

BÀI 31. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

- CHƯƠNG 9. ĐẠO HÀM
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

a) Vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng

b) Cường độ tức thời

Nhận xét. Nhiều bài toán trong Vật lý, Hoá học, Sinh học,... đưa đến Việc tìm giới hạn dạng

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ở đó } y = f(x) \text{ là một hàm số đã cho.}$$

Giới hạn trên dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm đạo hàm.

2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu bởi $f'(x_0)$

(hoặc $y'(x_0)$), tức là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chú ý. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x) - f(x_0)$.
2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.
3. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$.

Giải

Ta có: $f(x) - f(1) = x^2 + 2x - 3 = x^2 - 1 + 2x - 2 = (x - 1)(x + 3)$.

Với $x \neq 1$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = x + 3$.

Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$.

Vậy $f'(1) = 4$.

Trong thực hành, ta thường trình bày ngắn gọn như sau:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x) - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4 \end{aligned}$$

Chú ý. Đặt $h = x - x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = 1$ có thể tính như sau:

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 2(1+h)] - (1^2 + 2)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 4h + 3) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4.\end{aligned}$$

Chú ý: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y' = f'(x)$.

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y = cx^2$, với c là hằng số.

Giải

Với x_0 bất kì, ta có:

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cx^2 - cx_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} c(x + x_0) = c(x_0 + x_0) = 2cx_0.\end{aligned}$$

Vậy hàm số $y = cx^2$ (với c là hằng số) có đạo hàm là hàm số $y' = 2cx$.

Lưu ý: $(c)' = 0; (x)' = 1; (cx^2)' = 2cx$

Chú ý. Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .

Ví dụ 3. Giải bài toán trong tình huống mở đầu (bỏ qua sức cản của không khí và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Giải

Phương trình chuyển động rơi tự do của quả bóng là $s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc rơi tự do,

lấy $g = 9,8m/s^2$). Do vậy, vận tốc của quả bóng tại thời điểm t là $v(t) = f'(t) = gt = 9,8t$.

Mặt khác, vì chiều cao của toà nhà là $461,3m$ nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1 , với

$$f(t_1) = 461,3. \text{ Từ đó, ta có: } 4,9t_1^2 = 461,3 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \text{ (giây).}$$

Vậy vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là $v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8 \cdot \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \approx 95,1(m/s)$.

4. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Chú ý: Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$, với $x_1 \neq x_2$, là $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc

$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

Nhận xét. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.

Ví dụ 4. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Giải

Ta có $(x^2)' = 2x$ nên $y'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$. Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $k = -2$.

b) Phương trình tiếp tuyến

Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm, ta rút ra kết luận sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

Ví dụ 5. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): y = 3x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Giải

Từ Ví dụ 2, ta có $y' = 6x$. Do đó, hệ số góc của tiếp tuyến là $k = f'(1) = 6$. Ngoài ra, ta có $f(1) = 3$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 3 = 6(x - 1)$ hay $y = 6x - 3$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Câu 1. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x_0 = -1$.

Lời giải

Ta có: $x_0 = -1, f(x_0) = -(-1)^2 + 2(-1) + 1 = -2$. Với $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{-x^2 + 2x + 1 - (-2)}{x - (-1)} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 1} \\ &= \frac{(x+1)(-x+3)}{x+1} = -x + 3. \end{aligned}$$

Suy ra: $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} (-x + 3) = 4$. Vậy $f'(-1) = 4$.

Câu 2. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 1$;

b) $y = kx + c$ (với k, c là các hằng số).

Lời giải

a) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2 + 1) - (x_0^2 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

$$\Rightarrow y' = 2x.$$

b) Biến đổi tương tự. Đáp số: $y' = k$.

Câu 3. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = -x^3$ tại $x_0 = -1$

Lời giải

a) Ta có: $f(x) - f(1) = x^2 - x - 0 = x(x - 1)$. Với $x \neq 1, \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x$.

Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$. Vậy $f'(1) = 1$.

b) Ta có: $f(x) - f(-1) = -x^3 - 1 = -(x + 1)(x^2 - x + 1)$. Với $x \neq -1$,

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{-(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = -(x^2-x+1). \text{ Tính giới hạn:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (-x^2+x-1) = -3. \text{ Vậy } f'(-1) = -3.$$

Câu 4. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Sử dụng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = kx^2 + c$ (với k, c là các hằng số);

b) $y = x^3$.

Lời giải

a) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(kx^2 + c) - (kx_0^2 + c)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} k(x + x_0) = 2kx_0.$$

Vậy hàm số $y = kx^2 + c$ có đạo hàm là $y' = 2kx$.

b) Với x_0 bất kì, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x_0x + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x_0x + x_0^2) = 3x_0^2. \end{aligned}$$

Vậy hàm số $y = x^3$ có đạo hàm là $y' = 3x^2$.

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = x + \sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $D = [1; +\infty)$.

Tại điểm $x_0 = 2, y_0 = 2 + \sqrt{2-1} = 3$. Với $1 \leq x \neq 2$, ta có:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{x + \sqrt{x-1} - 3}{x - 2} = \frac{(x-2) + (\sqrt{x-1} - 1)}{x - 2} = 1 + \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} y'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x - 2)(\sqrt{x-1} + 1)} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1) - 1}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = 1 + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y'(2) = \frac{3}{2}.$$

Câu 6. Tính đạo hàm (nếu tồn tại) của hàm số $y = |x-1|x^2$ tại điểm $x_0 = 1$.

Giải

Đạo hàm $y'(1)$ (nếu có) là:

$$y'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|x^2}{x-1}$$

Ta cần tính riêng các giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2) = -1$$

Giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1 khác nhau nên không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|x^2}{x-1}$. Do đó,

đạo hàm $y'(1)$ không tồn tại.

Chú ý. $|x-1|x^2 = (x-1)x^2$ khi $x \geq 1$ và $|x-1|x^2 = -(x-1)x^2$ khi $x < 1$ nên để khử vô định trong giới hạn trên ta phải xét riêng các giới hạn một phía.

Câu 7. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của hàm số $y = 2x^2 + 3x - 1$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

$$y'(1) = 7.$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = x(2x-1)^2$. Tính $f'(0)$ và $f'(1)$.

Lời giải

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x-1)^2 = (-1)^2 = 1. \text{ Để tính } f'(1), \text{ ta phân tích:}$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) &= x(2x-1)^2 - 1 = (x-1)(2x-1)^2 + (2x-1)^2 - 1 \\ &= (x-1)(2x-1)^2 + 4x(x-1) \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó, } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} ((2x-1)^2 + 4x) = 5.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 1-2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

Tìm giới hạn bên phải và bên trái tại điểm $x=0$. Ta có $f(0)=1$ và

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1-1)(x-1+1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) = -2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1-2x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2) = -2$$

$$\text{Vậy } f'(0) = -2$$

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số:

a) $y = ax^2$ (a là hằng số) tại điểm x_0 bất kì.

b) $y = \frac{1}{x-1}$ tại điểm x_0 bất kì, $x_0 \neq 1$.

Lời giải

$$\text{a) } y'(x_0) = 2ax_0;$$

$$\text{b) } y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-1)^2}, x_0 \neq 1$$

Câu 11. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ với $x > 0$;

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ với $x \neq 1$.

Giải

a) Với bất kì $x_0 > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + \sqrt{x} - (x_0^2 + \sqrt{x_0})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(x + x_0 + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right) = 2x_0 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

b) Với $x_0 \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x_0}{x_0-1}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x + x_0}{(x - x_0)(x - 1)(x_0 - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{(x - 1)(x_0 - 1)} = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \sqrt[3]{x}$. Chứng minh rằng $y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ($x \neq 0$).

Lời giải

Với $x_0 \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{(x - x_0)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0})} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}. \\ \forall y \ y'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ (x \neq 0) \end{aligned}$$

Câu 13. Xét tính liên tục, sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm (nếu có) của các hàm số sau đây trên \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1}{x+1} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

$$b) \ f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{3} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ nên f gián đoạn tại 2, do đó f không có đạo hàm tại 2.

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ nên f liên tục tại 1.

Ta lại có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Vậy f không có đạo hàm tại 1.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x^3 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ bằng định nghĩa.

Giải

Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có: $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 3(1 + \Delta x)^3 - 1 - (3 \cdot 1^3 - 1) = 9\Delta x + 9(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9\Delta x + 9(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3}{\Delta x} = 9 + 9\Delta x + 3(\Delta x)^2$.

Ta thấy: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [9 + 9\Delta x + 3(\Delta x)^2] = 9$.

Vậy $f'(1) = 9$.

Câu 15. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau bằng định nghĩa:

a) $f(x) = x + 2$;

b) $g(x) = 4x^2 - 1$;

c) $h(x) = \frac{1}{x-1}$

Lời giải

a) $f'(x) = 1$.

b) $g'(x) = 8x$.

c) Xét Δx là số gia của biến số tại điểm x .

Ta có: $\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = \frac{1}{x + \Delta x - 1} - \frac{1}{x - 1} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$.

Suy ra: $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}}{\Delta x} = \frac{-1}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$.

Ta thấy: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)} = \frac{-1}{(x - 1)^2}$.

Vậy $h'(x) = \frac{-1}{(x - 1)^2}$.

Câu 16. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - 2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 2$.

Lời giải

Với $x > 2$, ta có: $f(x) = |x - 2| = x - 2$. Đạo hàm của hàm số $f(x) = |x - 2|$ tại điểm $x > 2$ là 1.

- Với $x < 2$, ta có: $f(x) = |x - 2| = 2 - x$. Đạo hàm của hàm số $f(x) = |x - 2|$ tại điểm $x < 2$ là -1.

- Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có: $\Delta f = f(2 + \Delta x) - f(2) = |2 + \Delta x - 2| - |2 - 2| = |\Delta x|$.

Suy ra: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Ta thấy: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$;

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$.

Do đó, không tồn tại $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Vậy hàm số $f(x) = |x - 2|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 2$.

Dạng 2. Ứng dụng

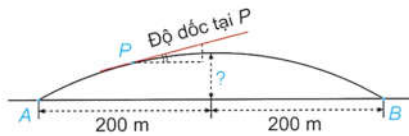
Câu 17. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$.

Câu 18. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): y = -2x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Câu 19. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$ (H.9.4). Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang như Hình 9.5). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Hình 9.4. Cầu vượt thép tại nút giao Nguyễn Văn Cừ quận Long Biên, Hà Nội (Ảnh: cand.com.vn)



Hình 9.5

Hướng dẫn. Chọn hệ trục tọa độ sao cho đỉnh cầu là gốc tọa độ và mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $y = -ax^2$ (với a là hằng số dương). Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là $k = y' = -2ax, -200 \leq x \leq 200$.

Do đó, $|k| = 2a|x| \leq 400a$. Vì độ dốc của mặt cầu không quá 10° nên ta có: $400a \leq \tan 10^\circ$. Từ đó tính được chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường.

Câu 20. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = -x^2 + 4x$, biết:

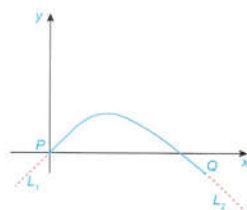
- Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 1$;
- Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 0$.

Câu 21. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $19,6m/s$ thì độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Câu 22. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một kỹ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol (H.9.6a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q (H.9.6b). Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.



Hình 9.6a



Hình 9.6b

- Tìm c .
- Tính $y'(0)$ và tìm b .
- Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là $40m$. Tìm a .
- Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q .

Câu 23. Cho hàm số $y = (2x+1)^2$.

- Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = -1$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1;1)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{8}{x}, x \neq 0$.

- Tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 bất kì, $x_0 \neq 0$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng có phương trình $y = -2x + 8$.

Câu 25. Tìm tọa độ điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, biết hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M bằng 3.

Câu 26. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -3x^2$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng có phương trình $y = 6x + 5$.

Câu 27. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = t^3 - 4t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 3$ giây và $t = 5$ giây.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị là (H) .

- Viết tiếp tuyến của (H) tại điểm $M \in (H)$ có $x_M = 2$.
- Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -x$.
- Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(1; -1)$.

Câu 29. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 16t + 15$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$.

Câu 30. Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol (P)

- Tại điểm $(-1;1)$;
- Tại giao điểm của (P) với đường thẳng $y = -3x + 2$.

Câu 31. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó

- a) Song song với đường thẳng $y = -x + 2$;
- b) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{4}x - 4$;
- c) Đi qua điểm $A(0;1)$.

Câu 32. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 4$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị (P) .

- a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (P) tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ có đồ thị (C) .

- a) Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

Câu 35. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là

$$C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500.$$

- a) Tính $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$.
- b) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.
- c) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = x^3$ có đồ thị (C) .

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 8.

Câu 37. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8m/s^2$.

- a) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3(s)$.
- b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của vật tại thời điểm đó bằng $39,2(m/s)$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM (PHÂN MỨC ĐỘ)

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trái tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm phải tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- C. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm $-x_0$.
- D. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

$$\text{A. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x+x_0) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{B. } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$\text{C. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\text{D. } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{h}.$$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- A. $f'(2) = 3$. B. $f'(x) = 2$. C. $f'(x) = 3$. D. $f'(3) = 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

- A. 12. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc bằng

- A. 5. B. $-\frac{1}{5}$. C. -5. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = 4x - 6$.
B. $y = 4x + 2$.
C. $y = 4x + 6$.
D. $y = 4x - 2$.

Câu 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = 4x - 6$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = 4x + 6$. D. $y = 4x - 2$.

Câu 8. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là

- A. $y = 7x + 13$. B. $y = -7x + 30$. C. $y = 3x + 9$. D. $y = -x - 2$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm

$$M\left(1; \frac{1}{3}\right) \text{ là:}$$

- A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = x - \frac{2}{3}$. D. $y = -x + \frac{2}{3}$.

Câu 10. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

- A. $y = -9x + 16$. B. $y = -9x + 20$. C. $y = 9x - 20$. D. $y = 9x - 16$.

Câu 11. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = 3x - 4x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là

- A. $y = 0$. B. $y = 3x$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = -12x$.

Câu 12. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- A. $y = -2x + 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = -3x - 2$.

Câu 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^4 - 8x^2 + 9$ tại điểm M có hoành độ bằng -1 .

- A. $y = 12x + 14$. B. $y = 12x - 14$. C. $y = 12x + 10$. D. $y = -20x - 22$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

- A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x - 2$. C. $y = 3x - 3$. D. $y = 3x + 2$.

Câu 15. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

- A. $y = -2x + 3$. B. $y = -2x - 3$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = 2x + 3$.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng

- A. $k = -5$. B. $k = 10$. C. $k = 25$. D. $k = 1$.

Câu 17. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{3x-2}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có hệ số góc là

- A. -1 . B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 18. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = 2t^2 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng

- A. $22(m/s)$. B. $19(m/s)$. C. $9(m/s)$. D. $11(m/s)$.

Câu 19. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = 2t^2 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng.

- A. $22(m/s)$.
B. $19(m/s)$.
C. $9(m/s)$.
D. $11(m/s)$.

Câu 20. Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 8t^2 + 500$. Trong khoảng thời gian $t = 0$ đến $t = 5$ chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

- A. $t = 1$. B. $t = 4$. C. $t = 2$. D. $t = 0$.

Câu 21. Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

- A. $12m/s^2$. B. $17m/s^2$. C. $24m/s^2$. D. $14m/s^2$.

Câu 22. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 12t^2$, t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, s (mét) là quãng đường vật chuyển động trong t giây. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ (giây) là:

- A. $80(m/s)$. B. $90(m/s)$. C. $100(m/s)$. D. $70(m/s)$.

Câu 23. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 216 (m/s). B. 30 (m/s). C. 400 (m/s). D. 54 (m/s)

2. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh khá-giỏi

Câu 24. Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại $x_0 = 3$.
 B. Hàm số có đạo hàm nhưng không liên tục tại $x_0 = 3$.
 C. Hàm số gián đoạn và không có đạo hàm tại $x_0 = 3$.
 D. Hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0 = 3$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$ Mệnh đề **sai** là

- A. $f'(1) = 2$. B. f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
 C. $f'(0) = 2$. D. $f'(2) = 4$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
 B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
 C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.
 D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 1$ thì $2a + b$ bằng:

- A. 2. B. 5. C. -2. D. -5.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = |x - 1|$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $f(1) = 0$. B. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
 C. $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. D. $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1 + |x|}$. Tính $f'(0)$.

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = \frac{1}{3}$. D. $f'(0) = 3$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\frac{5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

- A. Không tồn tại. B. 0 C. $-\frac{7}{50}$. D. $-\frac{9}{64}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.

- A. $T = -4$. B. $T = 0$. C. $T = -6$. D. $T = 4$.

Câu 32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2012)\sqrt[3]{1-2x} - 2012}{x} = \frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a là số nguyên âm. Tổng $a + b$ bằng

- A. -4017 . B. -4018 . C. -4015 . D. -4016 .

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{1}{32}$. D. Không tồn tại.

Câu 34. Hàm số nào sau đây không có đạo hàm trên \mathbb{R} ?

- A. $y = |x - 1|$. B. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. C. $y = \sin x$. D. $y = \sqrt{2 - \cos x}$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

- A. 0. B. $f'(2)$. C. $2f'(2) - f(2)$. D. $f(2) - 2f'(2)$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là?

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = -2$. D. Không tồn tại.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Trong các khẳng định

(I): Tồn tại một số $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(II): Nếu $f(a) = f(b)$ thì luôn tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

(III): Nếu $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a; b)$ thì giữa hai nghiệm đó luôn tồn tại một nghiệm của $f'(x)$.

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ x^2 + 12 & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta luôn tìm được một số dương x_0 và

một số thực a để hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Tính giá trị $S = x_0 + a$.

- A. $S = 2(3 - 2\sqrt{2})$. B. $S = 2(1 + 4\sqrt{2})$. C. $S = 2(3 - 4\sqrt{2})$. D. $S = 2(3 + 2\sqrt{2})$.

Câu 39. Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Giá trị của

$a^2 + b^2$ bằng

A. 20.

B. 17.

C. 18.

D. 25.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $-\frac{1}{2}$.

B. -2

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 41. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^2 + x - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $x + y - 1 = 0$.B. $x - y - 2 = 0$.C. $x + y + 3 = 0$.D. $x - y - 1 = 0$.

Câu 42. Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là

A. 1.

B. -1.

C. -3.

D. 0.

Câu 43. Gọi I là giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và trục tung của hệ trục tọa độ Oxy . Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại I là

A. -2.

B. 0.

C. -1.

D. 2.

Câu 44. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

A. $y = 2x + 9$.B. $y = -2x + 9$.C. $y = 2x - 9$.D. $y = -2x - 9$.

Câu 45. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(H): y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành là:

A. $y = x - 3$.B. $y = \frac{1}{3}(x-1)$.C. $y = 3x$.D. $y = 3(x-1)$.

Câu 46. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) là.

A. 1

B. 6

C. 12

D. 9

Câu 47. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;4)$ là

A. $y = 8x - 4$.B. $y = x + 3$.C. $y = -8x + 12$.D. $y = 8x + 4$.

Câu 48. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ có phương trình $y = ax + b$. Tính $a + b$

A. 9.

B. 5.

C. 1.

D. -1.

Câu 49. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.

A. $y = -8x - 16$.B. $y = 8x - 19$.C. $y = -8x + 16$.D. $y = 8x + 19$.

Câu 50. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có tung độ bằng -2 là

A. $y = 3x + 1$.B. $y = -3x - 1$.C. $y = -3x + 1$.D. $y = -3x + 3$.

Câu 51. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại M song song với đường thẳng $d: y = 3x - 1$?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 52. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ (C) . Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Câu 53. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 54. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, (C)$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x$ có phương trình là

A. $y = -3x - 1; y = -3x + 11$.

B. $y = -3x + 10; y = -3x - 4$.

C. $y = -3x + 5; y = -3x - 5$.

D. $y = -3x + 2; y = -3x - 2$.

Câu 55. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1} (C)$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ tại điểm có hoành độ

A. $x = 0$.

B. $x = -2$.

C. $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Câu 56. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x + 10$ là

A. $y = 9x + 6, y = 9x - 28$.

B. $y = 9x, y = 9x - 26$.

C. $y = 9x - 6, y = 9x - 28$.

D. $y = 9x + 6, y = 9x - 26$.

Câu 57. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 9x - y + 7 = 0$ là

A. $y = 9x + 25$.

B. $y = -9x - 25$.

C. $y = 9x - 25$

D. $y = -9x + 25$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$, tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 5$ của đồ thị hàm số là:

A. $y = 9(x + 3)$.

B. $y = 9(x - 3)$.

C. $y = 9x + 5$ và $y = 9(x - 3)$

D. $y = 9x + 5$.

Câu 59. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $x - 3y + 6 = 0$.

A. $y = \frac{1}{3}x - 1$.

B. $y = \frac{1}{3}x + 1$.

C. $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

D. $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Câu 60. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ đồ thị (C) . Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

A. 1.

B. Không tồn tại cặp điểm nào.

C. Vô số cặp điểm

D. 2.

Câu 61. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $d: y = 3x + 1$.

A. $m = 3$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -2$.

Câu 62. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 63. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2$ có đồ thị (C) . Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -2x + \frac{10}{3}$ là

- A. $y = -2x + 2$. B. $y = -2x - 2$.
C. $y = -2x + 10, y = -2x - \frac{2}{3}$. D. $y = -2x - 10, y = -2x + \frac{2}{3}$.

Câu 64. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

- A. $y + 16 = -9(x + 3)$. B. $y = -9(x + 3)$. C. $y - 16 = -9(x - 3)$. D. $y - 16 = -9(x + 3)$.

Câu 65. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ biết nó song song với đường thẳng $y = 9x + 6$.

- A. $y = 9x + 6, y = 9x - 6$. B. $y = 9x - 26$.
C. $y = 9x + 26$. D. $y = 9x - 26, y = 9x + 6$.

Câu 66. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 67. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ song song với trục hoành là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 68. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng

$\Delta: y = 3x + 2$ là

- A. $y = 3x + 2$. B. $y = 3x - 2$. C. $y = 3x + 14$. D. $y = 3x + 5$.

Câu 69. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.

Câu 70. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

- A. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $M(-2; 0)$. C. $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. D. $M(-2; -4)$.

Câu 71. Tìm các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ biết các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -3x$.

- A. $y = -3x + 11; y = -3x - 1$. B. $y = -3x - 6; y = -3x - 11$.
C. $y = -3x + 1$. D. $y = -3x + 6$.

Câu 72. Cho đường cong $(C): y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đường cong (C) có hệ số góc bằng 7?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 73. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị (C) có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox . Tổng các phần tử của S là

- A. 3. B. 8. C. 5. D. 2.

Câu 74. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 75. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng $d: 12x + y = 0$ có dạng là $y = ax + b$. Tính giá trị của $2a + b$.

- A. -23 hoặc -24 B. -23. C. -24. D. 0.

Câu 76. Đường thẳng $y = 6x + m + 1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ khi m bằng

- A. -4 hoặc -2. B. -4 hoặc 0. C. 0 hoặc 2. D. -2 hoặc 2.

Câu 77. Tính tổng S tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.

- A. $S = \frac{4}{3}$. B. $S = 1$. C. $S = 0$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Câu 78. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 0)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 79. Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến kẻ từ $M(2; -1)$ đến đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$.

- A. $y = -2x + 3$. B. $y = -1$. C. $y = x - 3$. D. $y = 3x - 7$.

Câu 80. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ đi qua $A(1; 3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $-1 < m_0 < 0$. B. $0 < m_0 < 1$. C. $1 < m_0 < 2$. D. $-2 < m_0 < -1$.

Câu 81. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; 1)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tính tổng bình phương các phần tử của tập S .

- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 82. Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Biết $a = \frac{m}{n}$ (với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản) là giá trị để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Khi đó giá trị $m+n$ là:

- A. 2. B. 7. C. 5. D. 3.

Câu 83. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất là bao nhiêu?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 84. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) , biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác $\triangle OAB$ cân tại O , với O là gốc tọa độ. Tính $a + b$.

- A. -1 . B. -2 . C. 0 . D. -3 .

Câu 85. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) cắt trục Ox , Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA = 4OB$.

- A. 2 . B. 3 . C. 1 . D. 4 .

Câu 86. Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

- A. $m \neq 0$. B. $m > 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 87. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\triangle OAB$ cân tại O . Khi đó $a + b$ bằng

- A. -1 . B. 0 . C. 2 . D. -3 .

Câu 88. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị (C) . Số phần tử của S là

- A. 9 . B. 7 . C. 3 . D. 5 .

Câu 89. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3 .

Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .

- A. $-\frac{1}{2}$. B. -2 . C. 2 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 90. Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

- A. $m \neq 0$. B. $m > 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 91. Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 1)$. Diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục bằng

- A. 3 . B. $\frac{3}{2}$. C. 9 . D. $\frac{9}{2}$.

Câu 92. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

- A. $y = x + 2$. B. $y = x - 2$. C. $y = -x + 2$. D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

Câu 93. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

- A. $y = 2x - 6$. B. $y = 4x - 6$. C. $y = x + 1$. D. $y = 4x - 2$.