BÀI 24. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT PHẲNG

- CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

Chú ý

- Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.

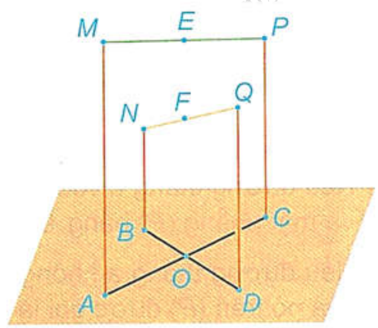
- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P). Hình chiếu vuông góc $\mathcal{Z}'$ của hình $\mathcal{Z}$ trên mặt phẳng (P) còn được gọi là hình chiếu của $\mathcal{Z}$ trên mặt phẳng (P).

Định lí ba đường vuông góc:

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).

Lưu ý: Định lí ba đường vuông góc cho phép chuyển việc kiểm tra tính vuông góc giữa a và b (có thể chéo nhau) sang kiểm tra tính vuông góc giữa b và a' (cùng thuộc mặt phẳng (P)).

Ví dụ 1. Trên một sân phẳng nằm ngang, tại các điểm A, B, C, D, người ta dựng các cột thẳng đứng AM, BN, CP, DQ và nối các sợi dây thẳng giữa M và P, N và Q như Hình 7.35.



Hình 7.35

a) Hãy chỉ ra hình chiếu của các dây MP và NQ trên sân.

b) Chứng minh rằng nếu $BD \perp AC$ thì $BD \perp MP$.

c) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các trung điểm E, F tương ứng của các đoạn thẳng MP và NQ có cùng hình chiếu trên sân.

Giải

a) Do các cột có phương thẳng đứng và sân thuộc mặt phẳng nằm ngang nên các cột vuông góc với sân. Vậy A, B, C, D tương ứng là hình chiếu của M, N, P, Q trên sân. Do đó AC, BD tương ứng là hình chiếu của MP, NQ trên sân.

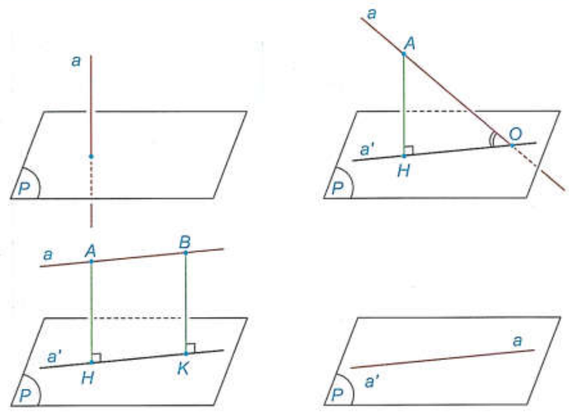
b) Nếu $BD \perp AC$, mà AC là hình chiếu của MP trên sân và BD thuộc sân nên theo định lí ba đường vuông góc ta có $BD \perp MP$.

c) Nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các đoạn thẳng AC, BD có chung trung điểm O. Do EO là đường trung bình của hình thang $ACPM$ nên $EO // MA$. Mặt khác, MA vuông góc với sân nên EO cũng vuông góc với sân. Vậy O là hình chiếu của E trên sân. Tương tự, O cũng là hình chiếu của F trên sân. Vậy E và F có cùng hình chiếu trên sân.

2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90°.

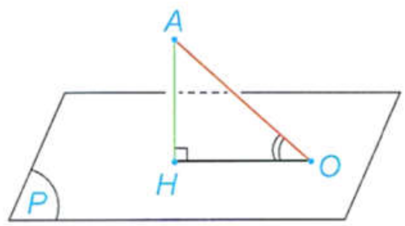
Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



Hình 7.38

Chú ý. Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0^{\circ} \le \alpha \le 90^{\circ}$.

Nhận xét. Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P). Lấy điểm O thuộc mặt phẳng $(P), O$ không trùng H. Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc AOH (H.7.39).



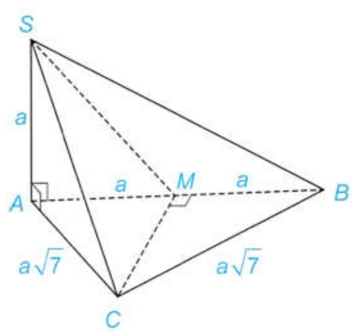
Hình 7.39

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = a, CA = CB = a\sqrt{7}, AB = 2a$.

a) Gọi α là góc giữa SB và (ABC). Tính $\tan\alpha$.

b) Tính góc giữa SC và (SAB).

Giải. (H.7.40)



Hình 7.40

a) Do $SA \perp (ABC)$ nên $\alpha = \widehat{SBA}$. Tam giác SAB vuông tại A nên $\tan\alpha = \tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

b) Gọi M là trung điểm của AB. Tam giác ABC cân tại C nên $CM \perp AB$.

Mặt khác, từ $SA \perp (ABC)$ ta có $CM \perp SA$. Do đó $CM \perp (SAB)$.

Vậy góc giữa SC và (SAB) bằng $\widehat{CSM}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 7a^2} = a\sqrt{8}$.

Ta có $AM = \frac{1}{2}AB = a$. Do đó, tam giác SAM vuông cân tại A và $SM = a\sqrt{2}$.

Tam giác CMS vuông tại M và $\cos\widehat{CSM} = \frac{SM}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$.

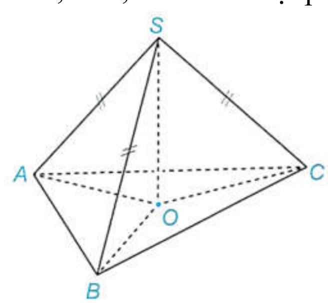
Vậy $\widehat{CSM} = 60^\circ$ và do đó góc giữa SC và (SAB) bằng 60°.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Xác định góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

Câu 1. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABC)(H.7.36)$.

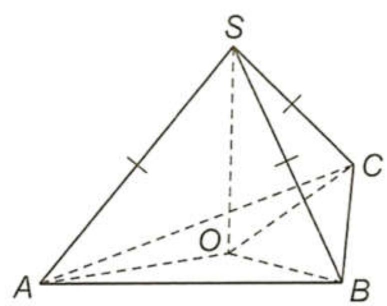
a) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
b) Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC).
c) Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.
d) Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC).



Hình 7.36

Lời giải

a) Do $SO \perp (ABC)$ và $SA = SB = SC$ nên $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC \Rightarrow OA = OB = OC$.



Hình 7.9

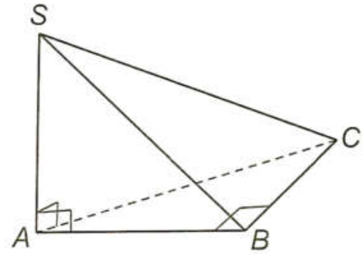
b) Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) là OA.
C) Do $SO \perp (ABC)$ nên $SO \perp BC$, mà $AO \perp BC$ suy ra $BC \perp (SOA)$. Do đó $BC \perp SA$.
d) Hình chiếu của mỗi tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC) lần lượt là tam giác OBC, OCA, OAB.

Câu 2. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B.

a) Xác định hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC).
b) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC).
c) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (SAB).

Lời giải

a) Hình chiếu của S trên (ABC) là điểm A.



Hình 7.10

b) Hình chiếu của tam giác SBC trên (ABC) là tam giác ABC.

c) Hình chiếu của tam giác SBC trên (SAB) là đoạn thẳng SB vì $CB \perp (SAB)$.

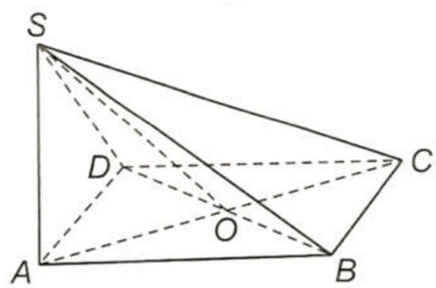
Câu 3. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa BD và mặt phẳng (SAC).

c) Tìm hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAC).

Lời giải



Hình 7.11

a) Vì $AC = a\sqrt{2}, SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^{\circ}$. Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 45°.

b) Vì $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$. Vậy góc giữa BD và (SAC) bằng 90°.

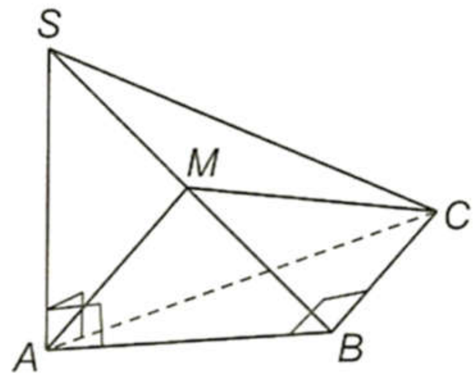
c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAC) là SO.

Câu 4. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại $B, SA = AB = BC = a$.

a) Xác định hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC).

b) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

Lời giải



Hình 7.12

a) Vì $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên

$BC \perp (SAB), AM \perp SB$ tại $M \Rightarrow AM \perp (SBC)$.

Hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC) là M.

b) Góc giữa SC và (ABC) bằng góc SCA.

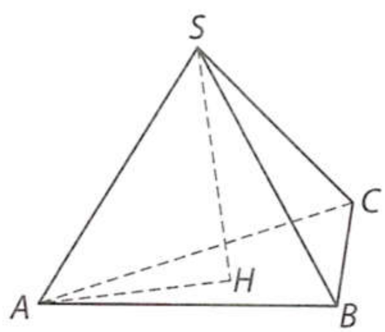
Ta có: $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Do đó $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng $3a$, các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau và bằng $2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

(H.7.7)



Hình 7.7

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó các tam giác SHA, SHB, SHC là những tam giác vuông tại H. Theo định lí Pythagore, ta có: $HA = HB = HC$, do đó H là tâm của tam giác đều ABC. Ta tính được $AH = a\sqrt{3}$.

Vì AH là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa đường thẳng SA và đường thẳng AH.

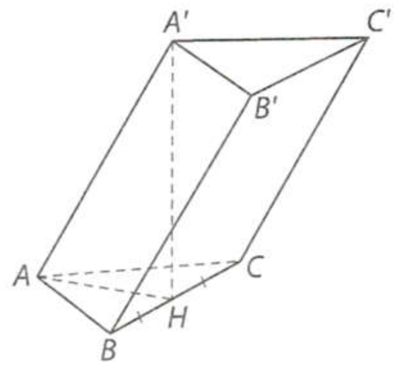
Xét tam giác SAH vuông tại H, ta có: $\cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{1}{2}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60°.

Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A, góc BAC bằng 120° và $AB = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC, biết $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

(H.7.8)



Hình 7.8

Ta có: AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC) và tam giác $AA'H$ vuông tại H. Do đó, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng AA' và AH.

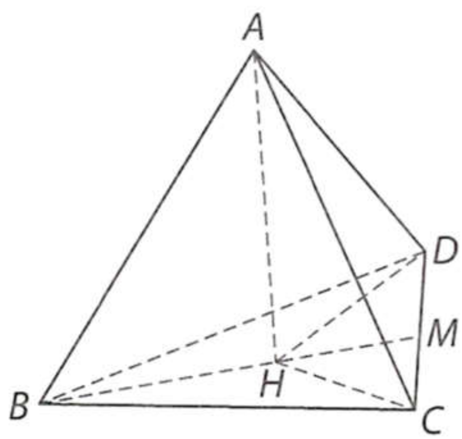
Xét tam giác ABH vuông tại H, có: $\widehat{HAB}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=60^\circ$, suy ra $AH=a.$

Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H, có: $\cos\widehat{HAA'}=\frac{AH}{AA'}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, suy ra $\widehat{HAA'}=45^\circ$.

Do đó $\left(AA',AH\right)=45^\circ$, hay góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 45°.

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Tính côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD).

Lời giải



Hình 7.32

Kẻ $AH\perp(BCD)$ tại H, ta có BH là hình chiếu vuông góc của AB trên mặt phẳng (BCD) nên góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AB và BH, mà $(AB,BH)=\widehat{ABH}$.

Vì $AB=AC=AD$ nên $HD=HB=HC$, hay H là tâm của tam giác BCD, suy ra $BH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

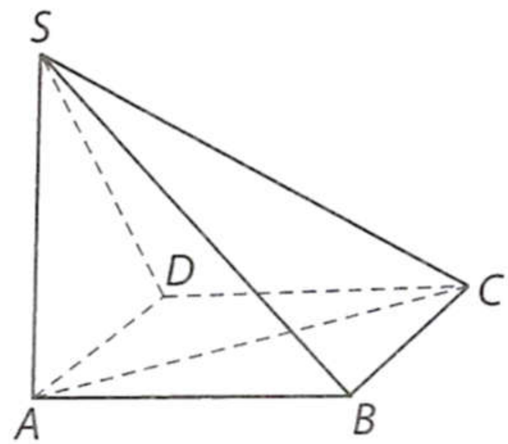
Từ đó ta tính được: $\cos\widehat{ABH}=\frac{BH}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a, SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{2}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
b) Tính tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

Lời giải

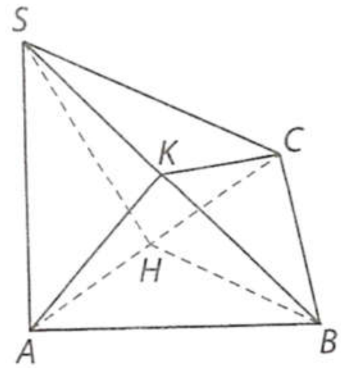


Hình 7.33

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$, do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SC và AC, mà $(SC, AC) = \widehat{SCA}$. Vì tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.
b) Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng SC và SB.
Ta có: $(SB, SC) = \widehat{BSC}$. Xét tam giác SBC vuông tại B, có:
$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}, BC = a.$
Do đó, $\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Vậy tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, biết $AB = a, SA = a\sqrt{6}$.
a) Tính tang của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).
b) Tính sin của góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Hình 7.34

a) Kẻ $BH \perp AC$ tại H, mà $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BH$, suy ra $BH \perp (SAC)$. Do đó, SH là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAC) nên góc giữa
đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và SH, mà
$(SB, SH) = \widehat{BSH}$.

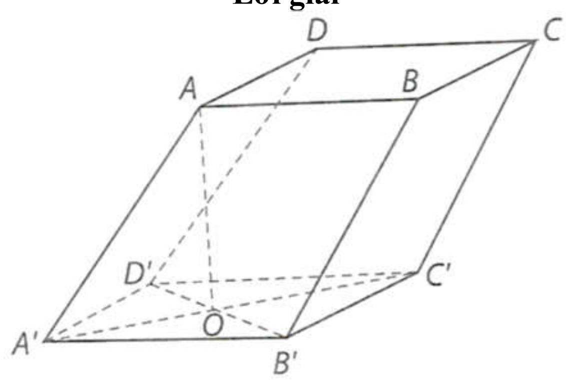
Ta tính được: $BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SH = \frac{a\sqrt{26}}{2}$, suy ra $\tan \widehat{BSH} = \frac{BH}{SH} = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

b) Kẻ $AK \perp SB$ tại K, mà $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AK$, suy ra $AK \perp (SBC)$. Do đó CK là hình chiếu vuông góc của AC trên (SBC), suy ra góc giữa đường thẳng AC và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AC và CK, mà $(AC, CK) = \widehat{ACK}$.

Ta có: $AK = \frac{SA \cdot AB}{SB} = a\sqrt{\frac{6}{7}}$, suy ra $\sin \widehat{ACK} = \frac{AK}{AC} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = a\sqrt{2}$, hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $B'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Lời giải



Hình 7.35

Gọi O là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Ta có: $A'O$ là hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ bằng góc giữa AA' và $A'O$. Mà $(AA', A'O) = \widehat{AA'O}$, ta lại có $A'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $\cos \widehat{AA'O} = \frac{OA'}{AA'} = \frac{1}{2}$, suy ra $\widehat{AA'O} = 60^\circ$.

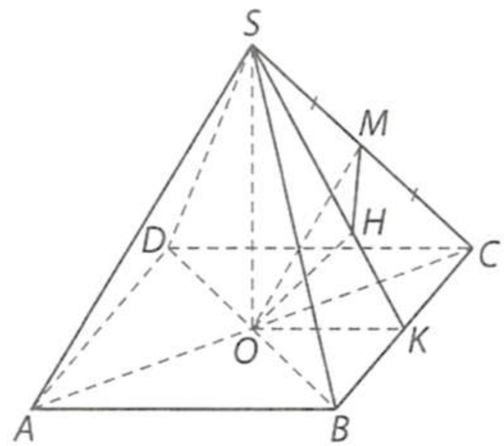
Vậy góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ bằng 60°.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).
c) Gọi M là trung điểm của cạnh SC và α là góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC). Tính $\sin\alpha$.

Lời giải



Hình 7.36

a) Ta có: $SO \perp AC$; $SO \perp BD$ nên $SO \perp (ABCD)$.
b) Vì $AO \perp (SBD)$ nên SO là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SBD), do đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc giữa hai đường thẳng SA và SO. Mà $(SA, SO) = \widehat{ASO}$ nên góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc ASO. Xét tam giác SAC có $SA^2 + SC^2 = AC^2$ và $SA = SC$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $\widehat{ASO} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng 45°.
c) Kẻ $OK \perp BC$ tại $K, OH \perp SK$ tại H thì ta chứng minh được $OH \perp (SBC)$, suy ra HM là hình chiếu vuông góc của OM trên mặt phẳng (SBC), do đó góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng OM và MH, mà $(OM, MH) = \widehat{OMH}$ nên góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) bằng góc OMH hay $\widehat{OMH} = \alpha$.

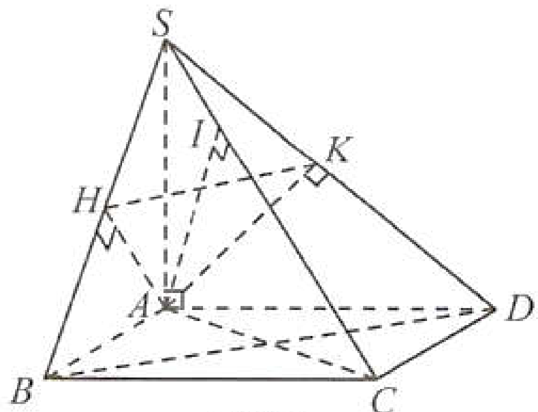
Ta có: $OM = \frac{a}{2}, OK = \frac{a}{2}, SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SOK vuông tại O, đường cao OH nên $OH = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vì tam giác OMH vuông tại H nên $\sin\alpha = \sin\widehat{OMH} = \frac{OH}{OM} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.
Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD. Chứng minh rằng:
a) $BC \perp$ (SAB), $CD \perp$ (SAD), $BD \perp (SAC)$.
b) $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK).
c) $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.

Lời giải



Hình 8

a) Ta có $BC\perp AB$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA\perp BC$ (vì $SA\perp (ABCD)$), suy ra $BC\perp (SAB)$.
Ta có $CD\perp AD$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA\perp CD$ (vì $SA\perp (ABCD)$), suy ra $CD\perp (SAD)$.
Ta có $BD\perp AC$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA\perp BD$ (vì $SA\perp (ABCD)$), suy ra $BD\perp (SAC)$.
b) Ta có $BC\perp (SAB)$ và $AH\subset (SAB)$, suy ra $BC\perp AH$. Mặt khác $AH\perp SB$, suy ra $AH\perp (SBC)$, suy ra $AH\perp SC$.(1)
Tương tự ta có $AK\perp CD$ và $AK\perp SD$, suy ra $AK\perp (SCD)$, suy ra $AK\perp SC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $SC\perp (AHK)$.
Ta có $SC\perp (AHK)$ và $AI\perp SC$, suy ra $I\in (AHK)$.

c) Ta có $SA\perp (ABCD)\Rightarrow \begin{cases} SA\perp AB \\ SA\perp AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{SAB}=90^0 \\ \widehat{SAD}=90^0 \end{cases}$

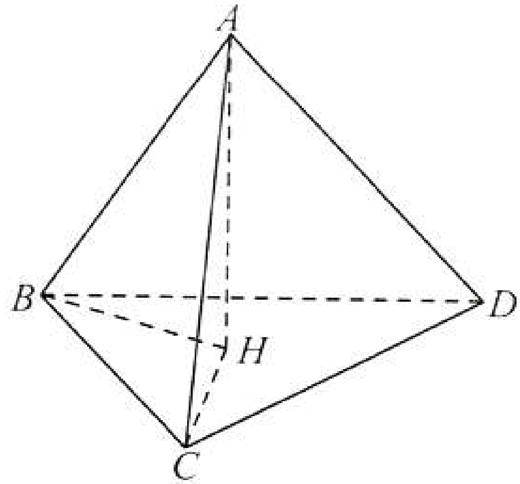
Xét ΔSAB và ΔSAD, ta có:
SA là cạnh chung;
$\widehat{SAB}=\widehat{SAD}=90^\circ$;
$AB=AD.$

Suy ra $\Delta SAB=\Delta SAD$ (c.g.c), suy ra $SB=SD, SH=SK$. Suy ra $\dfrac{SH}{SB}=\dfrac{SK}{SD}$. Vậy $HK//BD$.

Theo câu a) ta có $BD\perp (SAC)$, suy ra $HK\perp (SAC)$. Ta lại có $AI\subset (SAC)$, suy ra $HK\perp AI$.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB\perp CD$ và $AC\perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔBCD và $AD\perp BC$.

Lời giải



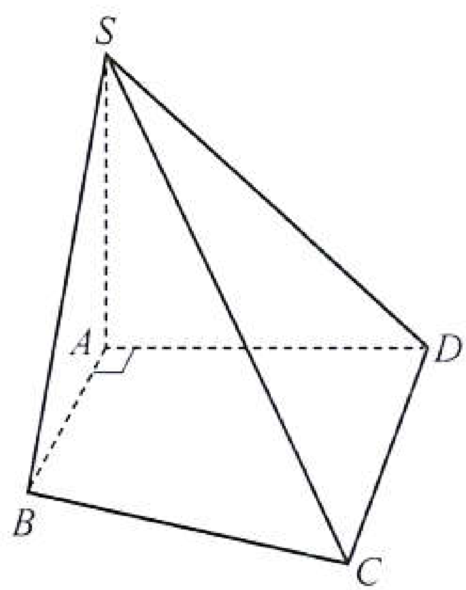
Hình 2

Ta có $CD \perp AB$ và $CD \perp AH$, suy ra $CD \perp (ABH)$, suy ra $CD \perp BH$.
Tương tự ta cũng có $BD \perp CH$.
Vậy H là trực tâm của ΔBCD.
Ta có H là trực tâm của ΔBCD, suy ra $BC \perp DH$. Ta lại có $BC \perp AH$, suy ra $BC \perp (AHD)$, suy ra $BC \perp AD$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), AB \perp AD, SA = AD = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Tính số đo của:
a) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.
b) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB).

Lời giải

(Hình 17)



Hình 17

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$. Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SB và AB, hay bằng $\widehat{SBA}$.
Trong tam giác vuông SAB có

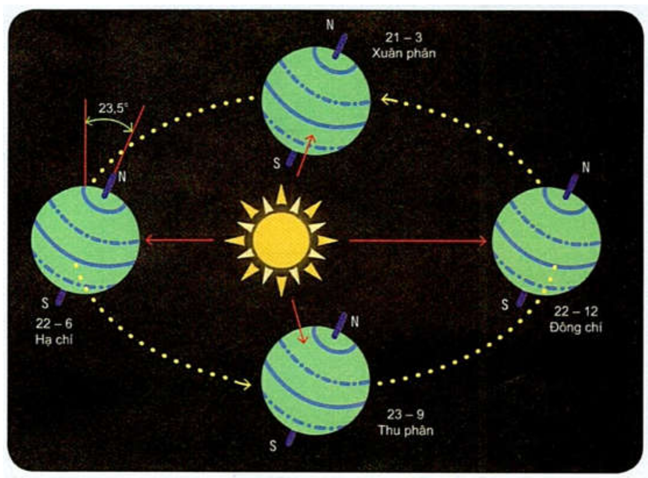
$\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$ nên $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $AD \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AD$. Mà $AD \perp AB$ và SA, AB cắt nhau trong mặt phẳng (SAB) nên $AD \perp (SAB)$. Suy ra SA là hình chiếu của SD trên (SAB), khi đó góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa SD và SA, hay bằng $\widehat{DSA}$. Vì tam giác DSA vuông cân tại A nên $\widehat{DSA} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng 45°.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 15. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tâm Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là một đường elip nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm. Trong quá trình chuyển động, Trái Đất lại quay quanh trục Bắc Nam. Trục này có phương không đổi và luôn tạo với mặt phẳng chứa quỹ đạo một góc khoảng $66,5^\circ$. (Theo nationalgeographic.org).



Hình 7.41

a) Giải thích vì sao hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo (P) cũng có phương không đổi.

b) Giải thích vì sao có hai thời điểm trong năm mà tại đó hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng (P) thuộc đường thẳng nối tâm Mặt Trời và tâm Trái Đất.

Lời giải

a) Gọi a, b là hai vị trí của trục Trái Đất, $a // b$. Gọi a', b' tương ứng là hình chiếu của a, b trên (P). Hai mặt phẳng (a, a) và (b, b') chứa hai phương tương ứng song song với nhau đó là các phương cùng vuông góc với (P) (phương chiếu) và $a // b$. Vì vậy, hai mặt phẳng (a, a') và (b, b') song song với nhau hoặc trùng nhau. Do đó, hai giao tuyến của chúng với (P) là a' và b' cũng song song hoặc trùng nhau.

Lưu ý. Kết luận ở câu a thực chất được rút ra từ tính chất sau của phép chiếu song song: Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song có phương khác phương chiếu thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

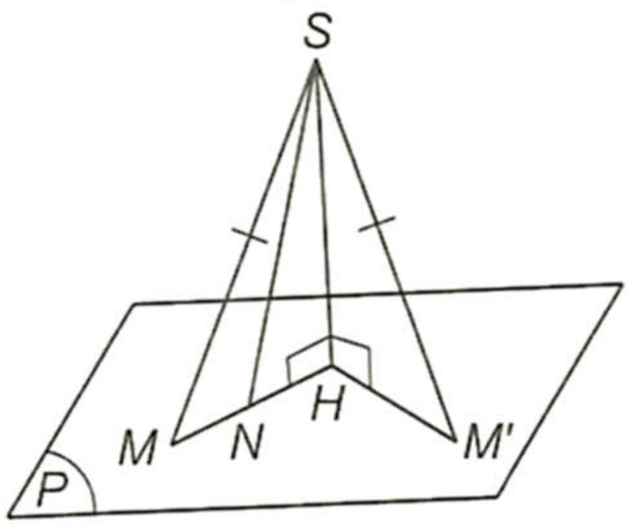
b) Hình chiếu của trục Trái Đất lên mặt phẳng (P) có phương cố định. Gọi m là đường thẳng đi qua tâm Mặt Trời và có phương cố định nói trên. Khi đó, hình chiếu của trục Trái Đất xuống (P) thuộc đường thẳng m khi và chỉ khi tâm Trái Đất ở vị trí là giao của m với đường elip quỹ đạo của Trái Đất. Như vậy có hai vị trí thuộc quỹ đạo, ứng với hai thời điểm trong năm mà hình chiếu của trục Trái Đất trên (P) thuộc đường thẳng m (nối tâm Trái Đất và tâm Mặt Trời).

Câu 16. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P), có hình chiếu H trên (P). Với mỗi điểm M bất kì (không trùng H) trên mặt phẳng (P), ta gọi đoạn thẳng SM là đường xiên, đoạn thẳng HM là hình chiếu trên (P) của đường xiên đó. Chứng minh rằng:

a) Hai đường xiên SM và SM' bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu HM và HM' tương ứng của chúng bằng nhau;

b) Đường xiên SM lớn hơn đường xiên SM' nếu hình chiếu HM lớn hơn hình chiếu HM'.

Lời giải



Hình 7.13

a) $\Delta SHM = \Delta SHM' \Rightarrow HM = HM'$.

b) Trên tia HM lấy điểm N sao cho $SN = SM'$

$\Rightarrow HN = HM'$ mà $SM > SM' \Rightarrow SM > SN$

$\Rightarrow HM > HN \Rightarrow HM > HM'$.

Câu 17. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. Góc cất cánh của nó là góc giữa đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Hai máy bay cất cánh và bay thẳng với cùng độ lớn vận tốc trong 5 phút đầu, với các góc cất cánh lần lượt là $10^\circ, 15^\circ$. Hỏi sau 1 phút kể từ khi cất cánh, máy bay nào ở độ cao so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) lớn hơn?

Chú ý. Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

Lời giải

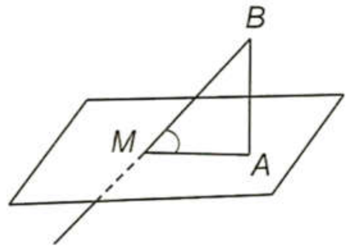
Vì $AM = A'M', BM = AM \cdot \sin 10^\circ < A'M' \cdot \sin 15^\circ = B'M'$.

Câu 18. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Hãy nêu cách đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí và một thời điểm.

Chú ý. Góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời lúc giữa trưa với mặt phẳng nằm ngang tại vị trí đó được gọi là góc Mặt Trời. Giữa trưa là thời điểm ban ngày mà tâm Mặt Trời thuộc mặt phẳng chứa kinh tuyến đi qua điểm đang xét. Góc Mặt Trời ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất.

Lời giải

Lấy một cột AB, bóng của cột AB là AM.



Hình 7.14

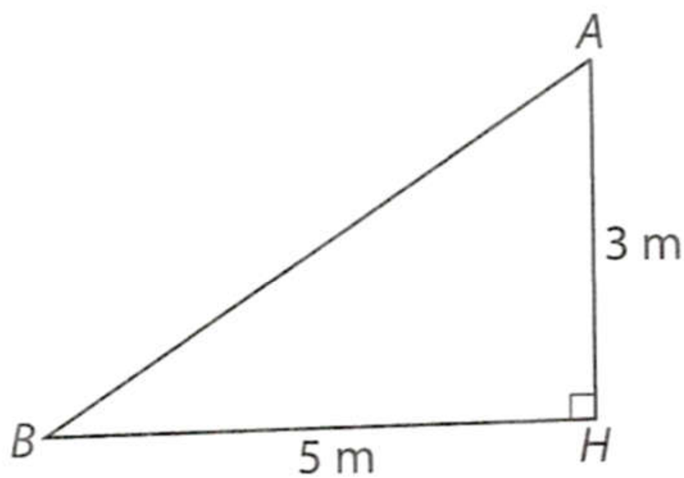
Khi đó $\tan \widehat{BAM} = \dfrac{AB}{AM}$.

Từ đó tính được góc $\widehat{BAM}$.

Câu 19. Một chiếc cột cao $3m$ được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài $5m$. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

(H.7.9)

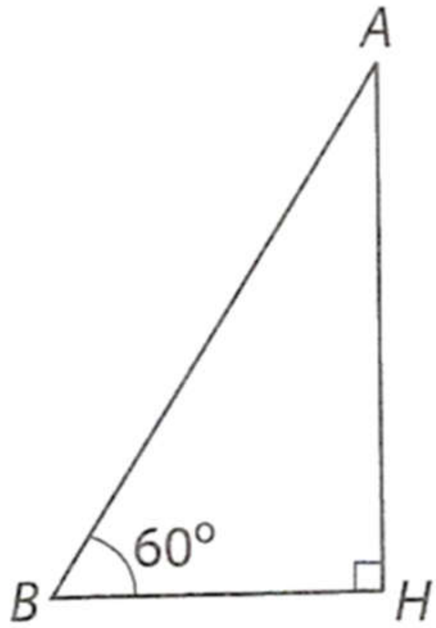


Hình 7.9

Góc giữa tia nắng mặt trời AB và mặt đất là góc ABH. Ta có: $\tan \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{3}{5}$, suy ra $\widehat{ABH} \approx 30,96^{\circ}$.

Câu 20. Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60°. Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài $10m$. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

Lời giải



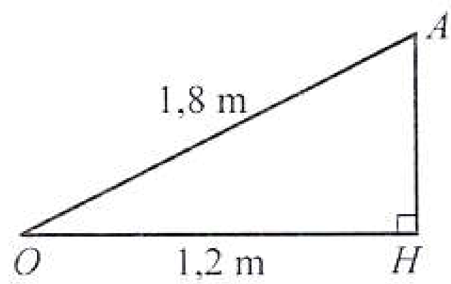
Hình 7.37

Gọi A là vị trí con diều, B là vị trí đầu dây diều trên mặt đất, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt đất.
Tam giác ABH vuông tại H, góc ABH bằng 60° và $AB=10m=1000cm$.
Ta có: $AH=AB\cdot\sin 60^{\circ}\approx 866(cm)$.

Câu 21. Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở Hình 20 có các ống hấp nhiệt chân không dài $1,8m$ được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài 1,2 m. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hình 20

Lời giải



Hình 71

Vẽ OA biểu diễn cho ống hấp nhiệt chân không, OH biểu diễn bóng nắng (hình chiếu vuông góc do tia nắng chiếu vuông góc với mặt sân) của ống đó trên mặt sân. Như vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân bằng $\widehat{AOH}$. Ta có:

$$\cos\widehat{AOH}=\frac{OH}{OA}=\frac{1,2}{1,8}=\frac{2}{3}\Rightarrow\widehat{AOH}\approx 48^{\circ}.$$

Vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân thượng bằng khoảng 48°.