

CHUYÊN ĐỀ 16. TÍCH PHÂN

• Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** - <https://www.nbv.edu.vn/>

Để đảm bảo quyền lợi cho giáo viên đã mua tài liệu, thì nội dung file pdf này bên mình sẽ cắt giảm đi số lượng câu hỏi so với file thực tế.

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

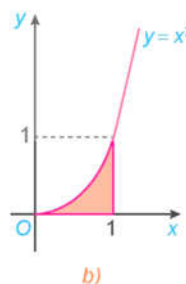
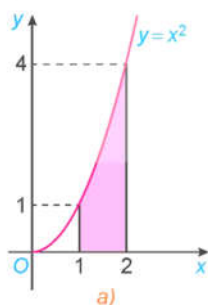
1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

a) Diện tích hình thang cong

Hình thang cong

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục không âm trên đoạn $[a; b]$, gọi là một hình thang cong.

Ví dụ 1: Những hình phẳng được tô màu dưới đây có phải là hình thang cong không?



Giải

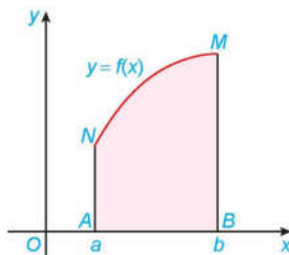
Hình a là hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Hình b là hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$.

Tổng quát, ta có:

Định lý 1

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.



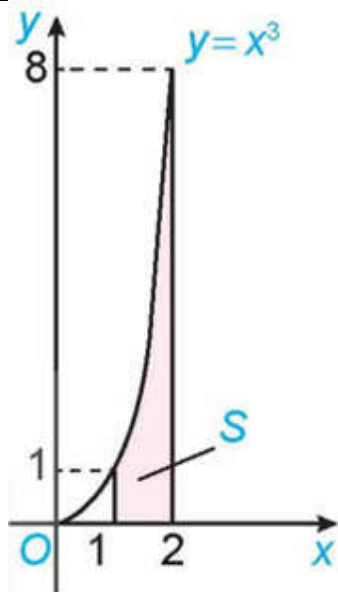
Ví dụ 2: Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Giải

Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là $F(x) = \frac{x^4}{4}$.

Do đó, diện tích của hình thang cong cần tính là

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}.$$



b) Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Chú ý

a) Hiệu $F(b) - F(a)$ thường được kí hiệu là $F(x)|_a^b$.

Như vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$.

b) Ta gọi \int_a^b là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

c) Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước: $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Tích phân không phụ thuộc vào cách kí hiệu biến: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

Ví dụ 3: Tính:

a) $\int_{-1}^3 x^2 dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^2 u}$

d) $\int_1^2 2^x dx$

Giải

a) $\int_{-1}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^3 = \frac{1}{3} [3^3 - (-1)^3] = \frac{28}{3}$.

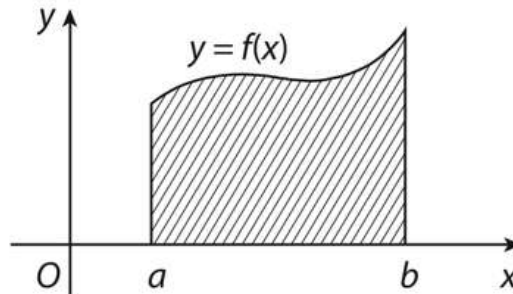
b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}$.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$.

$$d) \int_1^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^2 = \frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}.$$

Từ **Định lý 1** và định nghĩa tích phân, ta có Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S (gạch sọc) của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.



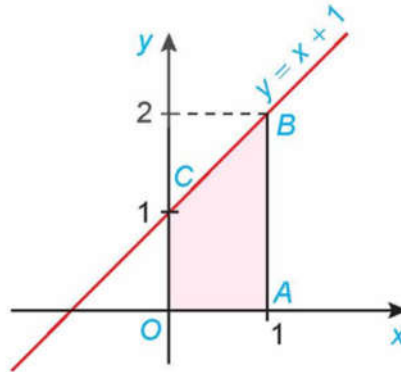
$$\text{Vậy } S = \int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ 4: Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:

$$a) \int_0^1 (x+1)dx \quad b) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

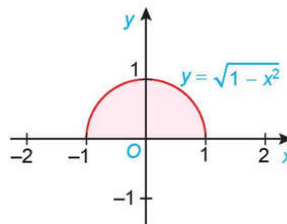
Giải

a) Tích phân cần tính là diện tích của hình thang vuông $OABC$, có đáy nhỏ $OC = 1$, đáy lớn $AB = 2$ và đường cao $OA = 1$.



$$\text{Do đó: } \int_0^1 (x+1)dx = S_{OABC} = \frac{1}{2}(OC + AB) \cdot OA = \frac{1}{2}(1+2) \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

b) Ta có $y = \sqrt{1-x^2}$ là phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn tâm tại gốc tọa độ O và bán kính 1. Do đó, tích phân cần tính là diện tích nửa phía trên trục hoành của hình tròn tương ứng.



$$\text{Vậy } \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, ta có

- 1) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k là hằng số);
- 2) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$;
- 3) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$;
- 4) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ($a < c < b$).

Ví dụ 5: Tính:

$$\text{a) } \int_1^4 (x^3 + 3\sqrt{x}) dx \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - 2 \cos x) dx \quad \text{c) } \int_1^4 \left(2^x - \frac{3}{x^2} \right) dx$$

Giải

$$\text{a) } \int_1^4 (x^3 + 3\sqrt{x}) dx = \int_1^4 x^3 dx + 3 \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^4 + 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{1}{4}(4^4 - 1) + 2 \left(4^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{255}{4} + 14 = \frac{311}{4}.$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - 2 \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right) - 2(1 - 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 3.$$

$$\text{c) } \int_1^4 \left(2^x - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int_1^4 2^x dx - 3 \int_1^4 x^{-2} dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^4 + 3 \cdot \frac{1}{x} \Big|_1^4 = \frac{1}{\ln 2} (2^4 - 2^1) + 3 \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{15}{\ln 2} - \frac{9}{4}.$$

Ví dụ 6: Tính $\int_0^3 |x - 2| dx$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x - 2| dx &= \int_0^2 |x - 2| dx + \int_2^3 |x - 2| dx = \int_0^2 (2 - x) dx + \int_2^3 (x - 2) dx \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3 = [(4 - 2) - 0] + \left[\left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) \right] = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TÍNH TÍCH PHÂN

Câu 1. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và $F(1) = 1$. Tính $F(e)$.

Câu 2. Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:

$$\text{a) } \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$\text{b) } \int_{-2}^2 \left(1 - \left| \frac{1}{2} x \right| \right) dx.$$

c) $\int_0^3 (2x+1)dx$

d) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}, x > 0$. Tính giá trị của $f(4) - f(1)$.

Câu 4. Cho $\int_{-1}^2 g(x)dx = 6, G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ và $G(-1) = 8$.
Tính $G(2)$.

Câu 5. Cho $\int_0^1 [2f(x) - 1]dx = 3$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

Câu 6. Cho $\int_{-2}^1 f(x)dx = 5$ và $\int_{-2}^1 g(x)dx = -4$. Tính:

a) $\int_{-2}^1 f'(x)dx$

b) $\int_{-2}^1 -4f(x)dx$;

c) $\int_{-2}^1 \frac{-2g(x)}{3}dx$;

d) $\int_{-2}^1 [f(x) + g(x)]dx$;

e) $\int_{-2}^1 [f(x) - g(x)]dx$

g) $\int_{-2}^1 [3f(x) - 5g(x)]dx$

Câu 7. Cho $\int_0^5 f(x)dx = 6$ và $\int_0^5 g(x)dx = 2$. Hãy tính:

a) $\int_0^5 [2f(x) + 3g(x)]dx$

b) $\int_0^5 [2f(x) - 3g(x)]dx$

Câu 8. Cho các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và $\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}, \int_2^3 f(x)dx = \frac{3}{2},$

$\int_1^3 g(x)dx = -1$. Tính:

a) $\int_1^3 [2f(x) + g(x)]dx$

b) $\int_1^3 [5f(x) - 4]dx$.

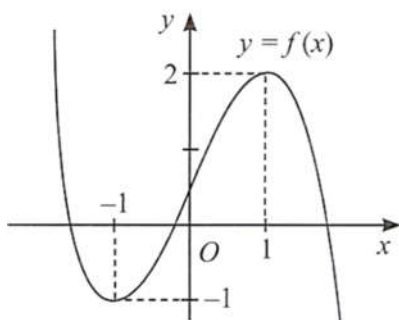
Câu 9. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(0; 2)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x; f(x))$ có hệ số góc là $2x - 3$. Tìm $f(4)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $\int_0^4 f(x)dx = -2$; $\int_0^5 f(t)dt = 4$. Tính $\int_4^5 f(x)dx$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$. Tính $\int_0^5 f(x)dx$, biết rằng

$$\int_0^3 f(x)dx = 4; \int_1^5 f(x)dx = 6; \int_1^3 f(x)dx = 3.$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Tính $\int_{-1}^1 f'(x)dx$.



Câu 13. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(-1; 3)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x; f(x))$ có hệ số góc là $3x^2 - 4x + 1$. Tìm $f(2)$.

Câu 14. Tính:

a) $A = \int_{-1}^2 (x - 4x^2)dx + 4 \int_{-1}^2 (x^2 - 1)dx$

b) $B = \int_{-1}^0 (x^3 - 6x)dx + \int_0^1 (t^3 - 6t)dt$

Câu 15. Tính:

1) $\int_1^2 (2x - 3)^2 dx$	2) $\int_1^4 (x^2 + 6\sqrt{x}) dx$	3) $\int_1^2 x^2 dx$	4) $\int_2^3 3x^2 dx$
5) $\int_0^1 e^t dt$	6) $\int_2^3 6x dx$	7) $\int_0^1 e^t dt$	8) $\int_0^1 (x^2 + x) dx$
9) $\int_0^1 (1 - 2x)^2 dx$	10) $\int_1^4 \frac{x-2}{\sqrt{x}} dx$	11) $\int_0^1 x^6 dx$	12) $\int_1^4 \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx$
13) $\int_0^1 -2 dx$	14) $\int_0^1 \frac{2x}{3} dx$	15) $\int_0^1 x^4 dx$	16) $\int_1^3 2\sqrt[3]{x} dx$

17) $\int_1^9 (x\sqrt{x} - 2)dx$	18) $\int_0^2 (3x-2)(3x+2)dx$	19) $\int_1^2 t^2(5t^2-2)dt$	20) $\int_{-1}^1 (x-2)(x^2+2x+4)dx$
21) $\int_0^1 (4x^3+3x^2-2)dx$	22) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$	23) $\int_1^3 x^{\sqrt{2}}dx$	24) $\int_1^2 \frac{1}{4x^2}dx$
25) $\int_{-1}^2 (3x^2-8x)dx$	26) $\int_{-1}^1 (x+1)(x^2-x+1)dx$		

Câu 16. Tính:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$	2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$	3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$	4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$
5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 2)dx$	6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 \cos x + 2)dx$	7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)dx$	8) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$
9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x + 2 \sin x)dx$	10) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$	11) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x)dx$	12) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\cos^2 x} dx$
13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + 1)dx$	14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot x) \sin x dx$	15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$	16) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$
17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x - \cos x)dx$	18) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2 \tan^2 x + 5)dx$	19) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2}{3 \sin^2 x} dx$	20) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} \right) dx$
21) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^3 x - 3}{\cos^2 x} dx$	22) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} dx$	23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx$	
24) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx$			

Câu 17. Tính:

1) $\int_0^2 e^{-5x} dx$	2) $\int_0^1 3^{x+2} dx$	3) $\int_{-1}^1 3^{2x} dx$	4) $\int_0^1 e^x dx$
--------------------------	--------------------------	----------------------------	----------------------

5) $\int_0^1 2^x dx$	6) $\int_0^1 (3 \cdot 2^x - e^x) dx$	7) $\int_0^1 (3^x - 2e^x) dx$	8) $\int_0^1 \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x} dx$
9) $\int_0^1 e^{-2x} dx$	10) $\int_{-1}^0 \frac{1}{2^{3x}} dx$	11) $\int_0^1 (2^{2x} \cdot 3^{x-1}) dx$	12) $\int_0^1 \frac{2^{x+1}}{3^x} dx$
13) $\int_1^3 e^{x-2} dx$	14) $\int_0^1 (2^x - 1)^2 dx$	15) $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx$	16) $\int_{-1}^0 5^{2x-1} dx$
17) $\int_0^2 2^{x+3} dx$	18) $\int_0^1 (3x^2 - 2e^x) dx$	19) $\int_0^2 (e^x - 4x^3) dx$	20) $\int_0^1 \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx$

Câu 18. Tính:

1) $\int_2^4 \frac{2}{x} dx$	2) $\int_1^2 \frac{2}{3x} dx$	3) $\int_1^2 \frac{1-2x}{x^2} dx$	4) $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$
5) $\int_1^4 \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx$	6) $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x} dx$	7) $\int_1^e \frac{1}{t} dt$	8) $\int_1^2 \frac{3x^3 + 5x^2 - 6x + 4}{2x} dx$
9) $\int_1^e \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + x \cdot 2^x}{x} dx$	10) $\int_1^2 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} dx$	11) $\int_0^1 \frac{4^x - 1}{2^x - 1} dx$	12) $\int_1^2 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2} dx$
13) $\int_1^2 \frac{xe^x + 1}{x} dx$			

Câu 19. Tính

1) $\int_{-1}^1 x dx$	2) $\int_0^3 x^2 - 2x dx$	3) $\int_0^{2\pi} \sin x dx$	4) $\int_{-2}^3 x - 2 dx$
5) $\int_{-1}^2 x^2 + x - 2 dx$	6) $\int_{-1}^1 e^x - 1 dx$	7) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x - \sin x dx$	

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

DẠNG 2. ỨNG DỤNG

Bài toán 1. BÀI TOÁN VỀ QUẢNG ĐƯỜNG

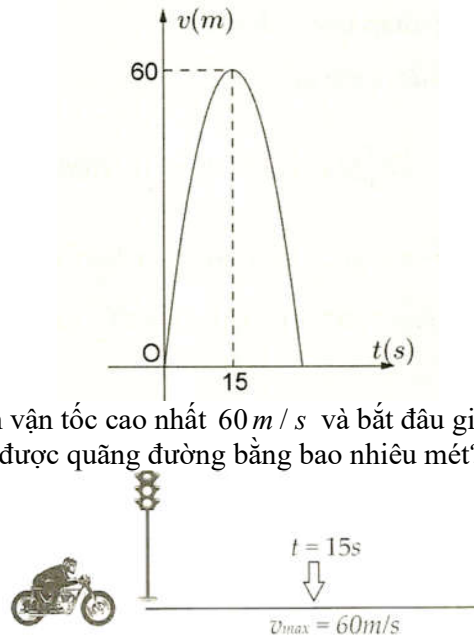
Phương pháp giải

- Quảng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm a đến thời điểm b là:

$$s(t) = \int_a^b v(t) dt$$

- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 1. Một xe mô tô phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình vẽ



Biết rằng, sau 15 s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 60 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

Bài giải

Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + C$ có dạng là đường parabol có đỉnh $I(15; 60)$, đồng thời đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$, suy ra

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 15 \\ a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 30a + b = 0 \\ a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + 0 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{4}{15} \\ b = 8. \end{cases}$$

Theo đồ thị thì xe bắt đầu tăng tốc lúc $t = 0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t = 15 \text{ s}$ nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$\int_0^{15} v(t) dt = \int_0^{15} \left(-\frac{4}{15} t^2 + 8t \right) dt = \left(-\frac{4}{45} t^3 + 4t^2 \right) \Big|_0^{15} = 600 (m).$$

Vậy từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được một quãng đường dài 600 m .

Bài toán 2. BÀI TOÁN VỀ CÔNG CỦA LỰC TÁC DỤNG VÀO VẬT

Phương pháp giải

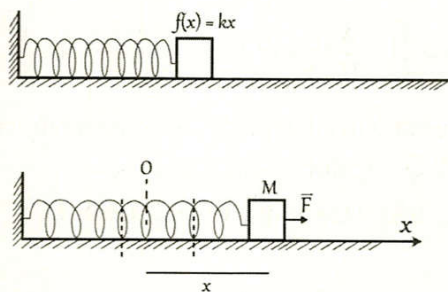
- Nếu một lực không đổi F tác dụng lên vật M dọc theo một khoảng cách (độ dời) d , thì công W sinh ra trong quá trình dịch chuyển bằng tích của lực F và độ dài khoảng cách d mà nó đã tác dụng, ta có công thức $W = F \cdot d$.

- Định nghĩa trên luôn đúng khi lực F không đổi. Tuy nhiên, nhiều trường hợp lực \vec{F} biến thiên trong suốt quá trình thực hiện công. Trong các tình huống như vậy, người ta thường chia quá trình này thành nhiều phần nhỏ và tính công toàn phần nhờ lấy tổng các công tương ứng với các phần được chia (được tính nhờ phép tính tích phân).

- Giả sử $f(x)$ là lực tác dụng lên vật tại vị trí x , đường đi của lực tác dụng (quỹ đạo của vật được tác dụng lực) tương ứng với trục tọa độ Ox . Khi đó, công toàn phần sinh ra trong cả quá trình chuyển động

của vật từ vị trí $x = a$ đến vị trí $x = b$ là: $W = \int_a^b f(x) dx$

Ví dụ 2. Một lực 40 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên từ 10 cm đến 15 cm . Hãy tính công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài 15 cm đến 18 cm .



Bài giải

Ban đầu, lò xo có độ dài tự nhiên 10 cm . Dùng một lực 40 N kéo giãn lò xo có độ dài 15 cm thì lò xo bị kéo dãn một đoạn có độ dài $5\text{ cm} = 0,05\text{ m}$.

Vậy ta có $f(0,05) = 40 \Leftrightarrow 0,05k = 40 \Leftrightarrow k = 800$.

Suy ra $f(x) = 800x$.

Vậy công sinh ra khi kéo căng lò xo từ 15 cm đến 18 cm là

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 800x dx = 800 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{0,05}^{0,08} = 1,56(J).$$

Bài toán 3. BÀI TOÁN VỀ TĂNG TRƯỞNG, PHÁT TRIỂN

Phương pháp giải

- Cho hàm số $f(x)$ biểu diễn cho sự tăng (hay giảm) số lượng của một đối tượng nào đó (số người, vi khuẩn, vi trùng, lượng nước chảy, ...)
- Giá trị $f(x)$ là số lượng của đối tượng đó tại thời điểm x .
- Đạo hàm $f'(x)$ chính là tốc độ tăng (hay giảm) của đối tượng đó tại thời điểm x .
- Số lượng tăng thêm (hoặc giảm đi) của đối tượng trong khoảng $x \in [a; b]$ là $\int_a^b f(x) dx$

Ví dụ 3. Tốc độ thay đổi của số lượng người V (tính bằng ngàn người) tham gia công tác tình nguyện ở nước Mỹ từ năm 2000 đến năm 2006 có thể được mô hình bởi hàm số $V(t) = 119,85t^2 - 30e^t + 37,26e^{-t}$ với t là năm ($t=0$ ứng với năm 2000). Hỏi số lượng người tham gia tình nguyện trong giai đoạn tăng lên hay giảm đi với số lượng bao nhiêu?

Lời giải

Sự chênh lệch của số người tham gia tình nguyện trong giai đoạn từ năm 2000 đến năm 2006 là:

$$\begin{aligned} \int_0^6 V(t) dt &= \int_0^6 (119,85t^2 - 30e^t + 37,26e^{-t}) dt \\ &= \left(\frac{119,85}{3} t^3 - 30e^t - 37,26e^{-t} \right) \Big|_0^6 \\ &= -3473,756166 - (-67,261) \approx 3406. \end{aligned}$$

Vậy trong khoảng thời gian từ năm 2000 đến năm 2006, số lượng người tham gia công tác tình nguyện đã giảm đi khoảng 3406 người.

Bài toán 4. BÀI TOÁN VỀ KINH TẾ

Phương pháp giải

- Nếu biết $f(x)$ là hàm giá trị biên, thì hàm mục tiêu sẽ là $\int f(x) dx = F(x) + C$.
- Rút ra kết luận bài toán.

Ví dụ 4. Lợi nhuận biên của một sản phẩm được xác định bởi $\pi'(x) = -0,0005x + 12,2$.

- Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi sản lượng bán tăng từ 100 lên 101 đơn vị?
- Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi sản lượng bán tăng từ 100 lên 110 đơn vị?

Bài giải

a) Sự thay đổi của lợi nhuận khi tăng sản lượng bán từ 100 lên 101 đơn vị là

$$\int_{100}^{101} \frac{d\pi}{dx} = \int_{100}^{101} (-0,0005x + 12,2) dx = \left(-0,00025x^2 + 12,2x \right) \Big|_{100}^{101} = 12,15 \text{ (đơn vị tiền)}$$

b) Sự thay đổi của lợi nhuận khi tăng sản lượng bán từ 100 lên 110 đơn vị là

$$\int_{100}^{110} \frac{d\pi}{dx} = \int_{100}^{110} (-0,0005x + 12,2)dx = \left(-0,00025x^2 + 12,2x\right)\Big|_{100}^{110} = 121,48 \text{ (đơn vị tiền)}$$

Ví dụ 5. Trong kì kinh doanh 2 năm, chi phí sản xuất một đơn vị sản phẩm được cho bởi phương trình $C = 0,005t^2 + 0,01t + 13,15; 0 \leq t \leq 24, t$ tính bằng tháng.

Tìm chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm trong kì kinh doanh này.

Bài giải

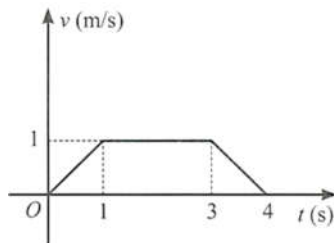
Chi phí trung bình được xác định bởi

$$\frac{1}{24} \int_0^{24} (0,005t^2 + 0,01t + 13,15)dt = \frac{1}{24} \left(\frac{0,005t^3}{3} + \frac{0,01t^2}{2} + 13,15t \right) \Big|_0^{24}$$

$$\text{Hay } \frac{1}{24} \int_0^{24} (0,005t^2 + 0,01t + 13,15)dt = \frac{1}{24} (341,52) = 14,23 \text{ (đơn vị tiền)}$$

Câu 32. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 5 - 2\cos t (m/s)$. Tính quãng đường vật chuyển động trong khoảng thời gian từ lúc $t = 0(s)$ đến $t = \frac{\pi}{2}(s)$.

Câu 33. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ được cho bởi đồ thị như Hình.

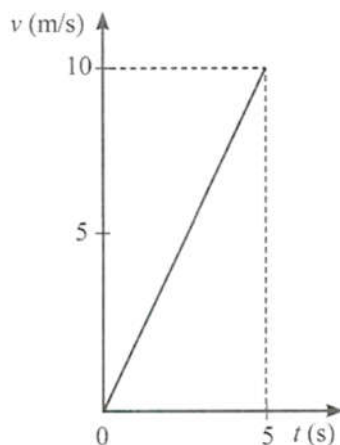


- Tính quãng đường vật đi được từ lúc $t = 1(s)$ đến lúc $t = 3(s)$.
- Tính quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên.

Câu 34. Một chiếc xe đang chuyển động với tốc độ $v_0 = 5 m/s$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 3 m/s^2$.

- Sau 5 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc, tốc độ của xe là bao nhiêu?
- Tính quãng đường xe đi được trong 5 giây đầu kể từ khi tăng tốc.

Câu 35. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở Hình



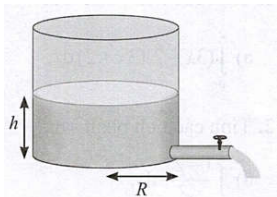
- Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 5 giây đầu tiên.
- Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm 1 giây đến 5 giây.

Câu 36. Dọc theo đường thẳng (gắn trục tọa độ Ox có độ dài đơn vị bằng 1m), một vật chuyển động với vận tốc (m/s) $v(t) = 12 - 4t, 0 \leq t \leq 10$.

- Tính hiệu số tọa độ (độ dịch chuyển) của vật giữa hai thời điểm $t = 2$ và $t = 5$.

b) Tính quãng đường vật đi chuyển được trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 5$.

Câu 37. Một bồn chứa nước có dạng hình trụ với chiều cao 4 m và bán kính đáy 0,5 m. Lúc đầu bồn chứa đầy nước. Kể từ khi bắt đầu xả nước, tốc độ thay đổi chiều cao của mực nước trong bồn theo thời gian t là $h'(t) = \frac{t}{50} - \frac{2}{5}$ (m/phút)



- Tìm chiều cao $h(t)$ của mực nước trong bồn sau t phút kể từ khi bắt đầu xả nước.
- Cần thời gian bao lâu để xả hết nước trong bồn?
- Sau khi xả 5 phút, trong bồn còn bao nhiêu lít nước?

Câu 38. Sau khi được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng, một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 20 - 10t$ (m/s) với $0 \leq t \leq 4$.

- Xác định độ cao của vật (tính theo mét) tại thời điểm $t = 3$.
- Tính quãng đường vật đi được trong 3 giây đầu.

Câu 39. Một ô tô đang di chuyển với tốc độ 20 m/s thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t) = 20 - 5t$ ($0 \leq t \leq 4$).



Kể từ khi hãm phanh đến khi dừng, ô tô đi được quãng đường bao nhiêu?

- Tính quãng đường xe đi được từ khi hãm phanh đến khi dừng
- Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian đó.

Câu 40. Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ

$v(t) = 2t - 0,03t^2$ ($0 \leq t \leq 10$) trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo giây với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.

- Tính quãng đường xe đi được sau 5 giây, sau 10 giây.
- Tính tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 10$.

Câu 41. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s).

- Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$, tức là tính $\int_1^4 v(t) dt$.
- Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int_1^4 |v(t)| dt$.

Câu 42. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hoá bằng công thức $P'(x) = -0,0005x + 12,2$

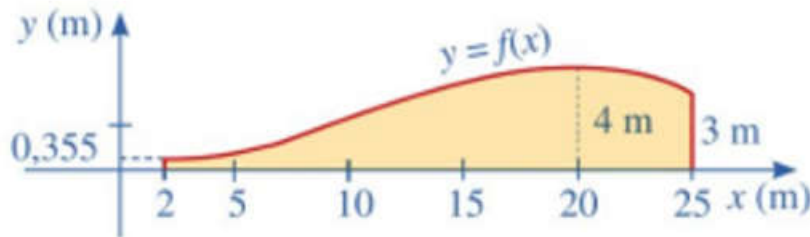
Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

- Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.
- Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Câu 43. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hoá bởi công thức

$v = k(R^2 - r^2)$ trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

Câu 44. Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường các chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành điện năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (tô màu vàng) trong Hình mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh turbine, được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 2, x = 25$, trục Ox và đồ thị hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{800}(x^3 - 33x^2 + 120x - 400)$.

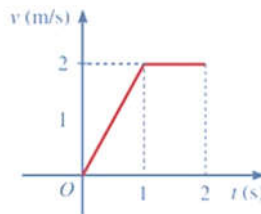


Hãy tính diện tích hình thang cong đó.

Câu 45. a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t)(m/s)$. Cho $0 < a < b$ và $v(t) > 0$ với mọi $t \in [a; b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t)dt$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (a, b tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 - \sin t (m/s)$. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}(s)$.

Câu 46. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở Hình.



- Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.
- Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.

Câu 47. Ở nhiệt độ $37^\circ C$, một phản ứng hoá học từ chất đầu A , chuyển hoá thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \rightarrow B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị $molL^{-1}$) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thoả mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05 molL^{-1}$.

- Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$, từ đó hãy tìm hàm số $f(x)$.
- Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị $molL^{-1}$) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\frac{1}{b-a} \int_a^b y(x)dx$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

DẠNG 3. NÂNG CAO

Câu 58. (Chuyên Vinh 2024) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2x^2 + f(x) = 2xf'(x)$ với mọi $x > 0$. Biết $f(1) = 1$, giá trị của $f(9)$ bằng

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

NHÓM DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG BÌNH

Câu 1. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x), G(x)$ là các nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

A. $F(a) - F(b) = G(a) - G(b)$.

B. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

C. $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$.

D. $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b x^\alpha dx = b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}$.

B. $\int_a^b x^\alpha dx = \alpha(b^{\alpha-1} - a^{\alpha-1})$.

C. $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\alpha \neq -1)$.

D. $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha} (\alpha \neq 0)$.

Câu 3. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b \sin x dx = \sin a - \sin b$.

B. $\int_a^b \sin x dx = \sin b - \sin a$.

C. $\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$.

D. $\int_a^b \sin x dx = \cos b - \cos a$.

Câu 4. Phát biểu nào sau đây là đúng? Biết $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ liên tục trên $[a; b]$.

A. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot a - \cot b$.

B. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot b - \cot a$.

$$\text{C. } \int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan a - \tan b.$$

$$\text{D. } \int_a^b \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan b - \tan a.$$

Câu 5. Phát biểu nào sau đây là đúng?

$$\text{A. } \int_a^b e^x dx = e^{b+1} - e^{a+1}.$$

$$\text{B. } \int_a^b e^x dx = e^{a+1} - e^{b+1}.$$

$$\text{C. } \int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

$$\text{D. } \int_a^b e^x dx = e^a - e^b.$$

Câu 6. Tích phân $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ bằng:

$$\text{A. } \ln b - \ln a.$$

$$\text{B. } |\ln b| - |\ln a|.$$

$$\text{C. } \ln |b| - \ln |a|.$$

$$\text{D. } \ln |a| - \ln |b|.$$

Câu 7. Biết $F(x) = e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_0^1 [3 + f(x)] dx$ bằng:

$$\text{A. } 2 + e.$$

$$\text{B. } 3 + e.$$

$$\text{C. } 3.$$

$$\text{D. } 3x + e^x.$$

Câu 8. Phát biểu nào sau đây là đúng?

$$\text{A. } \int_a^b \cos x dx = \sin a - \sin b.$$

$$\text{B. } \int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a.$$

$$\text{C. } \int_a^b \cos x dx = \cos a - \cos b.$$

$$\text{D. } \int_a^b \cos x dx = \cos b - \cos a.$$

Câu 9. Phát biểu nào sau đây là đúng? Biết $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ liên tục trên $[a; b]$.

$$\text{A. } \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx = \cot a - \cot b.$$

$$\text{B. } \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx = \cot b - \cot a.$$

$$\text{C. } \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan a - \tan b.$$

$$\text{D. } \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan b - \tan a.$$

Câu 10. Cho m thỏa mãn $m > 0, m \neq 1$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int_a^b m^x dx = m^b - m^a$.

B. $\int_a^b m^x dx = m^a - m^b$.

C. $\int_a^b m^x dx = \frac{m^b}{\ln m} - \frac{m^a}{\ln m}$.

D. $\int_a^b m dx = \frac{m^a}{\ln m} - \frac{m^b}{\ln m}$.

Câu 11. Tích phân $\int_1^2 \frac{-3}{x^3} dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{9}{8}$.

B. $-\frac{45}{64}$.

C. $\frac{15}{8}$.

D. $-\frac{9}{8}$.

Câu 12. Tích phân $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ có giá trị bằng:

A. $2 - \sqrt{2}$.

B. $2 + \sqrt{2}$.

C. $\frac{-\sqrt{2} + 8}{20}$.

D. $\frac{-\sqrt{2} - 8}{20}$.

Câu 13. Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x) dx$ bằng:

A. 16.

B. 4.

C. 2.

D. 8.

Câu 14. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng:

A. -3.

B. -1.

C. 1.

D. 3.

Câu 15. Cho $\int_2^3 f(x) dx = 3$ và $\int_2^3 g(x) dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx$ bằng:

A. 4.

B. 2.

C. -2.

D. 3.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$. Giá trị của $\int_1^3 f(x) dx - \int_8^3 f(x) dx$ bằng

A. 45.

B. 80.

C. 15.

D. $18\sqrt[3]{3} - 51$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = 3x - 1$. Biết rằng a là số thỏa mãn $\int_0^1 f^2(x) dx = a \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2$. Giá trị của a là

A. 2.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 4.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn

$\int_1^3 [3x^2 - 2f'(x)] dx = 4; f(1) = -2$.

Giá trị $f(3)$ là

A. 9.

B. 11.

C. -13.

D. 19.

Câu 19. (Mã 101-2021-Lần 2) Cho f là hàm số liên tục trên $[1; 2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên $[1; 2]$ thỏa $F(1) = -2$ và $F(2) = 4$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng.

A. 6.

B. 2.

C. -6.

D. -2.

- Câu 20.** (Mã 102-2021-Lần 2) Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $F(1) = -2$ và $F(2) = 3$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng
- A. -5. B. 1. C. -1. D. 5.
- Câu 21.** Tích phân $\int_1^2 x^3 dx$ bằng
- A. $\frac{15}{3}$. B. $\frac{17}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. $\frac{15}{4}$.
- Câu 22.** (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 (2x+1) dx$.
- A. $I = 0$. B. $I = 1$. C. $I = 2$. D. $I = -\frac{1}{2}$.
- Câu 23.** Tích phân $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ bằng
- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. 1.
- Câu 24.** Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx$ bằng
- A. 12. B. 9. C. 5. D. 6.
- Câu 25.** Tích phân $\int_0^1 x(1+x) dx$ bằng
- A. $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$. B. $(1+2x)\Big|_0^1$. C. $\left(x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$. D. $\int_0^1 (x^2 + x^3) dx$.
- Câu 26.** $\int_1^2 3\sqrt{x} dx$ bằng
- A. $4\sqrt{2} - 2$. B. $\sqrt{2} - 1$. C. $4\sqrt{2} - 1$. D. $2\sqrt{2} - 2$.
- Câu 27.** (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ -2019) Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng
- A. 0. B. 1. C. -1. D. $\frac{\pi}{2}$.
- Câu 28.** (KTNL GV Bắc Giang 2019) Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x+1) dx$
- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.
- Câu 29.** Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$ bằng
- A. $b^3 - b^2a - b$. B. $b^3 + b^2a + b$. C. $b^3 - ba^2 - b$. D. $3b^2 - 2ab - 1$.
- Câu 30.** Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$.

A. $I = 1 - \ln 2$. B. $I = \frac{7}{4}$. C. $I = 1 + \ln 2$. D. $I = 2 \ln 2$.

Câu 31. (Mã 101-2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{R} và $F(2) = 6$, $F(4) = 12$. Tích phân $\int_2^4 f(x) dx$ bằng

A. 2. B. 6. C. 18. D. -6.

Câu 32. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ bằng

A. 1. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. -1.

Câu 33. Tích phân $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx$ bằng:

A. $\ln 2 - 1$. B. $\ln 2 + 1$. C. $\ln 2 + 3$. D. $\ln 2 + 2$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[-3; 5]$, biết $f(-3) = 1$ và $f(5) = 9$. Tính $I = \int_{-3}^5 4f'(x) dx$.

A. $I = 32$. B. $I = 44$. C. $I = 40$. D. $I = 36$.

Câu 35. Tích phân $\int_a^b 3^x dx$ bằng

A. $\frac{4^b - 4^a}{4}$ B. $\frac{3^b - 3^a}{\ln 3}$ C. $\frac{3^a - 3^b}{\ln 3}$ D. $\frac{3^{b+1} - 3^{a+1}}{x+1}$.

Câu 36. Tích phân $\int_{\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{5}} \sin x dx$ có giá trị bằng:

A. $\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{7}$. B. $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{5}$. C. $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{7}$. D. $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{5}$.

Câu 37. Tích phân $\int_0^1 e^x dx$ bằng

A. e . B. $e - 1$. C. $\frac{e-1}{2}$. D. $e^2 - 1$.

Câu 38. Tích phân $\int_0^3 x^{2027} dx$ bằng

A. $\frac{3^{2028}}{\ln 3}$. B. $\frac{3^{2028} - 1}{2028}$. C. $\frac{3^{2027}}{\ln 3}$. D. $\frac{3^{2028}}{2028}$.

Câu 39. Tích phân $\int_0^1 \frac{3^x}{2} dx$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{\ln 3}$. B. $\frac{1}{\ln 3}$. C. -1. D. 1.

Câu 40. Tính tích phân $I = \int_0^{2016} 7^x dx$.

A. $I = \frac{7^{2017}}{2017} - 7$. B. $I = (7^{2016} - 1) \ln 7$. C. $I = \frac{7^{2016} - 1}{\ln 7}$. D. $I = 2016 \cdot 7^{2015}$.

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

NHÓM DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ GIỎI

Câu 83. Giá trị của $\int_1^4 (|x-2| + |x-3|)dx$ bằng

- A. 3. B. 6. C. 5. D. 7.

Câu 84. (Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018) Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

- A. $\frac{1}{\ln 2}$. B. $\ln 2$. C. $2 \ln 2$. D. $\frac{2}{\ln 2}$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 4$ và $f'(x) = x + e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{6e+13}{6}$. B. $\frac{6e+25}{6}$. C. $\frac{6e+25}{3}$. D. $\frac{6e+19}{6}$.

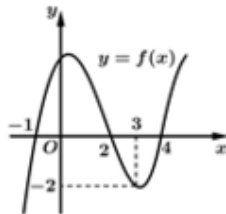
Câu 86. Cho tích phân $\int_0^e (3x^2 - 2x) dx = me^3 + ne^2$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, khi đó $|m - n|$ bằng bao nhiêu?

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 87. Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 (4ax^3 - 3a^2x^2 + 2x + 1) dx = 0$?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính tích phân $I = \int_{-1}^3 [x + f'(x)] dx$.



- A. $I = 4$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = 1$.

Câu 89. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng:

- A. $\frac{a}{6} - 1$. B. $\frac{2a}{3} + 1$. C. $\frac{a}{6} + 1$. D. $\frac{2a}{3} - 1$.

Câu 90. (Thi thử Lâmônôxốp - Hà Nội 2019) Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

- A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 91. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - TPHCM - 2018) Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái xe đạp phanh, thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

- A. 0,2m. B. 2m. C. 10m. D. 20m.

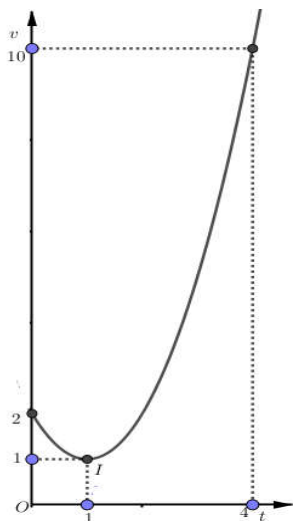
Câu 92. (THPT KINH MÔN - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Một chất điểm chuyển động thẳng trên trục Ox với vận tốc cho bởi công thức $v(t) = 3t^2 + 6t$ (m/s) (t là thời gian). Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 2$. Tìm tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động.

- A. $x = 9$. B. $x = 11$. C. $x = 4$. D. $x = 6$.

Câu 93. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG - ND - LẦN 1 - 2018) Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s^2). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- A. 70,25 m. B. 68,25 m. C. 67,25 m. D. 69,75 m.

Câu 94. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 1 - 2018) Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



- A. $s = 6$ (km). B. $s = 8$ (km). C. $s = \frac{40}{3}$ (km). D. $s = \frac{46}{3}$ (km).

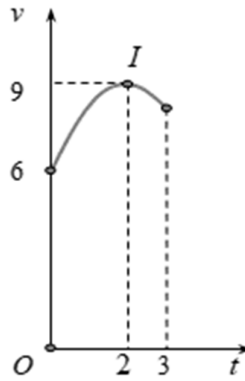
Câu 95. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

- A. 18m. B. 36m. C. 22,5m. D. 6,75m.

Câu 96. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 6t$ m/s^2 . Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giây là 17t m/s. Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 4$ giây đến thời điểm $t = 10$ giây là.

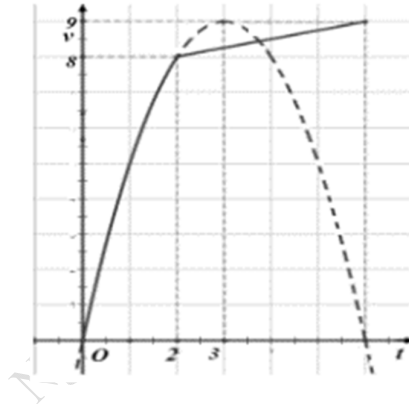
- A. 966 m. B. 36 m. C. 1200 m. D. 1014 m.

Câu 97. (Mã 110 2017) Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



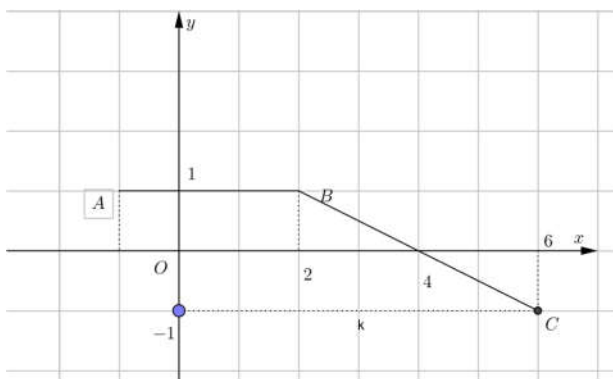
- A. $s = 25,25(\text{km})$ B. $s = 24,25(\text{km})$ C. $s = 24,75(\text{km})$ D. $s = 26,75(\text{km})$

Câu 98. (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019) Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



- A. $\frac{130}{3}(\text{km})$. B. $9(\text{km})$. C. $40(\text{km})$. D. $\frac{134}{3}(\text{km})$.

Câu 99. (Mã 101-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 6]$ và có đồ thị đường gấp khúc ABC như hình bên. Biết F là một nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng



- A. 10. B. 5. C. 6. D. 7.

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

PHẦN D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[a; b]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a)$		
b)	$\int_a^b f''(x)dx = f(b) - f(a)$		
c)	$\int_a^b f''(x)dx = f'(a) - f'(b)$		
d)	$\int_a^b f''(x)dx = f(a) - f(b)$		

Câu 2. Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây). Xét chuyển động trong khoảng thời gian từ c (giây) đến b (giây). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\int_c^b a(t)dt = v(b) - v(c)$		
b)	$\int_c^b v(t)dt = a(b) - a(c)$		
c)	$\int_c^b v'(t)dt = v(c) - v(b)$		
d)	$\int_c^b v'(t)dt = v(b) - v(c)$		

Câu 3. Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\int_a^a f(x)dx = 1$		
b)	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$		
c)	$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, c \in (a; b)$		
d)	$\int_a^b xf(x)dx = x \int_a^b f(x)dx$		

Câu 4. Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx$ được viết ở dạng $\pi \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right) - 1$ $a, b \in \mathbb{Z}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$a + 2b = 8$		
b)	$a + b = 5$		
c)	$2a - 3b = 2$		
d)	$a - b = 2$		

Câu 5. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5$; $\int_0^1 g(x) dx = 7$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\int_{-1}^1 f(x) dx = 10$		
b)	$\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10$		
c)	$\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10$		
d)	$\int_{-1}^1 g(x) dx = 14$		

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 0	↘ -1	↗ $f(4)$	↘ $-\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\int_1^2 f'(x) dx = 1$		
b)	$\int_1^4 [3 + f'(x)] dx = f(4) + 3$		
c)	$\int_1^2 f'(x) dx = f(1) - f(2)$		
d)	Nếu $\int_1^4 f'(x) dx = 5$ thì $f(4) = 3$		

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x \quad \forall x > 0$ và $f(1) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0; 1)$.		
b)	Phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0; +\infty)$.		
c)	Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(1; 2)$.		
d)	Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(2; 5)$.		

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 1 (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 4$ và $\int_1^2 f(x) dx = 14$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\int_2^1 f(x) dx = -14$		
b)	$\int_0^2 f(x) dx = 18$		
c)	$a + b = 6$		
d)	$\int_0^3 f(x) dx = 44$		

Câu 9. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\int_{-1}^1 x ^3 dx = \left \int_{-1}^1 x^3 dx \right $		
b)	$\int_{-1}^{2018} x^4 - x^2 + 1 dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$		
c)	$\int_{-2}^3 e^x (x+1) dx = \int_{-2}^3 e^x (x+1) dx$		
d)	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$		

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + m & \text{khi } x < 1 \\ -2x + n & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} (m, n \in \mathbb{R})$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn

$\int_1^2 f(x) dx = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$n = 3$		
b)	$m = 1$		

c)	$f(-1) = 7$		
d)	$\int_0^2 f(x)dx = \frac{11}{6}$		

NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

Câu 30. Giả sử chi phí mua và bảo trì một thiết bị trong x năm có thể được mô hình hóa theo công thức $C = 5000 \left(25 + 3 \int_0^x t^{\frac{1}{4}} dt \right)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Chi phí mua 1 sản phẩm là 100.000 đồng.		
b)	Chi phí bảo trì năm đầu tiên của 1 sản phẩm là 12.000 đồng.		
c)	Sau 6,5 năm thì số tiền mua một sản phẩm bằng số tiền bảo trì sản phẩm đó.		
d)	Nếu một nhà đầu tư có 10 triệu, thì họ có thể mua và bảo trì tối đa 30 sản phẩm trong 10 năm.		

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. $\int_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}} dx$ có giá trị bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).

Trả lời:

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để $\int_0^3 (10x - 2m)dx > 0$?

Trả lời:

Câu 3. Giả sử $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b, \int_a^b |x|^7 dx = ma^8 + nb^8$ trong đó m, n là các hằng số thực (không phụ thuộc vào a và b). Giá trị của biểu thức $P = m - 5n$ là bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 4. Nước chảy từ đáy bể chứa với tốc độ $r(t) = 200 - 4t$ (lít/phút), trong đó $0 \leq t \leq 50$. Tìm lượng nước chảy ra khỏi bể trong 10 phút đầu tiên.

Trả lời:

Câu 5. Mật độ khối lượng của một thanh kim loại có chiều dài 4 mét được cho bởi công thức $\rho(x) = 1000 + x - \sqrt{x}$ (kg / m^3), trong đó x là khoảng cách bằng mét tính từ một đầu của thanh. Mật độ khối lượng trung bình trên toàn bộ chiều dài của thanh là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Trả lời:

Câu 6. Một ô tô đồ chơi trượt xuống dốc và dừng sau 5 giây, vận tốc của ô tô đồ chơi từ thời điểm $t = 0$ giây đến $t = 5$ giây được cho bởi công thức $v(t) = \frac{1}{2}t^2 - 0,1t^3$ (m / s)

Tìm quãng đường ô tô đồ chơi đi đến khi dừng lại (làm tròn kết quả theo đơn vị mét đến chữ số thập phân thứ hai).

Trả lời:

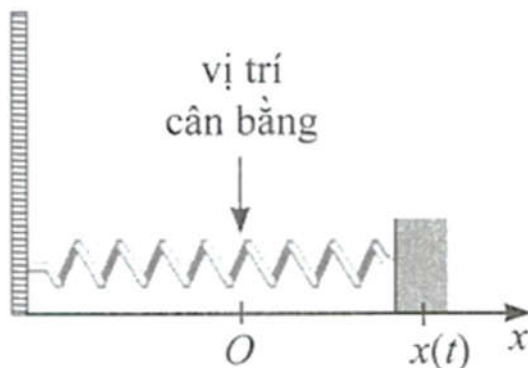
Câu 7. Một ô tô đang chạy với vận tốc 18 m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -36t + 18(\text{m/s})$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

Trả lời:

Câu 8. Một ô tô đang chạy với vận tốc 18 m/s thì người lái ô tô đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 18(\text{m/s})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

Trả lời:

Câu 9. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình, có vận tốc tức thời cho bởi $v(t) = 2\cos t$, trong đó t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng cm/s . Tại thời điểm $t = 0$, con lắc đó ở vị trí cân bằng.



Tính quãng đường mà con lắc lò xo di chuyển được sau 1 giây kể từ vị trí cân bằng theo đơn vị centimet (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

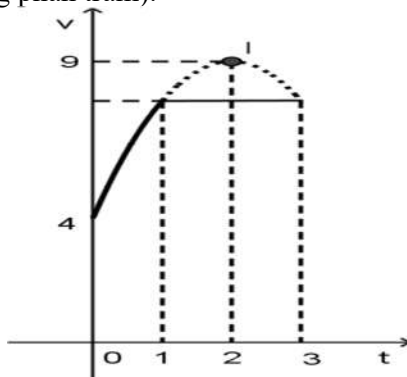
Trả lời:

Câu 10. Một vật đang ở nhiệt độ 100°C thì được đặt vào môi trường có nhiệt độ 30°C . Kể từ đó, nhiệt độ của vật giảm dần theo tốc độ $T'(t) = -140.e^{-2t} (^\circ\text{C}/\text{phút})$, trong đó $T(t)$ là nhiệt độ tính theo $^\circ\text{C}$ tại thời điểm t phút kể từ khi được đặt vào môi trường. Xác định nhiệt độ của vật ở thời điểm 3 phút kể từ khi được đặt vào môi trường (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của $^\circ\text{C}$).

Trả lời:

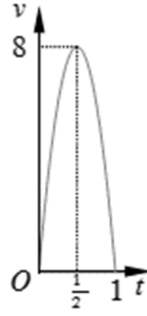
NỘI DUNG TIẾP THEO BỊ CẮT

Câu 71. (Mã 123 2017) Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường S mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



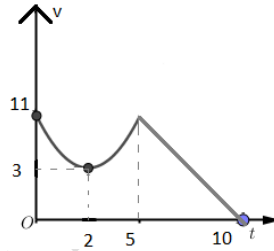
Trả lời:

Câu 72. (Mã 104 2017) Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



Trả lời:

Câu 73. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường Parabol khi $0 \leq t \leq 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \leq t \leq 10(s)$. Cho đỉnh Parabol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \leq t \leq 10(s)$ là bao nhiêu mét?



Trả lời: