BÀI 13. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

- CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) đều song song với mặt phẳng (β).

B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đều song song với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (β).

C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt mặt phẳng (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Lời giải

Chọn A

Lý thuyết.

Câu 2. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Cho điểm M nằm ngoài mặt phẳng (α). Khi đó tồn tại duy nhất một đường thẳng a chứa M và song song với (α).

B. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Khi đó tồn tại duy nhất mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.

C. Cho điểm M nằm ngoài mặt phẳng (α). Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng (β) chứa điểm M và song song với (α).

D. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng (β) chứa a và song song với (α).

Lời giải

Chọn A

Cho điểm M nằm ngoài mặt phẳng (α). Khi đó có vô số đường thẳng chứa M và song song với (α). Các đường thẳng này cùng nằm trong mặt phẳng đi qua M và song song với (α). Do đó đáp án A là sai.

Câu 3. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Đường thẳng $d \subset (P)$ và $d' \subset (Q)$ thì $d // d'$.

B. Mọi đường thẳng đi qua điểm $A \in (P)$ và song song với (Q) đều nằm trong (P).

C. Nếu đường thẳng Δ cắt (P) thì Δ cũng cắt (Q).

D. Nếu đường thẳng $a \subset (Q)$ thì $a // (P)$.

Lời giải

Chọn A

Nếu (P) và (Q) song song với nhau và đường thẳng $d \subset (P)$, $d' \subset (Q)$ thì d, d' có thể chéo nhau. Nên khẳng định A là **sai**.

Câu 4. Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q); đường thẳng $a \subset (P); b \subset (Q)$. Tìm khẳng định **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $(P)//(Q)$ thì $a//b$.

B. Nếu $(P)//(Q)$ thì $b//(P)$.

C. Nếu $(P)//(Q)$ thì a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

D. Nếu $(P)//(Q)$ thì $a//(Q)$

Lời giải

Chọn A

Đáp án A sai vì khi cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q); đường thẳng $a \subset (P); b \subset (Q)$ thì a và b có thể chéo nhau

Câu 5. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Nếu hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng khác thì chúng song song với nhau.

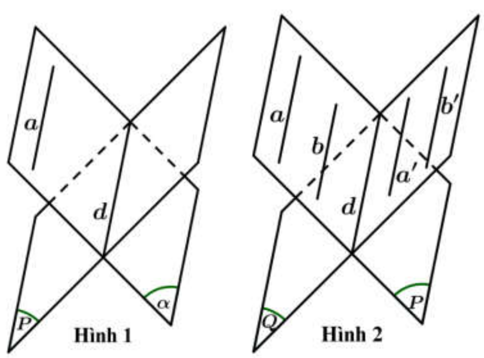
B. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đồng quy.

C. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì a song song với một đường thẳng nào đó nằm trong (P).

D. Cho hai đường thẳng a, b nằm trong mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a', b' nằm trong mặt phẳng (Q). Khi đó, nếu $a // a'$; $b // b'$ thì $(P)//(Q)$.

Lời giải

Chọn C



Đáp án A sai vì hai mặt phẳng đó có thể trùng nhau.

Đáp án B sai vì ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song hoặc trùng nhau (lý thuyết).

Đáp án C đúng. Ta chọn mặt phẳng (α) chứa a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến d thì $d \subset (P)$ và $a // d$ (Hình 1).

Đáp án D sai vì ta có thể lấy hai mặt phẳng (P) và (Q) thỏa a, b nằm trong mặt phẳng (P); a', b' nằm trong mặt phẳng (Q) với $a // b // a' // b'$ mà hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau (Hình 2).

Câu 6. Trong không gian, cho đường thẳng a và hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Nếu (P) và (Q) cùng cắt a thì (P) song song với (Q).

B. Nếu (P) và (Q) cùng song song với a thì (P) song song với (Q).

C. Nếu (P) song song với (Q) và a nằm trong mp (P) thì a song song với (Q).

D. Nếu (P) song song với (Q) và a cắt (P) thì a song song với (Q).

Lời giải

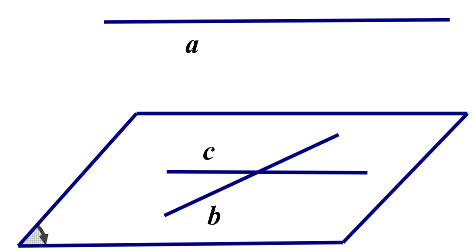
Chọn C.

Câu 7. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Gọi hai đường thẳng chéo nhau là a và b, c là đường thẳng song song với a và cắt b.

Gọi mặt phẳng $(\alpha) \equiv (b, c)$. Do $a // c \Rightarrow a // (\alpha)$

Giải sử mặt phẳng $(\beta) // (\alpha)$ mà $b \subset (\alpha) \Rightarrow b // (\beta)$

Mặt khác $a // (\alpha) \Rightarrow a // (\beta)$. Có vô số mặt phẳng $(\beta) // (\alpha)$

nên có vô số mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

A. $\text{mp}(AA'B'B)$ song song với $\text{mp}(CC'D'D)$.

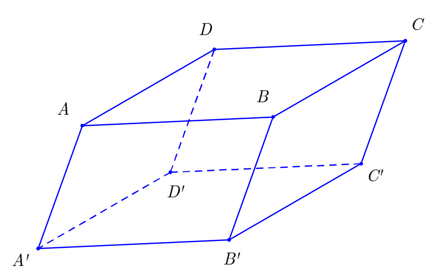
B. Diện tích hai mặt bên bất kì bằng nhau.

C. AA' song song với CC'.

D. Hai mặt phẳng đáy song song với nhau.

Lời giải

Chọn B



Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Nếu $a \subset mp(P)$ và $mp(P) // mp(Q)$ thì $a // mp(Q)$. (I)

- Nếu $a \subset mp(P)$, $b \subset mp(Q)$ và $mp(P) // mp(Q)$ thì $a // b$. (II)

- Nếu $a // mp(P)$, $a // mp(Q)$ và $mp(P) \cap mp(Q) = c$ thì $c // a$. (III)

A. Chỉ (I). **B.** (I) và (III).

C. (I) và (II). **D.** Cả (I), (II) và (III).

Lời giải

Câu hỏi lý thuyết.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề **sai** là

A. Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

B. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

D. Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.

Lời giải

Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau có thể trùng nhau.

Câu 11. Trong không gian cho 2 mặt phẳng (*P*) và (*Q*) song song với nhau. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $d \subset (P)$ và $d' \subset (Q)$ thì $d // d'$.

B. Mọi đường thẳng đi qua điểm $A \in (P)$ và song song với (*Q*) đều nằm trong (*Q*).

C. Nếu đường thẳng *a* nằm trong (*Q*) thì *a* // (*P*).

D. Nếu đường thẳng Δ cắt (*P*) thì Δ cắt (*Q*).

Lời giải

Đáp án A sai vì *d* và *d'* có thể chéo nhau.

Câu 12. Cho đường thẳng $a \subset (\alpha)$ và đường thẳng $b \subset (\beta)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow a//(\beta)$ và $b//(\alpha)$.

B. $a//b \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$.

C. *a* và *b* chéo nhau.

D. $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow a//b$.

Lời giải

Chọn A

- Do $(\alpha)//(\beta)$ và $a \subset (\alpha)$ nên $a//(\beta)$.

- Tương tự, do $(\alpha)//(\beta)$ và $b \subset (\beta)$ nên $b//(\alpha)$.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(ACD') // (A'C'B)$.

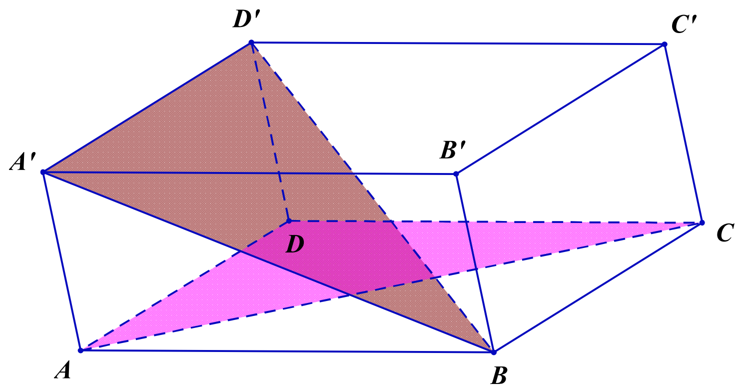
B. $(ABB'A') // (CDD'C')$.

C. $(BDA') // (D'B'C)$.

D. $(BA'D') // (ADC)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(BA'D') \equiv (BCA'D')$ và $(ADC) \equiv (ABCD)$.

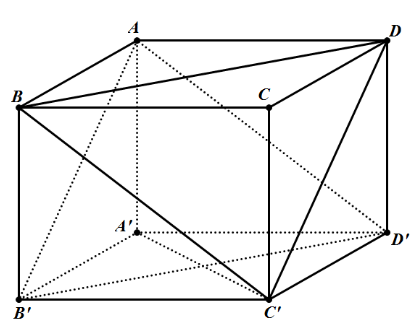
Mà $(BCA'D') \cap (ABCD) = BC$, suy ra $(BA'D')$ // (ADC) **sai**.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (BCA'). **B.** $(BC'D)$. **C.** $(A'C'C)$. **D.** (BDA').

Lời giải

Chọn B

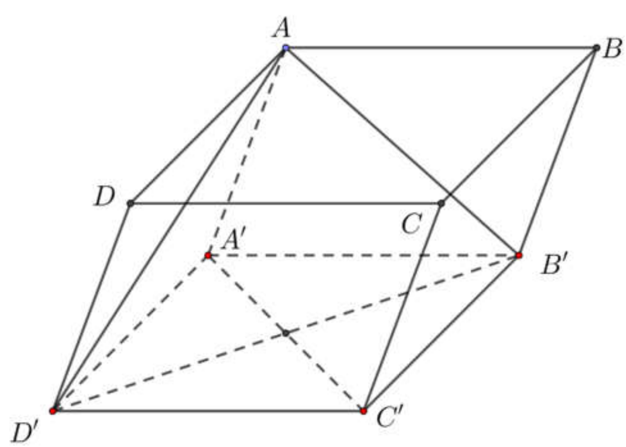


Do $ADC'B'$ là hình bình hành nên $AB'//DC'$, và $ABC'D'$ là hình bình hành nên $AD'//BC'$ nên $(ABD')//(BC'D)$.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(BA'C')$. **B.** $(C'BD)$. **C.** (BDA'). **D.** (ACD').

Lời giải



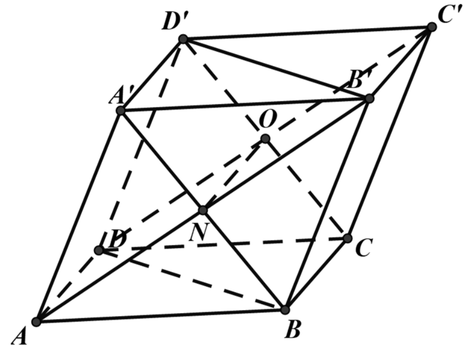
Ta có $B'D'//BD$; $AD'//C'B \Rightarrow (AB'D')//(C'BD)$.

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD'. Khẳng định nào **sai**?

A. $BB'DC$ là một tứ giác đều.
B. $(BA'D')$ và (ADC') cắt nhau.
C. $A'B'CD$ là hình bình hành.
D. $(AA'B'B)//(DD'C'C)$.

Lời giải

Chọn A



Câu A, C đúng do tính chất của hình hộp.

$(BA'D') \equiv (BA'D'C);(ADC') \equiv (ADC'B')$

$(BA'D') \cap (ADC') = ON$. Câu B đúng.

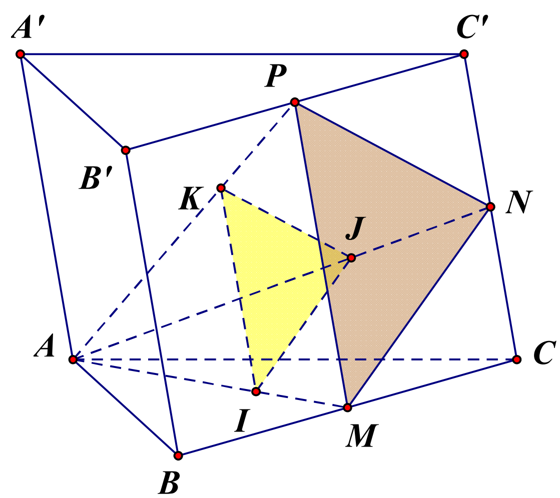
Do $B' \notin (BDC)$ nên $BB'DC$ không phải là tứ giác.

Câu 17. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACC', $AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK)?

A. $(BC'A)$.
B. $(AA'B)$.
C. $(BB'C)$.
D. $(CC'A)$.

Lời giải

Chọn C



Do I, J, K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACC' nên $\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3}$ nên $IJ//MN$.

$\Rightarrow IJ//(BCC'B')$

Tương tự $IK//(BCC'B')$

$\Rightarrow (IJK)//(BCC'B')$

Hay $(IJK)//(BB'C)$.

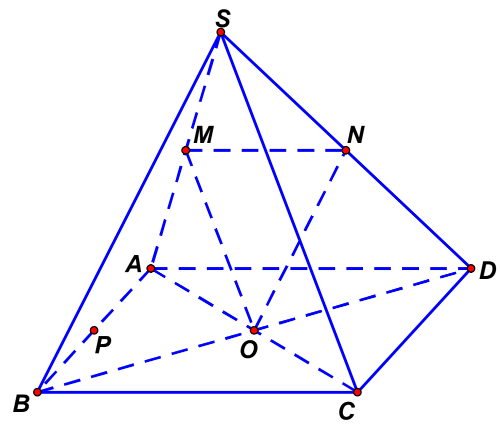
Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?

A. $(NMP)//(SBD)$. **B.** (NOM) cắt (OPM).

C. $(MON)//(SBC)$. **D.** $(PON)\cap(MNP)=NP$.

Lời giải

Chọn C



Xét hai mặt phẳng (MON) và (SBC).

Ta có: $OM // SC$ và $ON // SB$.

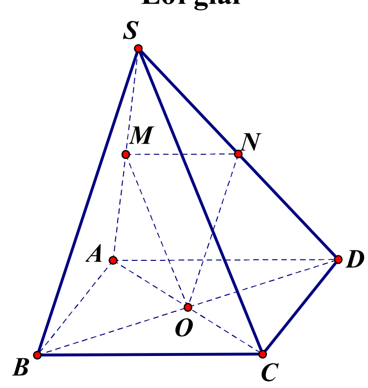
Mà $BS\cap SC=C$ và $OM\cap ON=O$.

Do đó $(MON)//(SBC)$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SA,SD. Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SBC). **B.** (SCD). **C.** $(ABCD)$. **D.** (SAB).

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm AC,BD.

Do đó: $MO//SC\Rightarrow MO//(SBC)$

Và $NO//SB\Rightarrow NO//(SBC)$

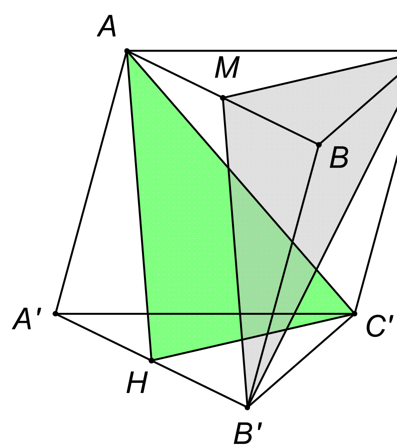
Suy ra: $(OMN)//(SBC)$.

Câu 20. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (AHC') song song với đường thẳng nào sau đây?

A. BA'. **B.** BB'. **C.** BC. **D.** CB'.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \,//\, AH \Rightarrow MB' \,//\, (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \Rightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\Rightarrow MC \,//\, HC' \Rightarrow MC \,//\, (AHC')$. (2)

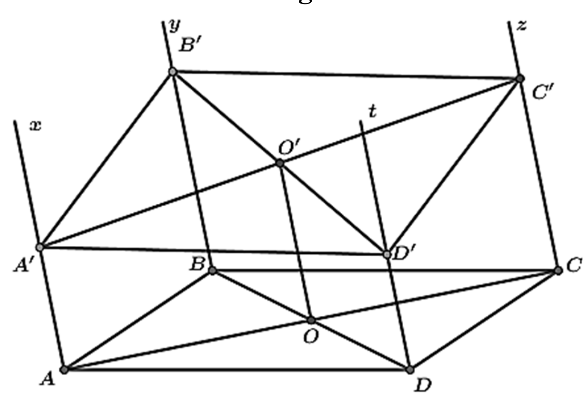
Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \,//\, (AHC') \Rightarrow B'C \,//\, (AHC')$.

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tương ứng tại A', B', C', D' sao cho $AA' = 3$, $BB' = 5$, $CC' = 4$. Tính DD'.

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

Lời giải



Do (P) cắt mặt phẳng (Ax, By) theo giao tuyến $A'B'$; cắt mặt phẳng (Cz, Dt) theo giao tuyến $C'D'$, mà hai mặt phẳng (Ax, By) và (Cz, Dt) song song nên $A'B' // C'D'$.

Tương tự có $A'D' // B'C'$ nên $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Gọi O, O' lần lượt là tâm $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Dễ dàng có OO' là đường trung bình của hai hình thang $AA'C'C$ và $BB'D'D$ nên $OO' = \dfrac{AA' + CC'}{2} = \dfrac{BB' + DD'}{2}$.

Từ đó ta có $DD' = 2$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy AD và BC. Gọi M là trọng tâm tam giác SAD, N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $NA=\frac{NC}{2}$, P là điểm thuộc đoạn CD sao cho $PD=\frac{PC}{2}$. Khi đó, mệnh đề nào sau đây đúng?

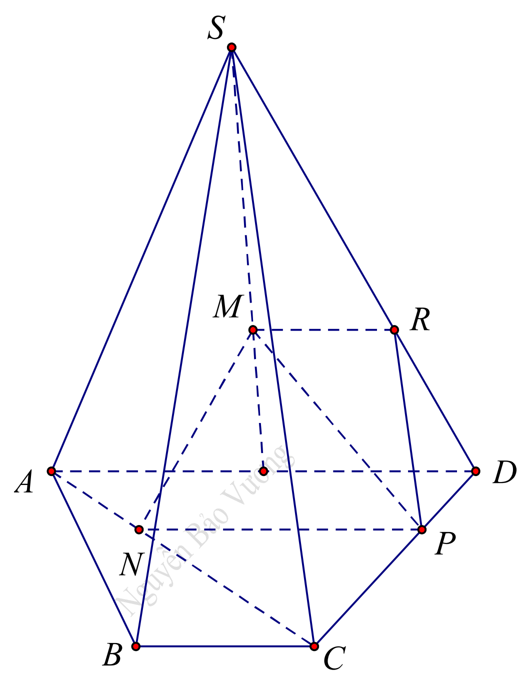
A. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (MNP) là một đường thẳng song song với BC.

B. MN cắt (SBC).

C. $(MNP)//(SAD)$.

D. $MN//(SBC)$ và $(MNP)//(SBC)$

Lời giải



Ta có $\begin{cases} NA=\frac{NC}{2} \\ PD=\frac{PC}{2} \end{cases} \Rightarrow NP//AD//BC\ (1)$.

$M\in(SAD)\cap(MNP)$. Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MNP) là đường thẳng d qua M song song với BC và MN.

Gọi R là giao điểm của d với SD.

Dễ thấy: $\frac{DR}{DS}=\frac{DP}{DC}=\frac{1}{3}\Rightarrow PR//\text{SC}\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $(MNP)//(SBC)$ và $MN//(SBC)$.

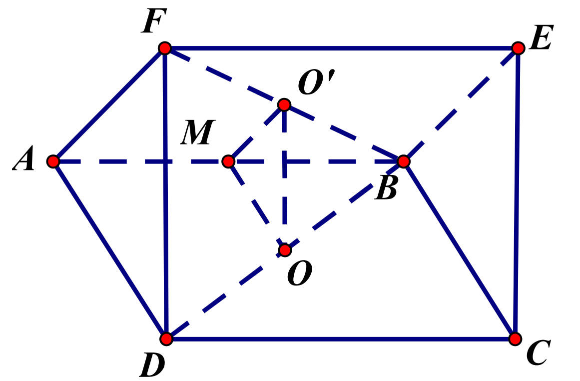
Câu 23. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có tâm lần lượt là O và O', không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M là trung điểm AB, xét các khẳng định

$(I):(ADF)//(BCE)$; $(II):(MOO')//(ADF)$; $(III):(MOO')//(BCE)$; $(IV):(ACE)//(BDF)$.

Những khẳng định nào đúng?

A. (I). **B.** $(I),(II)$. **C.** $(I),(II),(III)$. **D.** $(I),(II),(III),(IV)$.

Lời giải



Xét hai mặt phẳng (ADF) và (BCE) có : $\begin{cases} AD // BC \\ AF // BE \end{cases}$ nên $(I):(ADF)//(BCE)$ là đúng.

Xét hai mặt phẳng (ADF) và (MOO') có : $\begin{cases} AD // MO \\ AF // MO' \end{cases}$ nên $(II):(MOO')//(ADF)$ là đúng.

Vì $(I):(ADF)//(BCE)$ đúng và $(II):(MOO')//(ADF)$ đúng nên theo tính chất bắc cầu ta có $(III):(MOO')//(BCE)$ đúng.

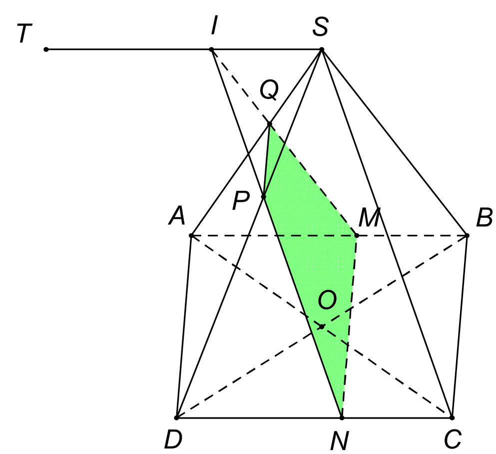
Xét mặt phẳng $(ABCD)$ có $AC \cap BD = O$ nên hai mặt phẳng (ACE) và (BDF) có điểm O chung vì vậy không song song nên $(IV):(ACE)//(BDF)$ sai.

Câu 24. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBC). Gọi N, P, Q lần lượt là giao của mặt phẳng (α) với các đường thẳng CD, SD, SA. Tập hợp các giao điểm I của hai đường thẳng MQ và NP là

A. Đoạn thẳng song song với AB.
B. Tập hợp rỗng.
C. Đường thẳng song song với AB.
D. Nửa đường thẳng.

Lời giải

Chọn A

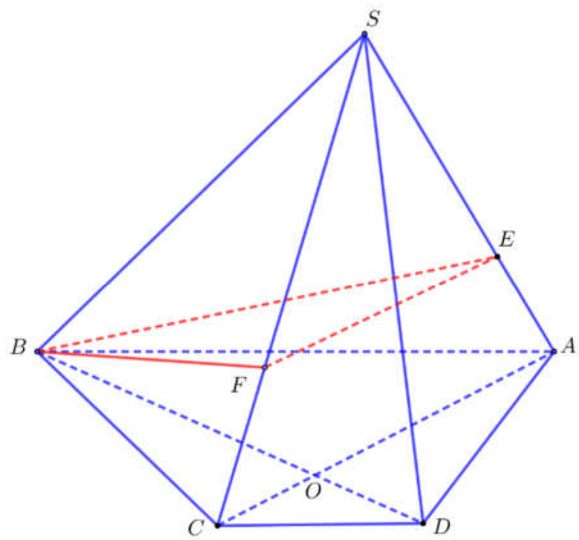


Lần lượt lấy các điểm N, P, Q thuộc các cạnh CD, SD, SA thỏa $MN // BC$, $NP // SC$, $PQ // AD$. Suy ra $(\alpha) \equiv (MNPQ)$ và $(\alpha) // (SBC)$.

Vì $I = MQ \cap NP \Rightarrow \begin{cases} I, S \in (SCD) \\ I, S \in (SAB) \end{cases} \Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Khi $\begin{cases} M \equiv B \Rightarrow I \equiv S \\ M \equiv A \Rightarrow I \equiv T \end{cases}$ với T là điểm thỏa mãn tứ giác $ABST$ là hình bình hành.

Vậy quỹ tích cần tìm là đoạn thẳng song song với AB.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB // CD$ và $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Lấy E thuộc cạnh SA, F thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ (tham khảo hình vẽ dưới đây).

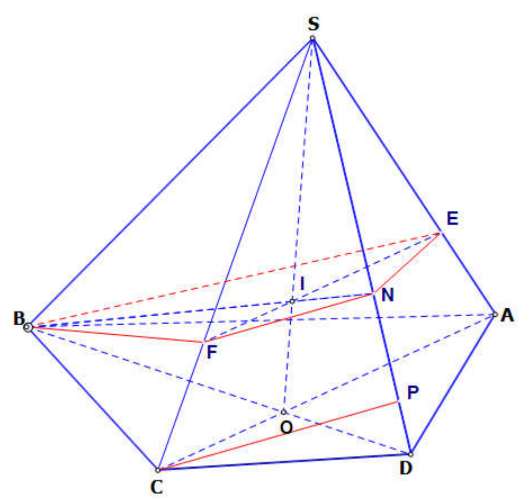


Gọi (α) là mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng (BEF). Gọi P là giao điểm của SD với (α). Tính tỉ số $\frac{SP}{SD}$.

A. $\frac{SP}{SD} = \frac{3}{7}$. **B.** $\frac{SP}{SD} = \frac{7}{3}$. **C.** $\frac{SP}{SD} = \frac{7}{6}$. **D.** $\frac{SP}{SD} = \frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SC}=\frac{2}{3}$ nên đường thẳng $EF\ //\ AC$. Mà $EF\subset(BEF)$, $AC\not\subset(BEF)$ nên AC song song với mặt phẳng (BEF).

Vì AC qua O và song song với mặt phẳng (BEF) nên $AC\subset(\alpha)$.

Trong (SAC), gọi $I=SO\cap EF$, trong (SBD), gọi $N=BI\cap SD$. Suy ra N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (BEF).

Hai mặt phẳng song song (BEF) và (α) bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba là (SCD) theo hai giao tuyến lần lượt là FN và Ct nên hai giao tuyến đó song song nhau, tức là $Ct\ //\ FN$.

Trong (SCD), Ct cắt SD tại P. Khi đó P là giao điểm của SD với (α).

Trong hình thang $ABCD$, do $AB//CD$ và $AB=2CD$ nên $\frac{BO}{OD}=\frac{AB}{CD}=2\Rightarrow\frac{BO}{BD}=\frac{2}{3}$.

Trong tam giác SAC, có $EF\ //\ AC$ nên $\frac{SE}{SA}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{IS}{IO}=2$.

Xét tam giác SOD với cát tuyến NIB, ta có: $\frac{NS}{ND}.\frac{BD}{BO}.\frac{IO}{IS}=1\Rightarrow\frac{NS}{ND}=\frac{BO}{BD}.\frac{IS}{IO}=\frac{2}{3}.2=\frac{4}{3}$.

Suy ra: $\frac{SN}{SD}=\frac{4}{7}$ (1).

Lại có: $\frac{SN}{SP}=\frac{SF}{SC}=\frac{2}{3}$ (Do $CP\ //\ FN$) (2).

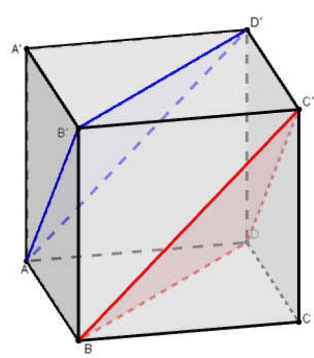
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{SP}{SD}=\frac{6}{7}$.

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (P) chứa BD và song song với mặt phẳng $(AB'D')$ cắt hình lập phương theo thiết diện là.

A. Một tam giác đều. **B.** Một tam giác thường.
C. Một hình chữ nhật. **D.** Một hình bình hành.

Lời giải

Chọn A



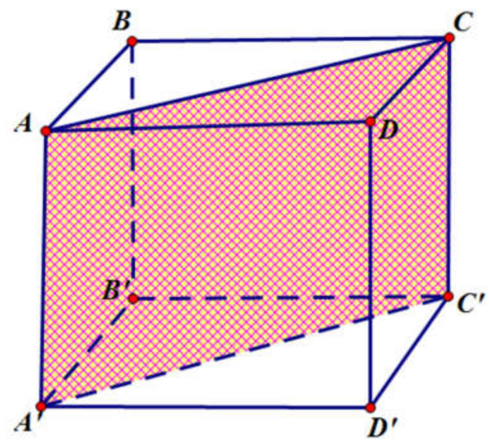
Do BC' song song với AD', DC' song song với AB' nên thiết diện cần tìm là tam giác đều BDC'

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Mặt phẳng (α) qua AC và song song với BB'. Tính chu vi thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $2\left(1+\sqrt{2}\right)a$. **B.** a^3. **C.** $a^2\sqrt{2}$. **D.** $\left(1+\sqrt{2}\right)a$

Lời giải

Chọn A



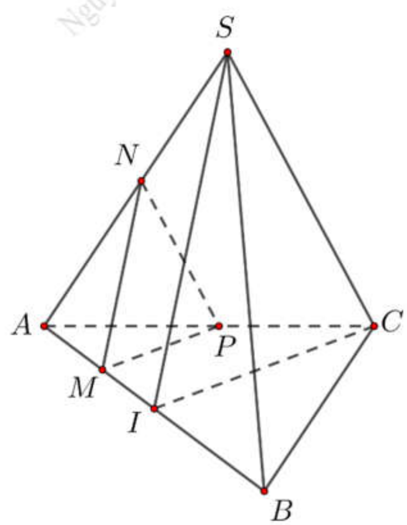
Ta dễ dàng dựng được thiết diện là tứ $ACC'A'$. Tứ giác $ACC'A'$ là hình chữ nhật có chiều dài là $AC = a\sqrt{2}$ và chiều rộng $AA' = a$.

Khi đó chu vi thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là $P = 2.(AC + AA') = 2(1+\sqrt{2})a$.

Câu 27. Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$ là.

A. hình bình hành. **B.** tam giác cân tại M. **C.** tam giác đều. **D.** hình thoi.

Lời giải



Qua M vẽ $MP // IC$, $P \in AC$, $MN // SI$, $N \in SA$.

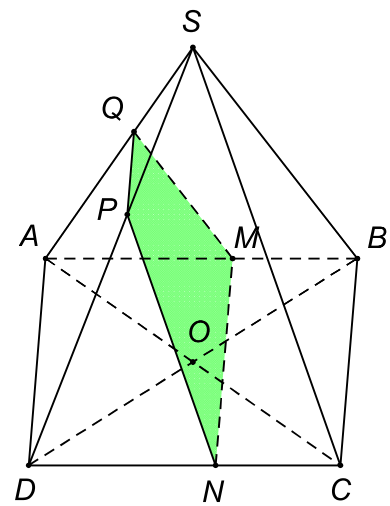
Ta có $\dfrac{MN}{SI} = \dfrac{MP}{IC}$ và $SI = IC$ nên suy ra $MN = MP$ thiết diện là tam giác cân tại M.

Câu 28. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBC). Thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình thang. **D.** Hình vuông.

Lời giải

Chọn C



Lần lượt lấy các điểm N, P, Q thuộc các cạnh CD, SD, SA thỏa $MN // BC$, $NP // SC$, $PQ // AD$. Suy ra $(\alpha) \equiv (MNPQ)$ và $(\alpha) // (SBC)$.

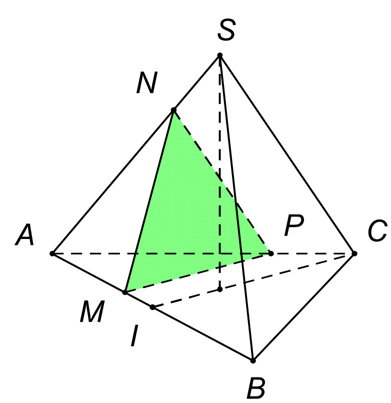
Theo cách dựng trên thì thiết diện là hình thang.

Câu 29. Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Tính chu vi của thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$, biết $AM = x$.

A. $2x\left(1+\sqrt{3}\right)$. **B.** $3x\left(1+\sqrt{3}\right)$. **C.** Không tính được. **D.** $x\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A



Để ý hai tam giác MNP và SIC đồng dạng với tỉ số $\frac{AM}{AI} = \frac{2x}{a}$

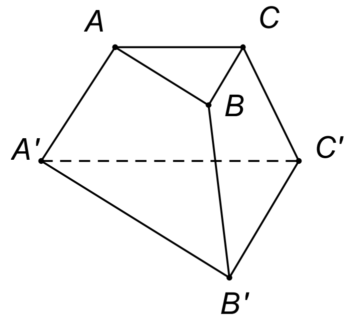
$$\Rightarrow \frac{C_{MNP}}{C_{SIC}} = \frac{2x}{a} \Leftrightarrow C_{MNP} = \frac{2x}{a}(SI + IC + SC) = \frac{2x}{a}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + a\right) = 2x\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Câu 30. Cho hình chóp cụt tam giác $ABC.A'B'C'$ có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại A và A' và có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$. Khi đó tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C



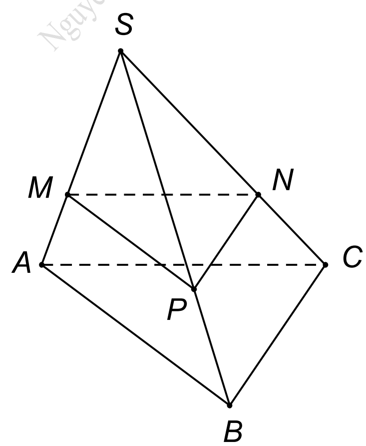
Hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có hai mặt đáy là hai mặt phẳng song song nên tam giác ABC đồng dạng tam giác $A'B'C'$ suy ra $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}.AB.AC}{\frac{1}{2}.A'B'.A'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}.\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB=AC=4$, $\widehat{BAC}=30°$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM=2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** $\dfrac{14}{9}$. **C.** $\dfrac{25}{9}$. **D.** $\dfrac{16}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}.4.4.\sin 30°=4$.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SB, SC.

Vì $(P)//(ABC)$ nên theoo định lí Talet, ta có $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{SP}{SC}=\dfrac{2}{3}$.

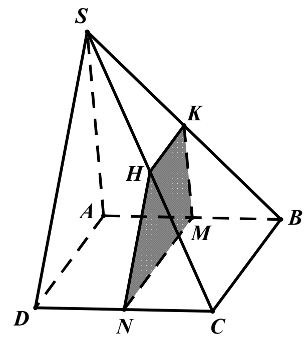
Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k=\dfrac{2}{3}$. Vậy $S_{\Delta MNP}=k^2.S_{\Delta ABC}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2.4=\dfrac{16}{9}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD).Thiết diện là hình gì?

A. Hình thang **B.** Hình bình hành **C.** Tứ giác **D.** Tam giác

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} M \in (SAB)\cap(\alpha) \\ (SAB)\cap(SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow (SAB)\cap(\alpha) = MK \parallel SA, K \in SB$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SCD)\cap(\alpha) \\ (\alpha) \parallel (SAD) \\ (SCD)\cap(SAD) = SD \end{cases} \Rightarrow (SCD)\cap(\alpha) = NH \parallel SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha)\cap(SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

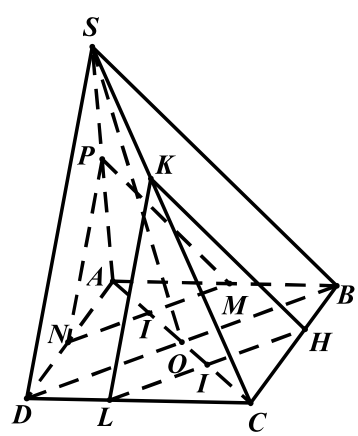
Ba mặt phẳng $(ABCD),(SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN,HK,BC, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel HK$. Vậy thiết diện là một hình thang.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O có $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC và $AI = x$ $(0 < x < a)$. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là hình gì?

A. Hình bình hành **B.** Tam giác **C.** Tứ giác **D.** Hình thang

Lời giải

Chọn B



Trường hợp 1. Xét I thuộc đoạn OA

Ta có $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN \parallel BD, I \in MN$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAD) \cap (SBD) = SD \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = NP \parallel SD, P \in SN$.

Thiết diện là tam giác MNP.

Do $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \Rightarrow MP \parallel SB \\ (SAB) \cap (\alpha) = MP \end{cases}$. Hai tam giác MNP và BDS có các cặp cạnh tương ứng song song nên chúng đồng dạng, mà BDS đều nên tam giác MNP đều.

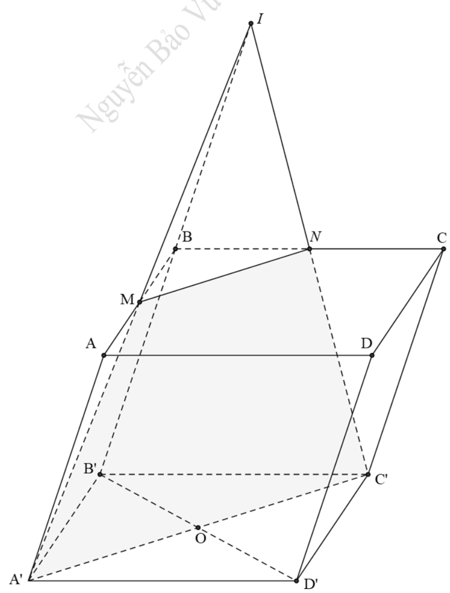
Trường hợp 2. Điểm I thuộc đoạn OC, tương tự trường hợp 1 ta được thiết diện là tam giác đều HKL như (hv).

Câu 34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(MA'C')$ cắt hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo thiết diện là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình ngũ giác. **C.** Hình lục giác. **D.** Hình tam giác.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, AM cắt BB' tại I

Do $MB//A'B'$; $MB = \frac{1}{2}A'B'$ nên B là trung điểm $B'I$ và M là trung điểm của IA'.

Gọi N là giao điểm của BC và $C'I$.

Do $BN//B'C$ và B là trung điểm $B'I$ nên N là trung điểm của $C'I$.

Suy ra: tam giác $IA'C'$ có MN là đường trung bình.

Ta có mặt phẳng $(MA'C')$ cắt hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo thiết diện là tứ giác $A'MNC'$ có $MN//A'C'$

Vậy thiết diện là hình thang $A'MNC'$.

Cách khác:

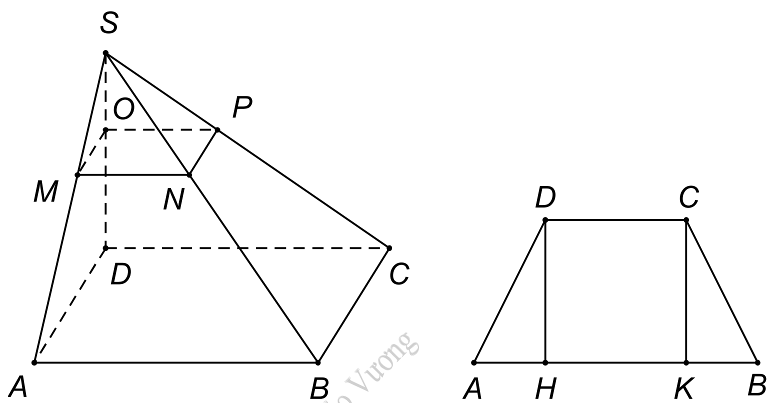
Ta có: $\begin{cases}(ABCD)//(A'B'C'D')\\(A'C'M)\cap(A'B'C'D')=A'C'\\(A'C'M)\cap(ABCD)=Mx\end{cases} \Rightarrow Mx//A'C'$, M là trung điểm của AB nên Mx cắt BC tại trung điểm N .Thiết diện là tứ giác $A'C'NM$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=2$, hai đáy $AB=6$, $CD=4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases}AH=BK;\ CD=HK\\AH+HK+BK=AB\end{cases} \Rightarrow BK=1$.

Tam giác BCK vuông tại K, có $CK=\sqrt{BC^2-BK^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

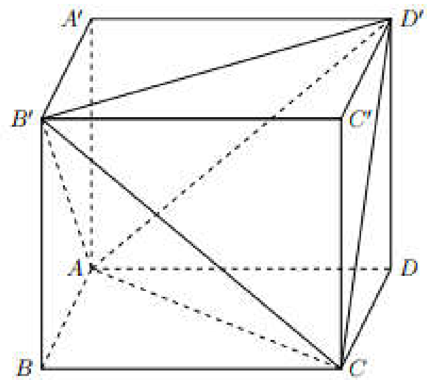
Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD}=CK.\frac{AB+CD}{2}=\sqrt{3}.\frac{4+6}{2}=5\sqrt{3}$.

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD.

Vì (P) // $(ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}=\frac{PQ}{CD}=\frac{QM}{AD}=\frac{1}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ}=k^2.S_{ABCD}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

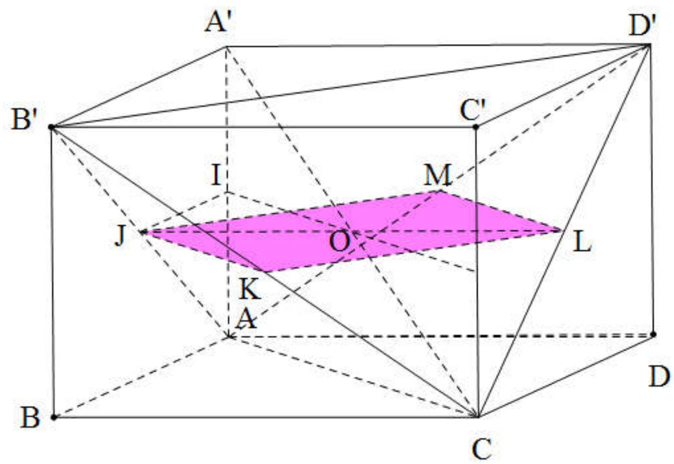
Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Xét tứ diện $AB'CD'$. Cắt tứ diện đó bằng mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mặt phẳng (ABC). Tính diện tích của thiết diện thu được.



A. $\frac{a^2}{3}$. **B.** $\frac{2a^2}{3}$. **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** $\frac{3a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Cách xác định mặt phẳng thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mặt phẳng (ABC) với tứ diện $AB'CD'$:

Trong $(ACC'A')$ kẻ đường thẳng qua O và song song với AC, cắt AA' tại trung điểm I

Trong $(ABB'A')$ kẻ đường thẳng quan I song song với AB, cắt AB' tại trung điểm J.

Trong $(B'AC)$ kẻ đường thẳng qua J song song với AC, cắt $B'C$ tại trung điểm K.

Trong $(B'CD')$ kẻ đường thẳng qua K song song với $B'D'$, cắt $D'C$ tại trung điểm L.

Trong $(D'AC)$ kẻ đường thẳng qua L song song với AC, cắt AD' tại trung điểm M.

Mặt phẳng vừa tạo thành song song với (ABC) và tạo với tứ diện $AB'CD'$ thiết diện là hình bình hành $MJKL$.

Ta có

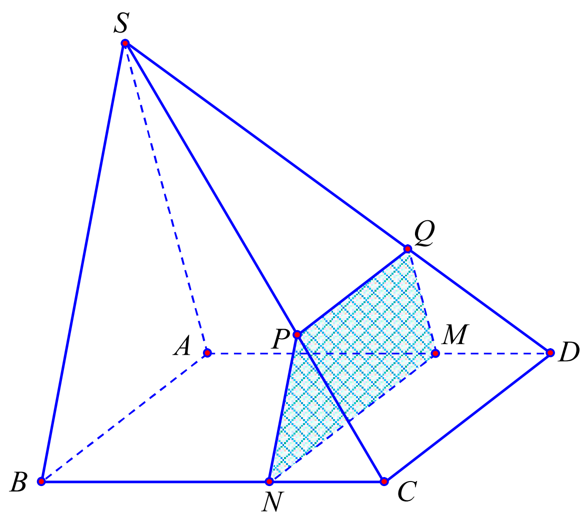
$\begin{cases} JM // B'D' \\ ML // A'C' \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $MJKL$ là hình chữ nhật.

$$S_{MJKL} = JM.ML = \frac{1}{2}B'D'.\frac{1}{2}A'C' = \frac{1}{4}.\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A, $SA = a\sqrt{3}$, $SB = 2a$. Điểm M nằm trên đoạn AD sao cho $AM = 2MD$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{18}$. **B.** $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Ta có:

❍ $\begin{cases}(P)//(SAB)\\ M\in AD, M\in(P)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(P)\cap(ABCD)=MN\\ (P)\cap(SCD)=PQ\end{cases}$ và $MN//PQ//AB$ (1)

❍ $\begin{cases}(P)//(SAB)\\ M\in AD, M\in(P)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(P)\cap(SAD)=MQ\\ (P)\cap(SBC)=NP\end{cases}$ và $\begin{cases}MQ//SA\\ NP//SB\end{cases}$

Mà tam giác SAB vuông tại A nên $SA\perp AB \Rightarrow MN\perp MQ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang vuông tại M và Q.

Mặt khác

❍ $MQ//SA \Rightarrow \dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{DM}{DA}=\dfrac{DQ}{DS} \Rightarrow MQ=\dfrac{1}{3}SA$ và $\dfrac{DQ}{DS}=\dfrac{1}{3}$.

❍ $PQ//CD \Rightarrow \dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{SQ}{SD} \Rightarrow PQ=\dfrac{2}{3}AB$, với $AB=\sqrt{SB^2-SA^2}=a$

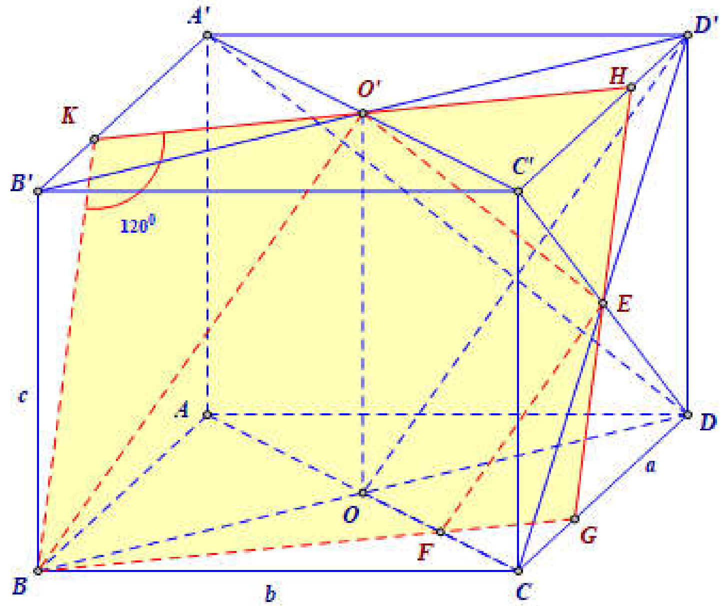
Khi đó $S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}MQ.(PQ+MN) \Leftrightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}\dfrac{SA}{3}.\left(\dfrac{2AB}{3}+AB\right) \Leftrightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{18}$.

Câu 38. Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$ có $AB=a, BC=b, CC'=c$. Gọi O,O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O' và song song với hai đường thẳng $A'D$ và $D'O$. Dựng thiết diện của hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (α). Tìm điều kiện của a,b,c sao cho thiết diện là hình thoi có một góc bằng 60^0.

A. $a=b=c$. **B.** $a=b=\dfrac{1}{3}c$. **C.** $a=c=\dfrac{1}{3}b$. **D.** $b=c=\dfrac{1}{3}a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E là tâm hình chữ nhật $DCC'D'$, F là trung điểm OC.

Trên $(ABCD)$, gọi $G = BF \cap CD$.

Trên $(CDD'C')$, gọi $H = GE \cap C'D'$.

Trên $(A'B'C'D')$, gọi $G = BF \cap CD$.

Khi đó, $\begin{cases} D'O // (BKHG) \\ A'D // (BKHG) \end{cases}$ nên thiết diện tạo thành là tứ giác $BKHG$.

Theo đề $BKHG$ là hình thoi có một góc 60^0 nên ta có:

$\begin{cases} HK = HG \\ \widehat{BKH} = 120^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A'B'C'D' = CDD'C' \Rightarrow b = c \\ \widehat{BKH} = 120^0 \end{cases}$.

Dễ thấy: $CG = \dfrac{a}{3} \Rightarrow BG^2 = BC^2 + CG^2 = b^2 + \dfrac{a^2}{9}$.

Trong $\Delta BKO'$ có: $BO'^2 = KB^2 + KO'^2 - 2KB.KO'.\cos 120^0$

$= BG^2 + \dfrac{1}{4}BG^2 - 2BG.\dfrac{1}{2}BG.\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{4}BG^2 = \dfrac{7}{4}\left(b^2 + \dfrac{a^2}{9}\right)$.

Trong $\Delta BOO'$ có: $BO'^2 = BO^2 + OO'^2 \Leftrightarrow \dfrac{7}{4}\left(b^2 + \dfrac{a^2}{9}\right) = \dfrac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right) + c^2$

$\xleftrightarrow{b=c} \dfrac{7}{4}\left(b^2 + \dfrac{a^2}{9}\right) = \dfrac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right) + b^2 \xleftrightarrow{a>0,\, b>0} b = \dfrac{a}{3}$.

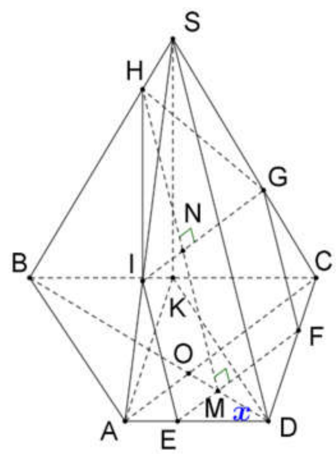
Vậy $b = c = \dfrac{a}{3}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$, với $a > 0$. Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết hai đường thẳng SD và AC vuông góc nhau, M là điểm thuộc đoạn OD (M khác O và D), $MD = x$, $x > 0$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với hai đường thẳng SD và AC, cắt khối chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện đó là lớn nhất?

A. $x=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $x=a\sqrt{3}$. **C.** $x=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $x=a$.

Lời giải

Chọn A



Trong $\text{mp}(SBD)$ kẻ đường thẳng qua M song song với SD, cắt cạnh SB tại H.

Trong $\text{mp}(ABCD)$ kẻ đường thẳng qua M song song với AC, cắt các cạnh DA và DC lần lượt tại E và F.

Trong $\text{mp}(SDA)$ kẻ đường thẳng qua E song song với SD, cắt cạnh SA tại I.

Trong $\text{mp}(SDC)$ kẻ đường thẳng qua F song song với SD, cắt cạnh SC tại G.

Khi đó thiết diện của khối chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $EFGHI$.

Dễ thấy $ABCD$ là nửa lục giác đều có tâm là trung điểm K của BC. Do đó $ADCK$ và $ABND$ là hình thoi nên $AC\perp KD$. Mặt khác $AC\perp SD$ nên $AC\perp(SKD)\Rightarrow AC\perp SK$.

Lại có $SK\perp BC$ (vì $\triangle SBC$ đều), suy ra $SK\perp(ABCD)\Rightarrow SK\perp KD$.

Ta có IG là giao tuyến của (α) với (SAC), mà $AC\parallel(\alpha)$, suy ra $IG\parallel AC$.

Mặt khác $HM\parallel SD$ và $SD\perp AC$, suy ra $HM\perp IG$ và $HM\perp EF$ và $IGFE$ là hình chữ nhật.

Diện tích thiết diện $EFGHI$ bằng $s=S_{EFGI}+S_{HGI}=IG.NM+\dfrac{1}{2}IG.HN$.

Ta có $AK=KD=AD=a$ nên $\triangle AKD$ đều.

Mà $BD\perp AK, AC\perp KD$ nên O là trọng tâm tam giác ADK. Suy ra $OD=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$AC=BD=a\sqrt{3}$ ($\triangle BAC$ vuông tại A, do $KA=KB=KC$).

$SD=\sqrt{SK^2+KD^2}=2a$.

Ta có $\frac{DM}{DO}=\frac{EF}{AC}\Rightarrow EF=\frac{DM}{DO}.AC=\frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}.a\sqrt{3}=3x$.

$\frac{GF}{SD}=\frac{CF}{CD}=\frac{OM}{OD}\Rightarrow GF=\frac{OM}{OD}.SD=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}-x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}.2a=2a-2\sqrt{3}x$.

$\frac{HM}{SD}=\frac{BM}{BD}\Rightarrow HM=\frac{BM}{BD}.SD=\frac{a\sqrt{3}-x}{a\sqrt{3}}.2a=\frac{6a-2x\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $HN=HM-NM=HN-GF=\frac{6a-2x\sqrt{3}}{3}-\left(2a-2\sqrt{3}x\right)=\frac{4x\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $s=\frac{1}{2}.\frac{4x\sqrt{3}}{3}.3x+\left(2a-2\sqrt{3}x\right).3x=-4\sqrt{3}x^2+6ax=-\sqrt{3}\left(2x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $s\le\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.