

Bài 9: Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

I,

Nhiệt độ (°C)	[28; 30)	[30; 32)	[32; 34)	[34; 36)	[36; 38)	[38; 40)
Số ngày trong tháng 6/2021	0	2	8	5	6	9
Số ngày trong tháng 6/2022	2	3	4	11	8	2

(Theo accuweather.com)

Mẫu số liệu ghép nhóm.

3.1. Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 cho kết quả như sau:

101	79	79	78	75	73	68	67	67	63
63	61	60	59	57	55	55	50	47	42

(Theo premierleague.com)

$$R = 101 - 42 = 59$$

a) Hãy ghép nhóm dãy số liệu trên thành các nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là [40; 50).

[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)
2	5	7	5	1	0

$$R = ? \quad 50$$

$$n = 2 + 5 + 7 + 5 + 1 = 20$$

Khoảng biến thiên: KH: $R = a_{k+1} - a_1$
 $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$: Cỡ mẫu

Cho mẫu số liệu ghép nhóm:

Nhóm	$[a_1; a_2)$...	$[a_i; a_{i+1})$...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Bảng 3.1. Mẫu số liệu ghép nhóm

Ý nghĩa. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc. Khoảng biến thiên được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Luyện tập 1. Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các bạn trong lớp 12C được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh	8	16	4	2

a) Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Nếu biết học sinh hoàn thành bài kiểm tra sớm nhất mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là bao nhiêu?

2, Khoảng tứ phân vị

$$KH: DQ = Q_3 - Q_1$$

Q_1 : tứ phân vị thứ nhất

Q_2 : tứ phân vị thứ hai

Q_3 : tứ phân vị thứ ba

Tứ phân vị thứ r là

$$Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{n_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó $[a_p; a_{p+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ r với $r = 1, 2, 3$.

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh	8	16	4	2

$$n = 30 \Rightarrow \frac{30}{4} = 7,5$$

$$\frac{30}{4} \cdot 3 = 22,5$$

$$Q_1 = 25 + \frac{7,5 - 0}{8} \cdot 5 = 29,6875$$

$$Q_3 = 30 + \frac{22,5 - 8}{16} \cdot 5 = 34,53125$$

$$\Rightarrow DQ = Q_3 - Q_1 = 4,84375$$

Ý nghĩa. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc. Khoảng tứ phân vị cũng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Nhận xét. Do khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm chỉ phụ thuộc vào nửa giữa của mẫu số liệu, nên không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường và có thể dùng đại lượng này để loại giá trị bất thường.

Ví dụ 2. Thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám X được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)
Số bệnh nhân	3	12	15	8

- Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.
- Từ một mẫu số liệu về thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám Y người ta tính được khoảng tứ phân vị bằng 9,23. Hỏi thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám nào phân tán hơn?

$$n = 38 \quad \frac{38}{4} = 9,5$$

$$Q_1 = 5 + \frac{9,5 - 3}{12} \cdot 5 = 7,71$$

$$Q_3 = 14,5$$

$$\Rightarrow DQ = 6,79$$

NK: $DQ_X < DQ_Y \Rightarrow Y$ phân tán hơn

» **Luyện tập 2.** Một người ghi lại thời gian đàm thoại của một số cuộc gọi cho kết quả như bảng sau:

Thời gian t (phút)	Số cuộc gọi
$0 \leq t < 1$	8
$1 \leq t < 2$	17
$2 \leq t < 3$	25
$3 \leq t < 4$	20
$4 \leq t < 5$	10

Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$
8	17	25	20	10

$$n = 80$$

$$Q_1 = 1 + \frac{20 - 8}{17} \cdot 1 = 1,71$$

$$Q_3 = 3 + \frac{60 - 50}{20} \cdot 1 = 3,5$$

$$\Rightarrow DQ = 1,79$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin x}{3} dx & \quad \Rightarrow \quad \int \sin x dx = -\cos x \\ & \quad \int k \cdot f(x) \cdot dx = k \int f(x) dx \\ (\Rightarrow) \quad \int \frac{2}{3} \cdot \sin x dx & \\ & = \frac{2}{3} \int \sin x dx = \frac{2}{3} (-\cos x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13, \quad \int (5^x + 1)(5^x - 1) dx &= \int 25^x - 1 dx = \int 25^x dx - \int 1 dx \\ &= \frac{25^x}{\ln 25} - x + C \end{aligned}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 5^x \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5^x)^2 = 25^x \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-0,5x}}{\sqrt{e}} dx & \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n} \\ & \quad \downarrow \\ &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^x dx & e^{-0,5x} = \frac{1}{e^{0,5x}} = \frac{1}{\sqrt{e}^x} = \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^x \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^x}{\ln \frac{1}{\sqrt{e}}} + C \end{aligned}$$

$$\int 2^{x-1} \cdot 5^{2x+1} dx$$

$$\rightarrow a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$\int 2^{x-1} = 5^{2x+1} = 5^{2(x-1)+2+1} = 5^{2(x-1)+3} = 5^{(x-1)+(x-1)+3} = 5^{x-1} \cdot 5^{x-1} \cdot 5^3 \quad (a^{m+n} = a^m \cdot a^n)$$

$$\int 2^{x-1} \cdot 5^{x-1} \cdot 5^{x-1} \cdot 5^3 dx = 125 \int (2 \cdot 5 \cdot 5)^{x-1} dx$$

$$= 125 \int 50^{x-1} dx = 125 \int \frac{50^x}{50^1} dx$$

$$= 125 \int \frac{1}{50} 50^x dx$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$= \frac{125}{50} \int 50^x dx$$

$$= \frac{125}{50} \cdot \frac{50^x}{\ln 50} + C$$

$$1b) \int \left(2 \cdot e^x + \frac{1}{3^x} \right) dx = \int 2 \cdot e^x dx + \int \frac{1}{3^x} dx$$

$$I = \int 2 e^x dx = 2 \int e^x dx = 2 \cdot e^x + C_1$$

$$J = \int \frac{1}{3^x} dx = \int \left(\frac{1}{3} \right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C_2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot e^x + \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C$$

$$\int \frac{3^{x-1}}{2} dx = \frac{1}{2} \int 3^{x-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{3^x}{3} dx = \frac{1}{6} \int 3^x dx$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \quad 3^{x-1} = \frac{3^x}{3^1}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$\int 2^x \ln 2 dx = \ln 2 \int 2^x dx = \ln 2 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C = 2^x + C$$

↓

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \int 2x \cos u dx = \int \cos u \cdot \underline{2x} dx = \int \cos u du = \sin u + C$$

$$\boxed{\cos x} \quad \text{at } x^2 = u \Rightarrow d(x^2) = d(u) \quad = \sin x^2 + C$$

$$\Rightarrow dx \cdot (x^2)' = du \cdot u'$$

$$\Rightarrow dx \cdot 2x = du \cdot 1$$