BÀI 31. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

- CHƯƠNG 9. ĐẠO HÀM
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

a) Vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng

b) Cường độ tức thời

Nhận xét. Nhiều bài toán trong Vật lí, Hoá học, Sinh học,... đưa đến Việc tìm giới hạn dạng $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ ở đó $y=f(x)$ là một hàm số đã cho.

Giới hạn trên dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm đạo hàm.

2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu bởi $f'\left(x_0\right)$ (hoặc $y'\left(x_0\right)$), tức là $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$.

Chú ý. Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x)-f\left(x_0\right)$.

2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ với $x \in (a;b), x \neq x_0$.

3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)=x^2+2x$ tại điểm $x_0=1$.

Giải

Ta có: $f(x)-f(1)=x^2+2x-3=x^2-1+2x-2=(x-1)(x+3)$.

Với $x \neq 1, \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3$.

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x \to 1}(x+3)=4$.

Vậy $f'(1)=4$.

Trong thực hành, ta thường trình bày ngắn gọn như sau:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{\left(x^2+2x\right)-3}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x \to 1}(x+3)=4 \end{aligned}$$

Chú ý. Đặt $h=x-x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0=1$ có thể tính như sau:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[(1+h)^2+2(1+h)\right]-\left(1^2+2\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(h^2+4h+3\right)-3}{h} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4.$$

Chú ý: $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y'=f'(x)$.

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y=cx^2$, với c là hằng số.

Giải

Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{cx^2-cx_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{c(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0}c(x+x_0) = c(x_0+x_0) = 2cx_0.$$

Vậy hàm số $y=cx^2$ (với c là hằng số) có đạo hàm là hàm số $y'=2cx$.

Lưu ý: $(c)'=0; (x)'=1; \left(cx^2\right)'=2cx$

Chú ý. Nếu phương trình chuyển động của vật là $s=f(t)$ thì $v(t)=f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

Ví dụ 3. Giải bài toán trong tình huống mở đầu (bỏ qua sức cản của không khí và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Giải

Phương trình chuyển động rơi tự do của quả bóng là $s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc rơi tự do, lấy $g=9,8\,m/s^2$). Do vậy, vận tốc của quả bóng tại thời điểm t là $v(t)=f'(t)=gt=9,8t$.

Mặt khác, vì chiều cao của toà nhà là $461,3m$ nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1, với $f(t_1)=461,3$. Từ đó, ta có: $4,9t_1^2=461,3 \Leftrightarrow t_1=\sqrt{\frac{461,3}{4,9}}$ (giây).

Vậy vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là $v(t_1)=9,8t_1=9,8\cdot\sqrt{\frac{461,3}{4,9}}\approx 95,1(m/s)$.

4. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Chú ý: Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$, với $x_1\neq x_2$, là $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $P(x_0;f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k=f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

Nhận xét. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $P(x_0;f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.

Ví dụ 4. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y=x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$.

Giải

Ta có $\left(x^2\right)' = 2x$ nên $y'(-1) = 2\cdot(-1) = -2$. Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $k = -2$.

b) Phương trình tiếp tuyến

Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm, ta rút ra kết luận sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P\left(x_0; y_0\right)$ là $y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$, trong đó $y_0 = f\left(x_0\right)$.

Ví dụ 5. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): y = 3x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Giải

Từ Ví dụ 2, ta có $y' = 6x$. Do đó, hệ số góc của tiếp tuyến là $k = f'(1) = 6$. Ngoài ra, ta có $f(1) = 3$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 3 = 6(x-1)$ hay $y = 6x - 3$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Câu 1. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x_0 = -1$.

Lời giải

Ta có: $x_0 = -1, f\left(x_0\right) = -(-1)^2 + 2(-1) + 1 = -2$. Với $x \neq -1$:

$$\frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + 2x + 1 - (-2)}{x - (-1)} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 1}$$

$$= \frac{(x+1)(-x+3)}{x+1} = -x + 3.$$

Suy ra: $f'(-1) = \lim\limits_{x \to -1}(-x+3) = 4$. Vậy $f'(-1) = 4$.

Câu 2. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 1$;

b) $y = kx + c$ (với k, c là các hằng số).

Lời giải

a) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(x^2+1\right) - \left(x_0^2+1\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(x - x_0\right)\left(x + x_0\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0}\left(x + x_0\right) = 2x_0.$$

$\Rightarrow y' = 2x.$

b) Biến đổi tương tự. Đáp số: $y' = k$.

Câu 3. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = -x^3$ tại $x_0 = -1$

Lời giải

a) Ta có: $f(x) - f(1) = x^2 - x - 0 = x(x-1)$. Với $x \neq 1, \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$.

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$. Vậy $f'(1) = 1$.

b) Ta có: $f(x) - f(-1) = -x^3 - 1 = -(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$. Với $x \neq -1$,

$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\frac{-(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1}=-\left(x^2-x+1\right)$. Tính giới hạn:

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\left(-x^2+x-1\right)=-3$. Vậy $f'(-1)=-3$.

Câu 4. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Sử dụng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=kx^2+c$ (với k,c là các hằng số);

b) $y=x^3$.

Lời giải

a) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(kx^2+c\right)-\left(kx_0^2+c\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}k\left(x+x_0\right)=2kx_0.$$

Vậy hàm số $y=kx^2+c$ có đạo hàm là $y'=2kx$.

b) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(x-x_0\right)\left(x^2+x_0x+x_0^2\right)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(x^2+x_0x+x_0^2\right)=3x_0^2.$$

Vậy hàm số $y=x^3$ có đạo hàm là $y'=3x^2$.

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y=x+\sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0=2$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $D=[1;+\infty)$.

Tại điểm $x_0=2, y_0=2+\sqrt{2-1}=3$. Với $1\le x\ne 2$, ta có:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{x+\sqrt{x-1}-3}{x-2}=\frac{(x-2)+(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}=1+\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$$

Do đó:

$$y'(2)=\lim_{x\to2}\left(1+\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=1+\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=1+\lim_{x\to2}\frac{(x-1)-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=1+\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Vậy $y'(2)=\frac{3}{2}$.

Câu 6. Tính đạo hàm (nếu tồn tại) của hàm số $y=|x-1|x^2$ tại điểm $x_0=1$.

Giải

Đạo hàm $y'(1)$ (nếu có) là:

$$y'(1)=\lim_{x\to1}\frac{y-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{|x-1|x^2}{x-1}$$

Ta cần tính riêng các giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1. Ta có:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|x^2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)x^2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}x^2=1$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|x-1|x^2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)x^2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left(-x^2\right)=-1$$

Giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1 khác nhau nên không tồn tại giới hạn $\lim_{x\to1}\frac{|x-1|x^2}{x-1}$. Do đó, đạo hàm $y'(1)$ không tồn tại.

Chú ý. $|x-1|x^2=(x-1)x^2$ khi $x\ge1$ và $|x-1|x^2=-(x-1)x^2$ khi $x<1$ nên để khử vô định trong giới hạn trên ta phải xét riêng các giới hạn một phía.

Câu 7. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của hàm số $y=2x^2+3x-1$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải

$y'(1)=7$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=x(2x-1)^2$. Tính $f'(0)$ và $f'(1)$.

Lời giải

$f'(0)=\lim_{x\to0}(2x-1)^2=(-1)^2=1$. Để tính $f'(1)$, ta phân tích:

$$\begin{aligned}f(x)-f(1)&=x(2x-1)^2-1=(x-1)(2x-1)^2+(2x-1)^2-1\\&=(x-1)(2x-1)^2+4x(x-1)\end{aligned}$$

Khi đó, $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left((2x-1)^2+4x\right)=5$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{nếu } x\ge0\\ 1-2x & \text{nếu } x<0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

Tìm giới hạn bên phải và bên trái tại điểm $x=0$. Ta có $f(0)=1$ và

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x-1)^2-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x-1-1)(x-1+1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}(x-2)=-2$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{(1-2x)-1}{x}=\lim_{x\to0^+}(-2)=-2$$

Vậy $f'(0)=-2$

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số:

a) $y=ax^2$ (a là hằng số) tại điểm x_0 bất kì.

b) $y=\frac{1}{x-1}$ tại điểm x_0 bất kì, $x_0\ne1$.

Lời giải

a) $y'(x_0)=2ax_0$;

b) $y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-1)^2}, x_0\ne1$

Câu 11. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ với $x>0$;

b) $f(x)=\frac{x}{x-1}$ với $x\ne1$.

Giải

a) Với bất kì $x_0>0$, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+\sqrt{x}-\left(x_0^2+\sqrt{x_0}\right)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)+\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(x+x_0+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right)=2x_0+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Vậy $f'(x)=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Với $x_0\neq 1$, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x_0}{x_0-1}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-x+x_0}{(x-x_0)(x-1)(x_0-1)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{(x-1)(x_0-1)}=-\frac{1}{(x_0-1)^2}.$$

Vậy $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\sqrt[3]{x}$. Chứng minh rằng $y'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x\neq 0)$.

Lời giải

Với $x_0\neq 0$, ta có:

$$y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xx_0}+\sqrt[3]{x_0}\right)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xx_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

V?y $y'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}(x\neq 0)$

Câu 13. Xét tính liên tục, sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm (nếu có) của các hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x+2 & \text{khi } x\le 2\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{khi } x>2\end{cases}$$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{2}{x}+1 & \text{khi } x>1\end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\dfrac{1}{3}\neq\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=4$ nên f gián đoạn tại 2, do đó f không có đạo hàm tại 2.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=3=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$ nên f liên tục tại 1.

Ta lại có $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=4,\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2$.

Suy ra $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ne\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ nên không tồn tại $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Vậy f không có đạo hàm tại 1.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=3x^3-1$ tại điểm $x_0=1$ bằng định nghĩa.

Giải

Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0=1$.

Ta có: $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=3(1+\Delta x)^3-1-\left(3.1^3-1\right)=9\Delta x+9(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{9\Delta x+9(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3}{\Delta x}=9+9\Delta x+3(\Delta x)^2$.

Ta thấy: $\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\left[9+9\Delta x+3(\Delta x)^2\right]=9$.

Vậy $f'(1)=9$.

Câu 15. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau bằng định nghĩa:

a) $f(x)=x+2$;

b) $g(x)=4x^2-1$;

c) $h(x)=\frac{1}{x-1}$

Lời giải

a) $f'(x)=1$.

b) $g'(x)=8x$.

c) Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x.

Ta có: $\Delta h=h(x+\Delta x)-h(x)=\frac{1}{x+\Delta x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$.

Suy ra: $\frac{\Delta h}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\Delta x}=\frac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$.

Ta thấy: $\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta h}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2}$.

Vậy $h'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$.

Câu 16. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=|x-2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0=2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x\ne2$.

Lời giải

Với $x>2$, ta có: $f(x)=|x-2|=x-2$. Đạo hàm của hàm số $f(x)=|x-2|$ tại điểm $x>2$ là 1.

- Với $x<2$, ta có: $f(x)=|x-2|=2-x$. Đạo hàm của hàm số $f(x)=|x-2|$ tại điểm $x<2$ là -1.

- Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0=2$.

Ta có: $\Delta f=f(2+\Delta x)-f(2)=|2+\Delta x-2|-|2-2|=|\Delta x|$.

Suy ra: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Ta thấy: $\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$;

$\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$.

Do đó, không tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Vậy hàm số $f(x) = |x-2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 2$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 17. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{x - \frac{1}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = 1$.

Hệ số góc tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$ là $k = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Chú ý: Có thể sử dụng công thức đạo hàm $\left(x^2\right)' = 2x$, ta tìm được $k = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

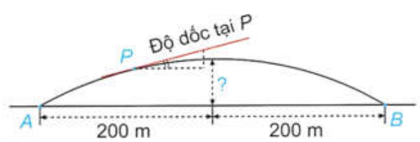
Câu 18. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): y = -2x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Lời giải

Ta có: $x_0 = -1, y_0 = -2(-1)^2 = -2, y' = \left(-2x^2\right)' = -4x$. Do đó, hệ số góc tiếp tuyến của (P) tại điểm $(-1;-2)$ là $k = y'(-1) = 4$. Phương trình tiếp tuyến của parabol (P) tại điểm có hoành độ $x = -1$ là: $y - (-2) = 4(x - (-1)) = 4x + 4,$ hay $y = 4x + 2$

Câu 19. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$ (H.9.4). Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang như Hình 9.5). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hình 9.4. Cầu vượt thép tại nút giao Nguyễn Văn Cừ quận Long Biên, Hà Nội (Ảnh: cand.com.vn)



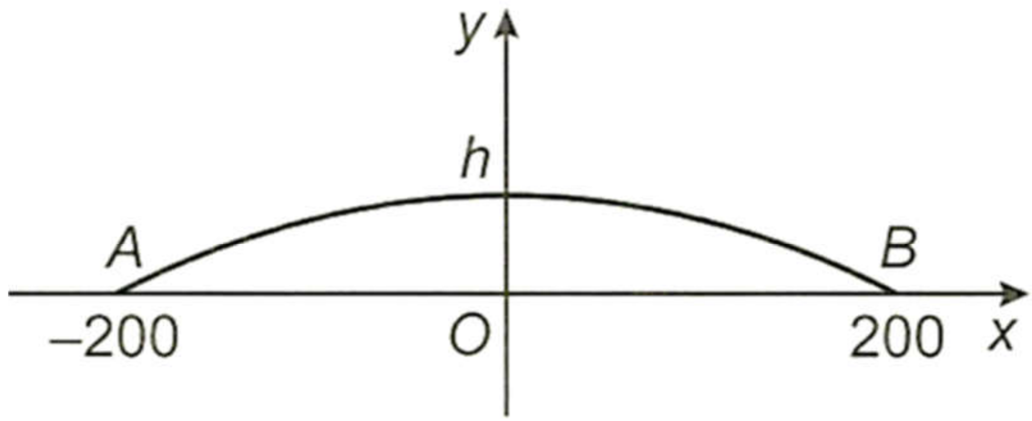
Hình 9.5

Hướng dẫn. Chọn hệ trục toạ độ sao cho đỉnh cầu là gốc toạ độ và mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $y = -ax^2$ (với a là hằng số dương). Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là $k = y' = -2ax, -200 \leq x \leq 200$.

Do đó, $|k| = 2a|x| \leq 400a$. Vì độ dốc của mặt cầu không quá 10° nên ta có: $400a \leq \tan 10^\circ$. Từ đó tính được chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường.

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy (như hình vẽ).



Ta có $A(-200;0), B(200;0)$. Gọi chiều cao giới hạn của cầu là $h(h>0)$. Đỉnh cầu có toạ độ $(0;h)$.

Phương trình parabol của cầu là: $y=-\frac{h}{200^2}x^2+h$. Ta có: $y'=-\frac{2h}{200^2}x$.

Suy ra hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là: $k=y'=-\frac{2h}{200^2}x, -200\le x\le 200$. Do đó:

$|k|=\frac{2h}{200^2}|x|\le\frac{2h}{200^2}\cdot 200=\frac{h}{100}$. Vì độ dốc của cầu không quá 10° nên ta có:

$\frac{h}{100}\le\tan 10^\circ \Leftrightarrow h\le 100\tan 10^\circ\approx 17,6$.

Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu tới mặt đường là 17,6 m.

Câu 20. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y=-x^2+4x$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0=1$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0=0$.

Lời giải

Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(-x^2+4x)-(-x_0^2+4x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(-x-x_0+4)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(-x-x_0+4)=-2x_0+4.$$

Vậy hàm số $y=-x^2+4x$ có đạo hàm là $y'=-2x+4$.

a) Hệ số góc của tiếp tuyến là $k=f'(1)=2$. Ngoài ra, ta có $f(1)=3$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y-3=2(x-1)$ hay $y=2x+1$.

b) Tung độ tiếp điểm $y_0=0$ nên hoành độ x_0 của tiếp điểm thoả mãn $-x_0^2+4x_0=0$. Giải phương trình ta được: $x_0=0$ và $x_0=4$.

Với $x_0=0, k=f'(0)=4$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=4x$.

Với $x_0=4, k=f'(4)=-4$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-4x+16$.

Câu 21. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $19,6m/s$ thì độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h=19,6t-4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

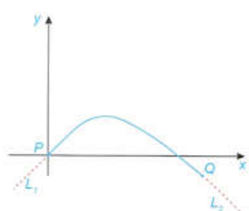
Lời giải

Khi vật chạm đất thì $h=0$, tức là $19,6t-4,9t^2=0 \Leftrightarrow t=0, t=4=t_1$.

Ta có: $h'(t)=19,6-9,8t$. Vậy vận tốc của vật khi chạm đất là $v(4)=h'(4)=-19,6\,m/s$.

Câu 22. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol (H.9.6a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q (H.9.6b). Giả sử gốc toạ độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y=ax^2+bx+c$, trong đó x tính bằng mét.

Hình 9.6a



Hình 9.6b

a) Tìm c.

b) Tính $y'(0)$ và tìm b.

c) Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là $40m$. Tìm a.

d) Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q.

Lời giải

a) Ta có: $c=y(0)=0$.

b) Ta tính được $y'=2ax+b$. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị tại điểm P là $y'(0)=b=0,5$.

c) Do khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 nên hoành độ điểm Q là 40 . Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị tại điểm Q là $y'(40)=80a+b=-0,75$. Do $b=0,5$ nên $a=-\dfrac{1}{64}$. Vậy phương trình parabol là: $y=-\dfrac{1}{64}x^2+\dfrac{1}{2}x$.

d) Chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển P và Q là: $|y(0)-y(40)|=5(m)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=(2x+1)^2$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0=-1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1;1)$.

Giải

a) Tại điểm $x_0=-1, y_0=(-2+1)^2=1$. Với $x\neq -1$, ta có:

$$\frac{y-1}{x-(-1)}=\frac{(2x+1)^2-1}{x+1}=\frac{(2x+1-1)(2x+1+1)}{x+1}=2\cdot 2x$$

Do đó: $y'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{y-1}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}2\cdot 2x=-4$.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1;1)$ là:
$y-1=y'(-1)(x-(-1))=-4(x+1)$ hay $y=-4x-3$

Câu 24. Cho hàm số $y=\frac{8}{x}, x\neq 0$.

a) Tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 bất kì, $x_0\neq 0$.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=2$.
c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng có phương trình $y=-2x+8$.

Giải

a) Với $x_0\neq 0$ bất kì, ta có:

$$y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{8}{x}-\frac{8}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{8(x_0-x)}{(x-x_0)x_0\cdot x}=\lim_{x\to x_0}\frac{-8}{x_0\cdot x}=-\frac{8}{x_0^2}.$$

b) Với $x_0=2$ ta có $y_0=4$ và $y'(2)=-2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=2$ là:
$y-4=-2(x-2)=-2x+4$ hay $y=-2x+8$c

Hệ số góc tiếp tuyến có dạng $k=y'(x_0)=-\frac{8}{x_0^2}$($x=x_0$ là hoành độ tiếp điểm). Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-2x+8$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-2$.

Ta có: $-\frac{8}{x_0^2}=-2\Leftrightarrow x_0^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Với $x_0=2$, phương trình tiếp tuyến là: $y-4=-2(x-2)$, hay $y=-2x+8$ (loại, do tiếp tuyến trùng với đường thẳng đã cho).
Với $x_0=-2$, phương trình tiếp tuyến là:
$y-(-4)=-2(x-(-2))$, hay $y=-2x-8$
Vậy $y=-2x-8$ là tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý. Đối với bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng cho trước, ta cần kiểm tra lại kết quả và loại trường hợp hai đường thẳng trùng nhau do điều kiện hệ số góc bằng nhau chỉ là điều kiện cần.

Câu 25. Tìm toạ độ điểm M trên đồ thị hàm số $y=x^3+1$, biết hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M bằng 3.

Lời giải

Gọi $M\left(a;a^3+1\right)$ là toạ độ điểm cần tìm. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $k=y'(a)=3a^2$.

Theo giả thiết: $k=3a^2=3\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$. Vậy $M(1;2)$ và $M(-1;0)$ là toạ độ các điểm cần tìm.

Câu 26. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-3x^2$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng có phương trình $y=6x+5$.

Lời giải

$y=6x+3$.

Câu 27. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s=t^3-4t^2+4t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t=3$ giây và $t=5$ giây.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm $t=3$ giây là $v(3)=s'(3)=7\,m/s$. Tương tự, $v(5)=39\,m/s$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ có đồ thị là (H).

a) Viết tiếp tuyến của (H) tại điểm $M\in(H)$ có $x_M=2$.

b) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-x$.

c) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(1;-1)$.

Giải

Ta có $y'=f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

a) Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M có hệ số góc $f'(2)=-1$ là:

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$\Leftrightarrow y-2=-1(x-2)$ 37

$\Leftrightarrow y=-x+4.$

b) Gọi d_1 là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $M_0\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ là tiếp điểm của (H) và d_1.

Vì $d_1//d$ nên $f'\left(x_0\right)=-1$.

Suy ra $-\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}=-1\Leftrightarrow\left(x_0-1\right)^2=1\Leftrightarrow x_0-1=1$ hoặc $x_0-1=-1$ $\Leftrightarrow x_0=2$ hoặc $x_0=1$.

- Với $x_0=2$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;2)$ có hệ số góc $f'(2)=-1$ là:

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$\Leftrightarrow y-2=-1(x-2)$

$\Leftrightarrow y=-x+4.$

- Với $x_0=0$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(0;0)$ có hệ số góc $f'(0)=-1$ là:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$\Leftrightarrow y-0=-1(x-0)$

$\Leftrightarrow y=-x$ (loại vì trùng với đường thẳng d).

Vậy tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng d là $d_1: y=-x+4$.

c) Gọi a là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ là tiếp điểm của H và a. Phương trình tiếp tuyến a là:

$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.

Vì a qua điểm $N(1;-1)$ nên $-1-\dfrac{x_0}{x_0-1}=-\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\left(1-x_0\right)$

$\Leftrightarrow 2x_0\left(x_0-1\right)=0$

$\Leftrightarrow x_0=0$ (nhận) hoặc $x_0=1$ (loại).

Vậy phương trình tiếp tuyến $a: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow a: y=-x$.

Câu 29. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t)=-2t^2+16t+15$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t=3$.

Giải

Ta có $s'(t)=\left(-2t^2+16t+15\right)'=(-2.2t+16)=-4t+16$.

Vận tốc tức thời tại thời điểm $t=3$ là $s'(3)=-4.3+16=4(m/s)$.

Câu 30. Cho parabol (P) có phương trình $y=x^2$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol (P)

a) Tại điểm $(-1;1)$;

b) Tại giao điểm của (P) với đường thẳng $y=-3x+2$.

Lời giải

a) Ta có $y'(-1)=-2$.

b) Giao điểm của (P) với đường thẳng $y=-3x+2$ là $x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ và $x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, hệ số góc là $k=-3+\sqrt{17}$ và $k=-3-\sqrt{17}$.

Câu 31. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=x^3-2x^2+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó

a) Song song với đường thẳng $y=-x+2$;

b) Vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{4}x-4$;

c) Đi qua điểm $A(0;1)$.

Lời giải

a) Hai tiếp tuyến: $y=-x+1, y=-x+\dfrac{31}{27}$;

b) Hai tiếp tuyến: $y=4x-7, y=4x+\dfrac{67}{3}$;

c) Hai tiếp tuyến: $y=1, y=-x+1$.

Câu 32. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t)=2t^2+5t+2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t=4$.

Lời giải

Ta có $s'(t)=4t+5, s'(4)=21m/s$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)=x^2$ có đồ thị (P).

a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{2}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{2}$.

Giải

a) Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\Delta y=f\left(\dfrac{1}{2}+\Delta x\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}+\Delta x\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\Delta x+(\Delta x)^2$.

Suy ra: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=1+\Delta x$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)=1$. Suy ra $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. Vậy $k=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

b) Ta có: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\dfrac{1}{2}$ là:

$y=1.\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ hay $y=x-\dfrac{1}{4}$

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)=2+\frac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3 .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

Giải

a) Gọi M là điểm có tung độ bằng 3 nằm trên (C). Khi đó, hoành độ điểm M bằng 1 . Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0=1$.

Ta có: $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\left(2+\frac{1}{1+\Delta x}\right)-\left(2+\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{1+\Delta x}-1=\frac{-\Delta x}{1+\Delta x}$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x}=\frac{-1}{1+\Delta x}$. Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{1+\Delta x}=-1$.

Suy ra $f'(1)=-1$. Vậy $k=f'(1)=-1$.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;3)$ là:

$y=-1(x-1)+3$ hay $y=-x+4$.

Câu 35. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là

$C(Q)=Q^2+80Q+3500$.

a) Tính $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$.

b) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

c) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

Giải

a) Xét ΔQ là số gia của biến số tại điểm Q. Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta C&=C(Q+\Delta Q)-C(Q)=(Q+\Delta Q)^2+80(Q+\Delta Q)+3500-Q^2-80Q-3500\\&=2Q\cdot\Delta Q+(\Delta Q)^2+80\Delta Q.\end{aligned}$$

Suy ra: $\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\frac{2Q\cdot\Delta Q+(\Delta Q)^2+80\Delta Q}{\Delta Q}=2Q+\Delta Q+80$.

b) Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}(2Q+\Delta Q+80)=2Q+80$.

Vậy hàm chi phí biên là: $C'(Q)=2Q+80$.

c) Ta có: $C'(90)=2\cdot 90+80=260$. Dựa vào kết quả đó, ta thấy chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 90 sản phẩm lên 91 sản phẩm là 260 USD.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=x^3$ có đồ thị (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 8 .

Lời giải

Ta có: $f'(x)=3x^2$.

a) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 là: $y=3x+2$.

b) Ta có: $f(x)=x^3=8\Leftrightarrow x=2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 8 là: $y=12x-16$.

Câu 37. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g=9,8\,m/s^2$.

a) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=3(s)$.

b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của vật tại thời điểm đó bằng $39,2(m/s)$.

Lời giải

Xét Δt là số gia của biến số tại điểm t.

Ta có:

$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)=\frac{1}{2}\cdot 9,8\cdot(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}\cdot 9,8\cdot t^2=4,9\left[2t\Delta t+(\Delta t)^2\right]$. Suy ra:

$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{4,9\left[2t\Delta t+(\Delta t)^2\right]}{\Delta t}=9,8t+4,9\Delta t$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(9,8t+4,9\Delta t)=9,8t$.

Vậy $v(t)=s^{'}(t)=9,8t$.

a) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=3$ (s) là:

$v(3)=9,8.3=29,4(m/s)$.

b) Theo đề bài, ta có: $v(t)=9,8t=39,2\Leftrightarrow t=4$.

Vậy vận tốc tức thời của vật đạt $39,2m/s$ tại thời điểm $t=4$ (s).