

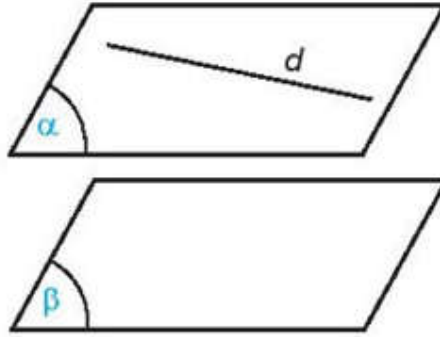
## BÀI 13. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

- CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

## PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

## 1. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung, kí hiệu  $(\alpha) // (\beta)$  hay  $(\beta) // (\alpha)$ .

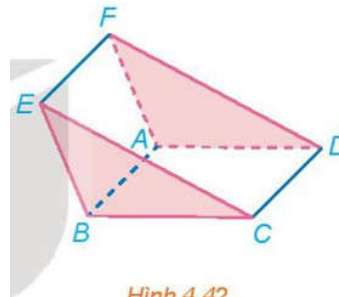


**Nhận xét.** Nếu hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau và đường thẳng  $d$  nằm trong  $(\alpha)$  thì  $d$  và  $(\beta)$  không có điểm chung, tức là  $d$  song song với  $(\beta)$ . Như vậy, nếu một đường thẳng nằm trong một trong hai mặt phẳng song song thì đường thẳng đó song song với mặt phẳng còn lại.

## 2. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT CỦA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Nếu mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này song song với mặt phẳng  $(\beta)$  thì  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau.

**Ví dụ 1.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng mặt phẳng  $(BCE)$  song song với mặt phẳng  $(ADF)$  (H.4.42).



Hình 4.42

**Giải**

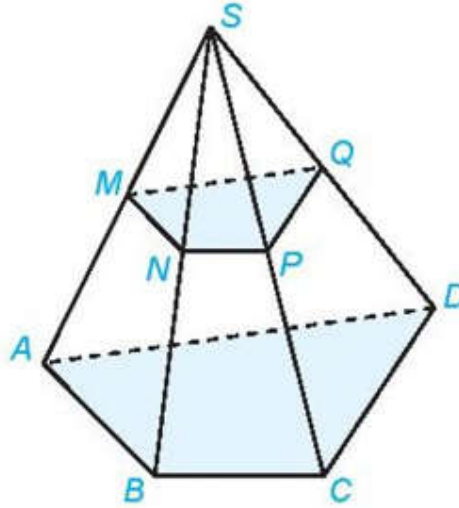
Vì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $BC // AD$ , suy ra  $BC // (ADF)$ .

Vì tứ giác  $ABEF$  là hình bình hành nên  $BE // AF$ , suy ra  $BE // (ADF)$ .

Mặt phẳng  $(BCE)$  chứa hai đường thẳng cắt nhau  $BC$  và  $BE$  cùng song song với mặt phẳng  $(ADF)$  nên mặt phẳng  $(BCE)$  song song với mặt phẳng  $(ADF)$ .

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

**Ví dụ 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SA, SB, SC, SD$  (H.4.45).



Hình 4.45

Chứng minh rằng hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(NPQ)$  cùng song song với mặt phẳng  $(ABCD)$ , từ đó suy ra bốn điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.

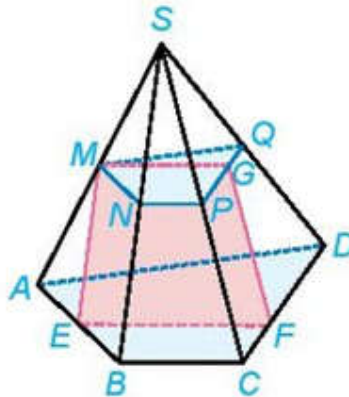
**Giải**

Vì  $M, N$  là trung điểm của  $SA, SB$  nên  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $SAB$ . Do đó,  $MN \parallel AB$  và suy ra  $MN$  song song với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Tương tự,  $NP$  cũng song song với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Vậy mặt phẳng  $(MNP)$  song song với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Lập luận tương tự ta có mặt phẳng  $(NPQ)$  cũng song song với mặt phẳng  $(ABCD)$ .

Hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(NPQ)$  cùng đi qua điểm  $N$  và cùng song song với mặt phẳng  $(ABCD)$  nên hai mặt phẳng đó trùng nhau, tức là bốn điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

**Ví dụ 3.** Trong Ví dụ 2, gọi  $E, F$  lần lượt là các điểm thuộc các cạnh  $AB, CD$  (H.4.47).



Hình 4.47

Xác định giao tuyến của mặt phẳng  $(MEF)$  và mặt phẳng  $(MNPQ)$ .

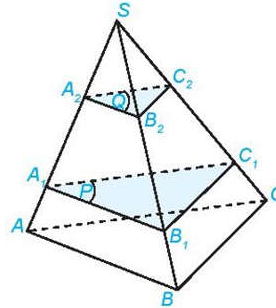
**Giải**

Trong Ví dụ 2, ta đã chứng minh được hai mặt phẳng  $(MNPQ)$  và  $(ABCD)$  song song với nhau. Vì vậy hai giao tuyến của mặt phẳng  $(MEF)$  với hai mặt phẳng  $(MNPQ)$  và  $(ABCD)$  song song với nhau. Trong mặt phẳng  $(MEF)$ , qua  $M$  vẽ đường thẳng song song với  $EF$  cắt  $PQ$  tại  $G$  thì đường thẳng  $MG$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MEF)$  và  $(MNPQ)$ .

**3. ĐỊNH LÝ THALES TRONG KHÔNG GIAN**

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

**Ví dụ 4.** Cho hình tứ diện  $SABC$ . Trên cạnh  $SA$  lấy các điểm  $A_1, A_2$  sao cho  $A_2A_1 = 2A_1A$ . Gọi  $(P)$  và  $(Q)$  là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng  $(ABC)$  và lần lượt đi qua  $A_1, A_2$ . Mặt phẳng  $(P)$  cắt các cạnh  $SB, SC$  lần lượt tại  $B_1, C_1$ . Mặt phẳng  $(Q)$  cắt các cạnh  $SB, SC$  lần lượt tại  $B_2, C_2$  (H.4.49).



Hình 4.49

Chứng minh  $B_2B_1 = 2B_1B$  và  $C_2C_1 = 2C_1C$ .

**Giải**

Áp dụng định lý Thalès cho ba mặt phẳng đôi một song song  $(P), (Q), (ABC)$  và hai cát tuyến

$SA, SB$ , ta có  $\frac{A_2A_1}{A_1A} = \frac{B_2B_1}{B_1B}$ .

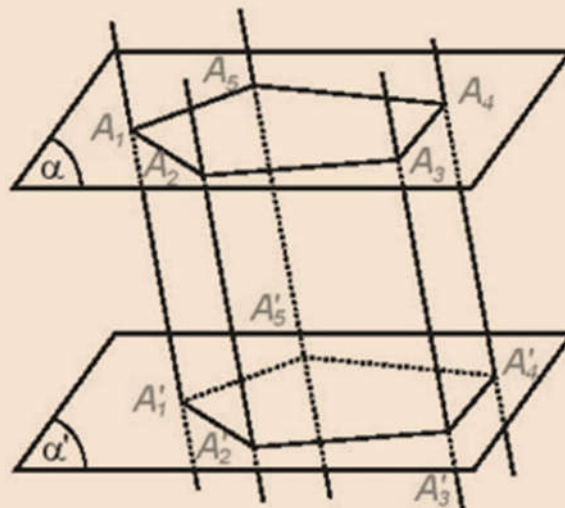
Vì  $A_2A_1 = 2A_1A$  nên  $B_2B_1 = 2B_1B$

Vì  $A_2A_1 = 2A_1A$  nên  $B_2B_1 = 2B_1B$ .

Tương tự với hai cát tuyến  $SA, SC$  suy ra  $C_2C_1 = 2C_1C$ .

**4. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP**

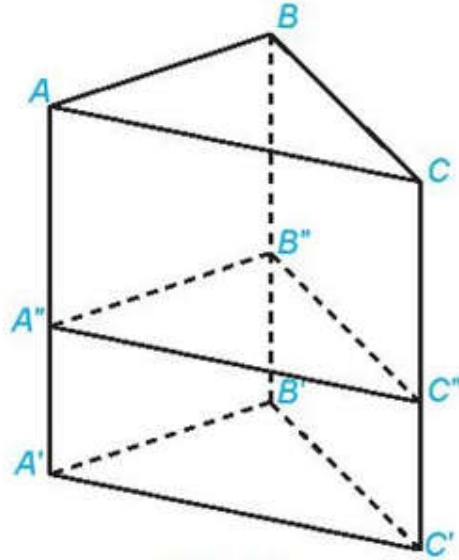
Cho hai mặt phẳng song song  $(\alpha)$  và  $(\alpha')$ . Trên  $(\alpha)$  cho đa giác lồi  $A_1A_2 \dots A_n$ . Qua các đỉnh  $A_1, A_2, \dots, A_n$  vẽ các đường thẳng đôi một song song và cắt mặt phẳng  $(\alpha')$  tại  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ . Hình gồm hai đa giác  $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$  và các tứ giác  $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, \dots, A_nA'_nA'_1A_1$  được gọi là hình lăng trụ và kí hiệu là  $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$



Hình 4.50

- Các điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  và  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  được gọi là các đỉnh, các đoạn thẳng  $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$  được gọi là các cạnh bên, các đoạn thẳng  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  và  $A'_1A'_2, A'_2A'_3, \dots, A'_nA'_1$  được gọi là các cạnh đáy của hình lăng trụ.
- Hai đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$  và  $A'_1A'_2 \dots A'_n$  được gọi là hai mặt đáy của hình lăng trụ.
- Các tứ giác  $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, \dots, A_nA'_nA'_{n+1}A_{n+1}$  được gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.

**Ví dụ 5.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC \cdot A'B'C'$ . Một mặt phẳng song song với mặt đáy của hình lăng trụ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại  $A'', B'', C''$  (H.4.51).



Hình 4.51

Chứng minh rằng  $ABC.A''B''C''$  là hình lăng trụ.

**Giải**

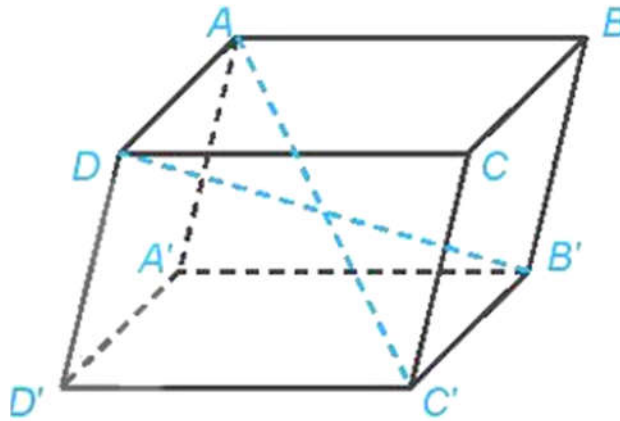
Vì các cạnh bên của hình lăng trụ  $ABC \cdot A'B'C'$  đôi một song song nên  $AA'', BB'', CC''$  đôi một song song. Mặt phẳng  $(ABC)$  song song với mặt phẳng  $(A''B''C'')$  nên  $ABC.A''B''C''$  là hình lăng trụ.

Hình lăng trụ tứ giác  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có hai đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp

- Các cặp điểm  $A$  và  $C', B$  và  $D', C$  và  $A', D$  và  $B'$  được các đỉnh đối diện của hình hộp.
- Các đoạn thẳng  $AC', BD', CA'$  và  $DB'$  được gọi là các đường chéo của hình hộp.
- Các cặp tứ giác  $ABCD$  và  $A'B'C'D', ADD'A'$  và  $BCC'B', ABB'A'$  và  $CDD'C'$  được gọi là hai mặt đối diện của hình hộp.

Hai đỉnh đối diện của hình hộp là hai đỉnh không cùng thuộc bất kì mặt nào của hình hộp. Hai mặt đối diện của hình hộp là hai mặt không có điểm chung.

**Ví dụ 6.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  (H.4.52).



Hình 4.52

Chứng minh rằng các đường chéo  $AC', BD', CA'$  và  $DB'$  của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường.

**Giải**

Đáy  $ABCD$  của hình hộp là hình bình hành nên  $AD \parallel BC$  và  $AD = BC$ . Mặt bên  $BCC'B'$  của hình hộp là hình bình hành nên  $BC \parallel B'C'$  và  $BC = B'C'$ . Vậy  $AD \parallel B'C'$  và  $AD = B'C'$ , suy ra  $ADC'B'$  là hình bình hành. Từ đó  $AC'$  và  $DB'$  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tương tự  $AC'$  và  $BD'$ ,  $AC'$  và  $CA'$  cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy bốn đường chéo của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường.

## PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

### DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Phương pháp giải: áp dụng định lý

$$\begin{cases} a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

**Nhận xét:** Thực chất của việc chứng minh 2 mặt phẳng song song là tìm 2 đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng này song song với 2 đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng kia. Vậy:

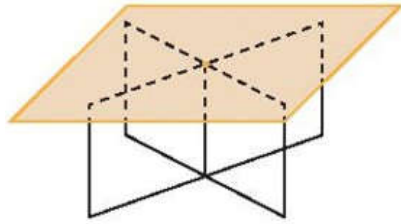
$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \not\subset (\beta), b \subset (\beta) \\ a \cap b = I \\ c \subset (\beta), d \subset (\beta) \\ a \parallel c, b \parallel d \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

Chứng minh 2 mặt phẳng đó cùng song song với mặt phẳng khác.

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\gamma) \\ (\beta) \parallel (\gamma) \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

**Câu 1.** (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Trong không gian, cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Qua điểm  $A$  vẽ hai đường thẳng  $m, n$  lần lượt song song với hai đường thẳng  $BC, BD$ . Chứng minh rằng  $mp(m, n)$  song song với mặt phẳng  $(BCD)$ .

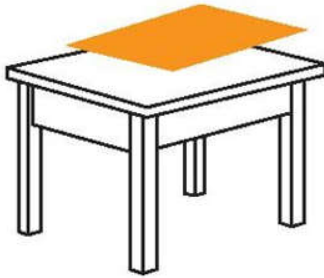
**Câu 2.** (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Một chiếc bàn có phần chân là hai khung sắt hình chữ nhật có thể xoay quanh một trục như trong Hình 4.43.



Hình 4.43

Khi mặt bàn được đặt lên phần chân bàn thì mặt bàn luôn song song với mặt đất. Hãy giải thích tại sao.

**Câu 3.** (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Đặt một tấm bìa cứng lên một góc của mặt bàn nằm ngang (H.4.44) sao cho mặt bìa song song với mặt đất. Khi đó mặt bìa có trùng với mặt bàn hay không?



Hình 4.44

**Câu 4.** (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình chóp  $S.ABCD$ , gọi  $E, F$  lần lượt là các điểm thuộc các cạnh  $AB, CD$ .  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SA, SB, SC, SD$ . Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng  $(EMQ)$  và mặt phẳng  $(ABCD)$ .

**Câu 5.** (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M$  và  $M'$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $B'C'$ . Chứng minh rằng  $AMC.A'M'C'$  là hình lăng trụ.

**Câu 6.** (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chứng minh rằng hai mặt phẳng  $(ADD'A')$  và  $(BCC'B')$  song song với nhau.

**Câu 7.** (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Trong không gian cho ba mặt phẳng phân biệt  $(P), (Q), (R)$ . Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

- a) Nếu  $(P)$  chứa một đường thẳng song song với  $(Q)$  thì  $(P)$  song song với  $(Q)$ .
- b) Nếu  $(P)$  chứa hai đường thẳng song song với  $(Q)$  thì  $(P)$  song song với  $(Q)$ .
- c) Nếu  $(P)$  và  $(Q)$  song song với  $(R)$  thì  $(P)$  song song với  $(Q)$ .
- d) Nếu  $(P)$  và  $(Q)$  cắt  $(R)$  thì  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau.

**Câu 8.** (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AA', BB', CC'$ . Chứng minh rằng mặt phẳng  $(MNP)$  song song với mặt phẳng  $(ABC)$ .

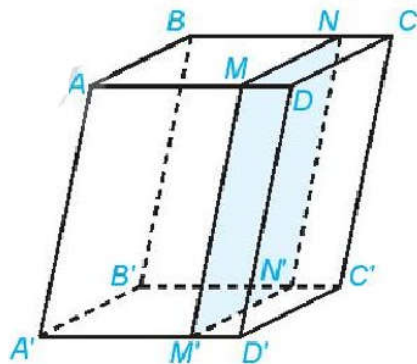
**Câu 9.** (SGK-KNTT 11 – Tập 1) Cho hình thang  $ABCD$  có hai đáy  $AB$  và  $CD$ . Qua các điểm  $A, D$  lần lượt vẽ các đường thẳng  $m, n$  song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng  $(ABCD)$ . Chứng minh rằng  $mp(B, m)$  và  $mp(C, n)$  song song với nhau.

**Câu 10. (SGK-KNTT 11 – Tập 1)** Cho hình lăng trụ tứ giác  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Một mặt phẳng song song với mặt phẳng  $(A'B'C'D')$  cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại  $A'', B'', C'', D''$ . Hình tạo bởi các điểm  $A, B, C, D, A'', B'', C'', D''$  là hình gì?

**Câu 11. (SGK-KNTT 11 – Tập 1)** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC \cdot A'B'C'$ . Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ .

- Chứng minh rằng tứ giác  $AGG'A'$  là hình bình hành.
- Chứng minh rằng  $AGC \cdot A'G'C'$  là hình lăng trụ.

**Câu 12. (SGK-KNTT 11 – Tập 1)** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ . Một mặt phẳng song song với mặt bên  $(ABB'A')$  của hình hộp và cắt các cạnh  $AD, BC, A'D', B'C'$  lần lượt tại  $M, N, M', N'$  (H.4.54).



Hình 4.54

Chứng minh rằng  $ABNM \cdot A'B'N'M'$  là hình hộp.

**Câu 13. (SGK-KNTT 11 – Tập 1)** Cầu thang xương cá là dạng cầu thang có hình dáng tương tự như những đốt xương cá, thường có những bậc cầu thang với khoảng mở lớn, tạo được sự nhẹ nhàng và thoáng đãng cho không gian sống. Trong Hình 4.55, phần mép của mỗi bậc thang nằm trên tường song song với nhau. Hãy giải thích tại sao.



Hình 4.55

**Câu 14.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  có chung cạnh  $AB$  và không đồng phẳng.  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, CD, EF$ . Chứng minh:

- $(ADF) \parallel (BCE)$
- $(DIK) \parallel (JBE)$

**Câu 15.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  có chung cạnh  $AB$  và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi  $M, N$  thứ tự là trung điểm của  $AB, BC$  và  $I, J, K$  theo thứ tự là trọng tâm các tam giác  $ADF, ADC, BCE$ . Chứng minh  $(IJK) \parallel (CDFE)$

**Câu 16.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $H, I, K$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB, SC$



a) Chứng minh rằng:  $(HIK) // (ABCD)$

b) Gọi  $M$  là giao điểm của  $AI$  và  $KD$ ,  $N$  là giao điểm của  $DH$  và  $CI$ . Chứng minh rằng  $(SMN) // (HIK)$

**Câu 17.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $E, F, G$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AA', BB', CC'$ . Chứng minh rằng:

a)  $(EFG) // (ABCD)$  Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(ABD)$  và  $(C'D'D)$

b) Tìm giao điểm của  $A'C$  và  $(C'BD)$

**Câu 18.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ .  $M, N, P$  là trung điểm  $A'B', BC, DD'$ . Chứng minh  $(MNP) // (CB'D')$

**Câu 19.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $G_1, G_2, G_3$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $SAB, SBC, SAC$ . Chứng minh  $(G_1G_2G_3) // (ABC)$ .

**Câu 20.** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $I, K, G$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC, A'B'C', ACC'$ . Chứng minh:

a)  $(IKG) // (BCC'B')$ .

b)  $(A'KG) // (AIB')$ .

**Câu 21.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB'$ . Chứng minh  $C'I // (ACD')$ .

**Câu 22.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SD$ ,  $N \in AC$ , điểm  $E$  đối xứng với  $D$  qua  $A$ . Chứng minh  $MN // (SEB)$ .

**Câu 23.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $SD$ .

a) Chứng minh  $(SBC) // (OMN)$ .

b) Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $AB, ON, SB$ . Chứng minh  $PQ // (SBC)$  và  $(OMR) // (SCD)$ .

**Câu 24.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB, SC$ .

a) Chứng minh  $(MNP) // (ABC)$ .

b) Gọi  $H, G, L$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $SAB, SAC, SBC$ . Chứng minh  $(HGL) // (MNP)$ .

**Câu 25.** Cho hai hình vuông  $ABCD$  và  $ABEF$  ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo  $AC$  và  $BF$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $AM = BN$ . Các đường thẳng song song với  $AB$  vẽ từ  $M, N$  lần lượt cắt  $AD$  và  $AF$  tại  $M'$  và  $N'$ . Chứng minh:

a)  $(ADF) // (BCE)$ .

b)  $(DEF) // (MM'N'N)$ .

**Câu 26.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành, các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các cạnh  $SB, AC$  sao cho  $\frac{BM}{MS} = \frac{CN}{NA} = x, (0 < x \neq 1)$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SCD$ . Tìm  $x$

để  $(MNG) // (SAD)$ .



**Câu 27.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $AA'B, ACD, A'B'D'$ . Chứng minh rằng  $(MNP) \parallel (BCC'B')$ .

**Câu 28.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $G, H, K$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC, BCD, A'AD'$ . Chứng minh rằng  $(GHK) \parallel (A'BCD')$ .

**Câu 29.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AC, AA', A'C', BC$ . Chứng minh rằng  $(MNQ) \parallel (A'B'C)$ .

**Câu 30.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang đáy lớn là  $AD$ . Gọi  $M$  là trọng tâm tam giác  $SAD$ ,  $N$  là điểm thuộc đoạn  $AC$  sao cho  $NA = \frac{NC}{2}$ ,  $P$  là điểm thuộc đoạn  $CD$  sao cho

$PD = \frac{PC}{2}$ . Chứng minh rằng  $MN \parallel (SBC)$  và  $(MNP) \parallel (SBC)$ .

## **DẠNG 2: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA MỘT MẶT PHẪNG VỚI HÌNH CHÓP KHI BIẾT MẶT PHẪNG ĐÓ SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẪNG CHO TRƯỚC.**

Để xác định thiết diện trong trường hợp này ta sử dụng các tính chất sau

- Khi  $(\alpha) \parallel (\beta)$  thì  $(\alpha)$  sẽ song song với tất cả các đường thẳng trong  $(\beta)$  và ta chuyển về dạng thiết diện song song với đường thẳng.

- Sử dụng 
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\beta) \cap (\gamma) = d \Rightarrow (\alpha) \cap (\gamma) = d' \parallel d, M \in d'' \\ M \in (\alpha) \cap (\gamma) \end{cases}$$

- Tìm đường thẳng  $d$  nằm trong  $(\beta)$  và xét các mặt phẳng có trong hình chóp mà chứa  $d$ , khi đó  $(\alpha) \parallel d$  nên sẽ cắt các mặt phẳng chứa  $d$  (nếu có) theo các giao tuyến song song với  $d$ .

**Câu 31.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ .

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $MN$  và song song với mặt phẳng  $(SAD)$ .

b) Thiết diện vừa tìm được là hình gì?

**Câu 32.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$  có  $AC = a, BD = b$ . Tam giác  $SBD$  là tam giác đều. Một mặt phẳng  $(\alpha)$  đi động song song với mặt phẳng  $(SBD)$  và đi qua điểm  $I$  trên đoạn  $AC$  và  $AI = x$  ( $0 < x < a$ ).

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi  $(\alpha)$ .

b) Tính diện tích thiết diện theo  $a, b$  và  $x$ .

**Câu 33.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang, đáy lớn  $AB = 3a, AD = CD = a$ . Mặt bên  $(SAB)$  là tam giác cân đỉnh  $S$  với  $SA = 2a$ . Trên cạnh  $AD$  lấy điểm  $M$ .

a) Gọi  $N, P, Q$  theo thứ tự là giao điểm của mặt phẳng  $(\alpha)$  và các cạnh  $BC, SC, SD$ . Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(SAB)$ . Thiết diện là hình gì?

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $MQ$  và  $NP$ . Chứng minh rằng điểm  $I$  nằm trên một đường thẳng cố

định.

c) Đặt  $AM = x$  ( $0 < x < a$ ). Tìm  $x$  để  $MNPQ$  ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

**Câu 34.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $SB$ . Biết tam giác  $ACE$  đều và  $AC = OD = a$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  đi động song song với mặt phẳng  $(ACE)$  và đi qua điểm  $I$  trên đoạn  $OD$ .

- Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$ .
- Tính diện tích của thiết diện theo  $a$  và  $x$  (với  $DI = x$ ). Tìm  $x$  để diện tích thiết diện là lớn nhất.

**Câu 35.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm giữa hai đường chéo. Tam giác  $SCD$  là tam giác đều cạnh  $2a$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $O$  và song song với mặt phẳng  $(SCD)$ . Tính diện tích thiết diện tạo thành bởi mặt phẳng  $(P)$  và hình chóp.

**Câu 36.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trên các cạnh  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  lần lượt lấy ba điểm  $M$ ,  $N$ ,  $P$  sao cho  $\frac{A'M}{AA'} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{B'N}{BB'} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{C'P}{CC'} = \frac{1}{2}$ . Biết mặt phẳng  $(MNP)$  cắt cạnh  $DD'$  tại  $Q$ . Tính tỉ số  $\frac{D'Q}{DD'}$ .

**Câu 37.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ , mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $G$  và song song với mặt phẳng  $(SAB)$ ,  $(\alpha) \cap SC = P$ . Tính tỷ số  $\frac{SP}{SC}$ .

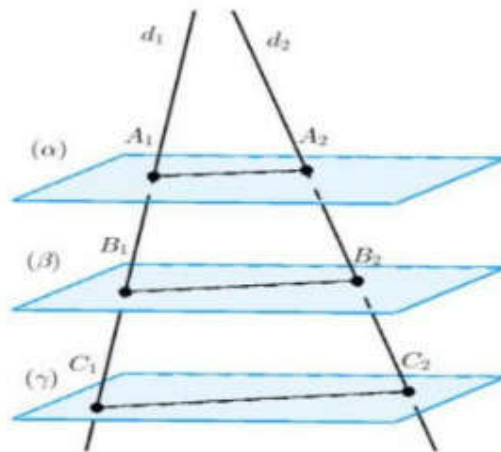
**Câu 38.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Đáy  $ABCD$  là hình thang có đáy lớn  $CD$  bằng hai lần đáy nhỏ  $AB$ . Gọi  $O = AC \cap BD$ , mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $O$  và song song với mặt phẳng  $(SAB)$ ,  $(\alpha) \cap SC = P$ .

Tính tỷ số  $\frac{SP}{PC}$ .

### DẠNG 3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ TA-LÉT

#### Định lý Ta-let trong không gian

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai đường thẳng những đoạn thẳng tỷ lệ.



$$\left. \begin{aligned} &(\alpha) // (\beta) // (\gamma) \\ &d_1 \cap (\alpha) = A_1, d_1 \cap (\beta) = B_1, d_1 \cap (\gamma) = C_1 \\ &d_2 \cap (\alpha) = A_2, d_2 \cap (\beta) = B_2, d_2 \cap (\gamma) = C_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C_2}$$

**Định lý đảo của định lý Thales trong không gian.**

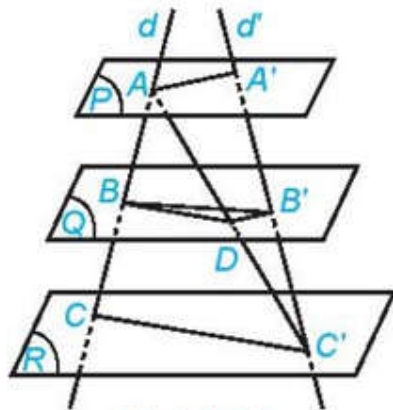
Cho hai đường thẳng  $d_1, d_2$  chéo nhau và các điểm  $A_1, B_1, C_1 \in d_1$  và  $A_2, B_2, C_2 \in d_2$  sao cho

$$\frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C_2}$$

Khi đó các đường thẳng  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$  cùng song song với một mặt phẳng. Hơn nữa, mặt phẳng này không duy nhất

**Câu 39. (SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là các điểm thuộc các cạnh  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $\frac{MA}{MS} = \frac{NB}{NS} = \frac{PC}{PS} = \frac{QD}{QS} = \frac{1}{2}$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.

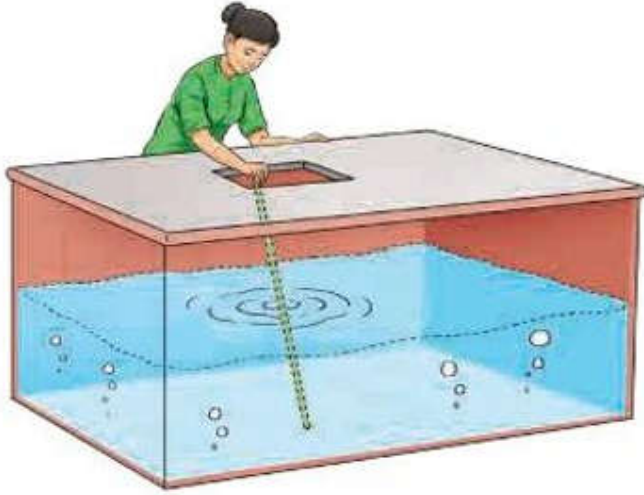
**Câu 40. (SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho ba mặt phẳng  $(P), (Q)$  và  $(R)$  đôi một song song. Hai đường thẳng phân biệt  $d$  và  $d'$  cắt ba mặt phẳng lần lượt tại  $A, B, C$  và  $A', B', C'$  ( $C$  khác  $C'$ ). Gọi  $D$  là giao điểm của  $AC'$  và  $BQ$  (H.4.48)



Hình 4.48

- a) Các cặp đường thẳng  $BD$  và  $CC'$ ,  $B'D$  và  $AA'$  có song song với nhau không?
- b) Các tỉ số  $\frac{AB}{BC}$ ,  $\frac{AD}{DC'}$  và  $\frac{A'B'}{B'C'}$  có bằng nhau không?

**Câu 41. (SGK-KNTT 11-Tập 1)** Để xác định mực nước trong một chiếc bể có dạng hình hộp, bác Hà đặt một thanh gỗ đủ dài vào trong bể sao cho một đầu của thanh gỗ dựa vào mép của nắp bể, đầu còn lại nằm trên đáy bể (H.4.53).



Hình 4.53

Sau đó bác Hà rút thanh gỗ ra ngoài và tính tỉ lệ giữa độ dài của phần thanh gỗ bị ngâm trong nước và độ dài của cả thanh gỗ. Tỉ lệ này chính bằng tỉ lệ giữa mực nước và chiều cao của bể. Hãy giải thích vì sao.

**Câu 42. (SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình tứ diện  $SABC$ . Trên cạnh  $SA$  lấy các điểm  $A_1, A_2$  sao cho  $AA_1 = A_1A_2 = A_2S$ . Gọi  $(P)$  và  $(Q)$  là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng  $(ABC)$  và lần lượt đi qua  $A_1, A_2$ . Mặt phẳng  $(P)$  cắt các cạnh  $SB, SC$  lần lượt tại  $B_1, C_1$ . Mặt phẳng  $(Q)$  cắt các cạnh  $SB, SC$  lần lượt tại  $B_2, C_2$ . Chứng minh  $BB_1 = B_1B_2 = B_2S$  và  $CC_1 = C_1C_2 = C_2S$ .

**Câu 43.** Cho hình chóp cụt tam giác  $ABC.A'B'C'$  trong đó  $ABC$  là đáy lớn. Gọi  $S$  là điểm đồng quy của các đường thẳng  $AA', BB', CC'$ . Chứng minh  $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}$ .

**Câu 44.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là một điểm di động trên  $SC$ ,  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $AM$  và song song với  $BD$ . Tìm giao điểm  $H$  và  $K$  của  $(\alpha)$  với  $SB, SD$ .

Chứng minh rằng  $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM}$  có giá trị không đổi.

**Câu 45.** Cho tứ diện  $ABCD$  và  $M, N$  là các điểm lần lượt di động trên  $BC, AD$  sao cho  $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$ .

Chứng minh rằng  $MN$  luôn song song với một mặt phẳng cố định.

**Câu 46.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh bằng  $a$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên  $AD', DB$  sao cho  $AM = DN = x$  ( $0 < x < a\sqrt{2}$ ).

a) Chứng minh rằng khi  $x$  biến thiên, đường thẳng  $MN$  luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh rằng khi  $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$  thì  $MN \parallel A'C$ .

**Câu 47.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Trên  $SB, AC$  lần lượt lấy  $M, N$  sao cho  $\frac{BM}{MS} = \frac{NC}{NA} = x$ ,  $0 < x < 1$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle SCD$ .

a) Chứng minh rằng  $MN$  song song với mặt phẳng cố định khi  $x$  thay đổi.

b) Tìm  $x$  để  $(MNG) // (SAD)$ .

c) Tìm  $x$  để  $NG // (SAB)$ .

**Câu 48.** Cho hai điểm  $M, N$  lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song  $(P), (Q)$ . Tìm tập hợp các điểm  $I$  thuộc đoạn  $MN$  sao cho  $\frac{IM}{IN} = k, k \neq 0$ .

**Câu 49.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt thay đổi trên hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Tìm tập hợp trung điểm  $I$  của  $MN$ .

### PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

#### 1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

**Câu 1.** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  đều song song với mặt phẳng  $(\beta)$ .

B. Nếu hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  đều song song với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng  $(\beta)$ .

C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  thì  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song với nhau.

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

**Câu 2.** Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Cho điểm  $M$  nằm ngoài mặt phẳng  $(\alpha)$ . Khi đó tồn tại duy nhất một đường thẳng  $a$  chứa  $M$  và song song với  $(\alpha)$ .

B. Cho hai đường thẳng  $a$  và  $b$  chéo nhau. Khi đó tồn tại duy nhất mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $a$  và song song với  $b$ .

C. Cho điểm  $M$  nằm ngoài mặt phẳng  $(\alpha)$ . Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng  $(\beta)$  chứa điểm  $M$  và song song với  $(\alpha)$ .

D. Cho đường thẳng  $a$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với nhau. Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng  $(\beta)$  chứa  $a$  và song song với  $(\alpha)$ .

**Câu 3.** Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Đường thẳng  $d \subset (P)$  và  $d' \subset (Q)$  thì  $d // d'$ .

B. Mọi đường thẳng đi qua điểm  $A \in (P)$  và song song với  $(Q)$  đều nằm trong  $(P)$ .

C. Nếu đường thẳng  $\Delta$  cắt  $(P)$  thì  $\Delta$  cũng cắt  $(Q)$ .

D. Nếu đường thẳng  $a \subset (Q)$  thì  $a // (P)$ .

**Câu 4.** Cho hai mặt phẳng phân biệt  $(P)$  và  $(Q)$ ; đường thẳng  $a \subset (P); b \subset (Q)$ . Tìm khẳng định **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu  $(P) // (Q)$  thì  $a // b$ .

B. Nếu  $(P) // (Q)$  thì  $b // (P)$ .

C. Nếu  $(P) // (Q)$  thì  $a$  và  $b$  hoặc song song hoặc chéo nhau.

D. Nếu  $(P) // (Q)$  thì  $a // (Q)$

**Câu 5.** Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Nếu hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng khác thì chúng song song với nhau.

B. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đồng quy.

C. Nếu đường thẳng  $a$  song song với mặt phẳng  $(P)$  thì  $a$  song song với một đường thẳng nào đó nằm trong  $(P)$ .

D. Cho hai đường thẳng  $a, b$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  và hai đường thẳng  $a', b'$  nằm trong mặt phẳng  $(Q)$ . Khi đó, nếu  $a // a'; b // b'$  thì  $(P) // (Q)$ .

**Câu 6.** Trong không gian, cho đường thẳng  $a$  và hai mặt phẳng phân biệt  $(P)$  và  $(Q)$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Nếu  $(P)$  và  $(Q)$  cùng cắt  $a$  thì  $(P)$  song song với  $(Q)$ .

B. Nếu  $(P)$  và  $(Q)$  cùng song song với  $a$  thì  $(P)$  song song với  $(Q)$ .

C. Nếu  $(P)$  song song với  $(Q)$  và  $a$  nằm trong mp  $(P)$  thì  $a$  song song với  $(Q)$ .

D. Nếu  $(P)$  song song với  $(Q)$  và  $a$  cắt  $(P)$  thì  $a$  song song với  $(Q)$ .

**Câu 7.** Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

A. Vô số.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

**Câu 8.** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

A. mp  $(AA'B'B)$  song song với mp  $(CC'D'D)$ .

B. Diện tích hai mặt bên bất kì bằng nhau.

C.  $AA'$  song song với  $CC'$ .

D. Hai mặt phẳng đáy song song với nhau.

**Câu 9.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Nếu  $a \subset mp(P)$  và  $mp(P) // mp(Q)$  thì  $a // mp(Q)$ . (I)

- Nếu  $a \subset mp(P)$ ,  $b \subset mp(Q)$  và  $mp(P) // mp(Q)$  thì  $a // b$ . (II)

- Nếu  $a // mp(P)$ ,  $a // mp(Q)$  và  $mp(P) \cap mp(Q) = c$  thì  $c // a$ . (III)

A. Chỉ (I).

B. (I) và (III).

C. (I) và (II).

D. Cả (I), (II) và (III).

**Câu 10.** Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề **sai** là

A. Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

B. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C. Hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

D. Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.

**Câu 11.** Trong không gian cho 2 mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  song song với nhau. Khẳng định nào sau đây sai?

A.  $d \subset (P)$  và  $d' \subset (Q)$  thì  $d // d'$ .

B. Mọi đường thẳng đi qua điểm  $A \in (P)$  và song song với  $(Q)$  đều nằm trong  $(Q)$ .

C. Nếu đường thẳng  $a$  nằm trong  $(Q)$  thì  $a // (P)$ .

D. Nếu đường thẳng  $\Delta$  cắt  $(P)$  thì  $\Delta$  cắt  $(Q)$ .

**Câu 12.** Cho đường thẳng  $a \subset (\alpha)$  và đường thẳng  $b \subset (\beta)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $(\alpha) // (\beta) \Rightarrow a // (\beta)$  và  $b // (\alpha)$ .  
 B.  $a // b \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$ .  
 C.  $a$  và  $b$  chéo nhau.  
 D.  $(\alpha) // (\beta) \Rightarrow a // b$ .

**Câu 13.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $(ACD') // (A'C'B)$ .  
 B.  $(ABB'A') // (CDD'C')$ .  
 C.  $(BDA') // (D'B'C)$ .  
 D.  $(BA'D') // (ADC)$ .

**Câu 14.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Mặt phẳng  $(AB'D')$  song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

- A.  $(BCA')$ .  
 B.  $(BC'D)$ .  
 C.  $(A'C'C)$ .  
 D.  $(BDA')$ .

**Câu 15.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Mặt phẳng  $(AB'D')$  song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A.  $(BA'C')$ .  
 B.  $(C'BD)$ .  
 C.  $(BDA')$ .  
 D.  $(ACD')$ .

**Câu 16.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh bên  $AA', BB', CC', DD'$ . Khẳng định nào **sai**?

- A.  $BB'DC$  là một tứ giác đều.  
 B.  $(BA'D')$  và  $(ADC')$  cắt nhau.  
 C.  $A'B'CD$  là hình bình hành.  
 D.  $(AA'B'B) // (DD'C'C)$ .

**Câu 17.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC, ACC', AB'C'$ . Mặt phẳng nào sau đây song song với  $(IJK)$ ?

- A.  $(BC'A)$ .  
 B.  $(AA'B)$ .  
 C.  $(BB'C)$ .  
 D.  $(CC'A)$ .

**Câu 18.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm của  $SA, SD$  và  $AB$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.  $(NMP) // (SBD)$ .  
 B.  $(NOM)$  cắt  $(OPM)$ .  
 C.  $(MON) // (SBC)$ .  
 D.  $(PON) \cap (MNP) = NP$ .

**Câu 19.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SA, SD$ . Mặt phẳng  $(OMN)$  song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A.  $(SBC)$ .  
 B.  $(SCD)$ .  
 C.  $(ABCD)$ .  
 D.  $(SAB)$ .

## 2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

**Câu 20.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $H$  là trung điểm của  $A'B'$ . Mặt phẳng  $(AHC')$  song song với đường thẳng nào sau đây?

- A.  $BA'$ .  
 B.  $BB'$ .  
 C.  $BC$ .  
 D.  $CB'$ .

**Câu 21.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Qua  $A, B, C, D$  lần lượt vẽ các nửa đường thẳng  $Ax, By, Cz, Dt$  ở cùng phía so với mặt phẳng  $(ABCD)$ , song song với nhau và không nằm trong  $(ABCD)$ . Một mặt phẳng  $(P)$  cắt  $Ax, By, Cz, Dt$  tương ứng tại  $A', B', C', D'$  sao cho  $AA' = 3, BB' = 5, CC' = 4$ . Tính  $DD'$ .

- A. 4.  
 B. 6.  
 C. 2.  
 D. 12.



#### D. $MN \parallel (SBC)$ và $(MNP) \parallel (SBC)$

**D.**  $(I), (II), (III), (IV)$ .

**D. Nửa đường thẳng.**

A 3D diagram of a tetrahedron  $S-ABCD$ . The base is a rhombus  $ABCD$  with diagonals  $AC$  and  $BD$  intersecting at  $O$ .  $S$  is the apex.  $E$  is a point on  $SD$ , and  $F$  is a point on  $BO$ . A red line segment  $EF$  is shown. Dashed lines represent hidden edges and the line  $BE$ .

Tính tỉ số  $\frac{SP}{SD}$ .

A.  $\frac{SP}{SD} = \frac{3}{7}$ .

B.  $\frac{SP}{SD} = \frac{7}{3}$ .

C.  $\frac{SP}{SD} = \frac{7}{6}$ .

D.  $\frac{SP}{SD} = \frac{6}{7}$ .

**Câu 25.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Mặt phẳng  $(P)$  chứa  $BD$  và song song với mặt phẳng  $(AB'D')$  cắt hình lập phương theo thiết diện là.

- A. Một tam giác đều.      B. Một tam giác thường.  
C. Một hình chữ nhật.      D. Một hình bình hành.

**Câu 26.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $AC$  và song song với  $BB'$ . Tính chu vi thiết diện của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$ .

- A.  $2(1+\sqrt{2})a$ .      B.  $a^3$ .      C.  $a^2\sqrt{2}$ .      D.  $(1+\sqrt{2})a$

**Câu 27.** Cho tứ diện đều  $SABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ ,  $M$  là điểm di động trên đoạn  $AI$ . Qua  $M$  vẽ mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với  $(SIC)$ . Thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  với tứ diện  $SABC$  là.

- A. hình bình hành.      B. tam giác cân tại  $M$ .      C. tam giác đều.      D. hình thoi.

**Câu 28.** Cho hình vuông  $ABCD$  và tam giác đều  $SAB$  nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi  $M$  là điểm di động trên đoạn  $AB$ . Qua  $M$  vẽ mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với  $(SBC)$ . Thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là hình gì?

- A. Hình tam giác.      B. Hình bình hành.      C. Hình thang.      D. Hình vuông.

**Câu 29.** Cho tứ diện đều  $SABC$  cạnh bằng  $a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ ,  $M$  là điểm di động trên đoạn  $AI$ . Qua  $M$  vẽ mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với  $(SIC)$ . Tính chu vi của thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  với tứ diện  $SABC$ , biết  $AM = x$ .

- A.  $2x(1+\sqrt{3})$ .      B.  $3x(1+\sqrt{3})$ .      C. Không tính được.      D.  $x(1+\sqrt{3})$ .

**Câu 30.** Cho hình chóp cắt tam giác  $ABC.A'B'C'$  có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại  $A$  và  $A'$  và có  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$ . Khi đó tỉ số diện tích  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$  bằng

- A. 4.      B.  $\frac{1}{2}$ .      C.  $\frac{1}{4}$ .      D. 2.

**Câu 31.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $AB = AC = 4$ ,  $\widehat{BAC} = 30^\circ$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(ABC)$  cắt đoạn  $SA$  tại  $M$  sao cho  $SM = 2MA$ . Diện tích thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABC$  bằng bao nhiêu?

- A. 1.      B.  $\frac{14}{9}$ .      C.  $\frac{25}{9}$ .      D.  $\frac{16}{9}$ .

**Câu 32.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi  $(\alpha)$  đi qua  $MN$  và song song với mặt phẳng  $(SAD)$ . Thiết diện là hình gì?

- A. Hình thang      B. Hình bình hành      C. Tứ giác      D. Tam giác

**Câu 33.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$  có  $AC = a, BD = b$ . Tam giác  $SBD$  là tam giác đều. Một mặt phẳng  $(\alpha)$  di động song song với mặt phẳng  $(SBD)$  và đi qua điểm  $I$  trên đoạn  $AC$  và  $AI = x$  ( $0 < x < a$ ). Thiết diện của hình chóp cắt bởi  $(\alpha)$  là hình gì?

- A. Hình bình hành      B. Tam giác      C. Tứ giác      D. Hình thang

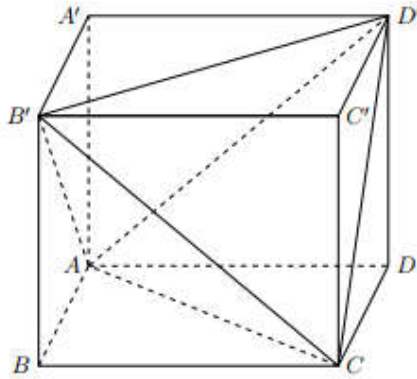
**Câu 34.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Mặt phẳng  $(MA'C')$  cắt hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  theo thiết diện là hình gì?

- A. Hình thang. B. Hình ngũ giác. C. Hình lục giác. D. Hình tam giác.

**Câu 35.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang cân với cạnh bên  $BC = 2$ , hai đáy  $AB = 6$ ,  $CD = 4$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(ABCD)$  và cắt cạnh  $SA$  tại  $M$  sao cho  $SA = 3SM$ . Diện tích thiết diện của  $(P)$  và hình chóp  $S.ABCD$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ . B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . C. 2. D.  $\frac{7\sqrt{3}}{9}$ .

**Câu 36.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Xét tứ diện  $AB'CD'$ . Cắt tứ diện đó bằng mặt phẳng đi qua tâm của hình lập phương và song song với mặt phẳng  $(ABC)$ . Tính diện tích của thiết diện thu được.



- A.  $\frac{a^2}{3}$ . B.  $\frac{2a^2}{3}$ . C.  $\frac{a^2}{2}$ . D.  $\frac{3a^2}{4}$ .

**Câu 37.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành, mặt bên  $SAB$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ ,  $SB = 2a$ . Điểm  $M$  nằm trên đoạn  $AD$  sao cho  $AM = 2MD$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $(SAB)$ . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

- A.  $\frac{5a^2\sqrt{3}}{18}$ . B.  $\frac{5a^2\sqrt{3}}{6}$ . C.  $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$ . D.  $\frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 38.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a, BC = b, CC' = c$ . Gọi  $O, O'$  lần lượt là tâm của  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $O'$  và song song với hai đường thẳng  $A'D$  và  $D'O$ . Dựng thiết diện của hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$ . Tìm điều kiện của  $a, b, c$  sao cho thiết diện là hình thoi có một góc bằng  $60^\circ$ .

- A.  $a = b = c$ . B.  $a = b = \frac{1}{3}c$ . C.  $a = c = \frac{1}{3}b$ . D.  $b = c = \frac{1}{3}a$ .

**Câu 39.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang cân ( $AD \parallel BC$ ),  $BC = 2a$ ,  $AB = AD = DC = a$ , với  $a > 0$ . Mặt bên  $SBC$  là tam giác đều. Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Biết hai đường thẳng  $SD$  và  $AC$  vuông góc nhau,  $M$  là điểm thuộc đoạn  $OD$  ( $M$  khác  $O$  và  $D$ ),  $MD = x$ ,  $x > 0$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  và song song với hai đường thẳng  $SD$  và  $AC$ , cắt khối chóp  $S.ABCD$  theo một thiết diện. Tìm  $x$  để diện tích thiết diện đó là lớn nhất?

A.  $x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

B.  $x = a\sqrt{3}$ .

C.  $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

D.  $x = a$ .

Nguyễn Bảo Vương