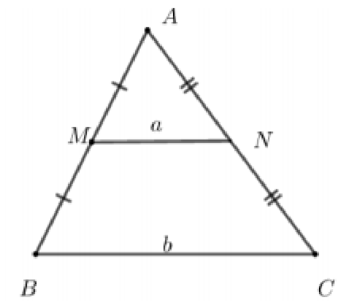
BÀI 11. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

- CHƯƠNG 4. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

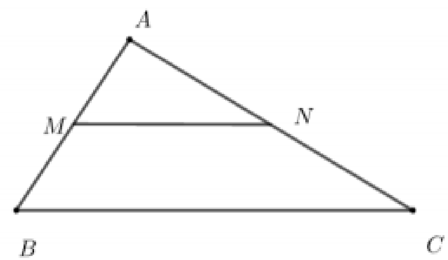
DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Tính chất đường trung bình



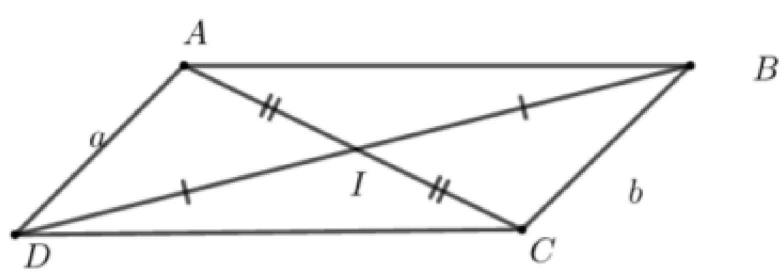
M , N là trung điểm của AB , AC . Khi đó $MN // = \frac{1}{2}BC$.

2. Định lý Ta-lét



$MN // BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

3. Tính chất cạnh đối của hình bình hành

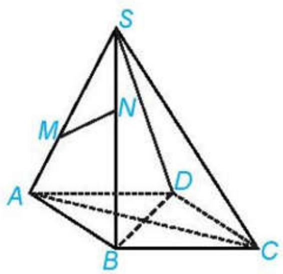


Hai phương pháp để chứng minh tứ giác là hình bình hành:

*) Chứng minh: $\begin{cases} AB // CD \\ AB = CD \end{cases}$.

*) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Câu 1. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (H.4.17).



Hình 4.17

a) Trong các đường thẳng AB, AC, CD, hai đường thẳng nào song song, hai đường thẳng nào cắt nhau?

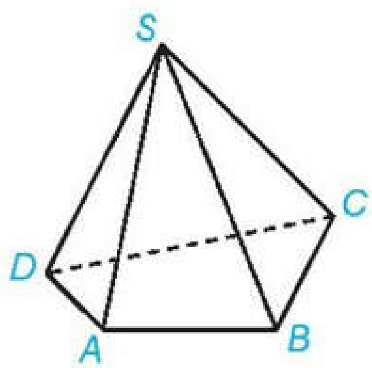
b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh SA, SB. Trong các đường thẳng SA, MN, AB có hai đường thẳng nào chéo nhau hay không?

Lời giải

a) Hai đường thẳng AB và AC cắt nhau tại giao điểm A.
Hai đường thẳng AB và CD song song với nhau (do $ABCD$ là hình bình hành).
Hai đường thẳng AC và CD cắt nhau tại giao điểm C

b) Vì hai điểm M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh SA, SB nên hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (SAB) hay các điểm S, A, B, M, N cùng thuộc một mặt phẳng nên các đường thẳng SA, MN, AB đồng phẳng, do đó khi lấy bất kì 2 trong 3 đường thẳng trên thì chúng có thể cắt nhau hoặc song song hoặc trùng nhau. Vậy trong các đường thẳng SA, MN, AB, không có hai đường thẳng nào chéo nhau.

Câu 2. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Trong hình chóp tứ giác $S.ABCD$ $(H.4.19)$, chỉ ra những đường thẳng:



Hình 4.19

a) Chéo với đường thẳng SA;
b) Chéo với đường thẳng BC.

Lời giải

a) Các đường thẳng chéo với đường thẳng SA là BC và CD.
Giải thích: Nếu hai đường thẳng SA và BC không chéo nhau thì chúng cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó bốn điểm S, A, B, C đồng phẳng, trái với giả thiết $S.ABCD$ là hình chóp. Do đó, hao đường thẳng SA và BC chéo nhau. Tương tự, giải thích được hai đường thẳng SA và CD chéo nhau.
b) Các đường thẳng chéo với đường thẳng BC là SA và SD. Giải thích tương tự câu a.

Câu 3. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Một chiếc gậy được đặt một đầu dựa vào tường và đầu kia trên mặt sàn (H.4.20).

Hình 4.20

Hỏi có thể đặt chiếc gậy đó song song với một trong các mép tường hay không?

Lời giải

Ta không thể đặt chiếc gậy đó song song với một trong các mép tường vì điểm đầu gậy chạm với sàn và 4 điểm góc của tường là các điểm không đồng phẳng nên đường thẳng tạo bởi chiếc gậy và một trong các mép tường là hai đường thẳng chéo nhau.

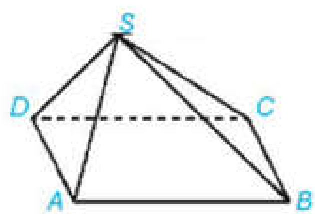
Câu 4. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trong các cặp đường thẳng sau, cặp đường thẳng nào cắt nhau, cặp đường thẳng nào song song, cặp đường thẳng nào chéo nhau?

a) AB và CD;

b) AC và BD;

c) SB và CD.

Lời giải



a) Hai đường thẳng AB và CD song song với nhau do đáy $ABCD$ là hình bình hành.

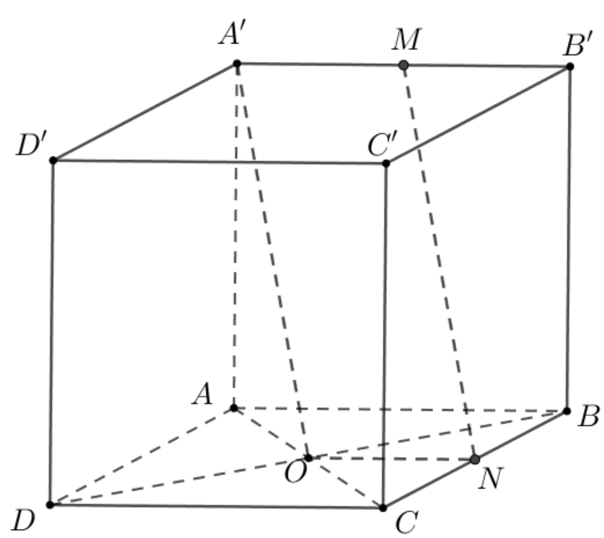
b) Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau do đây là hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

c) Hai đường thẳng SB và CD chéo nhau.

Thật vậy, nếu hai đường thẳng SB và CD không chéo nhau, tức là hai đường thẳng này đồng phẳng hay bốn điểm S, B, C, D đồng phẳng, trái với giả thiết $S.ABCD$ là hình chóp.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, $AC \cap BD = O$. M, N là trung điểm của $A'B'$, BC. Chứng minh $MN//A'O$.

Lời giải



*) ΔABC: ON là đường trung bình $\Rightarrow ON//AB$, $ON=\frac{1}{2}AB$ (1).

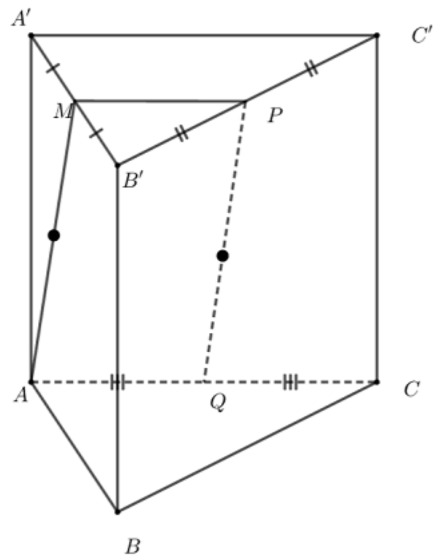
*) Tính chất hình lập phương: $AB//A'B'$, $AB=A'B' \Rightarrow A'M//AB$, $A'M=\frac{1}{2}AB$ (2).

*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow ON//A'M$, $ON=A'M \Rightarrow$ Tứ giác AMNO là hình bình hành.

$\Rightarrow A'O//MN$. (đpcm)

Câu 6. Lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M, P, Q là trung điểm $A'B'$, $B'C'$, AC. Chứng minh $AM//PQ$.

Lời giải



*) $\Delta A'B'C'$ có MP là đường trung bình$\Rightarrow MP//A'C'$, $MP=\frac{1}{2}A'C'$ (1).

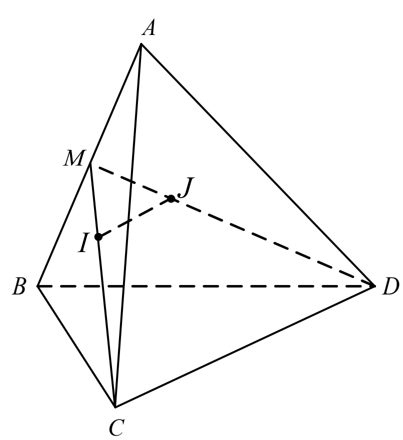
*) Ta có $A'C'//AC, A'C'=AC \Rightarrow AQ//A'C'; AQ=\frac{1}{2}A'C'(2)$.

*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow MP$//QA;MP=QA $\Rightarrow MNPD$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AM//PQ$.

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có I; J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD. Chứng minh rằng: $IJ//CD$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB

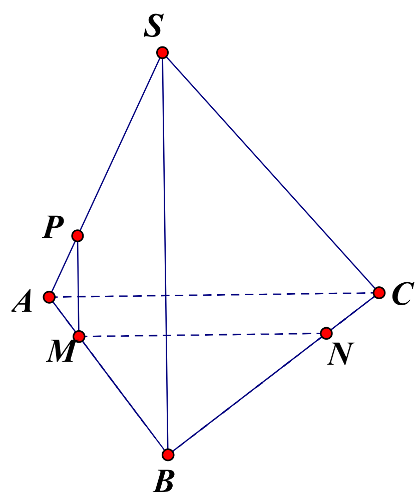
Xét tam giác ABC có: $\frac{MI}{MC}=\frac{1}{3}$ (do I là trọng tam của tam giác ABC)

Xét tam giác ABD có: $\dfrac{MJ}{MD}=\dfrac{1}{3}$ (do J là trọng tam của tam giác ABD)

Do $\dfrac{MI}{MC}=\dfrac{MJ}{MD}=\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow IJ//CD$ (Định lí Ta-let)

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Trên SA, BC lấy điểm M, N sao cho: $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{3}{4}$. Qua N kẻ NP song song với CA (P thuộc AB). Chứng minh rằng $MP // SB$

Lời giải



Vif $MN//AC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{CN}{CB}=\dfrac{1}{4}$

Ta có: $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AP}{AS}=\dfrac{1}{4}$

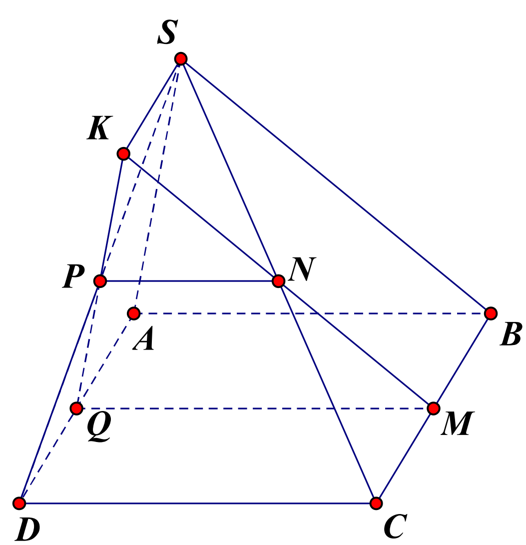
Vậy $MP//SB$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN // BS$, $NP // CD$, $MQ // CD$.

a) Chứng minh: $PQ // SA$.

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh $SK // AD // BC$.

Lời giải



a) Chứng minh: $PQ // SA$**.**

Xét tam giác SCD. Ta có: $NP // CD \Rightarrow \dfrac{NP}{DS} = \dfrac{CN}{CS}$ (1)

Tương tự: $MN // SB \Rightarrow \dfrac{CN}{CS} = \dfrac{CM}{CB}$ (2)

Tương tự: $MQ // CD \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{DQ}{DA}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $\dfrac{DP}{DS} = \dfrac{DQ}{DA}$

Vậy: $PQ // SA$.

b) Chứng minh $SK // AD // BC$**.**

Ta có: $\begin{cases} BC // AD \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{cases}$ $\Rightarrow$ giao tuyến là đường thẳng St qua S song song BC và AD

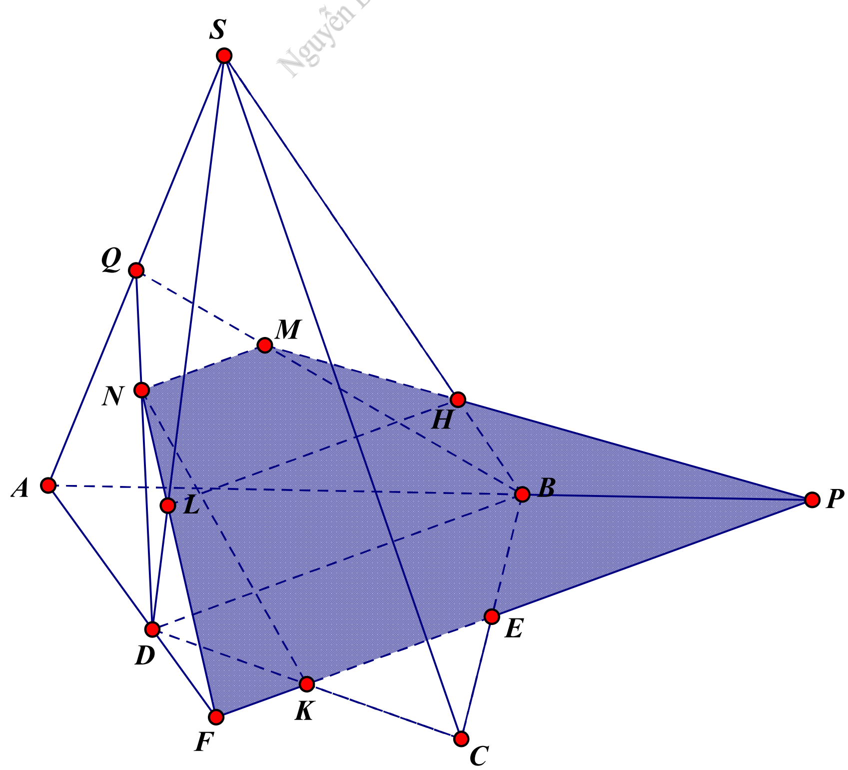
Mà $K \in (SBC) \cap (SAD) \Rightarrow K \in St \Rightarrow SK // AD // BC$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi. Gọi M, N là trọng tâm tam giác SAB và SAD. E là trung điểm CB.

a) Chứng minh rằng $MN // BD$

b) Gọi L, H là giao điểm của (MNE) với SD và SB. Chứng minh rằng $LH // BD$.

Lời giải



a) Gọi Q là trung điểm SA

Xét ΔQBD có $\dfrac{QN}{QD} = \dfrac{QM}{QB} = \dfrac{1}{3}$ (tính chất của trọng tâm tam giác)

Vậy $MN//BD$

b) Dựng $EK//MN \Rightarrow (MNE) \equiv (MNKE)$

Tìm $L=(MNE)\cap SD$, $SB\subset(SAD)$, gọi $F=AD\cap KE, (MNKE)\cap(SAD)=MP$

$\Rightarrow H=MP\cap SB$

Ta có: $MN\subset(MNE); BD\subset(SBD)$ và $MN//BD$ mà $(MNE)\cap(SBD)=LH \Rightarrow LH//BD//MN$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$, $I\in SA$ sao cho $IA=2IS$. M, N là trung điểm SB, SC. H là điểm đối xứng với I qua M, K là điểm đối xứng với I qua N.

a) Chứng minh $HK//BC$.

b) Chứng minh $BH//SA$.

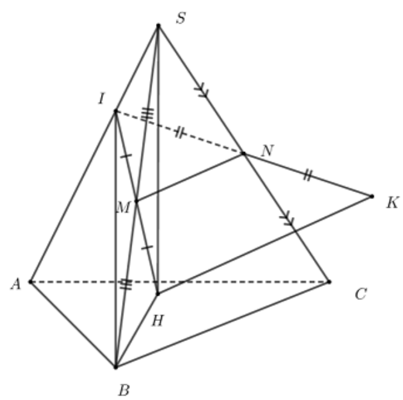
Lời giải

a) *) ΔIHK có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN//BC$, (1).

*) ΔSBC có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN//BC$ (2).

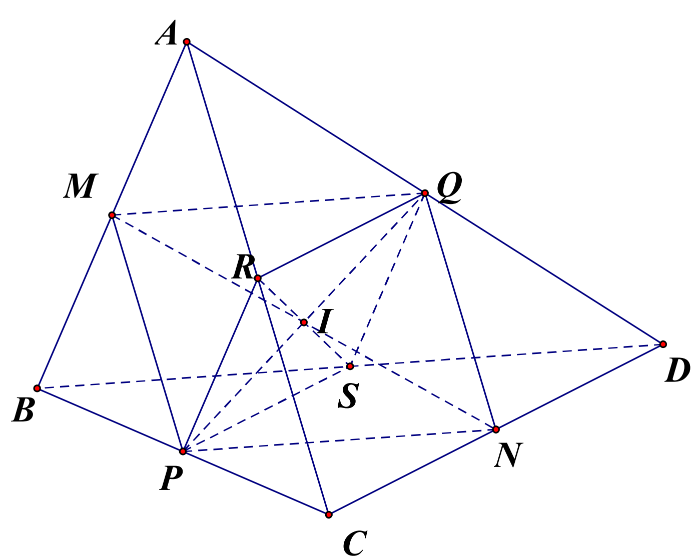
*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow HK//BC$ (đpcm).

b) Tứ giác $SIBH$ có hai đường chéo SB, IH cắt nhau tại M là trung điểm của mỗi đường $\Rightarrow SIBH$ là hình bình hành. $\Rightarrow SI//BH \Rightarrow SA//BH$ (đpcm).



Câu 12. Tứ diện $ABCD$. M,N,P,Q,R,S là trung điểm AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh MN, PQ, RS đồng quy tại $\frac{1}{2}$ mỗi đường.

Lời giải



*) ΔABC: MP là đường trung bình $\Rightarrow MP//AC$, $MN=\frac{1}{2}AC$ (1).

*) ΔACD: NQ là đường trung bình $\Rightarrow NQ//AC$, $NQ=\frac{1}{2}AC$ (2).

*) Từ (1) và (2) $\Rightarrow MP// = NQ \Rightarrow MPNQ$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN, PQ$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (3).

*) ΔABC: PR là đường trung bình $\Rightarrow PR//AB$, $PR=\frac{1}{2}AB$ (4).

*) ΔABD: QS là đường trung bình $\Rightarrow QS//AB$, $QS=\frac{1}{2}AB$ (5).

*) Từ (4) và (5) $\Rightarrow PR// = QS \Rightarrow PRQS$ là hình bình hành.

$\Rightarrow RS, PQ$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (6).

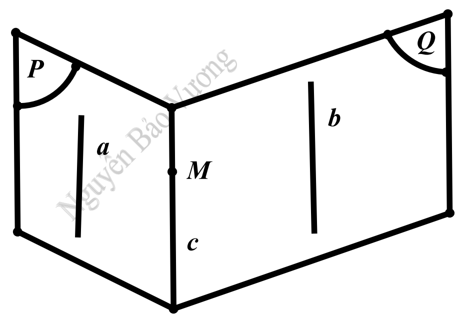
Từ (5) và (6) suy ra MN, PQ, RS đồng quy tại $\frac{1}{2}$ mỗi đường.

DẠNG 2. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

Có 2 phương pháp tìm giao tuyến (P) và (Q).

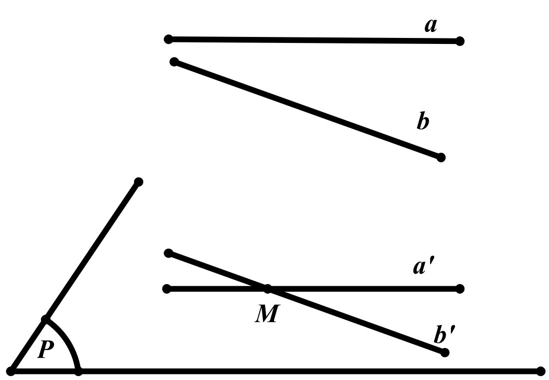
+ Tìm 2 điểm chung.

+ Tìm bằng định lý giao tuyến



$$\begin{cases} a\subset(P), b\subset(Q) \\ a//b \\ (P)\cap(Q)=c \end{cases} \Rightarrow c//a//b.$$

Bài toán tổng quát: Dựng (P) qua M và $//a,b$.



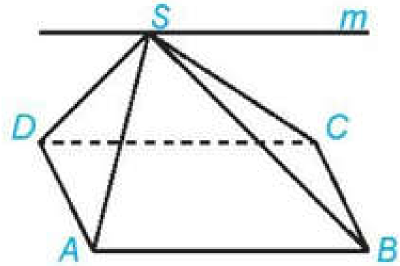
+ Qua M dựng $a'//a$ <Đúng + Đủ>

+ Qua M dựng $b'//b$ <Đúng + Đủ>

$\Rightarrow (P)\equiv(a',b')$.

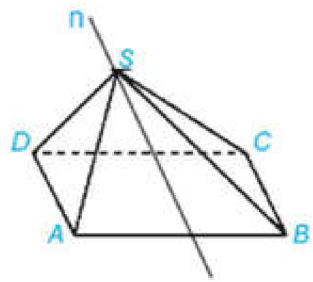
Câu 13. **(SGK – KNTT 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (H.4.25).

Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).



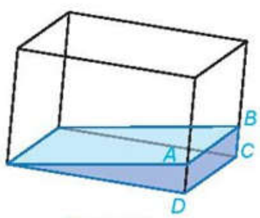
Hình 4.25

Lời giải



Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có điểm chung S và chứa hai đường thẳng song song là AD và BC. Do đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng n đi qua S và song song với AD, BC.

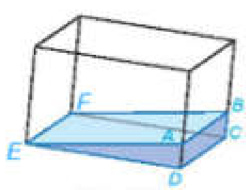
Câu 14. **(SGK – KNTT 11-Tập 1)** Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như Hình 4.26.



Hình 4.26

Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.

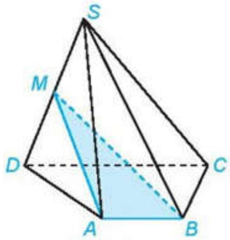
Lời giải



Giả sử mặt phẳng $(ABFE)$ mà mặt nước, mặt phẳng $(EFCD)$ là mặt đáy của bể kính và $(ABCD)$ là một mặt bên của bể kính.

Ba mặt phẳng $(ABFE)$, $(EFCD)$ và $(ABCD)$ là ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo các giao tuyến EF, AB và CD. Vì $DC /\!/ EF$ (do đáy của bể là hình chữ nhật) nên ba đường thẳng EF, AB và CD đôi một song song. Vậy đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.

Câu 15. **(SGK – KNTT 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD $(H.4.28)$.

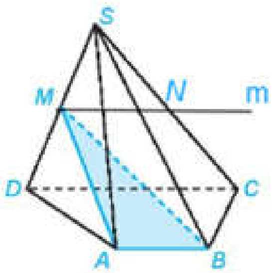


Hình 4.28

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD).

b) Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB). Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD.

Lời giải



a) Vì M thuộc SD nằm trong mặt phẳng (SCD) nên M thuộc mặt phẳng (SCD).

Mà M thuộc mặt phẳng (MAB) nên M là điểm chung của hai mặt phẳng (MAB) và (SCD).

Lại có hai mặt phẳng (MAB) và (SCD) chứa hai đường thẳng song song AB và CD.

Do đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (MAB) và (SCD) là đường thẳng m đi qua M và song song với AB, CD.

b) Trong tam giác SCD, đường thẳng m đi qua điểm M và song song với CD cắt cạnh SC tại một điểm N.

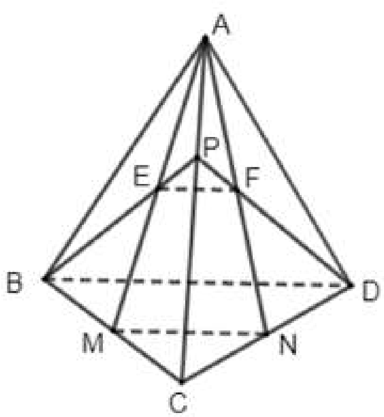
Vì N thuộc m và m nằm trong mặt phẳng (MAB) nên N thuộc mặt phẳng (MAB).

Vậy N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB).

Xét tam giác SCD có M là trung điểm của $SD, MN//CD$ và N thuộc SC nên đường thẳng MN là đường trung bình của tam giác SCD.

Câu 16. **(SGK – KNTT 11-Tập 1)** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm thuộc cạnh AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD.

Lời giải



- Trong tam giác ABC, gọi giao điểm của hai đường thẳng BP và AM là E. Trong tam giác ACD, gọi giao điểm của hai đường thẳng DP và AN là F.

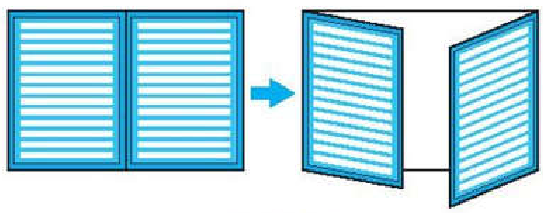
Vì E thuộc AM nên E thuộc mặt phẳng (AMN), vì F thuộc AN nên F thuộc mặt phẳng (AMN), do đó đường thẳng EF nằm trong mặt phẳng (AMN). Vì E thuộc BP nên E thuộc mặt phẳng (BPD), vì F thuộc DP nên F thuộc mặt phẳng (BPD), do đó đường thẳng EF nằm trong mặt phẳng (BPD). Vậy đường thẳng EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) hay đường thẳng d cần tìm chính là đường thẳng EF.

- Xét tam giác BCD có M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD nên MN là đường trung bình của tam giác BCD, do đó $MN \parallel BD$.

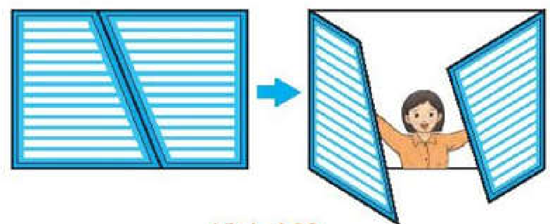
Hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) có chứa hai đường thẳng song song là MN và BD. Do đó, giao tuyến d của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) song song với MN và BD.

Vậy $d // BD$.

Câu 17. **(SGK – KNTT 11-Tập 1)** Khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau (H.4.29). Hãy giải thích tại sao.



Hình 4.29

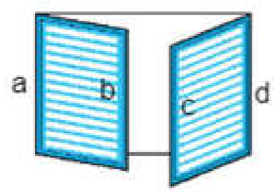


Hình 4.30

Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang như Hình 4.30 thì có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau hay không?

Lời giải

+) Mỗi cánh cửa ở Hình 4.29 đều có dạng hình chữ nhật nên các cạnh đối diện của mỗi cánh cửa song song với nhau.



Khi đó ta có $a \parallel b$ và $c \parallel d$.

Lại có các đường thẳng a và d là đường thẳng giao tuyến giữa khung cửa và cánh cửa nên $a \parallel d$.

Do vậy, bốn đường thẳng a, b, c, d luôn đôi một song song với nhau.

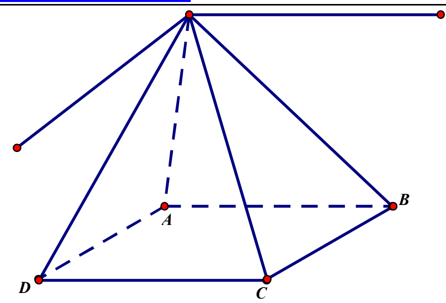
Vậy khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau.

+) Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang như Hình 4.30 thì không có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau.

Câu 18. Chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của:

a) (SAB) và (SCD). b) (SAD) và (SBC).

Lời giải



a) $S \in (SAB), S \in (SCD)$ và $AB // CD$ suy ra $(SAB) \cap (SCD) = d // AB // CD$.

b) $S \in (SAD), S \in (SCB)$ và $AD // BC$ suy ra $(SAD) \cap (SCB) = d' // AD // BC$.

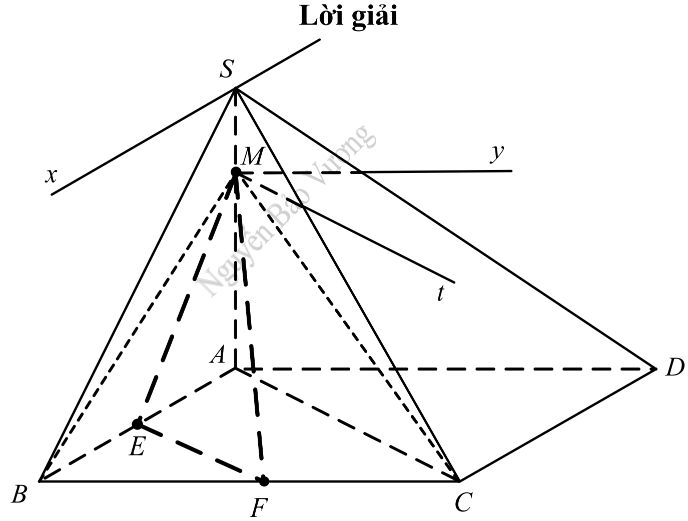
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA, điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD).

3) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC).

Lời giải



1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB)\,;\, CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow Sx = (SAB) \cap (SCD)$ với $Sx // AB // CD$

2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD)

Lại có : $\begin{cases} M \in SA \subset (SAD) \\ M \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MBC) \cap (SAD)$

Ta có : $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (SBC)\,;\, AD \subset (SAD) \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow My = (MBC) \cap (SAD)$ với $My // BC // AD$

3) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC).

Ta có : $\begin{cases} M \in SA \subset (SAC) \\ M \in (MEF) \end{cases} \Rightarrow M \in (MEF) \cap (SAC)$

Xét tam giác ABC có: EF là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow EF // AC$

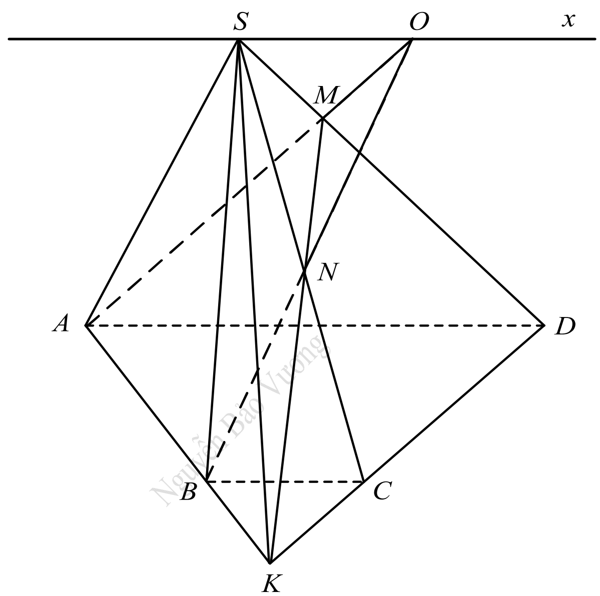
Do $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF)\,;\, AC \subset (SAC) \\ EF // AC \end{cases} \Rightarrow Mt = (MEF) \cap (SAC)$ với $EF // AC // Mt$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD, AB cắt CD tại K, điểm M thuộc cạnh SD.

1) Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC). Tìm giao điểm N của KM và (SBC).

2) Chứng minh rằng: AM, BN, (d) đồng quy.

Lời giải



1) Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC). Tìm giao điểm N của KM và (SBC)

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD)\,;\, BC \subset (SBC) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow Sx = (SAD) \cap (SBC)$ với $Sx // AD // BC$

$\Rightarrow (d) \equiv Sx$

Trong (SCD) gọi $N = KM \cap SC \Rightarrow \begin{cases} N \in KM \\ N \in SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow N = KM \cap (SBC)$

2) Chứng minh rằng: AM, BN, (d) đồng quy

Ta có: $(d) = (SAD) \cap (SBC)$

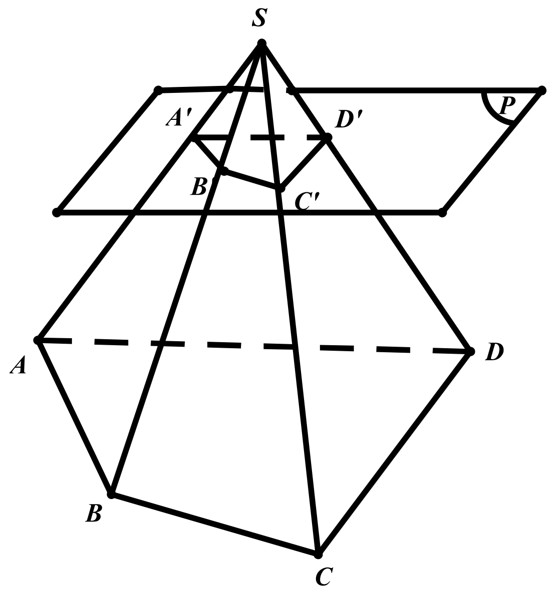
Trong (AMK) gọi O là giao điểm của AM và BN

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AM \subset (SAD) \\ O \in BN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow O \in (d)$

Vậy ba đường thẳng (d); BN; AM đồng quy tại O.

DẠNG 3. THIẾT DIỆN CHỨA ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG KHÁC

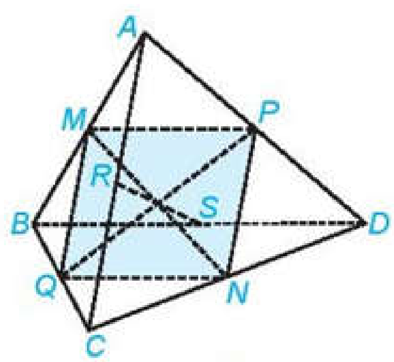
Thiết diện của mặt phẳng (P) với chóp



+ Thiết diện là một đa giác phẳng khép kín

Tìm thiết diện bằng cách tìm giao tuyến với mặt bên, mặt đáy

Câu 21. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung đểm của các đoạn thẳng AB, CD, AD, BC, AC, BD (H.4.22).



Hình 4.22

a) Chứng minh rằng tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.

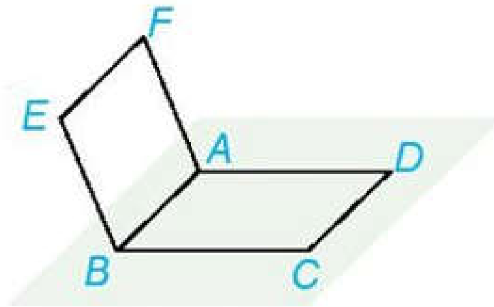
b) Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN, PQ, RS cùng đi qua trung điểm của mỗi đoạn.

Giải

a) Trong tam giác ABC, ta có MQ là đường trung bình nên $MQ // AC$ và $MQ = \frac{1}{2}AC$. Tương tự với tam giác ACD, ta có $PN // AC$ và $PN = \frac{1}{2}AC$. Do đó $MQ // PN$ và $MQ = PN$, suy ra tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.

b) Từ câu a suy ra hai đoạn thẳng MN và PQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Tương tự, hai đoạn thẳng MN và RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Do đó, các đoạn thẳng MN, PQ, RS cùng đi qua trung điểm của mỗi đoạn.

Câu 22. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng (H.4.16).



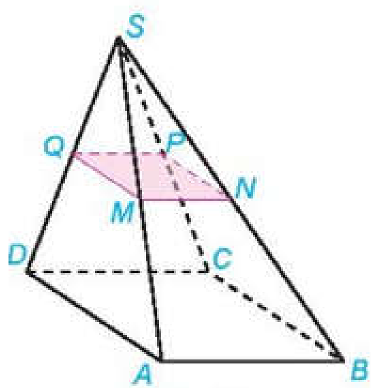
Hình 4.16

Chứng minh rằng bốn điểm C, D, E, F đồng phẳng và tứ giác $CDFE$ là hình bình hành.

Lời giải

Ta có: $EF//AB$ (do $ABEF$ là hình bình hành) và $CD//AB$ (do $ABCD$ là hình bình hành).
Do đó, $CD \parallel EF$.
Khi đó, hai đường thẳng CD và EF đồng phẳng hay bốn điểm C, D, E, F đồng phẳng.
Lại có $EF = AB$ và $CD = AB$ (do $ABEF$ và $ABCD$ là các hình bình hành) nên $CD = EF$.
Vậy tứ giác $CDFE$ là hình bình hành.

Câu 23. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD $(H.4.27)$.



Hình 4.27

Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải

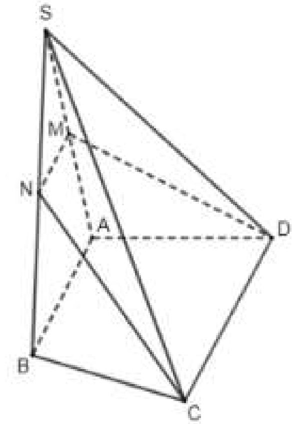
Xét tam giác SAB có M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB nên MN là đường trung bình của tam giác SAB, suy ra $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB$.

Tương tự ta có PQ là đường trung bình của tam giác SCD nên $PQ//CD$ và $PQ = \frac{1}{2}CD$.

Lại có đáy $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$ và $AB = CD$.
Khi đó, $MN//PQ$ và $MN = PQ$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 24. **(SGK-KNTT 11-Tập 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB \parallel CD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

Lời giải



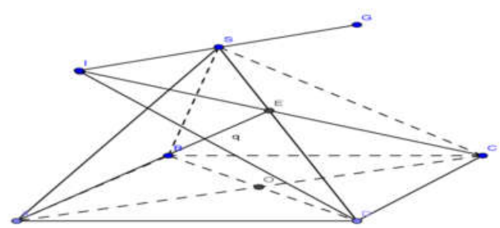
Xét tam giác SAB có M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB nên MN là đường trung bình của tam giác SAB, suy ra $MN /\!/ AB$. Mà đáy $ABCD$ là hình thang có $AB//CD$.
Do đó, $MN /\!/ CD$. Vậy tứ giác $MNCD$ là hình thang.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều. Góc $\widehat{SAD}=90^{\circ}$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC.

a) Tìm giao điểm $I=Dx\cap(SAB)$.CMR $AI//SB$.

b) Xác thiết diện của (IAC) với hình chóp. Tính diện tích thiết diện.

Lời giải



a) $Dx\in(SDC)$, $S\in(SAB)\cap(SDC)$ $\left.\begin{matrix} AB//DC \\ AB\in(SAB) \\ DC\in(SDC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(SAB)\cap(SDC)=Sy//AB//DC$

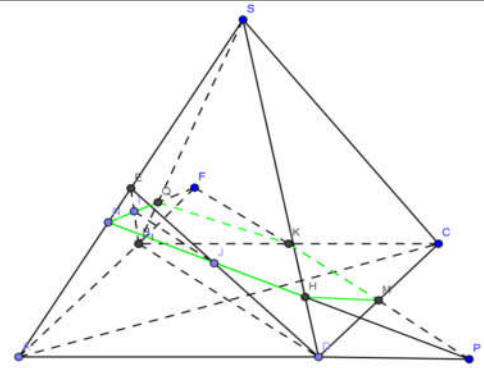
$I=Dx\cap Sy\Rightarrow I=(SAB)\cap Dx$

Rõ ràng $SI//AB//DC$ và $SI=AB=DC\Rightarrow ABSI$ là hình bình hành nên $\Rightarrow AI//SB$.

b) $E=IC\cap SD$ nên thiết diện của (IAC) với hình chóp là ΔAEC

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, lần lượt là trọng tâm của ΔSAB, ΔSAD. M là trung điểm của CD. Xác định thiết diện (IJM) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Vì I, J, lần lượt là trọng tâm của ΔSAB, ΔSAD nên $IJ//BD$.

Ta có $\left.\begin{matrix} IJ//BD \\ IJ \subset (IJM) \\ BD \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (IJM) \cap (ABCD) = KM, KM//IJ//BD$.

Gọi F và P là giao điểm của KM với AB và AD $IFIF = (IJM) \cap (SAB)$ và $JP = (IJM) \cap (SAD)$, $N = IF \cap JP$ thiết diện là NQKMH.

Câu 27. Chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = a$, $SA \perp CD$, $M \in AD$ để $AM = x$ $(0 < x < a)$. Mặt phẳng (P) qua M và $//SA, CD$. Dựng (P). Tìm thiệt diện. Tính S_{TD} theo a, x.

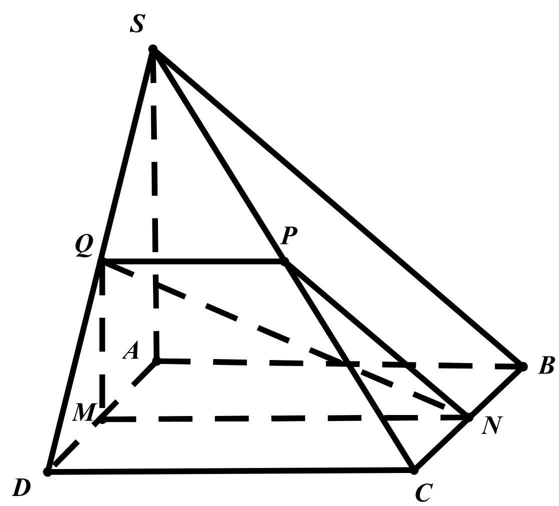
Lời giải

*) Dựng (P).

+) Qua M dựng $MN//CD$.

+) Qua M dựng $MQ//SA$.

$\Rightarrow (P) \equiv (QMN)$.



*) Tìm thiết diện; Trái, phải, trước, sau, đáy.

*) Ta có $\begin{cases} (QMN) \cap (Day) = MN \\ (QMN) \cap (Trai) = MQ \end{cases}$.

*) Định lý: $\begin{cases} Q\in(QMN), Q\in(Truoc)\Rightarrow(QMN)\cap(Truoc)=QP \\ MN//CD\Rightarrow(QMN)\cap(Phai)=PN \end{cases}$.

*) Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

*) Tính S_{TD}.

Ta có $\begin{cases} MN//CD \\ CD\perp SA \end{cases}\Rightarrow MQ\perp MN$.

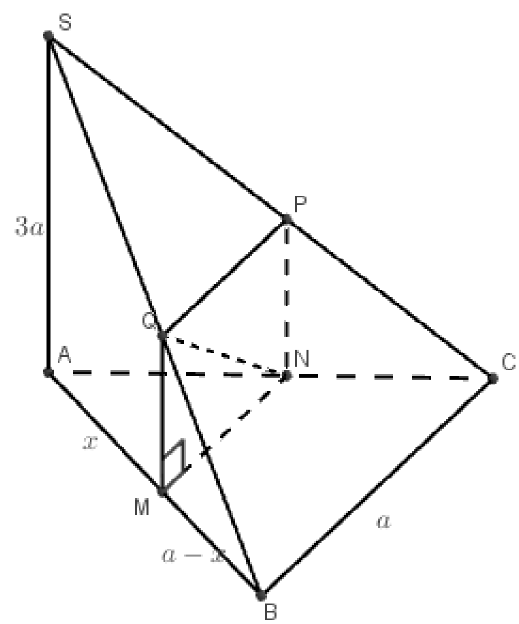
+) Tính QM : $QM//SA\Rightarrow\frac{QM}{SA}=\frac{DM}{DA}\Rightarrow QM=\frac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.

+) Tính PQ: $PQ//CD\Rightarrow\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow PQ=\frac{a.x}{a}=x$.

$\Rightarrow S_{TD}=\frac{(MN+PQ).QM}{2}=\frac{(a+x).2.(a-x)}{2}=a^2-x^2$.

Câu 28. Chóp $S.ABC$, $SA\perp BC$, $SA=3a$, ΔABC đều, $AB=a$. $M\in AB$ để $AM=x(0<x<a)$. (P) qua M và song song SA,BC. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải



Dựng (P):

- Qua M dựng $MN//BC$.
- Qua M dựng $MQ//A$

$\Rightarrow(P)\equiv(MNQ)$.

Tìm thiết diện:

- Ta có: $\begin{cases}(MNQ)\cap(ABCD)=MN \\ (MNQ)\cap(SAB)=MQ\end{cases}$.

$\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tính diện tích thiết diện: $SA\perp BC\Rightarrow MN\perp MQ\Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật.

$MN//BC \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB} \Rightarrow MN=\frac{ax}{a}=x$.

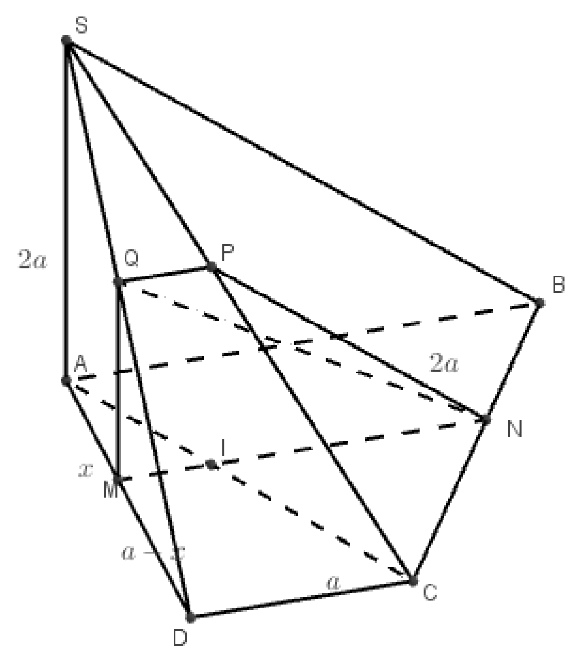
$MQ//SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA}=\frac{BM}{BA} \Rightarrow MQ=\frac{3a(a-x)}{a}=3(a-x)$.

$S_{TD}=MN.MQ=x3(a-x)=3(-x^2+ax),(0<x<a)$.

$S_{TD}max \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}=-\frac{a}{2(-1)}=\frac{a}{2}$.

Câu 29. Chóp $S.ABCD$, $SA \perp CD$, $SA=2a$. $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D. $AD=DC=\frac{AB}{2}=a$, $M \in AD$ để $AM=x,(0<x<a)$. (P) qua M và song song SA,CD. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính diện tích thiết diện S_{TD}.

Lời giải



$(P)\equiv(QMN) \Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tính MN:

- $IN//AB \Rightarrow \frac{IN}{AB}=\frac{CI}{CA}=\frac{DM}{DA} \Rightarrow IN=\frac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.
- $IM//CD \Rightarrow \frac{IM}{CD}=\frac{AM}{DA} \Rightarrow IM=\frac{ax}{a}=x$.

$\Rightarrow MN=IM+IN=x+2a-2x=2a-x$.

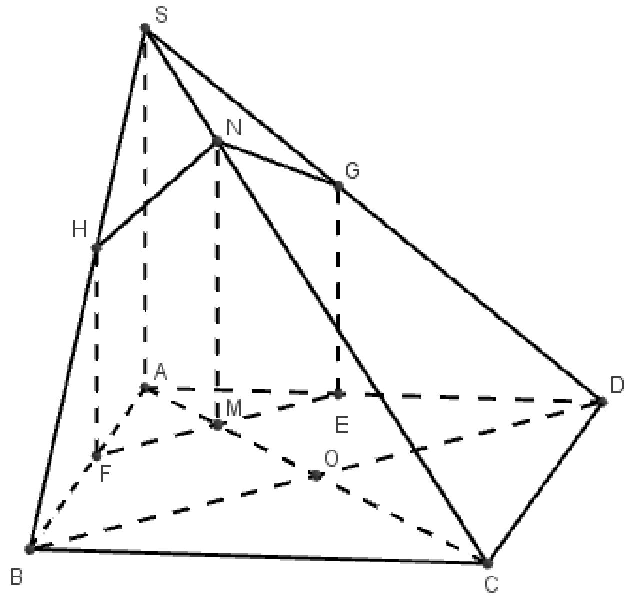
$\frac{MQ}{SA}=\frac{MD}{AD} \Rightarrow MQ=\frac{2a(a-x)}{a}=2a-2x$.

$\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD} \Rightarrow QP=\frac{ax}{a}=x$.

$S_{TD}=\frac{(PQ+MN)MQ}{2}=2a(a-x)$.

Câu 30. Chóp $S.ABCD$, $SA \perp BD$, $SA = a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. $M \in AO$ để $AM = x\left(0 < x < \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. (P) qua M và song song với SA, BD. Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính S_{TD}

Lời giải



Qua M dựng EF song song $B\text{D}$.

Qua M dựng MN song song SA.

Qua E dựng EG song song SA.

Qua F dựng FH song song SA.

Vậy thiết diện là $EFHNG$.

Vì $SA \perp BD \Rightarrow MNHF, MNGE$ là hình thang vuông bằng nhau.

$\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{MN}{SA} \Rightarrow MN = \dfrac{SA.CM}{CA} = \dfrac{3\text{a}}{4}$.

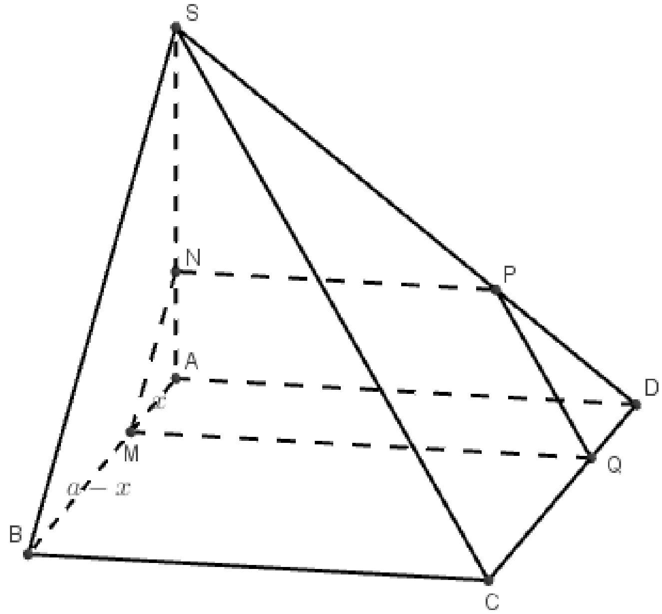
$\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{A\text{E}}{A\text{D}} = \dfrac{FM}{BO} \Rightarrow AF = \dfrac{AM.AB}{AO} = x\sqrt{2}, FM = AM = x$.

$\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{FH}{SA} \Rightarrow FH = \dfrac{SA(BA - AF)}{BA} = a - x\sqrt{2}$.

$S_{DT} = 2.\dfrac{1}{2}.(MN + HF)FM = x\left(\dfrac{7a}{4} - x\sqrt{2}\right)$.

Câu 31. Chóp $S.ABCD$, $SA = a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $AD \perp SB$. $M \in AB$ để $AM = x(0 < x < a)$. (P) qua M và song song với SB, AD.Dựng (P). Tìm thiết diện. Tính S_{TD}.

Lời giải



Qua M dựng MN song song SB.

Qua M dựng MQ song song AD.

Vậy thiết diện là $MNPQ$.

Vì $AD \perp SB \Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông.

Ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AS} = \frac{MN}{SB} \Rightarrow AN = x, MN = \frac{AM.SB}{AB} = x\sqrt{2}$.

$\frac{SN}{SA} = \frac{NP}{AD} \Rightarrow NP = \frac{SN.AD}{SA} = a - x$.

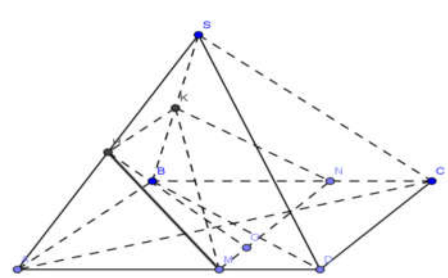
$S_{TD} = \frac{1}{2}.MN.(NP + MQ) = \frac{x\sqrt{2}}{2}(2a - x)$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều. $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA và SB. Gọi M là trung điểm DA $(HKM) \cap BC = N$.

a) Chứng minh rằng $HKMN$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x(0 \le x \le a)$ tính diện tích $HKMN$ theo a và x. Tìm x để diện tích này nhỏ nhất.

Lời giải



a) Tìm $N = BC \cap (HKM)$,

$BC \subset (ABCD)$

$M\in(HKM)\cap(ABCD)$

$$\left.\begin{array}{l} HK//AB \\ HK\subset(HKM) \\ AB\subset(ABCD) \end{array}\right\}\Rightarrow(HKM)\cap(ABCD)=Mx//AB;Mx\cap BC=N$$

Vì $MN//HK$ nên $HKMN$ là hình thang.

$\Delta AHM=\Delta BKN\Rightarrow HM=KN$ hay $HKMN$ là hình thang cân.

b) Dựng đường cao AO của là hình thang $HKMN$.

Diện tích hình thang $S=\dfrac{(KH+MN)HO}{2}$

$HK=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$; $MN=AD=a$; $HO=\sqrt{MH^2-MO^2},MO=\dfrac{a}{4}$

Tính HM

Xét ΔSAD: $Cos\widehat{SAD}=\dfrac{AD^2+SA^2-SD^2}{2AD.SA.}=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow\widehat{SAD}=120^o$

$.\,MH=\sqrt{AH^2+AM^2-2AH.AM.\cos\widehat{HAM}}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+x^2+\dfrac{ax}{4}}$,

$HO=\sqrt{MH^2-MO^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{16}+x^2+\dfrac{ax}{4}}$

$S=\dfrac{(KH+MN)HO}{2}=\dfrac{3a}{4}\sqrt{x^2+\dfrac{xa}{2}+\dfrac{3a^2}{16}}$; S_{min} khi $x^2+\dfrac{xa}{2}+\dfrac{3a^2}{16}$ min khi $x=0$ hay $M\equiv A$