ\perp IJ, PE\perp IJ\Rightarrow \left(\widehat{(MNP),(AB'C')}\right)=\left(\widehat{AQ,PE}\right)=\alpha$

Ta có $AP=3, PQ=2\Rightarrow AQ=\sqrt{13}\Rightarrow QK=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$; $PE=\dfrac{5}{2}\Rightarrow PK=\dfrac{5}{3}.$

$$\cos\alpha=\left|\cos\widehat{QKP}\right|=\frac{\left|KQ^2+KP^2-PQ^2\right|}{2KQ.KP}=\frac{\sqrt{13}}{65}.$$



Cách 2



Gọi Q là trung điểm của AA', khi đó mặt phẳng $(AB'C')$ song song với mặt phẳng (MNQ) nên góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) cũng bằng góc giữa hai mặt phẳng (MNQ) và (MNP).

Ta có:

$$\begin{cases}(MNP)\cap(MNQ)=MN\\ PE\subset(MNP);\ PE\perp MN\\ QE\subset(MNQ);\ QE\perp MN\end{cases}\Rightarrow\widehat{((MNP);(MNQ))}=\widehat{PEQ}\text{ hoặc }\widehat{((MNP);(MNQ))}=180^0-\widehat{PEQ}$$

Tam giác ABC đều có cạnh $2\sqrt{3}\Rightarrow AP=3$.

Tam giác APQ vuông tại A nên ta có: $PQ=\sqrt{AP^2+AQ^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

Tam giác $A'QE$ vuông tại A' nên ta có: $QE=\sqrt{A'E^2+A'Q^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Tam giác PEF vuông tại F nên ta có: $PE=\sqrt{FP^2+FE^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$

Áp dụng định lý hàm số côsin vào tam giác PQE ta có:

$$\cos\widehat{PEQ}=\frac{EP^2+EQ^2-PQ^2}{2.EP.EQ}=\frac{\frac{25}{4}+\frac{13}{4}-10}{2.\frac{5}{2}.\frac{\sqrt{13}}{2}}=-\frac{\sqrt{13}}{65}$$

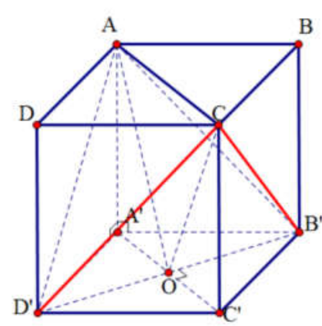
Do đó: $\cos\widehat{((MNP);(AB'C'))}=\cos\left(180^0-\widehat{PEQ}\right)=-\cos\widehat{PEQ}=\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Câu 88. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC=2, AA'=\sqrt{3}$. Tính góc nhị diện $[A,B'D',C]$

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=A'C'\cap B'D'$.

$(AB'D')\cap(CB'D')=B'D'$

Mà $B'D'\perp(ACC'A')$

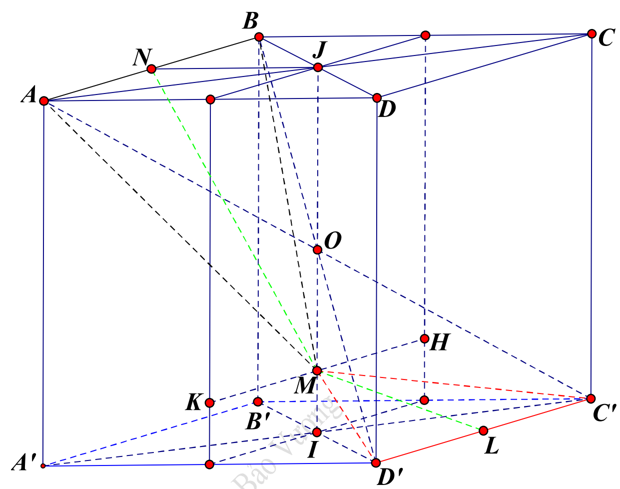
Mặt khác: $\begin{cases}(A'C'CA)\cap(AB'D')=AO\\(A'C'CA)\cap(CB'D')=CO\end{cases}$

suy ra góc $[A,B'D',C]$ là góc giữa AO và CO.

$CO=AO=\sqrt{AA'^2+A'O^2}=2=AC\Rightarrow\Delta AOC$ là tam giác đều.

Vậy góc cần tìm bằng 60^0.

Câu 89. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO=2MI$ (tham khảo hình vẽ).

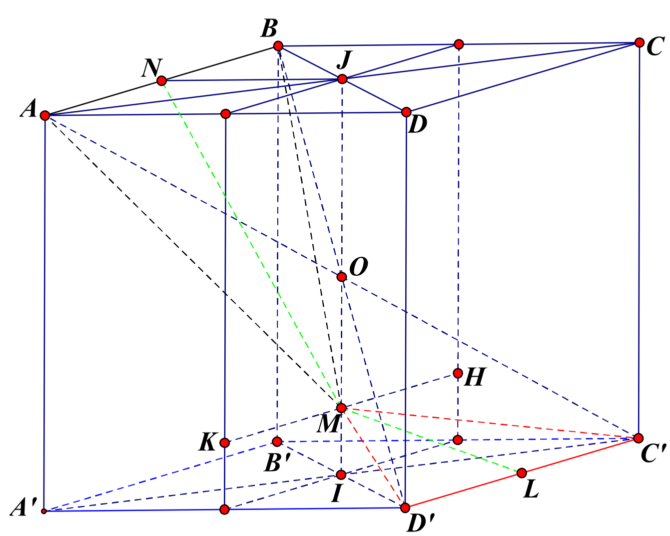


Khi đó côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. **B.** $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn B



Giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ là đường thẳng KH như hình vẽ.

Gọi J là tâm hình vuông $ABCD$. L, N lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và AB.

Ta có: $C'D' \perp (LIM) \Rightarrow C'D' \perp LM \Rightarrow LM \perp KH$.

Tương tự $AB \perp (NJM) \Rightarrow AB \perp MN \Rightarrow MN \perp KH$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ chính là góc giữa 2 đường thẳng (MN, ML).

Gọi cạnh hình lập phương là 1. Ta có $LM = \frac{\sqrt{10}}{6}$, $MN = \frac{\sqrt{34}}{6}$, $NL = \sqrt{2}$.

Ta có: $\cos\widehat{LMN} = \frac{MN^2 + ML^2 - NL^2}{2MN.ML} = \frac{-7\sqrt{85}}{85}$.

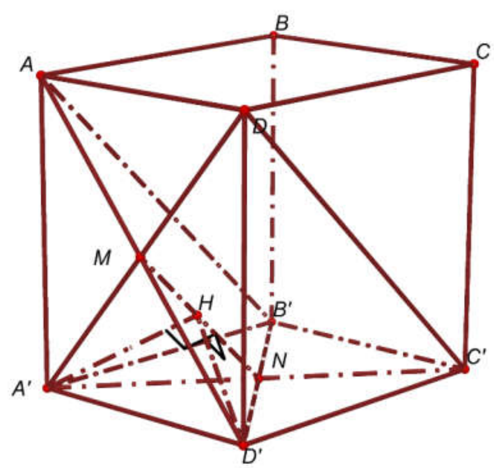
Suy ra cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ là $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

Câu 90. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2$, $AD = 3$, $AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α.

A. $45,2°$. **B.** $38,1°$. **C.** $53,4°$. **D.** $61,6°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M và N là tâm của các hình chữ nhật $AA'D'D$ và $A'B'C'D'$.
Dễ thấy $\Delta A'MN = \Delta D'MN$.
Gọi H là chân đường cao từ đỉnh A' của tam giác $A'MN$. Thế thì $D'H \perp MN$.
Suy ra $\cos\alpha = \left|\cos\widehat{A'HD'}\right|$.

Ta có: $A'D = 5$; $A'M = \frac{5}{2}$; $A'N = \frac{\sqrt{13}}{2}$; $MN = \sqrt{5}$.
Xét tam giác $A'MN$.
Ta có $\cos A' = \frac{A'M^2 + A'N^2 - MN^2}{2.A'M.A'N} = \frac{9}{5\sqrt{13}} \Rightarrow \sin A' = \sqrt{1 - \cos^2 A'} = \frac{2\sqrt{61}}{5\sqrt{13}}$.

$\Rightarrow S_{\Delta A'MN}=\dfrac{1}{2}A'M.A'N.\sin A'=\dfrac{\sqrt{61}}{4}=\dfrac{1}{2}MN.A'H\Rightarrow A'H=\dfrac{\sqrt{61}}{2\sqrt{5}}=D'H$.

Trong tam giác $A'HD'$ có $\cos H=\dfrac{A'H^2+D'H^2-A'D'^2}{2.A'H.D'H}=-\dfrac{29}{61}$

Vậy $\cos\alpha=\dfrac{29}{61}\Rightarrow\alpha\approx 61,6^\circ$.

Câu 91. Trong hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=AA'=a$, $BC=2a$, $AC=a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

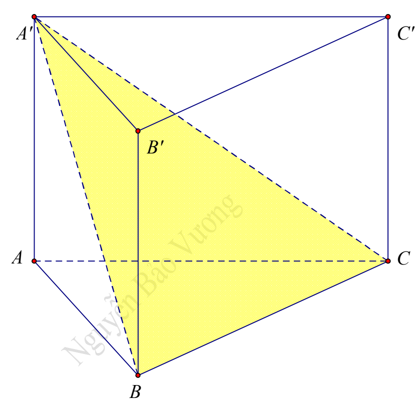
A. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45°.

B. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(BB'C)$ vuông góc với nhau.

C. $AC'=2a\sqrt{2}$.

D. Đáy ABC là tam giác vuông.

Lời giải



Xét tam giác ABC có $AB^2+BC^2=a^2+(2a)^2=5a^2=AC^2\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B.

$\Rightarrow$ Đáp án **D** đúng.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và tam giác ABC vuông tại B nên $AB\perp(BB'C)$

$\Rightarrow(AA'B'B)\perp(BB'C)\Rightarrow$ Đáp án **B** đúng.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và tam giác ABC vuông tại B nên

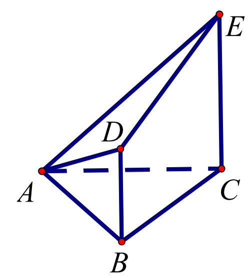
$((ABC),(A'BC))=(AB,A'B)=\widehat{ABA'}=45^\circ\Rightarrow$ Đáp án **A** đúng.

Xét tam giác vuông $A'AC$ ta có $A'C=\sqrt{AA'^2+AC^2}=\sqrt{a^2+5a^2}=a\sqrt{6}\Rightarrow$ Đáp án **C** sai.

Câu 92. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi d_B, d_C lần lượt là các đường thẳng đi qua B, C và vuông góc với (ABC). (P) là mặt phẳng đi qua A và hợp với (ABC) một góc bằng 60°. (P) cắt d_B, d_C tại D và E. Biết $AD=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $AE=a\sqrt{3}$. Đặt $\beta=\widehat{DAE}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\beta=30^\circ$. **B.** $\sin\beta=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\beta=60^\circ$.

Lời giải



Ta có: ΔABC là hình chiếu của ΔADE trên mặt phẳng (ABC).

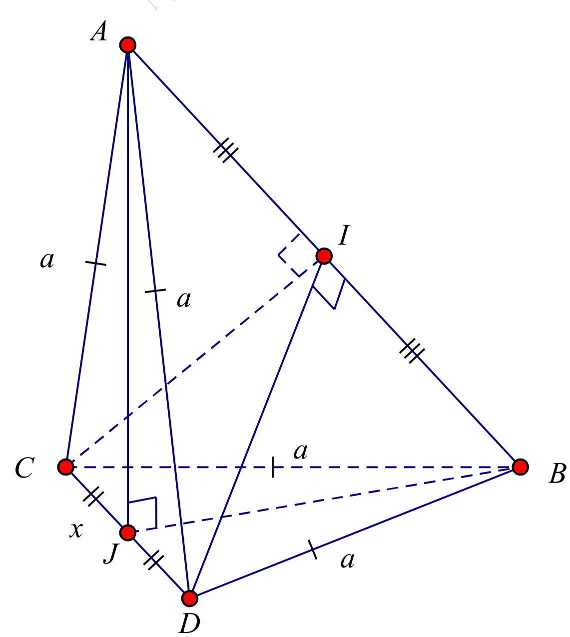
Do đó $S_{ABC}=S_{ADE}.\cos 60^\circ \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4}=S_{ADE}.\frac{1}{2}\Rightarrow S_{ADE}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác $S_{ADE}=\frac{1}{2}AD.AE.\sin\widehat{DAE}\Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3}\sin\beta \Rightarrow \sin\beta=\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Câu 93. Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD)\perp(BCD)$, $AC=AD=BC=BD=a$ và $CD=2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Với giá trị nào của x thì $(ABC)\perp(ABD)$?

A. $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $x=a$. **C.** $x=a\sqrt{3}$. **D.** $x=\frac{a}{3}$.

Lời giải



Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}(ACD)\perp(BCD)\\(ACD)\cap(BCD)=CD\\AJ\perp CD\end{cases}\Rightarrow AJ\perp(BCD)\Rightarrow AJ\perp BJ$.

$\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c) $\Rightarrow AJ = BJ \Rightarrow AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2\left(AC^2 - CJ^2\right)} = \sqrt{2\left(a^2 - x^2\right)}$

$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2 - x^2\right)}$

Dễ thấy ΔCAB và ΔDAB bằng nhau và cân tại các đỉnh C và D.

$\Rightarrow DI = CI = \sqrt{AC^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{\left(a^2 - x^2\right)}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{2}}$.

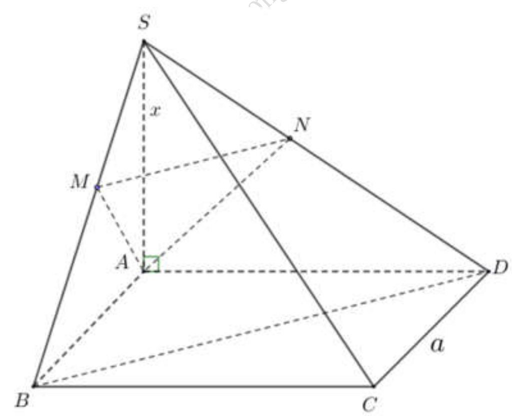
Có $\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases}$, nên để $(ABC) \perp (ABD)$ thì $CI \perp DI$ hay ΔICD vuông tại I.

$\Leftrightarrow CD = CI\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc $60°$.

A. $x = a\sqrt{3}$. **B.** $x = a$. **C.** $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $x = \frac{a}{2}$.

Lời giải



Ta có $(SCD) \perp (SAD)$, vẽ $AN \perp SD$ tại $N \Rightarrow AN \perp (SCD)$.

$(SAB) \perp (SBC)$, vẽ $AM \perp SB$ tại $M \Rightarrow AM \perp (SBC)$.

$\Rightarrow \widehat{\left((SBC),(SCD)\right)}\ AM = AN = \widehat{MAN}$.

Ta có $SB = SD = \sqrt{x^2 + a^2}$, $AM = AN = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $\frac{SM}{SB} = \frac{MN}{BD} \Rightarrow MN = \frac{SM.BD}{SB}$

$SM = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow MN = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}.a\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow MN = \frac{x^2 a\sqrt{2}}{x^2 + a^2}$.

ΔAMN đều cho ta $MN = AM \Rightarrow \dfrac{xa}{\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{x^2a\sqrt{2}}{x^2+a^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+a^2} = x\sqrt{2} \Leftrightarrow x = a$.

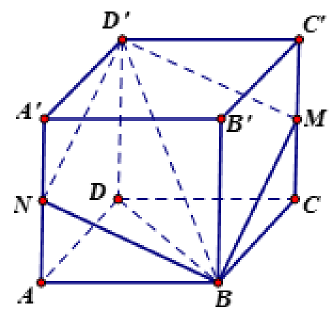
Câu 95. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Cắt hình lập phương bằng một mặt phẳng (P) đi qua đường chéo BD', khi diện tích thiết diện đạt giá trị nhỏ nhất, côsin góc tạo bởi (P) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Gọi φ là góc tạo bởi (P) và mặt phẳng $(ABCD)$

Diện tích thiết diện đạt giá trị nhỏ nhất



$\Leftrightarrow \varphi = \left(BD', (ABCD)\right) = \widehat{D'BD}$

$\cos\widehat{D'BD} = \dfrac{BD}{BD'} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Câu 96. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

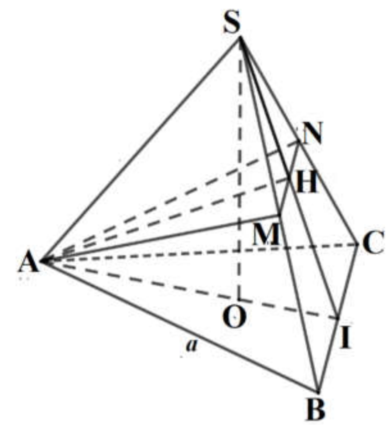
A. $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Ta thấy do hình chóp $S.ABC$ đỉnh S là chóp tam giác đều nên $AB = BC = AC = a$.

$\Delta SAB = \Delta SAC\,(c.c.c) \Rightarrow AM = AN$.

Do đó tam giác AMN cân tại A. Gọi H là trung điểm của MN thì $AH \perp MN$ và I là trung điểm của BC.



$$\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \\ Trong\,(AMN): AH \perp MN \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SH; AH \perp SI$$

Xét tam giác SAI có đường AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên tam giác SAI cân tại A.

Tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA = SB$.

Xét tam giác SBI vuông tại I nên $SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có: $SH = \frac{1}{2}SI = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

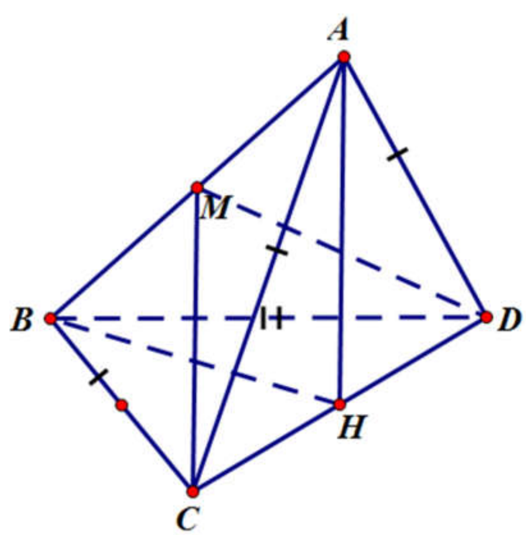
Xét tam giác ASH vuông tại H nên $AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $S_{AMN} = \frac{1}{2}.AH.MN = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Câu 97. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$ và hai mặt phẳng (ACD), (BCD) vuông góc với nhau. Tính độ dài cạnh CD sao cho hai mặt phẳng (ABC), (ABD) vuông góc.

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của CD nên $AH \perp CD$

$\Leftrightarrow AH \perp (BCD)$ (do $(ACD) \perp (BCD)$) và $(ACD) \cap (BCD) = CD$

Gọi M là trung điểm của AB nên $CM \perp AB$

Vì $(ABC) \perp (ABD)$ và $(ABC) \cap (ABD) = AB \Rightarrow CM \perp MD.$

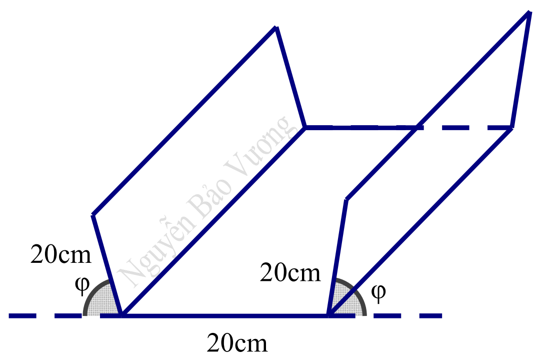
$\Delta ABC = \Delta ABD \Rightarrow MC = MD \Rightarrow \Delta MCD$ vuông cân tại M.

Đặt $CD = x \Rightarrow AH^2 = BH^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2a^2 + \frac{x^2}{2}$

Ta có $MH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + \frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{2}CD \Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + \frac{x^2}{2}}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$

$\Leftrightarrow 2a^2 + \frac{x^2}{2} = 2x^2 \Leftrightarrow 4a^2 = 3x^2 x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

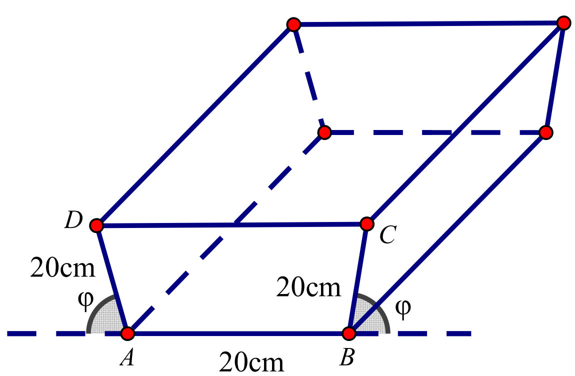
Câu 98. Bạn Nam làm một cái máng thoát nước mưa, mặt cắt là hình thang cân có độ dài hai cạnh bên và cạnh đáy đều bằng 20 cm, thành máng nghiêng với mặt đất một góc φ $(0° < \varphi < 90°)$. Bạn Nam phải nghiêng thành máng một góc trong khoảng nào sau đây để lượng nước mưa thoát được là nhiều nhất?



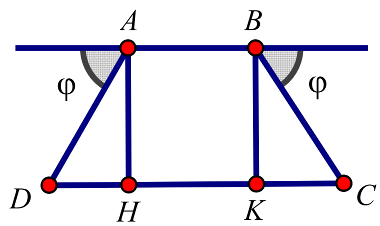
A. $[50°; 70°)$. **B.** $[10°; 30°)$. **C.** $[30°; 50°)$. **D.** $[70°; 90°)$.

Lời giải

Chọn A



Để lượng mưa thoát được nhiều nhất khi diện tích hình thang cân $ABCD$ lớn nhất.



Khi đó ta có: $HK = AB = 20\text{cm}$, $DH = CK = \cos\varphi.20$, $AH = BK = \sin\varphi.20$.

Do đó: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).AH = \frac{1}{2}(20 + 20 + 2.20.\cos\varphi).20.\sin\varphi = 400.(1 + \cos\varphi).\sin\varphi$

Đặt $t = \cos\varphi$, vì $\varphi \in (0°;180°) \Rightarrow \cos\varphi > 0 \Rightarrow S = 400(1+t)\sqrt{1-t^2}$.

Xét $f(t) = (1+t)\sqrt{1-t^2}$ với $t \in (0;1)$. Khi đó: $f'(t) = \sqrt{1-t^2} + (1+t).\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-2t^2 - t + 1}{\sqrt{1-t^2}}$

Do đó: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

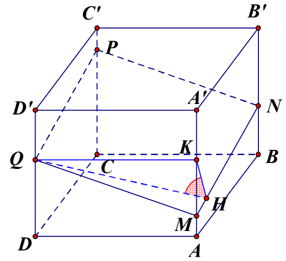
Từ bảng biến thiên ta có $f(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$.

Câu 99. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) cắt tất cả các cạnh bên của hình lập phương. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (α) biết (α) tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc $60°$.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh bên AA', BB', CC', DD'.

Thiết diện của (α) với hình lập phương là hình bình hành $MNPQ$. Kẻ QH vuông góc với MN, QK vuông góc với AA'. Suy ra $HK \perp MN$.

Vì $\begin{cases}(MNPQ)\cap(ABB'A') = MN \\ QH \perp MN \\ HK \perp MN\end{cases} \Rightarrow \widehat{((MNPQ),(ABB'A'))} = \widehat{(QH,HK)} = \widehat{QHK} = 60^\circ$.

ΔQKH vuông tại K nên $\sin 60^\circ = \dfrac{QK}{QH} \Rightarrow QH = \dfrac{QK}{\sin 60^\circ} = 2$; $KH = \dfrac{QK}{\tan 60^\circ} = 1$.

Do đó ta tìm được $MN = \sqrt{3}$.

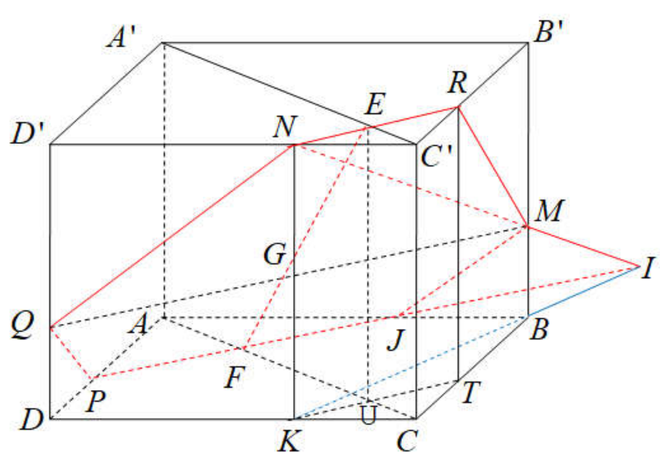
Vậy diện tích của thiết diện $S_{MNPQ} = 2\sqrt{3}$.

Câu 100. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3. Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt thuộc ba cạnh $BB', C'D', AD$ sao cho $BM = C'N = DP = 1$. Tính diện tích S của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương đã cho.

A. $S = \dfrac{13\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S = \dfrac{17\sqrt{3}}{3}$. **C.** $S = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{13\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Đáp án. D.



Dựng $\overrightarrow{NK} = 3\overrightarrow{MB}, MN \cap KB = I$

$PI \cap AB = J$,

$\overrightarrow{NQ} = 2\overrightarrow{MJ}$

$\overrightarrow{MR}=2\overrightarrow{PQ}$

Thiết diện là lục giác $MRNQPJ$.

Cách 1: $S_{MRNQPJ}=S_{MJPQ}+S_{MQNR}$

$$FE=\sqrt{3^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\Rightarrow FG=\frac{\sqrt{6}}{2},GE=\sqrt{6}$$

$$S_{MJPQ}=\frac{(MQ+JP)FG}{2}=\frac{(3\sqrt{2}+\frac{2}{3}3\sqrt{2})\frac{\sqrt{6}}{2}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{MJPQ}=\frac{(MQ+NR)EG}{2}=\frac{(3\sqrt{2}+\frac{1}{3}3\sqrt{2})\sqrt{6}}{2}=4\sqrt{3}$$

$$S_{MRNQPJ}=S_{MJPQ}+S_{MQNR}=\frac{13\sqrt{3}}{2}.$$

Cách 2: Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(MRNQPJ);(PJBTKD)$

$$S_{MRNQPJ}=\frac{S_{PJBTKD}}{cos\varphi}$$

$$S_{PJBTKD}=S_{ABCD}-S_{KCT}-S_{APJ}=9-\frac{1}{2}-2=\frac{13}{2}$$

$$cos\varphi=cosEFU=\frac{FU}{FE}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

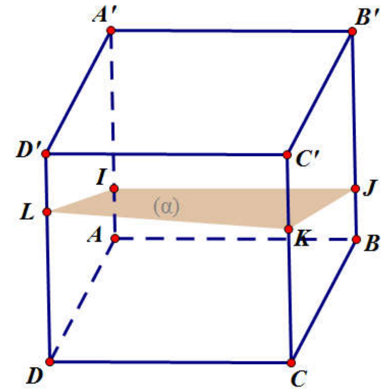
$$S_{MRNQPJ}=\frac{S_{PJBTKD}}{cos\varphi}=\frac{13\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 101. Cho hình hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) cắt tất cả các cạnh bên của hình lập phương. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi (α) biết (α) tạo với $(ABB'A')$ một góc $60°$.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử (α) cắt tất cả các cạnh bên như hình vẽ.

Do góc giữa (α) và $(ABB'A')$ bằng $60°$ nên suy ra góc giữa (α) và mặt đáy $(ABCD)$ bằng $90°-60°=30°$.

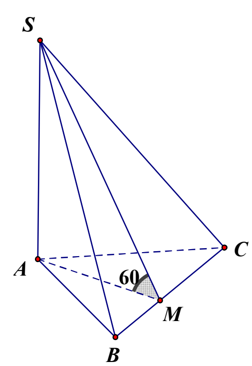
Gọi S' là diện tích tứ giác $IJKL$ và S là diện tích của hình vuông $ABCD$.

Ta có $S'=S.\cos 30° \Rightarrow S'=\dfrac{S}{\cos 30°}=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$.

Câu 102. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC) bằng 60^0. Tính diện tích ΔABC, biết diện tích ΔSBC bằng 2.

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải



Chọn A

Áp dụng công thức diện tích hình chiếu:

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta SBC}.\cos 60°=2.\frac{1}{2}=1$$

Câu 103. Bác Bình muốn làm một ngôi nhà mái lá cọ như trong hình với diện tích mặt nền nhà (tính theo viền tường bên ngoài ngôi nhà) là $100\,m^2$, mỗi mặt phẳng mái nhà nghiêng so với mặt đất 30^0, để lợp một m^2 mái nhà cần mua 100 nghìn đồng lá cọ. Hỏi số tiền bác Bình sử dụng mua lá cọ để lợp tất cả mái nhà gần nhất với số nào sau đây? (coi như các mép của mái lá cọ chỉ chớm đến viền tường bên ngoài ngôi nhà, chỗ thò ra khỏi tường không đáng kể).

A. $11,547$ triệu đồng. **B.** $12,547$ triệu đồng. **C.** $18,547$ triệu đồng. **D.** $19,547$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Ngôi nhà có hai mái đối xứng nhau và có diện tích bằng nhau, diện tích một nửa mặt nền nhà bằng $S = 50\,m^2$. Gọi S' là diện tích một mái, khi đó một mái nhà có hình chiếu vuông góc là một nửa mặt nền nhà. Ta có $\frac{S}{S'} = \cos 30^0 \Rightarrow S' = \frac{S}{\cos 30^0} = \frac{100}{\sqrt{3}} m^2$. Vậy tổng diện tích mái nhà là $\frac{200}{\sqrt{3}} m^2$.

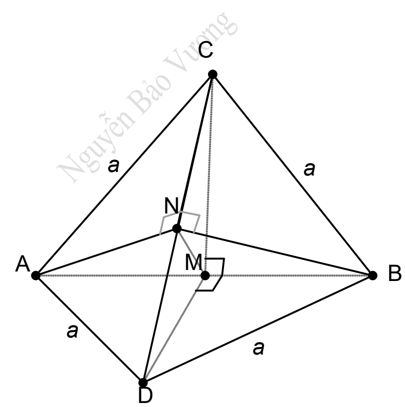
Số tiền bác Bình cần là $\frac{200}{\sqrt{3}}.100 \approx 11547$ nghìn đồng $\approx 11,547$ triệu đồng.

Câu 104. Cho tứ diện $ABCD$ $AC = AD = BC = BD = a$, $(ACD) \perp (BCD)$ và $(ABC) \perp (ABD)$. Tính độ dài cạnh CD.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $2\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

$\Delta ABC = \Delta ABD \Rightarrow CM = DM$.

$(ABC) \perp (ABD) \Rightarrow \widehat{CMD} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \Delta MCD$ vuông cân tại M.

$\Rightarrow MN \perp CD$.

Tương tự, ta cũng có ΔABN vuông cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB$

Đặt $CD = 2x, (0 < x < a)$ ta có:

$CN = DN = MN = x$.

$AN = BN = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABN ta có:

$$\frac{1}{AN^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{MN^2} \Leftrightarrow \frac{2}{a^2 - x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

$$\Rightarrow CD = 2x = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

Câu 105. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$; $AC = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AC' = 2a\sqrt{2}$.

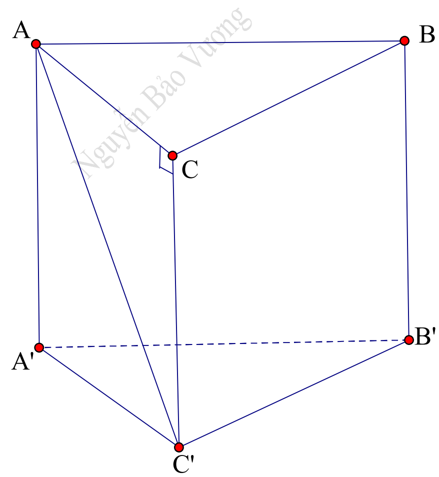
B. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng $45°$.

C. Đáy ABC là tam giác vuông.

D. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(BB'C')$ vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn A



Ta có: Tam giác ACC' vuông tại C.

Mà $CC' = AA' = a$; $AC = a\sqrt{5} \Rightarrow AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = a\sqrt{6}$ do đó khẳng định $AC' = 2a\sqrt{2}$ là sai.

+) Ta có $AB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 = AC^2$ chứng tỏ tam giác ABC vuông tại B

+) Ta có $AB \perp BC$; $AB \perp BB' \Rightarrow AB \perp (BB'C')$ mà $AB \subset (AA'B'B) \Rightarrow (AA'B'B) \perp (BB'C')$

+) Ta có $AB = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông do đó $\widehat{A'BA} = 45°$.

Mặt khác: $(ABC) \cap (A'BC) = BC$

$BC \perp AB$ và $BC \perp BB' \Rightarrow BC \perp (ABB'A')$

$\left(ABB'A'\right)\cap\left(ABC\right)=AB;\left(ABB'A'\right)\cap\left(A'BC\right)=A'B\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và $\left(A'BC\right)$ bằng góc giữa AB và $A'B$ và bằng $\widehat{A'BA}$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và $\left(A'BC\right)$ có số đo bằng 45°.