

**PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN****Dạng 1. Tìm nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp****Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với  $C$  là hằng số tùy ý)**

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C.$
$\int \sin x dx = -\cos x + C.$	$\int \cos x dx = \sin x + C.$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\int e^x dx = e^x + C.$

**Một số nguyên tắc tính cơ bản**

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa  $\xrightarrow{PP}$  khai triển.
- Tích các hàm mũ  $\xrightarrow{PP}$  khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của sin và cosin  $\Rightarrow$  Hạ bậc:  $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$ ,  $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$ .
- Chứa tích các căn thức của  $x \xrightarrow{PP}$  chuyển về lũy thừa.

**Câu 1.** Tìm:

1) $\int x^5 dx$ ;	2) $\int x^{\sqrt{2}} dx$	3) $\int x^{-1} dx$ .	4) $\int x^6 dx$
5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .	6) $\int \frac{1}{x^2} dx$ ;	7) $\int x^{\frac{1}{2}} dx$	8) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .
9) $\int \frac{1}{x^3} dx$ ;	10) $\int \sqrt{x} dx (x > 0)$ ;	11) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx (x > 0)$ .	12) $\int \frac{(x+2)^2}{x^4} dx$
13) $\int \sqrt{x} (7x^2 + 6) dx$	14) $\int (3x+4)\sqrt[3]{x} dx$	15) $\int \frac{(2x+3)^2}{\sqrt{x}} dx$	16) $\int (2x^2 - 4x^5 + 6) dx$
17) $\int (x+3)(-2-x) dx$	18) $\int \frac{x^6 - 7x^3}{x} dx, (x > 0)$	19) $\int x^{\sqrt{2}} dx$ ;	20) $\int \frac{4}{x^3} dx$ ;
21) $\int \frac{-2}{3} \sqrt{\frac{3}{x^4}} dx$ ;	22) $\int \left( x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} x^{-2} \right) dx$	23) $\int \frac{1}{-x} dx$ ;	24) $\int \frac{4}{11x} dx$ ;
25) $\int \frac{x^3 - 1}{x} dx$ .	26) $\int x^{\frac{1}{3}} dx$	27) $\int \sqrt{\frac{1}{x^7}} dx$ ;	28) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^{\frac{4}{5}}}} dx$
29) $\int \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 dx$	30) $\int \frac{(x-3)(x+1)}{x} dx$	31) $\int \left( 3x^2 - \frac{4}{x} \right) (2x+5) dx$ .	

**Lời giải**

$$1) \int x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 + C$$

$$2) \int x^{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}+1} x^{\sqrt{2}+1} + C.$$

$$3) \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

$$4) \int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C;$$

$$5) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

$$6) \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$7) \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$$

$$8) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

$$9) \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

$$10) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$11) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C$$

$$12) \int \frac{(x+2)^2}{x^4} dx = \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^4} \right) dx \\ = -\frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 4 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} + C.$$

$$13) \int \sqrt{x} (7x^2 + 6) dx = \int 7x^{\frac{5}{2}} dx + \int 6x^{\frac{1}{2}} dx \\ = 2x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x} (x^3 + 2x) + C$$

$$14) \int (3x+4)\sqrt[3]{x} dx = \left( \frac{9}{7} x^2 + 3x \right) \sqrt[3]{x} + C.$$

$$15) \int \frac{(2x+3)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{4x^2+12x+9}{\sqrt{x}} dx = \left( \frac{8}{5} x^2 + 8x + 18 \right) \sqrt{x} + C.$$

$$16) \int (2x^2 - 4x^5 + 6) dx = \int 2x^2 dx - \int 4x^5 dx + \int 6 dx = \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^6 + 6x + C$$

$$17) \int (x+3)(-2-x) dx = \int (-x^2 - 5x - 6) dx = -\int x^2 dx - \int 5x dx - \int 6 dx = \frac{-x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x + C.$$

$$18) \int \frac{x^6 - 7x^3}{x} dx, (x > 0) = \int (x^5 - 7x^2) dx = \int x^5 dx - 7 \int x^2 dx = \frac{x^6}{6} - \frac{7x^3}{3} + C.$$

$$19) \int x^{\sqrt{2}} dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C.$$

$$20) \int \frac{4}{x^3} dx = 4 \int x^{-3} dx = 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = -2x^{-2} + C.$$

$$21) \int \frac{-2}{3} \sqrt{x^{\frac{3}{4}}} dx = \frac{-2}{3} \int x^{\frac{3}{8}} dx = \frac{-2}{3} \cdot \frac{x^{\frac{11}{8}}}{\frac{11}{8}} + C = \frac{-16x^{\frac{11}{8}}}{33} + C.$$

$$22) \int \left( x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} x^{-2} \right) dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx + \frac{1}{2} \int x^{-2} dx = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2x} + C.$$

$$23) \int \frac{1}{-x} dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln|x| + C.$$

$$24) \int \frac{4}{11x} dx = \frac{4}{11} \int \frac{1}{x} dx = \frac{4}{11} \ln|x| + C.$$

$$25) \int \frac{x^3 - 1}{x} dx = \int \left( x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + C.$$

$$26) \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$27) \int \sqrt{\frac{1}{x^7}} dx = \int x^{-\frac{7}{2}} dx = \frac{-2}{5} x^{-\frac{5}{2}} + C.$$

$$28) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^{\frac{4}{5}}}} dx = \int x^{-\frac{4}{15}} dx = \frac{15}{11} x^{\frac{11}{15}} + C.$$

$$29) \int \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 dx = \int \left( x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - 2x + C.$$

$$30) \int \frac{(x-3)(x+1)}{x} dx = \int \left( x - 2 - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 3 \ln|x| + C.$$

$$31) \int \left( 3x^2 - \frac{4}{x} \right) (2x+5) dx = \int \left( 6x^3 + 15x^2 - 8 - \frac{20}{x} \right) dx = \frac{3}{2} x^4 + 5x^3 - 8x - 20 \ln|x| + C.$$

**Câu 2.** Tìm:

1) $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx;$	2) $\int \left( 1 + 3 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$	3) $\int \frac{2 \cos^3 x + 3}{\cos^2 x} dx$	4) $\int (5 \sin x - 6 \cos x) dx;$
5) $\int \sin^2 2x dx + \int \cos^2 2x dx$	6) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$	7) $\int \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$	8) $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx - \int \sin^4 \frac{x}{2} dx$
9) $\int \tan^2 x dx.$	10) $\int (-\cos x) dx$	11) $\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$	12) $\int (3 \sin x - 4 \cos x) dx;$
13) $\int (7 + 5 \cot^2 x) dx$	14) $\int 2 \sin x dx$	15) $\int (\cos x + x^3) dx$	16) $\int \left( \frac{-x^4}{2} - 3 \cos x \right) dx$
17) $\int \left( 2 \cos x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$	18) $\int (3\sqrt{x} - 4 \sin x) dx$	19) $\int \left( x + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$	20) $\int (2 \tan x + \cot x)^2 dx$
21) $\int 3 \cos x dx$	22) $\int (\sin x + \cos x) dx$	23) $\int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$	24) $\int (1 + \tan^2 x) dx.$

25) $\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$			
---	--	--	--

**Lời giải**

- 1)  $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C ;$
- 2)  $\int \left( 1 + 3 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \left( 1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos x}{2} \right) dx$   
 $= \frac{1}{2} \int (5 - 3 \cos x) dx = \frac{1}{2} (5x - 3 \sin x) + C$
- 3)  $\int \frac{2 \cos^3 x + 3}{\cos^2 x} dx = 2 \int \cos x dx + 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \sin x + 3 \tan x + C .$
- 4)  $\int (5 \sin x - 6 \cos x) dx = -5 \cos x - 6 \sin x + C .$
- 5)  $\int \sin^2 2x dx + \int \cos^2 2x dx = \int (\sin^2 2x + \cos^2 2x) dx = \int 1 dx = x + C .$
- 6)  $\int \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{x - \sin x}{2} + C .$
- 7)  $\int \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left( \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C .$
- 8)  $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx - \int \sin^4 \frac{x}{2} dx = \int \left( \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \cos x dx = \sin x + C$
- 9)  $\int \tan^2 x dx = \int [(\tan^2 x + 1) - 1] dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C .$
- 10)  $\int (-\cos x) dx = -\int \cos x dx = -\sin x + C .$
- 11)  $\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \tan x - x + C .$
- 12)  $\int (3 \sin x - 4 \cos x) dx = \int 3 \sin x dx - \int 4 \cos x dx = 3 \int \sin x dx - 4 \int \cos x dx$   
 $= 3(-\cos x) - 4 \sin x + C = -3 \cos x - 4 \sin x + C .$
- 13)  $\int (7 + 5 \cot^2 x) dx = \int [2 + 5(1 + \cot^2 x)] dx = \int \left( 2 + 5 \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$   
 $= 2 \int dx + 5 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 2x - 5 \cot x + C .$
- 14)  $\int 2 \sin x dx = 2 \int \sin x dx = -2 \cos x + C .$
- 15)  $\int (\cos x + x^3) dx = \int \cos x dx + \int x^3 dx = \sin x + \frac{x^4}{4} + C .$
- 16)  $\int \left( \frac{-x^4}{2} - 3 \cos x \right) dx = -\frac{1}{2} \int x^4 dx - 3 \int \cos x dx = -\frac{x^5}{10} - 3 \sin x + C .$
- 17)  $\int \left( 2 \cos x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = 2 \sin x + 6\sqrt{x} + C .$
- 18)  $\int (3\sqrt{x} - 4 \sin x) dx = 2x\sqrt{x} + 4 \cos x + C$
- 19) Ta có:  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos 2 \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$   
 Do đó:  $\int \left( x + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \left( x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) dx = \frac{x^2 + x - \sin x}{2} + C$

$$20) \text{ Ta có: } (2 \tan x + \cot x)^2 = 4 \tan^2 x + 4 + \cot^2 x = \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \int (2 \tan x + \cot x)^2 dx &= \int \left( \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx \\ &= 4 \tan x - \cot x - x + C \end{aligned}$$

$$21) \int 3 \cos x dx = 3 \int \cos x dx = 3 \sin x + C.$$

$$22) \int (\sin x + \cos x) dx = \int \sin x dx + \int \cos x dx = -\cos x + \sin x + C.$$

$$23) \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x - \tan x + C.$$

$$24) \int (1 + \tan^2 x) dx = \int \left( 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \tan x + C.$$

$$25) \int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

**Câu 3.** Tìm:

1) $\int e^{4x+1} dx$	2) $\int 2^{4x+3} dx$	3) $\int \frac{1}{7^{x+1}} dx$	4) $\int (e^x + x^e) dx$
5) $\int 4^x dx$	6) $\int e^{3x} dx$	7) $\int 2^x \cdot 3^x dx$	8) $\int e^{5x} dx$
9) $\int \frac{1}{2024^x} dx$	10) $\int (2^x + x^2) dx$	11) $\int (2^x \cdot 3^{2x+1}) dx$	12) $\int \frac{3^x + 4^x + 1}{5^x} dx$
13) $\int (5^x + 1)(5^x - 1) dx$	14) $\int e^{-0,5x} dx$	15) $\int 2^{x-1} \cdot 5^{2x+1} dx$	16) $\int \left( 2e^x + \frac{1}{3^x} \right) dx$
17) $\int (x^2 + 2^x) dx$	18) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$	19) $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$	

**Lời giải**

$$1) \int e^{4x+1} dx = e \int (e^4)^x dx = e \cdot \frac{(e^4)^x}{\ln e^4} + C = \frac{e^{4x+1}}{4} + C.$$

$$2) \int 2^{4x+3} dx = 8 \int 2^{4x} dx = 8 \int (2^4)^x dx = 8 \int 16^x dx = 8 \cdot \frac{16^x}{\ln 16} + C = \frac{2^{4x+1}}{\ln 2} + C.$$

$$3) \int \frac{1}{7^{x+1}} dx = \frac{1}{7} \int \frac{1}{7^x} dx = \frac{1}{7} \int \left( \frac{1}{7} \right)^x dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{\left( \frac{1}{7} \right)^x}{\ln \frac{1}{7}} + C = \frac{-1}{7^{x+1} \ln 7} + C.$$

$$4) \int (e^x + x^e) dx = \int e^x dx + \int x^e dx = e^x + \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$$

$$5) \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C.$$

$$6) \int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{1}{3} e^{3x} + C.$$

$$7) \int 2^x \cdot 3^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} + C.$$

$$8) \int e^{5x} dx = \int (e^5)^x dx = \frac{(e^5)^x}{\ln e^5} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C$$

$$9) \int \frac{1}{2024^x} dx = \int \left( \frac{1}{2024} \right)^x dx = \frac{\left( \frac{1}{2024} \right)^x}{\ln \frac{1}{2024}} + C = \frac{-1}{2024^x \ln 2024} + C.$$

$$10) \int (2^x + x^2) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$11) \int (2^x \cdot 3^{2x+1}) dx = 3 \int 18^x dx = \frac{3 \cdot 18^x}{\ln 18} + C.$$

$$12) \int \frac{3^x + 4^x + 1}{5^x} dx = \int \left[ \left( \frac{3}{5} \right)^x + \left( \frac{4}{5} \right)^x + \left( \frac{1}{5} \right)^x \right] dx$$

$$= \frac{3^x}{5^x (\ln 3 - \ln 5)} + \frac{4^x}{5^x (\ln 4 - \ln 5)} - \frac{1}{5^x \ln 5} + C.$$

$$13) \int (5^x + 1)(5^x - 1) dx = \int (25^x - 1) dx = \frac{25^x}{\ln 25} - x + C = \frac{25^x}{2 \ln 5} - x + C$$

$$14) \int e^{-0,5x} dx = \int (e^{-0,5})^x dx = \frac{(e^{-0,5})^x}{\ln e^{-0,5}} + C = \frac{e^{-0,5x}}{-0,5} + C = -2e^{-0,5x} + C;$$

$$15) \int 2^{x-1} \cdot 5^{2x+1} dx = \int \frac{2^x}{2} \cdot 5 \cdot 25^x dx = \frac{5}{2} \int 50^x dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{50^x}{\ln 50} + C.$$

$$16) \int \left( 2e^x + \frac{1}{3^x} \right) dx = 2e^x - \frac{1}{3^x \ln 3} + C.$$

$$17) \int (x^2 + 2^x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$18) \text{Ta có: } (2^x + 3^x)^2 = 4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x$$

$$\text{Do đó: } \int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{2 \ln 2} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{2 \ln 3} + C$$

$$19) \int (e^x - e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + e^{-2x} - 2) dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} - 2x + C.$$

**Câu 4.** Tìm:

1) $\int \frac{2 \sin x}{3} dx$	2) $\int \frac{3^{x-1}}{2} dx.$	3) $\int 2^x \ln 2 dx;$	4) $\int 2x \cos(x^2) dx$
5) $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$	6) $\int \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} dx$ trên (0; +∞).	7) $f(x) = 3 \cos x - \frac{4}{x}$	8) $g(x) = (2x + 1)^3.$
9) $\int 6x^3 dx$	10) $\int 4^{x+1} dx$	11) $\int 6(1 + \cot^2 x) dx.$	12) $\int (3x^2 - \cos x) dx;$
13) $\int \left( 3 \sin x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} \right) dx;$	14) $\int \left( \frac{2}{\cos^2 x} - 5^x \right) dx.$	15) $\int t(t^2 - 2) dt;$	16) $\int \frac{2t + 1}{t} dt.$
17) $\int 2x(1 + 3x^3) dx$	18) $\int \frac{x^4 + x + 1}{x^3} dx$	19) $\int (x + 2)(x^2 - 2x + 4) dx$	20) $\int \frac{3x^2 - 1}{x^3} dx$

21) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$	22) $\int \frac{\sin^3 x - 2}{\sin^2 x} dx$		
--------------------------------------	---	--	--

**Lời giải**

- 1)  $\int \frac{2 \sin x}{3} dx = \frac{2}{3} \int \sin x dx = -\frac{2}{3} \cos x + C;$
- 2)  $\int \frac{3^{x-1}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{3^x}{3} dx = \frac{1}{6} \int 3^x dx = \frac{3^x}{6 \ln 3} + C.$
- 3)  $\int 2^x \ln 2 dx = \int (2^x)' dx = 2^x + C.$
- 4)  $\int 2x \cos(x^2) dx = \int [\sin(x^2)]' dx = \sin(x^2) + C.$
- 5)  $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{x + \sin x}{2} + C.$
- 6)  $\int \frac{x^2+7x+12}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)(x+4)}{x+3} dx = \int (x+4) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C.$
- 7)  $\int \left(3 \cos x - \frac{4}{x}\right) dx = 3 \int \cos x dx - 4 \int \frac{1}{x} dx = 3 \sin x - 4 \ln |x| + C;$
- 8)  $\int (2x+1)^3 dx = \int (8x^3+12x^2+6x+1) dx = 8 \int x^3 dx + 12 \int x^2 dx + 6 \int x dx + \int 1 dx$   
 $= 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + C.$
- 9)  $\int 6x^3 dx = 6 \int x^3 dx = 6 \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{3}{2} x^4 + C.$
- 10)  $\int 4^{x+1} dx = \int 4 \cdot 4^x dx = 4 \int 4^x dx = 4 \cdot \frac{4^x}{\ln 4} + C = \frac{4^{x+1}}{\ln 4} + C.$
- 11)  $\int 6(1 + \cot^2 x) dx = 6 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -6 \cot x + C.$
- 12)  $\int (3x^2 - \cos x) dx = 3 \int x^2 dx - \int \cos x dx = x^3 - \sin x + C.$
- 13)  $\int \left(3 \sin x - \frac{2}{\sqrt{x^3}}\right) dx = 3 \int \sin x dx - 2 \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -3 \cos x + 4x^{\frac{1}{2}} + C = -3 \cos x + \frac{4}{\sqrt{x}} + C.$
- 14)  $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 5^x\right) dx = 2 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 5^x dx = 2 \tan x - \frac{5^x}{\ln 5} + C.$
- 15)  $\int t(t^2 - 2) dt = \int (t^3 - 2t) dt = \int t^3 dt - 2 \int t dt = \frac{t^4}{4} - 2 \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{t^4}{4} - t^2 + C.$
- 16)  $\int \frac{2t+1}{t} dt = \int \left(2 + \frac{1}{t}\right) dt = \int 2 dt + \int \frac{1}{t} dt = 2t + \ln |t| + C.$
- 17)  $\int 2x(1+3x^3) dx = \int (2x+6x^4) dx = x^2 + \frac{6}{5} x^5 + C = x^2 \left(1 + \frac{6x^3}{5}\right) + C$
- 18)  $\int \frac{x^4+x+1}{x^3} dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2} + x^{-3}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot x^{-2} + C.$   
 $= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$
- 19)  $\int (x+2)(x^2-2x+4) dx = \int (x^3+8) dx = \int x^3 dx + \int 8 dx$   
 $= \frac{x^4}{4} + 8x + C$

$$20) \int \frac{3x^2 - 1}{x^3} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-3} dx = 3 \ln |x| - \frac{1}{-2} x^{-2} + C = 3 \ln |x| + \frac{1}{2x^2} + C$$

$$21) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \int (e^2)^x dx - \int e^x dx + \int dx$$

$$= \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - e^x + x + C = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C;$$

$$22) \int \frac{\sin^3 x - 2}{\sin^2 x} dx = \int \sin x dx + 2 \int \frac{-1}{\sin^2 x} dx = -\cos x + 2 \cot x + C.$$

## Dạng 2. Nguyên hàm có điều kiện

**Câu 5.** Tìm hàm số  $y = f(x)$ , biết  $f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$  ( $x > 0$ ) và  $f(1) = 1$ .

**Lời giải**

$$f(x) = \int \left( 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + C$$

$$f(1) = 5 + C = 1 \Rightarrow C = -4.$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4.$$

**Câu 6.** Tìm hàm số  $f(x)$  biết rằng  $f'(x) = 2x - 6e^{-2x}$  và  $f(0) = -2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 6e^{-2x}) dx = 2 \int x dx - 6 \int (e^{-2})^x dx$$

$$= x^2 - 6 \cdot \frac{(e^{-2})^x}{\ln e^{-2}} + C = x^2 + 3e^{-2x} + C. \quad f(0) = -2 \text{ suy ra } 3 + C = -2, \text{ suy ra } C = -5.$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^2 + 3e^{-2x} - 5.$$

**Câu 7.** Tìm hàm số  $f(x)$ , biết rằng:

**a)**  $f'(x) = 2x^3 - 4x + 1, f(1) = 0;$

**b)**  $f'(x) = 5 \cos x - \sin x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

**Lời giải**

**a)**  $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x^3 - 4x + 1) dx = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + C.$

$$f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + \frac{1}{2}.$$

**b)**  $f(x) = \int f'(x) dx = \int (5 \cos x - \sin x) dx = 5 \sin x + \cos x + C.$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 5 + C = 1 \Rightarrow C = -4 \Rightarrow f(x) = 5 \sin x + \cos x - 4$$

**Câu 8.** Biết rằng đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  đi qua điểm  $(1; 2)$  và có hệ số góc của tiếp tuyến tại mỗi điểm  $(x; f(x))$  là  $\frac{1-x}{x^2}$  với  $x > 0$ . Tìm hàm số  $f(x)$ .

**Lời giải**

Theo giả thiết, ta có  $f'(x) = \frac{1-x}{x^2}$  với  $x > 0$  và  $f(1) = 2$ .

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1-x}{x^2} dx = \int \left( x^{-2} - \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{x} - \ln x + C$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow -1 + C = 2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x + 3$$



**Câu 9.** Tìm đạo hàm của hàm số  $F(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 4} - x)$ . Từ đó, tìm  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } F'(x) &= \left[ \ln(\sqrt{x^2 + 4} - x) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \cdot (\sqrt{x^2 + 4} - x)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \cdot \left( \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} - 1 \right) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx &= \int [-F'(x)] dx = -\int F'(x) dx = -F(x) + C \\ &= -\ln(\sqrt{x^2 + 4} - x) + C \end{aligned}$$

**Câu 10.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = 2x + 3x^2$ , biết  $F(0) = 1$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \int (2x + 3x^2) dx = \int 2x dx + \int 3x^2 dx = \int (x^2)' dx + \int (x^3)' dx = x^2 + x^3 + C.$$

$$\text{Vì } F(0) = 1 \text{ nên } 0^2 + 0^3 + C = 1, \text{ suy ra } C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^2 + x^3 + 1.$$

## NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

### Dạng 3. Ứng dụng

#### 1. BÀI TOÁN VỀ VẬN TỐC

**Phương pháp giải**

- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường:  $s(t) = \int v(t) dt$ .

- Rút ra kết luận bài toán.

**Ví dụ 1.** Vận tốc của một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng tại thời điểm  $t$  là  $v(t) = 160 - 9,8t(m/s)$  (coi  $t = 0$  là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tính quãng đường đi được của viên đạn kể từ khi bắn lên cho đến thời điểm  $t$ ?

**Bài giải**

$$\text{Quãng đường đi được của viên đạn là } s(t) = \int v(t) dt = \int (160 - 9,8t) dt = 160t - 9,8 \frac{t^2}{2} + C.$$

#### 2. BÀI TOÁN VỀ GIA TỐC

**Phương pháp giải**

- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường:  $v(t) = \int a(t) dt$ .

- Rút ra kết luận bài toán.

**Ví dụ 2.** Một viên đạn được bắn lên trời (phương thẳng đứng) với vận tốc là  $72 m/s$  bắt đầu từ  $2m$ . Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian  $5s$  kể từ lúc bắn.

**Bài giải**

$$\text{Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm } t \text{ là } v(t) = \int -9,8 dt = -9,8t + C_1.$$

$$\text{Do } v(0) = 72 \text{ nên } v(0) = -9,8 \cdot 0 + C_1 = 72 \Leftrightarrow C_1 = 72 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 72.$$

Độ cao của viên đạn tại thời điểm  $t$  là

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-9,8t + 72) dt = -4,9t^2 + 72t + C_2.$$

$$\text{Vì } s(0) = 2 \text{ nên } s(0) = -4,9 \cdot 0^2 + 72 \cdot 0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + 72t + 2$$

Vậy sau khoảng thời gian  $5s$  kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5) = -4,9 \cdot 5^2 + 72 \cdot 5 + 2 = 239,5(m).$$

#### 3. BÀI TOÁN VỀ KINH TẾ

**Phương pháp giải**

- Nếu biết  $f(x)$  là hàm giá trị biên, thì hàm mục tiêu sẽ là  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

- Rút ra kết luận bài toán.

**Ví dụ 3.** Một công ti cho biết hàm chi phí biên của việc sản xuất sản phẩm A là  $MC = 3x^2 + 2x + 3$ .

Hỏi hàm tổng chi phí của việc sản xuất sản phẩm A là gì?

**Bài giải**

Hàm tổng chi phí là  $TC(x) = \int (MC)dx = \int (3x^2 + 2x + 3)dx = x^3 + x^2 + 3x + C_0$ .

Khi  $x=0$  thì  $TC(x) = C_0$ . Giá trị này gọi là định phí của công ti (FC nghĩa là fix cost) không phụ thuộc vào sản lượng sản xuất. Do đó ta có  $TC(x) = x^3 + x^2 + 3x + FC$ .

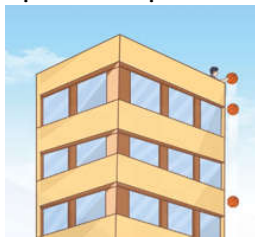
**Câu 19.** Vận tốc của một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng tại thời điểm  $t$  là  $v(t) = 180 - 9,8t(m/s)$  (coi  $t=0$  là thời điểm viên đạn được bắn lên). Tính quãng đường đi được của viên đạn kể từ khi bắn lên cho đến thời điểm  $t$ .

**Lời giải**

Quãng đường đi được của viên đạn là

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (180 - 9,8t)dt = 180t - 9,8\frac{t^2}{2} + C.$$

**Câu 20.** Khi được thả từ độ cao  $20m$ , một vật rơi với gia tốc không đổi  $a = 10m/s^2$ . Sau khi rơi được  $t$  giây thì vật có tốc độ bao nhiêu và đi được quãng đường bao nhiêu?



**Lời giải**

Kí hiệu  $v(t)$  là tốc độ của vật,  $s(t)$  là quãng đường vật đi được cho đến thời điểm  $t$  giây kể từ khi vật bắt đầu rơi.

$$\text{Vì } a(t) = v'(t) \text{ nên } v(t) = \int a(t)dt = \int 10dt = 10t + C.$$

$$\text{Ta có } v(0) = 0 \text{ nên } 10.0 + C = 0 \text{ hay } C = 0. \text{ Vậy } v(t) = 10t(m/s).$$

$$\text{Vì } v(t) = s'(t) \text{ nên } s(t) = \int v(t)dt = \int 10t dt = 5t^2 + C.$$

$$\text{Ta có } s(0) = 0 \text{ nên } 5.0^2 + C = 0 \text{ hay } C = 0. \text{ Vậy } s(t) = 5t^2(m).$$

$$\text{Vật rơi từ độ cao } 20m \text{ nên } s(t) \leq 20, \text{ suy ra } 0 \leq t \leq 2.$$

Vậy sau khi vật rơi được  $t$  giây ( $0 \leq t \leq 2$ ) thì vật có tốc độ  $v(t) = 10m/s$  và đi được quãng đường  $s(t) = 5t^2$  mét.

**Câu 21.** Một ô tô đang chạy với tốc độ  $19m/s$  thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ  $v(t) = 19 - 2t(m/s)$ . Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 1 giây, 2 giây, 3 giây là bao nhiêu?

**Lời giải**

Gọi  $s(t)$  là quãng đường ô tô đi được kể từ khi hãm phanh cho đến thời điểm  $t$  giây.

Do  $s'(t) = v(t)$ , nên

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (19 - 2t)dt = 19 \int dt - \int 2tdt = 19t - t^2 + C.$$

Mặt khác, do mốc thời gian được tính kể từ khi hãm phanh, nên  $s(0) = 0$ .

$$\text{suy ra } 19.0 - 0^2 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy quãng đường ô tô đi được kể từ khi hãm phanh cho đến thời điểm } t \text{ giây là } s(t) = 19t - t^2.$$

$$\text{Quãng đường ô tô đi được sau 1 giây hãm phanh là } s(1) = 19.1 - 1^2 = 18(m).$$

$$\text{Quãng đường ô tô đi được sau 2 giây hãm phanh là } s(2) = 19.2 - 2^2 = 34(m).$$

$$\text{Quãng đường ô tô đi được sau 3 giây hãm phanh là } s(3) = 19.3 - 3^2 = 48(m).$$

**Câu 22.** Một quả bóng được ném lên từ độ cao 24,5 m với vận tốc được tính bởi công thức  $v(t) = -9,8t + 19,6(m/s)$ .

- a) Viết công thức tính độ cao của quả bóng theo thời gian  $t$ .  
b) Sau bao nhiêu lâu kể từ khi ném lên thì quả bóng chạm đất?

**Lời giải**

a) Gọi  $h(t)$  là độ cao của quả bóng tại thời điểm  $t$  ( $h(t)$  tính theo mét,  $t$  tính theo giây).

Khi đó, ta có:  $h(t) = \int (-9,8t + 19,6)dt = -4,9t^2 + 19,6t + C$ .

Mà quả bóng được ném lên từ độ cao 24,5m tức là tại thời điểm  $t = 0$  thì  $h = 24,5$  hay  $h(0) = 24,5$ . Suy ra  $C = 24,5$ .

Vậy công thức tính độ cao  $h(t)$  của quả bóng theo thời gian  $t$  là:

$$h(t) = -4,9t^2 + 19,6t + 24,5.$$

b) Khi quả bóng chạm đất thì  $h(t) = 0$ . Ta có:  $-4,9t^2 + 19,6t + 24,5 = 0$ . Giải phương trình ta được  $t = -1; t = 5$ . Mà  $t > 0$  nên  $t = 5$ .

Vậy sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

**Câu 23.** Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức  $h'(t) = 1,5t + 5$ , trong đó  $h(t)(cm)$  là chiều cao của cây khi kết thúc  $t$  (năm). Cây con khi được trồng cao 12cm.

- a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau  $t$  năm.  
b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

**Lời giải**

$$a) \int h'(t)dt = \int (1,5t + 5)dt = 0,75t^2 + 5t + C$$

Vậy công thức chỉ chiều cao của cây sau  $t$  năm là:  $0,75t^2 + 5t + C$

$$b) \text{Đặt } H(t) = 0,75t^2 + 5t + C$$

Tại  $t = 0$  thì  $H(0) = 12$  suy ra  $C = 12$

Khi được bán, tức là sau 6 năm thì cây cao:  $H(6) = 0,75.6^2 + 5.6 + 12 = 69cm$

**Câu 24.** Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số  $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$  trong đó  $t$  tính bằng giờ ( $0 \leq t \leq 15$ ),  $B'(t)$  tính bằng khách/giờ. Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

- a) Viết công thức của hàm số  $B(t)$  biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với  $0 \leq t \leq 15$ .  
b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?  
c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?  
d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

**Lời giải**

$$a) \int B'(t)dt = \int (20t^3 - 300t^2 + 1000t)dt = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$$

$$B(1) = 500 \Leftrightarrow 5 - 100 + 500 + C = 500 \Leftrightarrow C = 95$$

$$\text{Vậy } B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95$$

$$b) B(3) = 5.3^4 - 100.3^3 + 500.3^2 + 95 = 2300$$

Vậy sau 3h sẽ có 2300 khách tham dự lễ hội

$$c) B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \\ t = 10 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

$t$	0	5	10	15			
$B'(t)$		+	0	-	0	+	
$B(t)$	95	↗	3220	↘	95	↗	28220

Từ bảng biến thiên ta thấy,  $B(t)$  max tại  $t = 15$   
 Vậy số lượng khách tham dự lớn nhất là: 28220 khách

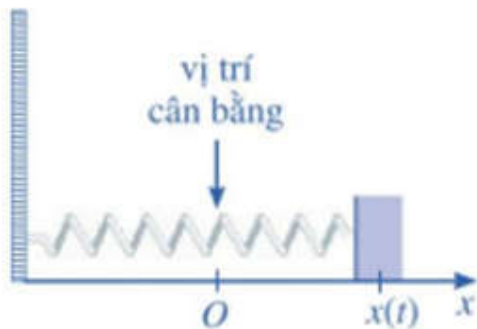
$$d) B''(t) = 60t^2 - 600t + 1000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{15-5\sqrt{3}}{3} \\ t = \frac{15+5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

$x$	0	$\frac{15-5\sqrt{3}}{3}$		$\frac{15+5\sqrt{3}}{3}$		15
$y'$		+	0	-	0	+
$y$	1000	$\nearrow$ 962,25		$\searrow$ -962,25		$\nearrow$ 15000

Từ bảng biến thiên ta thấy,  $B'(t)$  max tại  $t = 15$   
 Vậy tại thời điểm  $t = 15$  giờ thì tốc độ thay đổi lượng khách tham gia dự lễ hội là lớn nhất

**Câu 25.** Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình, có vận tốc tức thời cho bởi  $v(t) = 4 \cos t$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $v(t)$  tính bằng centimet/giây. Tại thời điểm  $t = 0$ , con lắc đó ở vị trí cân bằng.



Phương trình chuyển động của con lắc đó được xác định bằng cách nào?

**Lời giải**

Giả sử con lắc chuyển động theo phương trình:  $s = s(t)$ . Suy ra  $s'(t) = v(t)$ , do đó  $s(t)$  là một nguyên hàm của  $v(t)$ . Ta có:

$$\int v(t) dt = \int 4 \cos t dt = 4 \int \cos t dt = 4 \sin t + C.$$

Suy ra  $s(t) = 4 \sin t + C$ .

Tại thời điểm  $t = 0$ , ta có  $s(0) = 0$ , tức là  $4 \sin 0 + C = 0$ , hay  $C = 0$ .

Vậy phương trình chuyển động của con lắc là:  $s(t) = 4 \sin t$ .

### NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

#### Dạng 4. Sử dụng tính chất đạo hàm của hàm hợp để tìm nguyên hàm hàm ẩn

**Dạng 1.** Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Để dàng thấy rằng  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra  $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 2.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

**Phương pháp:**

Chia hai vế với  $f(x)$  ta được  $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra  $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\int p(x)dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Dạng 3.** Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức  $f'(x) + f(x) = h(x)$

**Phương pháp:**

Nhân hai vế với  $e^x$  ta được  $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra  $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$

**Câu 33. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$ . Biết  $f(1) = \frac{1}{2}$ . Tính  $f(4)$ ?

**Lời giải**

Trên khoảng  $(0; +\infty)$  ta có:  $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^2$ .

$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \int (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int \frac{3}{2}x^2 dx$ .

$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C$ . (\*)

Mà  $f(1) = \frac{1}{2}$  nên từ (\*) có:  $\sqrt{1} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{2}$ .

Vậy  $f(4) = \frac{4^2\sqrt{4}}{2} = 16$ .

**Câu 34. (Cần Thơ 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 3$ . Tính giá trị của  $[f(1)]^2$

**Lời giải**

Ta có  $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$ .

Do đó theo giả thiết ta được  $[f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1$ .

Suy ra  $f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$ . Hơn nữa  $f(0) = f'(0) = 3$  suy ra  $C = 9$ .

Tương tự vì  $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$  nên  $[f^2(x)]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)$ . Suy ra

$f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C$ , cũng vì  $f(0) = 3$  suy ra

$f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9$ . Do đó  $[f(1)]^2 = 28$ .

**Câu 35. (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$  và  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Tính  $f(2)$ .

**Lời giải**

Ta có

$$(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow (x+1)f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)] + [(x+1)f(x)]' = e^x \Leftrightarrow e^x [(x+1)f(x)] + e^x [(x+1)f(x)]' = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow [e^x(x+1)f(x)]' = e^{2x} \Rightarrow \int [e^x(x+1)f(x)]' dx = \int e^{2x} dx \Leftrightarrow e^x(x+1)f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Mà  $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$ . Vậy  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1}$

Khi đó  $f(2) = \frac{e^2}{6}$ .

**Câu 36. (Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$  thỏa mãn điều kiện  $f(1) = -2 \ln 2$  và  $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$ . Giá trị  $f(2) = a + b \ln 3$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $a^2 + b^2$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết, ta có  $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}.f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{x}{x+1}.f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}.$$

Suy ra  $\frac{x}{x+1}.f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx$  hay  $\frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| + C$ .

Mặt khác, ta có  $f(1) = -2 \ln 2$  nên  $C = -1$ . Do đó  $\frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| - 1$ .

Với  $x = 2$  thì  $\frac{2}{3}.f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3$ . Suy ra  $a = \frac{3}{2}$  và  $b = -\frac{3}{2}$ .

Vậy  $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$ .

**Câu 37.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 0$ . Tính  $f(1)$ .

**Lời giải**

Ta có

$$f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) + 2x.e^{x^2}.f(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{x^2}.f(x))' = 1.$$

$$\text{Suy ra } \int (e^{x^2}.f(x))' dx = \int dx \Leftrightarrow e^{x^2}.f(x) = x + C \Rightarrow f(x) = \frac{x+C}{e^{x^2}}.$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}. \text{ Vậy } f(1) = \frac{1}{e}.$$

**Câu 38. (Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 2$ . Tìm tất cả các nguyên hàm của  $f(x)e^{2x}$

**Lời giải**

$$f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C'.$$

$$\text{Vì } f(0) = 2 \text{ nên } C' = 2. \text{ Do đó } f(x)e^{2x} = (x+2)e^x. \text{ Vậy:}$$

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{2x} dx &= \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)d(e^x) = (x+2)e^x - \int e^x d(x+2) = (x+2)e^x - \int e^x dx = \\ &= (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C. \end{aligned}$$

**Câu 39. (Chuyên KHTN - 2021)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x}$  với mọi  $x$ . Tính  $f'(0)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } xf'(x) + (x+1)f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) + xf(x) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow xe^x f'(x) + (x+1)e^x f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow xe^x f'(x) + (xe^x)' f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (xe^x f(x))' = 1$$

$$\Leftrightarrow xe^x f(x) = \int dx = x + C \quad (*)$$

$$\text{Với } x = 0$$

$$+) \text{ Thay vào biểu thức ban đầu ta có: } 0.f'(0) + (0+1)f(0) = e^{-0} = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

$$+) \text{ Thay vào } (*), \text{ ta có: } C = 0.$$

$$\text{Khi đó: } xe^x f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -1.$$

**Câu 40.** Biết  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ . Hỏi đồ thị của hàm số  $y = F(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng  $(0; 4\pi)$ ?

**Lời giải**

$$\text{Ta có } F'(x) = f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \text{ trên } (0; 4\pi).$$

$$F'(x) = f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x \cos x - \sin x = 0 \text{ trên } (0; 4\pi).$$

Đặt  $g(x) = x \cos x - \sin x$  trên  $(0; 4\pi)$ .

Ta có  $g'(x) = -x \cdot \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi \\ x = 2\pi \\ x = 3\pi \end{cases}$  trên  $(0; 4\pi)$ .

Từ đó có bảng biến thiên của  $g(x)$ :


$x$	0	$\pi$	$x_1$	$2\pi$	$x_2$	$3\pi$	$x_3$	$4\pi$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+		
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\pi$	$\nearrow$	0

Vì  $g(x)$  liên tục và đồng biến trên  $[\pi; 2\pi]$  và  $g(\pi) \cdot g(2\pi) < 0$  nên tồn tại duy nhất  $x_1 \in (\pi; 2\pi)$  sao cho  $g(x_1) = 0$ .

Tương tự ta có  $g(x_2) = 0$ ,  $g(x_3) = 0$  với  $x_2 \in (2\pi; 3\pi)$ ,  $x_3 \in (3\pi; 4\pi)$ .

Từ bảng biến thiên của  $g(x)$  ta thấy  $g(x) < 0$  khi  $x \in (0; x_1)$  và  $x \in (x_2; x_3)$ ;  $g(x) > 0$  khi  $x \in (x_1; x_2)$  và  $x \in (x_3; 4\pi)$ . Dấu của  $f(x)$  là dấu của  $g(x)$  trên  $(0; 4\pi)$ .

Do đó ta có bảng biến thiên của  $F(x)$ :

$x$	0	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$4\pi$
$f(x)$	-	0	+	0	+
$F(x)$					

Vậy hàm số  $y = F(x)$  có ba cực trị.

## NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

### PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

**Câu 1.** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $K$  nếu

A.  $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$ .

B.  $f'(x) = F(x), \forall x \in K$ .

C.  $F'(x) = f(x), \forall x \in K$ .

D.  $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$ .

Lời giải

Chọn C



Theo định nghĩa thì hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $K$  nếu  $F'(x) = f(x), \forall x \in K$ .

**Câu 2.** (Mã 101 - 2020 Lần 1)  $\int x^2 dx$  bằng

- A.  $2x + C$ .      **B.**  $\frac{1}{3}x^3 + C$ .      C.  $x^3 + C$ .      D.  $3x^3 + C$

Lời giải

Chọn B.

**Câu 3.** Hàm số nào sau đây **không** là một nguyên hàm của  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  trên  $(0; +\infty)$ ?

- A.  $F_1(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + 1$ .      B.  $F_3(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + 3$ .  
C.  $F_4(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 4$ .      **D.**  $F_2(x) = \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{4} + 2$ .

Lời giải

Với  $x \in (0; +\infty)$ , ta có:  $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ .

Suy ra:  $F(x) = \int f(x) dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$ .

**Câu 4.** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3$  là

- A.  $4x^4 + C$ .      B.  $3x^2 + C$ .      C.  $x^4 + C$ .      **D.**  $\frac{1}{4}x^4 + C$ .

Lời giải

Chọn D

Ta có  $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ .

**Câu 5.** (Mã 104 - 2020 Lần 2)  $\int 4x^3 dx$  bằng

- A.  $4x^4 + C$ .      B.  $\frac{1}{4}x^4 + C$ .      C.  $12x^2 + C$ .      **D.**  $x^4 + C$ .

Lời giải

Chọn D

Ta có  $\int 4x^3 dx = x^4 + C$ .

**Câu 6.** (Mã 103 2018) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^4 + x^2$  là

- A.  $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$       B.  $x^4 + x^2 + C$       C.  $x^5 + x^3 + C$ .      **D.**  $4x^3 + 2x + C$

Lời giải

Chọn A

$\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ .

**Câu 7.** (Mã 104 - 2019) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 4$  là

- A.  $x^2 + C$ .      B.  $2x^2 + C$ .      C.  $2x^2 + 4x + C$ .      **D.**  $x^2 + 4x + C$ .

Lời giải

Chọn D

Ta có  $\int f(x) dx = \int (2x + 4) dx = x^2 + 4x + C$ .

**Câu 8.** (Mã 102 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 6$  là

- A.  $x^2 + C$ .                      B.  $x^2 + 6x + C$ .                      C.  $2x^2 + C$ .                      D.  $2x^2 + 6x + C$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\int (2x + 6) dx = x^2 + 6x + C$$

**Câu 9.** (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos x + 6x$  là

- A.  $\sin x + 3x^2 + C$ .                      B.  $-\sin x + 3x^2 + C$ .                      C.  $\sin x + 6x^2 + C$ .                      D.  $-\sin x + C$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (\cos x + 6x) dx = \sin x + 3x^2 + C.$$

**Câu 10.** (Mã 101-2021-Lần 1) Cho hàm số  $f(x) = x^2 + 4$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.  $\int f(x) dx = 2x + C$ .                      B.  $\int f(x) dx = x^2 + 4x + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$ .                      D.  $\int f(x) dx = x^3 + 4x + C$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } f(x) = x^2 + 4 \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$$

**Câu 11.** (Mã 101-2021-Lần 2) Cho hàm số  $f(x) = 4 + \cos x$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.  $\int f(x) dx = -\sin x + C$ .                      B.  $\int f(x) dx = 4x + \sin x + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = 4x - \sin x + C$ .                      D.  $\int f(x) dx = 4x + \cos x + C$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = 4x + \sin x + C.$$

**Câu 12.** (Mã 101-2021-Lần 1) Cho hàm số  $f(x) = e^x + 2$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.  $\int f(x) dx = e^{x-2} + C$ .                      B.  $\int f(x) dx = e^x + 2x + C$ .  
C.  $\int f(x) dx = e^x + C$ .                      D.  $\int f(x) dx = e^x - 2x + C$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int (e^x + 2) dx = e^x + 2x + C$$

**Câu 13.** (Mã 105 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin x$ .

- A.  $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$                       B.  $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$   
C.  $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$                       D.  $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 14.** (Mã 101 2018) Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3 + x$  là

A.  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

B.  $3x^2 + 1 + C$

C.  $x^3 + x + C$

D.  $x^4 + x^2 + C$

Lời giải

Chọn A

$$\int (x^3 + x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

**Câu 15. (Mã 103 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 3$  là

A.  $x^2 + 3x + C.$

B.  $2x^2 + 3x + C.$

C.  $x^2 + C.$

D.  $2x^2 + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C.$$

**Câu 16. (Đề Tham Khảo 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}.$ 

A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

B.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

C.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

D.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int \left( x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$$

**Câu 17. (Đề Tham Khảo 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x + x$  là

A.  $e^x + 1 + C$

B.  $e^x + x^2 + C$

C.  $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

D.  $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

Lời giải

Chọn C**Câu 18. (Mã 101 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x + 5$  là

A.  $x^2 + C.$

B.  $x^2 + 5x + C.$

C.  $2x^2 + 5x + C.$

D.  $2x^2 + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số } f(x) = 2x + 5 \text{ là } F(x) = x^2 + 5x + C.$$

**Câu 19. (Mã 104 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 7^x.$ 

A.  $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

B.  $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

C.  $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

D.  $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1) \text{ ta được đáp án B}$$

**Câu 20. (Đề Tham Khảo 2018)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 1$  là

A.  $x^3 + C$

B.  $\frac{x^3}{3} + x + C$

C.  $6x + C$

D.  $x^3 + x + C$

Lời giải

**Chọn D**

$$\int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C.$$

**Câu 21. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$ .

A.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

B.  $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

**C.**  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

D.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

**Lời giải**

Ta có:  $\int \left( x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$

**Câu 22. (Chuyên KHTN 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + \sin x$  là

A.  $x^3 + \cos x + C.$

B.  $6x + \cos x + C.$

**C.**  $x^3 - \cos x + C.$

D.  $6x - \cos x + C.$

**Lời giải**

Ta có  $\int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C.$

**Câu 23. (Chuyên Bắc Ninh 2019)** Nếu  $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$  thì hàm số  $f(x)$  bằng

A.  $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx.$

B.  $f(x) = 12x^2 + 2x + C.$

**C.**  $f(x) = 12x^2 + 2x.$

D.  $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}.$

**Lời giải**

Có  $f(x) = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x.$

**Câu 24. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$  là

A.  $\ln x - \cos x + C.$

B.  $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C.$

C.  $\ln|x| + \cos x + C.$

**D.**  $\ln|x| - \cos x + C.$

**Lời giải**

Ta có  $\int f(x) dx = \int \left( \frac{1}{x} + \sin x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \sin x dx = \ln|x| - \cos x + C.$

**Câu 25. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019$  là

A.  $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$

B.  $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C.$

**C.**  $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C.$

D.  $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2019x + C.$

**Lời giải**

Sử dụng công thức  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  ta được:

$$\int \left( \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2019x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2019x + C.$$

**Câu 26. (Sở Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số  $f(x) = 2^x + x + 1$ . Tìm  $\int f(x) dx$ .

A.  $\int f(x) dx = 2^x + x^2 + x + C.$

B.  $\int f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$

C.  $\int f(x) dx = 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{x+1} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$

**Lời giải**

Ta có:  $\int (2^x + x + 1) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$

**Câu 27. (Quảng Ninh 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x \left( 2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right).$

A.  $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

B.  $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

C.  $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

D.  $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

**Lời giải**

$\int f(x) dx = \int e^x \left( 2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left( 2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$

**Câu 28. (Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm nguyên  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)?$

A.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C.$

B.  $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C.$

C.  $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$

D.  $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C.$

**Lời giải**

Ta có:  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \Rightarrow F(x) = \int (x^3 + 6x^2 + 11x + 6) dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$

**Câu 29. (Mã 101-2022)** Cho hàm số  $f(x) = e^x + 2x$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A.  $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C.$

B.  $\int f(x) dx = e^x + C.$

C.  $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C.$

D.  $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C.$

**Câu 30. (Mã 103 - 2022)** Hàm số  $F(x) = \cot x$  là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên

khoảng  $\left( 0; \frac{\pi}{2} \right)$

A.  $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}.$

B.  $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}.$

C.  $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$

D.  $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Có  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$  suy ra  $F(x) = \cot x$  trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

**Câu 31. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2019)** Hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{1}{x}$  trên  $(-\infty; 0)$  thỏa mãn  $F(-2) = 0$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.**  $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \forall x \in (-\infty; 0)$   
**B.**  $F(x) = \ln|x| + C \forall x \in (-\infty; 0)$  với  $C$  là một số thực bất kì.  
**C.**  $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \forall x \in (-\infty; 0)$ .  
**D.**  $F(x) = \ln(-x) + C \forall x \in (-\infty; 0)$  với  $C$  là một số thực bất kì.

**Lời giải**

Ta có  $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C$  với  $\forall x \in (-\infty; 0)$ .

Lại có  $F(-2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$ . Do đó  $F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right)$ .

Vậy  $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \forall x \in (-\infty; 0)$ .

**NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT**

**NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ GIỎI**

**Câu 53.** Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc  $a(t) = 2t + 1$  (m/s<sup>2</sup>). Hỏi rằng 5 s sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h.

- A.** 200. **B.** 243. **C.** 288. **D.** 300.

**Lời giải**

Ta có  $v(t) = \int a(t) dt = \int (2t + 1) dt = t^2 + t + C$ .

Mặt khác vận tốc ban đầu là 180 km/h hay 50 m/s nên ta có  $v(0) = 50 \Leftrightarrow C = 50$ .

Khi đó vận tốc của vật sau 5 giây là  $v(5) = 5^2 + 5 + 50 = 80$  m/s hay 288 km/h.

**Câu 54.** Một xe buýt bắt đầu đi từ một nhà chờ xe buýt  $A$  với vận tốc  $v(t) = 10 + 3t^2$  (m/s) (khi bắt đầu chuyển động từ  $A$  thì  $t = 0$ ) đến nhà chờ xe buýt  $B$  cách đó 175 m. Hỏi thời gian xe đi từ  $A$  đến  $B$  là bao nhiêu giây?

- A.** 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

**Lời giải**

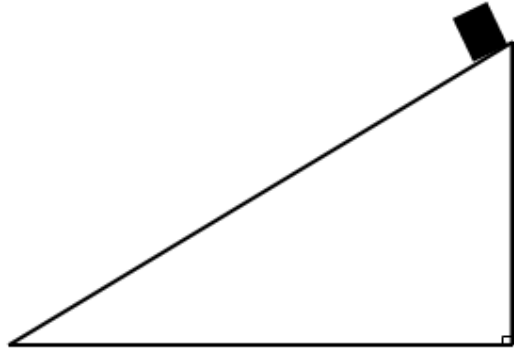
Quãng đường xe đi được sau thời gian  $t$  là

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (10 + 3t^2) dt = 10t + t^3 + C.$$

Tại  $t = 0$  thì  $S = 0$  nên  $C = 0 \Rightarrow s(t) = 10t + t^3$ .

Với  $S = 175$  thì  $t^3 + 10t - 175 = 0 \Leftrightarrow t = 5$ .

**Câu 55.** Một vận chuyển động không vận tốc đầu xuất phát từ đỉnh mặt phẳng nằm nghiêng (như hình vẽ). Biết gia tốc của chuyển động là 5 m/s<sup>2</sup> và sau 1,2 s thì vật đến chân của mặt ván. Độ dài của mặt ván là

**A.** 3,6m.**B.** 3,2m.**C.** 3m.**D.** 2,8m.**Lời giải**

Vì gia tốc của chuyển động là  $5\text{m/s}^2$  nên vận tốc của chuyển động được tính theo công thức

$$v(t) = \int a(t) dt = 5t + C.$$

Vì vận tốc ban đầu là 0 nên  $v(t) = 5t$  (m/s). Do đó quãng đường của chuyển động được xác định theo công thức

$$s(t) = \int v(t) dt = \frac{5}{2}t^2 + C.$$

Lúc ban đầu vật chưa chuyển động nên ta chọn  $s(t) = \frac{5}{2}t^2$  (m).

Độ dài mặt ván chính là quãng đường vật chuyển động sau 1,2s là  $s = \frac{5}{2}(1,2)^2 = 3,6$  (m).

**Câu 56. (Sở Hà Tĩnh 2022)** Cho  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x) = \sin^2 x$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

Giá trị biểu thức  $S = F(-\pi) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  bằng

**A.**  $S = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{4}$ .

**B.**  $S = \frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4}$ .

**C.**  $S = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{8}$ .

**D.**  $S = \frac{3}{2} - \frac{3\pi}{8}$ .

**Lời giải****Chọn B**

Ta có  $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ .

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\text{Mà } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\sin \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

$$S = F(-\pi) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(-2\pi) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + 2\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{3\pi}{8}.$$

- Câu 57. (Sở Nam Định 2022)** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 3$ . Biết  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ , khi đó  $F(1)$  bằng
- A.  $\frac{32}{5} + \cos 1$ .      B.  $\frac{32}{5} - \cos 1$ .      C.  $\frac{32}{5} - \sin 1$ .      D.  $\frac{32}{5} + \sin 1$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 2x^4 - \cos x + C_1$ .

Mà  $f(0) = 3 \Leftrightarrow -1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 4$ . Vậy  $f(x) = 2x^4 - \cos x + 4$ .

Ta có:  $\int f(x) dx = \int (2x^4 - \cos x + 4) dx = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C$ .

Do đó:  $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C_2$ .

Mà:  $F(0) = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$ . Suy ra:  $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + 2$ .

Khi đó:  $F(1) = \frac{32}{5} - \sin 1$ .

- Câu 58. (Mã 103 2018)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{25}$  và  $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng

- A.  $-\frac{391}{400}$       B.  $-\frac{1}{40}$       C.  $-\frac{41}{400}$       D.  $-\frac{1}{10}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[ \frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$

Do  $f(2) = -\frac{1}{25}$ , nên ta có  $C = -9$ . Do đó  $f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$ .

- Câu 59. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số  $y = f(x)$  đồng biến và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $(f'(x))^2 = f(x).e^x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 2$ . Khi đó  $f(2)$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (12;13).      B. (9;10).      C. (11;12).      D. (13;14).

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì hàm số  $y = f(x)$  đồng biến và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  đồng thời  $f(0) = 2$  nên  $f'(x) \geq 0$  và  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in [0; +\infty)$ .

Từ giả thiết  $(f'(x))^2 = f(x).e^x, \forall x \in \mathbb{R}$  suy ra  $f'(x) = \sqrt{f(x)}.e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty)$ .



Do đó,  $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty).$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được  $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C, \forall x \in [0; +\infty)$  với  $C$  là hằng số nào đó.

Kết hợp với  $f(0) = 2$ , ta được  $C = \sqrt{2} - 1$ .

Từ đó, tính được  $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9,81$ .

### NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

#### PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**Câu 1.** Cho các hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  liên tục trên  $K$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a)  $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$ .
- b)  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ .
- c)  $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ .
- d)  $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$ .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

**Câu 2.** Cho  $K$  là một khoảng trên  $\mathbb{R}; F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$ ;  $G(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $g(x)$  trên  $K$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Nếu  $F(x) = G(x)$  thì  $f(x) = g(x)$ .
- b) Nếu  $f(x) = g(x)$  thì  $F(x) = G(x)$ .
- c)  $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ .
- d)  $\int f'(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

**Câu 3.** Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  và  $G(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $g(x)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a)  $F(x) + G(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) + g(x)$ .
- b)  $kF(x)$  là một nguyên hàm của  $kf(x)$  (với  $k$  là một hằng số thực khác 0).
- c)  $F(x) - G(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) - g(x)$ .
- d)  $F(x) \cdot G(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) \cdot g(x)$ .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Mệnh đề a), b), c đúng vì sử dụng tính chất của nguyên hàm.

Mệnh đề d) sai

**Câu 4.** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1).$

b)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0.$

c)  $\int e^x dx = e^x + C.$

d)  $\int \sin x dx = \cos x + C.$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Theo bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp ta có: Mệnh đề a, b, c đúng.

Mệnh đề d sai vì  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

**Câu 5.** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a)  $\int \sin x dx = \cos x + C.$

b)  $\int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x^2} + C.$

c)  $\int e^x dx = e^x + C.$

d)  $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) sai vì  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

b) sai vì  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

c) đúng vì  $\int e^x dx = e^x + C.$

d) sai vì  $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x) = \cot x, x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$  Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a)  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

b)  $(\sin x)' = -\cos x.$

c)  $(\ln|\sin x|)' = f(x).$

d)  $\int f(x) dx = \ln|\sin x| + C.$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

**Câu 7.** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a)  $\int \cos x dx = \sin x + C.$

b)  $\int \frac{2}{x} dx = \ln x^2 + C.$

c)  $\int \frac{x+1}{x} dx = x + \ln |x| + C.$

d) Nếu  $\int f(x)dx = \cos x + \ln |x| + C$  thì  $f(x) = \sin x + \frac{1}{x}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

b) Sai. Vì  $\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| + C.$

c) Đúng. Vì  $\int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln |x| + C.$

d) Sai.  $\int \left(\sin x + \frac{1}{x}\right) dx = -\cos x + \ln |x| + C.$

**Câu 8.** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a)  $\int f(x)dx = f'(x) + C.$

b)  $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

c)  $\int f'(x)dx = f(x)$

d)  $\int f''(x)dx = f'(x) + C.$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

**Câu 9.** Giả sử  $v(t)$  là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian  $t$  (giây),  $a(t)$  là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian  $t$  (giây). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a)  $\int a(t)dt = v(t) + C.$

b)  $\int v(t)dt = a(t) + C.$

c)  $\int v'(t)dt = a(t) + C.$

d)  $\int v'(t)dt = v(t) + C$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

**Câu 10.** Giả sử  $s(t)$  là phương trình quãng đường chuyển động của một vật theo thời gian  $t$  (giây) và  $v(t)$  là phương trình vận tốc của chuyển động đó theo thời gian  $t$  (giây). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a)  $\int s(t)dt = v(t) + C.$

b)  $\int v(t)dt = s(t) + C.$

c)  $\int s'(t)dt = v(t) + C.$

d)  $\int s'(t)dt = s(t) + C.$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

Vì  $s(t), v(t)$  lần lượt là phương trình quãng đường và phương trình vận tốc của chuyển động đó theo thời gian  $t$  (giây) nên ta có  $s'(t) = v(t).$

**Câu 11.** Cho hàm số  $f(x) = 4x^3 - 3x^2$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a)  $\int f(x)dx = \int 4x^3 dx - \int 3x^2 dx$ .  
 b)  $f'(x) = 12x^2 - 6x$ .  
 c)  $f'(x) = x^4 - x^3$ .  
 d)  $\int f(x)dx = x^4 + x^3 + C$ .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

**Câu 12.** Cho hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a)  $\int f(x)dx = \int \sin x dx + \int \cos x dx$ .  
 b)  $f'(x) = \cos x - \sin x$ .  
 c)  $f'(x) + f(x) = \cos x$ .  
 d)  $\int f(x)dx = -\cos x + \sin x + C$ .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

**Câu 13.** Cho hàm số  $f(x) = (x+2)(x+1)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a)  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ .  
 b)  $f'(x) = 2x + 3$ .  
 c)  $\int f(x)dx = \int (x+2)dx \cdot \int (x+1)dx$ .  
 d)  $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$ .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

**Câu 14.** Cho hàm số  $F(x) = x^3 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Nếu hàm số  $G(x)$  cũng là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  và  $G(-1) = 3$  thì  $G(x) = F(x) - 1, x \in \mathbb{R}$ .  
 b) Nếu hàm số  $H(x)$  cũng là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  và  $H(1) = -3$  thì  $H(x) = F(x) - 3, x \in \mathbb{R}$ .  
 c) Nếu hàm số  $K(x)$  cũng là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  và  $K(0) = 0$  thì  $K(x) = F(x) + 1, x \in \mathbb{R}$ .  
 d) Nếu hàm số  $M(x)$  cũng là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  và  $M(2) = 4$  thì  $M(x) = F(x) - 1, x \in \mathbb{R}$ .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

Vì  $G(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  nên  $G(x) = F(x) + C$ , với  $C$  là một hằng số. Mà  $G(-1) = 3$  nên ta có  $G(-1) = F(-1) + C \Leftrightarrow 3 = 2 + C \Leftrightarrow C = 1$ .

Vậy  $G(x) = F(x) + 1, x \in \mathbb{R}$ .

Tương tự, ta cũng có  $H(x) = F(x) - 3, K(x) = F(x) + 1, M(x) = F(x) - 1, x \in \mathbb{R}$ .

**Câu 15.** Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai

- a)  $\int (2^x + e^x)dx = 2^x + e^x + C$ .

b)  $\int (3 \cos x - 2^x) dx = 3 \sin x - 2^x \ln 2 + C.$

c)  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = x + \sin x + C.$

d)  $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C.$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

a) Sai.  $\int (2^x + e^x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + C.$

b) Sai.  $\int (3 \cos x - 2^x) dx = 3 \sin x - \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

c) Sai.  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C.$

d) Đúng.  $\int \tan^2 x dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$

**Câu 16.** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) Nếu  $\int f(x) dx = e^{2x} + C$  thì  $f(x) = e^{2x}.$

b)  $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx = -\cos x + C.$

c)  $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^2} dx = x - \ln |x| + \frac{2}{x} + C.$

d)  $\int (2 + \cot^2 x) dx = x - \cot x + C.$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

a) Sai. Nếu  $\int f(x) dx = e^{2x} + C$  thì  $f(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}.$

b) Sai.  $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C.$

c) Sai.  $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^2} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx = x - \ln |x| - \frac{2}{x} + C.$

d) Đúng.  $\int (2 + \cot^2 x) dx = \int \left( 2 + \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = x - \cot x + C.$

**NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT****PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN****Câu 1.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$ . Hàm số  $F(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Ta có  $F'(x) = f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$ ,  $F'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2}(x^3 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Suy ra hàm số  $F(x)$  có 3 điểm cực trị.**Câu 2.** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$  và  $F(2) = 2$ . Tính  $F(3)$ .

Lời giải

Ta có  $F(x) = \int f(x)dx = \int (3x^2 - 4x + 1)dx = x^3 - 2x^2 + x + C$ . Mà  $F(2) = 2$  nên suy ra  $C = 0$ .

Vậy hàm số  $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$ . Suy ra  $F(3) = 12$ .

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ ,  $f(0) = 4$  và  $f(1) = 1$ . Tính  $f(3)$ .

**Lời giải**

Ta có  $f'(x) = \int f''(x)dx = \int (12x^2 + 6x - 4)dx = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C_1$ .

$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x^3 + 3x^2 - 4x + C_1)dx = x^4 + x^3 - 2x^2 + C_1x + C_2$ .

Theo giả thiết, ta có  $\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 4 \\ 1 + 1 - 2 + C_1 + 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 4 \\ C_1 = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$

$\Rightarrow f(3) = 85$

**Câu 4.** Giả sử  $\int (0,1)^x dx = -\frac{1}{\ln a} \cdot b^x + C$ . Với  $a, b$  là các hằng số dương. Giá trị của biểu thức  $\frac{a}{b}$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Ta có:  $\int (0,1)^x dx = \frac{(0,1)^x}{\ln 0,1} + C = \frac{(0,1)^x}{\ln 10^{-1}} + C = -\frac{(0,1)^x}{\ln 10} + C$ .

Suy ra  $a = 10, b = 0,1$  vậy  $\frac{a}{b} = 100$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1)$  và  $F(-1) = \frac{1}{6}$ . Tính  $F\left(-\frac{1}{2}\right)$  (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

Ta có:  $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$ .

Suy ra  $F(x) = \int f(x)dx = \int (2x^3 + x^2 - 4x - 2)dx$

$= \int 2x^3 dx + \int x^2 dx - \int 4x dx - \int 2 dx$

$= \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + C, C \in \mathbb{R}$ .

Mà  $F(-1) = \frac{1}{6}$  nên suy ra  $C = 0$ . Vậy hàm số  $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x$ . Suy ra

$F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{47}{96} \approx 0,49$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f'(x) = 4x^3 - m + 1$ ,  $f(2) = 1$  và có đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm được  $f(x) = ax^4 + bx + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính  $a + b + c$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f(x) = x^4 - (m-1)x + C$

Từ giả thiết, ta có:  $\begin{cases} C = 3 \\ 16 - (m-1) \cdot 2 + C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \\ m - 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \\ m = 10 \end{cases}$

$$\text{Do đó: } f(x) = x^4 - 9x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -9 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -5.$$

**Câu 7.** Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là  $30 \text{ m/s}$ . Gia tốc trọng trường là  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Tìm vận tốc của viên đạn ở thời điểm 2 giây.

**Lời giải**

Ta có:  $v(t) = 30 - 9,8t (t \geq 0)$ .

Vận tốc của viên đạn ở thời điểm 2 giây là  $v(2) = 10,4 (\text{m/s})$ .

**Câu 8.** Biết hàm số  $F(x) = \frac{2x^2 - 3x + 6}{x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}$  (với  $a, b, c$  là các số thực). Khi đó giá trị  $a + b - c$  bằng?

**Lời giải**

Ta có  $F'(x) = \left(2x - 3 + \frac{6}{x}\right)' = 2 - \frac{6}{x^2} = \frac{2x^2 - 6}{x^2}$  và  $F'(x) = f(x)$ , suy ra  $a = 2; b = 0; c = -6$ . Do đó  $a + b - c = 8$ .

**Câu 9.** Biết hàm số  $F(x) = a \sin x + b \cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin x - \cos x$ . Khi đó giá trị của  $a + 2b$  bằng?

**Lời giải**

$\int f(x) dx = \int (2 \sin x - \cos x) dx = -2 \cos x - \sin x + C$  suy ra  $F(x) = -\sin x - 2 \cos x$ , suy ra  $a = -1; b = -2$ . Do đó  $a + 2b = -5$ .

**Câu 10.** Biết hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x + 3x^2$  và  $F(1) = \frac{2}{\ln 2}$ . Giá trị của  $F(2)$  (làm tròn đến hàng phần mười) bằng?

**Lời giải**

$\int f(x) dx = \int (2^x + 3x^2) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^3 + C$ , suy ra  $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + x^3 + C$ .

Ta có  $F(1) = \frac{2}{\ln 2} + 1 + C = \frac{2}{\ln 2} \Rightarrow C = -1$ . Do đó  $F(2) = \frac{2^2}{\ln 2} + 2^3 - 1 \approx 12,8$ .

**Câu 11.** Giả sử  $\int \frac{1}{\sqrt[n]{x^5}} dx = ax^{\frac{m}{n}} + C$  với  $a$  là hằng số thực,  $n$  là số nguyên dương,  $m$  là số nguyên và ước số chung lớn nhất của  $m$  và  $n$  bằng 1. Giá trị của biểu thức  $S = a + m + n$  là bao nhiêu?

**Lời giải**

$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{x^5}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{n}}} dx = \int x^{-\frac{5}{n}} dx = \frac{x^{-\frac{5}{n}+1}}{-\frac{5}{n}+1} + C = \frac{-3}{2} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + C = \frac{-3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + C$$

$$a + m + n = \frac{-3}{2} - 2 + 3 = -0,5$$

**Câu 12.** Kí hiệu  $h(x)$  là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng  $x$  năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 3 m. Trong các năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ  $h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$  (tính theo mét/năm). Chiều cao của cây đó sau 5 năm (làm tròn đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu mét?

**Lời giải**

$$\int h'(x)dx = \int \frac{\sqrt{2}}{x} dx = \sqrt{2} \ln |x| + C, \text{ suy ra } h(x) = \sqrt{2} \ln |x| + C.$$

Ta có  $h(1) = \sqrt{2} \ln 1 + C = 3$ , suy ra  $C = 3$ . Do đó  $h(5) = \sqrt{2} \ln 5 + 3 \approx 5,3(m)$ .

**Câu 13.** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $17,5 m/s$  thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động với vận tốc  $v(t) = \frac{35}{2} - \frac{7}{2}t (m/s)$ , trong đó  $t$  (tính bằng giây) là thời gian kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô đi chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn bằng bao nhiêu mét?

**Lời giải**

Ô tô dừng hẳn khi  $v(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{35}{2} - \frac{7}{2}t = 0 \Leftrightarrow t = 5$  (giây).

Quãng đường ô tô đi chuyển từ lúc đạp phanh là

$$s(t) = \int v(t)dt = \int \left( \frac{35}{2} - \frac{7}{2}t \right) dt = \frac{35t}{2} - \frac{7t^2}{4} + C.$$

Ta có  $s(0) = 0$ , suy ra  $C = 0$ , suy ra  $s(t) = \frac{35t}{2} - \frac{7t^2}{4}$ . Do đó  $s(5) = \frac{35}{2} \cdot 5 - \frac{7}{4} \cdot 5^2 = 43,75(m)$ .

**Câu 14.** Cá hồi Thái Bình Dương đến mùa sinh sản thường bơi từ biển ngược dòng vào sông và đến thượng nguồn các dòng sông để đẻ trứng. Giả sử cá bơi ngược dòng sông với vận tốc là

$$v(t) = -\frac{2t}{5} + 4 (km/h). \text{ Nếu coi thời điểm ban đầu } t = 0 \text{ là lúc cá bắt đầu bơi vào dòng sông thì khoảng}$$

cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là bao nhiêu?

**Lời giải**

Quãng đường con cá bơi được khi bơi ngược dòng là:

$$S(t) = \int v(t)dt = \int \left( -\frac{2t}{5} + 4 \right) dt = -\frac{1}{5}t^2 + 4t + C$$

Vi  $S(0) = 0$  nên suy ra  $C = 0$ .

$$\text{Do đó: } S(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 4t = -\frac{1}{5}(t^2 - 20t + 100) + 20 = -\frac{1}{5}(t - 10)^2 + 20 \leq 20.$$

Vậy khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là  $20 km$ .

**Câu 15.** Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là  $80 m/s$  bắt đầu từ  $2 m$ . Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian  $5 s$  kể từ lúc bắn (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

**Lời giải**

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm  $t$  là

$$v(t) = \int -9,8 dt = -9,8t + C_1.$$

Do  $v(0) = 80$  nên  $v(0) = -9,8 \cdot 0 + C_1 = 80$

$$\Leftrightarrow C_1 = 80 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 80.$$

Độ cao của viên đạn tại thời điểm  $t$  là

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (-9,8t + 80)dt = -4,9t^2 + 80t + C_2.$$

Vì  $s(0) = 2$  nên  $s(0) = -4,9 \cdot 0^2 + 80 \cdot 0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + 80t + 2$ .

Vậy sau khoảng thời gian  $5s$  kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5) = -4,9 \cdot 5^2 + 80 \cdot 5 + 2 = 279,5(m).$$

**Câu 16.** Một vật được ném lên từ độ cao  $300 m$  với vận tốc được cho bởi công thức

$v(t) = -9,81t + 29,43 (m/s)$ . Gọi  $h(t)(m)$  là độ cao của vật tại thời điểm  $t(s)$ . Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu được ném lên thì vật đó chạm đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?

**Lời giải**



$$\text{Ta có } h(t) = \int v(t)dt = \int (-9,81t + 29,43)dt = -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + C.$$

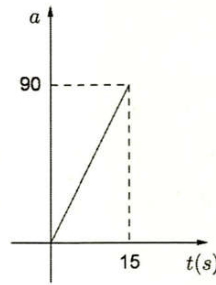
Vì vật được ném lên từ độ cao  $300m$  nên  $h(0) = 300$ . Suy ra  $C = 300$ .

$$\text{Vậy } h(t) = -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + 300. \text{ Khi vật bắt đầu chạm đất ứng với } h(t) = 0.$$

$$\text{Nên ta có } -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t + 300 = 0 \Leftrightarrow t \approx 11 \text{ hoặc } t \approx -5.$$

Do  $t > 0$  nên  $t \approx 11$  (s).

**Câu 17.** Một máy bay đang chuyển động thẳng đều trên mặt đất với vận tốc  $v = 3(m/s)$  thì bắt đầu tăng tốc với độ biến thiên vận tốc là hàm số  $a(t)$  có đồ thị hàm số là đường thẳng như hình vẽ.



Sau 15s tăng tốc thì máy bay đạt đến vận tốc đủ lớn để phóng khỏi mặt đất. Hãy tính vận tốc khi máy bay bắt đầu rời khỏi mặt đất.

**Lời giải**

Đường thẳng  $a(t) = mt + n$  đi qua gốc tọa độ  $O(0;0)$  và điểm  $A(16;90)$  nên suy ra

$$\begin{cases} m \cdot 0 + n = 0 \\ m \cdot 15 + n = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = 6 \end{cases} \Rightarrow a(t) = 6t.$$

Ta hiểu rằng, nguyên hàm của gia tốc  $a(t)$  chính là vận tốc của vật chuyển động. Do đó ta có

$$v(t) = \int a(t)dt = \int 6t dt = 3t^2 + C.$$

Tại thời điểm bắt đầu tăng tốc thì xem như  $t = 0$  và vận tốc lúc đó là  $v = 3(m/s)$

$$\text{Suy ra } v(0) = 3 \Leftrightarrow 3 \cdot 0^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow v(t) = 3t^2 + 3.$$

Vậy vận tốc máy bay đạt được khi bắt đầu phóng khỏi mặt đất là

$$v(15) = 3 \cdot 15^2 + 3 = 678(m/s).$$

**Câu 18.** Một nghiên cứu chỉ ra rằng sau  $x$  tháng kể từ bây giờ, dân số của thành phố A sẽ tăng với tốc độ  $v(x) = 10 + 2\sqrt{2x+1}$  (người/tháng). Dân số của thành phố sẽ tăng thêm bao nhiêu trong 4 tháng tới.

Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị. Cho biết  $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C$

**Lời giải**

Gọi  $f(x)$  là dân số của thành phố sau  $x$  tháng kể từ bây giờ.

$$\text{Tốc độ thay đổi của dân số là } v(x) = 10 + 2\sqrt{2x+1}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \int (10 + 2\sqrt{2x+1})dx = 10x + 2 \int \sqrt{2x+1}dx.$$

$$\text{Do } \int \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1) = \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C, \text{ nên ta có}$$

$$f(x) = 10x + \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Số dân trong 4 tháng tới là

$$f(4) - f(0) = 10 \cdot 4 + \frac{2}{3} (2 \cdot 4 + 1)^{\frac{3}{2}} + C - \left( 0 + \frac{2}{3} + C \right) \approx 57 \text{ (người)}.$$

**Câu 19.** Sản phẩm A có hàm lợi nhuận biên theo sản lượng là  $M\pi = -100Q + 1000$

Biết rằng, nếu chỉ bán được 100 sản phẩm thì công ti lỗ 50000 đơn vị tiền tệ (1 đơn vị tiền tệ là 1000 đồng). Ta tìm được hàm lợi nhuận theo  $Q$  là một hàm số bậc hai có dạng  $\pi(Q) = aQ^2 + bQ + c$ , tính

$$7000a + \frac{b}{1000} + c?$$

**Lời giải**

Ta có

$$\pi = \int (-100Q + 1000)dQ = -50Q^2 + 1000Q + C, C \text{ là hằng số.}$$

Vì  $\pi(100) = -50000$  đơn vị tiền do bị lỗ, nên ta có

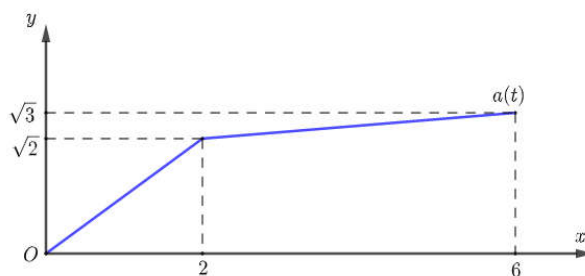
$$\pi(100) = -50(100)^2 + 1000(100) + C = -50000.$$

Vậy  $C = 350000$ .

Hàm lợi nhuận là  $\pi(Q) = -50Q^2 + 1000Q + 350000$

$$\text{Khi đó } 7000a + \frac{b}{1000} + c = 1$$

**Câu 20.** (ĐH Sư Phạm-ĐGNL-2020) Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là  $a(t)$ . Biết rằng đồ thị hàm số  $a(t)$  trên đoạn  $[0; 6]$  được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm  $t = 0$  là  $v(0) = 1(m/s)$ .



Tại thời điểm  $t = 6$  giây, vận tốc của vật là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

**Lời giải**

$$\text{Từ đồ thị ta có } a(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}t & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}t + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}.$$

$$\text{Mà } v(0) = 1(m/s) \text{ nên } v(t) = \int a(t)dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + 1 & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2 + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t + C & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}.$$

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} v(t) \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}.$$

$$\text{Do đó } v(6) = 1 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \approx 8,7(m/s).$$

**NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT**