BÀI 10. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

- **CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN**
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1: SỬ DỤNG KIẾN THỨC ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ.

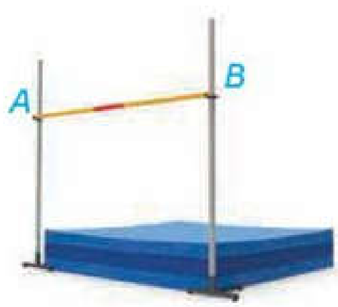
Câu 1. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Chấm phạt đền trên sân bóng đá cho ta hình ảnh về một điểm thuộc một mặt phẳng. Hãy tìm thêm các ví dụ khác cũng gợi cho ta hình ảnh đó.

Lời giải

- Một cục nam châm tròn nhỏ gắn trên mặt bảng cho ta hình ảnh về một điểm thuộc mặt phẳng;
- Một chiếc đầu đinh được gắn vào mặt bàn khi đinh đóng vào bàn cho ta hình ảnh về một điểm thuộc mặt phẳng;

Câu 2. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Chiếc xà ngang đặt tựa lên hai đểm A, B của trụ nhảy thể hiện hình ảnh của một đường thẳng đi qua hai điểm đó. Có thể tìm được một đường thẳng khác cũng đi qua hai điểm A, B hay không?

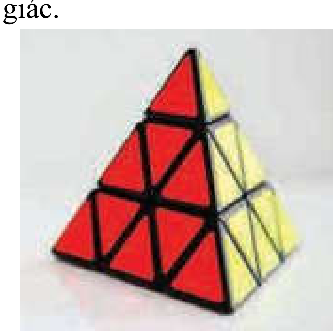
Nguyễn Bảo Vương



Lời giải

Không thể tìm được đường thẳng nào khác đi qua hai điểm A, B đã cho ngoài đường thẳng tạo bởi xà ngang.

Câu 3. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Trong Hình 4.4 là một khối rubik có bốn đỉnh và bốn mặt, mỗi mặt là một tam giác.



Hình 4.4

a) Đặt khối rubik sao cho ba đỉnh của mặt màu đỏ đều nằm trên mặt bàn. Khi đó, mặt màu đỏ của khối rubik có nằm trên mặt bàn hay không?

b) Có thể đặt khối rubik sao cho bốn đỉnh của nó đều nằm trên mặt bàn hay không?

Lời giải

a) Khi đặt khối rubik sao cho ba đỉnh của mặt màu đỏ đều nằm trên mặt bàn, mặt màu đỏ của khối rubik nằm trên mặt bàn.

b) Không thể đặt khối rubik sao cho 4 đỉnh của nó đều nằm trên mặt bàn.

Câu 4. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Hãy giải thích tại sao trong thực tiễn có nhiều đồ vật được thiết kế gồm ba chân như chân đỡ máy ảnh, giá treo tranh, kiềng ba chân treo nồi,...

Lời giải

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng. Do đó, khi thiết kế các đồ vật gồm ba chân như chân đỡ máy ảnh, giá treo tranh, kiềng ba chân treo nồi,... ta thấy các đồ vật này có thể đứng thẳng mà không bị đổ trên các bề mặt bởi vì các ba chân của các đồ vật này giống như 3 điểm không thẳng hàng.

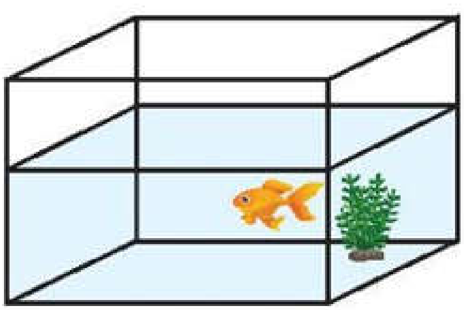
Câu 5. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Căng một sợi dây sao cho hai đầu của sợi dây nằm trên mặt bàn. Khi đó, sợi dây có nằm trên mặt bàn hay không?

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Căng một sợi dây sao cho hai đầu của sợi dây nằm trên mặt bàn. Khi đó, sợi dây nằm trên mặt bàn.

Câu 6. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Trong Hình 4.7, mặt nước và thành bể có giao nhau theo đường thẳng hay không?



Hình 4.7

Lời giải

Trong Hình 4.7, mặt nước và thành bể giao nhau theo đường thẳng.

Câu 7. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Để tránh cho cửa ra vào không bị va đập vào các đồ dùng xung quanh (do mở cửa quá mạnh hoặc do gió to dập cửa), người ta thường sử dụng một phụ kiện là hít cửa nam châm. Hãy giải thích tại sao khi cửa được hút tới vị trí của nam châm thì cánh cửa được giữ cố định.

Lời giải

Phụ kiện hít cửa nam châm đại diện cho 1 điểm cố định, một cạnh của cánh cửa đại diện cho một đường thẳng không chứa điểm phụ kiện hít cửa nam châm. Chính vì vậy có một mặt phẳng được xác định khi phụ kiện hít cửa và một cạnh của cánh cửa, khi đó cánh cửa luôn được giữa cố định.

Câu 8. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Các hình ảnh dưới đây có đặc điểm chung nào với hình chóp tam giác đều mà em đã học ở lớp 8?



Lời giải

Các hình ảnh đã cho đều có các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

Câu 9. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Trong các hình chóp ở dưới đây, hình chóp nào có ít đỉnh nhất? Xác định số đỉnh, số cạnh và số mặt của hình chóp đó.



Lời giải

Hình chóp thứ ba tính từ trái sang (hình khối rubik) có ít mặt nhất.
Hình chóp này có 6 cạnh và 4 mặt.

Câu 10. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Tại các nhà hàng, khách sạn, nhân viên phục vụ bàn thường xuyên phải bưng bê nhiều khay, đĩa đồ ăn khác nhau. Một trong những nguyên tắc nhân viên cần nhớ là khay phải được bưng bằng ít nhất 3 ngón tay. Hãy giải thích tại sao.

Lời giải

Ba đầu ngón tay minh họa cho 3 điểm phân biệt không thẳng hàng. Theo tính chất thừa nhận, có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng. Khi đó, mỗi khay, đĩa đồ ăn đại diện cho một mặt phẳng đi qua ba điểm ở đầu ngón tay làm cho khay, đĩa đồ ăn được giữ vững bằng phẳng.

Câu 11. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Bàn cắt giấy là một dụng cụ được sử dụng thường xuyên ở các cửa hàng photo-copy. Bàn cắt giấy gồm hai phần chính: phần bàn hình chữ nhật có chia kích thước giấy và phần dao cắt có một đầu được cố định vào bàn. Hãy giải thích tại sao khi sử dụng bàn cắt giấy thì các đường cắt luôn là đường thẳng.

Lời giải

Phần dao cắt có một đầu được gắn cố định vào bàn, giấy cắt được đặt lên phần bàn hình chữ nhật, khi cắt mặt phẳng cắt giao với mặt phẳng giấy theo một giao tuyến là phần đường cắt nên nó luôn là một đường thẳng.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 12. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Trong không gian, cho hai đường thẳng a,b và mặt phẳng (P). Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu a chứa một điểm nằm trong (P) thì a nằm trong (P).

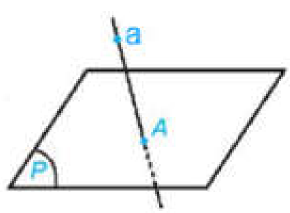
b) Nếu a chứa hai điểm phân biệt thuộc (P) thì a nằm trong (P).

c) Nếu a và b cùng nằm trong (P) thì giao điểm (nếu có) của a và b cũng nằm trong (P).

d) Nếu a nằm trong (P) và a cắt b thì b nằm trong (P).

Lời giải

a) Mệnh đề a) là mệnh đề sai vì đường thẳng a có thể cắt mặt phẳng (P).



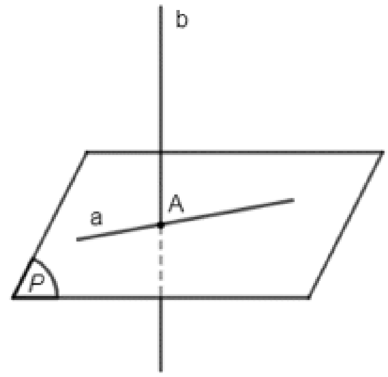
b) Mệnh đề b) là mệnh đề đúng (theo tính chất thừa nhận).

c) Mệnh đề c) là mệnh đề đúng.

Giả sử giao điểm của a và b là H, vì H thuộc a và a nằm trong (P) nên H thuộc (P).

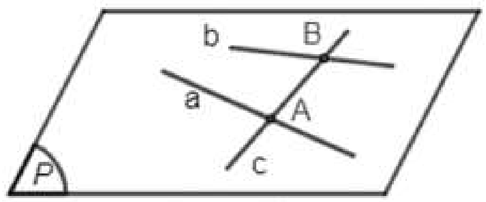
d) Mệnh đề d) là mệnh đề sai.

Chẳng hạn trường hợp như trong hình dưới đây có thể xảy ra: đường thẳng b cắt đường thẳng a tại giao điểm A nhưng đường thẳng b không nằm trong mặt phẳng (P).



Câu 13. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a,b nằm trong (P). Một đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b tại hai điểm phân biệt. Chứng minh rằng đường thẳng c nằm trong mặt phẳng (P).

Lời giải



Giả sử đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b lần lượt tại hai điểm phân biệt A và B.
Vì A thuộc a và a nằm trong (P) nên A thuộc (P).
Vi B thuộc B và b nằm trong (P) nên B thuộc (P).
Đường thẳng c có hai điểm phân biệt A và B cùng thuộc mặt phẳng (P) nên tất cả các điểm của đường thẳng c đều thuộc (P) hay đường thẳng c nằm trong mặt phẳng (P).

DẠNG 2: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG.

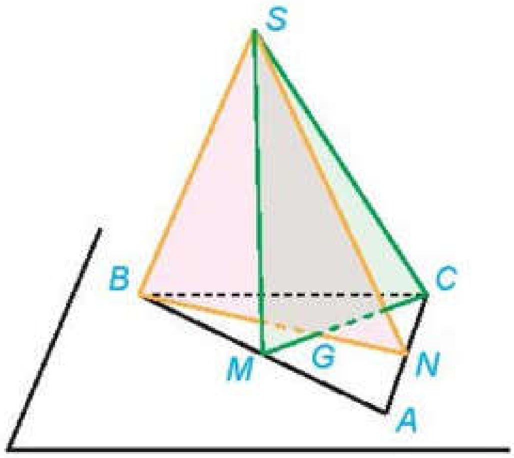
Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng? Ta tìm hai điểm chung thuộc cả hai mặt phẳng. Nối hai điểm chung đó được giao tuyến cần tìm.

Về dạng này điểm chung thứ nhất thường dễ tìm. Điểm chung còn lại các bạn phải tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng, đồng thời chúng lại thuộc mặt phẳng thứ ba và chúng không song song. Giao điểm của hai đường thẳng đó là điểm chung thứ hai.

Các bạn phải nhớ kỹ: Giao tuyến là đường thẳng chung của hai mặt phẳng, có nghĩa là giao tuyến là đường thẳng vừa thuộc mặt phẳng này vừa thuộc mặt phẳng kia.

Dạng toán tìm giao tuyến, thường giao tuyến của những câu hỏi đầu hay được sử dụng để tìm giao điểm để làm bài tập ở những câu sau. Ta xét cụ thể những bài toán sau:

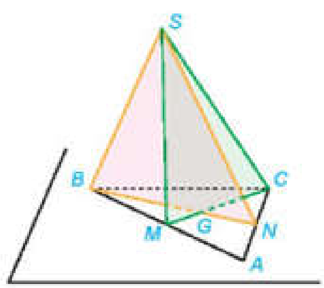
Câu 14. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho tam giác ABC và một điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC). Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AB,AC,(H.4.8)$.



Hình 4.8

Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SCN).

Lời giải

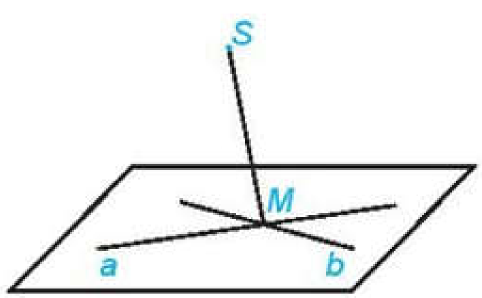


Ta có hai đường thẳng BM và CN cắt nhau tại điểm A.

Do đó, điểm A thuộc đường thẳng BM nên cũng thuộc mặt phẳng (SBM), điểm A thuộc đường thẳng CN nên cũng thuộc mặt phẳng (SCN). Vậy A là một điểm chung của hai mặt phẳng (SBM) và (SCN).

Vì S và A là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SBM) và (SCN) nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng SA. Ta viết $SA = (SBM) \cap (SCN)$.

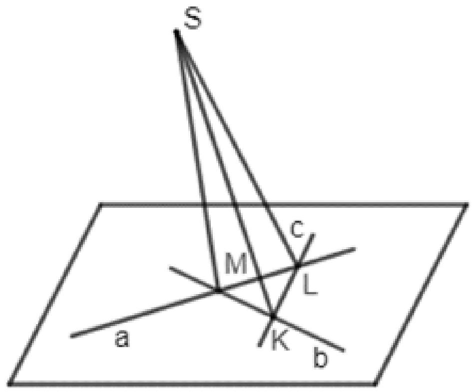
Câu 15. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hai đường thẳng cắt nhau a, b và gọi S là một điểm không thuộc $mp(a,b)$, $(H.4.10)$.



Hình 4.10

Vẽ một đường thẳng c cắt cả hai đường thẳng a và b. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng: $mp(S,a)$ và $mp(S,c)$; $mp(S,b)$ và $mp(S,c)$.

Lời giải



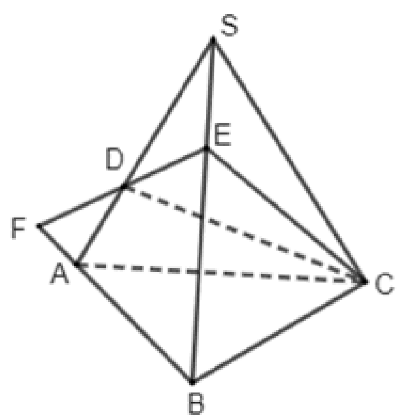
Gọi L là giao điểm của a và c, K là giao điểm của b và c.
Vì L thuộc a nên L thuộc $mp(S,a)$. Vì L thuộc c nên L thuộc $mp(S,c)$. Hai điểm S và L cùng thuộc $mp(S,a)$.và $mp(S,c)$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng SL.
Vì K thuộc b nên K thuộc $mp(S,b)$. Vì K thuộc c nên K thuộc $mp(S,c)$. Hai điểm S và K cùng thuộc $mp(S,b)$ và $mp(S,c)$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng SK.

Câu 16. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC). Lấy D,E là các điểm lần lượt thuộc các cạnh SA,SB và D,E khác S.

a) Đường thẳng DE có nằm trong mặt phẳng (SAB) không?

b) Giả sử DE cắt AB tại F. Chứng minh rằng F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (CDE).

Lời giải



a) Vì D thuộc cạnh SA nên D thuộc mặt phẳng (SAB).

Vì E thuộc cạnh SB nên E thuộc mặt phẳng (SAB).

Vì D và E cùng thuộc mặt phẳng (SAB) nên đường thẳng DE nằm trong mặt phẳng (SAB).

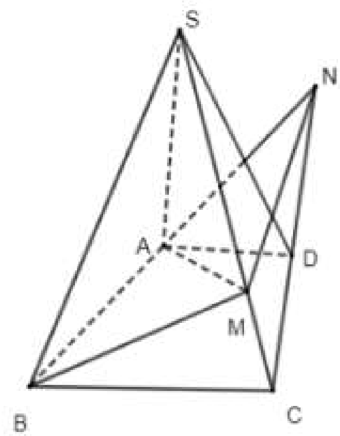
b) Vì F thuộc DE nên F thuộc mặt phẳng (CDE).

Vì F thuộc AB nên F thuộc mặt phẳng (SAB).

Do đó, F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB)và (CDE).

Câu 17. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ và M là một điểm thuộc cạnh SC (M khác S,C). Giả sử hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại N. Chứng minh rằng đường thẳng MN là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABM) và (SCD).

Lời giải



Vì N thuộc đường thẳng AB nên N thuộc mặt phẳng $\left(ABM\right)$, lại có M thuộc mặt phẳng $\left(ABM\right)$ nên đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng $\left(ABM\right)$ (1).

Vì N thuộc đường thẳng CD nên N thuộc mặt phẳng $\left(SCD\right)$, vì M thuộc cạnh SC nên M thuộc mặt phẳng $\left(SCD\right)$, do đó đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng $(SCD)(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng MN là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(ABM\right)$ và $\left(SCD\right)$.

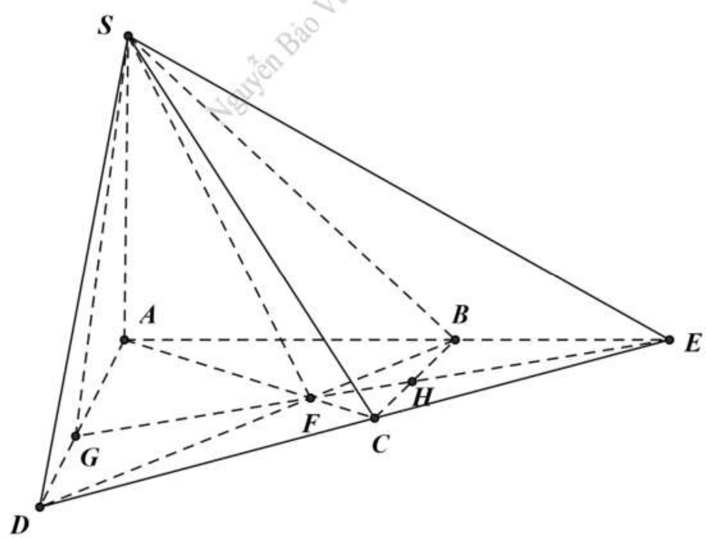
Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAB) và $SCD)$, (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao tuyến của (SEF) với các mặt phẳng $(SAD),(SBC)$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương



a) $\begin{cases} E \in AB \Rightarrow SE \subset (SAB) \\ E \in AC \Rightarrow SE \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SE$.

$\begin{cases} F \in AC \Rightarrow SF \subset (SAC) \\ F \in BD \Rightarrow SF \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SF$.

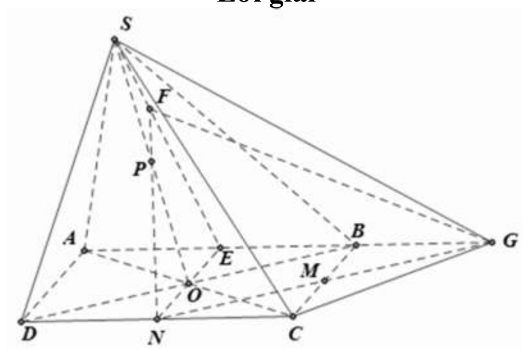
a) Gọi $\begin{cases} EF \cap AD = G \\ EF \cap BC = H \end{cases}$.

$\begin{cases} G \in EF \Rightarrow SG \subset (SEF) \\ G \in AD \Rightarrow SG \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SEF) \cap (SAD) = SG$

$\begin{cases} H \in EF \Rightarrow SH \subset (SEF) \\ H \in AD \Rightarrow SH \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SEF) \cap (SBC) = SH$

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng $(SAB), (SAD)$, (SBC) và (SCD).

Lời giải



Gọi $E = NO \cap AB; F = NP \cap SE, MN \cap AB = G$.

$\begin{cases} G \in AB \Rightarrow G \in (SAB) \\ F \in SE \subset (SAB) \Rightarrow F \in (SAB) \end{cases} \Rightarrow GF \subset (SAB).$

$\begin{cases} G \in MN \Rightarrow G \in (MNP) \\ F \in NP \Rightarrow F \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow GF \subset (MNP).$ Vậy $GF = (SAB) \cap (MNP)$.

Gọi $H = GF \cap SB \Rightarrow MH = (MNP) \cap (SBC)$.

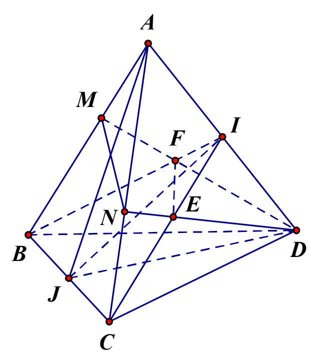
Làm tương tự với các mặt còn lại.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng $(IBC), (JAD)$.

b) M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (DMN)$.

Lời giải



a) Ta có: $I \in AD \Rightarrow I \in (JAD) \Rightarrow IJ \subset (JAD)$.

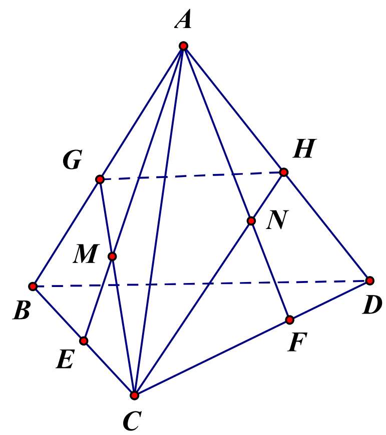
$I \in BC \Rightarrow I \in (JBC) \Rightarrow IJ \subset (JBC)$. Vậy $(IBC) \cap (JAD) = IJ$.

b) Ta có: $\begin{cases} E = DN \cap IC \\ F = DM \cap IB \end{cases} \Rightarrow EF = (IBC) \cap (DMN)$.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. M là một điểm bên trong $\triangle ABD$, N là điểm bên trong của $\triangle ACD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng

a) (AMN) và (BCD). b) (DMN) và (ABC).

Lời giải



a) Gọi $E = AM \cap BD$; $F = AN \cap CD$.

Có $\begin{cases} E \in AM \Rightarrow E \in (AMN) \\ F \in AN \Rightarrow F \in (AMN) \end{cases} \Rightarrow EF \subset (AMN)$ (1).

Có $\begin{cases} E \in BD \Rightarrow E \in (BCD) \\ F \in CD \Rightarrow F \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow EF \subset (BCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $EF = (BCD) \cap (AMN)$.

b) Tương tự câu a) có $(DMN) \cap (ABC) = GH$ với $G = DM \cap AB$; $H = DN \cap AC$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD .Lấy điểm P trên cạnh SC sao cho $PC < PS$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng

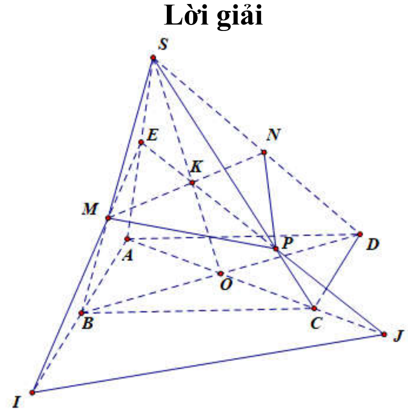
a) (SAD) và (SBD) b) (MNP) và (SBD).

c) (MNP) và (SAC) d) (MNP) và (SAB).

e) (SAD) và (MNP) f) $MNP)$ và $(ABCD)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC, BD.

Do S, O đều thuộc 2 mặt phẳng $(SAC), (SBD)$ $\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$

b) $MN = (SBD) \cap (MNP)$.

c) Trong (SBD) gọi $K = MN \cap SO$.

Đường thẳng PK cắt SA tại E ta có:

$PE = (SAC) \cap (MNP)$.

d) E, M là 2 điểm chung của mặt phẳng $(SAB), (MNP)$.

$\Rightarrow ME = (SAB) \cap (MNP)$.

e) Tương tự $NE = (SAD) \cap (MNP)$.

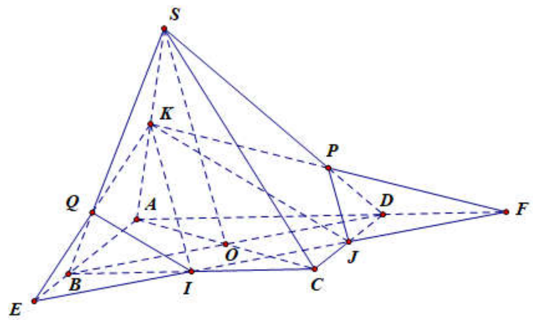
f) Trong mặt phẳng (SAC) gọi $J = EP \cap AC$, trong mặt phẳng (SAB) gọi $I = EM \cap AB$. Do I, J là 2 điểm chung của 2 mặ phẳng $(MNP), (ABCD)$ $\Rightarrow IJ = (MNP) \cap (ABCD)$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. I,J,K lần lượt là trung điểm của BC,CD,SA .Tìm giao tuyến của

a) (IJK) và (SAB). b) (IJK) và (SAD).

c) (IJK) và (SCB). d) (IJK) và (SDB).

Lời giải



a) Trong mp $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap IJ, F = AD \cap IJ$. Khi đó 2 điểm K,E là 2 điểm chung của mp $(IJK),(SAB)$ nên $KE = (SAB) \cap (IJK)$.

b) Tương tự $KF = (SAD) \cap (IJK)$.

c)) Trong mp (SAB) gọi $Q = KE \cap SB$. Khi đó 2 điểm Q,I là 2 điểm chung của mp $(IJK),(SCB)$ nên $QI = (SCB) \cap (IJK)$.

d)) Trong mp (SAD) gọi $P = SD \cap KF$. Khi đó 2 điểm P,Q là 2 điểm chung của mp $(IJK),(SBD)$ nên $PQ = (SBD) \cap (IJK)$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ laf hình thang có đáy lớn AD. Gọi I là trung điểm của SA, J là điểm nằm trên AD sao cho $JD = \frac{1}{4}AD$, $K \in SB : SK = 2BK$ .Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

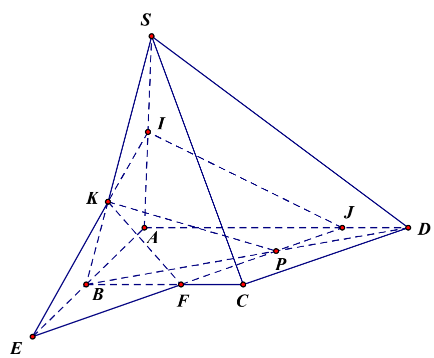
Nguyễn Bảo Vương

a) (IJK) và $(ABCD)$.

b) (IJK) và (SBD).

c) (IJK) và (SCB).

Lời giải



a) Trong mp (SAB) gọi $E = KI \cap AB$. Khi đó 2 điểm J,E là 2 điểm chung của mp $(IJK),(ABCD)$ nên $JE = (ABCD) \cap (IJK)$.

b) Trong mp $(ABCD)$ gọi $E = BD \cap IE$. Khi đó 2 điểm K,P là 2 điểm chung của mp $(IJK),(SBD)$ nên $KP = (SBD) \cap (IJK)$.

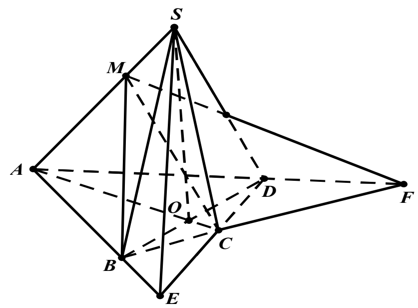
c) Gọi $F = BC \cap JE$. Khi đó 2 điểm K,F là 2 điểm chung của mp $(IJK),(SBD)$ nên $KF = (SBC) \cap (IJK)$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD)

c) (MBC) và (SAD) d) (SAB) và (SCD)

Lời giải



a) Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ Lại có $S \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$.

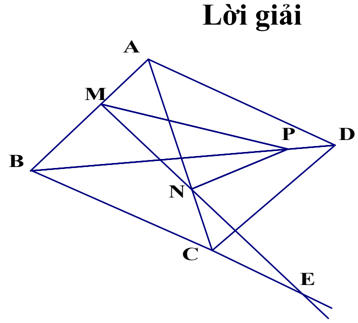
c) Trong $(ABCD)$ gọi $F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$, ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Câu 26. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Lời giải



- $P \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow P \in (BCD)$
- $P \in (BCD)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của (BCD) và (MNP)

Trong mp (ABC), gọi $E = MN \cap BC$

- $E \in BC$ mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$
- $E \in MN$ mà $MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (BCD) và (MNP)

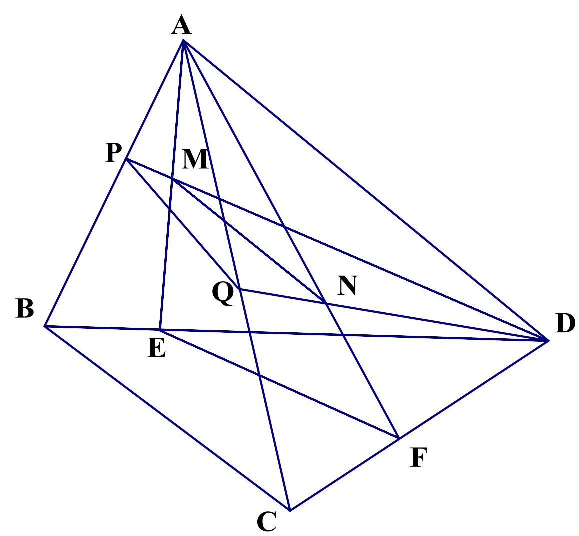
Vậy PE là giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mp sau

a) (AMN) và (BCD)

b) (DMN) và (ABC)

Lời giải



a) Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Trong (ABD), gọi $E = AM \cap BD$

- $E \in AM$ mà $AM \subset (AMN) \Rightarrow E \in (AMN)$
- $E \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (AMN) và (BCD)

Trong (ACD), gọi $F = AN \cap CD$

- $F \in AN$ mà $AN \subset (AMN) \Rightarrow F \in (AMN)$
- $F \in CD$ mà $CD \subset (BCD) \Rightarrow F \in (BCD)$

$\Rightarrow F$ là điểm chung của (AMN) và (BCD)

Vậy EF là giao tuyến của (AMN) và (BCD)

b) Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Trong (ABD), gọi $P = DM \cap AB$

- $P \in DM$ mà $DM \subset (DMN) \Rightarrow P \in (DMN)$
- $P \in AB$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow P \in (ABC)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của (DMN) và (ABC)

Trong (ACD), gọi $Q = DN \cap AC$

- $Q \in DN$ mà $DN \subset (DMN) \Rightarrow Q \in (DMN)$
- $Q \in AC$ mà $AC \subset (ABC) \Rightarrow Q \in (ABC)$

$\Rightarrow Q$ là điểm chung của (DMN) và (ABC)

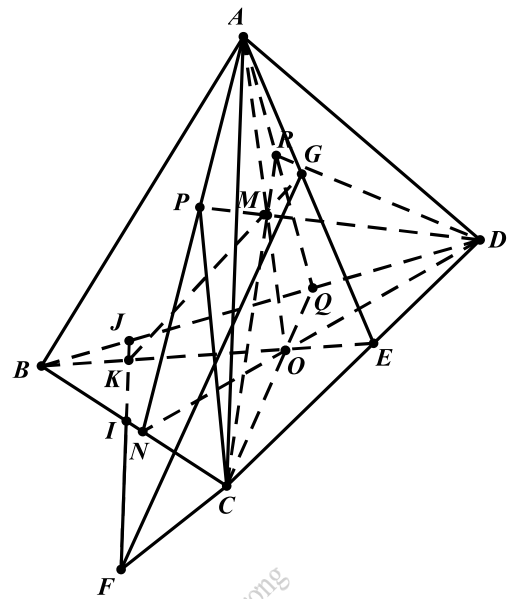
Vậy PQ là giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng $(ABC),(ABD)$.

b) Gọi I,J là các điểm tương ứng trên các cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

Lời giải



a) Trong (BCD) gọi $N = DO \cap BC$, trong (ADN) gọi

$$P = DM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} P \in DM \subset (CDM) \\ P \in AN \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (CDM) \cap (ABC)$$

Lại có $C \in (CDM) \cap (ABC) \Rightarrow PC = (CDM) \cap (ABC)$.

Tương tự, trong (BCD) gọi $Q = CO \cap BD$, trong (ACQ) gọi $R = CM \cap AQ$

$$\Rightarrow \begin{cases} R \in CM \subset (CDM) \\ R \in AQ \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow R \in (CDM) \cap (ABD)$$

$\Rightarrow D$ là điểm chung thứ hai của (MCD) và (ABD) nên $DR = (CDM) \cap (ABD)$.

b) Trong (BCD) gọi $E = BO \cap CD, F = IJ \cap CD$, $K = BE \cap IJ$;

trong (ABE) gọi $G = KM \cap AE$.

Ta có:

$$\begin{cases} F \in IJ \subset (IJM) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJM) \cap (ACD),$$

$$\begin{cases} G \in KM \subset (IJM) \\ G \in AE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow G \in (IJM) \cap (ACD).$$

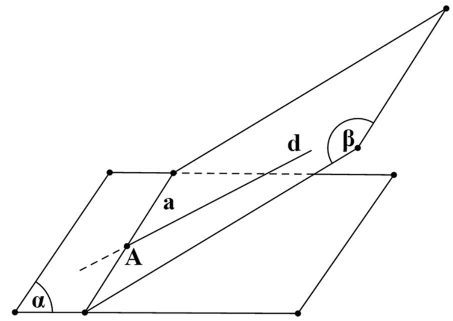
Vậy $FG = (IJM) \cap (ACD)$.

DẠNG 3: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT PHẲNG

Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α), có hai cách làm như sau:

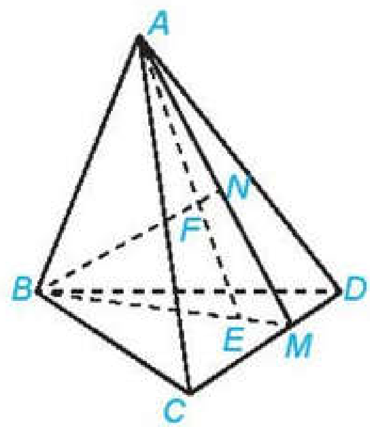
Cách 1: Những bài đơn giản, có sẵn một mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (α).

Giao điểm của hai đường thẳng không song song d và a chính là giao điểm của d và mặt phẳng (α).



Cách 2: Tìm một mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d, sao cho dễ dàng tìm giao tuyến với mặt phẳng (α). Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) chính là giao điểm của đường thẳng d và giao tuyến a vừa tìm.

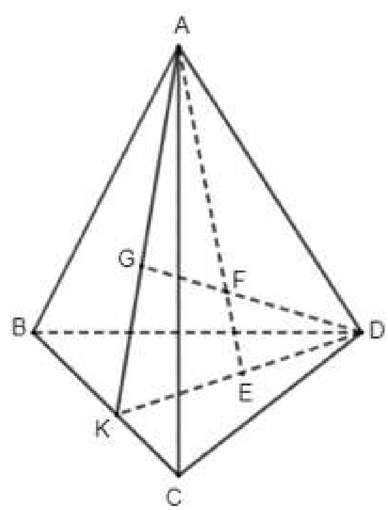
Câu 29. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình tứ diện $ABCD$ và E là một điểm nằm trong tam giác BCD. Gọi F là một điểm nằm giữa A và E, $(H.4.12)$.



Hình 4.12

Xác định giao điểm của đường thẳng DF và mặt phẳng (ABC).

Lời giải



Vì điểm E nằm trong tam giác BCD nên đường thẳng DE cắt cạnh BC tại một điểm K. Các điểm A, E thuộc mặt phẳng (ADK) nên đường thẳng AE thuộc mặt phẳng (ADK), do đó điểm F thuộc mặt phẳng (ADK). Như vậy các điểm A, D, E, F, K cùng thuộc mặt phẳng (ADK).

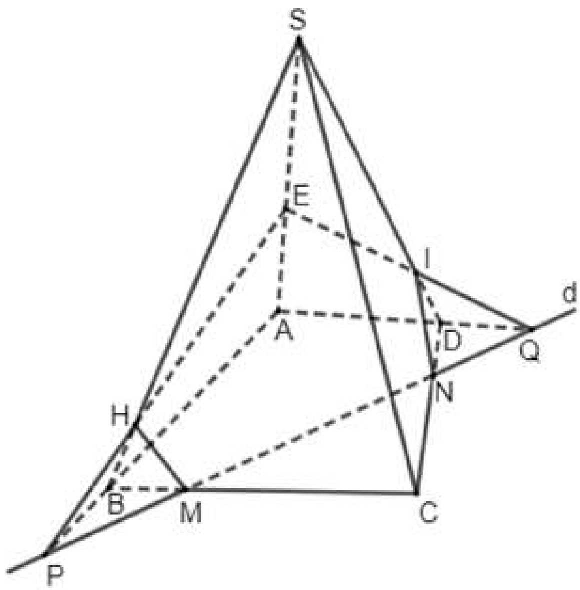
Trong tam giác ADK, đường thẳng DF cắt AK tại G. Vì G thuộc AK và A, K cùng thuộc mặt phẳng (ABC) nên G thuộc mặt phẳng (ABC). Vậy G là giao điểm của đường thẳng DF và mặt phẳng (ABC).

Câu 30. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ và lấy một điểm E thuộc cạnh SA của hình chóp (E khác S, A). Trong mặt phẳng $(ABCD)$ vẽ một đường thẳng d cắt các cạnh CB, CD lần lượt tại M, N và cắt các tia AB, AD lần lượt tại P, Q.

a) Xác định giao điểm của $mp(E,d)$ với các cạnh SB, SD của hình chóp.

b) Xác định giao tuyến của $mp(E,d)$ với các mặt của hình chóp.

Lời giải



a) +) Vì E thuộc cạnh SA nên E thuộc mặt phẳng (SAB). Vì P thuộc đường thẳng AB nên P thuộc mặt phẳng (SAB). Như vậy, các điểm S, A, B, E, P cùng thuộc mặt phẳng (SAB).

Trong tam giác SAB, đường thẳng EP cắt cạnh SB tại một điểm H. Do P thuộc đường thẳng d nên EP nằm trong $mp(E,d)$ và H thuộc EP, do đó H thuộc $mp(E,d)$. Vậy H là giao điểm của đường thẳng SB và $mp(E,d)$.

+) Vì E thuộc cạnh SA nên E thuộc mặt phẳng (SAD). Vì Q thuộc đường thẳng AD nên Q thuộc mặt phẳng (SAD). Như vậy, các điểm S, A, D, E, Q cùng thuộc mặt phẳng (SAD).

Trong tam giác SAD, đường thẳng EQ cắt cạnh SD tại một điểm I. Do Q thuộc đường thẳng d nên EQ nằm trong $mp(E,d)$ và I thuộc EQ, do đó I thuộc $mp(E,d)$. Vậy I là giao điểm của đường thẳng SD và $mp(E,d)$.

b)

+) Đường thẳng d cắt các cạnh CB, CD lần lượt tại M, N, do đó M, N thuộc d, mà d nằm trong $mp(E,d)$ nên đường thẳng MN cũng nằm trong $mp(E,d)$. Ta lại có, M thuộc CB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ nên M thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, tương tự N thuộc CD nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ nên N thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, do đó đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Vậy MN là giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $mp(E,d)$.

+) Vì H thuộc SB nằm trong mặt phẳng (SAB) nên H thuộc mặt phẳng (SAB), lại có E thuộc mặt phẳng (SAB), do đó EH nằm trong mặt phẳng (SAB). Vì E thuộc $mp(E,d)$ và H thuộc $mp(E,d)$ nên EH nằm trong $mp(E,d)$. Vậy EH là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và $mp(E,d)$.

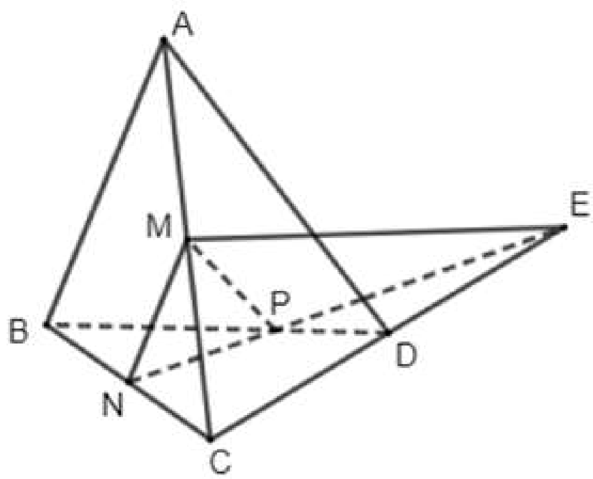
+) Vì I thuộc SD nằm trong mặt phẳng (SAD) nên I thuộc mặt phẳng (SAD), lại có E thuộc mặt phẳng (SAD), do đó EI nằm trong mặt phẳng (SAD). Vì E thuộc $mp(E,d)$ và I thuộc $mp(E, d)$ nên EI nằm trong $mp(E, d)$. Vậy EI là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và $mp(E, d)$.
+) Vì H thuộc SB nên H thuộc mặt phẳng (SBC), vì M thuộc BC nên M thuộc mặt phẳng (SBC), do đó HM nằm trong mặt phẳng (SBC). Lại có M thuộc d nên M thuộc $mp(E, d)$ và H thuộc $mp(E,d)$ nên HM nằm trong $mp(E, d)$. Vậy HM là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và $mp(E, d)$.
+) Vì I thuộc SD nên I thuộc mặt phẳng (SCD), vì N thuộc CD nên N thuộc mặt phẳng (SCD), do đó IN nằm trong mặt phẳng (SCD). Lại có N thuộc d nên N thuộc $mp(E, d)$ và I thuộc $mp(E, d)$ nên IN nằm trong $mp(E, d)$. Vậy IN là giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và $mp(E, d)$.

Câu 31. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AC, BC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = CM, BN = CN, BP = 2DP$.

a) Xác định giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (MNP).

Lời giải



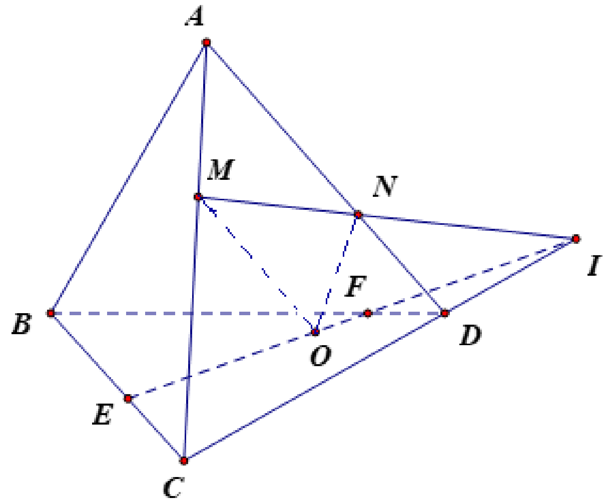
a) Trong tam giác BCD, N thuộc cạnh BC thỏa mãn $BN = CN$ hay N là trung điểm của BC và P thuộc cạnh BD sao cho $BP = 2DP$. Khi đó, đường thẳng NP cắt CD tại một điểm E. Vì E thuộc NP nằm trong mặt phẳng (MNP) nên E thuộc mặt phẳng (MNP). Vậy E là giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).
b) Vì M thuộc cạnh AC nên M thuộc mặt phẳng (ACD), vì E thuộc CD nên E thuộc mặt phẳng (ACD), do đó đường thẳng ME nằm trong mặt phẳng (ACD).
Vì E thuộc mặt phẳng (MNP) và M thuộc mặt phẳng (MNP) nên ME nằm trong mặt phẳng (MNP). Vậy ME là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (MNP).

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN khiing song song với CD. Gọi O là một điểm bên trong ΔBCD.

a) Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD).

b) Tìm giao điểm của BC và BD với mặt phẳng (OMN).

Lời giải



a) Theo hình vẽ ta có

- Trong mp(ACD): kẻ MN giao với CD tại I

- Trong mp(BCD): kẻ IO giao BC và BD lần lượt tại E và F

- Từ đó thì giao tuyến của (OMN) và (BCD) là đường EF.

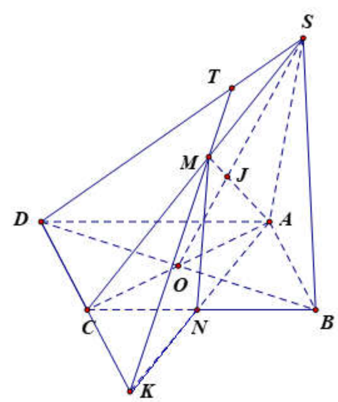
b) Theo a) thì giao của BC và BD với (OMN) lần lượt là E và F.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$. M là một điểm trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm của AM và (SBD)

b) Gọi N là một điểm trên cạnh BC. Tìm giao điểm của SD và (AMN).

Lời giải



a) Theo hình vẽ ta có:

+) Trong mp$(ABCD)$: AC giao BD tại O

+) Trong mp(SAC): SO giao MA tại J

Từ đó J chính là giao điểm của AM và (SBD).

b) Giả sử AN giao CD tại K

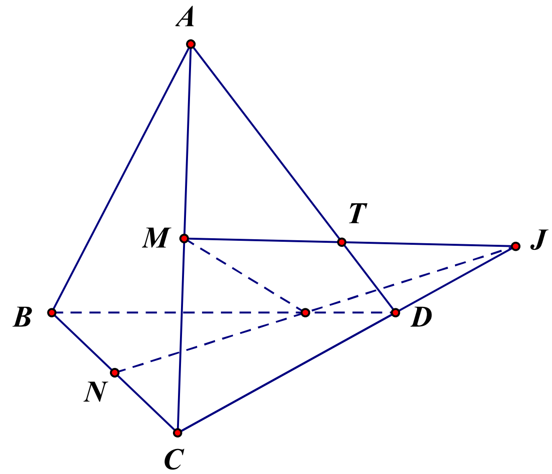
Trong mp(SCD): KM giao SD tại T

Từ đó T chính là giao điểm của SD và (AMN).

Nếu AN và CD song song với nhau, ta chỉ việc kẻ MT song song với CD ($T \in SD$) từ đó cũng suy ra được T là điểm cần tìm.

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là một điểm trên cạnh BD và không trùng với trung điểm của BD. Tìm giao điểm của CD và AD với mặt phẳng (MNK).

Lời giải



Trong mp(BCD): NK giao CD tại J $\Rightarrow J$ là giao điểm của CD và (MNK).

Trong mp(ACD): MJ giao AD tại T $\Rightarrow T$ là giao điểm của AD và (MNK).

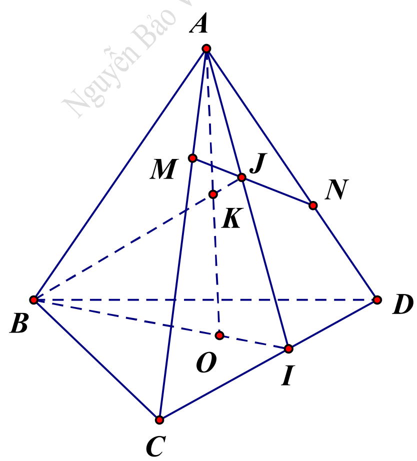
Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và AD. O là một điểm bên trong ΔBCD. Tìm giao điểm của:

a) MN và (ABO).

b) AO và (BMN).

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương



a) Trong (BCD) kẻ BO giao CD tại I.

Trong (ACD) kẻ MN giao AI tại J $\Rightarrow J$ là giao điểm của MN và (ABO).

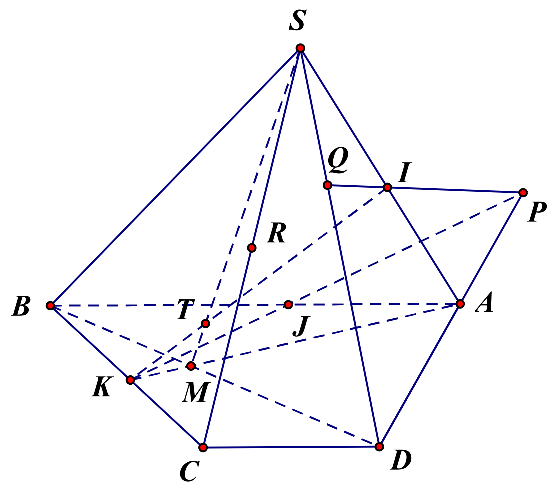
b) Trong (ABI): AO giao BJ tại K $\Rightarrow K$ là giao điểm của AO và (BMN).

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang, cạnh đáy lớn AB. Gọi I, J, K là ba điểm lần lượt trên SA, AB, BC.

a) Tìm giao điểm của IK và (SBD).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (IJK) với SD và SC.

Lời giải



a) Trong $(ABCD)$: BD giao AK tại M.

Trong (SAK): SM giao IK tại T $\Rightarrow T$ là giao điểm của IK và (SBD).

b) Lấy R là trung điểm của SC.

Dễ dàng chứng minh được RK và IJ song song với nhau (song song và bằng $\frac{BD}{2}$) nên

$R \in (IKJ)$ $\Rightarrow R$ là giao điểm của SC với mp(IJK).

Trong $(ABCD)$: KJ cắt AD tại P.

Trong (SAD): IP cắt SD tại Q $\Rightarrow Q$ là giao điểm của SD với mp(IJK).

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có AD và BC không song song với nhau. Lấy I thuộc SA sao cho $SA = 3IA$, J thuộc SC và M là trung điểm của SB.

a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC)

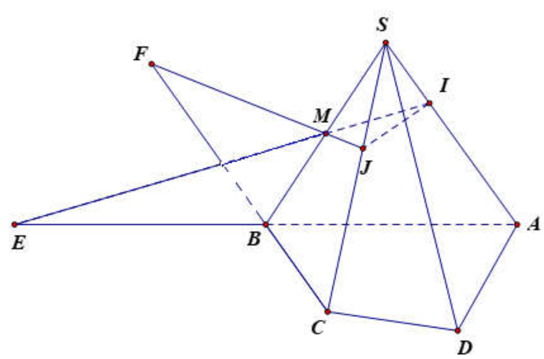
b) Tìm giao điểm E của AB và (IJM)

c) Tìm giao điểm F của BC và (IJM)

d) Tìm giao điểm N của SD và (IJM)

e) Gọi H là giao điểm của MN và BD. Chứng minh rằng H, E, F thẳng hàng.

Lời giải



a) O là giao điểm của và BC nên SO là giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b) Trong (SAB) kẻ IM giao với AB tại E nên E là giao điểm của AB và (IJM).

c) Trong (SBC): MJ giao với BC tại F nên F là giao điểm của BC và (IJM).

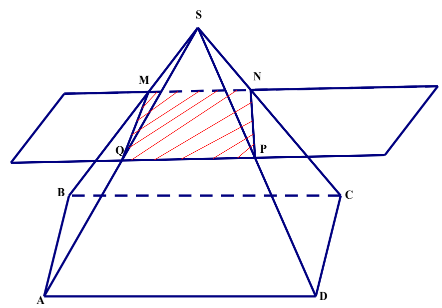
d) Trong $(ABCD)$: EF giao với AD tại P.

Trong (SAD): IP giao với SD tại N nên N là giao điểm của SD và (IJM).

e) H là giao điểm của MN và BD. Dễ thấy 3 điểm H, E, F đồng thời nằm trên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (IJM) nên 3 điểm này thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng trên hay 3 điểm đó thẳng hàng.

DẠNG 4. TÌM THIẾT DIỆN

I. Phương pháp tìm thiết diện



Thiết diện của hình (H) và hình (Q) là phần chung nhau giữa2 hình đó.
Thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp (H) là phần chung giữa mặt phẳng (α) và hình chóp (H).

Đặc điểm

- Thiết diện là đa giác kín.
- Các cạnh của thiết diện nằm trên các mặt của hình chóp.
- Cạnh của thiết diện được hình thành từ những đoạn giao tuyến của mặt phẳng cắt với các mặt của hình chóp.
- Trong giới hạn hình chóp thì Thiết diện có thể cắt hoặc không cắt tất cả các mặt của hình chóp.

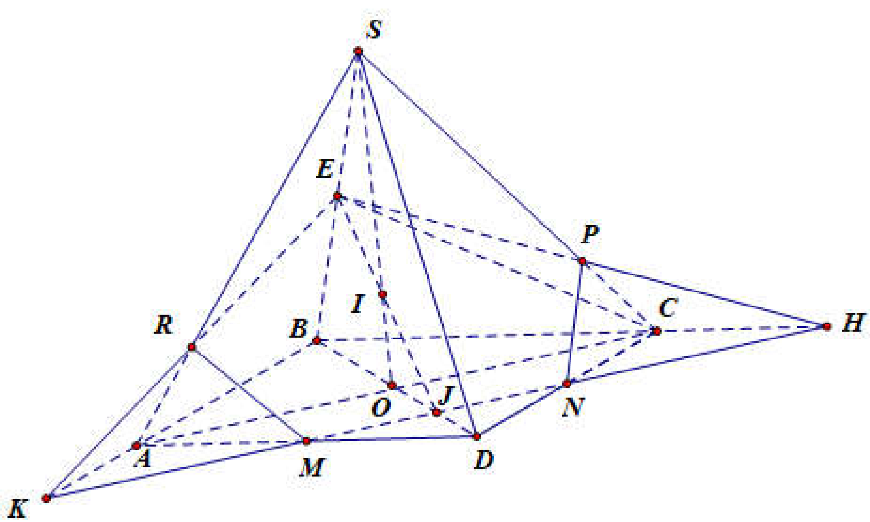
Phương pháp tìm thiết diện

- Xác định điểm chung có sẵn.
- Từ các điểm chung có sẵn ta xác định giao tuyến của mặt phẳng với các mặt chưa điểm chung đó.
- Từ giao tuyến đó ta xác định đoạn giao tuyến bằng cách tìm giao điểm của giao tuyến với các cạnh của mặt phẳng đó.
- Từ giao tuyến tìm được ta tiến hành tìm giao tuyến và các đoạn giao tuyến còn lại cho đến khi được 1 hình kín.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I là ba điểm trên AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI).

Lời giải



Trong $(ABCD)$ gọi $J = BD \cap MN$;

$K = MN \cap AB; H = MN \cap BC$.

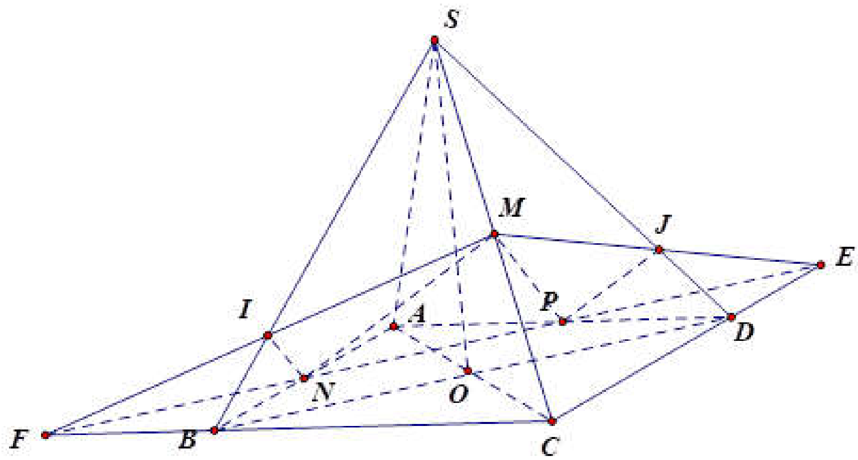
Trong (SBD) gọi $Q = IJ \cap SB$

Trong (SAB) gọi $R = KQ \cap SA$

Và trong (SBC) gọi $P = QH \cap SC$. Như vậy thiết diện cần tìm là $MNPQR$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm trên cạnh SC, N và P lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng.

Lời giải



Gọi $E = MN \cap CD, F = MN \cap BC$ $I = MF \cap SB, J = ME \cap SB$. Khi đó thiết diện là ngũ giác $MINPJ$.

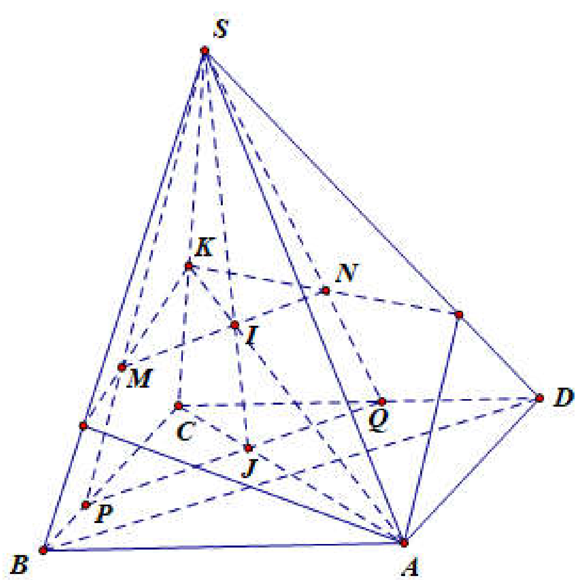
Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ .Trong tam giác SBC, lấy một điểm M. Trong tam giác SCD, lấy một điểm N.

a) Tìm giao điểm của MN và (SAC).

b) Tìm giao điểm của SC với (AMN).

c) Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng

Lời giải



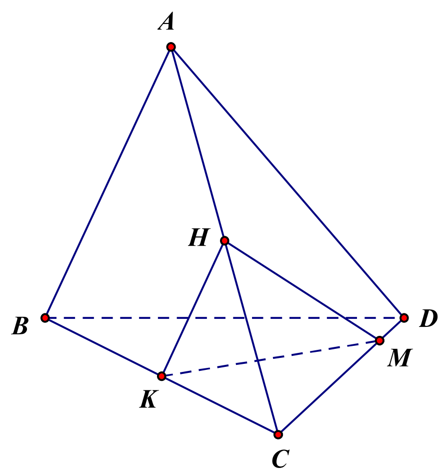
a) Gọi $SM \cap BC = P$, $SN \cap CD = Q$. Khi đó $PQ \cap AC = J$. Gọi $I = SJ \cap MN$. Vậy $I = MN \cap (SAC)$

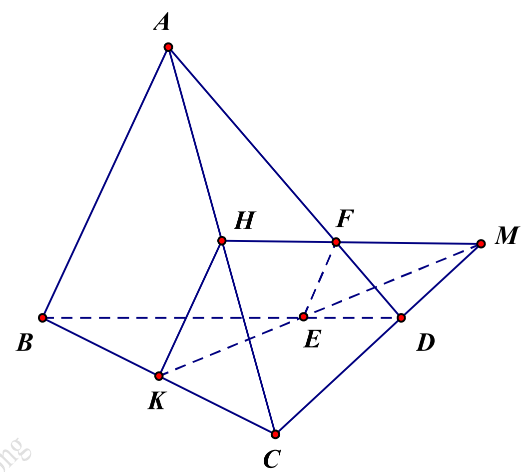
b) $AI \cap SC = K$, khi đó $K = SC \cap (AMN)$.

c) Gọi $KM \cap SB = F$, và $KN \cap SD = E$. Vậy thiết diện là tứ giác $AFKE$.

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC. Trong mặt phẳng (CDB) lấy điểm M sao cho hai đường thẳng KM và CD cắt nhau. Hãy tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (HKM).

Lời giải





+) Nếu M nằm giữa C và D thiết diện chính là tam giác KHM.

+) Nên M nằm ngoài đoạn thẳng CD Gọi $F = HM \cap AD$ và

$E = KM \cap BD$ khi đó thiết diện là tứ giác $HFEK$.

Nguyễn Bảo Vương

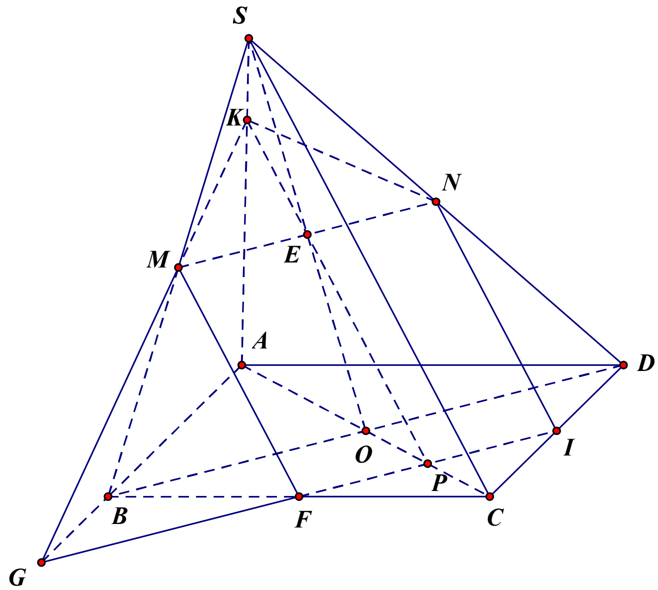
Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB, SD, OC.

a) Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC)

b) Tìm giao điểm của SA với (MNP)

c) Tìm thiết diện của (MNP) với hình chóp.

Lời giải



a) Gọi $E = SO \cap MN$. Dựng PE cắt SA tại K. Khi đó giao tuyến của (MNP) với (SAC) là đường thẳng PE.

b) K là giao điểm của SA và (SAC).

c) Do $MN//BD$ nên giao tuyến của (MNP) với đáy $(ABCD)$ là đường thẳng qua P song song với BD cắt các cạnh BC và CD lần lượt tại F và I. Vậy $MKNIF$ là thiết diện của khối chóp.

Câu 43. Cho chóp $S.ABCD$, M thuộc $SC; N, P$ trung điểm AB, AD.

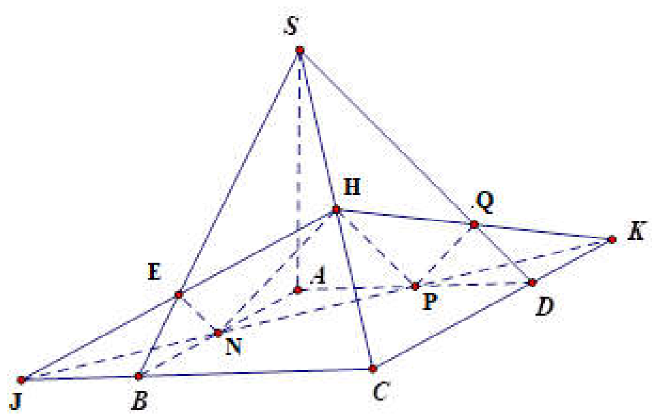
a) Tìm giao điểm của CD và (MNP)

b) Tìm giao điểm của SD và (MNP)

c) Tìm giao tuyến của (SBC) và (MNP)

d) Tìm thiết diện của chóp và (MNP).

Lời giải



a) Gọi $NP \cap CD = K$ khi đó $CD \cap (MNP) = K$.

b) Gọi $MK \cap SD = Q$ khi đó $Q = SD \cap (MNP)$.

c) Gọi $PN \cap BC = I$ và $E = SB \cap MJ$, khi đó giao tuyến của (SBC)) và (MNP) là MJ.

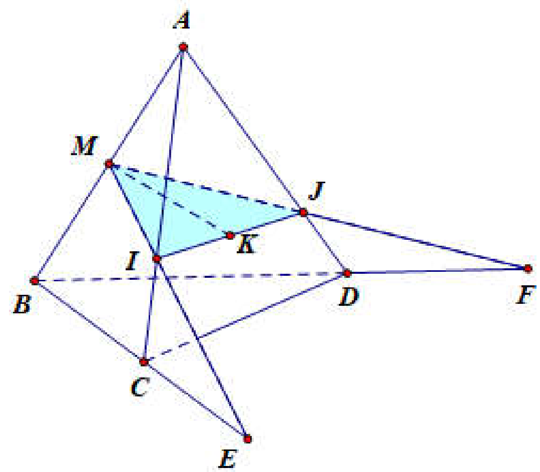
d) Thiết diện là ngũ giác $MENPQ$.

Câu 44. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh bằng a. Kéo dài BC một đoạn $CE = a$. Kéo dài BD một đoạn $DF = a$. Gọi M là trung điểm AB.

a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF).

b) Tính diện tích của thiết diện.

Lời giải



a) Theo hình vẽ ta có:

Trong $mp(ABC)$: ME giao AC tại I.

Trong $mp(ABD)$: MF giao AD tại J.

Từ đó thiết diện của tứ diện với $mp(MEF)$ là tam giác MIJ.

b) Theo cách dựng thì I và J lần lượt là trọng tâm tam giác ABE và ABF $\Rightarrow \begin{cases} AI = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2a}{3} \\ AJ = \dfrac{2}{3}AD = \dfrac{2a}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tam giác AIJ đều $\Rightarrow IJ = \dfrac{2a}{3}$.

Do $AI = AJ$ nên $\Delta AMI = \Delta AMJ \Rightarrow MI = MJ$

Trong $\Delta AMI : MI = \sqrt{MA^2 + IA^2 - 2MA.\text{IAcosA}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$

$S_{\Delta MIJ} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a}{3}.\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{13}}{6}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{3}\right)^2} = \dfrac{a^2}{6}$

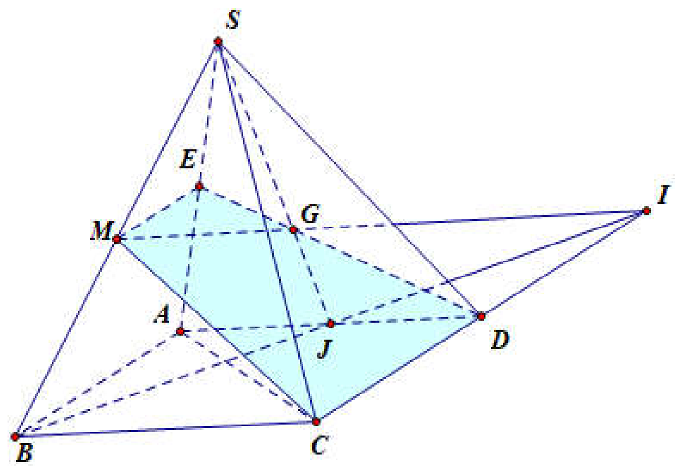
Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành $ABCD$. M là trung điểm SB và G là trọng tâm tam giác SAD.

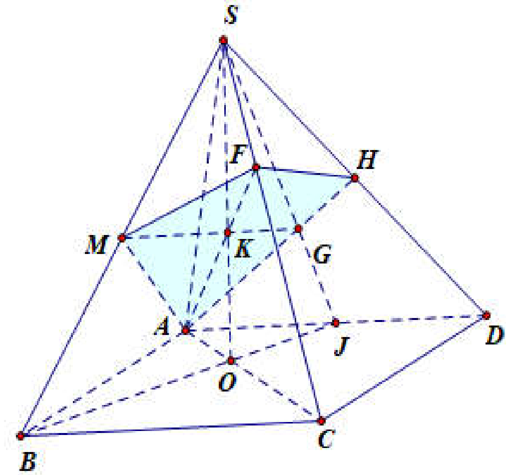
a) Tìm giao điểm I của MG với $(ABCD)$, chứng tỏ I thuộc mặt phẳng (CMG).

b) Chứng tỏ (CMG) đi qua trung điểm của SA, tìm thiết diện của hình chóp với (CMG).

c) Tìm thiết diện của hình chóp với (AMG).

Lời giải





a) Gọi J là trung điểm AD. Khi đó $I = MG \cap BJ$ suy ra G là trọng tâm tam giác SBI nên J là trung điểm của BI. Khi đó MG, BJ, CD đồng quy tại điểm I. Do vậy I thuộc mặt phẳng (CMG).

b) Ta có $(CMG) \equiv (CIM)$. Dựng DG cắt SA tại E. Mặt khác do G là trọng tâm $\Delta SAD \Rightarrow$ E là trung điểm của S**A.**

Như vậy tứ giác CMED là thiết diện của (CMG) với khối chóp.

c) Gọi $O = BJ \cap AC, K = SO \cap MI, H = AG \cap SD$.

Dựng AK cắt SC tại F như vậy tứ giác $AMFH$ là thiết diện của khối chóp với mặt phẳng (AMG).

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang $ABCD$, AB là đáy lớn. I, J lần lượt là trung điểm SA, SB; M thuộc SD.

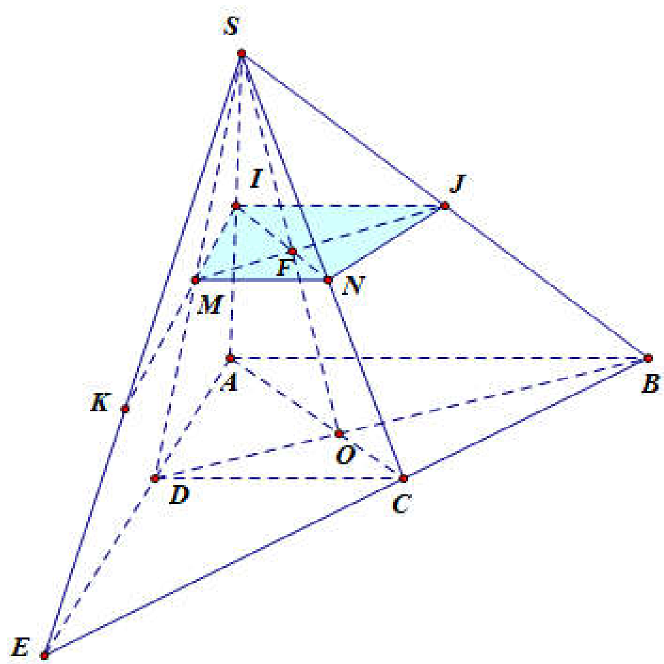
a) Tìm giao tuyến của (SAD) *và* (SBC).

b) Tìm giao điểm K của IM *và* (SBC).

c) Tìm giao điểm N của SC *và* (IJM).

d) Tìm thiết diện của hình chóp với (IJM).

Lời giải



Nguyễn Bảo Vương

a) Gọi $E = AD \cap BC$ khi đó SE là giao tuyến của (SAD) *và* (SBC).

b) Trong (SAE) dựng IM cắt SE tại K. Khi đó $K = IM \cap (SBC)$

c) Gọi $O = AC \cap BD$. Trong (SBD) gọi $F = SO \cap MJ$ và trong (SAC) dựng IF cắt SC tại N. Khi đó $N = SC \cap (IJM)$.

d) Do vậy thiết diện của (IJM) và khối chóp là tứ giác $IMNJ$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang $ABCD$, AB là đáy lớn.

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AD, BC, SB.

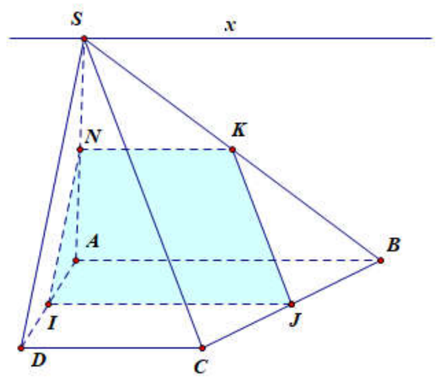
a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD); (IJK) và (SCD).

b) Tìm giao điểm M của SD và (IJK).

c) Tìm giao điểm N của SA và (IJK).

d) Tìm thiết diện của hình chóp với (IJK). Thiết diện là hình gì?

Lời giải



a) Ta có: $AB // CD$, $S \in (SAB) \cap (SCD)$ do vậy giao tuyến (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AB.

b) Ta có $\left.\begin{array}{l} KJ // SC \\ IJ // CD // AB \end{array}\right\} \Rightarrow (SCD) // (IJK)$ do vậy (SCD) không giao với (IJK).

c) Dựng $KN // AB$ suy ra N là trung điểm SA. Khi đó ta có: $NK // IJ$ và $N = SA \cap (IJK)$.

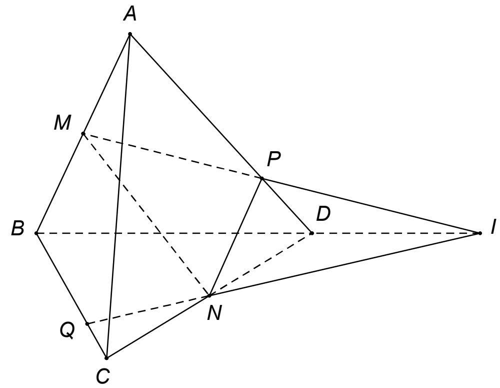
d) Thiết diện của hình chóp với (IJK) là tứ giác $IJKN$.

DẠNG 5: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Để chứng minh ba điểm (hay nhiều điểm) thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, khi đó chúng nằm trên đường thẳng giao tuyên của hai mặt phẳng nên thẳng hàng.

Câu 48. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Chứng minh ba điểm I, B, D thẳng hàng.

Lời giải.



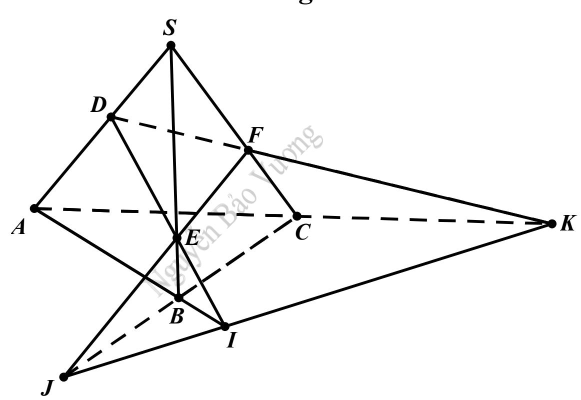
Ta có $(ABD)\cap(BCD)=BD$.

Lại có $\begin{cases} I\in MP\subset(ABD) \\ I\in NQ\subset(BCD)\end{cases}\Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

$\Rightarrow I\in BD\Rightarrow I,\ B,\ D$ thẳng hàng.

Câu 49. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA,SB và SC lấy các điểm D,E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I,J,K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $I=DE\cap AB, DE\subset(DEF)\Rightarrow I\in(DEF)$;

$AB\subset(ABC)\Rightarrow I\in(ABC)\ \ (1)$.

Tương tự:

$J=EF\cap BC\Rightarrow\begin{cases} J\in EF\in(DEF) \\ J\in BC\subset(ABC)\end{cases}\ \ (2)$

$K=DF\cap AC\Rightarrow\begin{cases} K\in DF\subset(DEF) \\ K\in AC\subset(ABC)\end{cases}\ \ (3)$

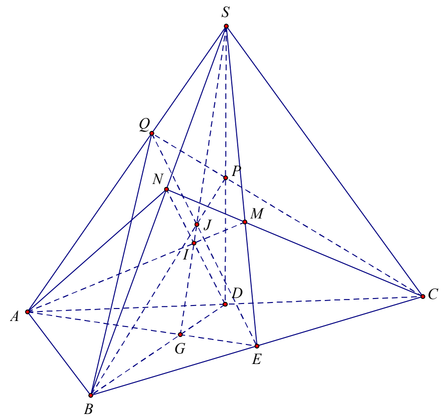
Từ (1),(2) và (3) ta có I,J,K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.

Câu 50. Cho tứ diện $S.ABC$ có D,E lần lượt là trung điểm của AC,BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (α) đi qua AC cắt SE,SB lần lượt tại M,N. Một mặt phẳng (β) đi qua BC cắt SD,SA tương ứng tại P và Q.

a) Gọi $I=AM\cap DN, J=BP\cap EQ$. Chứng minh S,I,J,G thẳng hàng.

b) Giả sử $K=AN\cap DM, L=BQ\cap EP$. Chứng minh S,K,L thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có:

$S \in (SAE) \cap (SBD)$, (1)

$G = AE \cap BD \Rightarrow \begin{cases} G \in AE \subset (SAE) \\ G \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G \in (SAE) \\ G \in (SBD) \end{cases}$ (2)

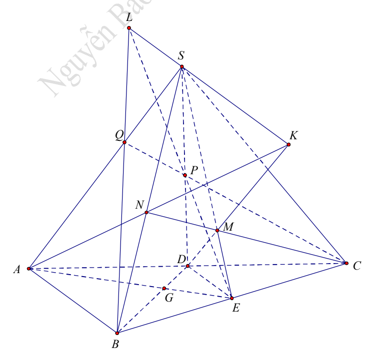
$I = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in DN \subset (SBD) \\ I \in AM \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{I} \in (\mathrm{SBD}) \\ \mathrm{I} \in (\mathrm{SAE}) \end{cases}$ (3)

$J = BP \cap EQ \Rightarrow \begin{cases} J \in BP \subset (SBD) \\ J \in EQ \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SBD) \\ J \in (SAE) \end{cases}$ (4)

Từ (1),(2),(3) và (4) ta có S, I, J, G là điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (SAE) nên chúng thẳng hàng.

b)

Nguyễn Bảo Vương



Ta có:

$S \in (SAB) \cap (SDE)$

$K = AN \cap DM \Rightarrow \begin{cases} K \in AN \subset (SAB) \\ K \in DM \subset (SDE) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAB) \cap (SDE)$

$L = BQ \cap EP \Rightarrow \begin{cases} L \in BQ \subset (SAB) \\ L \in EP \subset (SDE) \end{cases} \Rightarrow L \in (SAB) \cap (SDE)$

Vậy S, K, L là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SDE) nên chúng thẳng hàng.

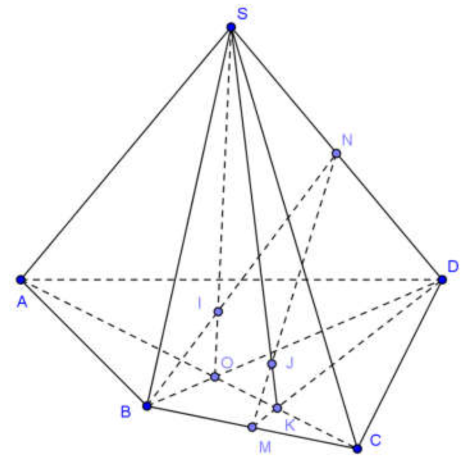
Câu 51. Cho tứ giác $ABCD$ và $S \notin (ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm trên BC và SD.

a. Tìm giao điểm $I = BN \cap (SAC)$.

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SAC)$.

c. Chứng minh C, I, J thẳng hàng.

Lời giải:



a. Tìm giao điểm $I = BN \cap (SAC)$.

Chọn $(SBD) \supset BN$.

Tìm $(SBD) \cap (SAC)$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

$\Rightarrow (SBD) \cap (SAC) = SO$.

Gọi $I = BN \cap SO$.

$\Rightarrow I = BN \cap (SAC)$

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SAC)$.

Chọn $(SMD) \supset MN$.

Tìm $(SMD) \cap (SAC)$.

Gọi $K = AC \cap DM$.

$\Rightarrow (SMD) \cap (SAC) = SK$.

Gọi $J = MN \cap SK$.

$\Rightarrow J = MN \cap (SAC)$

c. Chứng minh C, I, J thẳng hàng.

Ta có C, I, J là điểm chung của hai mặt phẳng (BNC) và (SAC).

Vậy C, I, J thẳng hàng.

Câu 52. Cho mặt phẳng (P) và điểm A, B, C không thẳng hàng và ở ngoài (P). Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt (P) tại các điểm D, E, F. Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

Lời giải:

Do A, B, C không thẳng hàng nên tạo thành một mặt phẳng (ABC).

$D = BC \cap (P) \Rightarrow D \in (ABC) \cap (P)$.

$E = CA \cap (P) \Rightarrow E \in (ABC) \cap (P)$

$F = AB \cap (P) \Rightarrow F \in (ABC) \cap (P)$

Suy ra minh D, E, F thẳng hàng vì chúng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (P).

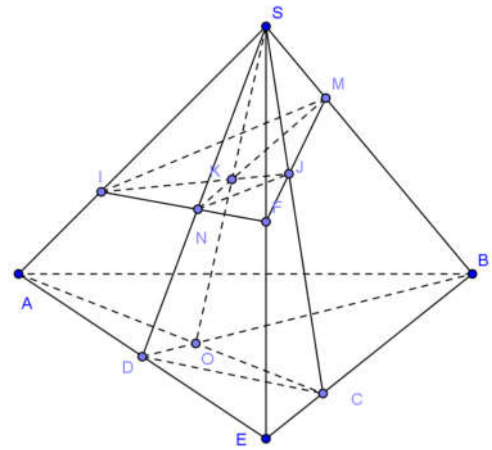
Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, J là hai điểm cố định trên SA, SC với $SI > IA$ và $SJ < JC$. Một mặt phẳng (P) quay quanh IJ cắt SB tại M, SD tại N.

a. Chứng minh rằng IJ, MN, SO đồng quy ($O = AC \cap BD$). Suy ra cách dựng điểm N khi biết M.

b. AD cắt BC tại E, IN cắt JM tại F. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải:



a. Tìm $(SO)\cap(P)=?$

Phương án 1:

$SO\subset(SAC)$

$(SAC)\cap(P)=IJ$

$SO\cap IJ=K\Rightarrow K=SO\cap(P)$.

Phương án 2:

$SO\subset(SBD)$

$(SBD)\cap(P)=MN$.

$SO\cap MN=K'\Rightarrow K'=SO\cap(P)$.

Do K,K' đều là giao điểm của SO và (P) nên $K\equiv K'$.

Cách dựng N.

Gọi $K=IJ\cap SO$.

Lấy M bất kỳ trên SB. Nối MK cắt SD tại 1 điểm thì đó là điểm N cần dựng.

b. Chứng minh S,E,F thẳng hàng.

$E=AD\cap BC\Rightarrow E\in(SAD)\cap(SBC)$

$F=IN\cap MJ\Rightarrow F\in(SAD)\cap(SBC)$

$S\in(SAD)\cap(SBC)$

Suy ra S,E,F thẳng hàng.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên SA,SB,SC lấy các điểm M,N,P. Gọi E,F,K lần lượt là giao điểm của MN với AB, NP với BC, MP với AC. Chứng minh E,F,K thẳng hàng.

Lời giải:

$E=MN\cap AB\Rightarrow E\in(MNP)\cap(ABC)$

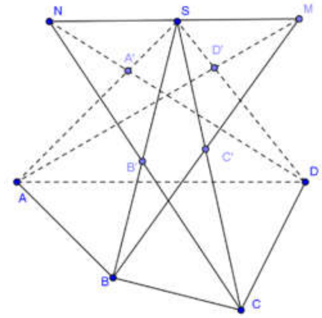
$F=NP\cap BC\Rightarrow F\in(MNP)\cap(ABC)$

$K=MP\cap AC\Rightarrow K\in(MNP)\cap(ABC)$

E,F,K thẳng hàng do chúng cùng thuộc $(MNP)\cap(ABC)$.

Câu 55. Trong mặt phẳng (P) cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Giả sử C',D' là các điểm trên SC,SD sao cho đường thẳng AD' và BC' cắt nhau tại M. Giả sử A',B' là hai điểm trên SA,SB sao cho DA' và CB' cắt nhau tại N. Chứng minh M,N,S thẳng hàng.

Lời giải:



$SN = (SBC) \cap (SAD)$

$SM = (SBC) \cap (SAD)$

Suy ra $MN = (SBC) \cap (SAD)$

Vậy S, M, N thẳng hàng.

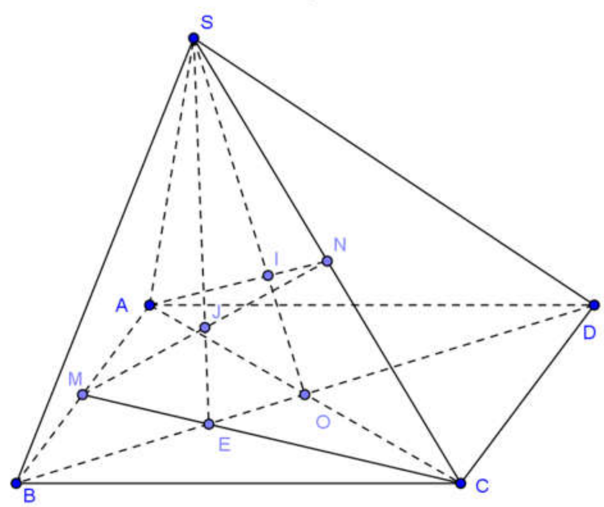
Câu 56. Cho hình bình hành $ABCD$, S là điểm không thuộc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC.

a. Tìm giao điểm $I = AN \cap (SBD)$.

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SBD)$.

c. Chứng minh I, J, B thẳng hàng.

Lời giải:



a. Tìm giao điểm $I = AN \cap (SBD)$.

Chọn mặt phẳng phụ $(SAC) \supset AN$.

Tìm giao tuyến $(SAC) \cap (SBD)$.

$(SAC) \cap (SBD) = SO$

Trong mặt phẳng (SAC), gọi $I = AN \cap SO$.

Vậy $I \in AN$, $I \in SO, SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$

Do đó $I = AN \cap (SBD)$

b. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SBD)$.

Chọn mặt phẳng phụ $(SMC) \supset MN$.

Tìm $(SMC) \cap (SBD)$.

Ta có S là một điểm chung của (SMC) và (SBD).

Trong $(ABCD)$, gọi $E = MC \cap BD$.

$\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SE$.

Trong (SMC), gọi $J = MN \cap SE$

$J \in MN$

$J \in SE$, mà $SE \subset (SBD) \Rightarrow J \in (SBD)$

Vậy $J = MN \cap (SBD)$.

c. Chứng minh I, J, B thẳng hàng.

Ta có: $B \in (ABN) \cap (SBD)$.

$I \in SO$, mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$

$I \in AN$, mà $AN \subset (ANB) \Rightarrow I \in (ANB)$

$\Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD)$

$J \in SE$, mà $SE \subset (SBD) \Rightarrow J \in (SBD)$

$J \in MN$, mà $MN \subset (ANB) \Rightarrow J \in (ANB)$

$\Rightarrow J \in (ABN) \cap (SBD)$

Vậy I, J, B thẳng hàng.

Câu 57. Cho hình chóp $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB, AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (LMN) và (ABC).

b. Tìm giao điểm $I = BC \cap (LMN)$ và $J = SC \cap (LMN)$.

c. Chứng minh M, I, J thẳng hàng.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải:

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (LMN) và (ABC).

Ta có: N là điểm chung của (LMN) và (ABC).

Trong (SAB), LM không song song với AB

Gọi $K = AB \cap LM$

$K \in LM$, mà $LM \subset (LMN) \Rightarrow K \in (LMN)$

$K \in AB$, mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC)$

Vậy $KN = (LMN) \cap (ABC)$

b. Tìm giao điểm $I = BC \cap (LMN)$ và $J = SC \cap (LMN)$.

<u>Tìm giao điểm</u> $I = BC \cap (LMN)$

Chọn mặt phẳng phụ $(ABC) \supset BC$

Tìm giao tuyến $(ABC) \cap (LMN)$.

$(ABC) \cap (LMN) = NK$

Trong (ABC), gọi $I = NK \cap BC$

$I \in BC$

$I \in NK$, mà $NK \subset (LMN) \Rightarrow I \in (LMN)$

Vậy $I = BC \cap (LMN)$

<u>Tìm giao điểm</u> $J = SC \cap (LMN)$

Trong (SAC), LN không song song với SC

Gọi $J = LN \cap SC$

$J \in SC$

$J \in LN$, mà $LN \subset (LMN) \Rightarrow J \in (LMN)$

Vậy $J = SC \cap (LMN)$

c. Chứng minh M, I, J thẳng hàng.

Ta có M, I, J là các điểm chung của hai mặt phẳng (LMN) và (ABC).

Vậy M, I, J thẳng hàng.

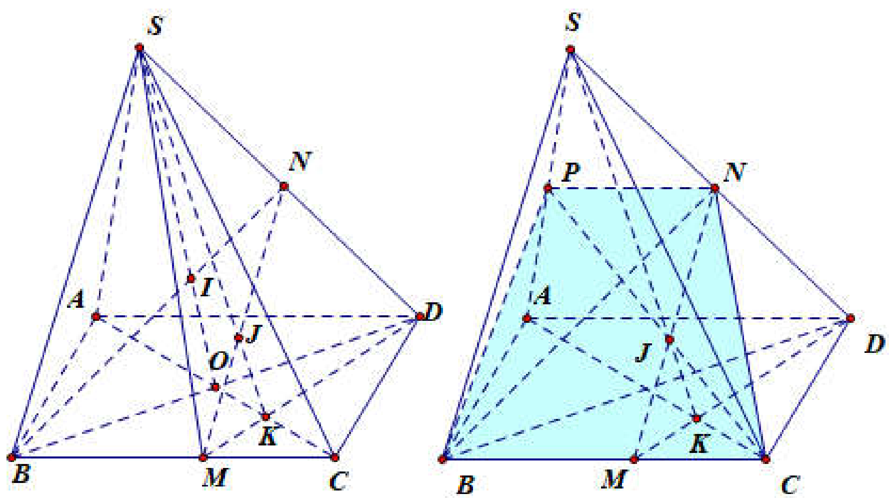
Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh BC, N là một điểm trên cạnh SD.

a) Tìm giao điểm I của BN và (SAC) và giao điểm J của MN và (SAC).

b) DM cắt AC tại K. Chứng minh S, K, J thẳng hàng.

c) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (BCN).

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Trong mp(SBD): BN giao SO tại đâu đó chính là điểm I.

Trong mp(ABCD): DM giao AC tại K.

Trong mp(SDM): SK giao MN tại đâu đó chính là điểm J.

b) Dễ thấy 3 điểm S, K, J đều thuộc hai mặt phẳng là (SAC) *và* (SDM) nên 3 điểm này thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng trên hay chúng thẳng hàng.

c) Trong (SAC): Kẻ CI giao SA tại P. Từ đó thiết diện tạo bởi mp(BNC) với hình chóp là tứ giác BCNP.

DẠNG 6: CHỨNG MINH 3 ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY.

Muốn chúng minh 3 đường thẳng đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tưng ứng tại các điểm M, N, P, Q. Chứng minh rằng các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.

Lời giải

Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $I = MP \cap NQ$.

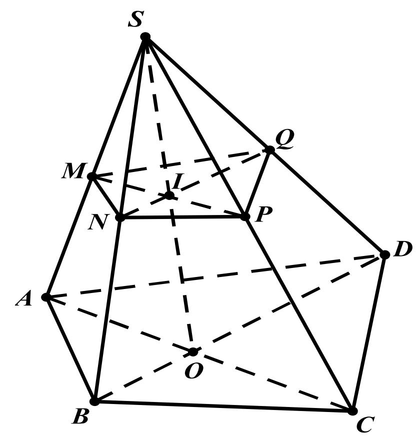
Ta sẽ chứng minh $I \in SO$.

Dễ thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

$$\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases}$$

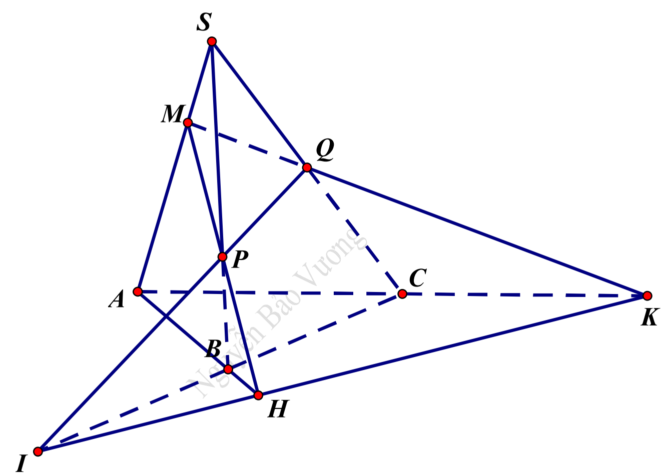
$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in SO$$

Vậy MP, NQ, SO đồng qui tại I.



Câu 60. Chóp $S.ABC$. $M \in SA$ sao cho $MA = 2MS$. $P \in SB$ để $PS = 2PB$. Q là trung điểm SC. Nối $MP \cap AB = H$, $MQ \cap AC = K$. Chứng minh PQ, BC, HK đồng quy.

Lời giải



+) Nối $PQ \cap BC = I$. Ta chứng minh I, H, K thẳng hàng.

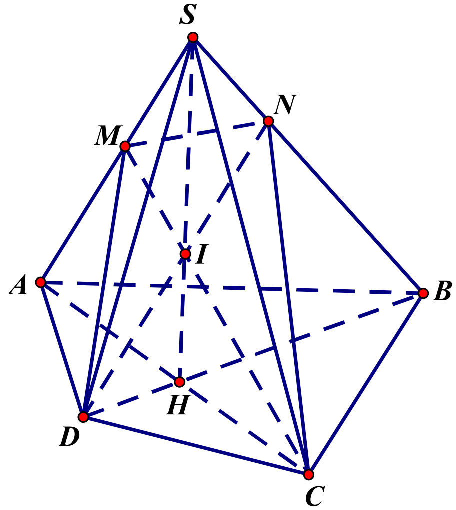
+) $I, H, K \in (MPQ)$ (1)

+) $I, H, K \in (ABC)$ (2)

+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow I, H, K$ thẳng hàng $\Rightarrow PQ, BC, HK$ đồng quy tại I.

Câu 61. Chóp $S.ABCD$. $AC \cap BD = H$. Mặt phẳng (P) chứa CD cắt SA, SB tại M, N. Chứng minh CM, DN, SH đồng quy.

Lời giải



Nhận xét: $(P)\equiv(CDMN)$

+) Nối $CM \cap DN = I$. Ta chứng minh S, H, I thẳng hàng.

+) $S, H, I \in (SAC)$ (1)

+) $S, H, I \in (SBD)$ (2)

+) Từ (1) và (2) $\Rightarrow S, H, I$ thẳng hàng $\Rightarrow CM, DN, SH$ đồng quy.

Nguyễn Bảo Vương