

## CHUYÊN ĐỀ 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

• Fanpage: Nguyễn Bảo Vương - <https://www.nbv.edu.vn/>

## PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

## 1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $D$ .- Số  $M$  được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên tập  $D$  nếu  $f(x) \leq M$  với mọi  $x \in D$  và tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho  $f(x_0) = M$ .Kí hiệu  $M = \max_{x \in D} f(x)$  hoặc  $M = \max_D f(x)$ .- Số  $m$  được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên tập  $D$  nếu  $f(x) \geq m$  với mọi  $x \in D$  và tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho  $f(x_0) = m$ .Kí hiệu  $m = \min_{x \in D} f(x)$  hoặc  $m = \min_D f(x)$ .

## Chú ý

- Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  (mà không nói "trên tập  $D$ ") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của  $f(x)$  trên tập xác định của hàm số.- Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập  $D$ , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập  $D$  để kết luận.**Ví dụ 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

## Giải

Tập xác định của hàm số là  $[-1; 1]$ .

Cách 1. Sử dụng định nghĩa.

Ta có:

-  $f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$ ; dấu bằng xảy ra khi  $1-x^2 = 0$ , tức là khi  $x = -1$  hoặc  $x = 1$ .Do đó  $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$ .-  $f(x) = \sqrt{1-x^2} \leq 1$ ; dấu bằng xảy ra khi  $1-x^2 = 1$ , tức là khi  $x = 0$ . Do đó  $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$ .

Cách 2. Sử dụng bảng biến thiên.

Với  $x \in (-1; 1)$ , ta có:  $y' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn  $[-1; 1]$ :

$x$	-1	0	1
$y'$		+	-
$y$		1	
	0		0

Từ bảng biến thiên, ta được:  $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$ ;  $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$ .**Chú ý.** Trong thực hành, ta cũng dùng các kí hiệu  $\min_D y, \max_D y$  để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số  $y = f(x)$  trên tập  $D$ . Do đó, trong Ví dụ 1 ta có thể viết: $\min_{[-1;1]} y = y(-1) = y(1) = 0$ ;  $\max_{[-1;1]} y = y(0) = 1$ .**Ví dụ 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số  $y = x - 2 + \frac{1}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

## Giải

Ta có:  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (vì  $x > 0$ ).

Tính các giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty. 16$$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng  $(0; +\infty)$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$y'$		-	0
$y$	$+\infty$		$+\infty$

$\nearrow$  0  $\searrow$

Từ bảng biến thiên, ta được:  $\min_{(0; +\infty)} y = y(1) = 0$ ; hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

## 2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Giả sử  $y = f(x)$  là hàm số liên tục trên  $[a; b]$  và có đạo hàm trên  $(a; b)$ , có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn  $[a; b]$  mà đạo hàm  $f'(x)$  bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$  :

1. Tìm các điểm  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ , tại đó  $f'(x)$  bằng 0 hoặc không tồn tại.
2. Tính  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$  và  $f(b)$ .
3. Tìm số lớn nhất  $M$  và số nhỏ nhất  $m$  trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a; b]} f(x); m = \min_{[a; b]} f(x).$$

**Ví dụ 3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 3$  trên đoạn  $[0; 4]$ .

**Giải**

Ta có:  $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = \sqrt{2}$  (vì  $x \in [0; 4]$ );

$$y(0) = 3; y(4) = 195; y(\sqrt{2}) = -1.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[0; 4]} y = y(4) = 195; \min_{[0; 4]} y = y(\sqrt{2}) = -1.$$

**Ví dụ 4.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin x + \cos x$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$ .

**Giải**

Ta có:  $y' = \cos x - \sin x$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$  hoặc  $x = \frac{5\pi}{4}$  (vì  $x \in [0; 2\pi]$ );

$$y(0) = 1; y(2\pi) = 1; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[0; 2\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \min_{[0; 2\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

☐ **Bước 1:** Hàm số đã cho  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên đoạn  $[a; b]$ .

Tìm các điểm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  trên khoảng  $(a; b)$ , tại đó  $f'(x) = 0$  hoặc  $f'(x)$  không xác định.

☐ **Bước 2:** Tính  $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$ .

☐ **Bước 3:** Khi đó:

$$\max_{[a,b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

$$\min_{[a,b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

- Câu 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = 1 + x^2$  trên đoạn  $[0; 2]$ .
- Câu 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:  
**a)**  $y = f(x) = 2x + 3$  trên đoạn  $[-3; 1]$ ;  
**b)**  $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .
- Câu 3.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$  trên nửa khoảng  $[-1; +\infty)$ .
- Câu 4.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$  trên đoạn  $[-1; 3]$ .
- Câu 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = x + \frac{1}{x} - 7$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .
- Câu 6.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  trên đoạn  $[0; 5]$ .
- Câu 7.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .
- Câu 8.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:  
**a)**  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$  trên đoạn  $[-3; 2]$ ;  
**b)**  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$  trên đoạn  $[1; 4]$ .
- Câu 9.** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$  trên đoạn  $[-1; 2]$
- Câu 10.** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 30x$  trên đoạn  $[2; 19]$
- Câu 11.** (Mã 110 2017) Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 3$  trên đoạn  $[0; \sqrt{3}]$ .
- Câu 12.** (Mã 104 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^2 + \frac{2}{x}$  trên đoạn  $[\frac{1}{2}; 2]$ .
- Câu 13.** (Sở Nam Định-2019) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{4 - x^2}$
- Câu 14.** (Chuyên ĐHS PHN - 2018) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos 2x$  trên  $[0; \pi]$
- Câu 15.** Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x - 1 + \frac{4}{x - 1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ . Tìm  $m$ ?

**Dạng 2. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước**

**Bước 1.** Tìm nghiệm  $x_i (i = 1, 2, \dots)$  của  $y' = 0$  thuộc  $[a; b]$

**Bước 2.** Tính các giá trị  $f(x_i); f(a); f(b)$  theo tham số

**Bước 3.** So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

**Bước 4.** Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

**Lưu ý:**

- Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\max_{[a,b]} f(x) = f(b); \min_{[a,b]} f(x) = f(a)$
- Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\max_{[a,b]} f(x) = f(a); \min_{[a,b]} f(x) = f(b)$

- Câu 16.** Tìm giá trị dương của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{m^2 x - 1}{x + 2}$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng 1.

**Câu 17. (Chuyên Bắc Ninh 2019)** Gọi  $A, B$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \frac{x+m^2+m}{x-1} \text{ trên đoạn } [2;3]. \text{ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số } m \text{ để } A+B = \frac{13}{2}.$$

**Câu 18. (THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3x^2 - m$ . Trên  $[-1;1]$  hàm số có giá trị nhỏ nhất là  $-1$ . Tính  $m$ ?

**Câu 19. (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho hàm số  $y = \frac{1-m \sin x}{\cos x + 2}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[0;10]$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn  $-2$ ?

**Câu 20. (Mã 101-2022)** Cho hàm số  $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$  với  $m$  là tham số thực. Nếu  $\min_{[0;3]} f(x) = f(2)$  thì  $\max_{[0;3]} f(x)$  bằng bao nhiêu?

### Dạng 3. Định m để GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thỏa mãn điều kiện cho trước

**Dạng 1:** Tìm  $m$  để  $\max_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0)$ .

**Phương pháp:**

**Cách 1:** Trước tiên tìm  $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k)$ .

$$\text{Kiểm tra } \max\{|m+K|, |m+k|\} \geq \frac{|m+K| + |m+k|}{2} \geq \frac{|m+K-m-k|}{2} = \frac{|K-k|}{2}.$$

$$\text{TH1: } \frac{|K-k|}{2} \leq a. \text{ Để } \max_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = -a \\ m+K = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -a-k \\ m = a-K \end{cases} \Rightarrow m \in \{-a-k; a-K\}.$$

$$\text{TH2: } \frac{|K-k|}{2} > a \Rightarrow m \in \emptyset.$$

**Cách 2:** Xét trường hợp

$$\text{TH1: } \max = |m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K| = a \\ |m+K| \geq |m+k| \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \max = |m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k| = a \\ |m+k| \geq |m+K| \end{cases}$$

**Dạng 2:** Tìm  $m$  để  $\min_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0)$ .

**Phương pháp:**

Trước tiên tìm  $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k)$ .

$$\text{Để } \min_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = a \\ m+k > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K = -a \\ m+K < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = a-k \\ m > -k \end{cases} \vee \begin{cases} m = -a-K \\ m < -K \end{cases}. \text{ Vậy } m \in S_1 \cup S_2.$$

**Dạng 3:** Tìm  $m$  để  $\max_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m|$  không vượt quá giá trị  $M$  cho trước.

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k)$ .

$$\text{Để } \max_{[\alpha;\beta]} y \leq M \Rightarrow \begin{cases} m+k \geq -M \\ m+K \leq M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k \leq m \leq M-K.$$

**Dạng 4:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m|$  không vượt quá giá trị  $a$  cho trước.

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k).$

Để

$$\min_{[a;b]} y \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \leq a \\ m+k \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \geq -a \\ m+K \leq 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a-k \\ m \geq -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \geq -a-K \\ m \leq -K \end{cases} \vee -K < m < -K$$

**Dạng 5:** Tìm  $m$  để  $\max_{[a;b]} y = |f(x) + m|$  đạt min.

**Phương pháp:**

Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k).$

Đề hỏi tìm  $m \Rightarrow m = -\frac{K+k}{2}$ . Đề hỏi tìm min của  $\max_{[a;b]} y \Rightarrow$  giá trị này là  $\frac{K-k}{2}$ .

**Dạng 6:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m|$  đạt min.

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k).$

Đề hỏi tìm  $m \Rightarrow (m+K)(m+k) \leq 0 \Leftrightarrow -K \leq m \leq -k$ . Đề hỏi tìm min của  $\min_{[a;b]} y \Rightarrow$  giá trị này là 0.

**Dạng 7:** Cho hàm số  $y = |f(x) + m|$ . Tìm  $m$  để  $\max_{[a;b]} y \leq h, \min_{[a;b]} y (h > 0)$  hoặc  $\min + \max =$

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k).$

**TH1:**  $|K+m| \leq h |k+m| \xrightarrow[\text{cùng dấu } k+m]{\frac{|K+m| \geq |k+m|}{K+m}} m \in S_1.$

**TH2:**  $|k+m| \leq h |K+m| \xrightarrow[\text{cùng dấu } k+m]{\frac{|k+m| \geq |K+m|}{K+m}} m \in S_2.$

Vậy  $m \in S_1 \cup S_2$ .

**Dạng 8:** Cho hàm số  $y = |f(x) + m|$ .

**Phương pháp:** Trước tiên tìm  $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k).$

**BT1:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y + \max_{[a;b]} y = \alpha \Leftrightarrow |m+K| + |m+k| = \alpha.$

**BT2:** Tìm  $m$  để  $\min_{[a;b]} y * \max_{[a;b]} y = \beta \Leftrightarrow |m+K| * |m+k| = \beta.$

**Câu 21. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 3]$  bằng 16. Tính tổng tất cả các phần tử của  $S$

**Câu 22. (THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho hàm số  $y = |x^2 + 2x + a - 4|$  ( $a$  là tham số). Tìm  $a$  để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-2; 1]$  đạt giá trị nhỏ nhất

**Câu 23. (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$  trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng 16. Số phần tử của  $S$  là bao nhiêu?

**Câu 24. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$  trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp  $S$  bằng bao nhiêu?

**Câu 25. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$  trên đoạn  $[0; \ln 4]$  bằng 6?

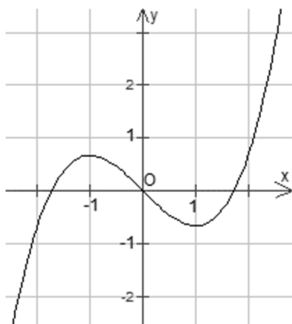
**Câu 26.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$g(x) = f\left(4x - x^2\right) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3} \text{ trên đoạn } [1; 3].$$

$x$	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$y'$		-	0	+	0	-	
$y$	$+\infty$				5		

$\swarrow$   $-3$   $\nearrow$   $\searrow$   $-\infty$

**Câu 27.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trên  $\mathbb{R}$ , hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right)$  trên đoạn  $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$

**Câu 28. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021)** Cho hai hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  và  $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$ . Trên đoạn  $[1; 4]$ , hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  có cùng giá trị nhỏ nhất và đạt tại cùng một điểm. Biết rằng điểm  $A(1; 4)$  thuộc đồ thị của hàm số  $f(x)$ . Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[1; 4]$ .

**Câu 29. (Chuyên Bắc Giang - 2021)** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |f(2 \sin x + 1) + m|$  không vượt quá 10?

**Câu 30. (THPT Đô Lương - Nghệ An - 2022)** Hàm số  $f(x) = 10^x + x$  và  $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 + 1)x - 2$ . Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = g(x + f(x))$  trên đoạn  $[0; 1]$ . Khi  $M$  đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của  $m$  bằng?

**Câu 31. (Chuyên Hà Tĩnh 2022)** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = f(x - 1) + 2$  như sau

$x$	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$				4		$-\infty$

$\swarrow$   $0$   $\nearrow$   $\searrow$

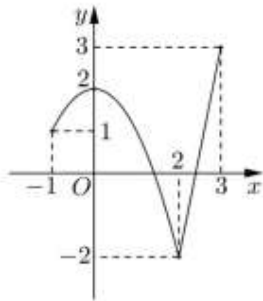
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f\left(-\left|\sqrt{3} \sin x - \cos x\right| + 2\right) + 2 \cos 2x + 4 \sin x - 1$

**Dạng 4. Dùng phương pháp hàm số để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức**

- Câu 32.** (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$ . Tính giá trị  $M + m$
- Câu 33.** (Chuyên Hà Tĩnh - 2019) Cho các số thực  $x, y$  thay đổi thỏa mãn  $x^2 + y^2 - xy = 1$  và hàm số  $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ . Gọi  $M, m$  tương ứng là GTLN và GTNN của  $Q = f\left(\frac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$ . Tính tổng  $M + m$
- Câu 34.** (THPT Trần Nhân Tông 2018) Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$
- Câu 35.** (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018) Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x + 2y$ .
- Câu 36.** (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2m(m+1)x + 2m^3 + m^2 + 1}{x - m}$  có đồ thị  $(C_m)$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $A$  là điểm thỏa mãn vừa là điểm cực đại của  $(C_m)$  ứng với một giá trị  $m$  vừa là điểm cực tiểu của  $(C_m)$  ứng với giá trị khác của  $m$ . Tìm giá trị của  $a$  để khoảng cách từ  $A$  đến đường thẳng  $(d): x - (a+1)y + a = 0$  đạt giá trị lớn nhất là

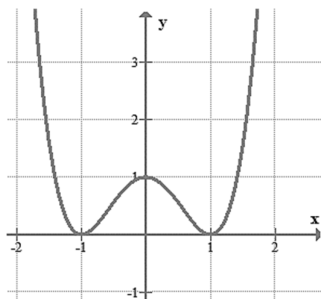
**PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH**

- Câu 1.** (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-1; 3]$ . Giá trị của  $M - m$  bằng



- A. 1                      B. 4                      C. 5                      D. 0

- Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$  và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-1; 1]$ . Giá trị của  $M - m$  bằng

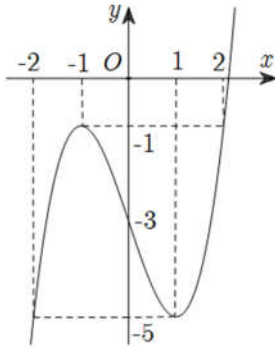
- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-3; 2]$  và có bảng biến thiên như sau. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 2]$ . Tính  $M + m$ .

$x$	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

- A. 3.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 4.

**Câu 4.** (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  và giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 2]$ .



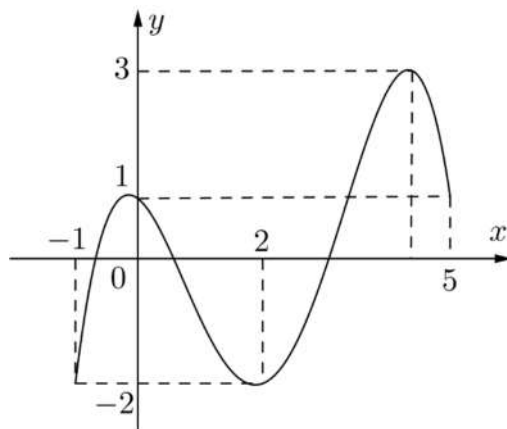
- A.  $m = -5; M = -1$ .      B.  $m = -2; M = 2$ .      C.  $m = -1; M = 0$ .      D.  $m = -5; M = 0$ .

**Câu 5.** (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn  $[-1; 3]$  như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

$x$	-1	0	2	3		
$y'$		+	0	-	0	+
$y$	0	5	1	4		

- A.  $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(0)$ .      B.  $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(3)$ .      C.  $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(2)$ .      D.  $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(-1)$ .

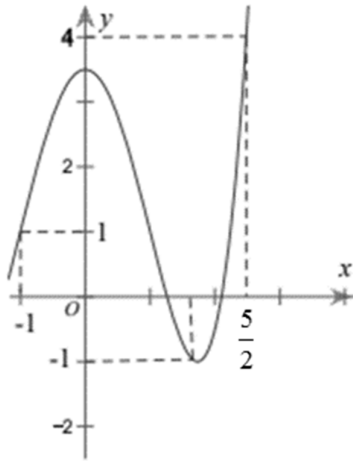
**Câu 6.** (VTED 2019) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[-1; 5]$  và có đồ thị trên đoạn  $[-1; 5]$  như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[-1; 5]$  bằng



- A. -1                      B. 4                      C. 1                      D. 2



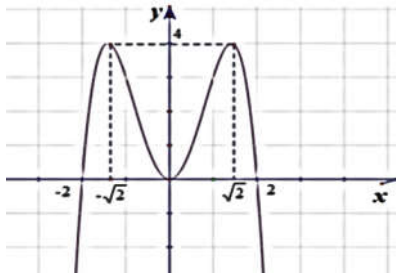
**Câu 7.** (THPT Yên Mỹ Hưng Yên 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$  và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $f(x)$  trên  $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$  là:

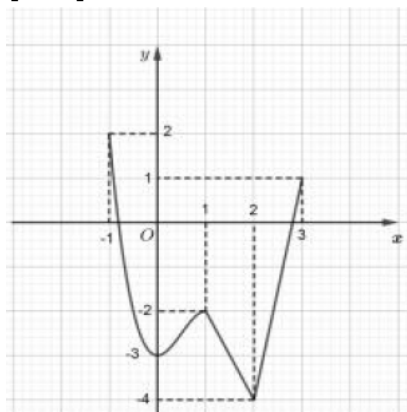
- A.  $M = 4, m = 1$       B.  $M = 4, m = -1$       C.  $M = \frac{7}{2}, m = -1$       D.  $M = \frac{7}{2}, m = 1$

**Câu 8.** (THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 2]$  là:



- A.  $\max_{[0;2]} f(x) = 2$ .      B.  $\max_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$ .  
C.  $\max_{[0;2]} f(x) = 4$ .      D.  $\max_{[0;2]} f(x) = 0$ .

**Câu 9.** (Sở Bắc Giang 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-1; 3]$ . Giá trị của  $M + m$  là



- A. 2      B. -6      C. -5      D. -2

**Câu 10.** (Sở Hà Nội 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên trên  $[-5; 7]$  như sau

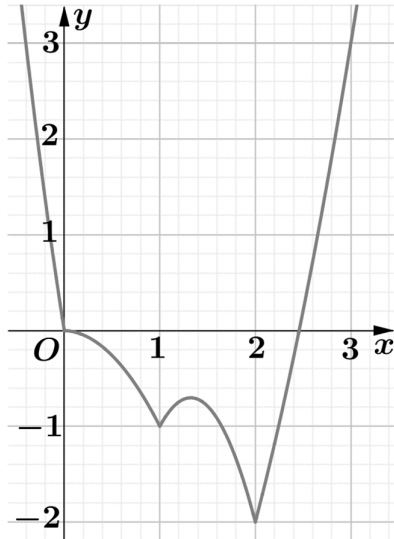
$x$	-5		1		7
$y'$		-	0	+	
$y$	6				9

$\swarrow$  2  $\searrow$

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

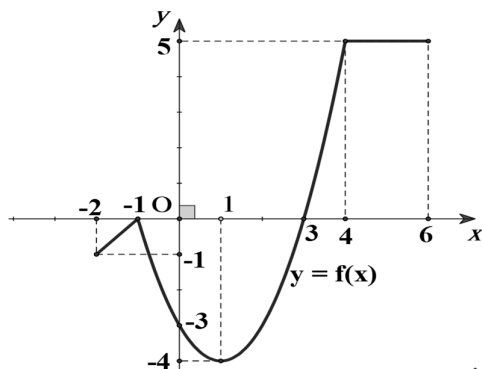
- A.  $\min_{[-5;7]} f(x) = 6$ .      B.  $\min_{[-5;7]} f(x) = 2$ .      C.  $\max_{[-5;7]} f(x) = 9$ .      D.  $\max_{[-5;7]} f(x) = 6$ .

**Câu 11.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên  $[0; 3]$ . Giá trị của  $M + m$  bằng?



- A. 5.      B. 3.      C. 2.      D. 1.

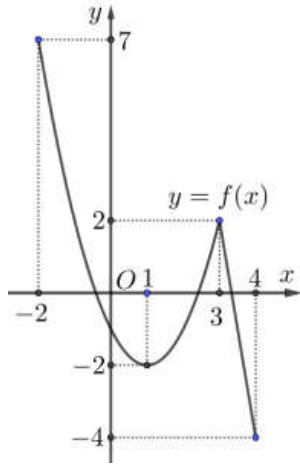
**Câu 12.** (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-2; 6]$  và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-2; 6]$ . Giá trị của  $M - m$  bằng

- A. 9.      B. -8.      C. -9.      D. 8.

**Câu 13.** (VTED 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có đồ thị trên đoạn  $[-2; 4]$  như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng



A. 5

B. 3

C. 0

D. -2

**Câu 14.** (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$		
$y'$		-	-	0	+	0	-

Mệnh đề nào sau đây đúng

A.  $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$     B.  $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$     C.  $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$     D.  $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

**Câu 15.** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 21x$  trên đoạn  $[2;19]$  bằng

A. -36.

B.  $-14\sqrt{7}$ .C.  $14\sqrt{7}$ .

D. -34.

**Câu 16.** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 33x$  trên đoạn  $[2;19]$  bằng

A. -72.

B.  $-22\sqrt{11}$ .

C. -58.

D.  $22\sqrt{11}$ .

**Câu 17.** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 12x^2 - 4$  trên đoạn  $[0;9]$  bằng

A. -39.

B. -40.

C. -36.

D. -4.

**Câu 18.** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2$  trên đoạn  $[0;9]$  bằng

A. -2.

B. -11.

C. -26.

D. -27.

**Câu 19.** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 12x^2 - 1$  trên đoạn  $[0;9]$  bằng

A. -28.

B. -1.

C. -36.

D. -37.

**Câu 20.** (Chuyên Bắc Ninh 2018) Tìm tập giá trị của hàm số  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

A.  $T = [1; 9]$ .B.  $T = [2\sqrt{2}; 4]$ .C.  $T = (1; 9)$ .D.  $T = [0; 2\sqrt{2}]$ .

**Câu 21.** (Mã 123 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$  trên đoạn  $[0;2]$ .

A.  $m = 3$ B.  $m = 0$ C.  $m = -2$ D.  $m = 11$ 

**Câu 22.** (Mã 101 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 9$  trên đoạn  $[-2;3]$  bằng

A. 201

B. 2

C. 9

D. 54

**Câu 23.** (Đề Tham Khảo 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$  trên đoạn  $[-2;3]$  bằng

A. 122

B. 50

C. 5

D. 1

**Câu 24.** (Mã 105 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = x^4 - x^2 + 13$  trên đoạn  $[-2;3]$ .

A.  $m = 13$ B.  $m = \frac{51}{4}$ C.  $m = \frac{51}{2}$ D.  $m = \frac{49}{4}$ 

**Câu 25.** (Mã 104 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 3x$  trên đoạn  $[-3;3]$  bằng

A. -18.

B. -2.

C. 2.

D. 18.

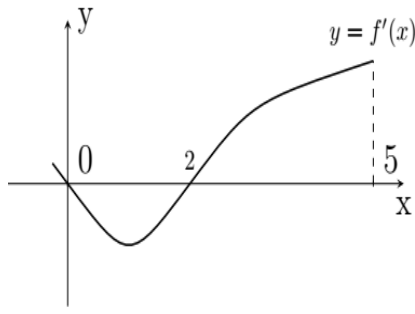
- Câu 26.** (Mã 103 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + 3x^2$  trên đoạn  $[-4; -1]$  bằng
- A. -16                      B. 0                      C. 4                      D. -4
- Câu 27.** (THPT Hoa Lư A 2018) Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$  trên đoạn  $[0; 3]$ . Tính tổng  $S = 2m + 3M$ .
- A.  $S = -\frac{7}{2}$ .                      B.  $S = -\frac{3}{2}$ .                      C. -3.                      D.  $S = 4$ .
- Câu 28.** (THPT Hà Huy Tập - 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 2\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x$  trên  $[0; \pi]$ .
- A.  $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2}{3}$ .                      B.  $\max_{[0; \pi]} y = \frac{10}{3}$ .                      C.  $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .                      D.  $\max_{[0; \pi]} y = 0$ .
- Câu 29.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Khi đó giá trị của  $M^2 + m^2$  là
- A.  $\frac{31}{2}$ .                      B.  $\frac{11}{2}$ .                      C.  $\frac{41}{4}$ .                      D.  $\frac{61}{4}$ .
- Câu 30.** (Đề Tham Khảo 2017) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .
- A.  $\min_{(0; +\infty)} y = \frac{33}{5}$                       B.  $\min_{(0; +\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$                       C.  $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$                       D.  $\min_{(0; +\infty)} y = 7$
- Câu 31.** (THPT Minh Châu Hưng Yên 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x - 5 + \frac{1}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  bằng bao nhiêu?
- A. 0                      B. -1                      C. -3                      D. -2
- Câu 32.** (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Tìm  $m$
- A.  $m = 4$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m = 3$ .

**NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI**

- Câu 33.** (Mã 123 2017) Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x-1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[2; 4]} y = 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.  $m > 4$                       B.  $3 < m \leq 4$                       C.  $m < -1$                       D.  $1 \leq m < 3$
- Câu 34.** (Mã 110 2017) Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = \frac{16}{3}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.  $m > 4$                       B.  $2 < m \leq 4$                       C.  $m \leq 0$                       D.  $0 < m \leq 2$
- Câu 35.** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  trên đoạn  $[1; 2]$  bằng 8 ( $m$  là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $m > 10$ .                      B.  $8 < m < 10$ .                      C.  $0 < m < 4$ .                      D.  $4 < m < 8$ .
- Câu 36.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{x-m^2}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[-3; -2]} y = \frac{1}{2}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.  $3 < m \leq 4$ .                      B.  $-2 < m \leq 3$ .                      C.  $m > 4$ .                      D.  $m \leq -2$ .

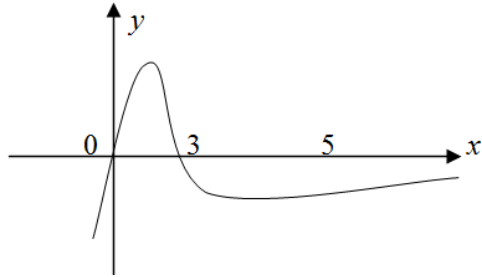
- Câu 37.** Cho hàm số  $y = \frac{x-m^2}{x+8}$  với  $m$  là tham số thực. Giả sử  $m_0$  là giá trị dương của tham số  $m$  để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0;3]$  bằng  $-3$ . Giá trị  $m_0$  thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?  
 A.  $(2;5)$ . B.  $(1;4)$ . C.  $(6;9)$ . D.  $(20;25)$ .
- Câu 38.** (Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019) Tìm các giá trị của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x-m^2+m}{x+1}$  trên đoạn  $[0;1]$  bằng  $-2$ .  
 A.  $\begin{cases} m=-1 \\ m=-2 \end{cases}$ . B.  $\begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$ . C.  $\begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$ . D.  $\begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$ .
- Câu 39.** (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019) Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[0;1]} y = 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?  
 A.  $1 \leq m < 3$  B.  $m > 6$  C.  $m < 1$  D.  $3 < m \leq 6$
- Câu 40.** (Chuyên KHTN 2019) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  trên  $[1;2]$  bằng 8 ( $m$  là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?  
 A.  $m > 10$ . B.  $8 < m < 10$ . C.  $0 < m < 4$ . D.  $4 < m < 8$ .
- Câu 41.** (Sở Hưng Yên) Cho hàm số  $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$  với  $m$  là tham số thực. Giả sử  $m_0$  là giá trị dương của tham số  $m$  để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0;3]$  bằng  $-3$ . Giá trị  $m_0$  thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?  
 A.  $(20;25)$ . B.  $(5;6)$ . C.  $(6;9)$ . D.  $(2;5)$ .
- Câu 42.** (Sở Quảng Trị 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + m$  có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[-1;1]$  bằng  $\sqrt{2}$   
 A.  $m = \sqrt{2}$ . B.  $m = 2 + \sqrt{2}$ . C.  $m = 4 + \sqrt{2}$ . D.  $\begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$ .
- Câu 43.** (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019) Có một giá trị  $m_0$  của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn  $[0;1]$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?  
 A.  $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$ . B.  $2m_0 - 1 < 0$ . C.  $6m_0 - m_0^2 < 0$ . D.  $2m_0 + 1 < 0$ .
- Câu 44.** (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hàm số  $y = ax^3 + cx + d$ ,  $a \neq 0$  có  $\min_{x \in (-\infty;0)} f(x) = f(-2)$ . Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[1;3]$  bằng  
 A.  $d - 11a$ . B.  $d - 16a$ . C.  $d + 2a$ . D.  $d + 8a$ .
- Câu 45.** (THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+m}{x^2+x+1}$  có giá trị lớn nhất trên  $\mathbb{R}$  nhỏ hơn hoặc bằng 1.  
 A.  $m \leq 1$ . B.  $m \geq 1$ . C.  $m \geq -1$ . D.  $m \leq -1$ .
- Câu 46.** (Chuyên Vĩnh Phúc 2018) Tìm tất cả các giá trị của  $m > 0$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  trên đoạn  $[m+1; m+2]$  luôn bé hơn 3.  
 A.  $m \in (0;2)$ . B.  $m \in (0;1)$ . C.  $m \in (1;+\infty)$ . D.  $m \in (0;+\infty)$ .

- Câu 47. (Chuyên ĐH Vinh 2018)** Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = mx + \frac{36}{x+1}$  trên  $[0;3]$  bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?  
 A.  $0 < m \leq 2$ . B.  $4 < m \leq 8$ . C.  $2 < m \leq 4$ . D.  $m > 8$ .
- Câu 48. (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x-m}{x+1}$  với  $m \neq -2$ . Mệnh đề nào dưới đây sai?  
 A.  $\max_{[1;3]} f(x) = \max \left\{ \frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4} \right\}$ . B.  $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{6-m}{4}$  khi  $m < -2$ .  
 C.  $\min_{[1;3]} f(x) = \min \left\{ \frac{2-m}{2}; \frac{6-m}{4} \right\}$ . D.  $\min_{[1;3]} f(x) = \frac{2-m}{2}$  khi  $m > -2$ .
- Câu 49. (THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Tìm  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$  trên đoạn  $[0;2]$  là nhỏ nhất. Giá trị của  $m$  thuộc khoảng nào?  
 A.  $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ . B.  $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ . C.  $[-1;0]$ . D.  $(0;1)$ .
- Câu 50. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số  $f(x) = |3e^{4x} - 4e^{3x} - 24e^{2x} + 48e^x + m|$ . Gọi  $A, B$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên  $[0; \ln 2]$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-23;10)$  thỏa mãn  $A \leq 3B$ . Tổng các phần tử của tập  $S$  bằng  
 A.  $-33$ . B.  $0$ . C.  $-111$ . D.  $-74$ .
- Câu 51. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0;2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là  
 A. 2. B. 6. C. 1. D. 0.
- Câu 52. (Sở Sơn La 2023)** Cho số thực  $a$  thỏa mãn giá trị lớn nhất của biểu thức  $\left| \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} - a \right|$  trên đoạn  $[0;4]$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của  $a$  thuộc khoảng nào dưới đây?  
 A.  $(-4; -3)$ . B.  $(-3; -2)$ .  
 C.  $(-2; -1)$ . D.  $(-1; 0)$ .
- Câu 53. (THPT Thái Phiên - Hải Phòng 2023)** Tìm  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$  trên đoạn  $[0;2]$  là nhỏ nhất. Giá trị của  $m$  thuộc khoảng nào?  
 A.  $(0;1)$ . B.  $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ .  
 C.  $[-1;0]$ . D.  $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ .
- Câu 54. (THPT Liên Trường, Nghệ An 2023)** Cho hàm số  $y = |x^3 + x + b + 1|$  với  $b$  là tham số. Gọi  $M = \max_{[-1;1]} y$ . Giá trị nhỏ nhất của  $M$  thuộc khoảng nào sau?  
 A.  $(0,5;1,5)$ . B.  $(1,5;2,5)$ . C.  $(3,5;4,5)$ . D.  $(2,5;3,5)$ .
- Câu 55.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là hàm  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ. Biết rằng  $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ . Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của  $y = f(x)$  trên đoạn  $[0;5]$  lần lượt là:



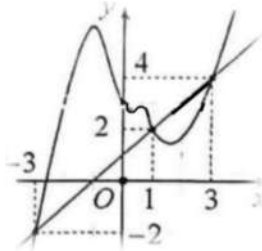
- A.  $f(2); f(5)$ .      B.  $f(0); f(5)$ .      C.  $f(2); f(0)$ .      D.  $f(1); f(5)$ .

**Câu 56.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ bên. Biết rằng  $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  và giá trị lớn nhất  $M$  của  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 5]$ .



- A.  $m = f(5), M = f(3)$       B.  $m = f(5), M = f(1)$   
C.  $m = f(0), M = f(3)$       D.  $m = f(1), M = f(3)$

**Câu 57.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Đặt  $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ . Mệnh đề dưới đây đúng.



- A.  $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$ .      B.  $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$ .      C.  $\max_{[-3;3]} g(x) = g(0)$ .      D.  $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$ .

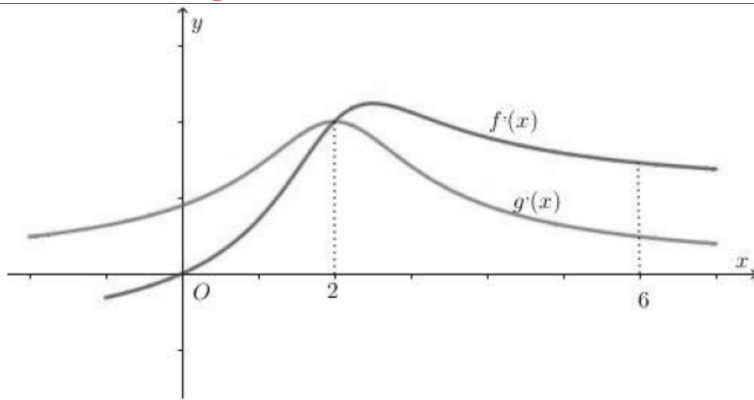
**Câu 58.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f'(0) = 3$ ,  $f'(2) = -2018$  và bảng xét dấu của  $f''(x)$  như sau:

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Hàm số  $y = f(x+2017) + 2018x$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x_0$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; -2017)$       B.  $(2017; +\infty)$       C.  $(0; 2)$       D.  $(-2017; 0)$

**Câu 59.** Cho hai hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và  $g'(x)$  được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng  $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$ . Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $h(x) = f(x) - g(x)$  trên đoạn  $[0; 6]$  lần lượt là:

- A.  $h(6), h(2)$ .      B.  $h(2), h(6)$ .      C.  $h(0), h(2)$ .      D.  $h(2), h(0)$ .

**Câu 60.** (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f'(0) = 3, f'(2) = f'(-2018) = 0$ , và bảng xét dấu của  $f''(x)$  như sau

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

Hàm số  $y = f(|x-1| - 2018)$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $x_0$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; -2015)$ .      B.  $(1; 3)$ .      C.  $(-1009; 2)$ .      D.  $(-2015; 1)$ .

**Câu 61.** (THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $f'(0) = 3, f'(2) = -2020, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$  và bảng xét dấu của  $f''(x)$  như hình sau:

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

Hàm số  $y = f(x + 2019) + 2020x$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x_0$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(-\infty; -2019)$ .      B.  $(0; 2)$ .      C.  $(-2019; 0)$ .      D.  $(2019; +\infty)$ .

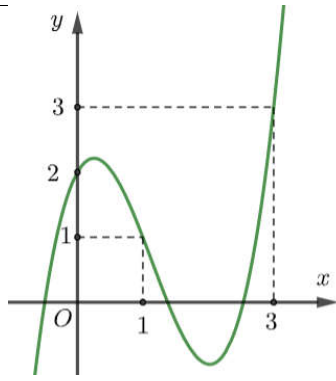
**Câu 62.** (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021) Cho hàm số  $y = f(x) = 2x^2 - 4x - 2$ . Gọi  $S$  là tổng tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = g(x) = |f^2(x) - 2f(x) + m|$  đạt giá trị lớn nhất trên đoạn  $[-1; 3]$  bằng 15. Tổng  $S$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(-25; -15)$ .      B.  $(-14; 1)$ .      D.  $(1; 8)$ .      D.  $(8; 12)$ .

**Câu 63.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Trên  $[-2; 4]$ , gọi  $x_0$  là điểm mà tại đó hàm số  $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$  đạt giá trị lớn nhất.

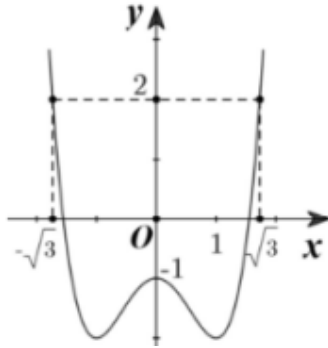
Khi đó  $x_0$  thuộc khoảng nào?





- A.  $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .      B.  $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ .      C.  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ .      D.  $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ .

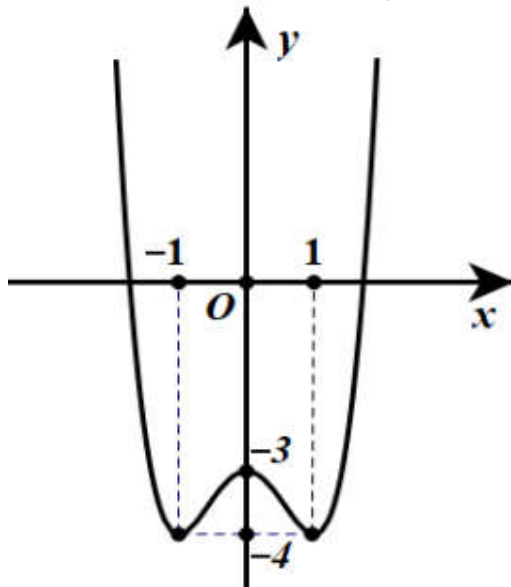
**Câu 64.** (Sở Thanh Hóa 2022) Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ:



Giá trị lớn nhất của hàm số  $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$  trên đoạn  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$  bằng

- A.  $3f(1) + 2$ .  
B.  $3f(0)$ .  
C.  $3f(-\sqrt{3})$ .  
D.  $3f(\sqrt{3})$ .

**Câu 65.** (Sở Bắc Giang 2022) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt  $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 4x + 6}) - 2(x^2 - 4x)\sqrt{x^2 - 4x + 6} - 12\sqrt{x^2 - 4x + 6} + 1$ . Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x)$  trên đoạn  $[1; 4]$  bằng

- A.  $12 - 2\sqrt{4}$ .  
B.  $-12 - 12\sqrt{6}$ .  
C.  $-12 - 2\sqrt{4}$ .

D.  $12 - 12\sqrt{6}$ .

**Câu 66. (Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2019)** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x + y = \frac{3}{2}$  và biểu thức

$$P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính } x^2 + y^2.$$

A.  $\frac{153}{100}$ .

B.  $\frac{5}{4}$ .

C.  $\frac{2313}{1156}$ .

D.  $\frac{25}{16}$ .

**Câu 67. (Sở Lào Cai - 2019)** Cho hàm số  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ . Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có ít nhất một giao điểm với trục hoành. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

A.  $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{4}{3}$ . B.  $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{4}{3}$ . C.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$ . D.  $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{4}{3}$ .

**Câu 68. (THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2018)** Cho  $x, y > 0$  và  $x + y = \frac{5}{4}$  sao cho biểu thức

$$P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó}$$

A.  $x^2 + y^2 = \frac{25}{32}$ .

B.  $x^2 + y^2 = \frac{17}{16}$ .

C.  $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ .

D.  $x^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ .

**Câu 69. (Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Cho  $x, y$  là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện  $(xy + 1)(\sqrt{xy + 1} - \sqrt{y}) \leq 1 - x - \frac{1}{y}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x - 2y}{6(x + y)}?$$

A.  $\frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{7}{30}$ .

B.  $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

C.  $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$ .

D.  $\frac{\sqrt{5} + 7}{30}$ .

**Câu 70. (Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \left| \sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right|$

A.  $\sqrt{2} - 1$ .

B.  $2\sqrt{2} + 1$ .

C.  $\sqrt{2} + 1$ .

D.  $2\sqrt{2} - 1$ .

**Câu 71. (Sở Bắc Ninh - 2018)** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$  trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó:

A.  $M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}$ .

B.  $M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}$ .

C.  $M = 1, m = 0$ .

D.  $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$ .

**Câu 72. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021)** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$ . Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x \text{ thuộc khoảng nào sau đây?}$$

A.  $(-2; 2)$ .

B.  $(-\infty; -1)$ .

C.  $(1; 3)$ .

D.  $(0; +\infty)$ .

**Câu 73. (Sở Bình Phước - 2021)** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{a+bc}{1+\sqrt{bc}}} + \sqrt{\frac{b+ca}{1+\sqrt{ca}}} + \sqrt{c+2021} \text{ bằng}$$

A.  $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{51}}{3}$ .

B.  $\sqrt{2021} + 2$ .

C.  $\sqrt{2021}$ .

D.  $\sqrt{2022}$ .

**Câu 74. (Chuyên Hạ Long 2022)** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn

$$\begin{cases} \max\{5; 9x + 7y - 20\} \leq x^2 + y^2 \leq 2x + 8 \\ y \leq 1 \end{cases}.$$

Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x - 2y$ . Tính  $M - m$

A.  $1 + 3\sqrt{5}$ .

B.  $2\sqrt{2}$ .

C.  $1 + 2\sqrt{2}$ .

D.  $2 + 3\sqrt{5}$ .

### PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y'$	+		- 0 +	
$y$	$-\infty$	↗ 0 ↘	-1 ↗	$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.		
b)	Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.		
c)	Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$ .		
d)	Hàm số có đúng một cực trị.		

**Câu 2.** Xét hàm số  $y = f(x)$  với  $x \in [-1; 5]$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	-1	0	2	5
$y'$		+	0 -	0 +
$y$	3	↗ 4 ↘	0	↗ $+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1; 5]$		
b)	Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$		
c)	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; 5)$		
d)	Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = 0$ trên đoạn $[-1; 5]$		

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như hình sau:

$x$	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$y'$		-	+ 0 +	-	
$y$	$+\infty$	↘ -3 ↗	2 ↘	-4	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
b)	Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.		
c)	Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$		
d)	Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ , $(2; +\infty)$ .		

**Câu 4.** Cho hàm số  $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 37)$		
b)	Hàm số có 3 điểm cực trị		
c)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng: 12		
d)	Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng: 33		

**Câu 5.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 24x$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$		
b)	Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $A(16; -2048)$		
c)	Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2; 19]$ bằng 6403.		
d)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2; 19]$ bằng -40.		

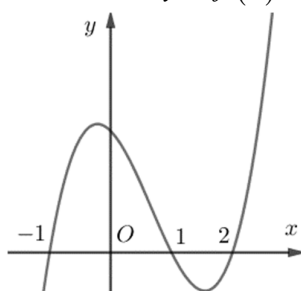
**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 10x^2 - 4$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 6)$		
b)	Hàm số có 3 điểm cực trị		
c)	Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 9]$ bằng -4.		
d)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 9]$ bằng -29.		

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$		
b)	Hàm số có 1 điểm cực trị		
c)	Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 3$		
d)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 4		

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.

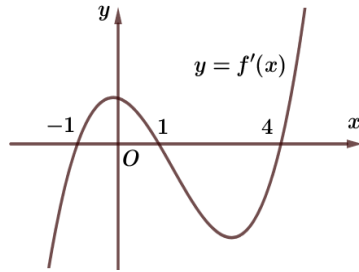


Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị		

b)	Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$		
c)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$		
d)	Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là $f(2)$		

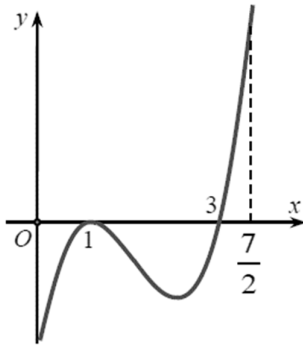
**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình sau:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị		
b)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$		
c)	$f(1) > f(2) > f(4)$ .		
d)	Trên đoạn $[-1; 4]$ , giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$ .		

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(3; \frac{7}{2}\right)$		
b)	$f(0) > f(3)$		
c)	$f(3) > f\left(\frac{7}{2}\right)$		
d)	Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm $x_0 = \frac{7}{2}$		

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ , (tham số  $m$ ). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ .		
b)	Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ .		

c)	Khi $m = 1$ thì trên đoạn $[1; 4]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$		
d)	Có 1 giá trị của tham số $m$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng $-1$ .		

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$  (tham số  $m$ ). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 1$ hàm số có 2 điểm cực trị		
b)	Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$		
c)	Để hàm số liên tục trên $[0; 2]$ thì $\begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$		
d)	Để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$ thì $m > 1$		

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2020$ , (tham số  $m$ ). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$		
b)	Khi $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$		
c)	Khi $m = 1$ thì hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng $-4$		
d)	Có tất cả 1 giá trị nguyên của $m$ để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$		

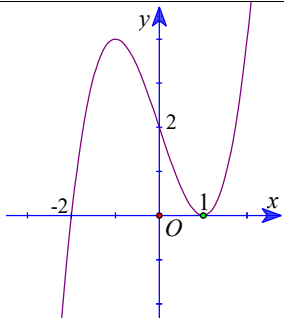
**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x + m + 1$ , (tham số  $m$ ). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 0$ thì hàm số $y = -f(x)$ có 2 điểm cực trị		
b)	Khi $m = 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$		
c)	Khi $m = 0$ thì hàm số $y = -f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(-1; +\infty)$ tại $x = 1$		
d)	Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = [f(x)]^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là $-2$		

**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x) = mx^4 + 2(m - 1)x^2$  với  $m$  là tham số thực. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 1$ hàm số có 3 điểm cực trị		
b)	Khi $m = 0$ hàm số có 3 điểm cực trị		
c)	Khi $m = \frac{1}{2}$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{1}{2}$		
d)	Nếu $\min_{[0; 2]} f(x) = f(1)$ thì $\max_{[0; 2]} f(x)$ bằng 3		

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x)$ , đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là đường cong trong hình bên.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và $(-\infty; -2)$		
b)	Hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị		
c)	Hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-5; -4)$		
d)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[-5; 3]$ bằng $f(-2)$		

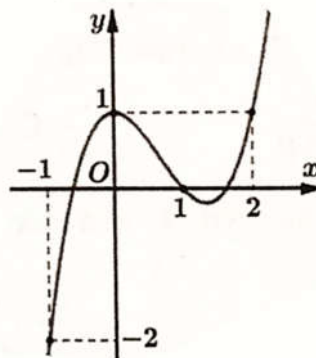
**Câu 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây.

$x$	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						
			-3		5		$-\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị		
b)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 5)$		
c)	Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng $f(1)$		
d)	Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 12		

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(0) \geq -1$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$		

b)	Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị		
c)	Hàm số $y = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ có 3 điểm cực trị		
d)	Hàm số $y = \left  f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2 \right $ có giá trị nhỏ nhất là $m \in (0;1)$ khi và chỉ khi $-\frac{4}{3} < f(2) < \frac{1}{3}$		

**Câu 19.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x + m$  (tham số thực  $m$ ). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Khi $m = 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$		
b)	Khi $m = 0$ thì hàm số có 2 điểm cực trị		
c)	Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng $m - 2$		
d)	Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y =  f(x) $ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của $S$ là 1		

**Câu 20.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 3m$  với  $m$  là tham số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$		
b)	Hàm số có 3 điểm cực trị		
c)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ là $3m + 1$		
d)	Biết rằng có đúng hai giá trị $m_1, m_2$ của $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y =  f(x) $ trên $[-1;2]$ bằng 2021. Khi đó giá trị $ m_1 - m_2 $ bằng $\frac{8}{3}$		

### PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1.** (THPT Hai Bà Trưng - Huế 2019) Tìm giá trị của tham số thực  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2x+m}{x+1}$  trên đoạn  $[0;4]$  bằng 3.

Trả lời: .....

**Câu 2.** (Chuyên - Vĩnh Phúc 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + m$  trên đoạn  $[-1;1]$  bằng 0.

Trả lời: .....

**Câu 3.** (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Nếu hàm số  $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$  có giá trị lớn nhất bằng  $2\sqrt{2}$  thì giá trị của  $m$  là

Trả lời: .....

**Câu 4.** Biết  $S$  là tập giá trị của  $m$  để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$  trên đoạn  $[0;1]$  bằng  $-16$ . Tính tích các phần tử của  $S$ .

Trả lời: .....

**Câu 5.** (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x^3 + x^2 - m}{x+1}$  trên  $[0;2]$  bằng 5. Tham số  $m$  nhận giá trị là

Trả lời: .....

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = (x^3 - 3x + m)^2$ . Tổng tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  $[-1;1]$  bằng 1 là

Trả lời: .....



- Câu 7. (Sở Bình Phước - 2020)** Cho hàm số  $f(x) = m\sqrt{x-1}$  ( $m$  là tham số thực khác 0). Gọi  $m_1, m_2$  là hai giá trị của  $m$  thỏa mãn  $\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$ . Giá trị của  $m_1 + m_2$  bằng
- Trả lời:** .....
- Câu 8. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hàm số  $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$  có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-5; 5]$  để giá trị nhỏ nhất của  $y$  nhỏ hơn  $-1$ .
- Trả lời:** .....
- Câu 9. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x) = m^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) + 4\sqrt{4-x^2} + m + 1$ . Tính tổng tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  có giá trị nhỏ nhất bằng 4.
- Trả lời:** .....
- Câu 10. (Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  thuộc đoạn  $[-20; 20]$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x+m+6}{x-m}$  trên đoạn  $[1; 3]$  là số dương?
- Trả lời:** .....
- Câu 11. (Mã 103 - 2022)** Cho hàm số  $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1$  với  $a$  là tham số thực. Nếu  $\max_{[0;2]} f(x) = f(1)$  thì  $\min_{[0;2]} f(x)$  bằng
- Trả lời:** .....
- Câu 12. (Mã 104-2022)** Cho hàm số  $f(x) = (a+3)x^4 - 2ax^2 + 1$  với  $a$  là tham số thực. Nếu  $\max_{[0;3]} f(x) = f(2)$  thì  $\min_{[0;3]} f(x)$  bằng
- Trả lời:** .....
- Câu 13. (Sở Vĩnh Phúc 2022)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x-m^2}{x+1}$ , với  $m$  là tham số. Gọi  $m_1, m_2$  ( $m_1 < m_2$ ) là các giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn  $2\max_{[0;2]} f(x) - \min_{[0;2]} f(x) = 8$ . Tổng  $2m_1 + 3m_2$  bằng
- Trả lời:** .....
- Câu 14. (THPT Nguyễn Viết Xuân – Vĩnh Phúc 2022)** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $a$  thuộc đoạn  $[-10; 10]$  để hàm số  $y = ax^4 + 3x^2 + cx$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0; 4]$  tại  $x = 1$
- Trả lời:** .....
- Câu 15. (Sở Vĩnh Phúc 2019)** Tính tổng tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^2 - 2x + m|$  trên đoạn  $[-1; 2]$  bằng 5.
- Trả lời:** .....
- Câu 16. (HSG Bắc Ninh 2019)** Xét hàm số  $f(x) = |x^2 + ax + b|$ , với  $a, b$  là tham số. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$ . Khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính  $a + 2b$ .
- Trả lời:** .....
- Câu 17.** Cho hàm số  $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$ . Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-3; -1]$  có giá trị nhỏ nhất bằng
- Trả lời:** .....
- Câu 18. (Sở Quảng Nam - 2018)** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^2 + 2x + m - 4|$  trên đoạn  $[-2; 1]$  bằng 4?
- Trả lời:** .....
- Câu 19. (Chuyên Hạ Long 2018)** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$  trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 20. Tổng các phần tử của  $S$  bằng

Trả lời: .....

**Câu 20.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = |\sin^2 x - 2 \sin x + m| \text{ bằng } 1. \text{ Số phần tử của } S \text{ là}$$

Trả lời: .....

**Câu 21. (Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hàm số  $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x + 1} \right|$ , với  $a$  là tham số thực. Gọi  $M, m$

lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[1; 2]$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $a$  để  $M \geq 2m$ ?

Trả lời: .....

**Câu 22. (Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hàm số  $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$ . Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = 10$ ?

Trả lời: .....

**Câu 23. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[1; 3]$  không lớn hơn 2020?

Trả lời: .....

**Câu 24. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét hàm số  $f(x) = \left| \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \right|$ , với  $m$  là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên  $m$  thỏa mãn điều kiện  $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$ ?

Trả lời: .....

**Câu 25. (Chuyên Sơn La - 2020)** Gọi  $S$  là tập hợp những giá trị của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 - 12x + m|$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng 12. Tổng tất cả các phần tử của tập  $S$  bằng

Trả lời: .....

**Câu 26. (Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi  $S_0$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m \right|$  trên đoạn  $[2; 4]$  không vượt quá 30.

Số phần tử của  $S$  là

Trả lời: .....

**Câu 27. (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10 \right|$  trên đoạn  $[0; 3]$  không vượt quá 12.

Tổng giá trị các phần tử của  $S$  bằng bao nhiêu?

Trả lời: .....

**Câu 28. (Đỗ Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$  trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá

30. Tổng tất cả các giá trị của  $S$  là

Trả lời: .....

**Câu 29. (Liên trường Nghệ An - 2020)** Biết giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x$  trên  $[0; 3]$  bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực  $m$ .

Trả lời: .....

**Câu 30. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số  $f(x) = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  sao cho  $\min_{[-1;2]} f(x) + \max_{[-1;2]} f(x) = 10$ . Số phần tử của  $S$  là?

Trả lời: .....

**Câu 31. (Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \left| \frac{2mx - 2\sqrt{4x+8}}{x+2} \right|$  có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[-1;1]$  là  $a$  thỏa mãn  $0 < a < 1$ .

Trả lời: .....

**Câu 32. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1$  ( $m$  là tham số thực). Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  thuộc đoạn  $[-2020;2020]$  sao cho  $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|$ . Số phần tử của  $S$  là

Trả lời: .....

**Câu 33. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021)** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x+2m}{x+2}$  ( $m$  là tham số). Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  sao cho  $\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2$ . Số phần tử của  $S$  bằng

Trả lời: .....

**Câu 34. (Sở Tuyên Quang - 2021)** Cho hàm số  $f(x) = |2x^2 + (a+4)x + b + 3|$ . Đặt  $M = \max_{[-2;3]} f(x)$ . Khi  $M$  đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức  $T = a + 4b$  là

Trả lời: .....

**Câu 35. (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021)** Xét hàm số  $f(x) = |x^2 + ax + b|$ , với  $a, b$  là tham số. Với  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1;3]$ . Khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính  $a + 2b$ .

Trả lời: .....

**Câu 36. (Trung Tâm Thanh Trường -2021)** Cho hàm số  $f(x) = |x^3 - 15x + 2m| + 12x - m$ . Giá trị nhỏ nhất của  $M = \max_{[-2;3]} f(x)$  bằng

Trả lời: .....

**Câu 37. (Sở Thái Nguyên 2022)** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho  $|2x^3 - 3x^2 + m| \leq 16, \forall x \in [0;3]$ . Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng

Trả lời: .....

**Câu 38. (Sở Hải Dương 2022)** Cho hàm số  $y = \left| \frac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} \right|$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10;10]$  để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 4.

Trả lời: .....

**Câu 39. (Sở Hà Nam 2023)** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x + m - 1 \right|$  trên đoạn  $[0;2]$  không vượt quá 15.

Trả lời: .....

**Câu 40. (Sở Bình Phước 2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn  $|x^3 - 3x^2 + m| \leq 4$  với mọi  $x \in [1;3]$ ?

Trả lời: .....

**Câu 41.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  sao cho  $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$ . Xét hàm số  $g(x) = f(3x-1) + m$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $\max_{[0;1]} g(x) = -10$ .

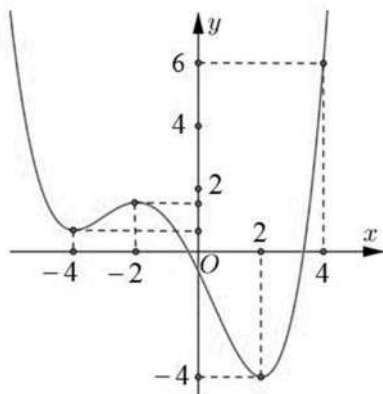
Trả lời: .....

**Câu 42.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  sao cho  $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$ . Xét hàm số

$$g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m. \text{ Giá trị của tham số } m \text{ để } \max_{x \in [0;2]} g(x) = 8 \text{ là}$$

**Trả lời:** .....

**Câu 43.** (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị như hình vẽ

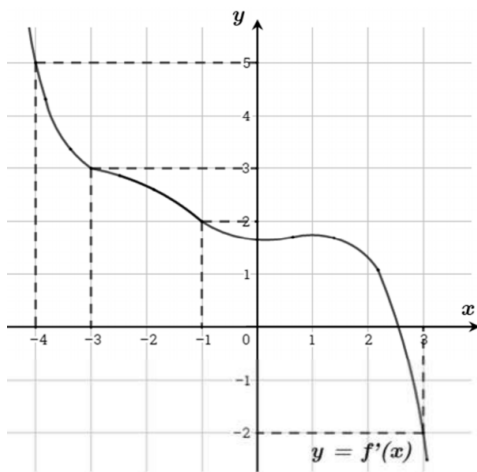


Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2 + 1}\right) + m - 1 \right|$  có giá trị

lớn nhất không vượt quá 2020?

**Trả lời:** .....

**Câu 44.** (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hàm số  $f(x)$ . Biết hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình dưới đây. Trên  $[-4;3]$ , hàm số  $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



**Trả lời:** .....

**Câu 45.** (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên trên đoạn  $[-4;4]$  như sau:

$x$	-4	-3	-1	0	2	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			4		3	
	-4			2		-3
						1

Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m \in [-4;4]$  để giá trị lớn nhất của hàm số

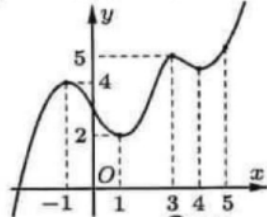
$$g(x) = f(|x|^3 + 3|x|) + f(m) \text{ trên } [-1;1] \text{ bằng } \frac{11}{2}?$$

**Trả lời:** .....

**Câu 46. (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021)** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx - c \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  với  $a, b, c$  là các số thực dương, biết  $f(1) = -3, f(5) = 2$ . Xét hàm số  $g(t) = |3f(3-2t) + 2f(3t-2) + m|$ , gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của  $m$  sao cho  $\max_{[-1;1]} g(t) = 10$ . Số phần tử của  $S$  là

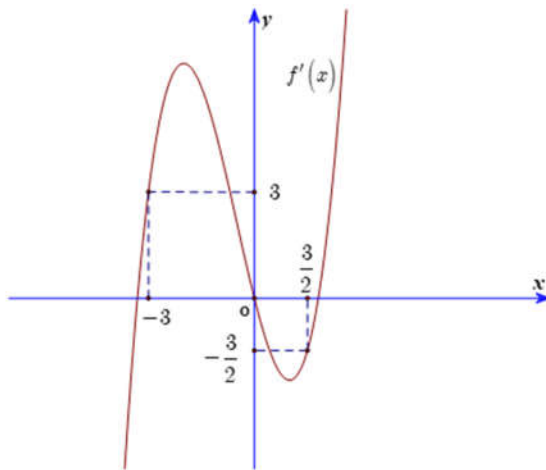
Trả lời: .....

**Câu 47. (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $h(x) = 3f(\log_2 x - 1) + x^3 - 9x^2 + 15x + 1$  trên đoạn  $[1; 4]$  bằng:



Trả lời: .....

**Câu 48.** Cho hàm số đa thức  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng  $f(0) = 0, f(-3) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}$  và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  có dạng như hình vẽ.



Hàm số  $g(x) = |4f'(x) + 2x^2|$  giá trị lớn nhất của  $g(x)$  trên  $\left[-2; \frac{3}{2}\right]$  là

Trả lời: .....

**Câu 49. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2021)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  sao cho  $\max_{\left[-8; \frac{8}{3}\right]} f(x) = 5$ . Xét hàm số  $g(x) = 2f\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right) + m$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để  $\max_{[-2; 4]} g(x) = -20$

Trả lời: .....

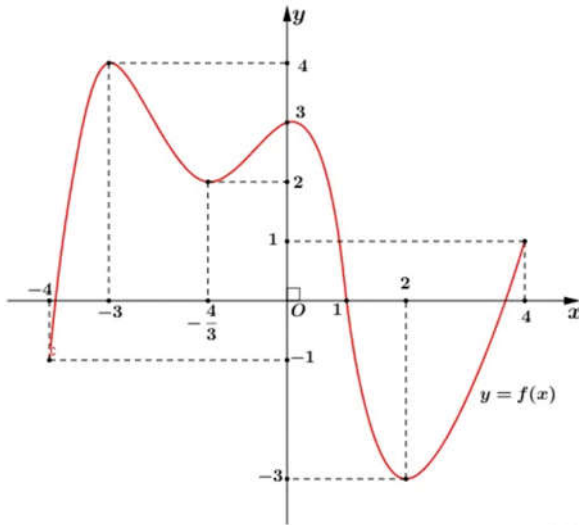
**Câu 50. (Sở Nam Định - 2021)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f\left(\left|\sin x - \sqrt{3} \cos x\right| + 1\right) - 2 \cos 2x + 4 \cos x - 10$

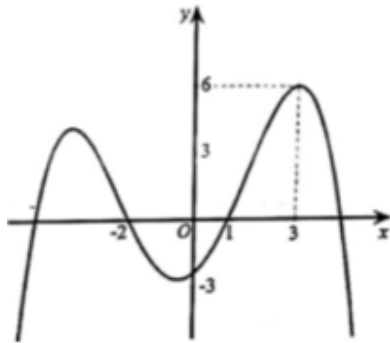
Trả lời: .....

- Câu 51. (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022)** Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $[-4; 4]$ , có các điểm cực trị trên  $(-4; 4)$  là  $-3; -\frac{4}{3}; 0; 2$  và có đồ thị như hình vẽ. Đặt  $g(x) = f(x^3 + 3x) + m$  với  $m$  là tham số. Gọi  $m_1$  là giá trị của  $m$  để  $\max_{[0;1]} g(x) = 2022$ ,  $m_2$  là giá trị của  $m$  để  $\min_{[-1;0]} g(x) = 2004$ . Giá trị của  $m_1 - m_2$  bằng



Trả lời: .....

- Câu 52. (Sở Thanh Hóa 2022)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ:



Xét  $T = 103f(a^2 + a + 1) + 234f(af(b) + bf(a))$ ,  $(a, b \in \mathbb{R})$ . Biết  $T$  có giá trị lớn nhất bằng  $M$  đạt tại  $m$  cặp  $(a; b)$ , khi đó  $\frac{M}{m}$  bằng

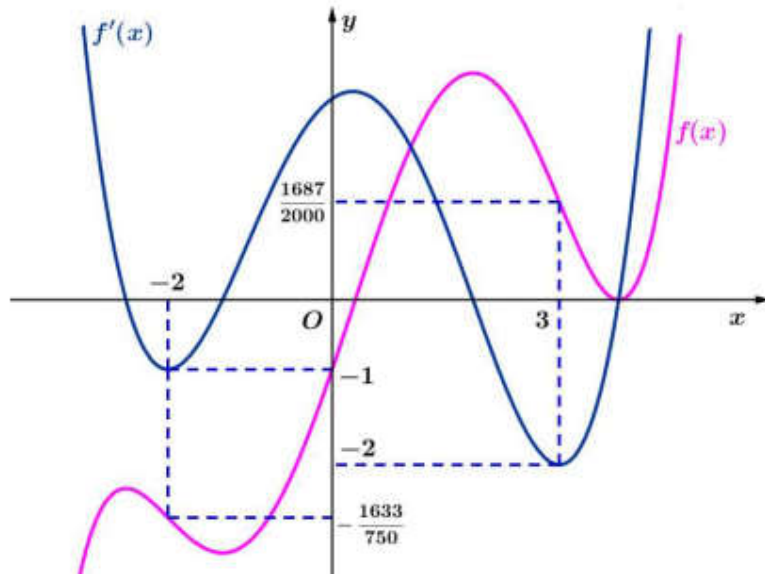
Trả lời: .....

- Câu 53. (THPT Yên Phong 1 - Bắc Ninh - 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa điều kiện  $f(0) > 0$  và  $[f(x) + 6x]f(x) = 9x^4 + 3x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(2x^2 - 3x + 1)$  trên đoạn  $[0; 1]$ .

Trả lời: .....

- Câu 54. (Chuyên Biên Hòa – Hà Nam 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức và có đồ thị  $f(x), f'(x)$  như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số dưới đây trên đoạn  $[-2; 3]$  không vượt quá 4044:

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + (3 + m^2)\frac{x^3}{3} - (m + 1)x^2 + 4x + 2022.$$



Trả lời: .....

- Câu 55. (Sở Hà Nam 2022)** Cho các hàm số  $f(x) = x + 3^x$  và  $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 + 1)x - 3$  với  $m$  là tham số thực. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = g(2x + f(x))$  trên đoạn  $[0; 1]$ . Khi  $M$  đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của  $m$  bằng

Trả lời: .....

- Câu 56. (Cục trưởng Bắc Ninh 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-4; 4]$  và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

$x$	-4	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	0	-2	5	-6	1	-5	3

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-4; 4]$  để hàm số  $g(x) = |f(x^3 + 2x) + 3f(m)|$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 8?

Trả lời: .....

- Câu 57. (Chuyên Thái Bình 2023)** Cho hàm số  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = |f^2(x) - 2f(x) + m|$  trên đoạn  $[-1; 3]$  bằng 8. Tính tổng các phần tử của  $S$ .

Trả lời: .....

- Câu 58. (THPT Lê Xoay – Vĩnh Phúc 2023)** Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + 9x - 1$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị của  $m$  để  $d$  có hệ số góc bằng 4?

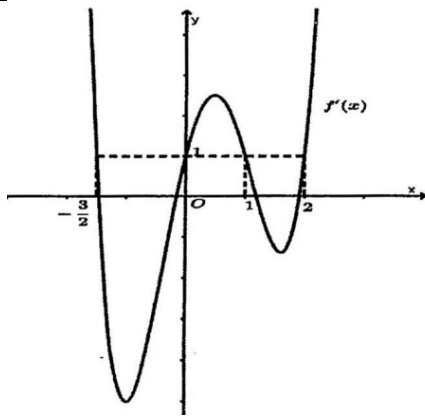
Trả lời: .....

- Câu 59. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2023)** Cho hàm số  $f(x) = x^2 - 2x$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $|f(2 + \sin x) + m|$  bằng 2023?

Trả lời: .....

- Câu 60. (Sở Cà Mau 2023)** Cho  $f(x)$  là đa thức bậc 5 có đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ bên dưới.





Biết  $f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{653}{320}$ ,  $f(0) = -2$  và  $f(1) = \frac{-1}{60}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f(x) - x + a$  trên đoạn  $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $a$  thuộc  $[-2023; 2023]$  để  $9m^2 - 320M > 0$ ?

Trả lời: .....

**Câu 61. (HSG 12 - Sở Quảng Nam - 2019)** Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1$ ,  $x + y + z = 2$ . Biết giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = xyz$  bằng  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Giá trị của  $2a + b$  bằng

Trả lời: .....

**Câu 62. (Chuyên Bắc Giang Nam 2019)** Cho  $x^2 - xy + y^2 = 2$ . Giá trị nhỏ nhất của  $P = x^2 + xy + y^2$  bằng:

Trả lời: .....

**Câu 63. (THPT Lê Xoay - 2018)** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 3^{x+y-4} + (x+y+1) \cdot 2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$  bằng

Trả lời: .....

**Câu 64. (Sở Phú Thọ - 2018)** Xét các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 4$  và  $xy + yz + zx = 5$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $(x^3 + y^3 + z^3) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$  bằng:

Trả lời: .....

**Câu 65. (Chuyên Long An - 2018)** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$ .

Trả lời: .....

**Câu 66. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2018)** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}.$$

Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$$

Trả lời: .....

**Câu 67. (Sở Nam Định - 2018)** Biết rằng bất phương trình  $m(|x| + \sqrt{1-x^2} + 1) \leq 2\sqrt{x^2-x^4} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} + 2$  có nghiệm khi và chỉ khi  $m \in (-\infty; a\sqrt{2} + b]$

với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính giá trị của  $T = a + b$ .

Trả lời: .....



**Câu 68. (THPT Nguyễn Huệ 2018)** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2)$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 4\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) - 9\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)$ .

Trả lời: .....

**Câu 69. (THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $2x + y = \frac{5}{4}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = \frac{2}{x} + \frac{1}{4y}$ .

Trả lời: .....

**Câu 70. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc - 2022)** Cho  $x, y$  là các số thực dương và thỏa mãn  $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{y}} = \frac{y + 1}{x}$ . Giá trị nhỏ nhất  $m$  của biểu thức  $P = \frac{y + 4}{x}$  là

Trả lời: .....

**Câu 71. (Chuyên Thái Bình 2022)** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $2y^3 + 7y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} + 3(2y^2 + 1)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x + 2y$

Trả lời: .....

Nguyễn Bảo Vương