

## BÀI 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

- CHƯƠNG 9. ĐẠO HÀM
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

## Dạng 1. Tính đạo hàm

**Câu 1. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$   
 b)  $y = (\sqrt{x}+1)(x^2+2)$

**Lời giải**

a) Áp dụng các công thức và quy tắc đạo hàm, ta có:

$$y' = \frac{(\sqrt{x})'(x+1) - \sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - 2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x}+1)'(x^2+2) + (\sqrt{x}+1)(x^2+2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+2) + (\sqrt{x}+1)2x \\ &= \frac{x^2+2}{2\sqrt{x}} + 2x(\sqrt{x}+1). \end{aligned}$$

**Câu 2. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = (2x-3)^{10}$   
 b)  $y = \sqrt{1-x^2}$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $y' = 10(2x-3)^9(2x-3)' = 10(2x-3)^9 \cdot 2 = 20(2x-3)^9$ .

b) Ta có:  $y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

**Câu 3. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } y' = \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right).$$

**Câu 4. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của hàm số  $y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } y' = -2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)' = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right).$$

**Câu 5. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của hàm số  $y = 2 \tan^2 x + 3 \cot\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned}y' &= 4 \tan x (\tan x)' + 3 \frac{-1}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{3} - 2x \right)} \left( \frac{\pi}{3} - 2x \right)' = 4 \tan x \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{6}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{3} - 2x \right)} \\&= \frac{4 \tan x}{\cos^2 x} + \frac{6}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{3} - 2x \right)}.\end{aligned}$$

**Câu 6. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = e^{x^2-x}$ ;
- b)  $y = 3^{\sin x}$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $y' = (e^{x^2-x})' = e^{x^2-x} (x^2-x)' = (2x-1)e^{x^2-x}$ .

b) Ta có:  $y' = (3^{\sin x})' = 3^{\sin x} (\sin x)' \ln 3 = 3^{\sin x} \cos x \ln 3$ .

**Câu 7. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \log_2(2x-1)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $y' = (\log_2(2x-1))' = \frac{(2x-1)'}{(2x-1) \ln 2} = \frac{2}{(2x-1) \ln 2}$ .

**Câu 8. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ ;
- b)  $y = x^2 - 4\sqrt{x} + 3$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $y' = (x^3)' - 3(x^2)' + 2(x)' + 1' = 3x^2 - 6x + 2$ .

b) Ta có:  $y' = (x^2)' - 4(\sqrt{x})' + 3' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$ .

**Câu 9. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = \frac{2x-1}{x+2}$
- b)  $y = \frac{2x}{x^2+1}$

**Lời giải**

a) Ta có:  $y' = \frac{(2x-1)' \cdot (x+2) - (2x-1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$ .

b) Ta có:  $y' = \frac{(2x)' \cdot (x^2+1) - (2x) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$ .

**Câu 10. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a)  $y = x \sin^2 x$ ;
- b)  $y = \cos^2 x + \sin 2x$ ;
- c)  $y = \sin 3x - 3 \sin x$ ;
- d)  $y = \tan x + \cot x$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $y' = x' \sin^2 x + x(\sin^2 x)' = \sin^2 x + x \cdot 2 \sin x(\sin x)'$

$= \sin^2 x + 2x \sin x \cos x = \sin^2 x + x \sin 2x$ . b) Ta có:

$y' = 2 \cos x(\cos x)' + (2x)' \cos 2x = -2 \cos x \sin x + 2 \cos 2x = -\sin 2x + 2 \cos 2x$ .

c) Ta có:  $y' = (3x)' \cos 3x - 3 \cos x = 3 \cos 3x - 3 \cos x$ .

d) Với  $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , ta có:  $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$ .

**Câu 11. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = 2^{3x-x^2}$

b)  $y = \log_3(4x+1)$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $y' = (3x-x^2)' 2^{3x-x^2} \ln 2 = (3-2x)2^{3x-x^2} \ln 2$ .

b) Ta có:  $y' = \frac{(4x+1)'}{(4x+1) \ln 3} = \frac{4}{(4x+1) \ln 3}$ .

**Câu 12. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hàm số  $f(x) = 2 \sin^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ . Chứng minh rằng

$|f'(x)| \leq 6$  với mọi  $x$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \left(\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = 4 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)' \\ &= 12 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 6 \sin\left(6x - \frac{\pi}{2}\right) = -6 \cos 6x \end{aligned}$$

Do đó:  $|f'(x)| = 6 |\cos 6x| \leq 6$  với mọi  $x$ .

**Câu 13.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = (\sqrt{x} + 2)(x^2 + 1)$

b)  $y = \frac{x-1}{x^2+1}$

**Giải**

a) Áp dụng các công thức và phép toán đạo hàm, ta có:

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x} + 2)'(x^2 + 1) + (\sqrt{x} + 2)(x^2 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 1) + (\sqrt{x} + 2)2x \\ &= \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + 2x(\sqrt{x} + 2) \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$y' = \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1) - (x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

**Câu 14.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} y' &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left(x + \frac{\pi}{4}\right)' \\ \text{Ta có:} \quad &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x \end{aligned}$$

**Câu 15.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = x^2 e^{-2x}$  và tìm  $x$  để  $y' = 0$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= (x^2)' e^{-2x} + x^2 (e^{-2x})' = 2xe^{-2x} + x^2 e^{-2x} (-2x)' \\ &= 2xe^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2(x - x^2) e^{-2x}. \text{ Do } e^{-2x} > 0 \text{ nên } y' = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  và  $g(x) = x \ln |2 - x|$ . Tính  $\frac{f'(0)}{g'(0)}$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(x) &= 1 + \frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \\ g'(x) &= \ln |2 - x| + x \frac{(2 - x)'}{2 - x} = \ln |2 - x| - \frac{x}{2 - x} \end{aligned}$$

Thay  $x = 0$  vào các đẳng thức trên, ta được:

$$f'(0) = 1 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 3, g'(0) = \ln 2 \text{ và } \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{3}{\ln 2}.$$

**Câu 17.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = (x + 1)^2 (x^2 - 1)$

b)  $y = \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3$

**Lời giải**

Dùng quy tắc và công thức đạo hàm của hàm số hợp.

a)  $y' = 2(x + 1)(x^2 - 1) + 2x(x + 1)^2 = 2(x + 1)(2x^2 + x - 1).$

b)  $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 \left(2x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$

**Câu 18.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 2}$

b)  $y = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

**Lời giải**

a)  $y' = \frac{x^2 + 4x - 3}{(x + 2)^2}$

$$\text{b) } y' = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

**Câu 19.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$  và  $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$ . Tính  $f'(0) - g'(1)$ .

**Lời giải**

Dùng quy tắc tính đạo hàm  $f'(x), g'(x)$  và thay giá trị tương ứng. Ta có:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{(\sqrt{4-x^2})^2} = \frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + 2x$$

Do đó,  $f'(0) = \frac{1}{2}, g'(1) = \frac{1}{2}$  và  $f'(0) - g'(1) = 0$ .

**Câu 20.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ .

**Lời giải**

$$y' = \frac{3}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

**Câu 21.** Cho hàm số  $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ . Tính đạo hàm  $f'(x)$  và chứng tỏ  $f'(x) = 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \cos x \sin x - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \\ &= -\sin 2x - \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) \\ &= -\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \\ &= -\sin 2x + 2 \cos \frac{\pi}{3} \sin 2x \\ &= -\sin 2x + \sin 2x = 0 \end{aligned}$$

**Câu 22.** Cho hàm số  $f(x) = 4 \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ . Chứng minh rằng  $|f'(x)| \leq 8$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Tìm  $x$  để  $f'(x) = 8$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = 8 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)' \\ &= 16 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 8 \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:  $|f'(x)| = 8 \left| \sin \left( 4x - \frac{2\pi}{3} \right) \right| \leq 8, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$f'(x) = 8 \Leftrightarrow \sin \left( 4x - \frac{2\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow 4x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 23.** Biết  $y$  là hàm số của  $x$  thỏa mãn phương trình  $xy = 1 + \ln y$ . Tính  $y'(0)$ .

**Lời giải**

Dùng quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp, ta có:

$$y + xy' = (\ln y)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' \left( \frac{1}{y} - x \right) = y \Rightarrow y' = \frac{y^2}{1 - xy}$$

Tại  $x = 0$ , thay vào phương trình ta được  $1 + \ln y = 0 \Leftrightarrow y = e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

$$\text{Vậy } y'(0) = \frac{1}{e^2}.$$

**Câu 24.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$  với  $x > 0$ ;

b)  $y = (1 + x - 2x^2) \left( 2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right)$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{(1 - \sqrt[3]{x})'(1 + \sqrt[3]{x}) - (1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x})'}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1 + \sqrt[3]{x}) - (1 - \sqrt[3]{x})\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} \\ &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \frac{2}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1 + \sqrt[3]{x})^2} \end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned} y' &= (1 + x - 2x^2)' \left( 2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) + (1 + x - 2x^2) \left( 2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right)' \\ &= (1 - 4x) \left( 2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) + (1 + x - 2x^2) \left( -2x + x^2 \right) \\ &= (1 - 4x) \left( 2 - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) + (1 + x - 2x^2) (-2x + x^2) \\ &= 2 - 10x - 2x^2 + \frac{28}{3}x^3 - \frac{10}{3}x^4 \end{aligned}$$

**Câu 25.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = (\sin x + 2 \cos x)(\sin x - 2 \cos x + 1)$ ;

b)  $y = \frac{\tan x - 1}{\cot x + 2}.$

**Giải**

a)

$$\begin{aligned}
 y' &= (\sin x + 2 \cos x)'(\sin x - 2 \cos x + 1) + (\sin x + 2 \cos x)(\sin x - 2 \cos x + 1)' \\
 &= (\cos x - 2 \sin x)(\sin x - 2 \cos x + 1) + (\sin x + 2 \cos x)(\cos x + 2 \sin x) \\
 &= \cos x \sin x - 2 \cos^2 x + \cos x - 2 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin x + \sin x \cos x \\
 &\quad + 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x + 4 \cos x \sin x \\
 &= 10 \sin x \cos x + \cos x - 2 \sin x
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(\tan x - 1)'(\cot x + 2) - (\tan x - 1)(\cot x + 2)'}{(\cot x + 2)^2} \\
 &= \frac{(1 + \tan^2 x)(\cot x + 2) + (\tan x - 1)(1 + \cot^2 x)}{(\cot x + 2)^2} \\
 &= \frac{2 \cot x + 2 \tan x + 2 \tan^2 x - \cot^2 x + 1}{(\cot x + 2)^2}
 \end{aligned}$$

**Câu 26.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$

b)  $y = (3 \ln x + 2)(2 \log_3 x - 5).$

**Giải**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y' &= \frac{(2^x + 1)'(2^x - 1) - (2^x + 1)(2^x - 1)'}{(2^x - 1)^2} = \frac{2^x \ln 2 (2^x - 1) - 2^x \ln 2 (2^x + 1)}{(2^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2^x \ln 2 [(2^x - 1) - (2^x + 1)]}{(2^x - 1)^2} = \frac{-2^{x+1} \ln 2}{(2^x - 1)^2}.
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 y' &= (3 \ln x + 2)'(2 \log_3 x - 5) + (3 \ln x + 2)(2 \log_3 x - 5)' \\
 &= \frac{3}{x}(2 \log_3 x - 5) + \frac{2}{x \ln 3}(3 \ln x + 2) \\
 &= \frac{1}{x} \left( 6 \log_3 x + \frac{6}{\ln 3} \ln x - 15 + \frac{4}{\ln 3} \right)
 \end{aligned}$$

**Câu 27.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)  $y = \sqrt{2 + \sin 3x};$

b)  $y = \ln^2(3x + 2);$

c)  $y = \frac{1}{e^{3x} - 1}$

d)  $y = \tan(\cot x).$

**Giải**

$$\text{a) } y' = \frac{(2 + \sin 3x)'}{2\sqrt{2 + \sin 3x}} = \frac{\cos 3x \cdot (3x)'}{2\sqrt{2 + \sin 3x}} = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{2 + \sin 3x}}.$$

$$\text{b) } y' = 2 \ln(3x + 2)[\ln(3x + 2)]' = 2 \ln(3x + 2) \cdot \frac{(3x + 2)'}{3x + 2} = \frac{6}{3x + 2} \ln(3x + 2).$$

$$\text{c) } y' = -\frac{(e^{3x} - 1)'}{(e^{3x} - 1)^2} = -\frac{e^{3x} \cdot (3x)'}{(e^{3x} - 1)^2} = -\frac{3e^{3x}}{(e^{3x} - 1)^2}.$$

$$d) y' = \frac{(\cot x)'}{\cos^2(\cot x)} = \frac{-1}{\sin^2 x \cos^2(\cot x)}.$$

**Câu 28.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = \frac{-3x^2}{2} + \frac{2}{x} + \frac{x^3}{3}$$

$$b) y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9);$$

$$c) y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x + 1}$$

$$d) y = \frac{1 - 2x}{x + 1}$$

$$e) y = xe^{2x+1};$$

$$g) y = (2x + 3)3^{2x+1};$$

$$h) y = x \ln^2 x;$$

$$i) y = \log_2(x^2 + 1).$$

**Lời giải**

$$a) y' = -3x - \frac{2}{x^2} + x^2;$$

$$b) y' = 2x(3x^4 + 8x^2 - 41);$$

$$c) y' = \frac{3x^2 + 2x - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$d) y' = -\frac{3}{(x+1)^2}.$$

$$e) y' = (2x+1)e^{2x+1}$$

$$g) y' = 2 \cdot 3^{2x+1}[(2x+3)\ln 3 + 1];$$

$$h) y' = \ln^2 x + 2 \ln x;$$

$$i) y' = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln 2}.$$

**Câu 29.** Cho hàm số

$$f(x) = 3x^3 - 4\sqrt{x}$$

Tính  $f(4); f'(4); f(a^2); f'(a^2)$  ( $a$  là hằng số khác 0).

**Lời giải**

$$\text{Ta có } f'(x) = 9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$f(4) = 184, f'(4) = 143, f(a^2) = 3a^6 - 4|a|; f'(a^2) = 9a^4 - \frac{2}{|a|}.$$

**Câu 30.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = (1 + x^2)^{20};$$

$$b) y = \frac{2+x}{\sqrt{1-x}}$$

**Lời giải**

$$a) y' = 40x(1 + x^2)^{19};$$



$$b) y' = \frac{-x+4}{2(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

**Câu 31.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = \frac{x}{\sin x - \cos x};$$

$$b) y = \frac{\sin x}{x};$$

$$c) y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

$$d) y = \cos(2 \sin x).$$

**Lời giải**

$$a) y' = \frac{\sin x - \cos x - x(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2};$$

$$b) y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2};$$

$$c) y' = \cos^3 x;$$

$$d) y' = -2 \cos x \cdot \sin(2 \sin x).$$

**Câu 32.** Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm  $x_0 = 1$ :

$$a) f(x) = x^6$$

$$b) g(x) = (2x-1)(x+1);$$

$$c) h(x) = \frac{1-x}{3x+5}$$

$$d) k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$e) m(x) = 2^{3x+1}$$

$$g) n(x) = \log_3(2x+1).$$

**Giải**

$$a) \text{Ta có: } f'(x) = 6x^5.$$

Đạo hàm của hàm số  $f(x)$  tại điểm  $x_0 = 1$  là:  $f'(1) = 6 \cdot 1^5 = 6$ .

$$b) \text{Ta có: } g'(x) = (2x-1)'(x+1) + (2x-1)(x+1)' = 2(x+1) + (2x-1) = 4x+1. \text{ (Ta có thể tính } g'(x) = [(2x-1)(x+1)]' = (2x^2 + x - 1)' = 4x+1 \text{).}$$

Đạo hàm của hàm số  $g(x)$  tại điểm  $x_0 = 1$  là:  $g'(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$ .

c) Ta có:

$$h'(x) = \frac{(1-x)'(3x+5) - (1-x)(3x+5)'}{(3x+5)^2} = \frac{(-1)(3x+5) - 3(1-x)}{(3x+5)^2} = \frac{-8}{(3x+5)^2}. \text{ Đạo hàm của hàm số } h(x) \text{ tại}$$

$$\text{điểm } x_0 = 1 \text{ là: } h'(1) = \frac{-8}{(3 \cdot 1 + 5)^2} = \frac{-1}{8}.$$

$$d) \text{Ta có: } k'(x) = -\frac{(\sqrt{x})'}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

$$\text{Đạo hàm của hàm số } k(x) \text{ tại điểm } x_0 = 1 \text{ là: } k'(1) = -\frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}} = \frac{-1}{2}.$$

$$e) \text{Ta có: } m'(x) = (3x+1)' \cdot 2^{3x+1} \ln 2 = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x+1}.$$

$$\text{Đạo hàm của hàm số } m(x) \text{ tại điểm } x_0 = 1 \text{ là: } m'(1) = 3 \ln 2 \cdot 2^{3 \cdot 1 + 1} = 48 \ln 2.$$

g) Ta có:  $n'(x) = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 3} = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$ .

Đạo hàm của hàm số  $n(x)$  tại điểm  $x_0 = 1$  là:  $n'(1) = \frac{2}{(2 \cdot 1 + 1)\ln 3} = \frac{2}{3\ln 3}$ .

**Câu 33.** Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

a)  $f(x) = 2\sin x$

b)  $g(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Giải**

a) Ta có:  $f'(x) = 2(\sin x)' = 2\cos x$ .

Đạo hàm của hàm số  $f(x)$  tại điểm  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  là:  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ .

b) Ta có:  $g'(x) = -\frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ .

Đạo hàm của hàm số  $g(x)$  tại điểm  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  là:  $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = -1$ .

**Câu 34.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x$ . Giải bất phương trình  $f'(x) < 0$ .

**Giải**

Ta có:  $f'(x) = 3x^2 - 3$ .

Khi đó,  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ .

Vậy tập nghiệm của bất phương trình trên là  $(-1; 1)$ .

**Câu 35.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định, hàm số  $g(x)$  được xác định bởi  $g(x) = -3 - 2f(x)$ . Biết  $f'(5) = 1$ . Tính  $g'(5)$ .

**Giải**

Ta có:  $g'(x) = (-3)' - (2f(x))' = 0 - 2 \cdot f'(x) = -2f'(x)$ .

Suy ra  $g'(5) = -2f'(5) = (-2) \cdot 1 = -2$ .

**Câu 36.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định và  $f'(5) = 1$ . Tính đạo hàm của hàm số  $g(x) = f(1 + 2x)$  tại  $x = 2$ .

**Giải**

Ta có:  $g'(x) = (1 + 2x)' \cdot f'(1 + 2x) = 2f'(1 + 2x)$ .

Suy ra  $g'(2) = 2f'(5) = 2 \cdot 1 = 2$ .

**Câu 37.** Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm  $x_0 = 2$ :

a)  $f(x) = e^{x^2 + 2x}$

b)  $g(x) = \frac{3^x}{2^x}$

c)  $h(x) = 2^x \cdot 3^{x+2}$

d)  $k(x) = \log_3(x^2 - x)$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $f'(x) = (x^2 + 2x)' e^{x^2+2x} = (2x+2)e^{x^2+2x}$ .

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm  $x_0 = 2$  là:  $f'(2) = (2 \cdot 2 + 2)e^{2^2+2 \cdot 2} = 6e^8$ .

b) Ta có:  $g'(x) = \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^x \right]' = \left( \frac{3}{2} \right)^x \ln \frac{3}{2}$ .

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm  $x_0 = 2$  là:  $g'(2) = \left( \frac{3}{2} \right)^2 \ln \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \ln \frac{3}{2}$ .

c) Ta có:  $h(x) = 2^x \cdot 3^x \cdot 9 = 9 \cdot 6^x$ .

Suy ra  $h'(x) = 9 \ln 6 \cdot 6^x$ .

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm  $x_0 = 2$  là:  $h'(2) = 9 \ln 6 \cdot 6^2 = 324 \ln 6$ .

d) Ta có:  $k'(x) = \frac{(x^2 - x)'}{(x^2 - x) \ln 3} = \frac{2x - 1}{x(x - 1) \ln 3}$ .

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm  $x_0 = 2$  là:  $k'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2(2 - 1) \ln 3} = \frac{3}{2 \ln 3}$ .

**Câu 38.** Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a)  $f(x) = 2 \cos(\sqrt{x})$ ;

b)  $g(x) = \tan(x^2)$ ;

c)  $h(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x)$

d)  $k(x) = \sin^2 x + e^x \cdot \sqrt{x}$ .

**Lời giải**

a)  $f'(x) = 2(\sqrt{x})'[-\sin(\sqrt{x})] = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ .

b)  $g'(x) = \frac{(x^2)'}{\cos^2(x^2)} = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$ .

c) Ta có:  $h(x) = \cos^2(3x) - \sin^2(3x) = \cos(6x)$ .

Suy ra  $h'(x) = (6x)'[-\sin(6x)] = -6 \sin(6x)$ .

d)  $k'(x) = (\sin^2 x)' + (e^x)' \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot (\sqrt{x})' = 2 \sin x \cos x + e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$ .

**Câu 39.** Cho hàm số  $f(x) = 2^{3x-6}$ . Giải phương trình  $f'(x) = 3 \ln 2$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) = (3x - 6)' \cdot 2^{3x-6} \ln 2 = 3 \ln 2 \cdot 2^{3x-6}$ . Khi đó,

$f'(x) = 3 \ln 2 \Leftrightarrow 3 \ln 2 \cdot 2^{3x-6} = 3 \ln 2 \Leftrightarrow 2^{3x-6} = 1 \Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

**Câu 40.** Giải bất phương trình  $f'(x) < 0$ , biết:

a)  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ ;

b)  $f(x) = -\log_5(x+1)$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ .

Khi đó,  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$ .

b) Ta có:  $f'(x) = -\frac{(x+1)'}{(x+1)\ln 5} = \frac{-1}{(x+1)\ln 5}$ .

Khi đó,  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x+1)\ln 5} < 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ .

**Câu 41.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định, hàm số  $g(x)$  được xác định bởi  $g(x) = [f(x)]^2 + 2xf(x)$ . Biết  $f'(0) = f(0) = 1$ . Tính  $g'(0)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f(x) + 2xf'(x)$ .

Vậy  $g'(0) = 2f(0)f'(0) + 2f(0) + 2 \cdot 0 \cdot f'(0) = 4$ .

## Dạng 2. Ứng dụng

**Câu 42. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Một vật chuyển động có phương trình

$s(t) = 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$  (m), với  $t$  là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc của vật khi  $t = 5$  giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

**Lời giải**

Ta có:

$s'(t) = -4\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)' = -8\pi\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$ . Vận tốc của vật khi  $t = 5$  giây là

$v(5) = s'(5) = -8\pi\sin\left(10\pi - \frac{\pi}{8}\right) = 9,6$  (m/s).

**Câu 43. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Ta đã biết, độ  $pH$  của một dung dịch được xác định bởi  $pH = -\log[H^+]$ , ở đó  $[H^+]$  là nồng độ (mol/lít) của ion hydrogen. Tính tốc độ thay đổi của  $pH$  đối với nồng độ  $[H^+]$ .

**Lời giải**

Tốc độ thay đổi của  $pH$  với nồng độ  $[H^+]$  là đạo hàm của  $pH$ , tức là:

$$\left(-\log[H^+]\right)' = -\frac{\left([H^+]\right)'}{[H^+]\ln 10} = -\frac{1}{[H^+]\ln 10}.$$

**Câu 44. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình

$h(t) = 100 - 4,9t^2$ , ở đó độ cao  $h$  so với mặt đất tính bằng mét và thời gian  $t$  tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm  $t = 5$  giây;

b) Khi vật chạm đất.

**Lời giải**

a) Vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm  $t$  giây là  $v(t) = h'(t) = -9,8t$  (m/s).

Tại thời điểm  $t = 5$  giây, vận tốc của vật là:  $v(5) = -9,8 \cdot 5 = -49$  (m/s).

b) Khi vật chạm đất thì  $h(t) = 0$ , tức là  $100 - 4,9t^2 = 0 \Leftrightarrow t = t_1 = \frac{10}{\sqrt{4,9}}$ .

Vận tốc của vật khi chạm đất là:  $v(t_1) = -9,8t_1 = -20\sqrt{4,9} \approx -44,3$  (m/s).

Ở đây, dấu âm trong các kết quả tính vận tốc thể hiện vật chuyển động thẳng đứng xuống dưới (ngược với chiều dương).

**Câu 45. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi  $s(t) = 12 + 0,5 \sin(4\pi t)$ , trong đó  $s$  tính bằng centimét và  $t$  tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau  $t$  giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

**Lời giải**

Vận tốc của hạt sau  $t$  giây là:  $v(t) = s'(t) = 0,5(4\pi t)' \cos(4\pi t) = 2\pi \cos(4\pi t) (cm/s)$ .

Với mọi  $t$ ,  $|\cos(4\pi t)| \leq 1$  nên  $|v(t)| \leq 2\pi$ ,  $|v(t)| = 2\pi$  tại các thời điểm  $t$  mà  $4\pi t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{k}{4}$  với  $k$  là số nguyên,  $k \geq 0$ . Vậy vận tốc cực đại của hạt là  $2\pi (cm/s)$ .

**Câu 46.** Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là  $v_0 (m/s)$  (bỏ qua sức cản của không khí) thì độ cao  $h$  của vật (tính bằng mét) sau  $t$  giây được cho bởi công thức  $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$  ( $g$  là gia tốc trọng trường). Tìm vận tốc của vật khi chạm đất.

**Lời giải**

Tại thời điểm vật chạm đất:  $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 (t > 0)$ .

Giải phương trình ta được  $t = \frac{2v_0}{g}$ .

Vận tốc của vật khi chạm đất là  $v = h' \left( \frac{2v_0}{g} \right) = -v_0$ .

**Câu 47.** Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức  $s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin \left( 4\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$ , trong đó  $s$  tính bằng centimét và  $t$  tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau  $t$  giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

**Lời giải**

Vận tốc của hạt sau  $t$  giây là:  $v(t) = s'(t) = 4\pi\sqrt{2} \cos \left( 4\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$ .

Vận tốc cực đại của hạt là:  $v_{\max} = 4\pi\sqrt{2} \approx 17,8 m/s$ , đạt được khi:

$$\left| \cos \left( 4\pi t + \frac{\pi}{6} \right) \right| = 1 \text{ hay } t = \frac{5}{24} + \frac{k}{4}, k \in \mathbb{N}.$$

**Câu 48.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$ , trong đó  $s$  tính bằng mét và  $t$  là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm  $t = 2$ .

**Giải**

Ta có  $s'(t) = -2.2t + 15 = -4t + 15$ , suy ra  $s''(t) = -4$ .

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm  $t = 2$  lần lượt là  $s'(2) = 7 m/s$  và  $s''(2) = -4 m/s^2$ .

**Câu 49.** Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là  $x$  (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là  $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$  (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

**Giải**

Ta có  $P'(x) = -2.200x + 12800 = -400x + 12800$ .

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm là

$$P'(12) = -400.12 + 12800 = 8000.$$

**Câu 50.** Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là  $x$  (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là  $P(x) = 200(x-2)(17-x)$  (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

### Lời giải

Ta có  $P'(x) = -400x + 3800$ .

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm là  $P'(30) = -8200$ .

**Ví dụ 6.** Viết phương trình tiếp tuyến của parabol  $(P): y = x^2 + 2x + 1$  tại giao điểm của nó với trục tung.

### Giải

Gọi  $A(0; y_0)$  là giao điểm của  $(P)$  và trục tung, suy ra  $y_0 = y(0) = 1$ .

Ta có:  $y' = 2x + 2$ , do đó  $y'(0) = 2$ .

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:  $y = 2(x-0) + 1$  hay  $y = 2x + 1$ .

**Câu 51.** Cho hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-2}$  có đồ thị  $(C)$ , viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng  $-5$ .

### Giải

Gọi  $A(x_0; y_0)$  là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y'(x_0) = -5 \Leftrightarrow \frac{-5}{(x_0-2)^2} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3. \end{cases}$$

- Với  $x_0 = 1$  ta được  $y_0 = -3$ , phương trình tiếp tuyến cần tìm là:  $y = -5x + 2$ .

- Với  $x_0 = 3$  ta được  $y_0 = 7$ , phương trình tiếp tuyến cần tìm là:  $y = -5x + 22$ .

**Câu 52.** Cho hàm số  $y = x^3 + 2$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x - 1$ .

### Giải

Gọi  $M(x_0; y_0)$  là tiếp điểm.

Ta có:  $y'(x) = 3x^2$ .

Do tiếp tuyến cần tìm vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x - 1$  nên ta có:

$$y'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 1. \end{cases} \text{ Từ đó, ta có: } y'(x_0) = 3.$$

- Với  $x_0 = -1$  ta được  $y_0 = 1$ , phương trình tiếp tuyến cần tìm là:  $y = 3x + 4$ .

- Với  $x_0 = 1$  ta được  $y_0 = 3$ , phương trình tiếp tuyến cần tìm là:  $y = 3x$ .

**Câu 53.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t + 1$ , trong đó  $t > 0, t$  tính bằng giây,  $s(t)$  tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = 3(s)$ .

### Giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t(s)$  là:  $v(t) = s'(t) = t^2 - 4t + 4$ .

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = 3(s)$  là:

$$v(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1(m/s).$$

**Câu 54.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ , trong đó  $t > 0, t$  tính

bằng giây,  $s(t)$  tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{6}(s)$ .

**Giải**

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t(s)$  là:  $v(t) = s'(t) = 18 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ .

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{6}(s)$  là:

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 18 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -9\sqrt{2} (cm/s).$$

**Câu 55.** Một viên đạn được bắn lên cao theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động  $s(t) = 2 + 196t - 4,9t^2$ , trong đó  $t \geq 0, t$  (s) là thời gian chuyển động,  $s(m)$  là độ cao so với mặt đất.

- Sau bao lâu kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao  $1962m$ ?
- Tính vận tốc tức thời của viên đạn khi viên đạn đạt được độ cao  $1962m$ .
- Tại thời điểm viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng  $98m/s$  thì viên đạn đang ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

**Giải**

a) Khi viên đạn đạt được độ cao  $1962m$ , ta có phương trình:

$$1962 = 2 + 196t - 4,9t^2 \Leftrightarrow t = 20. \text{ Vậy sau } 20s \text{ kể từ lúc bắn thì viên đạn đạt được độ cao } 1962m.$$

b) Vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm  $t$  là:  $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t$ .

Viên đạn đạt được độ cao  $1962m$  vào thời điểm  $t = 20$  (s) kể từ lúc bắn, khi đó vận tốc tức thời của viên đạn là:  $v(20) = 196 - 9,8 \cdot 20 = 0(m/s)$ .

c) Viên đạn có vận tốc tức thời bằng  $98m/s$  thì ta có phương trình:

$$v(t) = 196 - 9,8t = 98 \Leftrightarrow t = 10. \text{ Khi đó viên đạn đang ở độ cao là: } s(10) = 2 + 196 \cdot 10 - 4,9 \cdot 10^2 = 1472(m).$$

**Câu 56.** Năm 2001, dân số Việt Nam khoảng 78690000 người. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn là 1,7% thì ước tính số dân Việt Nam sau  $x$  năm kể từ năm 2001 được tính theo hàm số sau:

$f(x) = 7,869e^{0,017x}$  (chục triệu người). Tốc độ gia tăng dân số (chục triệu người/năm) sau  $x$  năm kể từ năm 2001 được xác định bởi hàm số  $f'(x)$ .

a) Tìm hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau  $x$  năm kể từ năm 2001.

b) Tính tốc độ gia tăng dân số Việt Nam theo đơn vị chục triệu người/năm vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), nêu ý nghĩa của kết quả đó.

**Giải**

a) Ta có:

$$f'(x) = 7,869 \cdot (0,017x)' \cdot e^{0,017x} = 7,869 \cdot 0,017 \cdot e^{0,017x} = 0,133773e^{0,017x}.$$

Vậy hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau  $x$  năm kể từ năm 2001 là:

$$f'(x) = 0,133773e^{0,017x}. \text{ b) Ta có: } x = 2023 - 2001 = 22.$$

Tốc độ gia tăng dân số Việt Nam vào năm 2023 là:

$$f'(22) = 0,133773e^{0,017 \cdot 22} \approx 0,2 \text{ (chục triệu người/năm)}$$

Theo kết quả trên thì dân số nước ta tăng thêm khoảng 2 triệu người trong năm 2023.

**Câu 57.** Trong thuyết động học phân tử chất khí, với một khối khí lí tưởng, các đại lượng áp suất  $p(Pa)$ , thể tích  $V(m^3)$ , nhiệt độ  $T(K)$ , số mol  $n(mol)$  liên hệ với nhau theo phương trình:

$$pV = nRT, \text{ trong đó } R = 8,31(J/mol.K) \text{ là hằng số.}$$

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái lí tưởng có áp suất không đổi  $p = 10^5 \text{ Pa}$ . Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

**Giải**

Thay  $p = 10^5, n = 8, R = 8,31$  vào phương trình trên ta có:

$10^5 V = 8,8,31T \Leftrightarrow V = 6,648 \cdot 10^{-4} T$ . Khi đó  $V'(T) = 6,648 \cdot 10^{-4}$ . Vậy tốc độ thay đổi thể tích của khối khí lúc có nhiệt độ  $T$  là  $6,648 \cdot 10^{-4} \text{ (m}^3 / \text{K)}$ .

**Câu 58.** Cho hàm số  $y = x^2 + 3x$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có:

- a) Hoành độ bằng -1;
- b) Tung độ bằng 4.

**Lời giải**

- a)  $y = x - 1$ .
- b)  $y = 5x - 1$  hoặc  $y = -5x - 16$ .

**Câu 59.** Cho hàm số  $y = \frac{x-3}{x+2}$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến  $d$  của đồ thị (C) trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $d$  song song với đường thẳng  $y = 5x - 2$ ;
- b)  $d$  vuông góc với đường thẳng  $y = -20x + 1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $y'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$ .

- a) Vì  $d$  song song với đường thẳng  $y = 5x - 2$  nên  $\frac{5}{(x+2)^2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

Với  $x = -1$  thì  $y(-1) = -4$ , phương trình tiếp tuyến  $d$  là:  $y = 5x + 1$ .

Với  $x = -3$  thì  $y(-3) = 6$ , phương trình tiếp tuyến  $d$  là:  $y = 5x + 21$ .

- b) Vì  $d$  vuông góc với đường thẳng  $y = -20x + 1$  nên  $\frac{5}{(x+2)^2} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = 8 \end{cases}$

Với  $x = -12$  thì  $y(-12) = \frac{3}{2}$ , phương trình tiếp tuyến  $d$  là:  $y = \frac{1}{20}x + \frac{21}{10}$ .

Với  $x = 8$  thì  $y(8) = \frac{1}{2}$ , phương trình tiếp tuyến  $d$  là:  $y = \frac{1}{20}x + \frac{1}{10}$ .

**Câu 60.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$ , trong đó  $t > 0, t$  tính bằng giây,  $s(t)$  tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = 5(s)$ .

**Lời giải**

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t$  (s) là:  $v(t) = s'(t) = t^2 - 6t + 8$ .

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm  $t = 5(s)$  là:

$$v(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 3 \text{ (m/s)}.$$

**Câu 61.** Một mạch dao động điện từ LC có lượng điện tích dịch chuyển qua tiết diện thẳng của dây xác định bởi hàm số  $Q(t) = 10^{-5} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right)$ , trong đó  $t > 0, t$  tính bằng giây,  $Q$  tính bằng



Coulomb. Tính cường độ dòng điện tức thời  $I(A)$  trong mạch tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{1500}(s)$ , biết

$$I(t) = Q'(t).$$

### Lời giải

Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm  $t$  (s) là:

$$I(t) = Q'(t) = 10^{-5} \cdot 2000 \cos\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right) = 0,02 \cos\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{1500}$  (s) là:

$$I\left(\frac{\pi}{1500}\right) = 0,02 \cos\left(2000 \cdot \frac{\pi}{1500} + \frac{\pi}{3}\right) = 0,01(A).$$

**Câu 62.** Năm 2010, dân số ở một tỉnh D là 1038229 người. Tính đến năm 2015, dân số của tỉnh đó là 1153600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức  $S(N) = Ae^{Nr}$  (trong đó  $A$  là dân số của năm lấy làm mốc,  $S$  là dân số sau  $N$  năm,  $r$  là tỉ lệ tăng dân số hàng năm được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau  $N$  năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số  $S'(N)$ . Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

### Lời giải

Tính từ năm 2010 đến năm 2015, chọn năm 2010 làm mốc, ta có:

$$1153600 = 1038229 \cdot e^{5r} \Rightarrow r \approx 0,021.$$

Khi đó, ta có:  $S(N) \approx 1038229 \cdot e^{0,021N}$ , suy ra tốc độ gia tăng dân số vào thời điểm sau  $N$  năm kể từ năm 2010 là:

$$S'(N) \approx 0,021 \cdot 1038229 \cdot e^{0,021N} = 21802,809 \cdot e^{0,021N}.$$

Tốc độ gia tăng dân số tỉnh D vào năm 2023 (sau 13 năm từ năm 2010) là:

$$S'(13) \approx 21802,809 \cdot e^{0,021 \cdot 13} \approx 28647 \text{ (người/năm)}.$$

**Câu 63.** Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vật cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình

$$s(t) = 20t - \frac{5}{2}t^2, \text{ trong đó } s(m) \text{ là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, } t(s) \text{ là thời gian tính từ}$$

lúc bắt đầu phanh ( $0 \leq t \leq 4$ ).

a) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh. Hãy cho biết xe ô tô trên có chạy quá tốc độ hay không, biết tốc độ giới hạn cho phép là  $70 \text{ km/h}$ .

b) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm?

### Lời giải

a) Vận tốc tức thời của ô tô tại thời điểm  $t(s)$  là:  $v(t) = s'(t) = 20 - 5t$ .

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh ( $t = 0(s)$ ) là:

$$v(0) = 20 - 5 \cdot 0 = 20(m/s). \text{ Ta có: } 20 m/s = 72 km/h > 70 km/h.$$

Suy ra ô tô trên đã chạy quá tốc độ giới hạn cho phép.

b) Khi xảy ra va chạm, ô tô đã đi được 20,4 m kể từ khi đạp phanh nên

$$20,4 = 20t - \frac{5}{2}t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1,2 \\ t = 6,8 \end{cases} \text{ Vì } 0 \leq t \leq 4 \text{ nên } t = 1,2 \text{ (s).}$$

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm ( $t = 1, 2(s)$ ) là:

$$v(1, 2) = 20 - 5 \cdot 1, 2 = 14(m/s).$$

**Câu 64.** Trong kinh tế học, xét mô hình doanh thu  $y$  (đồng) được tính theo số sản phẩm sản xuất ra  $x$  (chiếc) theo công thức  $y = f(x)$ .

Xét giá trị ban đầu  $x = x_0$ . Đặt  $Mf(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0)$  và gọi giá trị đó là giá trị  $y$ -cận biên của  $x$  tại  $x = x_0$ . Giá trị  $Mf(x_0)$  phản ánh lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mức sản phẩm  $x_0$ .

Xem hàm doanh thu  $y = f(x)$  như là hàm biến số thực  $x$ .

Khi đó  $Mf(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0)$ . Như vậy, đạo hàm  $f'(x_0)$  cho chúng ta biết (xấp xỉ) lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mức sản phẩm  $x_0$ .

Tính doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm nếu hàm doanh thu là

$$y = 10x - \frac{x^2}{100} \text{ tại mức sản phẩm } x_0 = 10000.$$

### Lời giải

$$\text{Ta có: } y'(x) = 10 - \frac{x}{50}.$$

Vậy doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mức sản phẩm  $x_0 = 10000$  là:

$$y'(10000) = 10 - \frac{10000}{50} = -190 \text{ (đồng)}.$$

Nguyễn Bảo Vương