BÀI 25. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

- CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

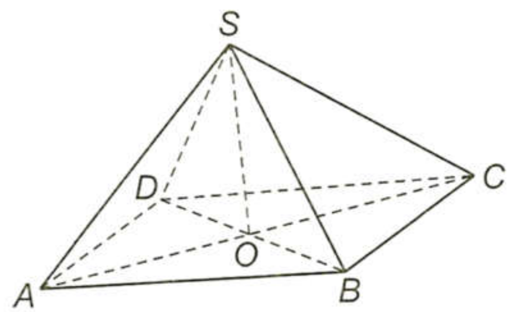
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Câu 1. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có tâm $O, SO \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình vuông.

Lời giải

Gọi O là giao điểm AC và BD.

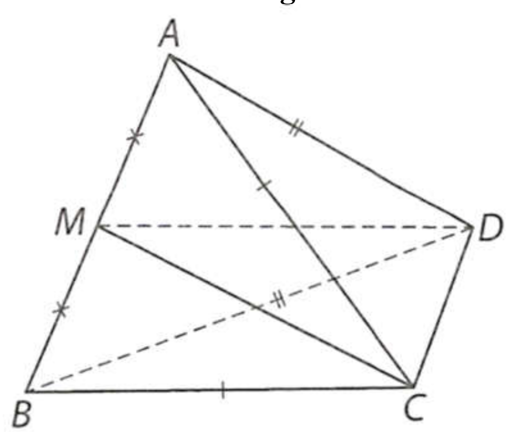


Hình 7.15

Vì $AO \perp SO, BO \perp SO$ và $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên góc giữa (SAC) và (SBD) bằng góc giữa AO và BO. Do đó: $(SAC) \perp (SBD) \Leftrightarrow AO \perp BO \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 90^{\circ} \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

Câu 2. Cho tứ diên $ABCD$ có $AC = BC, AD = BD$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $(CDM) \perp (ABC)$ và $(CDM) \perp (ABD)$.

Lời giải



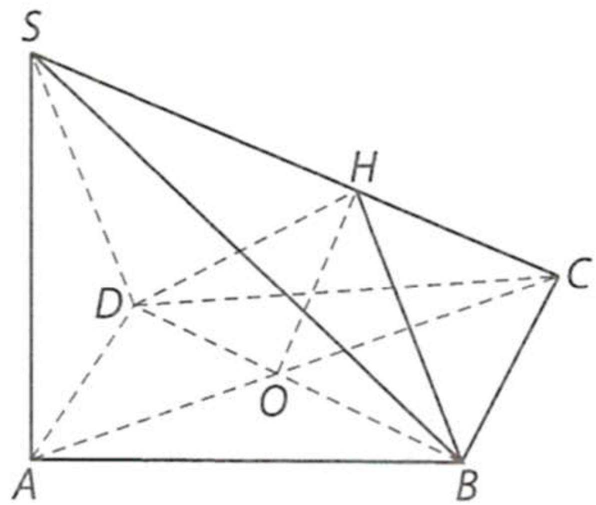
Hình 7.39

Vì M là trung điểm của AB nên $AB \perp CM$, $AB \perp DM$, suy ra $AB \perp (CDM)$.
Vì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) đều chứa đường thẳng AB nên $(ABC) \perp (CDM), (ABD) \perp (CDM)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, góc BAD bằng 60°. Kẻ OH vuông góc với SC tại H. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $(SBD)\perp(SAC)$;
b) $(SBC)\perp(BDH)$;
c) $(SBC)\perp(SCD)$.

Lời giải

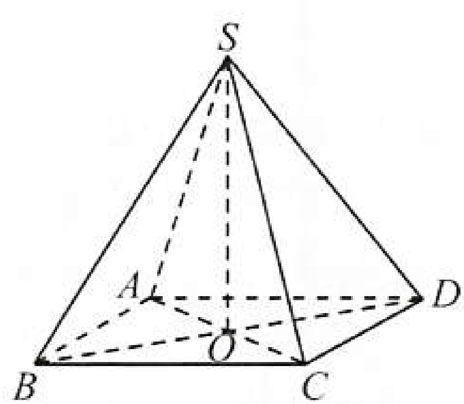


Hình 7.40

a) Ta có $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp BD$ mà $BD\perp AC$, do đó $BD\perp(SAC)$.
Vì mặt phẳng (SBD) chứa BD nên $(SBD)\perp(SAC)$.
b) Ta có $BD\perp(SAC)$ nên $BD\perp SC$ mà $SC\perp OH$, do đó $SC\perp(BDH)$.
Vì mặt phẳng (SBC) chứa SC nên $(SBC)\perp(BDH)$.
c) Ta có: $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.
Vì ΔCHO cs ΔCAS nên $\frac{HO}{AS}=\frac{CO}{CS}$, suy ra $HO=\frac{CO\cdot AS}{CS}=\frac{a}{2}=\frac{BD}{2}$.
Do đó, tam giác BDH vuông tại H, suy ra $\widehat{BHD}=90^{\circ}$.
Ta lại có $BH\perp SC, DH\perp SC$ nên $(SBC)\perp(SCD)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Các tam giác SAC và SBD cân tại S. Chứng minh rằng:
a) $SO\perp(ABCD)$;
b) $(SAC)\perp(SBD)$.

Lời giải

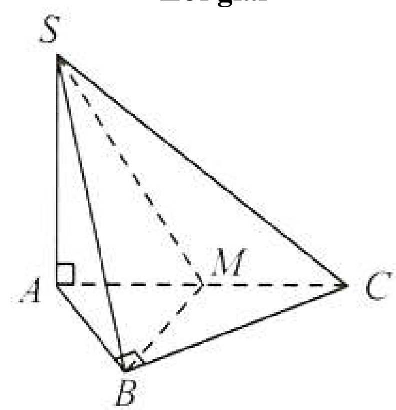


Hình 10

a) Ta có các tam giác SAC và SBD cân tại S nên $SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.
b) Ta có $AC \perp SO$ (vì $SO \perp (ABCD)$) và $AC \perp BD$ (vì $ABCD$ là hình thoi)
$\Rightarrow AC \perp (SBD)$.
Vậy $(SAC) \perp (SBD)$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $SA \perp (ABC)$.
a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAB)$.
b) Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $(SBM) \perp (SAC)$.

Lời giải

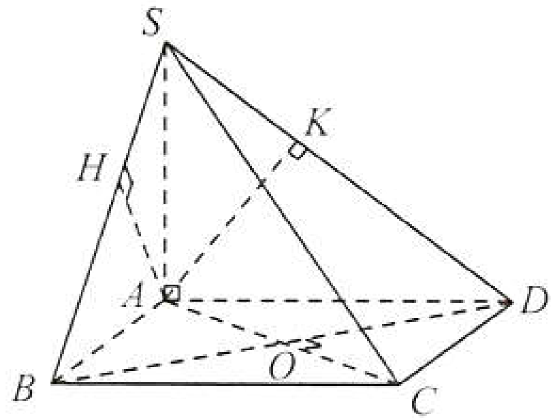


Hình 3

a) Ta có: $BC \perp AB$ (giả thiết),
$BC \perp SA$(vì $SA \perp (ABC)$)
$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.
b) Vì tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B nên $BM \perp AC$.
Mà $BM \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$ suy ra $BM \perp (SAC)$.
Vậy $(SBM) \perp (SAC)$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD. Chứng minh rằng:
a) $(SBC) \perp (SAB)$;
b) $(SCD) \perp (SAD)$;
c) $(SBD) \perp (SAC)$;
d) $(SAC) \perp (AHK)$.

Lời giải

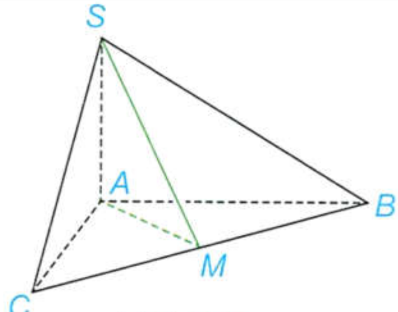


Hình 4

a) Ta có: $(SAB) \perp (ABCD)$;
$(SAD) \perp (ABCD)$;
$(SAB) \cap (SAD) = SA$
$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$
Khi đó: $BC \perp AB$ (giả thiết);
$BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$)
$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$
b) Chứng minh tương tự câu a, ta được $(SCD) \perp (SAD)$
c) Ta có $BD \perp AC$ (giả thiết)
$BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$)
$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.
d) Ta có $(SAB) \perp (SBC)$ (chứng minh trên)
$(SAB) \cap (SBC) = SB$;
$AH \perp SB$ (giả thiết)
$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)
Ta có: $(SCD) \perp (SAD)$ (chứng minh trên);
$(SCD) \cap (SAD) = SD$
$AK \perp SD$ (giả thiết)
$\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (AHK)$.
Vậy $(SAC) \perp (AHK)$.

Dạng 2. Góc giữa hai mặt phẳng, góc nhị diện

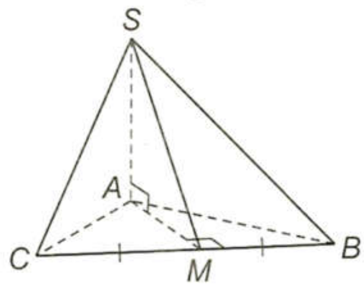
Câu 7. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ, SA = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. Gọi M là trung điểm của BC.



Hình 7.55

a) Chứng minh rằng $\widehat{SMA}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S,BC,A]$.
b) Tính số đo của góc nhị diện $[S,BC,A]$.

Lời giải



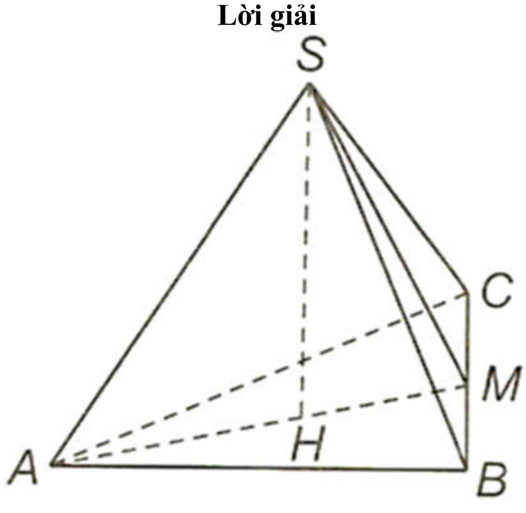
Hình 7.17

a) $AM \perp BC, SM \perp BC \Rightarrow \widehat{SMA}$ là một góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

b) $AM = \frac{a}{2} \Rightarrow \tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SMA} = 30^\circ$.

Câu 8. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{\frac{5}{12}}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S,BC,A]$.

Lời giải



Hình 7.18

Gọi M là trung điểm của BC. Ta tính được

$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \frac{a}{\sqrt{6}}$

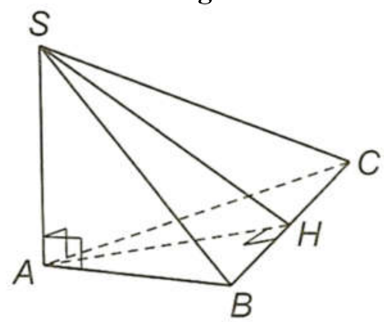
$\Rightarrow \cos \widehat{SMH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SMH} = 45^\circ$.

Câu 9. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại $A, \widehat{ABC} = 30^{\circ}, AC = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



Hình 7.19

a) $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

Vì $BC \perp AH, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

b) $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SHA} = 45^{\circ}$.

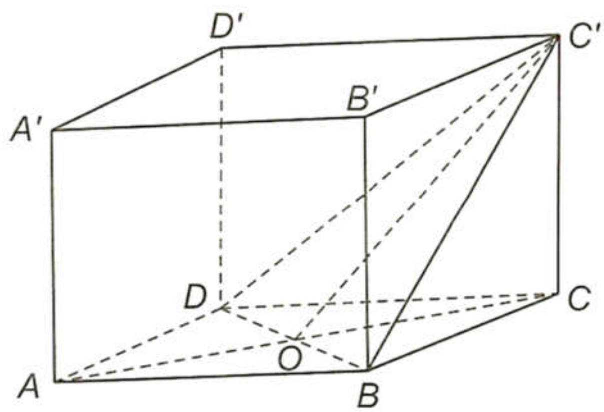
Câu 10. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $\left(ACC'A'\right) \perp \left(BDD'B'\right)$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C]$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C]$, $[A, BD, C]$.

Lời giải



Hình 7.20

a) Ta có: $AC = a\sqrt{2}, CC' = a$.

Do đó $AC' = \sqrt{CC'^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

b) $AC \perp BD, AC \perp BB' \Rightarrow AC \perp \left(BDD'B'\right) \Rightarrow \left(ACC'A'\right) \perp \left(BDD'B'\right)$.

c) $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, CC' = a \Rightarrow \tan\widehat{COC'} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{COC'} \approx 55^{\circ}$ và góc nhị diện $[A, BD, C']$

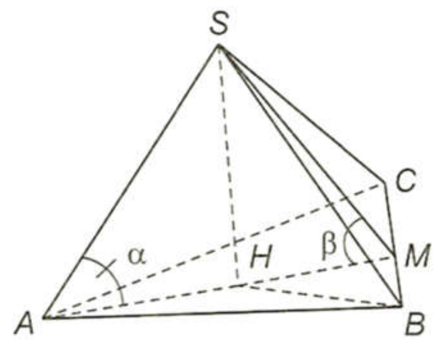
bằng $180^{\circ}-\widehat{C'C'}\approx 125^{\circ}$.

Câu 11. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a, cạnh bên bằng b.

a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tang của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

Lời giải



Hình 7.22

Ta tính được $AH=\frac{a\sqrt{3}}{3}, SH=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$.

Gọi α,β lần lượt là góc giữa SA và (ABC), góc giữa (SBC) và (ABC).

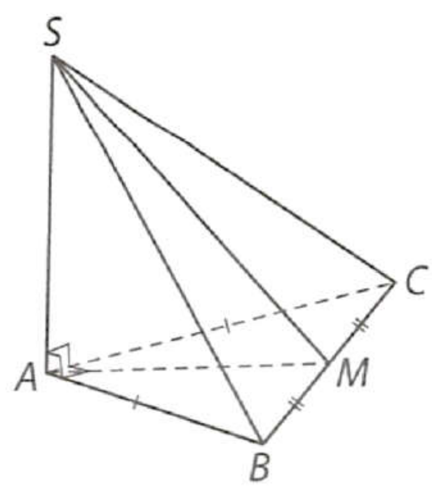
a) Ta có: $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{a^2}{3b^2}}$.

b) Vì $HM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ nên $\tan\beta=\frac{2\sqrt{3b^2-a^2}}{a}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A và $AB=a$, biết $SA\perp(ABC), SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC).

Lời giải

(H.7.10)



Hình 7.10

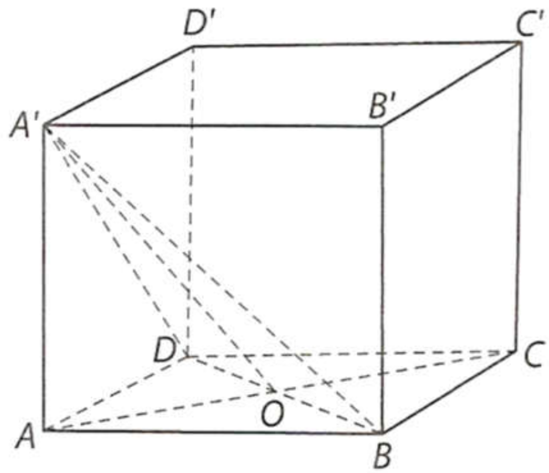
Gọi M là trung điểm của cạnh BC, ta có: $AM\perp BC; SM\perp BC$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AM và SM. Ta có $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp AM$. Xét tam giác SAM vuông tại A, có: $AM=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\tan\widehat{AMS}=\frac{SA}{AM}=\sqrt{3}$, hay $\widehat{SMA}=60^{\circ}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60°.

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính tang của góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $\left(A'BD\right)$.

Lời giải

(H.7.11)



Hình 7.11

Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $AO \perp BD, A'O \perp BD$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $\left(A'BD\right)$ bằng góc giữa hai đường thẳng AO và $A'O$.

Ta có: $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; AA' = a$ và tam giác $AA'O$ vuông tại A nên

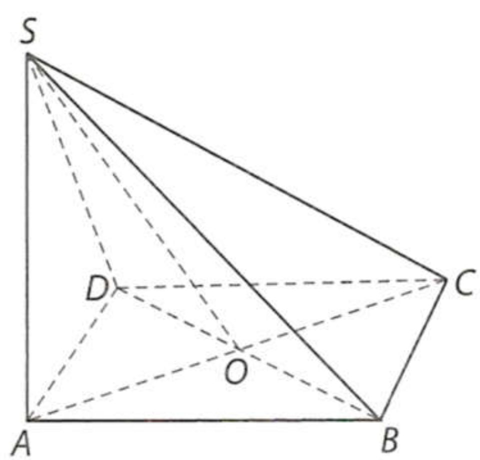
$\tan\left(AO, A'O\right) = \tan\widehat{AOA'} = \dfrac{AA'}{AO} = \sqrt{2}$

Vậy tang của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $\left(A'BD\right)$ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Lời giải

(H.7.12)



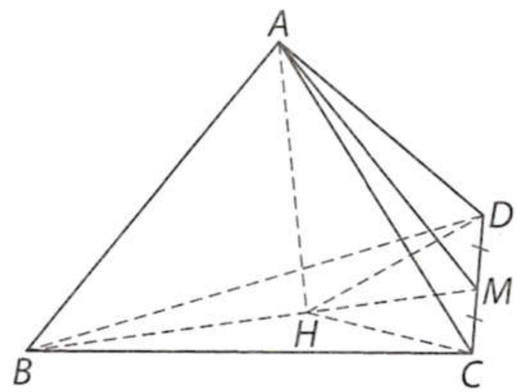
Hình 7.12

Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $CO \perp BD, SO \perp BD$. Do đó, góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$ bằng góc SOC.

Xét tam giác SAO, có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} = SA$ và góc SAO là góc vuông nên tam giác SAO là tam giác vuông cân tại A, suy ra $\widehat{SOA} = 45^\circ$; $\widehat{SOC} = 135^\circ$.
Vậy số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135°.

Câu 15. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CD, kẻ AH vuông góc với BM tại H.
a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.
b) Tính côsin của góc giữa mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (ACD).

Lời giải



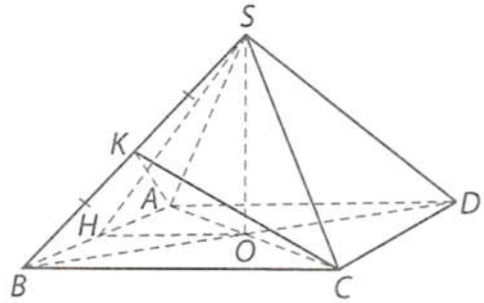
Hình 7.38

a) Vì M là trung điểm của CD nên $CD \perp BM$, $CD \perp AM$, do đó $CD \perp (ABM)$, suy ra $CD \perp AH$, ta lại có $AH \perp BM$ nên $AH \perp (BCD)$.
b) Vì $AM \perp CD, BM \perp CD$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AM và BM, mà $(AM, BM) = \widehat{AMB}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng $\widehat{AMB}$.

Ta có: $HM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tam giác AHM vuông tại H nên $\cos\widehat{AMB} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{3}$.

Câu 16. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng sau:
a) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$;
b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Hình 7.41

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp AB$, kẻ $OH \perp AB$ tại H thì $AB \perp (SOH)$, suy ra $AB \perp SH$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SH và HO, mà $(SH, HO) = \widehat{SHO}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SHO}$.

Ta tính được $OH = \frac{a}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\cos \widehat{SHO} = \frac{OH}{SH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Gọi K là trung điểm của SB. Khi đó $AK \perp SB, CK \perp SB$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AK và CK.

Ta có: $AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ACK, ta có:

$\cos \widehat{AKC} = \frac{AK^2 + CK^2 - AC^2}{2 \cdot AK \cdot CK} = \frac{-1}{3}$, suy ra $\cos(AK, CK) = -\cos \widehat{AKC} = \frac{1}{3}$.

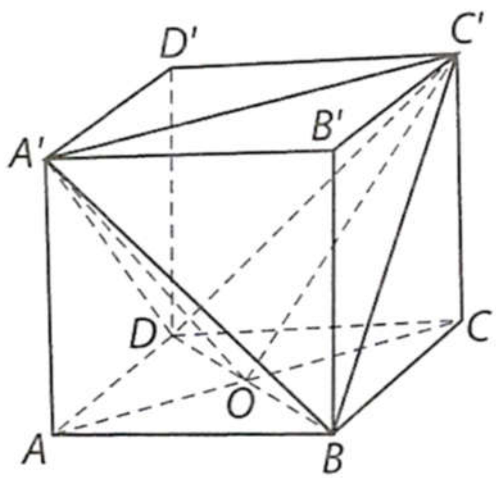
Vậy côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $(ABCD)$.

b) Tính côsin của số đo góc nhị diện $\left[A', BD, C'\right]$.

Lời giải



Hình 7.42

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có: $AO \perp BD, A'O \perp BD$ nên góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng $AO, A'O$ mà

$\left(AO, A'O\right) = \widehat{AOA'}$ nên góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $(ABCD)$ bằng $\widehat{AOA'}$. Ta có:

$OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, OA' = \sqrt{OA^2 + AA'^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

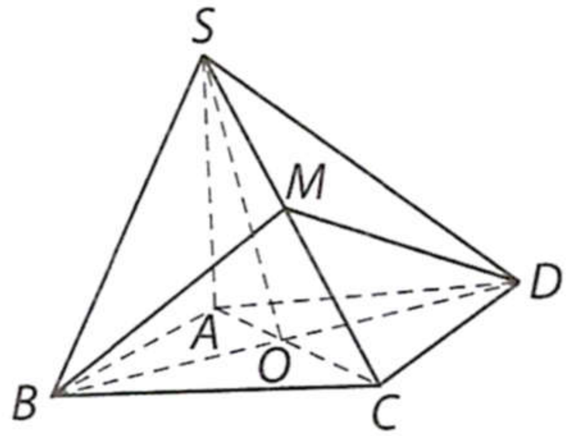
Suy ra $\cos \widehat{AOA'} = \frac{AO}{A'O} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Vì $A'O \perp BD, CO' \perp BD$ nên góc nhị diện $\left[A', BD, C'\right]$ bằng $\widehat{A'OC'}$.

Ta có $OA' = OC' = \frac{a\sqrt{6}}{2}, A'C' = a\sqrt{2}$ nên $\cos \widehat{A'OC'} = \frac{OA'^2 + OC'^2 - A'C'^2}{2 \cdot OA' \cdot OC'} = \frac{2}{9}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, biết $(SAB)\perp(ABCD)$, $(SAD)\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Tính côsin của số đo góc nhị diện $[S,BD,C]$ và góc nhị diện $[B,SC,D]$.

Lời giải



Hình 7.43

Ta có $SO\perp BD, CO\perp BD$ nên góc nhị diện $[S,BD,C]$ bằng $\widehat{SOC}$. Vì tam giác SAO vuông tại A nên $SO=\sqrt{SA^2+AO^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và

$\cos\widehat{SOC}=-\cos\widehat{SOA}=-\frac{OA}{SO}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ $BM\perp SC$ tại M thì $DM\perp SC$ nên $[B,SC,D]=\widehat{BMD}$.

Ta có $BC\perp(SAB)$ nên tam giác SBC vuông tại B, tính được $SB=a\sqrt{2}$, $SC=a\sqrt{3}$ và

$DM=BM=\frac{SB\cdot BC}{SC}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Áp dụng định lí côsin trong tam giác BDM, ta có:

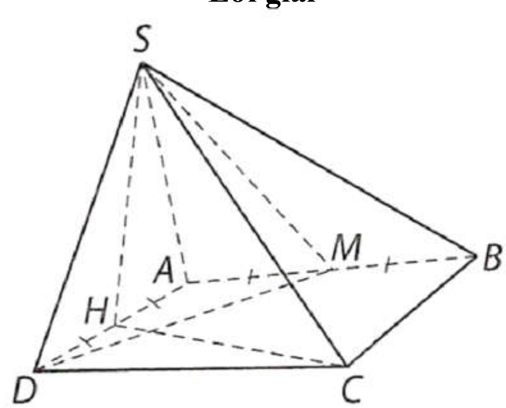
$\cos\widehat{BMD}=\frac{BM^2+DM^2-BD^2}{2\cdot BM\cdot DM}=-\frac{3}{4}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H,M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB.

a) Tính côsin của góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(SMD)\perp(SHC)$.

Lời giải



Hình 7.44

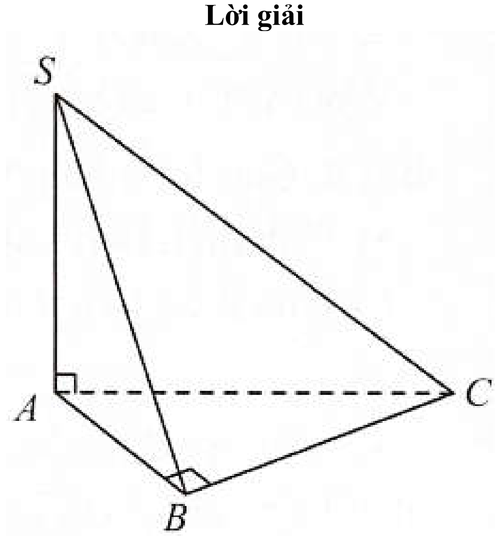
a) Ta có $(SAD)\perp(ABCD)$ và $SH\perp AD$ nên $SH\perp(ABCD)$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SC và CH, mà $(SC,CH)=\widehat{SCH}$, ta tính được $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}, HC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ và $SC=a\sqrt{2}$.

Do đó $\cos\widehat{SHC}=\frac{HC}{SC}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

b) Ta có $DM\perp CH, DM\perp SH$ nên $DM\perp(SCH)$. Hơn nữa, mặt phẳng (SDM) chứa đường thẳng DM nên $(SDM)\perp(SCH)$.

Câu 20. Cho hình chóp $S\cdot ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB=a, SA=a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Lời giải



Hình 8

Ta có: $BC\perp SA$ (vì $SA\perp(ABC)$) và $BC\perp AB$ (giả thiết) $\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$.

Ta lại có: $(SBC)\cap(ABC)=BC\,(1)$

$AB\subset(ABC), AB\perp BC\,(2)$

$SB\subset(SBC), SB\perp BC$ (chứng minh trên) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $((SBC),(ABC))=(AB,SB)$.

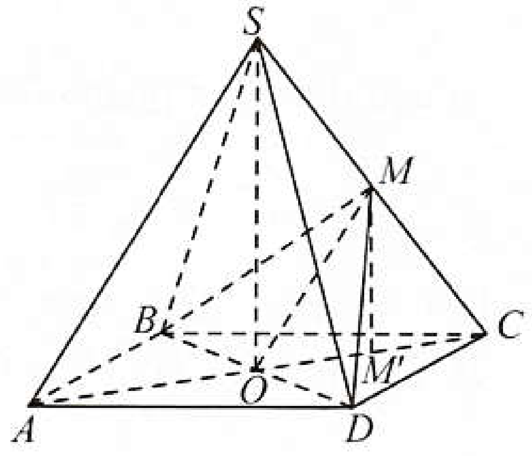
Trong tam giác SAB vuông tại A ta có:

$\tan\widehat{SBA}=\frac{SA}{AB}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA}=60^\circ$.

Câu 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các canh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Lời giải



Hình 9

Gọi $M^{'}$ là trung điểm $OC \Rightarrow MM^{'} // SO \Rightarrow MM^{'} \perp (ABCD)$.

Ta có $MB = MD$ nên $MO \perp BD$ và $M^{'}O \perp BD$ nên góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ là $\left(MO, M^{'}O\right)$.

Ta có: $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

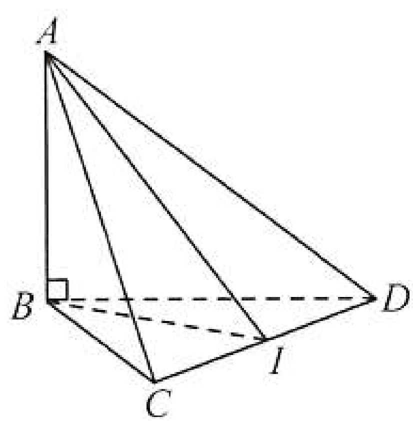
Trong tam giác vuông $MOM^{'}$,

ta có $\tan\widehat{MOM^{'}} = \frac{MM^{'}}{OM^{'}} = \frac{SO}{OC} = 1 \Rightarrow \widehat{MOM^{'}} = 45^{\circ}$.

Vậy $((MBD),(ABCD)) = \left(MO, M^{'}O\right) = \widehat{MOM^{'}} = 45^{\circ}$.

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông cân tại B và $AB \perp (BCD)$. Cho biết $BC = a\sqrt{2}, AB = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Lời giải



Hình 1

Gọi I là trung điểm của CD.

Ta có: $CD \perp BI$ và $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp AI$.

Khi đó: $(ACD)\cap(BCD)=CD$;

$\begin{matrix} AI\perp CD, AI\subset(ACD); \\ BI\perp CD, BI\subset(BCD) \end{matrix}$ suy ra $((ACD),(BCD))=(AI,BI)$.

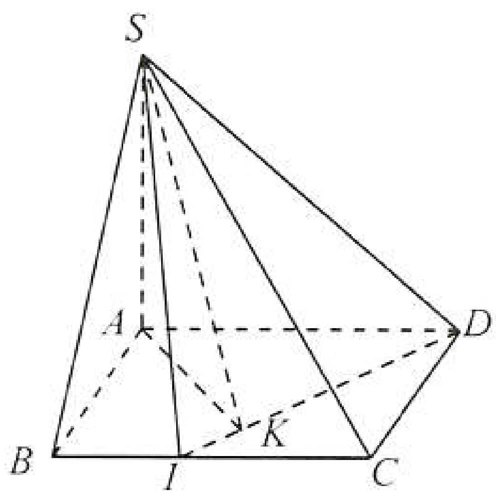
Do tam giác BCD vuông cân tại B nên $BI=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\cdot BC\sqrt{2}=a$.

Xét tam giác ABI vuông tại B, ta có: $\tan\widehat{AIB}=\frac{AB}{BI}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{AIB}=30^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là $\widehat{AIB}=30^\circ$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Cho biết $SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Trên BC lấy điểm I sao cho tam giác SDI vuông tại S. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SDI) và $(ABCD)$ là 60°. Tính độ dài SI.

Lời giải



Hình 2

Vẽ $AK\perp ID(K\in ID)$.

Ta có $ID\perp SA$ và $ID\perp AK$

$\Rightarrow ID\perp(SAK)\Rightarrow ID\perp SK$.

Suy ra $((SDI),(ABCD))=\widehat{AKS}=60^\circ$.

Xét tam giác SAK vuông tại A, ta có:

$\sin\widehat{AKS}=\frac{SA}{SK}\Rightarrow SK=\frac{SA}{\sin 60^\circ}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

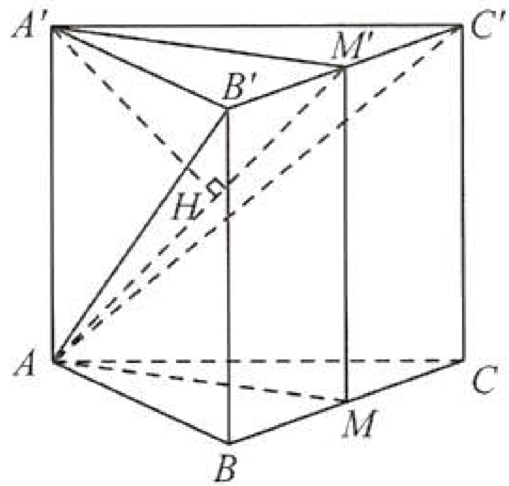
Tam giác SAD vuông tại A, ta có: $SD=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}$.

Xét tam giác SID vuông tại S, ta có:

$\frac{1}{SK^2}=\frac{1}{SI^2}+\frac{1}{SD^2}\Leftrightarrow\frac{1}{SI^2}=\frac{1}{SK^2}-\frac{1}{SD^2}\Rightarrow SI=\frac{2a\sqrt{55}}{11}$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ đều $ABC\cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và (ABC), tính $\cos\alpha$.

Lời giải



Hình 4

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Vẽ đường cao $A'H$ của tam giác vuông $AA'M'$.

Ta có:

$$\begin{cases} B'C' \perp A'M' \\ B'C' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp \left(AA'M'\right)$$

Mà $A'H \subset \left(AA'M'\right)$ nên $B'C' \perp A'H$.(1)

Ta lại có: $A'H \perp AM'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A'H \perp \left(AB'C'\right)$. (*)

Hơn nữa, $AA' \perp (ABC)$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $\left((ABC),\left(AB'C'\right)\right) = \left(A'A, A'H\right) = \alpha$.

Trong tam giác đều $A'B'C'$, ta có $A'M' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

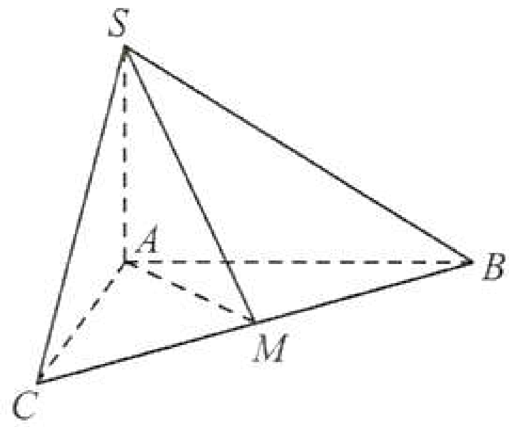
Trong tam giác vuông $AA'M'$, ta có $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{A'M'^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Trong tam giác vuông $AA'H$, ta có $\cos \widehat{AA'H} = \dfrac{A'H}{AA'} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\cos \alpha = \cos \widehat{AA'H} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^{\circ}, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$

Lời giải

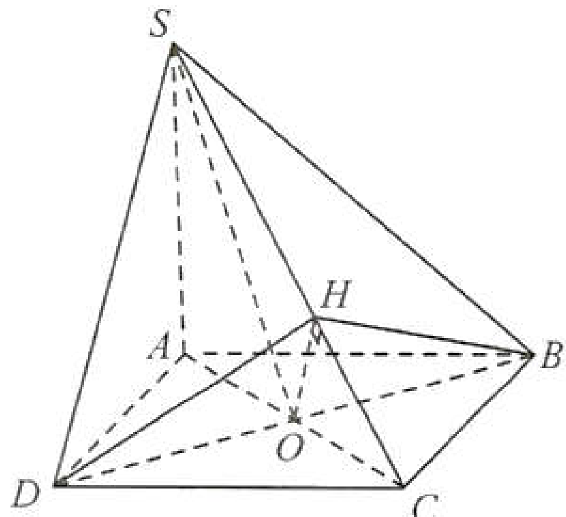


Hình 5

Gọi M là trung điểm của BC.
Ta có $AB = AC \Rightarrow AM \perp BC$.
Mặc khác $SC = SB$ (do $\Delta SAC = \Delta SAB$) nên ΔSCB cân tại $S \Rightarrow SM \perp BC$.
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{SMA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.
Ta có $\widehat{MAB} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 60^{\circ}, AM = \cos\widehat{MAB} \cdot AB = \frac{a}{2}$,
Trong tam giác SMA vuông tại A, ta có:
$\tan\widehat{SMA} = \frac{SA}{MA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^{\circ}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a, SA = \frac{a}{2}$.
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC. Tính số đo các góc phẳng nhị diện:
a) $[B, SA, D]$;
b) $[S, BD, A]$;
c) $[S, BD, C]$;
d) $[D, SC, B]$.

Lời giải



Hình 6

a) Ta có $\begin{cases} SA \perp AD \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAB}$ là góc phẳng nhị diện $[D, SA, B]$.

Tam giác DAC là tam giác đều $(AD = DC = AC = a)$, nên $\widehat{DAC} = 60^\circ$.

Ta có $\widehat{DAB} = 2\widehat{DAC} = 2.60^\circ = 120^\circ$.

b) Ta có $\Delta SAD = \Delta SAB \Rightarrow SD = SB$.

Nên ΔSBD cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD($ do $OB = OD)$.(1)

Ta lại có $OA \perp BD$. (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \widehat{SOA}$ là góc phẳng phẳng nhị diện $[S, BD, A]$.

Trong tam giác SOA vuông tại A, ta có:

$\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SOA} = 45^\circ$.

c) Ta có $\begin{cases} OS \perp BD \\ OC \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{SOC}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$.

Ta có $\widehat{SOC} = 180^\circ - \widehat{SOA} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

d) Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ hay $OD \perp SC$

Ta có $\begin{cases} SC \perp OD \\ SC \perp OH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (ODH)$ hay $SC \perp (DHB)$.

Nên $\begin{cases} SC \perp DH \\ SC \perp BH \end{cases} \Rightarrow \widehat{DHB}$ là góc phẳng nhị diện $[D, SC, B]$.

Trong tam giác SAC vuông tại A, ta có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$.

ADC là tam giác đều nên $DO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

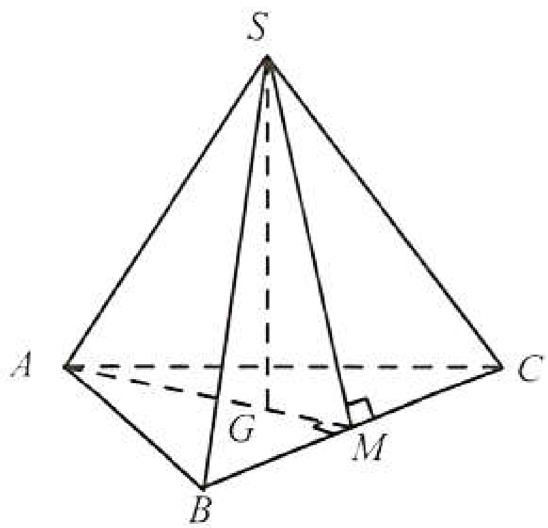
Trong tam giác OHD vuông tại O, ta có

$\tan\widehat{OHD}=\frac{OD}{OH}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{a}=\sqrt{15}\Rightarrow\widehat{OHD}\approx 75,5^\circ$.

Vậy $\widehat{DHB}=2.\widehat{OHB}\approx 2.75,5^\circ=151^\circ$.

Câu 27. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{15}}{6}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

Lời giải



Hình 3

Gọi M là trung điểm BC,G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $SG\perp(ABC),SM\perp BC,AM\perp BC$, suy ra $\widehat{SMG}$ là góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$

Ta tính được

$AM=\frac{a\sqrt{3}}{2},GM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$,

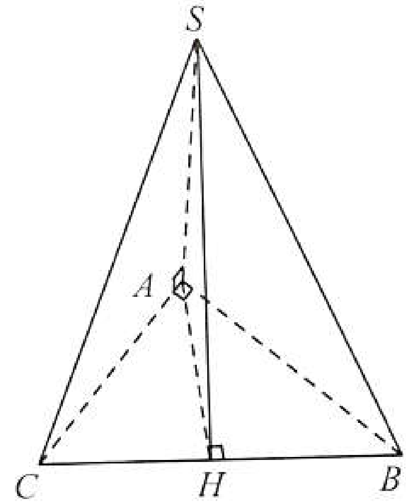
$SM=\sqrt{SB^2-BM^2}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$,

$SG=\sqrt{SM^2-GM^2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có tam giác SMG vuông cân tại G, suy ra số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]=\widehat{SMG}=45^\circ$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^\circ,AC=a,SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

Lời giải



Hình 4

Vẽ $AH \perp BC (H \in BC)$, ta có $SH \perp BC$, suy ra $\widehat{SHA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Ta có $AH = AC \cdot \sin 60^{\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA$, suy ra $\widehat{SHA} = 45^{\circ}$.

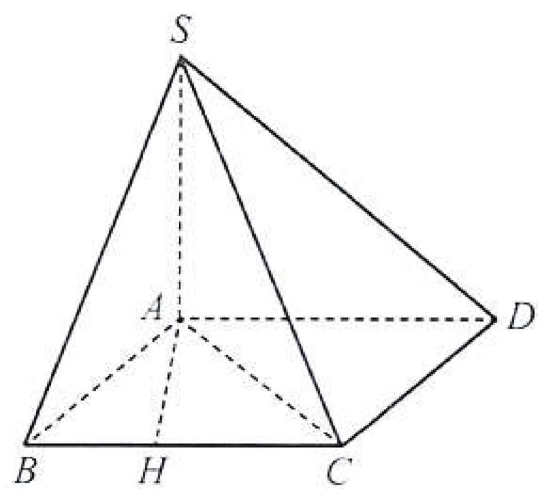
Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$. Tính số đo của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$;

b) $[S, DA, B]$.

Lời giải

(Hình 18)



Hình 18

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB, SA \perp AC$, suy ra góc BAC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, SA, C]$. Do $AC = AB = BC = a$ nên tam giác ABC đều, suy ra $\widehat{BAC} = 60^{\circ}$. Vậy góc nhị diện $[B, SA, C]$ có số đo bằng 60°.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, lấy H thuộc BC sao cho $AH \perp AD$. Mà $SA \perp AD$ (vì $SA \perp (ABCD)$ và $AD \subset (ABCD)$) nên góc SAH là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, DA, B]$. Mặt khác, $SA \perp (ABCD)$ và $AH \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AH$, suy ra góc SAH bằng 90°.

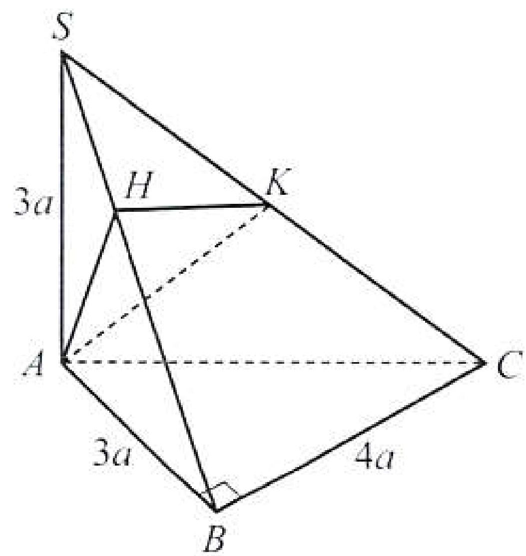
Vậy góc nhị diện $[S, DA, B]$ có số đo bằng 90°.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC, SA = AB = 3a, BC = 4a$. Gọi α, β, γ lần lượt là số đo của các góc nhị diện $[B,SA,C],[A,BC,S]$, $[A,SC,B]$. Tính:

a) $\cos\alpha, \cos\beta$;

b*) $\cos\gamma$.

Lời giải



Hình 66

a) Vì $SA \perp (ABC), AB \subset (ABC), AC \subset (ABC)$ nên $SA \perp AB, SA \perp AC$. Suy ra góc BAC là góc phẳng nhị diện của $[B,SA,C]$, hay $\widehat{BAC} = \alpha$. Xét tam giác ABC vuông tại B có:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$ và $\cos\alpha = \cos\widehat{BAC} = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{3a}{5a} = \dfrac{3}{5}$.

Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp SB$ suy ra góc SBA là góc phẳng nhị diện của $[A,BC,S]$. Như vậy, ta có:

$SB = \sqrt{AB^2 + SA^2} = \sqrt{(3a)^2 + (3a)^2} = 3\sqrt{2}a$ và $\cos\beta = \cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{3a}{3\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b*) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AH$. Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$. Mà $SC \perp AK$ nên $SC \perp (AHK)$, suy ra $SC \perp HK$. Do đó góc AKH là góc phẳng nhị diện của $[A,SC,B]$, hay $\widehat{AKH} = \gamma$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $AH = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{3a \cdot 3a}{3a\sqrt{2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

Tam giác SAC vuông tại A có: $AK = \dfrac{SA \cdot AC}{SC} = \dfrac{3a \cdot 5a}{\sqrt{(3a)^2 + (5a)^2}} = \dfrac{15a}{\sqrt{34}}$.

Tam giác AHK vuông tại H (vì $AH \perp (SBC)$ mà $HK \subset (SBC)$) có:

$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{15a}{\sqrt{34}}\right)^2 - \left(\dfrac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{6a}{\sqrt{17}}$ và $\cos\gamma = \cos\widehat{AKH} = \dfrac{HK}{AK} = \dfrac{\dfrac{6a}{\sqrt{17}}}{\dfrac{15a}{\sqrt{34}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, AC cắt BD tại $O, SO \perp (ABCD)$. Tất cả các cạnh của hình chóp bằng a.

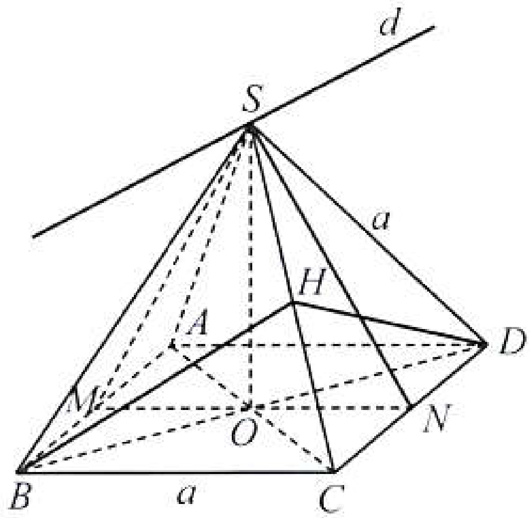
a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

b) Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S,CD,A]$. Tính $\cos\alpha$.

c) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và $(SCD), \beta$ là số đo của góc nhị diện $[A, d, D]$. Tính $\cos\beta$.

$\left.d^*\right)$ Gọi γ là số đo góc nhị diện $[B, SC, D]$. Tính $\cos\gamma$.

Lời giải



Hình 67

a) Vì $BO \perp AC, BO \perp SO$ nên $BO \perp (SAC)$. Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc BSO. Xét tam giác SBD có $SB = SD$ và $SB^2 + SD^2 = BD^2$ nên tam giác SBD vuông cân tại S. Suy ra $\widehat{BSO} = 45^\circ$, hay góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng 45°.

b) Gọi N là hình chiếu của S trên CD. Khi đó, số đo của $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SNO}$, hay $\widehat{SNO} = \alpha$. Ta có:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{SN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Gọi M là hình chiếu của S trên AB. Vì $AB // CD$ nên $d // AB$ và $d // CD$. Khi đó $SM \perp d, SN \perp d$. Suy ra số đo của $[A, d, D]$ bằng $\widehat{MSN}$, hay $\widehat{MSN} = \beta$.

Ta có: $\cos\beta = \dfrac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM \cdot SN} = \dfrac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

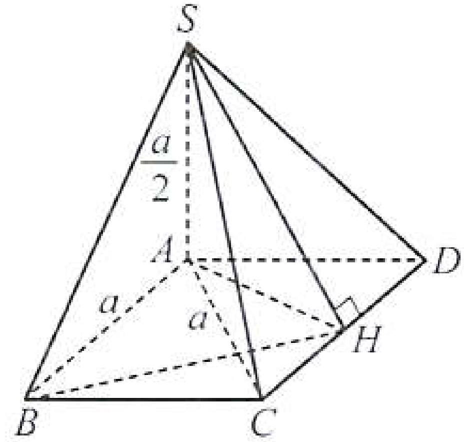
d*) Gọi H là hình chiếu của B trên SC. Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Suy ra $SC \perp (BHD)$ nên $SC \perp HD$. Vậy số đo của $[B, SC, D]$ bằng $\widehat{BHD}$, hay $\widehat{BHD} = \gamma$.

Vì hai tam giác SBC, SCD đều nên $BH = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó, ta có:

$$\cos\gamma = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB \cdot HD} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{3}$$

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), ABCD$ là hình thoi cạnh $a, AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$.

Lời giải



Hình 68

Gọi H là hình chiếu của A trên CD. Khi đó, $AH \perp CD$. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$. Suy ra $CD \perp (SAH)$. Khi đó, $SH \perp CD$. Như vậy, số đo của $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SHA}$. Ta có:

$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SA = \frac{a}{2}$

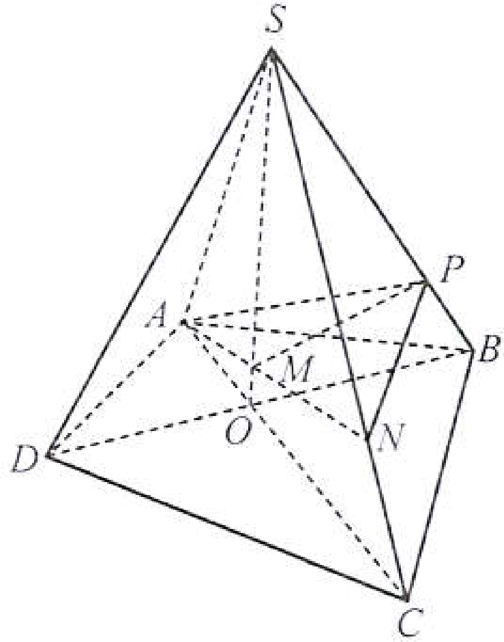
nên

$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$ bằng $\widehat{SHA} = 30^\circ$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O. Gọi α, β lần lượt là số đo của các nhị diện $[A, SO, B]$ và $[B, SO, C]$. Tính $\alpha + \beta$.

Lời giải

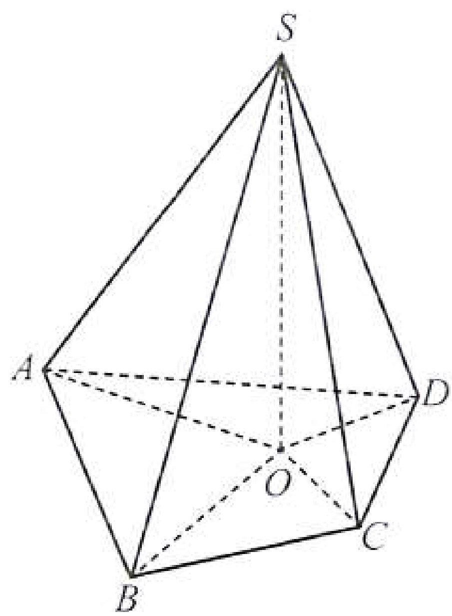


Hình 69

Trong mặt phẳng (SAC), lấy đường thẳng $AN(N \in SC)$ sao cho $AN \perp SO$. Gọi M là giao điểm của AN và SO. Trong mặt phẳng (SOB), lấy đường thẳng $MP(P \in SB)$ sao cho $MP \perp SO$. Khi đó, số đo của $[A, SO, B]$ bằng $\widehat{AMP}$, hay $\widehat{AMP} = \alpha$ và số đo của $[B, SO, C]$ bằng $\widehat{PMN}$, hay $\widehat{PMN} = \beta$. Trong mặt phẳng (APN) có A, M, N thẳng hàng nên $\alpha + \beta = 180^{\circ}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ lần lượt là góc giữa các đường thẳng SA, SB, SC, SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:
$SA = SB = SC = SD \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Lời giải



Hình 70

Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Khi đó, ta có: $\alpha_1 = \widehat{SAO}, \alpha_2 = \widehat{SBO}, \alpha_3 = \widehat{SCO}, \alpha_4 = \widehat{SDO}$. Các tam giác SAO, SBO, SCO, SDO vuông có các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ đều nhỏ hơn 90° nêN

$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = \sin\alpha_4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Như vậy:

$$SA = SB = SC = SD \Leftrightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SO}{SB} = \frac{SO}{SC} = \frac{SO}{SD}$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = \sin\alpha_4$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

Câu 35. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính:

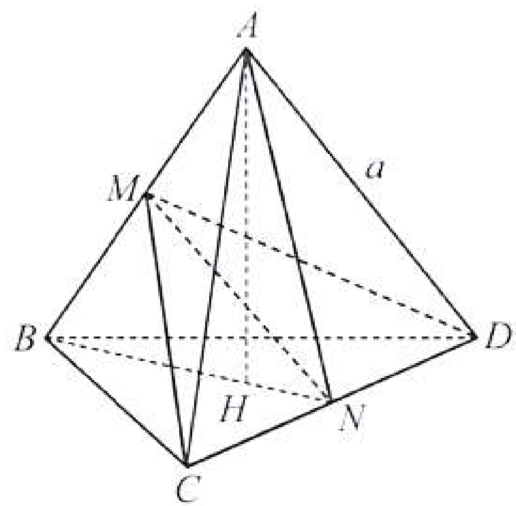
a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD;

b) Chiều cao và thể tích của khối tứ diện đều $ABCD$;

c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD);

d) Côsin của số đo góc nhị diện $[C, AB, D]$.

Lời giải



Hình 84

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Vì tứ diện $ABCD$ đều nên các tam giác ABC và ABD đều. Suy ra $CM \perp AB, DM \perp AB$ nên $AB \perp (CDM)$. Do đó, $AB \perp MN$. Tương tự ta có $CD \perp MN$. Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AB, CD. Ta có:

$$MN = \sqrt{MC^2 - NC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $d(AB, CD) = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD). Khi đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Vì tam giác BCD đều nên H thuộc BN và $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ta có:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

hay chiều cao của khối tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích của tam giác BCD là $S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{BCD}\cdot AH=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

c) Côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng:

$$\cos\widehat{ABH}=\frac{BH}{AB}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

d) Vì $CM\perp AB, DM\perp AB$ nên số đo của góc nhị diện $[C,AB,D]$ bằng $\widehat{CMD}$.

Ta có: $\cos\widehat{CMD}=\frac{CM^2+DM^2-CD^2}{2CM\cdot DM}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$.

Vậy côsin của số đo góc nhị diện $[C,AB,D]$ bằng $\frac{1}{3}$.

Dạng 3. Một số bài toán liên quan hình lăng trụ đặc biệt

Câu 36. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$.

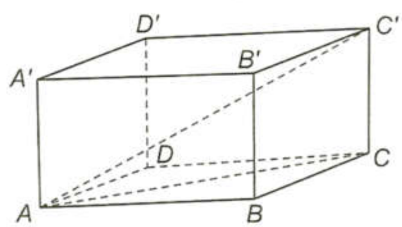
a) Chứng minh rằng $(BDD'B')\perp(ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB=a, BC=b, CC'=c$. Tính AC'.

Lời giải

a) $BB'\perp(ABCD)\Rightarrow(BDD'B')\perp(ABCD)$.



Hình 7.21

b) Hình chiếu của AC' trên $(ABCD)$ là AC.

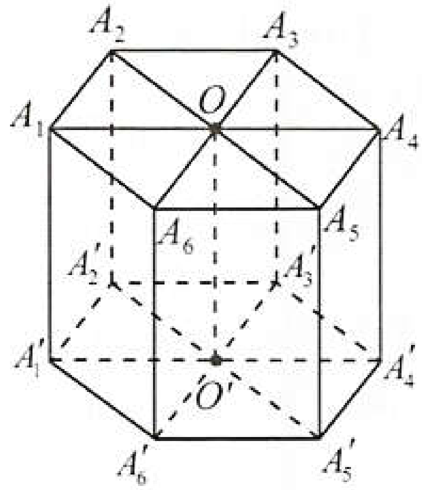
c) $AC'=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 37. Cho hình lăng trụ đứng lục giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $2a$.

a) Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

b) Tính diện tích toàn phần của lăng trụ.

Lời giải



Hình 11

a) Lăng trụ đứng lục giác đều có sáu mặt bên là hình chữ nhật bằng nhau với kích thước lần lượt là $a, 2a$ (Hình 11). Vậy diện tích xung quanh của lăng trụ là:

$S_{xq} = 6 \cdot a \cdot 2a = 12a^2$. b) Vì tam giác A_1A_2O đều nên $S_{\Delta A_1A_2O} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích đáy $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ của lăng trụ là:

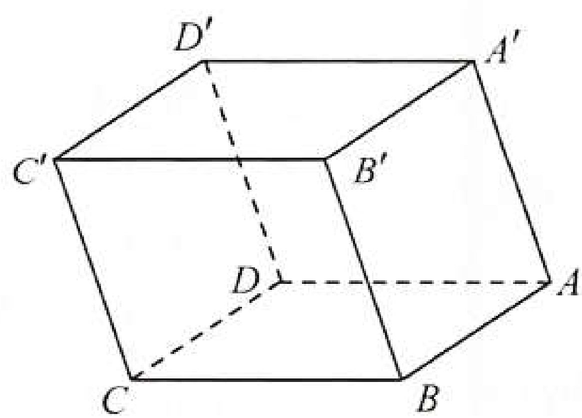
$S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 6 \cdot S_{\Delta A_1A_2O} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích toàn phần của lăng trụ là:

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 12a^2 + 2 \cdot \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} = (12 + 3\sqrt{3})a^2$.

Câu 38. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và có $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Lời giải



Hình 12

Tam giác ABD có $AD = AB = a$ và $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

Suy ra tam giác ABD là tam giác đều, nên $S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = 2S_{\Delta ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

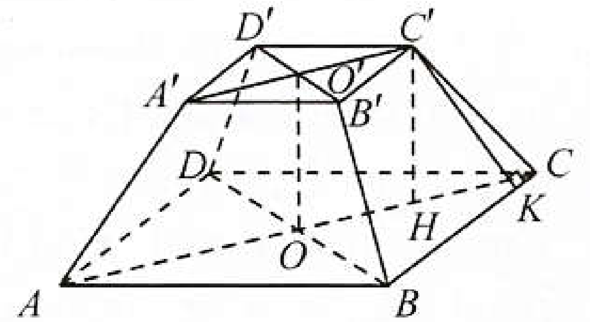
Tương tự, ta có tam giác $A'AB$ và tam giác $A'AD$ là tam giác đều, nên

$S_{A'B'BA} = S_{D'C'CD} = S_{D'A'AD} = S_{C'B'BC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy tổng diện tích các mặt của hình hộp là $S=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=3a^2\sqrt{3}$.

Câu 39. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng $2a$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và cạnh bên $2a$. Tính đường cao của hình chóp cụt và đường cao của mặt bên.

Lời giải



Hình 13

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H$ $(H\in OC)$ (Hình 13).

Ta có: $OC=a\sqrt{2}, O'C'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $CH=a\sqrt{2}-\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có:

$C'H=\sqrt{CC'^2-CH^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{14}}{2}$. Nên $OO'=C'H=\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Trong hình thang $BB'C'C$, vẽ đường cao $C'K(K\in BC)$.

Ta có $CK=\frac{BC-B'C'}{2}=\frac{2a-a}{2}=\frac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CK$, ta có:

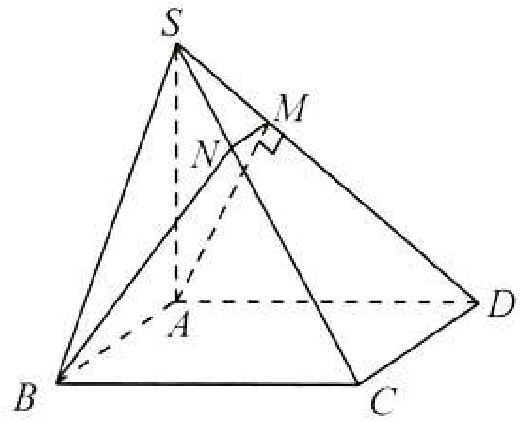
$C'K=\sqrt{CC'^2-CK^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA=a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

a) Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

b) Các giao tuyến ở câu a tạo thành hình gì? Tính diện tích của hình đó.

Lời giải



Hình 5

a) Ta có: $(SAB) \perp (ABCD)$;
$(SAD) \perp (ABCD)$;
$(SAB) \cap (SAD) = SA$
$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$.
Dễ dàng chứng minh được $(SAD) \perp (SCD)$.
Vẽ $AM \perp SD (M \in SD) \Rightarrow AM \perp (SCD)$
$\Rightarrow (ABM) \perp (SCD)$ hay (ABM) là mặt phẳng
(α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).
Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $MN // CD (N \in SC)$.
Suy ra: $MN // AB \Rightarrow MN \subset (\alpha)$.
Vậy các giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp là AB, BN, NM, MA.
b) Ta có: $MN // AB$ và $AB \perp AM$ (vì $AB \perp (SAD)$) nên $ABNM$ là hình thang vuông tại A và M.
Tam giác SAD vuông tại A có AM là đường cao nên

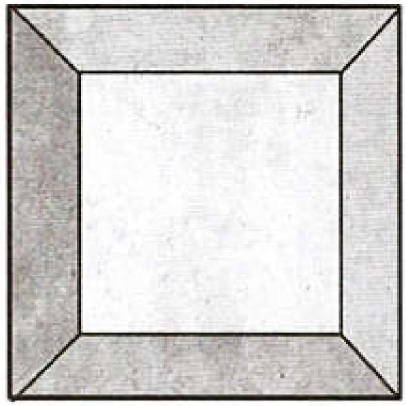
$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$MN // CD \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{SM}{SD} \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{\frac{SA^2}{SD}}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3a^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{3}{4} CD = \frac{3}{4} a.$$

Vậy $S_{ABNM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot (MN + AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} a + a\right) = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Câu 41. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng $2m$, đáy nhỏ có cạnh bằng $1m$ và cạnh bên bằng $2m$ (Hình 14). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.

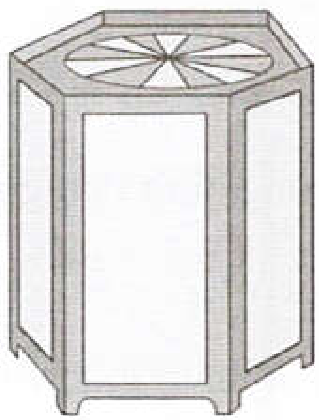


Hình 14

Lời giải

$S_{tp}=4\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{(2+1)}{2}+4+1=5+3\sqrt{5}\approx 16,62\left(m^2\right)$.

Câu 42. Một hộp đèn treo trên trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều (hình 15), cạnh đáy bằng 10cm và cạnh bên bằng 50cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



Hình 15

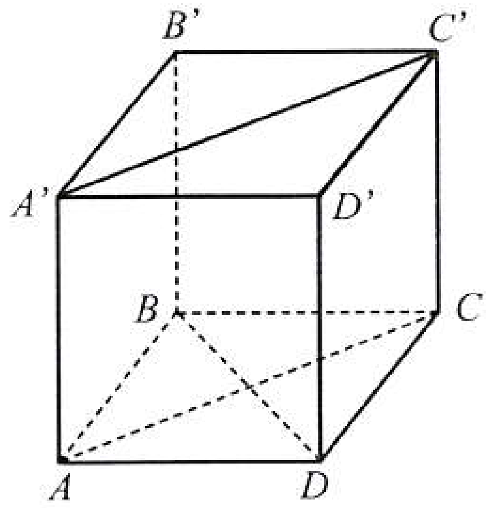
Lời giải

$\frac{S_{xq}}{S_{\text{day}}}=\frac{6\cdot 50\cdot 10}{6\cdot\frac{10^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}\approx 11,55$.

Câu 43. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD\cdot A'B'C'D'$ '. Chứng minh rằng $AC\perp\left(BDD'B'\right)$.

Lời giải

(Hình 44)



Hình 44

Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều nên $BB' \perp (ABCD)$. Mà $AC \subset (ABCD)$ nên $BB' \perp AC$.

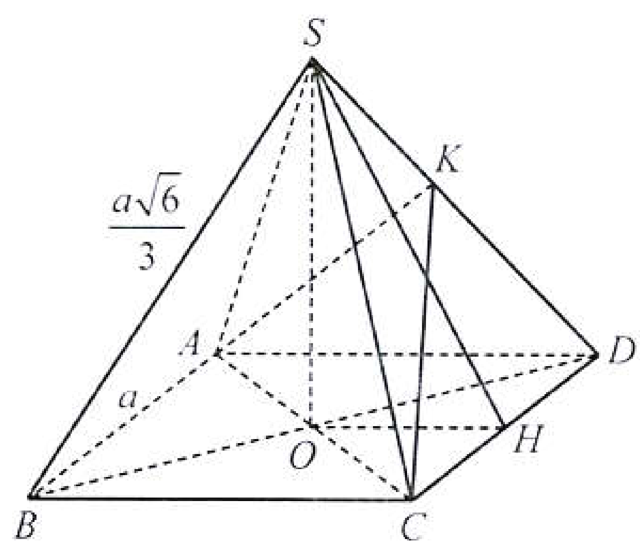
Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$. Mà BB' và BD cắt nhau trong mặt phẳng $\left(BDD'B'\right)$ nên $AC \perp \left(BDD'B'\right)$.

Câu 44. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) Tính chiều cao của khối chóp $S.ABCD$.
b) Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.
c) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.
d) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$.
e) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[A, SD, C]$.

Lời giải

(Hình 45)



Hình 45

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $ABCD$ là hình vuông nên

$OA = OB = OC = OD$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ nên O là chân đường cao của khối chóp $S.ABCD$.

Khi đó, chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng SO.

Trong hình vuông $ABCD$, ta có:

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Xét tam giác SAO vuông tại O có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = a^2$. Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}.$$

c) Vì $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SA trên $(ABCD)$. Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SAO}$.

Xét tam giác SAO vuông tại O có: $\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\widehat{SAO} = 30^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

d) Gọi H là hình chiếu của O trên CD. Vì OCD là tam giác vuông cân tại O nên H là trung điểm CD. Mà tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.

Suy ra $\widehat{SHO}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S,CD,B]$.

Xét tam giác DBC có OH là đường trung bình nên $OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SOH vuông tại O có:

$SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$. Suy ra $\cos\widehat{SHO} = \frac{OH}{SH} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Vậy côsin của số đo góc nhị diện $[S,CD,B]$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

e) Gọi K là hình chiếu của A trên SD. Vì $AC \perp BD, AC \perp SO$ và BD, SO cắt nhau trong mặt phẳng (SBD) nên $AC \perp (SBD)$. Mà $SD \subset (SBD)$ nên $AC \perp SD$.

Ngoài ra, $SD \perp AK$ và AK, AC cắt nhau trong mặt phẳng (ACK) nên $SD \perp (ACK)$.

Mà $CK \subset (ACK)$ nên $SD \perp CK$.

Từ đó ta có $\widehat{AKC}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A,SD,C]$.

Xét tam giác SCD có: $KC = \frac{SH \cdot CD}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot a}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Tương tự ta có: $KA = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Xét tam giác AKC, ta có:

$$\cos\widehat{AKC} = \frac{KA^2 + KC^2 - AC^2}{2KA \cdot KC} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{-3}{5}$$

Vậy côsin của số đo góc nhị diện $[A, SD, C]$ bằng $\frac{-3}{5}$.

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a. Tính:

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $\left(A'B'C'D'\right)$;

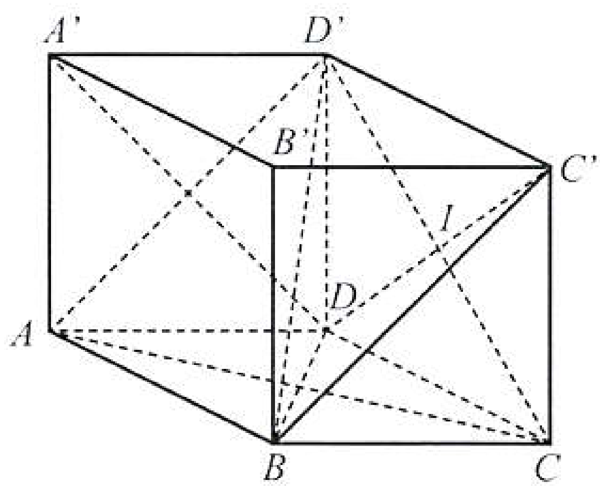
b) Số đo của góc nhị diện $\left[A, CD, B'\right]$;

c) Tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$;

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và BC;

e*) Góc giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Lời giải



Hình 85

a) $d\left((ABCD), \left(A'B'C'D'\right)\right) = a$.

b) Vì $A'B' // DC$ nên A', B', C, D đồng phẳng. Khi đó, góc nhị diện $\left[A, CD, B'\right]$ là $\left[A, CD, A'\right]$. Ta có $AD \perp DC, A'D \perp DC$. Số đo của góc nhị diện $\left[A, CD, B'\right]$ bằng $\widehat{ADA'} = 45^\circ$.

c) Vì $DD' \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{D'BD}$.
Khi đó, tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

$\tan \widehat{D'BD} = \frac{D'D}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Gọi I là giao điểm của CD' và $C'D$. Khi đó $IC \perp BC, IC \perp C'D$.

Suy ra $d\left(C'D, BC\right) = IC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

e*) Vì $BC' // AD'$ nên góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng góc giữa hai đường thẳng AD' và CD'. Vì tam giác $AD'C$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $\widehat{AD'C} = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng 60°.

Dạng 4. Ứng dụng

Câu 46. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Trong cửa sổ ở Hình 7.56, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính $80 cm$, bản lề được đính ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d; khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tính số đo của góc nhị diện có hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa cánh, khung cửa khi $d = 40cm$.

Hình 7.56

Lời giải

Gọi I, J lần lượt là tâm của nửa hình tròn khung cửa và nửa hình tròn cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau, do đó chúng cũng song song với giao tuyến m (qua O) của hai mặt phẳng tương ứng chứa khung và cánh cửa.

Vì O là trung điểm của các cung tròn khung cửa và cánh cửa nên OI vuông góc với đường kính khung cửa, OJ vuông góc với đường kính cánh cửa. Vậy OI, OJ cùng vuông góc với m. Do đó $\widehat{IOJ}$ là một góc phẳng nhị diện của nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa.

Ta có $m \perp OI, m \perp OJ$ nên $m \perp IJ$. Vậy IJ cũng vuông góc với các đường kính cánh cửa và khung cửa. Do đó $IJ = 40cm$. Mặt khác $OI = OJ = 40cm$, suy ra tam giác OIJ đều và $\widehat{IOJ} = 60^{\circ}$. Vậy để khoảng cách d giữa đường kính cánh cửa và đường kính khung cửa bằng $40cm$ thì góc nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa có số đo là 60°.

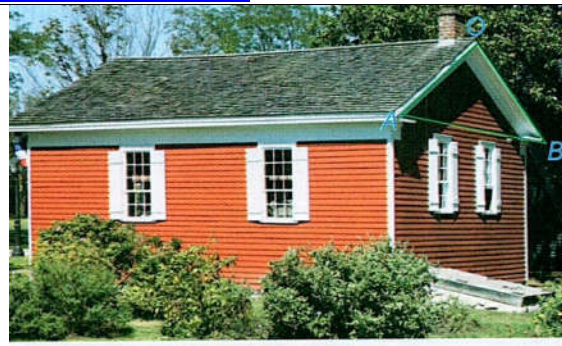
Câu 47. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Từ một tấm tôn hình chữ nhật, tại 4 góc bác Hùng cắt bỏ đi 4 hình vuông có cùng kích thước và sau đó hàn gắn các mép tại các góc như Hình 7.65. Giải thích vì sao bằng cách đó, bác Hùng nhận được chiếc thùng không nắp có dạng hình hộp chữ nhật.


Hình 7.65

Lời giải

Vận dụng kiến thức về hình hộp chữ nhật để tạo dựng hình thực tế. Thùng có đáy và các mặt bên là các hình chữ nhật. Điều đó cũng kéo theo rằng miệng thùng là một hình chữ nhật (có các cạnh tương ứng song song và bằng cạnh đáy) thuộc mặt phẳng song song với đáy. Vi các cạnh bên của song song với nhau nên thùng là một hình lăng trụ. Mặt khác, mỗi cạnh bên của thùng đều vuông góc với đáy (vì vuông với hai cạnh kề của đáy). Do đó thùng là lăng trụ đứng, hơn nữa, có đáy là hình chữ nhật nên thùng có dạng hình hộp chữ nhật.

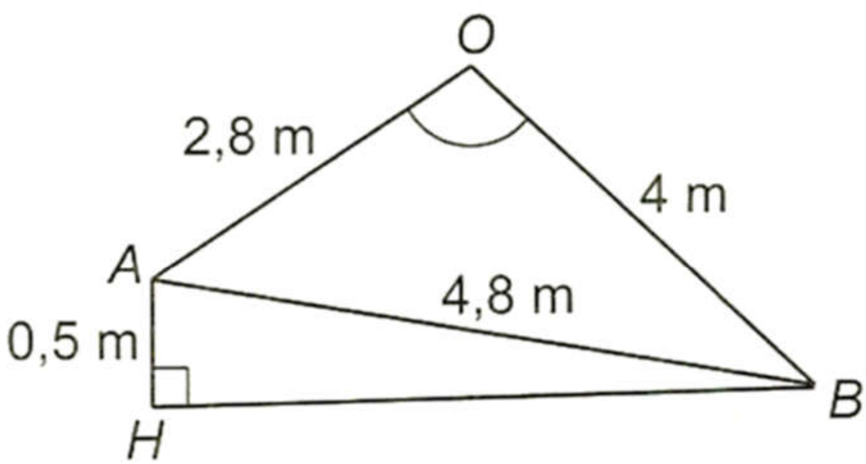
Câu 48. **(SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8m$; $OA = 2,8m; OB = 4m$.



Hình 7.72

a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.
c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5m$. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

Lời giải



Hình 7.23

a) $\cos \widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2\cdot OA\cdot OB}=\dfrac{1}{28}\Rightarrow \widehat{AOB}\approx 88^\circ$.
b) Mặt phẳng (OAB) vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng đất.
c) $\sin \widehat{ABH}=\dfrac{0,5}{4,8}\Rightarrow \widehat{ABH}\approx 6^\circ; \cos \widehat{OBA}=\dfrac{13}{16}\Rightarrow \widehat{OBA}\approx 36^\circ$. Do đó $\widehat{OBH}=\widehat{ABH}+\widehat{OBA}\approx 42^\circ$.

Câu 49. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mái nhà, mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\dfrac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

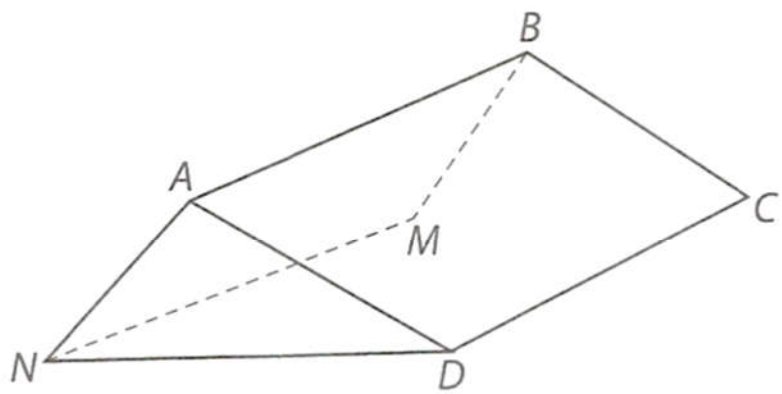
Ta có: $\tan \alpha \le \dfrac{1}{12}\Rightarrow \alpha \le 4,76^\circ$.

Câu 50. Một ngôi nhà có hai mái trước, sau có dạng là các hình chữ nhật $ABCD, ABMN$, $AD = 4m, AN = 3m, DN = 5m$. Tính góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà đó (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

(H.7.13)

Xét tam giác ADN có: $AN^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = DN^2$ nên tam giác AND vuông tại A. Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$ bằng góc DAN. Vậy góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà bằng 90°.

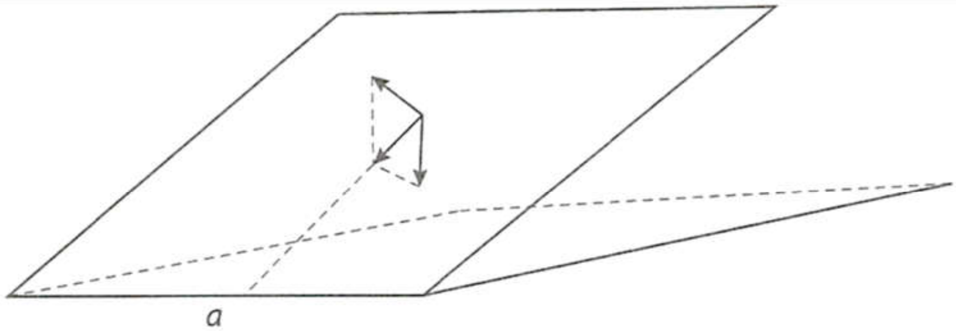


Hình 7.13

Câu 51. Một viên bi được thả lăn trên một mặt phẳng nằm nghiêng (so với mặt phẳng nằm ngang). Coi viên bi chịu tác dụng của hai lực chính là lực hút của Trái Đất (theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) và phản lực, vuông góc với mặt phẳng nằm nghiêng, hướng lên trên. Giải thích vì sao viên bi di chuyển trên một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng nằm nghiêng và mặt phẳng nằm ngang.

Lời giải

Gọi a là giao tuyến của mặt phẳng nằm ngang và mặt phẳng nằm nghiêng. Phương của lực hút trái đất vuông góc với mặt phẳng nằm ngang, phương của phản lực vuông góc với mặt phẳng nghiêng nên phương của hai lực nói trên đều vuông góc với đường thẳng a, do đó đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) chứa hai phương của hai lực đó. Vì tổng hợp lực của trọng lực và phản lực là một lực có phương nằm trên mặt phẳng (P) nên phương đó vuông góc với a. Do đó, viên bi lăn dọc theo đường thẳng vuông góc với đường thẳng a.

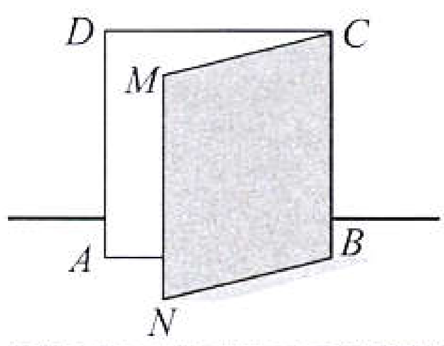


Hình 7.45

Câu 52. Hình 19 minh hoạ một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là $1,2m$. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?

Lời giải

(hình 19)



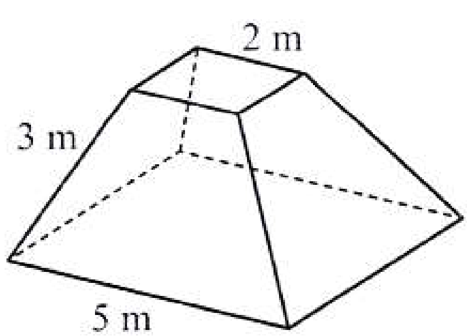
Hình 19

Vì $AB \perp BC$ và $NB \perp BC$ nên góc ABN là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, N]$.

Vì góc mở cửa bằng 60° nên số đo góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng 60°, suy ra $\widehat{ABN} = 60^{\circ}$.

Xét tam giác ABN cân tại B có $BA = BN = 1,2m$ và $\widehat{ABN} = 60^{\circ}$. Khi đó tam giác ABN đều, suy ra $AN = 1,2m$, hay khoảng cách giữa A và N bằng $1,2m$.

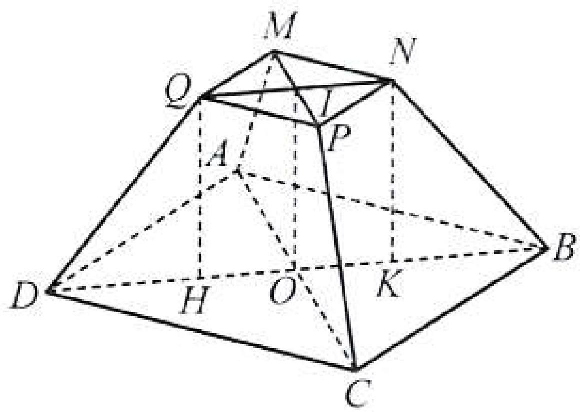
Câu 53. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng $/m^3$. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 46

Lời giải

(Hình 47)



Hình 47

Giả sử chân tháp là khối chóp cụt tứ giác đều $ABCD.MNPQ$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh $5m, MNPQ$ là hình vuông cạnh $2m$, $AM = BN = CP = DQ = 3m$.

Vì DQ, NB cắt nhau nên D, Q, N, B đồng phẳng. Mà $(ABCD)//(MNPQ)$ nên $NQ//BD$.

Gọi I là giao điểm của MP và NQ, O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $IO \perp (MNPQ), IO \perp (ABCD)$.

Xét hình thang $QNBD$, gọi H là hình chiếu của Q trên BD, K là hình chiếu của N trên BD. Vì $IO \perp BD$, $QH \perp BD, NK \perp BD$ trong $(QNBD)$ nên $IO//QH//NK$.

Suy ra $QH \perp (MNPQ), QH \perp (ABCD)$ nên QH bằng chiều cao của khối chóp cụt đều.

Ngoài ra, ta có $QH = NK = IO$ và $QD = NB$. Suy ra $\Delta QHD = \Delta NKB$ nên ta có $HD = BK$.

Bên cạnh đó, $QNKH$ là hình chữ nhật nên $QN = HK$. Từ đó ta có:

$$HD = \frac{BD - HK}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2} - \sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{5^2 + 5^2} - \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(m).$$

Xét tam giác QHD vuông tại H có:

$$QH = \sqrt{QD^2 - HD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(m).$$

Diện tích của hai đáy là: $S_{ABCD} = AB^2 = 5^2 = 25\left(m^2\right)$,

$S_{MNPQ} = MN^2 = 2^2 = 4\left(m^2\right)$.

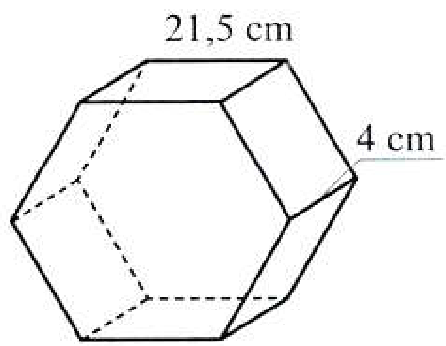
Suy ra thể tích của khối chóp cụt đều là:

$$V = \frac{1}{3}QH\left(S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}} + S_{MNPQ}\right)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}(25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2}\left(m^3\right).$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là:

$1470000 \cdot \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 40538000$ (đồng).

Câu 54. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là $4cm$ và cạnh lục giác dài $21,5cm$. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimét khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 48

Lời giải

Chia hình lục giác đều trên hai mặt đáy thành 6 hình tam giác đều cạnh $21,5cm$. Khi đó diện tích đáy của viên gạch bằng: $6\cdot\frac{(21,5)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{5547\sqrt{3}}{8}\left(cm^2\right)$. Thể tích bê tông cần dùng bằng thể tích viên gạch, tức là: $4.\frac{5547\sqrt{3}}{8}\approx 4803,8\left(cm^3\right)$.