Филиал Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова в г. Ташкенте
Факультет Прикладная Математика и Информатика

Материалы для подготовки для подготовки к междисциплинарному экзамену по прикладной математике и информатике (магистратура)

Ташкент 2021

Содержание

1 Билет 1. Алгебры и σ - алгебры множеств, меры. Примеры и свойства.

Алгебры и σ – алгебры

Пусть задано произвольное множество X. Через $2^X = \{A : A \subseteq X\}$ обозначим систему всех подмножеств из множества X.

Определение. Непустая система $\mathfrak{N} \subseteq 2^X$ подмножеств из X называется **алгеброй множеств**, если выполнены следующие условия:
1. $A \cup B \in \mathfrak{N}$ для любых $A, B \in \mathfrak{N}$
2. $X \setminus A \in \mathfrak{N}$ для каждого $A \in \mathfrak{N}$
3. $\emptyset, X \in \mathfrak{N}$

Примеры:

Рассмотрим произвольное множество X.

1. Система подмножеств $\mathfrak{N}_{min}(X) = \{\emptyset, X\}$ есть наименьшая алгебра подмножеств из X.

2. Система всех подмножеств $\mathfrak{N}_{max} = 2^X = \{A : A \subseteq X\}$ из X есть наибольшая система подмножеств из X.

3. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$,$\mathfrak{N} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ $\mathfrak{N}$ есть алгебра множеств из X, при этом, $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{N}_{min}(X)$ и $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{N}_{max}(X)$.

4. Пусть $X = \mathbb{R}$ множество всех действительных чисел, $\mathfrak{M}$ система подмножеств из $\mathbb{R}$, содержащая пустое множество, само множество $\mathbb{R}$, все конечные и счетные подмножества из $\mathbb{R}$ и их дополнения. Тогда $\mathfrak{M}$ есть алгебра множеств и обладает следующим свойством:

$$\text{для любых } A_n \in \mathfrak{M},\ n \in \mathbb{N},\ \text{верно включение } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M} \ \ (1)$$

Действительно, согласно определению системы $\mathfrak{M}$, имеем, что $\emptyset, X \in \mathfrak{M}$. Кроме того, $A \in \mathfrak{M}$ в том и только в том случае, когда $\mathbb{R} \setminus A \in \mathfrak{M}$.

Пусть $A_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$. Если каждое A_n не более чем счетно, то множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ также является не более чем счетным множеством, и следовательно $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$. Если хотя бы одно из множеств $A_n \in \mathfrak{M}, n \in \mathbb{N}$, например $A_{n_0}, n_0 \in \mathbb{N}$, является несчетным множеством, то из включения $A_{n_0} \in \mathfrak{M}$ следует, что $\mathbb{R} \setminus A_{n_0}$ не более чем счетное множество. Поэтому, из соотношения $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus A_n) \subset (\mathbb{R} \setminus A_{n_0})$, следует, что множество $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ не более чем счетно, т.е. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$. Таким образом, система множеств $\mathfrak{M}$ обладает свойством (1). Из свойства (1), взяв $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = \emptyset$, $n \geq 3$, получим, что верно также включение $A \cup B = \bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n \in \mathfrak{M}$. В частности, это означает, что система множеств $\mathfrak{M}$ есть алгебра множеств.

Алгебра подмножеств $\mathfrak{M}$ из X называется **σ-алгеброй множеств**, если она удовлетворяет свойству:

$$\text{для любых } A_n \in \mathfrak{M},\ n \in \mathbb{N},\ \text{верно включение } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$$

Всякая алгебра множеств, состоящая из конечного числа элементов является σ-алгеброй.

Примеры алгебр, не являющихся σ-алгебрами

1. Пусть

$$\sigma[a,b] = \{[\alpha,\beta],[\alpha,\beta),(\alpha,\beta],(\alpha,\beta)\}, a \le \alpha \le \beta \le b$$

Пусть

$$\mathcal{N}[a,b] = \{A = \bigcup_{i=1}^{n} P_i,\ P_i \in \sigma[a,b],\ i = 1,...,n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

система всех элементарных подмножеств из отрезка $[a,b]$. $\mathcal{N}[a,b]$ есть алгебра множеств, но $\mathcal{N}[a,b]$ не является σ-алгеброй подмножеств в $[a,b]$.

Решение. Очевидно, что $\emptyset = (\alpha,\alpha) \in \mathcal{N}[a,b] X = [a,b] \in \mathcal{N}[a,b]$. Далее, если $A, B \in \mathcal{N}[a,b]$, то $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i,\ , P_i \in \sigma[a,b],\ i = 1,...,n$ и $B = A = \bigcup\limits_{j=1}^{k} Q_j$, где $Q_j \in \sigma[a,b]$, $j = 1,...,k, n, k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$A \cup B = (\bigcup_{i=1}^{n} P_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{k} Q_j) \in \mathcal{N}[a,b]$$

$$A \cap B = (\bigcup_{i=1}^{n} P_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{k} Q_j) = (\bigcup_{i=1}^{n} P_i \cap (\bigcup_{j=1}^{k} Q_j)) = \bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{k}(P_i \cap Q_j) = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{k}(P_i \cap Q_j)$$

. Используя теперь математическую индукцию, получим, что

$$\bigcup_{s=1}^{m} A_s \in \mathcal{N}[a,b] \text{ и } \bigcap_{s=1}^{m} A_s \in \mathcal{N}[a,b] \text{ для любых } A_s \in \mathcal{N}[a,b]\,, s = 1,...,m\,, m \in \mathbb{N}$$

Ясно, что $[a,b] \setminus P \in \mathcal{N}[a,b]$ при всех $P \in \sigma[a,b]$. Поэтому для $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i \in \mathcal{N}[a,b]$, $P_i \in \sigma[a,b]$ имеем, что

$$X \setminus A = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} P_i) = \bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus P_i) \in \mathcal{N}[a,b]$$

Следовательно, система множеств $\mathcal{N}[a,b]$ есть алгебра подмножеств из отрезка $[a,b]$.

$$\mathbb{Q} \cap [a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\} \text{ т.к. } \{r_n\} = [r_n, r_n] \in \sigma \Rightarrow \{r_n\} \in \mathfrak{M}(\sigma)$$

Предположим теперь, что $\mathcal{N}[a,b]$ есть σ-алгебра подмножеств из отрезка $[a,b], a < b$. Рассмотрим счетное множество $\mathbb{Q} \cap [a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{r_n\}$. Поскольку $[a,b]$ есть σ-алгебра и $\{r_n\} = [r_n, r_n] \in \sigma[a,b] \subset \mathcal{N}[a,b]$, то $\mathbb{Q} \cap [a,b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{r_n\} \in \mathcal{N}[a,b]$, в частности,
$\mathbb{Q} \cap [a,b] = \bigcup\limits_{n=1}^{n} P_i\ , P \in \sigma[a,b],\ i = 1,..,n,\ n \in \mathbb{N}$ Так как $Q \cap [a,b]$ счетное множество, то среди множеств P_i , $i = 1,...,n$ есть не одноточечное множество $P_{i_0} \in \sigma[a,b]$. Это означает, что P_{i_0} содержит непустой интервал $(\alpha,\beta), \alpha < \beta$, что влечет неравенства

$$c \le card(P_{n_0}) \le card([a,b]) = c.$$

Согласно теореме Кантора-Бернштейна (если $cardX \leq cardY$ и $cardY \leq cardX$, то $X \sim Y$, т.е. $cardX = cardY$.), верно равенство $card(P_{n_0}) = c$. С другой стороны, включение $P_{i_0} \subset \mathbb{Q} \cap [a,b]$ влечет неравенство $\aleph_0 = card(\mathbb{Q} \cap [a,b]) \geq card(P_{n_0}) = c > \aleph_0$, что невозможно. Это означает, что $\mathbb{Q} \cap [a,b] \notin \mathcal{N}[a,b]$, и поэтому алгебра $\mathcal{N}[a,b]$ не является σ-алгеброй подмножеств из отрезка $[a,b], a < b$.

2. Пусть $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел, $\mathcal{A}$ система подмножеств из $\mathbb{N}$, содержащая пустое множество, само множество $\mathbb{N}$, все конечные подмножества из $\mathbb{N}$ и их дополнения. Тогда $\mathcal{A}$ есть алгебра множеств, но $\mathcal{A}$ не является σ-алгеброй подмножеств в $\mathbb{N}$.

Свойства:

(1). Если $\mathfrak{N}$ алгебра множеств, то $A \setminus B \in \mathfrak{N}$ и $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathfrak{N}$ для любых $A, B \in \mathfrak{N}$.

(2). Если $\mathfrak{M}_i$ семейство алгебр (σ-алгебр) множеств из X, $i \in I$, где I некоторое множество индексов, то $\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i = \{A \subset X : A \in \mathfrak{M}_i, \forall i \in I\}$ есть алгебра (соответственно, σ - алгебра) множеств из X.

Доказательство. (1). Если $A, B \in \mathfrak{N}$, то $X \setminus B \in \mathfrak{N}$, и из равенства $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ следует, что $X \setminus B \in \mathfrak{N}$. Аналогично, $B \setminus A \in \mathfrak{N}$. Таким образом, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathfrak{N}$.

(2). Так как $\emptyset, X \in \mathfrak{M}_i$ для любого $i \in I$, то $\emptyset, X \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$. Если $A \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$, то $X \setminus A \in \mathfrak{M}_i$ для всех $i \in I$, т.е. $X \setminus A \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$

Пусть теперь $A, B \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$. Тогда при каждом фиксированном $i \in I$ верно включение $A \cup B \in M_i$, что влечет включение $A \cup B \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$. Таким образом, система множеств $\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ есть алгебра множеств из X. Аналогично показывается, что в случае, когда $\mathfrak{M}_i$ есть σ - алгебра при каждом фиксированном $i \in I$, и $A_n \in \mathfrak{M}_i$, $n \in \mathbb{N}$, для всех $i \in I$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$. Это означает, что $\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ есть σ - алгебра множеств из X.

Следствие. Для любой непустой системы $\mathcal{A}$ подмножеств из X существует наименьшая σ-алгебра $\mathfrak{M}$ множеств из X, для которой $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$, набор всех σ-алгебр множеств из X, которые содержат систему $\mathcal{A}$. Тогда, в силу утверждения Свойства (2), система множеств $\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ есть искомая наименьшая σ-алгебра $\mathfrak{M}$ подмножеств из X, содержащая исходную систему $\mathcal{A}$.

Пусть (X, ρ) произвольное метрическое пространство. Рассмотрим в (X, ρ) систему $\mathcal{U} = \{G \subset X : G = Int(G)\}$ всех открытых подмножеств, и систему $F = \{F \subset X : F = \overline{F}\}$ всех замкнутых подмножеств в (X, ρ).

Определение. Борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(X)$ в (X, ρ) называется наименьшая σ-алгебра подмножеств в метрическом пространстве (X, ρ), содержащая все открытые множества из (X, ρ), т.е. $\mathcal{B}(X) = \mathfrak{M}(\mathcal{U})$.

Поскольку в любом метрическом пространстве (X, ρ) множество $G \subset X$ открыто в том и только в том случае, когда множество $F = X \setminus F$ замкнуто, то борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(X)$ совпадает с наименьшей σ-алгеброй подмножеств в метрическом пространстве (X, ρ), содержащей все замкнутые множества из (X, ρ), т.е. $\mathcal{B}(X) = \mathfrak{M}(F)$.

Меры

Пусть X произвольное множество и $\mathfrak{N}$ некоторая алгебра множеств из X.

Определение. Действительная функция $m : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$ называется **мерой**, если она обладает следующими свойствами:
1. $m(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathfrak{N}$
2. $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, если $A, B \in \mathfrak{N}$ и $A \cap B = \emptyset$

Примеры:

1. Пусть $\mathfrak{N} = \{\emptyset, X\}$. Определим функцию $m : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$, полагая $m(\emptyset) = 0$, $m(X) = 1$. Функция m есть мера на алгебре $\mathfrak{N}$.

2. Пусть $X = N$ и $\mathfrak{M} = 2^N$. Определим функцию $m : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$, полагая $m(\emptyset) = 0$, $m(A) = \sum\limits_{n \in A} \frac{1}{2^n}$ для каждого непустого множества $A \in \mathfrak{M}$. Функция m - мера на $\mathfrak{M}$ при этом $m(\mathbb{N}) = 1$, $m(\{2, 4, .., 2n, ...\}) = \frac{1}{3}$, $m(\{1, 3, .., (2n-1), ...\}) = \frac{2}{3}$

Свойства

Пусть $\mathfrak{N}$ произвольная алгебра множеств из X и пусть $m : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$ мера, заданная на алгебре $\mathfrak{N}$. Тогда
1. $m(\emptyset) = 0$
2. Если $A, B \in \mathfrak{N}$, $A \subset B$, то $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$, в частности , $m(A) \leq m(B)$
3. Для любых $A, B \in \mathfrak{N}$ верно равенство:

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

4. $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$ для всех $A, B \in \mathfrak{N}$
5. Если $A_k \in \mathfrak{N}$, $1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, то $m(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)$
6. $|m(A) - m(B)| \leq m(A \Delta B)$, для всех $A, B \in \mathfrak{N}$

Доказательство.

(1). Так как $m(\emptyset) = m(\emptyset \cup \emptyset) = m(\emptyset) + m(\emptyset) = 2m(\emptyset)$, то $m(\emptyset) = 0$.

(2). Пусть $A \subset B$, $A, B \in \mathfrak{N}$. Тогда $B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Следовательно, $m(B) = m(B \setminus A) + m(A)$, т.е. $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$. Так как $m(B \setminus A) \geq 0$, то $m(B) \geq m(A)$.

(3). Используя равенство $A \cup B = (B \setminus (A \cap B)) \cup A$, $(B \setminus (A \cap B)) \cap A = \emptyset$ и включение $A \cap B \in B$, согласно п. (2), имеем, что $m(A \cup B) = m((B \setminus (A \cap B)) \cup A) = m(B \setminus (A \cap B)) + m(A) = m(B) - m(A \cap B) + m(A)$, т.е. $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$.

(4). Пункт (4) непосредственно следует из пункта (3).

(5) Вытекает из пункта (4) с помощью метода математической индукции.

(6). Так как $A \subset B \cup (A \Delta B)$ и $B \subset A \cup (A \Delta B)$, то из пунктов (2) и (4) вытекает, что $m(A) \leq m(B) + m(A \Delta B)$, т.е. $m(A) - m(B) \leq m(A \Delta B)$, и $m(B) \leq m(A) + m(A \Delta B)$, т.е. $m(B) - m(A) \leq m(A \Delta B)$. Следовательно, $|m(A) - m(B)| \leq m(A \Delta B)$.

Мера $m : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$ называется **счетно-аддитивной**, если из $A_n \in \mathfrak{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}$ следует, что

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Каждая мера, определенная на алгебра множеств, состоящей из конечного числа элементов, является, очевидно, счетно аддитивной мерой.

Пример не счетно-аддитивной меры

Пусть $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел, $\mathcal{A}$ система подмножеств из $\mathbb{N}$, содержащая пустое множество, само множество $\mathbb{N}$, все конечные подмножества из $\mathbb{N}$ и их дополнения. Тогда $\mathcal{A}$ есть алгебра множеств, но $\mathcal{A}$ не является σ-алгеброй подмножеств в $\mathbb{N}$. Система $\mathcal{A}$ есть алгебра множеств, но $\mathcal{A}$ не является σ-алгеброй подмножеств в $\mathbb{N}$.

Определим функцию на алгебре множеств $\mathcal{A}$ следующим образом: $m(\emptyset) = 0$, $m(\mathbb{N}) = 1$, $m(A) = 0$, если A — конечное множество и $m(A) = 1$, если $(\mathbb{N} \setminus A)$ — конечное множество. Покажем, что m мера на алгебре множеств $\mathcal{A}$, но в то же время, не является счетно-аддитивной мерой. Действительно, $m(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Если $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset$, то возможны следующие случаи.

(a). A и B конечные множества. Тогда $A \cup B$ – конечное множество, и следовательно $m(A \cup B) = 0 = m(A) + m(B)$.

(b). A – конечно, $(\mathbb{N} \setminus B)$ — конечно. Тогда $A \cup B$ не является конечным множеством. Следовательно, $m(A \cup B) = 1 = 0 + 1 = m(A) + m(B)$.

(c). $(\mathbb{N} \setminus A)$ — конечно, B – конечно. Этот случай аналогичен случаю (b).

(d). Случай $(\mathbb{N} \backslash A)$ — конечно, $(\mathbb{N} \backslash B)$ — конечно, $A \cap B = \emptyset$ невозможен, так как $\mathbb{N} = \mathbb{N} \backslash (A \cap B) = (\mathbb{N} \backslash A) \cup (\mathbb{N} \backslash B)$ — конечное множество, что неверно.

Таким образом, во всех возможных случаях верно равенство $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Это означает, что, функция m есть мера на алгебре множеств $\mathcal{A}$. Рассмотрим теперь попарно непересекающиеся множества $A_n = \{n\}$ из алгебры множеств $\mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$, при этом, $m(A_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $m(\mathbb{N}) = 1$. Следовательно, $m(\mathbb{N}) = 1 \neq 0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ Это означает, что мера m не является счетно-аддитивной мерой.

Свойства счетно-аддитивных мер.

Если $m : \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$ — счетно-аддитивная мера, то

(1). Для любых $A, A_n \in \mathfrak{N}$, $n \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ верно неравенство $m(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

(2). Если $A_n \in \mathfrak{N}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ (соответственно, $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$) и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}$ (соответственно, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}$), то $m(A) = \lim\limits_{n \to \infty} m(A_n)$

2 Билет 2. Интеграл Лебега для измеримых функций. Связь интегралов Лебега и Римана.

Интеграл Лебега для измеримых функций.

Пусть X — произвольное непустое множество, $\mathfrak{M}$ — σ - алгебра подмножества из X, и $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ полная счетно-аддитивная мера. В этом случае, тройку $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ называют измеримым пространством с мерой.

Определение. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется **измеримой** на $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, если

$$\{f < c\} = \{x \in X : f(x) < c\} = f^{-1}((-\infty; c)) \in \mathfrak{M} \text{ для любого } c \in \mathbb{R}.$$

Через $\mathcal{L}_0(X, \mathfrak{M}, \mu) = \mathcal{L}_0(X)$ обозначим множество всех измеримых функций на $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Определение. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется **простой**, если она принимает не более чем счетное число попарно различных значений.

Определение. Простая измеримая функция $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n \chi_{A_n}$ называется интегрируемой по Лебегу на множестве X по мере μ, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n| \mu(A_n)$ сходится, т.е. сходится абсолютно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n)$. В этом случае, число $f = \int\limits_X f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n)$ называется **интегралом Лебега** от функции f на множестве X по мере μ.

Обозначим через $\mathcal{L}_{1s}(X)$ множество всех простых интегрируемых по Лебегу функций на множестве X

Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ произвольное измеримое пространство.

Определение. Измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется **интегрируемой по Лебегу** на множестве X по мере μ, если существует такая последовательность простых интегрируемых функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_{1,s}(X)$, что $f_n \rightrightarrows f$ на X. В этом случае, число $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$ называется **интегралом Лебега** от функции f на множестве X по мере μ.

Обозначим через $\mathcal{L}_1(X)$ множество всех интегрируемых по Лебегу функций на множестве X по мере μ.

Связь интегралов Лебега и Римана

Пусть $X = [a, b]$, $\mathfrak{M}$ — σ - алгебра измеримых по Лебегу подмножеств из X, и μ мера Лебега на $\mathfrak{M}$.

Теорема. Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f \in \mathcal{L}_1([a, b])$ и $\int\limits_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f(x)dx$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{P}_n = \{x_i\}_{i=0}^{2^n} \in \sigma[a, b]$ такое конечное разбиение отрезка $[a, b]$, что $d(\mathcal{P}_n) = \Delta x_i = \dfrac{b-a}{2^n}$ при всех $i = 1, ..., 2^n$. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим простые интегрируемые по Лебегу функции

$$\underline{f}_n(x) = \sum_{i=1}^{2^n} m_i^{(n)} \chi_{[x_{i-1}, x_i)}(x) \in \mathcal{L}_{1s}([a, b]), \quad \underline{f}_n(b) = m_{2^n}^{(n)}$$

$$\overline{f}_n(x) = \sum_{i=1}^{2^n} M_i^{(n)} \chi_{[x_{i-1}, x_i)}(x) \in \mathcal{L}_{1s}([a, b]), \quad \overline{f}_n(b) = M_{2^n}^{(n)},$$

где $m_i^{(n)} = \underset{x\in[x_{i-1},x_i]}{inf} f(x)$, $M_i^{(n)} = \underset{x\in[x_{i-1},x_i]}{sup} f(x)$, $i = 1, ..., 2^n$

Выполняется: $\underline{f}_n \leq \underline{f}_{n+1} \leq f \leq \overline{f}_{n+1} \leq \overline{f}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$\int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n d\mu = \sum\limits_{n=1}^{2^n} m_i^{(n)} \Delta x_i = L(\mathcal{P}_n, f)$ и $\int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n d\mu = \sum\limits_{n=1}^{2^n} M_i^{(n)} \Delta x_i = U(\mathcal{P}_n, f)$

Поскольку $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $d(\mathcal{P}_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n d\mu \to \int_a^b f(x)dx \leftarrow \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n d\mu$ (Функция $f \in \mathcal{L}[a,b]$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда $\lim\limits_{d(\mathcal{P})\to 0}(U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f)) = 0$, т.е. когда для любого положительного числа ε существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon$ для любого разбиение $\mathcal{P} \in \sigma[a,b]$ с диаметром $d(\mathcal{P}) < \delta$).

Согласно теореме Леви существуют такие интегрируемые функции $\underline{f} \in \mathcal{L}_1([a,b])$ и $\overline{f} \in \mathcal{L}_1([a,b])$, что $\underline{f}_n \uparrow \underline{f}$, $\overline{f}_n \downarrow \overline{f}$ почти всюду, при этом,

$$\int\limits_{[a,b]} \underline{f} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n d\mu = \int_a^b f(x)dx, \quad \int\limits_{[a,b]} \overline{f} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_n d\mu = \int_a^b f(x)dx.$$

С другой стороны, $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$ почти всюду и $\int\limits_X (\overline{f} - \underline{f}) d\mu = 0$, т.е. $f = \underline{f} = \overline{f}$ почти всюду (следствие к неравенству Чебышева).

Таким образом, $f \in \mathcal{L}_1([a,b])$ и $\int\limits_{[a,b]} f d\mu = \int\limits_{[a,b]} \overline{f} d\mu = \int_a^b f(x)dx$

3 Билет 3. Борелевские меры и их свойства. Заряды. Теорема Жордана.

Определение. Борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(X)$ в (X,ρ) называется наименьшая σ-алгебра подмножеств в метрическом пространстве (X,ρ), содержащая все открытые множества из (X,ρ), т.е. $\mathcal{B}(X)=\mathfrak{M}(\mathcal{U})$.

Поскольку в любом метрическом пространстве (X,ρ) множество $G\subset X$ открыто в том и только в том случае, когда множество $F=X\setminus F$ замкнуто, то борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(X)$ совпадает с наименьшей σ-алгеброй подмножеств в метрическом пространстве (X,ρ), содержащей все замкнутые множества из (X,ρ), т.е. $\mathcal{B}(X)=\mathfrak{M}(F)$.

Множество называется измеримым по Борелю, если оно лежит в этой алгебре, то есть получено счетными объединениями и пересечениями открытых и замкнутых множеств. **Борелевская мера** μ есть счетно-аддитивная мера на борелевской σ - алгебре.

Свойства борелевских мер

1. μ определена на всех борелевских множествах $E\subset\mathcal{B}$, неотрицательна, $\mu(E)\geq 0$
2. μ-субаддитивна, т.е. $\mu(\bigcup\limits_j E_j)\leq\sum\limits_j\mu(E_j)$
3. μ является σ-аддитивной: если $E=\bigcup\limits_j E_j$, $E_j\cap E_i=\emptyset$ при $j\neq i$, то $\mu(E)=\sum\limits_j\mu(E_j)$
4. μ непрерывна слева и справа, т.е.

если $E_j\subset E_{j+1}$, $j=1,2,...,$ то $\mu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j)=\lim\limits_{j\to\infty}\mu(E_j)$;

если $E_j\supset E_{j+1}$, $j=1,2,...,$ то $\mu(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}E_j)=\lim\limits_{j\to\infty}\mu(E_j)$

Пусть $(X,\mathfrak{M},\mu)$ — измеримое пространство с мерой, $f\in\mathcal{L}_1(X)$. Рассмотрим функцию множества $\Phi:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$, $\Phi(A)=\int\limits_A f\,d\mu$ для каждого $A\in\mathfrak{M}$.

Рассмотрим разложение функции $f=f_+-f_-$. Тогда

$f_+,f_-\in\mathcal{L}_1(X)$. Пусть $\Phi_+(A)=\int\limits_A f_+\,d\mu$, $\Phi_-(A)=\int\limits_A f_-\,d\mu$. Φ_+ и Φ_- – полные счетно-аддитивные меры на $\mathfrak{M}$. Кроме того, $\Phi(A)=\Phi_+(A)-\Phi_-(A)$ для всех $A\in\mathfrak{M}$.

Определение. Счетно-аддитивная функция $\Phi\colon\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ называется **зарядом**, если верно:

если $A_n\in\mathfrak{M}$, $\quad A_n\cap A_m=\emptyset$ при $n\neq m$, $n,m\in\mathbb{N}$, то $\Phi(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Phi(A_n)$ (доказательство утверждения непосредственно следует из свойства счетной аддитивности интеграла Лебега).

Множество $A\in\mathfrak{M}$ называется положительным (соответственно, отрицательным) для Φ, если $\Phi(A\cap B)\geq 0$ (соответственно, $\Phi(A\cap B)\leq 0$) для всех $B\in\mathfrak{M}$.

Теорема (Разложение Хана). Для любого заряда $\Phi:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ существует отрицательное множество A^- для Φ такое, что $A^+=X\setminus A$ – есть положительное множество для Φ.

Теорема (Разложение Жордана). $\Phi=\Phi_+-\Phi_-$, т.е. всякий заряд есть разность двух счетно-аддитивных мер.

Доказательство. Пусть $E\in\mathfrak{M}$ и $X=A^+\cup A^-$ – разложение Хана для заряда Φ. Тогда

$$\Phi(E)=\Phi(E\cap X)=\Phi(E\cap(A^+\cup A^-))=\Phi((E\cap A^+)\cup(E\cap A^-))=\Phi(E\cap A^+)+\Phi(E\cap A^-)=\Phi_+(E)-\Phi_-(E).$$

Следовательно, $\Phi=\Phi_+-\Phi_-$.

4 Билет 4. Положительно определенные обобщенные функции. Порядок сингулярности обобщенных функций.

Рассмотрим множество K всех вещественных функций $\varphi(x)$, каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, т. е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области (своей для каждой из функций $\varphi(x)$). Эти функции будем называть **основными**, а всю их совокупность K назовем **основным пространством**.

Будем говорить, что последовательность $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x), \ldots$ основных функций стремится к нулю в пространстве K, если все эти функции обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю (в обычном смысле) так же, как и их производные любого порядка.

Мы говорим, что нам задан линейный непрерывный функционал f на пространстве K, если указано правило, в силу которого с каждой основной функцией $\varphi()$ сопоставлено некоторое вещественное число $(f\varphi)$, и при этом выполнены следующие условия:
а) для любых двух вещественных чисел α_1 и α_2 и любых двух основных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ имеет место равенство

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2) \text{ (свойство линейности функционала } f)$$

б) если последовательность основных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ стремится к нулю в пространстве K, то последовательность чисел $(f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \ldots, (f, \varphi_\nu), \ldots$ сходится к нулю (свойство непрерывности функционала f).

Например, пусть задана некоторая функция $f(x)$, абсолютно интегрируемая в каждой конечной области пространства R_n (такие функции будем в дальнейшем **локально интегрируемыми**). С помощью этой функции мы можем каждой основной функции φ поставить в соответствие число

$$(f, \varphi) = \int\limits_{R_n} f(x)\varphi(x)\,dx \quad (1),$$

где интегрирование фактически совершается по ограниченной области, вне которой функция $\varphi(x)$ обращается в нуль.

Обобщенной функцией мы будем теперь называть каждый линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве K. Обобщенные функции, задаваемые формулами вида (1), будем называть регулярными, все остальные сингулярными.

Обобщенная функция F называется **положительной**, если для любой положительной основной функции $\varphi(x)$ выполняется неравенство $(F, \varphi) \geq 0$.

Теорема. Каждая обобщенная функция F, такая, что $(F, \varphi) \geq 0$ для всех бесконечно дифференцируемых финитных положительных функций $\varphi(x)$, имеет вид $(F, \varphi) = \displaystyle\int \varphi(x)\,d\mu(x)$, где μ – некоторая положительная мера (не обязательно конечная). Обратно, каждая положительная мера μ задает положительный линейный функционал в пространстве K.

Доказательство:

Лемма 1. Каждый положительный линейный функционал в пространстве K непрерывен на нем относительно топологии пространства C.

Пусть $\{\varphi_m(x)\}$ – последовательность функций из пространства K, сходящаяся к нулю в смысле топологии пространства C. Иными словами, пусть функции $\{\varphi_m(x)\}$ обращаются в нуль вне одного и того же шара $|x| \leq a$ и равномерно сходятся к нулю. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство

$-\varepsilon \leq \varphi_m(x) \leq \varepsilon$. Умножим все члены этого неравенства на положительную функцию $\alpha(x)$ из пространства K, равную единице при $|x| \leq a$. Так как $\varphi_m(x) = 0$ при $|x| \geq a$, то $\alpha(x) \cdot \varphi_m(x) = \varphi_m(x)$. Поэтому мы получаем неравенство:

$$-\varepsilon\alpha(x) \leq \varphi_m(x) \leq \varepsilon\alpha(x).$$

Применив к этому неравенству положительный линейный функционал F, мы получаем, что

$$-\varepsilon(F,\alpha) \leq (F,\varphi_m) \leq \varepsilon(F,\alpha)$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $\lim\limits_{m\to\infty}(F,\varphi_m) = 0$. Тем самым доказана непрерывность функционала F относительно топологии пространства C.

Лемма 2. Каждый положительный линейный функционал в пространстве C задается формулой вида

$$(F,\varphi) = \int \varphi(x)\,d\mu(x),$$

где μ - некоторая положительная мера (вообще говоря, не являющаяся конечной).

Функционал F определен на всех непрерывных финитных функциях. Тем самым он определен также на каждом пространстве $C(a)$, состоящем из таких непрерывных функций $\varphi(x)$, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq a$. По теореме Рисса, в каждом из пространства $C(a)$ функционал F имеет вид $(F,\varphi) = \displaystyle\int \varphi(x)\,d\mu_a(x)$, где μ_a – положительная мера, заданная в шаре $|x| \leq a$. Поскольку меры μ_a однозначно определяются значениями функционала F, то при $a < b$ меры μ_a и μ_b совпадают в шаре $|x| \leq a$. Поэтому существует такая мера μ, что в каждом шаре $|x| \leq a$ она совпадает с мерой μ_a. Но тогда для любой функции из пространства имеет место формула

$$(F,\varphi) = \int \varphi(x)\,d\mu(x)$$

Из лемм 1 и 2 непосредственно вытекает, что каждый положительный линейный функционал в пространстве задается положительной мерой μ. Тем самым первая часть теоремы 1 доказана. Обратное утверждение (вторая часть теоремы 1) — каждая положительная мера μ задает положительный линейный функционал

$$(F,\varphi) = \int \varphi(x)\,d\mu(x)$$

на пространстве K — очевидно.

Обобщенная функция f имеет в области G порядок сингулярности $\leq p$, если f допускает в этой области G представление

$$f = \sum_{|k|\leq p} D^k f_k(x)\ (1),$$

где $f_k(x)$ – обычные функции. Если при этом представление в форме

$$f = \sum_{|k|\leq p-1} D^k g_k(x)$$

с обычными функциями $g_k(x)$ невозможно, мы говорим, что обобщенная функция f имеет порядок сингулярности в области G ровно p. Каждая обобщенная функция f в ограниченной области G имеет конечный порядок сингулярности, а финитная обобщенная функция имеет конечный порядок сингулярности и во всем пространстве R_n.

Обобщенная функция f имеет в G порядок сингулярности равный $-\infty$, если ее производные в (K') любого порядка внутри области G суть обычные функции.

5 Билет 5. Интегральная формула Фурье.

Рассмотрим функции, определенные на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и принимающие комплексные значения, т.е. функции вида

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \;\; -\infty < x < +\infty,$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — действительные функции действительной переменной. Во многих приложениях $f_2(x) \equiv 0$. Введем следующее интегральное преобразование функции f, определенной на всей числовой прямой:

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx \;\; (1)$$

Функция $\hat{f}$ называется *преобразованием Фурье* функции f. Достаточно гладкие функции представимы своим интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \;\; (2)$$

Если несобственный интеграл первого рода в правой части этого равенства сходится, то говорят, что функция f может быть разложена в интеграл Фурье. Интеграл (2) называют также обратным преобразованием Фурье.

В общем случае указанный несобственный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, т.е. как предел

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

Заменив под интегралом в правой части преобразованием Фурье $\hat{f}$ его значением (1) и переставив порядок интегрирования, получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{ix\xi}d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)dy\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(x-y)\xi}d\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{\sin\lambda(y-x)}{y-x}dy$$

Далее, перейдя к новой переменной $t = y - x$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt \;\; (3)$$

Интегральный синус

$$Si\lambda t = \int\limits_{0}^{t} \frac{\sin\lambda u}{u}du$$

Справедлива следующая оценка для $C > 0$ (доказывается интегрированием по частям)

$$\left|Si(\lambda t) - \frac{\pi}{2}sign\, t\right| < \frac{C}{1+\lambda|t|}, \;\; \lambda > 0, t \in \mathbb{R} \;\; (4)$$

Теорема. Пусть функция f абсолютно интегрируема и имеет абсолютно интегрируемую на $\mathbb{R}$ производную. Тогда ее разложение в интеграл Фурье сходится равномерно на каждом отрезке числовой прямой.

Доказательство. Заметим, что для функции f, удовлетворяющей условиям теоремы, справедливо равенство $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Действительно, из равенства $f(x) = f(0) + \int\limits_{0}^{x} f^{'}(t)dt$ и интегрируемости производной $f^{'}$

следует существование предела функции f на бесконечности, а из интегрируемости самой функции f следует, что этот предел равен нулю.

Преобразуем правую часть равенства (3) интегрированием по частям следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{d}{dt}Si(\lambda t)dt = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{'}(x+t)Si(\lambda t)dt \quad (5)$$

Далее применим оценку (4):

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{'}(x+t)\Big[Si(\lambda t)-\frac{\pi}{2}sign\,t\Big]dt\Big|\leq C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|f^{'}(x+t)|}{1+\lambda|t|}dt$$

Интеграл в правой части при $\lambda\to+\infty$ стремится к нулю. Доказывается это разбиением области интегрирования на отрезок $|t|\leq 1/\sqrt{\lambda}$ и два луча $|t|\geq 1/\sqrt{\lambda}$.

Интеграл по отрезку равномерно по $x\in\mathbb{R}$ стремится к нулю ввиду его малости

$$\int\limits_{|t|\leq 1/\sqrt{\lambda}}\frac{|f^{'}(x+t)|}{1+\lambda|t|}dt\leq\int\limits_{|t|\leq 1/\sqrt{\lambda}}|f^{'}(x+t)|dt\to 0,\ \ ,\lambda\to\infty$$

Интеграл по лучам также стремится к нулю равномерно по $x\in\mathbb{R}$:

$$\int\limits_{|t|\geq 1/\sqrt{\lambda}}\frac{|f^{'}(x+t)|}{1+\lambda|t|}dt\leq\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\mathbb{R}}|f^{'}(t)|dt\to 0,\ \ ,\lambda\to\infty$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{'}(x+t)\,Si\,(\lambda t)dt=\frac{\pi}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{'}(x+t)\,sign\,t\,dt=\frac{\pi}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} f^{'}(x+t)dt-\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\infty} f^{'}(x+t)dt=\frac{\pi}{2}f(x)+\frac{\pi}{2}f(x)=\pi f(x)$$

Из полученного выше соотношения и соотношения (3) получаем *интегральную теорему Фурье*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=f(x)$$

Приведенное доказательство опиралось на предположение, что разлагаемая функция имеет абсолютно интегрируемую производную. Обратим внимание на то, что преобразование Фурье определенно только для тех функций, для которых интеграл (1) сходится при любых значениях $\xi\in\mathbb{R}$. Обычно для выполнения этого условия требуют, чтобы функция f была абсолютно интегрируема на всей числовой прямой.

6 Билет 6. Теорема Котельникова.

Теорема представимости целых функций конечной степени с помощью формулы Лагранжа и о единственности этого представления.

Пусть $f(z)$ — целая функция конечной степени $\beta < \alpha$ (т. е. $f(z)$ ограничена на вещественной оси). Тогда имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k\frac{\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin\alpha\left(z - \dfrac{k\pi}{\alpha}\right)}{\alpha\left(z - \dfrac{k\pi}{\alpha}\right)}$$

причем ряд в правой части сходится равномерно в каждой ограниченной области.

Теорема (Винера-Пэли-Шварца). Для того чтобы функция $f(x)$, интегрируемая в квадрате на всей оси, была представима в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)\, d\omega,$$

где $\hat{f}(\omega)$ принадлежит пространству $L_2(-\alpha, \alpha)$, т.е. для того, чтобы $f(x)$ была функцией с финитным и интегрируемым в квадрате спектром, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ могла быть доопределена в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ как целая функция конечной степени $\leq \alpha$.

Пусть $\hat{f}(\omega)$ принадлежит $L_2(-\alpha, \alpha)$ и α конечно. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega \quad (*)$

1. $f(x)$ принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$ – следствие равенства Парсеваля.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega = k < \infty$$

2. Покажем, что $f(x)$ допускает аналитическое продолжение (на всю комплексную плоскость) до целой функции конечной степени, не превосходящей α. Заменим в (*) x на $z = x + iy$. Получим $f() = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$,

Данный интеграл представляет собой аналитическую функцию, поскольку $f^{'}(z)$ существует при любом z. В силу неравенства Коши — Буняковского имеем (c_1 и c_2 — соответственно подобранные постоянные)

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \cdot e^{-\omega y}\, d\omega \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^{-2\omega y}\, d\omega} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{e^{2\alpha y} - e^{-2\alpha y}}{y}} \leq c_1 e^{\alpha|y|} \leq c_2 e^{\alpha|z|}$$

Таким образом, функция $f(z)$, имеющая вид $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$, есть функция конечной степени, не превосходящей α.

Предположим, что передаваемое сообщение представляется в виде непрерывной функции времени $f(t)$ с финитным спектром, сосредоточенным в полосе частот $(-\beta, \beta)$. Предположим дополнительно, что функция $f(t)$ ограничена при $-\infty < t < +\infty$.

Тогда согласно теореме Винера-Пэли-Шварца функция $f(t)$ может быть доопределена в плоскости комплексного переменного $z = t + iu$ как целая функция конечной степени, не превосходящей β.

Следовательно, при $\alpha > \beta$ для функции $f(t)$ имеет место представление:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k\frac{\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin \alpha \left(t - \dfrac{k\pi}{\alpha}\right)}{\alpha \left(t - \dfrac{k\pi}{\alpha}\right)} \quad (3.1.2)$$

причем ряд в правой части сходится равномерно в каждом конечном интервале. Формула (3.1.2) при $\alpha = \pi$, когда спектр $\hat{f}$ финитен в интервале $(-\pi, \pi)$; принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

В то же время с помощью линейного преобразования времени (или частоты) можно любой интервал $(-\alpha, \alpha)$ перевести в интервал $(-\pi, \pi)$. Поэтому формулу (3.1.2) можно записать в виде

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)} = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \pi t}{t-k} \quad (3.1.3)$$

В формуле (3.1.2) величина α имеет размерность *рад/сек.* Если перейти к частотам, измеряемым в герцах, положив $\alpha = 2\pi F$, так что интервал между отсчетами, т.е. точками, где берутся значения функции $f(t)$, будет равен

$$\Delta = \frac{1}{2F} \quad (3.1.4),$$

то формула (3.1.2) примет вид

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \frac{\sin \dfrac{\pi}{\Delta}(t - k\Delta)}{\dfrac{\pi}{\Delta}(t - k\Delta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta)}{2\pi F(t - k\Delta)} \quad (3.1.5)$$

Формула (3.1.5) показывает, что для восстановления на приемном конце канала связи сообщения, описываемого функцией $f(t)$ с финитным спектром, нет необходимости передавать все значения функции $f(t)$, определенной на всей оси $-\infty < t < +\infty$, а достаточно передавать лишь значения этой функции $f(k\Delta)$, называемые отсчетами, через равные интервалы $\Delta = \dfrac{1}{2F} = \dfrac{\pi}{\alpha}$

7 Билет 7. Схемы из функциональных элементов. Метод Лупанова синтеза СФЭ.

Рекомендация. Достаточно подробно метод Лупанова описан в книге Редькина Н.П. Дискретная математика

Имеется конечное множество F объектов F_i $(i = 1, \dots, r)$, называемых *элементами*. Каждый элемент F_i имеет n_i входов и один выход.

Схемой из функциональных элементов с n входами и p выходами называется ориентированный граф без циклов, образованный с помощью элементов из множества F путем применения операций объединения, присоединения и расщепления. Входам и выходам этого объекта приписаны различные буквы x_{i_1},..., x_{i_n} и z_{j_1},..., z_{j_p} соответственно из алфавитов X и Z. Полученную таким образом схему будем обозначать через $\Sigma(x_{i_1}, ..., x_{i_n}; z_{j_1}, ..., z_{j_p})$

Пусть $\Sigma(x_{i_1}, ..., x_{i_n}; z_{j_1}, ..., z_{j_p})$ — схема из функциональных элементов. Сопоставим ей систему уравнений (функций) алгебры логики

$$z_1 = f_1(x_1, ..., x_n)$$

$$...$$

$$z_p = f_p(x_1, ..., x_n)$$

называемую также проводимостью данной схемы. Для этого каждому элементу F_i из множества F ставится в соответствие логический оператор $f_i^0(..., ..., ...)$, имеющий n_i мест и задаваемый булевой функцией $f_i^0(y_1, ..., y_{n_i})$.

Число $L(\Sigma)$ будем называть *сложностью схемы*. В дальнейшем схемы будем называть минимальными, если они состоят из минимального количества элементов.

Соединением S данных входов, выходов и элементов называется геометрическая фигура, состоящая из этих объектов и обладающая следующими свойствами:

1) каждый вход элементов подключен либо ко входу, либо к выходу элемента;

2) каждый выход подключен либо ко входу, либо к выходу элемента

Лемма. Число $S^*(n, p, h)$ соединений с данными входами x_{i_1},..., x_{i_n}, данными выходами z_{j_1},..., z_{j_p} и содержащих h Ф. Э., занумерованных числами от 1 до h, не превосходит

$$r^h(n+h)^{hv+p}, \text{ где } v = \max_{1 \le i \le r} n_i$$

Доказательство. Каждый из h занумерованных элементов можно выбрать r способами, а каждый из его входов можно подключить либо к одному из входов x_{i_1},..., x_{i_n} либо к выходу одного из h элементов, т. е. вход элемента может быть подключен n + h способами. Всего для элемента имеется не более $r(n+h)^v$ возможностей. Очевидно, что каждый из выходов z_{j_1},..., z_{j_p} может быть подключен n + h способами. Поэтому

$$S^*(n, p, h) \le r^h(n+h)^{hv+p}$$

Теорема 1. Число $S_0(n, p.h)$ минимальных схем из функциональных элементов с данными входами $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$, данными выходами $z_{j_1}, ..., z_{j_p}$ и содержащих h функциональных элементов, удовлетворяет неравенству

$$S_0(n, p, h) \le \frac{1}{h!} r^h (n+h)^{h\nu+p} \quad (\nu = \max_{1 \le i \le r} n_i)$$

Доказательство. В минимальной схеме на выходах разных элементов получаются разные функции от переменных $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$ (иначе один из таких элементов можно было бы удалить из схемы, и изменив некоторые соединения в ней, сохранить ее функционирование).Благодаря этому все $h!$ соединений с занумерованными элементами, которые порождает каждая минимальная схема, различны.

Теорема 2. $L(n) \gtrsim \dfrac{2^n}{n}$

Доказательство. В рассматриваемом базисе $(\nu = 2, r = 3)$ $S_0(n,1,h) \leq \dfrac{1}{h!}3^h(n+h)^{2h+1}$. Обозначим число минимальных схем из функциональных элементов с данными входами $x_1, ..., x_n$, данными выходами $z_1, .., z_p$, содержащих не более h элементов, через $S(n,p,h)$. Тогда $S(n,p,h) = \sum\limits_{i=0}^{h} S_0(n,p,i)$.

Оценим сверху $S(n,1,h)$.

$$S(n,1,h) = \sum_{i=0}^{h} S_0(n,1,i) \leq \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{i!}3^i(n+i)^{2i+1} \leq (h+1)\frac{1}{h!}3^h(n+h)^{2h+1} \leq \frac{1}{h!}3^h(n+h)^{2h+2}$$

Если $h > n$, то

$$S(n,1,h) < \frac{3^h(2h)^{2h+2}}{(h/e)^h} = 4h^2(12e)^h h^h < (ch)^h$$

Положим $h = [\dfrac{2^n}{n}]$ (при этом условие $h > n$ выполняется, начиная с $n = 5$) и оценим сверху число минимальных схем из функциональных элементов сложности не более h при $(n \geq 5)$.

$$S(n,1,h) \leq \left(c\frac{2^n}{n}\right)^{2^n/n}$$

и значит минимальными схемами сложности не более h может быть реализовано не более $\left(c\dfrac{2^n}{n}\right)^{2^n/n}$ будевых функций от n переменных.

$$\log_2 \frac{\left(c\frac{2^n}{n}\right)^{2^n/n}}{2^{2^n}} = \frac{2^n}{n}(\log_2 c + n - \log_2 n) - 2^n = \frac{2^n}{n}(\log_2 c + \log_2 n) \to -\infty \text{ при } (n \to \infty)$$

Следовательно, при достаточно большом n числитель будет меньше знаменателя. Значит, минимальных схем сложности не более h не хватает для реализации всех булевых функций от n переменных, и поэтому существуют функции от n переменных, которые не могут быть реализованы со сложность меньшей или равной $h = [2^n/n]$, т.е. при достаточно больших n

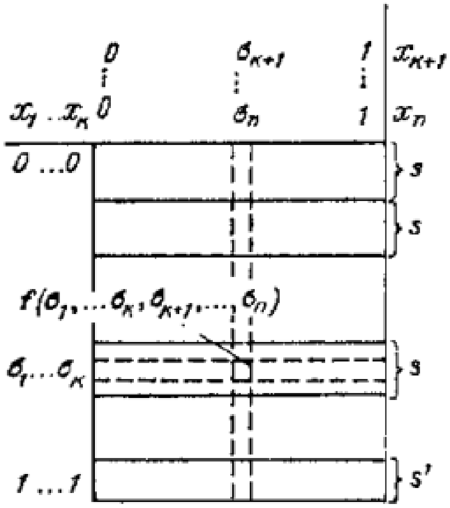
$$L(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$$

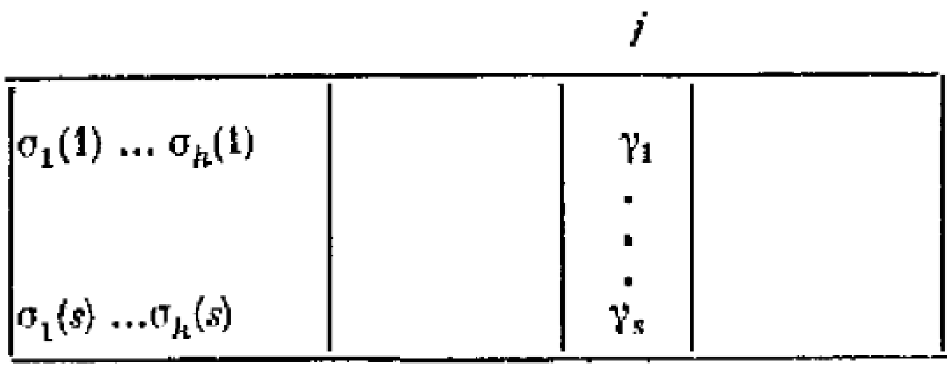
Теорема (О.Б. Лупанов). Для схем из функциональных элементов в базисе, состоящем из инвертора, дизъюнктора и конъюнктора, можно построить асимптотически наилучший метод синтеза и $L(n) \sim \dfrac{2^n}{n}$

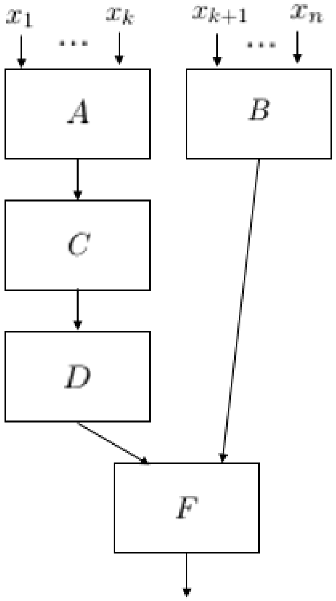
Доказательство. Зададим произвольную булеву функцию $f(x_1, ..., x_n)$ при помощи таблицы размера $2^k \times 2^{n-k}$. Строки этой таблицы нумеруем наборами значений по переменным $x_1, ..., x_k$, столбцы – по переменным $x_{k+1}, ..., x_n$. На пересечении строки $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ и столбца $(\sigma_{k+1}, ..., \sigma_n)$ помещаем значений $f(\sigma_1, ..., \sigma_k, \sigma_{k+1}, ..., \sigma_n)$. Столбец с номером $(\sigma_{k+1}, ..., \sigma_n)$ задает функцию $f(x_1, ..., x_k, \sigma_{k+1}, ..., \sigma_n)$, являющуюся компонентой разложения

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_{k+1}, ..., \sigma_n)} x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} ... x_n^{\sigma_n} f(x_1, ..., x_k, \sigma_{k+1}, ..., \sigma_n) \quad (1)$$

Возьмем целое число s, $1 < s < 2^k$ и разрежем таблицу на полосы шириной s. При этом последняя полоса может оказаться меньшей ширины $s^{'}$ $(s^{'} \leq s)$. Занумеруем сверху вниз полученные полосы числами $1, 2, ..., p$, где $p =]\dfrac{2^k}{s}[$, и рассмотрим полосу с номером i и строками $(\sigma_1(1)...\sigma_k(1)), ..., (\sigma_1(s)...\sigma_k(s))$. Эта полоса распадается на короткие столбцы высоты s, для последней полосы – высоты $s^{'}$. Поэтому число $t(i)$ сортов коротких столбцов будет не более чем 2^s. Произведем нумерацию этих сортов числами $1, 2, .., t(i)$.







Пусть $(\gamma_1, ..., \gamma_s)$ – столбец j–го сорта. Обозначим через$f_{ij}(x_1, ..., x_k)$ булеву функцию, определяемую этим коротким столбцом.

$$f_{ij}(x_1, ..., x_k) = \begin{cases} \gamma_l, \text{ если } (\sigma_1 ... \sigma_k) = (\sigma_1(l) ... \sigma_k(l)),\ l = 1, ..., s \\ 0, \text{ если } (\sigma_1 ... \sigma_k) \text{ не принадлежит } i\text{-й полосе.} \end{cases}$$

Столбец с номером $(\sigma_{k+1}, ..., \sigma_n)$ разрезается полосами на p коротких столбцов. Поэтому

$$f(x_1, ..., x_k, \sigma_{k+1}, ..., \sigma_n) = f_{1j_1}(x_1, ..., x_k) \vee ... \vee f_{pj_p}(x_1, ..., x_k) \ \ (2),$$

где j_i – номер сорта соответствующего короткого столбца, принадлежащего i–й полосе. Схема Σ объединение отдельных блоков.

1. Блок A реализует все конъюнкции $x_1^{\sigma_1} ... x_k^{\sigma_k}$ $L(A) \leq k2^k$
2. Блок B реализует все конъюнкции $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} ... x_n^{\sigma_n}$ $L(B) \leq (n-k)2^{n-k}$
3. Блок C реализует по совершенной д.н.ф. функции $f_{ij} = (x_1, ..., x_k)$ $L(C) \leq (s-1)(t(1) + ... + t(p)) < sp2^s$
4. Блок D реализует функции $f(x_1, ..., x_k, \sigma_{k+1}, ..., \sigma_n)$ $L(D) \leq (p-1)2^{n-k} \leq p2^{n-k}$
5. Блок F реализует функцию $f(x_1, ..., x_n)$ исходя из ее разложения (1). $L(F) \leq 2^{n-k} + 2^{n-k} - 1 \leq 2 \cdot 2^{n-k}$

Суммируя полученные оценки имеем $L(\Sigma) \leq k2^k + (n-k)2^{n-k} + sp2^s + p2^{n-k} + 2^{n-k}$. Положим $k = [3\log_2 n]$, $s = [n - 5\log_2 n]$. Тогда $p =]\frac{2^k}{s}[\sim \frac{2^k}{s}$ и

$$L(\Sigma) \lesssim k2^k + n2^{n-k} + 2^{k+s} + \frac{2^n}{s}$$

В силу произвольности функции $f(x_1, ..., x_n)$ отсюда следует, что

$$L(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$$

8 Билет 8. Контактные схемы. Метод Шеннона синтеза КС.

Рассмотрим сеть S и конечный алфавит $X = \{x_1, ..., x_n, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\}$. Сеть, каждому ребру которой приписана одна и только одна буква алфавита X, называется *контактной схемой* (разным ребрам могут соответствовать одинаковые буквы). Ребро вместе с приписанной ему буквой x^σ $(\sigma = 0, 1)$ называется контактом, именно замыкающим контактом, если $\sigma = 1$ и размыкающим контактом, если $\sigma = 0$

Каждой паре полюсов (a, b) сопоставим функцию f_{ab} проводимость между полюсами a и b следующим образом:

1. если $a = b$, то $f_{ab}(x_1, ..., x_n) = 1$
2. если $a \neq b$ и не существует в схеме цепей между a и b, то $f_{ab}(x_1, ..., x_n) = 0$
3. если $a \neq b$ и множество цепей между a и b не пусто, то, сопоставив каждой цепи $(a, a_{i_1}), (a_{i_1}, a_{i_2}), ..., (a_{i_m}, b)$ конъюнкцию $x_{r_1}^{\sigma_1} x_{r_2}^{\sigma_2} ... x_{r_{m+1}}^{\sigma_{m+1}}$ (проводимость цепи), где $x_{r_t}^{\sigma_t}$ – буква, приписанная ребру $(a_{i_{t-1}}, a_{i_t})$ (здесь $a_{i_0} = a, a_{i_{m+1}} = b$), положим

$$f_{ab}(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{\text{по всем цепям}} x_{r_1}^{\sigma_1} x_{r_2}^{\sigma_2} ... x_{r_{m+1}}^{\sigma_{m+1}}$$

Будем говорить также, что схема реализует сопоставленные ей функции. Любая функция алгебры логики $f(x_1, ..., x_n)$ может быть реализована контактной схемой. Для этого достаточно, например, соединить параллельно цепи $x_1^{\sigma_1} ... x_n^{\sigma_n}$, соответствующие членам совершенной д.н.ф. (для функции, тождественно равной 0, можно взять схему, состоящую из двух изолированных полюсов). Такая схема содержит не более $n2^n$ контактов. Сложность контактной схемы S определим как число ее контактов, обозначим эту величину через $L(S)$.

Пусть $L_k(S)$ – число контактов в схеме S, $L_k(f)$ (соответственно $L_k(n)$) – минимальное число контактов, достаточное для реализации функции f (соответственно любой функции алгебры логики от n аргументов).

Метод Шеннона. Разложим функцию $f(x_1, ..., x_n)$ по $(n - k)$ переменным

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, ..., \sigma_{n-k})} x_1^{\sigma_1} ... x_{n-k}^{\sigma_{n-k}} f(\sigma_1, ..., \sigma_{n-k}, x_{n-k+1}, ..., x_n)$$

Схема S для функции f образуется из контактного дерева, реализующего все конъюнкции $x_1^{\sigma_1} ... x_{n-k}^{\sigma_{n-k}}$ (это $(1, 2^{n-k})$ – полюсник) и универсального многополюсника U_k, реализующего все 2^{2^k} функций от аргументов $x_{n-k+1}, ..., x_n$ (это $2^{2^k}, 1)$ – полюсник).

Выход дерева, на котором реализуется конъюнкция $x_1^{\sigma_1} ... x_{n-k}^{\sigma_{n-k}}$, присоединяется к тому входу универсального мноpolюсника, на котором реализуется функция $f(\sigma_1, ..., \sigma_{n-k}, x_{n-k+1}, ..., x_n)$. В силу леммы Шеннона полученная схема реализует функцию $f(x_1, ..x_n)$.

$$L(S) \leq 2 \cdot 2^{n-k} + 2 \cdot 2^{2^k}$$

$$L_k(n) \lesssim \frac{2^{n+2}}{n} \text{ при } k = [\log(n - 2\log n)]$$

Лемма Шеннона. Контактная схема называется $(1, k)$ – полюсником, если в ней некоторый полюс считается входным, а остальные k полюсов – выходными (при этом полюс может быть входом и выходом схемы одновременно).

$(1, k)$ – полюсник называется *разделительным*, если проводимость между любыми двумя его выходами тождественно равна 0. Функции, реализуемые разделительным $(1, k)$ – полюсником попарно ортогональны (т.е. конъюнкция любых двух из них тождественно равна 0).

Лемма. Пусть A – разделительный $(1, k)$ – полюсник. B – произвольный $(l, 1)$ – полюсник. Пусть далее f_i – проводимость между входом a и i – м выходом схемы A и g_j – проводимость между j – м входом и выходом b схемы B. Пусть, наконец, i – выход схемы A $(1 \leq i \leq k)$ присоединен к $j(i)$ – му входу схемы B (при этом разные выходы схемы A могут присоединяться к одному и тому же входу схемы B. Тогда полученная схема S реализует между входом a и выходом b функцию $\bigvee\limits_{i=1}^{k} f_i \,\&\, g_{j(i)}$.

Контактное дерево. Обозначим через $L_k(Q_n)$ минимальное число контактов, достаточное для построения контактного $(1, 2^n)$ – полюсника, реализующего (между входом и выходами) $Q_n(x_1, ..., x_n)$ — систему всех конъюнкций вида $x_1^{\sigma_1}...x_n^{\sigma_n}$. Система конъюнкций $Q_n(x_1, ..., x_n)$ может быть реализована $(1, 2^n)$ – полюсником, называемым контактным деревом. Контактное дерево содержит $2 \cdot 2^n - 2$ контактов. Таким образом,

$$L_k(Q_n) \leq 2 \cdot 2^n - 2$$

. Если в контактном дереве объединить выходы, соответствующие конъюнкциям из совершенной д.н.ф. произвольной функции $f(x_1, ..., x_n)$, то проводимость получившейся схемы между входом и новым выходом будет равна $f(x_1, ..., x_n)$. Такой метод синтеза дает оценку

$$L_k(Q_n) \leq 2 \cdot 2^n$$

Контактное дерево является разделительным $(1, 2^n)$ – полюсником.

Универсальный многополюсник $(2^{2^n}, 1)$ – полюсник будем называть универсальным, если он реализует (между входами и выходом) все 2^{2^n} функций $f(x_1, ..., x_n)$.

Теорема. Существует универсальный $(2^{2^n}, 1)$ – полюсник U_n с числом контактов, не превосходящим $2 \cdot 2^{2^n}$

$$L(U_n) \leq 2 \cdot 2^{2^n}$$

,

9 Билет 9. Оценки функций Шеннона длины проверяющего теста при инверсиях входов схем.

Рассматривается множество P_2^n функций алгебры логики от n переменных. Пусть $\oplus$ – сложение по $\bmod 2$ и $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\sigma} = \tilde{\gamma}$, где $\gamma_i = \alpha_i + \sigma_i$, $i = 1, ..., n$. Положим

$$In = \{\varphi_{\tilde{\sigma}} : \tilde{\sigma} \in E_2^n (\varphi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\sigma})\}$$

Введеи операции суммы и умножения на число на множестве In следующим образом:
$\varphi_{\tilde{\sigma}_1} + \varphi_{\tilde{\sigma}_2} = \varphi_{\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2}$ и $\alpha \cdot \varphi_{\tilde{\sigma}} = \varphi_{\alpha \cdot \tilde{\sigma}}$, где $\alpha \in E_2$, а $\alpha \cdot \tilde{\sigma} = \alpha \cdot (\sigma_1, ..., \sigma_n) = (\alpha\sigma_1, ..., \alpha\sigma_n)$.

Множество In с операциями $\{+, \cdot\}$ образует линейное пространство над полем вычетов по модулю 2.

Обозначим через $\tilde{0}$ такой набор из E_2^n, каждая координата которого равна 0. По определению положим $F_{in}^2 = In \setminus \{\varphi_{\tilde{0}}\}$ и назовем его классом линейных неисправностей.

Теорема. Пусть $L(n, F_{in}^2)$ – функция Шеннона тестовой сложности для класса функций, зависящих от n переменных, относительно инверсных неисправностей F_{in}^2. Для любого $n \geq 1$ имеет место

$$2 \cdot \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1 \leq L(n, F_{in}^2) \leq n$$

Введем вес набора σ – число единиц в наборе σ – $||\sigma||$
$\mathbb{S}_k^n = \{\sigma \in E_2^n : ||\sigma|| = k\}$ – это множество называется k – м слоем n – мерного булева куба.
$F_{in}^2(p) = \{\varphi_\sigma : \sigma \in \mathbb{S}_k^n\}$ – класс инверсных неисправностей, имеющих кратность не более, чем p.

Верхняя оценка

Пусть $f \in P_2^n$, $\tilde{\alpha} \in E_2^n, A \subseteq E_2^n$ и $\nu \in E_2$, положим $\Phi(f, \tilde{\alpha}) = \{\varphi \in In : f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha}))\}$;

$$\Phi(f, A) = \bigcap_{\tilde{\alpha} \in A} \Phi(f, \tilde{\alpha})$$

$$\mathcal{U}(f, \tilde{\alpha}) = \{\tilde{\beta} \in E_2^n : \exists \varphi \in \Phi(f, \tilde{\alpha})(\tilde{\beta} = \varphi(\tilde{\alpha}))\}$$

$$\mathcal{U}(f, \tilde{\alpha})|_A = \{\tilde{\beta} \in E_2^n : \exists \varphi \in \Phi(f, A)(\tilde{\beta} = \varphi(\tilde{\alpha}))\}$$

$$N_\nu(f) = \{\tilde{\alpha} \in E_2^n : f(\tilde{\alpha}) = \nu\}$$

$$N_\nu(f, A) = \{\tilde{\alpha} \in A : f(\tilde{\alpha}) = \nu\}$$

Лемма 1. Для любых функций $f \in P_2^n$ и подмножества $A \subseteq E_2^n$, если $\Phi(f, A) \setminus \Phi(f, E_2^n) \neq \emptyset$, то существует такое подмножество $B \subseteq E_2^n$, что $|B| = |A| + 1$ и $|\Phi(f, B)| \leq \frac{1}{2}|\Phi(f, A)|$.

Предложение 1. Для любого $n \geq 1$ имеет место $L(n, F_{in}^2) \leq n$

Доказательство. Докажем, что для любой функции $f \in P_2^n$ найдется тест $T \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2)$ такой, что $|T| \leq n$. Опишем алгоритм построения такого теста функции f.

Базис индукции. Пусть $|N_\nu(f)| \leq |N_{\bar{\nu}}(f)|$. Если $N_\nu(f) = \emptyset$, то для любого теста $T \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2)$ имеет место $T = \emptyset$. Если же $N_\nu \neq \emptyset$, то выберем любой набор из $N_\nu(f)$, обозначим его через $\tilde{\alpha}_1$. Положим $A_1 = \{\tilde{\alpha}_1\}$. Очевидно, что $|\Phi(f, A_1)| \leq 2^{n-1}$.

Индуктивный переход. Предположим, что для множества A_{m-1} имеет место

$$|\Phi(f, A_{m-1})| \leq 2^{n-(m-1)}$$

. Из леммы 1 следует, что если $\Phi(f, A_{m-1}) \setminus \Phi(f, E_2^n \neq \emptyset$, то существует множество A_m такое, что $|A_m| = m$ и $|\Phi(f, A_m)| \leq \frac{1}{2}|\Phi(f, A_{m-1})| \leq 2^{n-m}$. В случае, если для множества A_{m-1} выполнено $\Phi(f, A_{m-1}) \setminus \Phi(f, E_2^n) = \emptyset$, то работа алгоритма завершается положением $T = A_{m-1}$.

Алгоритм выдает множество T со свойствами $T \in \mathcal{M}(f, F_{in}^2)$ и $|T| \leq n$. Для любой функции $f \in P_2^n$ показали, что имеет место $L(f, F_{in}^2) \leq n$. Следовательно, $L(n, F_{in}^2) \leq n$.

Нижняя оценка

Пусть $n = 2m + 1$. Рассмотрим функцию

$$f_{in}^n(x_1, ..., x_n) = x_{2m+1} \oplus \sum_{i=1}^{m} x_i \& x_{m+i}$$

Предложение 2. Для любого нечетного n имеет место $L(f_{in}^n, F_{in}^2) \geq n$

Доказательство. Разобьем доказательство на две части.
1) Покажем, что для любой неисправности $\varphi \in F_{in}^2$ существует набор $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ такой, что $f_{in}^n(\tilde{\alpha}) \neq f_{in}^n(\varphi(\tilde{\alpha}))$.
Пусть $\varphi = \varphi_{\tilde{\sigma}}$, где $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, ...\sigma_n)$ и $\tilde{\sigma} \neq \tilde{0}$,

$$f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}}(x_1, ..., x_n)) = f_{in}^n(x_1 \oplus \sigma_1, ..., x_n \oplus \sigma_n) = x_{2m+1} \oplus \sigma_{2m+1} \oplus \sum_{i=1}^{m}(x_i + \sigma_i)(x_{m+i} + \sigma_{m+i}) =$$

$$= f_{in}^n(x_1, ..., x_n) \oplus \sum_{i=1}^{m}(\sigma_{m+i}x_i \oplus \sigma_i x_{m+i}) \oplus f_{in}^n(\sigma_1, ..., \sigma_n).$$

Возможны два случая.
а) $f_{in}^n(\tilde{\alpha}) = 1$. Тогда для набора $\tilde{0}$ имеет место $f_{in}^n(\tilde{0}) \neq f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{0}))$.
б) $f_{in}^n(\tilde{\alpha}) = 0$. Пусть $\sigma_r \neq 0$, где $r \leq 2m$. Если $r \leq m$, то получаем $f_{in}^n(\tilde{e}_{m+r}) \neq f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{e}_{m+r}))$. Если $r > m$, то $f_{in}^n(\tilde{e}_{r-m}) \neq f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{e}_{r-m}))$. В случае, когда для любого $r \leq 2m$ имеем $\sigma_r = 0$, из условия $f_{in}^n(\tilde{\sigma}) = 0$ следует $\tilde{\sigma} = \tilde{0}$, что исключается.

2) Покажем, что для любого множества $A \subseteq E_2^n$, такого, что $|A| = n - 1$. существует неисправность $\varphi \in F_{in}^2$, для которой имеет место $f_{in}^n(\tilde{\alpha}) = f_{in}^n(\varphi(\tilde{\alpha}))$ для любого $\tilde{\alpha} \in A$.
Пусть $A = \{\tilde{\alpha}^1, ..., \tilde{\alpha}^{n-1}\}$, где $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, ..., \alpha_n^i)$ для каждого $i \in N_{n-1}$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1^1 y_{m+1} \oplus ... \oplus \alpha_m^1 y_{2m} \oplus \alpha_{m+1}^1 y_1 \oplus ... \oplus \alpha_{2m}^1 y_m = 0, \\ ... \\ \alpha_1^{2m} y_{m+1} \oplus ... \oplus \alpha_m^{2m} y_{2m} \oplus \alpha_{m+1}^{2m} y_1 \oplus ... \oplus \alpha_{2m}^{2m} y_m = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

Если система (1) имеет ненулевое решение $y_1^{'}, ..., y_{2m}^{'}$, то для неисправности $\varphi_{\tilde{\sigma}'}$, где $\tilde{\sigma}^{'} = (\sigma_1^{'}, ..., \sigma_n^{'})$, $\sigma_1^{'} = y_1^{'}, ..., \sigma_{2m}^{'} = y_{2m}^{'}, \sigma_{2m+1}^{'} = \sum_{i=1}^{m} y_i^{'} y_{m+i}^{'}$, имеет место $f_{in}^n(\tilde{\alpha}^i) = f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}'}(\tilde{\alpha}^i))$ для любого $\tilde{\alpha}^i \in A$. В противном случае ранг матрицы $||a_j^i||$, $i, j \in N_{2m}$, равен $2m$. Тогда рассмотрим систему

$$\begin{cases} \alpha_1^1 y_{m+1} \oplus ... \oplus \alpha_m^1 y_{2m} \oplus \alpha_{m+1}^1 y_1 \oplus ... \oplus \alpha_{2m}^1 y_m = 1, \\ ... \\ \alpha_1^{2m} y_{m+1} \oplus ... \oplus \alpha_m^{2m} y_{2m} \oplus \alpha_{m+1}^{2m} y_1 \oplus ... \oplus \alpha_{2m}^{2m} y_m = 1, \end{cases}$$

которая имеет решение $y_1^{''}, ..., y_{2m}^{''}$ Решение не может быть нулевым. Полагаем $\tilde{\sigma}^{''} = (\sigma_1^{''}, ..., \sigma_n^{''})$, $\sigma_1^{''} = y_1^{'}, ..., \sigma_{2m}^{''} = y_{2m}^{''}, \sigma_{2m+1}^{''} = \sum_{i=1}^{m} y_i^{''} y_{m+i}^{''} \oplus 1$ Для неисправностей $\varphi_{\tilde{\sigma}''}$ выполнено $f_{in}^n(\tilde{\alpha}^i) = f_{in}^n(\varphi_{\tilde{\sigma}''}(\tilde{\alpha}^i))$ для любого $\tilde{\alpha}^i \in A$.

Из 1) и 2) получаем, что для любого множества $A \in E_2^n$ такого, что $|A| \leq n-1$ имеет место $A \notin \mathcal{M}(f_{in}^n, F_{in}^2)$.

Пусть $n = 2m$. Положим $f_{in}^n(x_1, ...x_n) = x_{2m} \& f_n^{n-1}(x_1, .., x_{n-1})$

Предложение 3. Для любого четного числа n имеет место $L(f_{in}^n, F_{in}^2) \geq n-1$

Доказательство. Если $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}, 0)$, то для любой неисправности $\varphi_{\tilde{\sigma}}$ тест функции f_{in}^n должен включать набор вида $(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, 1)$. Следовательно, любой тест функции T должен включать тест подфункции $f_{in}^n(x_1, ..., x_{n-1}, 1)$, откуда из предложения 2 получаем $|T| \geq n-1$.

10 Билет 10. Теорема Холла и построение латинских квадратов по строкам методом систем различных представителей

Теорема (Филипп Холл) Пусть I – конечное множество индексов, $I = \{1, 2, ..., n\}$ и S_i для каждого $i \in I$ – подмножество некоторого множества S. Необходимым и достаточным условием существования различных представителей x_i, $i = 1, ..., n$, $x_i \in S_i$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, является условие С: для каждого $k = 1, ..., n$ и каждой последовательности k различных индексов $i_1, ..., i_k$ в совокупности всех элементов подмножеств $S_{i_1}, ..., S_{i_k}$ содержится не менее k различных элементов.

Доказательство. Если каждое S_i содержит единственный элемент x_i, то выполнение условия С означает, что $x_1, ..., x_n$ различны и, значит, являются различными представителями. Нашей основной операцией будет такое вычеркивание некоторых элементов из некоторых подмножеств S_i, что для получающихся в результате подмножеств $\overline{S}_i \subseteq S_i$, $i = 1, ..., n$, условие С все еще выполняется. Если после ряда вычеркиваний, каждое из которых сохраняет условие С, остаются множества $\overline{S}_i$, содержащие каждое по единственному элементу x_i, то $x_1, .., x_n$ будут различными представителями, и наша теорема будет доказана.

В качестве первого тривиального вычеркивания, которое не нарушает условия С, мы можем удалить из каждого множества S_i, содержащего более n элементов, все кроме n элементов. Назовем множество r подмножеств $S_{i_1}, ..., S_{i_r}$ **блоком** и обозначим его через $B_{r,s}$, где s — число различных элементов в подмножествах $S_{i_1}, ..., S_{i_r}$. Тогда условие С эквивалентно утверждению, что $s \geq r$ для любого блока $B_{r,s}$. Если $s = r$, то такой блок $B_{r,r}$ назовем **критическим** блоком.

Условимся рассматривать пустой блок как критический блок $B_{0,0}$. Мы можем определить также объединение и пересечение блоков. Предположим, что $A_1, ..., A_m$, $C_{m+1}, ..., C_r$ — подмножества S_i в блоке $B_{r,s}$ и что $A_1, ..., A_m$, $D_{m+1} ..., D_t$ — подмножества в блоке $B_{t,v}$, где $A_1, ..., A_m$ — все подмножества, общие для обоих блоков (напомним, что подмножества S_i, S_j различаются своими индексами, а не элементами, которые они содержат). Тогда определим пересечение $B_{r,s} \cap B_{t,v}$ как блок $B_{u,w}$, подмножествами которого являются $A_1, ..., A_m$, а объединение $B_{r,s} \cup B_{t,v}$ — как блок, подмножествами которого являются $A_1 ..., A_m$, $C_{m+1} ..., C_r, D_{m+1}, ..., D_t$; это будет блок $B_{y,z}$; с $y = r + t - u$

Лемма 5.1.1. Если условие С выполнено, то объединение $B_{r,r} \cup B_{t,t}$ и пересечение $B_{r,r} \cap B_{t,t}$ критических блоков — снова критические блоки.

Доказательство. Пусть $B_{r,r} \cap B_{t,t} = B_{u,v}$ и $B_{r,r} \cup B_{t,t} = B_{y,z}$; число z элементов объединения равно числу $r + t$ элементов в $B_{r,r}$ и $B_{t,t}$, уменьшенному на число элементов, содержащихся в обоих блоках, которое не меньше числа v элементов пересечения. Таким образом, $z \leq r + t - v$. По условию С имеем также, что $v \geq u$ и $z \geq y$. Так как $y + u = r + t$, то

$$r + t - v \geq z \geq y = r + t - u \geq r + t - v$$

Следовательно, всюду имеем равенство, и $z = y$, $u = v$. Лемма доказана.

Лемма 5.1.2. Если $B_{k,k}$ — критический блок, то вычеркивание элементов $B_{k,k}$ из множеств, не принадлежащих $B_{k,k}$, не нарушает условия С.

Доказательство. Пусть $B_{r,s}$ — произвольный блок. Нужно показать, что если $(B_{r,s})' = B'_{r,s'}$ – блок, полученный после вычеркивания, то $s' \geq r$. Пусть $B_{r,s} \cap B_{k,k} = B_{u,v}$, $B_{r,s} \cup B_{k,k} = B_{y,z}$ и $B_{r,s}$ состоит из множеств $A_1, ..., A_m$, $C_{m+1}, ..., C_r$, а $B_{k,k}$ – из множеств $A_1, ..., A_m, D_{m+1}, ..., D_k$, где $A_1, ..., A_m$ – все множества общие для обоих блоков. Тогда $B_{u,v}$ состоит из $A_1, ..., A_m$, а $B_{y,z}$ – из

$$A_1, ..., A_m, C_{m+1}, ..., C_r, D_{m+1}, ..., D_k$$

После вычеркивания получим блок $(B_{r,s})' = B'_{r,s'}$, состоящий из

$$A_1, ..., A_m, C'_{m+1}, ..., C'_r$$

Но так как $C_{m+1}, ..., C_r$ входят в $B_{y,z}$, то они в совокупности содержат $z-k$ элементов, не содержащихся в $B_{k,k}$. Таким образом, $s^{'} = v+z-k$, так как в $B^{'}_{r,s'}$ входят элементы пересечения $B_{u,v}$ вместе с $z-k$ элементами из $C^{'}_{m+1}, ..., C^{'}_r$. Поскольку $y = r+k-u$ и $z \geq y$, $v \geq u$, то

$$s^{'} \geq v+z-k \geq u+y-k = r$$

Таким образом, $s^{'} \geq r$, т. е. и после вычеркивания условие С все еще выполняется.

Докажем теперь нашу теорему, используя индукцию по числу n множеств, поскольку теорема тривиальна при $n = 1$. Предположим сначала, что в системе подмножеств $U = \{S_1, ..., S_n\}$ имеется критический блок $B_{k,k}$, не совпадающий со всей системой, т. е. $1 \leq k < n$. Вычеркнув, если необходимо, элементы $B_{k,k}$ из остальных множеств, можем считать, что U состоит из $B_{k,k}$ и блока $B^{'}_{n-k,v}$, которые не имеют общих элементов.

По лемме 5.1.2 условие С не нарушается и по индукции $B_{k,k}$ и $B^{'}_{n-k,v}$ имеют оба с. р. п., а так как они не пересекаются, то в совокупности дают с. р. п. для U. Предположим далее, что в системе $U = \{S_1, ..., S_n\}$ нет критического блока, кроме, быть может, всей системы. Выберем тогда произвольный элемент какого-нибудь множества в качестве, его представителя и вычеркнем этот элемент из всех остальных множеств. При этом блок $B_{r,s}$ с $r < n$ становится блоком $B^{'}_{r,s'}$ где $s^{'} = s$ или $s-1$. Но по по предположению блок $B_{r,s}$, не был критическим и значит $s \geq r+1$, следовательно, $s^{'} \geq r$, и условие С выполняется для системы из $n-1$ остальных множеств;

Таким образом, по индукции они имеют с. р. п., которая вместе с выбранным выше представителем одного множества образует с. р. п. для всей системы. Тем самым доказательство теоремы завершено.

Следствие. Если n множеств $S_1 ..., S_n$ имеют с. р. п. и если наименьшее из этих множеств содержит t элементов, то при $t \geq n$ существует не меньше, чем $t(t-1)...(t-n+1)$ различных с. р. п., а при $t < n$ существует не меньше, чем $t!$ различных с. р. п.

Должно существовать хотя бы одно множество, в котором в качестве представителя можно выбрать любой элемент, ибо если нет критических блоков, это справедливо для любого множества, но если критические блоки имеются, то это верно для некоторого множества в минимальном критическом блоке. Множество, которое может иметь в качестве представителя любой свой элемент, обозначим через S_1. Выбор представителя в S_1, можно осуществить не менее чем t способами.

Вычеркнем теперь элемент, выбранный в качестве представителя для S_1, из $S_2, ..., S_n$ и получим множества $S^{'}_2, ..., S^{'}_n$, которые обладают с. р. п. и в которых наименьшее множество содержит не меньше, чем $t-1$ элементов. Продолжая дальше таким же образом, мы можем получить не меньше, чем $t(t-1)...(t-n+1)$ с. р. п., если $t \geq n$, и не меньше чем $t!$ с. р. п., если $t < n$.

Теорию различных представителей можно применить к изучению латинских прямоугольников и латинских квадратов. Назовем таблицу (5.1.3)

$$a_{11}\, a_{12}\, ...\, a_{1n}$$

$$a_{21}\, a_{22}\, ...\, a_{2n}$$

$$....$$

$$a_{r1}\, a_{r2}\, ...\, a_{rn}$$

Латинским $(r \times n)$**-прямоугольником**, если каждая строка есть некоторая перестановка чисел $1, 2, ..., n$ и в каждом столбце ни одно число не повторяется. В общем случае $r \leq n$; если $r = n$, то такая таблица называется **латинским квадратом** и каждое число $1, 2, ..., n$ появляется точно один раз в каждой строке и каждом столбце. Возникает естественный вопрос: если $r < n$, то можно ли добавить еще одну строку к табл. 5.1.3, чтобы получить латинский $((r+1) \times n)$ - прямоугольник, и если можно, то сколькими способами?

Теорема 5.1.5. Число способов добавления строки к латинскому $(r \times n)$ - прямоугольнику, дающих в результате латинский $((r+1) \times n)$ - прямоугольник, не меньше $(n-r)!$.

Доказательство. Пусть $S_i = 1, ..., n$, — множество чисел, которые не появляются в i-м столбце данного латинского $(r \times n)$ - прямоугольника R. Тогда с. р. п. множеств S_i можно добавить к R в качестве строки, чтобы получить латинский $((r+1) \times n)$ - прямоугольник, так как она будет содержать числа от 1 до n и ни одно из них не будет повторением какого-либо числа в соответствующем столбце. Обратно, строка, которая может быть добавлена к R для получения латинского $((r+1) \times n)$ - прямоугольника, будет с. р. п. для множеств S_i.

Задача состоит теперь в том, чтобы показать, что множества S_i имеют с. р. п., и найти число возможных с. р. п. Множество S_i состоит из $n-r$ чисел, не содержащихся в i-м столбце R. Каждое число $1, 2, , .., n$ появляется r раз в R и, следовательно, $n-r$ раз в множествах $S_1, ..., S_n$, взятых вместе. Набор k из этих множеств $S_1, ..., S_r$ будет содержать $k(n-r)$ чисел с учетом кратностей. Но так как ни одно из этих чисел не появляется более чем $n-r$ раз, то среди элементов этих k множеств должно быть не менее k различных чисел. Следовательно, условие С удовлетворяется. Так как каждое из множеств S_i содержит $n-r$ элементов, то по следствию теоремы 5.1.1 существует не меньше $(n-r)!$ с. р. п., и теорема доказана.

11 Билет 11. Классы P и NP. Детерминированная и недетерминированная машины Тьюринга. NP-полнота. Примеры.

Рекомендация. Достаточно подробно данный билет описан в книге Редькина Н.П. Дискретная математика

Пусть Π - некоторая массовая задача, характеризуемая множеством параметров, $I \in \Pi$ – индивидуальная задача, в которой эти параметры фиксированы. Пусть с массовой задачей Π связана и зафиксирована схема кодирования α, которая ставит каждой индивидуальной задаче $I \in \Pi$ в соответствие слово $\alpha(I)$ в некотором алфавите A. При этом под *размером* задачи I понимается длина слова $\alpha(I)$. Пусть T – машина Тьюринга, решающая задачу Π и

$$t_T(n) = \underset{I,|\alpha(I)|=n}{max} t_T(I) \ \ (1)$$

– соответствующая функция временной сложности(по худшему случаю). Говорят, что машина T решает задачу Π за *полиномиальное время*, если

$$t_T(n) = O(p(n)) \ \ (2)$$

для некоторого полинома p. В противном случае говорят, что машина T решает задачу Π за *экспоненциальное время.* Заметим, что при данном определении к экспоненциальным оценкам сложности относятся, например, оценки вида $O(n^{\log_2 n})$ (*субэкспоненциальными*).

Про задачу Π говорят, что она разрешима за полиномиальное время, если существует машина Тьюринга T, решающая ее за полиномиальное время. Обозначим через класс задач, разрешимых за полиномиальное время.

Имеется существенное различие между алгоритмами полиномиальной и экспоненциальной сложности. Ясно, что любой полиномиальный алгоритм более эффективен при достаточно больших размерах входа. Кроме того, полиномиальные алгоритмы лучше реагируют на рост производительности ЭВМ. В случае полиномиальных алгоритмов размер решаемой задачи при увеличении производительности ЭВМ увеличивается на мультипликативную константу, тогда как для экспоненциальных алгоритмов имеет место увеличение на аддитивную константу.

Далее, полиномиальные алгоритмы обладают свойством «замкнутости», — можно комбинировать полиномиальные алгоритмы, используя один в качестве «подпрограммы» другого и при этом результирующий алгоритм будет полиномиальным. В силу приведенных причин используется следующая терминология: полиномиальные алгоритмы называют Эффективными, полиномиально решаемые задачи называют *Легкорешаемыми*, а экспоненциально решаемые задачи называют *Труднорешаемыми.*

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть $= \{1, 2, \ldots, N\}$ — конечное множество и $R \subseteq M \times M$ — бинарное отношение на . Рассмотрим задачу проверки — является ли R отношением эквивалентности. Будем задавать индивидуальную задачу матрицей $A_R = (aij)$, $i, j \in \overline{1, n}$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,j) \in R \\ 0, \text{ если } (i,j) \notin R \end{cases} \quad (2)$$

Ясно, что R будет отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда матрица A_R имеет единичную диагональ, симметрична и выполнено соотношение $b_{ij} \leq a_{ij}\ \forall i, j \in \overline{1, n}$, где $(b_{ij}) = A_{R^2}$ — матрица отношения R^2. Кроме того, выполнено $A_{R^2} = A_R \cdot A_R$, , где имеется в виду булево умножение матриц. Ясно, что сложность рассматриваемой задачи $O(n^2)$.

Бинарное отношение R называется *Связным*, если для любых $i, j \in \overline{1, n}$ существует K такое, что выполнено iR^kj.

2. Бинарное отношение R называется *Эйлеровым*, если элементы R можно так упорядочить

$$R : (i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_t, j_t) \ \ , t = |R| \ \ , (3)$$

что выполнено

$$(j_1, j_2) \in R, (j_2, i_3) \in R, ..., (j_{t-1}, i_t) \in R, (j_t, i_1) \in R$$

Ясно, что эйлерово отношение является связным. Можно доказать, что связное отношение R является эйлеровым тогда и только тогда, когда число единиц в матрице A_R совпадает в i – м столбце и в i – й строке для каждого $i \in \overline{1, n}$. Это дает алгоритм сложности $O(n^2)$, проверяющий эйлеровость отношения R. Ясно, что связность отношения R проверяется за $O(n^3)$ действий.

3. Бинарное отношение R называется *Гамильтоновым*, если элементы можно так упорядочить $i_1, i_2, \ldots, i_n$, что выполнено соотношение

$$(i_1, i_2) \in R, (i_2, i_3) \in R, ..., (i_{n-1}, i_n) \in R, (i_n, i_1) \in R \ \ (3)$$

В настоящее время неизвестно полиномиального алгоритма от N проверки гамильтоновости произвольного отношения R. Тривиальный алгоритм требует $N!$ упорядочений множества и проверки условий (3), что, конечно, превосходит по величине любой полином от N.

Класс NP определяется через понятие недетерминированного алгоритма. Введем понятие недетерминированной машины Тьюринга.

Отличие от обычной машины Тьюринга заключается в том, что недетерминированная машина (НТ) имеет дополнительно угадывающий модуль (УМ), который может только записывать на ленту слова из внешнего алфавита. Поскольку речь идет о задачах распознавания, то удобно считать, что машина имеет два заключительных состояния q_Y и q_N, соответствующие ответам «Да» и «Нет» соответственно. Работа машины имеет две стадии:

1-я стадия — угадывание. В начальный момент на ленте записано слово $x = x_1, ...x_n$ — код индивидуальной задачи I, начиная с ячейки 1. В ячейке 0 записан знак раздела $*$. Угадывающий модуль просматривает ячейку -1. Затем УМ пишет произвольное слово $c(x)$ по одной букве за такт в каждой ячейке с номерами $-1, -2, -3, \ldots$. В итоге 1-й стадии конфигурацией машины будет $c(x) * q_1 x$.

2-я стадия — решение. На этой стадии недетерминированная машина работает как обычная машина Тьюринга с конфигурации $c(x)*q_1x$. Если машина через конечное число шагов приходит в состояние q_Y, то говорим, что она принимает конфигурацию $c(x) * q_1 x$. Будем говорить, что недетерминированная машина принимает x, если существует слово $c(x)$, такое что конфигурация $c(x) * q_1 x$ принимается.

Определим время работы недетерминированной машины, положив $t_{\text{НТ}}(x) = t_1(x) + t_2(x)$, (если x принимается), где $t_1(x)$— время работы на стадии 1, т. е., по определению, $t_1(x) = |c(t)|$;

$t_2(x)$ — время работы на стадии 2, т. е., по определению $t_2(x) = t_T(c(x) * x)$, (— соответствующая (обычная) машина Тьюринга). Определим

$$t_{\text{НТ}}(n) = \underset{x,|x|=n}{max} \ t_{\text{НТ}}(x)$$

Недетерминированная машина НТ решает задачу Π за полиномиальное время, если

$$t_{\text{НТ}}(n) = O(p(n))$$

для некоторого полинома p.

Определим класс задач NP как множество задач, для которых существует недетерминированная машина Тьюринга, принимающая за полиномиальное время те и только те слова, которые соответствуют индивидуальным задачам с ответом «Да».

Теорема. Если задача $\Pi \in NP$, то существует такой полином p, что Π может быть решена детерминированным алгоритмом со сложностью $O(2^{p(n)})$, n — размер Π .

Доказательство. Пусть НТ — недетерминированная машина Тьюринга, решающая задачу Π , и $q(n)$ — полином, ограничивающий временную функцию сложности НТ. Не нарушая общности, можно считать, что $q(n) = c_1n^2 - c_1, c_2$ константы). По определению класса NP, если вход x длины n принимается НТ, то существует слово $c(x)$ длины не более чем $q(n)$, такое, что НТ дает ответ «Да» не более чем за $q(n)$ шагов.

Значит, общее число возможных слов-догадок не более чем $k^{q(n)}$, где k — мощность внешнего алфавита НТ. Считаем, что все догадки имеют длину $q(n)$, в противном случае их можно подравнять. Теперь можно представить детерминированный алгоритм решения задачи Π , который на каждом из $k^{q(n)}$ слов-догадок реализует 2-ю стадию работы НТ и работает $q(n)$ тактов. Алгоритм дает ответ «Да», если найдется слово-догадка, приводящее к принимающему вычислению. Время работы данного алгоритма $q(n) \cdot k^{q(n)}$. Ясно, что существует подходящий полином $p(n)$ такой, что сложность описанного алгоритма не превосходит $O(2^{p(n)})$, что и требовалось доказать.

Относительно класса NP следует сделать несколько замечаний: Класс NP один и тот же для различных вычислительных моделей, использующих недетерминированные операции; Класс P замкнут относительно дополнения задач. Для класса NP этого утверждать нельзя.Дополнением $\overline{A}$ задачи распознавания называют задачу, в которой коды задач с ответом «Да» в точности соответствует кодам задач , которые не имеют ответа «Да». Класс задач, являющихся дополнениями к задачам класса NP обозначают $-NP$.

Примеры:

1. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — формула от булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$ в конъюнктивной нормальной форме, где каждая дизъюнкция имеет не более, чем три вхождения переменных. Задача проверки выполнимости таких формул называется задачей 3-выполнимости (идентификатор: 3ВЫП). Задача 3ВЫП является NP-полной. Однако, задача 2-выполнимости лежит в классе P.

2. По произвольному графу $G(V, E)$ и числу k узнать, имеется ли в графе G полный (граф называется полным, если любые две вершины соединены ребром) подграф с k вершинами (клика). Задача КЛИКА является NP-полной.

3. Некоторое множество вершин графа $G(V, E)$ образует вершинное покрытие графа, если для любого ребра $e \in E$ найдется инцидентная ему вершина $v \in V_1$ этого множества. Задача о вершинном покрытии (идентификатор: ВП) состоит в том, чтобы по произвольному графу $G(V, E)$ и числу узнать, имеет ли граф вершинное покрытие мощности k. Задача ВП является NP-полной.

4. Множество вершин графа $G(V, E)$ независимо, если никакие две вершины из V_1 не связаны ребром. Задача о независимом множестве вершин (идентификатор: НВ) заключается в том, чтобы для произвольного графа $G(V, E)$ и целого числа k выяснить, существует ли в G независимое множество из вершин. Задача НВ является NP-полной.

5. Задача ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ (идентификатор: ГЦ).

6. Задача ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ РЮКЗАК (идентификатор: ЦР).

12 Билет 12. Дискретная задача о рюкзаке. Приближенные методы решения, их оценки на погрешность.

http://library.miit.ru/methodics/28112016/00-3495.pdf
Текст из рекомендованного источника смотри в приложении или википедии

Пусть имеется n предметов, каждый из которых имеет ценность $c_j > 0$ и вес $a_j > 0$, $j_{=}1, \ldots, n$. Имеется рюкзак, грузоподъемность которого равна R, при этом $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j > R$. Необходимо положить в рюкзак набор предметов с максимальной суммарной ценностью. Введем n переменных:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{если предмет с номером } j \text{ не кладется в рюкзак} \\ 1, & \text{если предмет с номером } j \text{ кладется в рюкзак} \end{cases}$$

Суммарная ценность: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$. Грузоподъемность: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq R, \quad x \in \{0, 1\}$$

$$c_j > 0, \quad 0 < a_j \leq R, \quad j = \overline{1, n}$$

Правило Данцига. Пусть переменные $x_j, \quad 1 \leq j \leq n$ перенумерованы так, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$, где $\alpha_j = \dfrac{c_j}{a_j}$. Тогда оптимальное решение $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ имеет вид:

$$y_1^0 = y_2^0 = \ldots = y_{s-1}^0 = 1$$

$$y_{s+1}^0 = y_{s+2}^0 = \ldots = y_n^0 = 0$$

$$y_s^0 = \frac{\left(R - \sum\limits_{j=1}^{s-1} a_j\right)}{a_s},$$

где s определяется из условия $\sum\limits_{j=1}^{s-1} a_j \leq R < \sum\limits_{j=1}^{s} a_j$. Смысл правила – единицы следует последовательно назначать переменным, начиная с наибольшей удельной ценности (ценности на единицу веса), при этом

$$f(y^0) = \sum_{j=1}^{s-1} c_j + c_s \cdot \frac{\left(R - \sum\limits_{j=1}^{s-1} a_j\right)}{a_s}$$

Определение. Алгоритм A приближенного решения задачи называется ε – оптимальным ($\varepsilon > 0$), если он вырабатывает целочисленное решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такое что

$$\frac{f(x^0) - f(x)}{f(x^0)} \leq \varepsilon \quad (*),$$

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – оптимальное целочисленное решение , $f(x^0) > 0$. Решение $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть ε – оптимальным.

Рассмотрим задачу об одномерном булевом рюкзаке (дискретную задачу о рюкзаке, 0–1 Рюкзак (Knapsack)):

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum a_j x_j \leq b,$$

$$c_j > 0, \quad 0 < a_j < b, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad j = \overline{1,n}$$

Предположим, что $b = b(k) = a_1 k, \quad k > 1$. Тогда $1 < k \leq k_0$, где $k_0 < \dfrac{\sum a_j}{a_1}$.

Пусть $\lambda_j = \dfrac{c_j}{a_j}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Условие ε – оптимальности имеет вид (*). Для нахождения допустимого булевого решения $x = (x_1, \ldots, x_n)$ воспользуемся правилом Данцига. Тогда $x_1 = 1$, $f(x) > c_1$. Для оптимального булевого решения имеет место оценка $f(x^0) \leq \dfrac{c_1}{a_1}, \quad b = c_1 k \leq c_1 k_0$, поэтому $c_1 \leq f(x) \leq f(x^0) \leq c_1 k_0$. Обозначим через $\varepsilon_0 = 1 - \dfrac{k}{k_0}$.

Теорема. Для задачи об одномерном булевом рюкзаке при $1 < k \leq k_0$ алгоритм, основанный на правиле Данцига, дает ε_0 — оптимальное решение .

Доказательство.

$$\frac{f(x^0) - f(x)}{f(x^0)} = 1 - \frac{f(x)}{f(x^0)} < 1 - \frac{c_1}{c_1 k_0} = 1 - \frac{1}{k_0} = \varepsilon_0$$

Теорема. Для задачи об одномерном булевом рюкзаке при $1 < k \leq k_0$ и $a_1 = a_{\min} = \min a_j, \quad 1 \leq j \leq n$ алгоритм, основанный на назначении единиц в последовательности $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n$, дает ε_0 - оптимальное решение .

Доказательство. Пусть $b(k) = g(k) a_1$, где $g(k)$ – непрерывная монотонно возрастающая функция, $g(k) > 1$ при всех $k > 1$ и $_1 = a_{min} = \min a_j$, $1 \leq j \leq n$. В этом случае, $g(k) \leq \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}{a_1}$, k_0 – единственный корень уравнения $g(k) = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}{a_1}, \quad 1 < k \leq k_0$. Для всех значений k из указанного диапазона алгоритм, основанный на правиле Данцига, дает ε_0 – оптимальное решение x, $\varepsilon_0 = 1 - \dfrac{1}{g(k_0)}$. Действительно, $f(x) \geq c_1$, так как $x_1 = 1$.

$$c_1 \leq f(x) \leq f(x^0) \leq c_1 g(k) \leq c_1 g(k_0)$$

Поэтому

$$\frac{f(x^0) - f(x)}{f(x^0)} = 1 - \frac{f(x)}{f(x^0)} \leq 1 - \frac{c_1}{c_1 g(k_0)} = \varepsilon_0$$

13 Билет 13. Целочисленная задача линейного программирования. Алгоритм решения.

Рекомендация. Использовать при подготовке более новое пособие тех же авторов http://www.itlab.unn.ru/uploads/opt

Определение. Задачу линейного программирования, в которой на значения всех или части переменных наложено требование целочисленности, называют задачей целочисленноо линейного программирования (ЗЦЛП). В первом случае говорят о задаче полностью целочисленного линейного программирования, а во втором о задаче частично целочисленного линейного программирования. Если коэффициенты ограничений и функции цели ЗЦЛП целочисленны, то говорят о целочисленной ЗЦЛП.

Пусть p — оптимальный план ЗЛП, полученной из ЗЦЛП отбрасыванием требования целочисленности. Очевидно, что значение максимизируемой функции на любом плане ЗЦЛП не превосходит значения этой функции наплане p. Следовательно, если p удовлетворяет условия целочисленности, то он оптимальный и для ЗЦЛП. Однако так бывает далеко не всегда. Округление же компонент до ближайшего целого может не только не дать оптимального плана ЗЦЛП, но и вывести за пределы допустимых решений ЗЛП.

Постановка задачи

Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размеров $m \times n$, $a_1, a_2, ..., a_n$ — ее столбцы, $b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$, $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ — целочисленные векторы. Рассмотрим ЗЦЛП относительно вектора переменных $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$:

$$max\, ub$$

$$\begin{cases} ua_j \leq c_j \;\; (j = 1, 2, ...n) \\ u_i \in \mathbb{Z} \;\; (i = 1, 2, ...m) \end{cases}$$

Запишем также эту задачу в матричной форме:

$$\begin{cases} uA \leq c, \\ u \in \mathbb{Z}^m \end{cases}$$

Циклический алгоритм Гомори

Лемма. Пусть $u = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i(-u_i)$ (58) причем $u \in \mathbb{Z}$, $u_i \in \mathbb{Z}$, $u_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$, $a_0 \neq \mathbb{Z}$. Тогда $-\{a_0\} - \sum_{i=1}^{m} \{a_i\}(-u_i) \geq 0$ (59)

Доказательство. Так $u \in \mathbb{Z}$, то из (58) следует, что $\{a_0\} - \sum_{i=1}^{m} \{a_i\} u_i \in \mathbb{Z}$ (60). Так как $\{a_0\} < 1$, то из (60) получаем $\sum_{i=1}^{m} \{a_i\} u_i \geq \{a_0\}$, откуда и следует (59)

Определение. Неравенство (59) называется отсечением Гомори.

Чтобы использовать отсечение Гомори при решении ЗЦЛП удобно ввести новую неотрицательную переменную $u = -\{a_0\} - \sum_{i=1}^{m} a_i(-u_i)$ (61)

Условия $u \geq 0$ и (61) эквивалентны неравеству (59).

Определение. Циклический алгоритм, в котором на каждом шаге строится отсечение Гомори, называется циклическим алгоритмом Гомори.

Полностью целочисленный алгоритм

Пусть задача (??) обладает следующим свойством: существует такая псевдобаза $F = (a_{s_1}, ..., a_{s_m})$, что $|detF| = 1$. Тогда для соответствующей симплексной таблицы $Q = (q_{ij})$ выполняется

$$q_{j0} \in \mathbb{Z} \ \ (j = 0, 1, ..., n), q_{0i} \geq 0 \ \ (i = 1, 2, ..., m)$$

. Если при этом $q_{j0} \geq 0 \ \ (j = 1, 2, ..., n)$, то Q — оптимальная симплексная таблица. Пусть найдется $l \in \{1, 2, ..., n\}$ такое, что $q_{l0} < 0$. Если при этом $q_{li} \geq 0 \ \ (i = 1, 2, ..., m)$, то множество планов ЗЦЛП пусто. Пусть

$$I = \{i : \ \ q_{li} < 0\} \neq \emptyset, \ \ \frac{q_k}{|q_{lk}|} = lexmin\left\{\frac{q_i}{|q_{li}|} : i \in I\right\}$$

Если направляющий элемент $q_{lk} = -1$, то, сделав шаг симплекс-метода, снова попадем в исходную ситуацию. Идея полностью целочисленного алгоритма состоит в формировании такого отсечения, чтобы после шага симплекс-метода повторилась исходная ситуация, т.е. направляющий элемент был бы равен -1 .

Лемма (Гомори) Пусть $u = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(-u_i)$ (63) причем $u \in \mathbb{Z}, u \geq 0, u_i \in \mathbb{Z}, u_i \geq 0, a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, ..., m)$. Тогда для любого λ, такого, что $\lambda \geq 1, \lambda \in \mathbb{Z}$, справедливо неравенство

$$\left[\frac{a_0}{\lambda}\right] + \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{a_i}{\lambda}\right](-u_i) \geq 0$$

Доказательство. Из (63) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{m}(a_i u_i) \leq a_0$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_i}{\lambda}u_i \leq \frac{a_0}{\lambda}$

Вычитая из последнего соотношения неравенства $\left\{\frac{a_i}{\lambda}\right\}u_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ получим

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{a_i}{\lambda} - \left\{\frac{a_i}{\lambda}\right\}\right)u_i \leq \frac{a_0}{\lambda},$$

т.е. $\sum\limits_{i=1}^{m}\left[\frac{a_i}{\lambda}\right]u_i \leq \frac{a_0}{\lambda}$

Левая часть полученного неравенства целочисленна, поэтому не превосходит $\left[\frac{a_0}{\lambda}\right]$ что и требовалось.

Положим $\lambda = \max\{q_{l_i} : i \in I\}, \ q_{n1,i} = \left[\frac{q_{li}}{\lambda}\right]$ $(i = 0, 1, .., m)$,

$$u_{n+1} = q_{n+1,0} - \sum_{i=1}^{m} q_{n+1,i}u_{s_i} \ \ (64)$$

По лемме (Гомори) неравенство $u_{n+1} \geq 0$ является правильным отсечением. Припишем коэффициенты неравенства в конец таблицы. Так как $q_{l0} < 0$, то $q_{n+1,0} < 0$ и, следовательно, $(n+1)$-ую строку можно взять за направляющую в симплекс-методе. Пусть

$$\frac{q_t}{q_{n+1,t}} = lexmin\left\{\frac{q_i}{|q_{n+1,i}|} : i \in I\right\}$$

т.е. направляющим элементом является $q_{n+1,t}$. Очевидно, что $q_{n+1,t} = -1$. Так как $q_{n+1,i} = -1$ при $i \in I$, то $q_t = \text{lexmin}\{q_i : i \in I\}$.

Прямой метод целочисленного программирования

Опишем идею так называемого прямого метода ЦЛП.

Пусть $F = (a_{s_1}, ..., a_{s_m})$ — допустимая унимодулярная база задачи (??) (для этого достаточно, например, выполнения условий $u \geq 0$, $c \geq 0$) и $Q = (q_{ij})$ — соответствующая симплексная таблица.

Если $q_{0i} \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$, то задача (??) решена. В противном случае найдется такое k, что $q_{0k} < 0$. Если при этом $q_{jk} \leq 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$, то целевая функция не ограничена сверху на множестве планов задачи (??). В противном случае найдем направляющий элемент q_{lk} прямым симплекс-методом. Если $q_{lk} = 1$, то после шага симплекс-метода ситуация повторяется. Если $q_{lk} \geq 2$, то положим $\lambda = q_{lk}, q_{n+1,i} = \left[\dfrac{q_{li}}{\lambda}\right]$ $(i = 0, 1, ..., m)$ и добавим отсечение

$$u_{n+1} = q_{n+1,0} + \sum_{i=1}^{m} q_{n+1,i}(-u_{s_i})$$

Заметим, что существуют задачи, в которых описанная процедура приводит к бесконечному процессу.

14 Билет 14. Смешанные стратегии и теорема о минимаксе для матричных антагонистических игр.

Матричной игрой называют конечную антагонистическую игру, т. е. игру двух лиц с нулевой суммой и конечным числом стратегий. Такую игру можно задать одной матрицей А – матрицей выигрышей первого игрока, поскольку матрица выигрышей второго игрока – это та же матрица А, умноженная на (-1).

Рассмотрим матричную игру с платежной матрицей $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Первый игрок стремится выбрать такую свою стратегию, которая даст ему наибольший выигрыш. Однако этот наибольший выигрыш зависит также от выбора своей стратегии вторым игроком, а этот выбор неизвестен первому игроку. Если он выбирает стратегию A_i , то в худшем случае он получит выигрыш, равный $\alpha_i = \underset{j}{min}\, a_{ij}$. Следовательно, первому игроку целесообразно выбрать такую стратегию, при которой этот минимальный выигрыш максимален. Величина

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$$

называется нижней ценой игры. Это гарантированный выигрыш первого игрока при правильном выборе им стратегии. Соответствующая ему стратегия A_{i_0} называется *максиминной*.

С другой стороны, второй игрок выберет такую свою стратегию B_{j_0}, при которой наибольший его проигрыш $\beta_j = \underset{i}{max}\, a_{ij}$ будет минимальным. Величина

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$$

называется верхней ценой игры. Стратегия B_{j_0} называется *минимаксной*. Можно показать, что $\alpha \leq \beta$

Матричная игра, для которой , $\alpha = \beta$ называется игрой с седловой точкой (или вполне определенной). Величина $\nu = \alpha = \beta$ называется ценой (значением) игры. Элемент матрицы выигрышей $a_{i_0 j_0}$, соответствующий максиминной и минимаксной стратегиям A_{i_0} и B_{j_0} называется седловым элементом матрицы. Нетрудно видеть, что он является наименьшим в своей строке и наибольшим в своем столбце.

Стратегии A_{i_0} и B_{j_0} называют оптимальными стратегиями. Они оптимальны в том смысле, что дают лучший результат в наихудших условиях. Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому игроку невыгодно отступать от своей, т. е. эти две стратегии образуют равновесную ситуацию. Принцип оптимальности, основанный на построении равновесной ситуации, в теории игр называют принципом равновесия.

Решением матричной игры будем называть совокупность оптимальных стратегий и цены игры: $<A_{i_0}, B_{j_0}, \nu>$

Для того, чтобы найти такое решение, достаточно найти в матрице игры седловой элемент. Технически выполнить это очень просто. Надо в каждой строке матрицы пометить каким-либо знаком минимальный элемент, а в каждом столбце другим знаком – максимальный элемент. Если в результате появляется элемент, помеченный обоими знаками, то он и есть седловой элемент. Строка седлового элемента соответствует оптимальной (максиминной) стратегии игрока А, а столбец – оптимальной (минимаксной) стратегии игрока В.

Смешанные стратегии

Если матрица игры не имеет седлового элемента, то никакие стратегии не образуют ситуации равновесия, и анализ игры не приводит ни к каким полезным выводам.

Предположим теперь, что такая игра повторяется многократно, и в каждой партии игроки выбирают свою стратегию случайным образом, по-прежнему независимо друг от друга. Тогда результат такого многократного проведения игры будет характеризоваться средним выигрышем игрока A, т. е. его математическим ожиданием. Пусть p_i – вероятность применения игроком A стратегии A_i , а q_j – вероятность применения игроком B стратегии B_j , тогда математическое ожидание выигрыша равно:

$$K = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

Введенные ранее стратегии будем называть «чистыми» стратегиями.

Определение. Смешанной стратегией называется распределение вероятностей на множестве чистых стратегий. Таким образом, смешанные стратегии игроков A и B – это следующие векторы:

$$S_A = (p_1, p_2, ..., p_m) \ , \ S_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$$

для которых имеют место очевидные равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \ , \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

Чистую стратегию, например $_k$, можно рассматривать как частный случай смешанной стратегии S_A , где $p_k = 1$, $p_i = 0$ $(i \neq k)$.

Определим оптимальные смешанные стратегии, исходя из рассмотренного выше принципа равновесия. Для игрока A оптимальной будет та стратегия S_A^* , которая максимизирует математическое ожидание его выигрыша при любой стратегии игрока B:

$$K(S_A^*, S_B) = \max_{S_A} K(S_A, S_B)$$

а для игрока B оптимальна та стратегия S_B^* , которая минимизирует его проигрыш при любой стратегии игрока A:

$$K(S_A, S_B^*) = \min_{S_B} K(S_A, S_B)$$

Предположим, что

$$\max_{S_A} K(S_A, S_B) = \min_{S_B} K(S_A, S_B) = K(S_A^*, S_B^*) = \nu$$

(пока это только гипотеза), тогда

$$K(S_A, S_B^*) \leq K(S_A^*, S_B^*) \leq K(S_A^*, S_B) \, (2)$$

Если неравенства (2) выполняются, то ситуация $K(S_A^*, S_B^*)$ является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях – никому из игроков невыгодно в одиночку отступать от своей оптимальной стратегии. Число $\nu = K(S_A^*, S_B^*)$ называют ценой (значением) игры.

Теорема. Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Доказательство. Докажем теорему сначала для игры со строго положительной матрицей: $A = (a_{ij})_{m \times n} \, , a_{ij} > 0 \, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ Пусть игрок B применяет свою смешанную стратегию $S_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$, а игрок A – одну из своих чистых стратегий $A_i = S_A = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$.

Тогда из левого неравенства (2), $K(S_A, S_B^*) \leq \nu$, получаем m неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq \nu; \ \ i = \overline{1, m} \ \ (3)$$

Имеем также условие $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{q_j}{\nu} \leq 1 \ \ i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\nu} = \frac{1}{\nu}$$

Введем обозначение

$$x_j = \frac{q_j}{\nu}$$

, тогда последние соотношения принимают вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq 1 \ \ i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{\nu}$$

Оптимальная стратегия S_B^* должна минимизировать значение ν (проигрыш игрока B), т. е. максимизировать функцию $z = \dfrac{1}{\nu}$. Следовательно, имеем следующую задачу линейного программирования:

$$z = x_1 + x_2 + ... + x_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq 1 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq 1 \end{cases} \quad x_j \geq 0 \ \ j = \overline{1,n} \ \ (5)$$

Аналогичным образом, исходя из правого неравенства (2) $K(S_A^*, S_B) \geq \nu$, и условия $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$, учитывая, что оптимальная стратегия S_A^* максимизирует функцию ν, приходим к такой задаче линейного программирования:

$$f = y_1 + y_2 + ... + y_n \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq 1 \\ ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq 1 \end{cases} \quad y_i \geq 0 \ \ j = \overline{1,m} \ \ (6)$$

где $y_i = \dfrac{p_i}{\nu}$

Согласно теореме двойственности линейного программирования, обе задачи имеют решения (оптимальные планы):$x^* = (x_1^*, ..., x_n^*), y^* = (y_1^*, ..., y_m^*), z^* = z_{max}$, из которых определяются оптимальные стратегии $S_A^* = (\dfrac{y_1^*}{z^*}, ..., \dfrac{y_m^*}{z^*}), S_B^* = (\dfrac{x_1^*}{z^*}, ..., \dfrac{x_n^*}{z^*})$ и цена игры $\nu = \dfrac{1}{z^*}$.

Если же матрица A игры G_A не является строго положительной, то можно перейти к стратегически эквивалентной игре $G_{A'}$ со строго положительной матрицей A' , которая получается из матрицы A прибавлением к каждому элементу числа $c > \max\limits_{a_{ij}<0} |a_{ij}|$. Оптимальные стратегии у игры G_A будут те же, что у игры $G_{A'}$ (а у нее они по уже доказанному существуют), а цена игры будет $\nu = \nu' - c$

Таким образом, теорема доказана полностью.

15 Билет 15. Языки описания схем verilog. Синтаксис. Verilog: wire, reg, блок always, assign, основные операторы.

Источник: https://marsohod.org/11-blog/77-veriloglesson1

Verilog - язык описания цифровых схем.

Сигналы (signal) – это электрические импульсы, которые передаются по **проводам (wire)** между логическими элементами схемы. Провода переносят информацию не производя над ней никаких вычислений. В цифровой схеме сигналы важны для передачи двоичных данных.

Базовый тип источника сигнала в языке Verilog – это провод, wire. Таким образом, если у вас есть арифметическое или логическое выражение, вы можете ассоциировать результат выражения с именованным проводом и позже использовать его в других выражениях. Это немного похоже на переменные, только их (как провода в схеме) нельзя пересоединить на лету, нельзя поменять назначение. Значение провода (wire) – это функция того, что присоединено к нему. Вот пример декларации однобитного провода в "программе" Verilog:

```
wire a;
```

Вы можете ему назначить другой сигнал, скажем сигнал "b", вот так:

```
wire b;
assign a = b;
```

Или вы можете определить сигнал и сделать назначение ему одновременно в одном выражении:

```
wire a=b;
```

У вас могут быть провода передающие несколько бит:

```
wire [3:0] c;  //4 provoda
```

Провода передающие несколько бит информации называются "шина", иногда "вектор". Назначания к ним делаются так же:

```
wire [3:0] d;
assign c = d; // ''podklyuchenie'' odnoy shini k drugoy
```

Количество проводов в шине определяется любыми двумя целыми числами разделенными двоеточием внутри квадратных скобок.

```
wire [11:4] e; //8 - bitnaya shina
wire [0:255] f; //256-bitnaya shina
```

Из шины можно выбрать некоторые нужные биты и назначить другому проводу:

```
wire g;
assign g = f[2];  //naznachit signalu ''g'' vtoroy bit shini  ''f''
```

Кроме того, выбираемый из шины бит может определяться переменной:

```
wire [7:0] h;
wire i = f[h];  //naznachit signalu ''i'' bit nomer ''h'' iz shini ''f''
```

Вы можете выбрать из сигнальной шины некоторый диапазон бит и назначить другой шине с тем же количеством бит:

```
wire [3:0] j = e[7:4];
```

Так же, в большинстве диалектов Verilog, вы можете определить массивы сигнальных шин:

```
wire [7:0] k [0:19];  //massiv iz 20 8-bitnih shin
```

Еще существует другой тип источника сигнала называемый регистр: **reg**. Его используют при поведенческом (behavioral) описании схемы. Если регистру постоянно присваивается значение комбинаторной (логической) функции, то он ведет себя точно как провод (wire). Если же регистру присваивается значение в синхронной логике, например по фронту сигнала тактовой частоты, то ему, в конечном счете, будет соответствовать физический D-триггер или группа D-триггеров. D-триггер – это логический элемент способный запоминать один бит информации. В англоязычных статьях D-триггер называют **flipflop**.

Регистры описываются так же как и провода:

```
reg [3:0] m;
reg [0:100] n;
```

Они могут использоваться так же, как и провода в правой части выражений, как операнды:

```
wire [1:0] p = m[2:1];
```

Вы можете определить массив регистров, которые обычно называют “память” (RAM):

```
reg [7:0] q [0:15];  //pamyat iz 16 slov, kajdoe po 8 bit
```

Еще один тип источника сигнала – это **integer**. Он похож на регистр reg, но всегда является 32х битным знаковым типом данных. Например, объявим:

```
integer loop_count;
```

Verilog позволяет группировать логику в блоки. Каждый блок логики называется **”модулем” (module)**. Модули имеют входы и выходы, которые ведут себя как сигналы wire.

При описании модуля сперва перечисляют его порты (входы и выходы):

```
module my_module_name (port_a, port_b, w, y, z);
```

А затем описывают направление сигналов:

```
input port_a;
output [6:0] port_b;
input [0:4] w;
inout y; //2-napravlenniy signal
```

Выход модуля может быть сразу декларирован как регистр reg, а не как провод wire:

```
output [3:0] z;
reg [3:0] z;
```

Еще проще можно сразу в описании модуля указать тип и направление сигналов:

```
module my_module
(
    input wire port_a,
    output wire [6:0]port_b,
    input wire [0:4]w,
    inout wire y,
    output reg [3:0]z
);
```

Теперь можно использовать входные сигналы, как провода wire:

```
wire r = w[1];
```

Теперь можно делать постоянные назначения выходам, как функции от входов:

```
assign port_b = h[6:0];
```

В конце описания логики каждого модуля пишем слово **endmodule**.

```
module my_module_name (input wire a, input wire b, output wire c);
assign c = a & b;
endmodule
```

Постоянные сигналы или просто числа:

```
wire [12:0] s = 12; //32-h bitnoe desyatichnoe chislo,kotoroe budet ''obrezano'' do 13 bit
wire [12:0] z = 13'd12; //13-- bitnoe desyatichnoe chislo
wire [3:0] t  = 4'b0101; //4-h bitnoe dvoichnoe chislo
wire [3:0] q  = 8'hA5;   //8-mi bitnoe 16-richnoe chislo A5
wire [63:0] u = 64'deadbeefcafebabe;  //64-h bitnoe 16-richnoe chislo
```

Если точно не определить размер числа, то оно принимается по умолчанию 32-х разрядным. Это может быть проблемой при присвоении сигналам с большей разрядностью.

Числа – это числа. Они могут использоваться во всяких арифметических и логических выражениях. Например, можно прибавить 1 к вектору “aa”:

```
wire [3:0] aa;
wire [3:0] bb;
assign bb = aa + 1;
```

```
`timescale 1ns / ps
 //this is a comment in Verilog

 module hello_world(
 input switch[0],
 input switch[1],
 output led
 );

 assign led = switch[0] & ~switch[1];

 endmodule
```

Чем VHDL отличается от обычных языков программирования типа Си, Паскаля и т.д.? Самое главное отличие в том, что VHDL описывает параллельные процессы!!! Если код на Си или Паскале у нас выполняется по очереди команда за командой и надо изощряться с таймерами и прерываниями чтоб обработать разные куски кода «одновременно», то на VHDL разные блоки программы выполняются параллельно друг другу, но в тоже время в VHDL есть часть комманд, которые выполняются последоватеьно. Поэтому структура программы в корне отличается от привычной микроконтроллерной.

Структура программы

Процесс программирования на VHDL чем то напоминает создание принципиальной схемы устройства.

Шаг 1: Включение в код используемых библиотек.

Шаг 2: Описание точек входа и точек выхода устройства (аналогично входам и выходам принципиальной схемы всего устройства).

Шаг 3: Описание точек входа и выхода элементов входящих в устройство (аналогично назначению функций ногам контроллера и другой логике в схеме)

Шаг 4: Описание архитектуры элементов входящих в устройство (вроде подбора логики типа ИЛИ-НЕ, И-НЕ, вобщем описание того как выход элемента завязан с его входом)

Шаг 5: Описание архитектуры всего устройства (типа соединения проводниками всех элементов схемы)
Чтобы это все было не голословно, попробуем создать с помощью VHDL простой элемент, например 16-ти разрядный счетчик, который считает по переднему фронту импульса.
Что еще нам надо знать, чтобы переходить к созданию первой программы на VHDL?

Основные структуры данных, с которыми мы можем работать. В литературе они называются классами объектов. Их три: — константы
— переменные

— сигналы

Константы имеют тот же смысл, что и в других языках и определяются ключевам словом **"constant"**:

```
constant MyConst: integer:=32; -- Constanta s imenem MyConst tipa integer ravnaya 32
```

Символы ”- -” означают комментарий

ВАЖНО: в VHDL нет разницы между строчными и прописными буквами в идентификаторах!!! То есть константы MyConst и mYcONST это на самом деле одна и таже константа!!! Есть еще одно важное правило: идентификатор не должен оканчиваться подчеркиванием!!!

Переменные имеют практически тот же смысл, что и в других языках. Определяются ключевым словом **"variable"**:

```
variable i: integer range 0 to 31;
```

Переменная i типа integer принимающая значения в диапазоне от 0 до 31. Описание диапазона позволяет точно определить разрядность переменной, что существенно экономит ресурсы кристалла. Присваивание переменной выполняется с помощью знака ":=".

Сигналы это очень важный класс в VHDL. Они похожи на переменные, НО физически имеют смысл проводников на печатной плате. Это значит, что сигнал всегда имеет некоторое значение. Описываются сигналы с помощью ключевого слова **"signal"**:

```
signal CLK, RESET : bit;
signal data_out : bit_vector (15 downto 0);
```

Первая строчка описывает два сигнала типа bit, вторая строчка описывает сигнал представленный в виде 16ти-разрядной шины. Причем нумерация бит (15 downto 0) или (0 to 15) имеет значение при операциях с сигналами. Назначение сигналов выполняется с помощью знака «=".

ВАЖНО!!! Все операции с сигналами выполняются параллельно. То есть код вида

```
a<=b+c;
d<=a-c;
```

совершенно не означает, что d у вас всегда будет равно b, как это было бы в Си или Паскале. Данные команды будут выполняться параллельно и существует достаточная вероятность что d будет некоторое время неравно b. «Некоторое время» зависит от задержек прохождения сигнала через различные элементы структуры ПЛИС и от прочих факторов.

Ключевое слово **process** означает описание параллельного процесса (обработки наших входных сигналов для получения выходных), который активируется «списком запуска».

ВАЖНО!!!Все логические блоки описанные как процесс выполняются параллельно друг другу!!!"

Список сигналов"это перечень сигналов, изменение которых активирует выполнение процесса.

У нас счетчик работает по переднему фронту сигнала c_in. Значит нам надо контролировать изменение этого сигнала и при обнаружении переднего фронта активировать счетчик.

```
architecture count of counter is -- arxitectura dannogo schetchika
begin
        process (c_in, res_c)
        variable cnt:integer range 0 to 65535;
        begin
                if (res_c='0') then --esli nizkiy uroven Reset - sbrasivaem schetchik
                        cnt:=0;
                elsif (c_in'event and c_in='1') then -- esli peredniy front - schitaem
                        if (enab_c='1') then cnt:=cnt+1;
                        end if;
                end if;
                c_out<=cnt;
        end process;
end count;
```

Постоянные назначения весьма полезны, но и они имеют недостатки. Такой код, когда его много, не очень легко читать. Чтобы сделать язык Verilog более выразительным, он имеет так называемые **"always"** блоки. Они используются при описании системы с помощью поведенческих блоков (behavioral blocks). Использование поведенческих блоков очень похоже на программирование на языке C. Оно позволяет выразить алгоритм так, чтобы он выглядел как последовательность действий (даже если в конечном счете в аппаратуре это будет не так).

Для описания поведенческого блока используется вот такой синтаксис:

```
always @(<sensitivity_list>) <statements>
```

$<sensitivity_list>$ – это список всех входных сигналов, к которым чувствителен блок. Это список входных сигналов, изменение которых влияет выходные сигналы этого блока. "Always"переводится как "всегда". Такую запись можно прочитать вот так: "Всегда выполнять выражения <statements> при изменении сигналов, описаных в списке чувствительности <sensitivity list>".

Если указать список чувствительности неверно, то это не должно повлиять на синтез проекта, но может повлиять на его симуляцию. В списке чувствительности имена входных сигналов разделяются ключевым словом **"or"**:

```
always @(a or b or d) <statements>
```

Иногда гораздо проще и надежней включать в список чувствительности все сигналы. Это делается вот так:

```
always @* <statements>
```

16 Билет 16. Обучение полносвязных сетей прямого распространения методом обратного распространения ошибки. Вычисление производных энергии ошибки по индуцированным локальным полям (локальных градиентов) нейронов. Формулы изменения весов нейронов, их обоснование.

Сигнал ошибки выходного нейрона j на итерации n определяется соотношением

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n) \ \ (3.1)$$

Текущее значение энергии ошибки нейрона j определим как $\frac{1}{2}e_j^2(n)$. Соответственно, текущее значение $E(n)$ общей энергии ошибки сети вычисляется путем сложения величин $\frac{1}{2}e_j^2(n)$ по всем нейронам выходного слоя. Это "видимые" нейроны, для которых сигнал ошибки может быть вычислен непосредственно. Таким образом, можно записать:

$$E(n) = \sum_{j \in C} \frac{1}{2}e_j^2(n) \ \ (3.2)$$

где множество C включает все нейроны выходного слоя сети. Пусть N — общее число образов в обучающем множестве (т. е. мощность это-го множества). Энергия среднеквадратической ошибки в таком случае вычисляется как нормализованная по N сумма всех значений энергии ошибки $E(n)$:

$$E_{av}(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E(n) \ \ (3.3)$$

Текущая энергия ошибки $E(n)$, а значит и средняя энергия ошибки E_{av} являются функциями всех свободных параметров (т. е. синаптических весов и значений порога) сети. Для данного обучающего множества энергия E_{av} представляет собой функцию стоимости (cost function) — меру эффективности обучения. Целью процесса обучения является на-стройка свободных параметров сети с целью минимизации величины E_{av}.

Рассмотрим простой метод обучения, в котором веса обновляются для каждого обучающего примера в пределах **одной эпохи (epoch)**, т. е. всего обучающего множества. Настройка весов выполняется в соответствии с ошибками, вычисленными для каждого образа, представленного в сети. Арифметическое среднее отдельных изменений для весов сети по обучающему множеству может служить оценкой реальных изменений, произошедших в процессе минимизации функции стоимости E_{av} на множестве обучения.

На рис. 3.3 изображен нейрон j, на который поступает поток сигналов от нейронов, расположенных в предыдущем слое. Индуцированное локальное поле $v_j(n)$, полученное на входе функции активации, связанной с данным нейроном, равно

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^{m} w_{ij}(n) y_i(n) \ \ (3.4)$$

где m — общее число входов (за исключением порога) нейрона j. Синаптический вес w_{j0} (соответствующий фиксированному входу $y_0 = +1$) равен порогу b_j, применяемому к нейрону j. Функциональный сигнал $y_j(n)$ на выходе нейрона j на итерации n равен

$$y_j(n) = \varphi_j(v_j(n)) \ \ (3.5)$$

Алгоритм обратного распространения состоит в применении к синаптическому весу $w_{ji}(n)$ коррекции $\Delta w_{ji}(n)$, пропорциональной частной производной $\frac{\partial E(N)}{\partial w_{ji}(n)}$. В соответствии с правилом цепочки, или цепным правилом (chain rule), градиент можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial E(N)}{\partial w_{ji}(n)} = \frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)} \ \ (3.6)$$

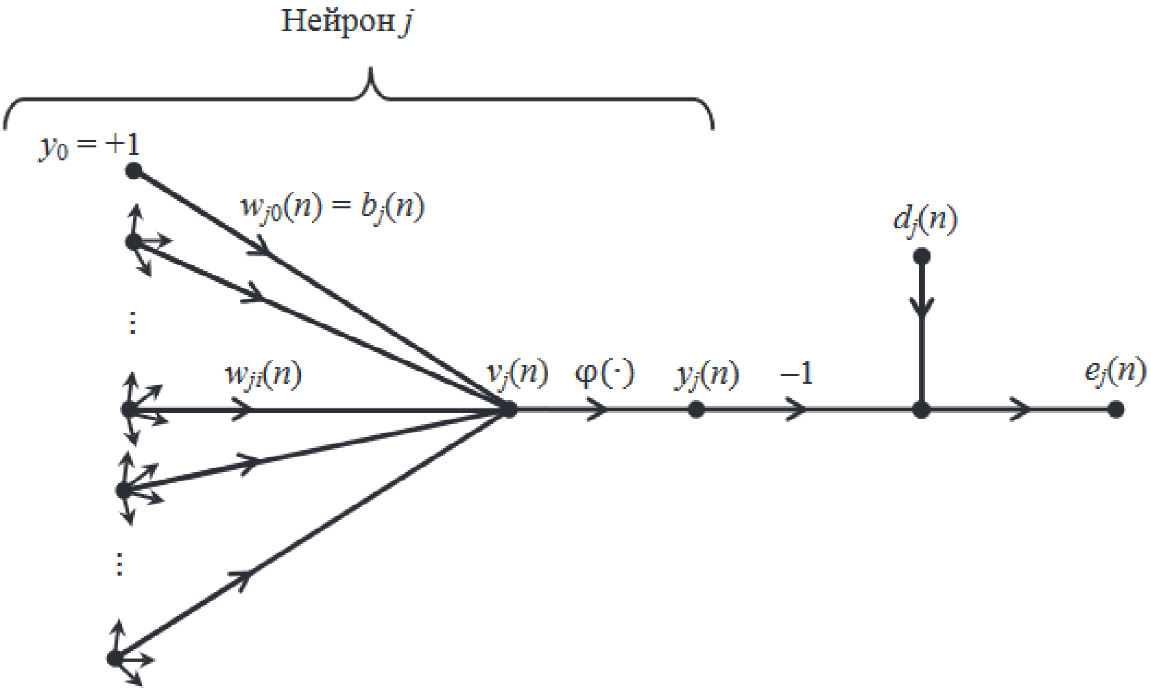


Рис. 3.3. Граф передачи сигнала в пределах нейрона *j*

Частная производная $\frac{\partial E(N)}{\partial w_{ji}(n)}$ представляет собой фактор чувствительности (sensitivity factor), определяющий направление поиска в пространстве весов для синаптического веса $w_{ji}(n)$.Дифференцируя обе части уравнения (3.2) по $e_j(n)$, получим:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} = e_j(n) \quad (3.7)$$

Дифференцируя обе части уравнения (3.1) по $y_j(n)$, получим:

$$\frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} = -1 \quad (3.8)$$

Затем, дифференцируя (3.5) по $v_j(n)$, получим:

$$\frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = \varphi_j'(v_j(n)), \quad (3.9)$$

где штрих справа от имени функции обозначает дифференцирование по аргументу. И, наконец, дифференцируя (3.4) по $w_{ji}(n)$, получим:

$$\frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)} = y_j(n), \quad (3.10)$$

Подставляя результаты (3.7)–(3.10) в (3.6), получим:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} = e_j(n)\varphi_j'(v_j(n))y_j(n) \quad (3.11)$$

Коррекция $\Delta w_{ji}(n)$, применяемая к $w_{ji}(n)$, определяется согласно дельта-правилу (delta rule):

$$\Delta w_{ji}(n) = -\eta\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} \quad (3.12)$$

где η — параметр скорости обучения (learning-rate parameter) алгоритма обратного распространения. Использование знака «минус» в (3.12) связано с реализацией градиентного спуска (gradient descent) в пространстве весов (т. е. поиском направления изменения весов, уменьшающего значение энергии ошибки $E(n)$). Следовательно, подставляя (3.11) в (3.12), получим:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \delta_j(n) y_j(n) \ \ (3.13)$$

где локальный градиент (local gradient) $\delta_j(n)$ определяется выражением

$$\delta_j(n) = -\frac{\partial E(n)}{\partial v_j(n)} = -\frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = e_j(n) \varphi_j^{'}(v_j(n)) y_j(n) \ \ (3.14)$$

Локальный градиент указывает на требуемое изменение синаптического веса. В соответствии с (3.14) локальный градиент $\delta_j(n)$ выходного нейрона j равен произведению соответствующего сигнала ошибки $e_j(n)$ этого нейрона и производной $\varphi_j^{'}(v_j(n))$ соответствующей функции активации.

Из выражений (3.13) и (3.14) видно, что ключевым фактором в вычислении величины коррекции $\Delta w_{ji}(n)$ весовых коэффициентов является сигнал ошибки $e_j(n)$ нейрона j. В этом контексте можно выделить два различных случая, определяемых положением нейрона j в сети. В первом случае нейрон j является выходным узлом. Это довольно простой случай, так как для каждого выходного узла сети известен соответствующий желаемый отклик. Следовательно, вычислить сигнал ошибки можно с помощью простой арифметической операции.

Во втором случае нейрон j является скрытым узлом. Однако даже если скрытый нейрон непосредственно недоступен, он несет ответственность за ошибку, получаемую на выходе сети. Вопрос состоит в том, как персонифицировать вклад (положительный или отрицательный) отдельных скрытых нейронов в общую ошибку. Эта проблема называется задачей назначения коэффициентов доверия (credit assignment problem) и решается с помощью метода обратного распространения сигнала ошибки по сети.

Случай 1. Нейрон j — выходной узел. Если нейрон j расположен в выходном слое сети, для него известен соответствующий желаемый отклик. Значит, с помощью выражения (3.1) можно определить сигнал ошибки $e_j(n)$(см. рис. 3.3) и вычислить градиент $\delta_j(n)$ по формуле (3.14).

Случай 2. Нейрон j — скрытый узел. Если нейрон j расположен в скрытом слое сети, желаемый отклик для него неизвестен. Следовательно, сигнал ошибки скрытого нейрона должен рекурсивно вычисляться на основе сигналов ошибки всех нейронов, с которыми он непосредственно связан. Именно здесь алгоритм обратного распространения сталкивается с наибольшей сложностью. Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 3.4, где представлен скрытый нейрон j. Согласно (3.14), локальный градиент $\delta_j(n)$ скрытого нейрона j можно переопределить следующим образом:

$$\delta_j(n) = -\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = -\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} \varphi_j^{'}(v_j(n)) \ \ (3.15)$$

где j — скрытый нейрон, а для получения второго результата использовалась формула (3.9). Для вычисления частной производной $\dfrac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)}$ выполним некоторые преобразования. На рис. 3.4 видно, что

$$E(n) = \sum_{k \in C} \frac{1}{2} e_k^2(n) \ \ (3.16)$$

где k — выходной нейрон. Соотношение (3.16) — это выражение (3.2), в котором индекс j заменен индексом k. Это сделано для того, чтобы избежать путаницы с индексом j, использованным ранее для скрытого нейрона. Дифференцируя (3.16) по функциональному сигналу $_j(n)$, получим:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_k e_k \frac{\partial e_k(n)}{\partial y_j(n)} \ \ (3.17)$$

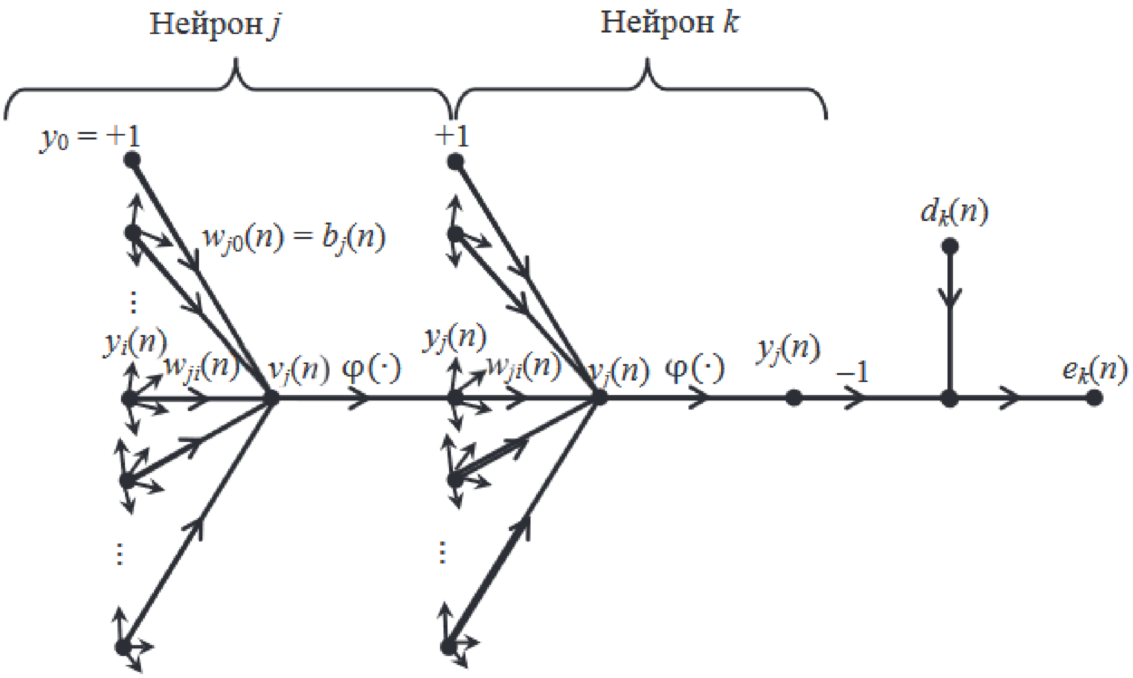


Рис. 3.4. Граф передачи сигнала, детально отражающий связь выходного нейрона k со скрытым нейроном j

Теперь к частной производной $\dfrac{\partial e_k(n)}{\partial y_j(n)}$ можно применить цепное правило и переписать (3.17) в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_k e_k(n) \frac{\partial e_k(n)}{\partial v_k(n)} \frac{\partial v_k(n)}{\partial y_j(n)} \quad (3.18)$$

Однако на рис. 3.4 видно, что для выходного нейрона k

$$e_k(n) = d_k(n) - y_k(n) = d_k(n) - \varphi_j(v_k(n)) \quad (3.19)$$

Отсюда

$$\frac{\partial e_k(n)}{\partial v_k(n)} = -\varphi_k^{'}(v_k(n)) \quad (3.20)$$

На рис. 3.4 также видно, что индуцированное локальное поле нейрона k составляет

$$v_k(n) = \sum_{j=0}^{m} w_{kj}(n) y_j(n) \quad (3.21)$$

где m — общее число входов (за исключением порога) нейрона k. Здесь синаптический вес $w_{k0}(n)$ равен порогу b_k, приходящемуся на нейрон k, а соответствующий вход имеет фиксированное значение +1. Дифференцируя (3.21) по $y_j(n)$, получим:

$$\frac{\partial v_k(n)}{\partial v_j(n)} = w_{kj}(n) \quad (3.22)$$

Подставляя (3.20) и (3.22) в (3.18), получим:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} = -\sum_k e_k(n)\varphi_k^{'}(v_k(n)) w_{kj}(n) = -\sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \quad (3.23)$$

где для получения второго результата использовано определение локального градиента (3.14), в котором индекс j заменен индексом k по уже упомянутым соображениям.

В заключение, подставляя выражение (3.23) в (3.15), получим формулу обратного распространения (back-propagation formula) для локального градиента $\delta_j(n)$ скрытого нейрона j:

$$\delta_j(n) = \varphi_j'(v_j(n)) \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \quad (3.24)$$

На рис. 3.5 графически представлена формула (3.24) в предположении, что выходной слой состоит из m_L нейронов.

Множитель $\varphi_j'(v_j(n))$, использованный в формуле (3.24) для вычисления локального градиента $\delta_j(n)$, зависит исключительно от функции активации, связанной со скрытым нейроном j. Второй множитель формулы (сумма по k) зависит от двух множеств параметров. Первое из них — $\delta_k(n)$ — требует знания сигналов ошибки $e_k(n)$ для всех нейронов слоя, находящегося правее скрытого нейрона j, которые непосредственно связаны с нейроном j (см. рис. 3.4). Второе множество — $w_{kj}(n)$— состоит из синаптических весов этих связей. Теперь

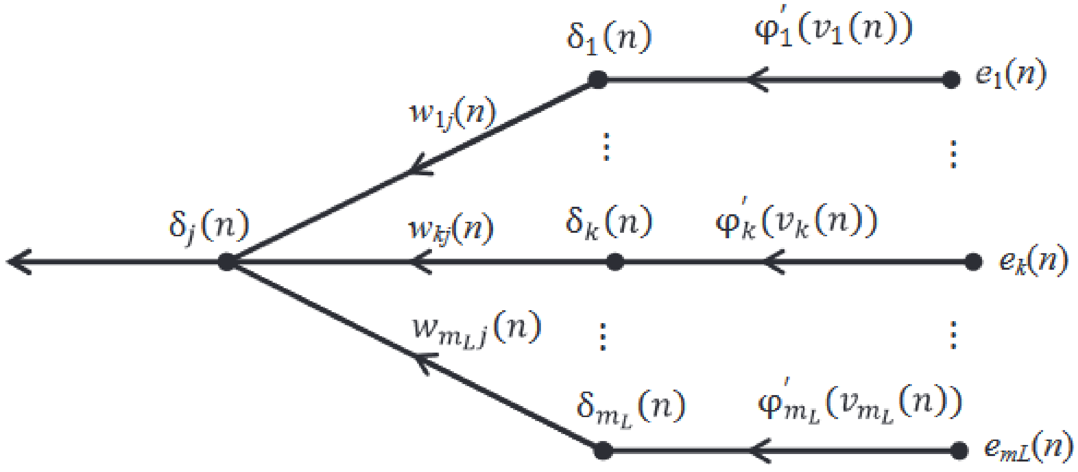


Рис. 3.5. Граф передачи сигнала для фрагмента системы, задействованного в обратном распространении сигналов ошибки

можно свести воедино все соотношения, которые мы вывели для алгоритма обратного распространения. Во-первых, коррекция $\Delta w_{ji}(n)$, применяемая к синаптическому весу, соединяющему нейроны i и j, определяется следующим дельта-правилом: Во-вторых, значение локального градиента $\delta_j(n)$ зависит от положения нейрона

$$\begin{pmatrix} \text{коррекция} \\ \text{веса} \\ \Delta w_{ji}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{параметр} \\ \text{скорости обучения} \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{локальный} \\ \text{градиент} \\ \delta_j(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{входной сигнал} \\ \text{нейрона } j \\ y_j(n) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

в сети.

1. Если нейрон j — выходной, то градиент$\delta_j(n)$ равен произведению производной $\varphi_j'(v_j(n))$ на сигнал ошибки $e_j(n)$ для нейрона j (см. (3.14)).

2. Если нейрон j — скрытый, то градиент $\delta_j(n)$ равен произведению производной $\varphi_j'(v_j(n))$ на взвешенную сумму градиентов, вычислен-ных для нейронов следующего скрытого или выходного слоя, которые непосредственно связаны с данным нейроном j (см. (3.24)).

Два прохода вычислений.

При использовании алгоритма обратного распространения различают два прохода, выполняемых в процессе вычислений. Первый проход называется прямым, второй — обратным. При прямом проходе (forward pass) синаптические веса остаются неизменными во всей сети, а функциональные сигналы вычисляются последовательно, от нейрона к нейрону. Функциональный сигнал на выходе нейрона j вычисляется по формуле

$$y_j(n) = \varphi(v_j(n)) \ \ (3.26)$$

где $v_j(n)$ — индуцированное локальное поле нейрона j; определяемое выражением

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^{m} w_{ji}(n) y_j(n) \ \ (3.27)$$

где m — общее число входов (за исключением порога) нейрона j; $w_j i(n)$ — синаптический вес, соединяющий нейроны i и j; $y_i(n)$— входной сигнал нейрона j или выходной сигнал нейрона i. Если нейрон j расположен в первом скрытом слое сети, то $m = m_0$, а индекс i относится к i-му входному терминалу сети, для которого можно записать

$$y_i(n) = x_i(n) \ \ (3.28)$$

где $x_i(n)$ — i-й элемент входного вектора (образа). С другой стороны, если нейрон j расположен в выходном слое сети, то $m = m_L$, а индекс j означает j-й выходной терминал сети, для которого можно записать

$$y_i(n) = o_j(n) \ \ (3.29)$$

где $o_j(n)$— i-й элемент выходного вектора.

Выходной сигнал сравнивается с желаемым откликом $d_j(n)$, в результате чего вычисляется сигнал ошибки $e_j(n)$ для j-го выходного нейрона. Таким образом, прямая фаза вычислений начинается с представления входного вектора первому скрытому слою сети и завершается в последнем слое вычислением сигнала ошибки для каждого нейрона этого слоя. Обратный проход начинается с выходного слоя предъявлением ему сигнала ошибки, который передается справа налево от слоя к слою с параллельным вычислением локального градиента для каждого нейрона. Этот рекурсивный процесс предполагает изменение синаптических весов в соответствии с дельта-правилом (3.25). Для нейрона, расположенного в выходном слое, локальный градиент равен соответствующему сигналу ошибки, умноженному на первую производную нелинейной функции активации. Затем соотношение (3.25) используется для вычисления изменений весов, связанных с выходным слоем нейронов. Зная локальные градиенты для всех нейронов выходного слоя, с помощью (3.24) можно вычислить локальные градиенты всех нейронов предыдущего слоя, а значит, и величину коррекции ве-сов связей с этим слоем. Такие вычисления проводятся для всех слоев в обратном направлении. Заметим, что очередной обучающий пример «фиксируется» на все время прямого и обратного проходов.

17 Билет 17. Теорема о реализации кусочно-постоянных функций из линейных функций и функции Хэвисайда с использованием операций суперпозиции

Искусственные нейронная сеть (artificial neural network, ANN), или просто нейронная сеть — это математическая модель, а также ее программные или аппаратные реализации, построенная в некотором смысле по образу и подобию сетей нервных клеток живого организма.

Нейронные сети рассматриваются с точки зрения теории схем из функциональных элементов и теории структурных автоматов. Нейронные схемы мы строим из некоторого множества элементов, используя операции суперпозиции и обратной связи. В этих условиях показано, что для любой нейронной схемы может быть построена эквивалентная ей схема с использованием не более одной операции обратной связи. Кроме того, показано, что для каждой нейронной схемы без памяти существует эквивалентная ей сеть, нелинейная глубина которой не более двух. Рассмотрим следующие функции:

Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ – алфавит входных переменных.

1. Константа $g_c \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$

2. Сумматор с n входами Σ_n , $n \in \{2, 3, ...\}$, $\Sigma_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Sigma_n(a_1, .., a_n) = a_1 + ... + a_n$, где $a_i \in \mathbb{R}$ при $i = 1, .., n$

3. Усилитель (умножение) f_γ , $\gamma \in \mathbb{R}$, $f_\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\gamma(a) = \gamma a$

4. Функция θ (функция Хевисайда) , $\theta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$$\theta(a) = \begin{cases} 1 & \text{, если } a \geq 0 \\ 0 & \text{, если } a < 0, \end{cases}$$

5. Функция F , $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$F(a, b) = \begin{cases} a & \text{, если } b > 0 \\ 0 & \text{, если } b \leq 0, \end{cases}$$

Множество таких функций обозначим $\Delta^{'}$.

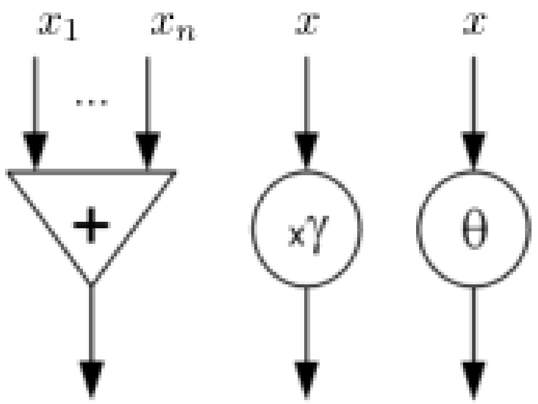


Рис. 1: Функции из Δ'

Определение. Нейронной схемой без памяти называется ориентированный нагруженный граф $G = (V, W)$, $|V| < \infty$, $W \subseteq V \times V$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) нет ориентированных циклов;

2) каждой вершине со степенью захода 0 приписана либо некоторая входная переменная из множества $\{x_1, x_2, ...\}$, либо константа g_c ;

3) каждой вершине со степенью захода 1 приписан элемент f_γ или θ ;

4) каждой вершине со степенью захода 2 приписан элемент Σ_2 или F ;

5) каждой вершине со степенью захода $n \geq 3$ приписан элемент Σ_n ;

6) одной из вершин дополнительно приписана выходная переменная z .

Вершины, которым приписаны функции из $\Delta^{'}$, называются **функциональными вершинами**. Рассмотрим ориентированные пути в графе, ведущие от вершин со степенью захода 0 к вершине, которой приписана выходная переменная z. **Длиной пути** называется число нелинейных элементов (θ или F), содержащихся в нем. **Нелинейной глубиной нейронной схемы** называется длина самого длинного пути. каждая нейронная схема без памяти реализует некоторую функцию. Множество, состоящее из всех функций, реализуемых нейронными схемами без памяти, обозначим $\mathfrak{L}$. Запись (S, f) означает, что схема S реализует функцию f. Число функциональных элементов называется **сложностью нейронной схемы**.

Определение. Две схемы из элементов $\Delta^{'}$ эквивалентны, если они реализуют одинаковые функции.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется **линейной**, если найдутся $\bar{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ и $c \in \mathbb{R}$, такие что $f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{a} + c$, где под операцией $\cdot$ понимается скалярное произведение векторов. Множество всех линейных функций обозначим через L.

Определение. Пусть l_i – гиперплоскость, задаваемая уравнением $\bar{x} \cdot \bar{a}_i + c_i = 0$, $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, .., k$. Для каждой точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим вектор $\sigma(\bar{x}) = (\sigma_1, ..., \sigma_k)$ с компонентами из множества $\{-1, 0, 1\}$, $\sigma_i = sgn(\bar{x} \cdot \bar{a}_i + c_i)$, где

$$sgn(b) = \begin{cases} -1 & \text{, если } b < 0 \\ 0 & \text{, если } b = 0 \\ 1 & \text{, если } b > 0 \end{cases}$$

Определение. Две точки $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ эквивалентны относительно гиперплоскостей $l_1, .., l_k \Leftrightarrow \sigma(\bar{x}) = \sigma(\bar{y})$, обозначим это через $\bar{x} \sim \bar{y}$. Отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности. Таким образом, пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается на классы эквивалентности $R_1, .., R_s$. Сигнатурой класса R_j называется вектор $\sigma(R_j) = \sigma(\bar{x})$, где $\bar{x} \in R_j$ $j = 1, .., s$.

[3] Пусть $R_1, ..R_s$ – все классы эквивалентности, на которые гиперплоскости $l_1, .., l_k$ разбивают $\mathbb{R}^n$.

Определение. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется **кусочно-линейной**, если $\forall j \in \{1, .., s\}$ найдутся $\bar{b}_j \in \mathbb{R}^n$ и $d_j \in \mathbb{R}$, что для всех $\bar{x} \in R_j$ выполняется $f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{b_j} + d_j$.
Линейную функцию $\bar{x} \cdot \bar{b_j} + d_j$, реализуемую на множестве R_j, обозначим $f_{R_j}(\bar{x})$. Множество всех кусочно-линейных функций обозначим через PL.

Определение.(А. Н. Кан, Вопросы полноты в классе кусочно-линейных непрерывных функций, Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 2017, том 21, выпуск 2, 46–56) Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется **кусочно-постоянной**, если $\forall j \in \{1, .., s\}$ найдутся $d_j \in \mathbb{R}$, что для всех $\bar{x} \in R_j$ выполняется $f(\bar{x}) = d_j$. Множество всех кусочно-постоянных функций обозначим через PC.

Определим множество кусочно-параллельных функций следующим выражением:

$$PP = \{f | f_c + f_l, f_c \in PC, f_l \in L\}$$

Лемма. Пусть функция $f \in PL$, тогда функция $g(\bar{x}) = \theta(f(\bar{x}))$ – кусочно-постоянна.

Доказательство. Пусть f задана гиперплоскостями $l_1, ..., l_k$, делящих $\mathbb{R}^n$ на классы эквивалентности $R_1, .., R_s$, на которых она линейна и для всех $j = 1, .., s$ выполнено: при $\bar{x} \in R_j$ $f(\bar{x}) = f|_{R_{\underline{j}}} = \bar{b}_j \cdot \bar{x} + d_j$, где $\bar{x}_j \in \mathbb{R}^n$ $d_j \in \mathbb{R}$. Тогда на классах R_j, $j = 1, .., s$, функция $\theta(\bar{b}_j \cdot \bar{x} + d_j)$, т.е. равна 1 , при $\bar{b}_j \cdot \bar{x} + d_j \geq 0$ и равна 0 иначе. Ввиду линейности условий, функция $g(\bar{x})$ является кусочно-постоянной, принимает значения 0 или 1 и задается следующим набором гиперплоскостей: $l_1, .., l_k$ и теми $l_j^{'} = \{\bar{x} | \bar{b}_j \cdot \bar{x} + d_j = 0\}$, где $\bar{b}_j \neq \bar{x}$, $j = 1, .., s$.

Множество функций, реализуемых нейронными схемами Мак-Каллока-Питтса обозначим $\mathfrak{L}^{'}$

Теорема. Множество функций, реализуемых нейронными схемами Мак-Каллока-Питтса, совпадает с множеством всех кусочно-параллельных. И для любой кусочно-параллельной функции существует нейронная схема Мак-Каллока-Питтса нелинейной глубины не более двух.

Доказательство. Докажем включение $\mathfrak{L}^{'} \subseteq PP$.

Пусть (S, f) – нейронная схема Мак-Каллока-Питтса. Из строения схемы можно заключить, что функция f имеет следующий вид:

$$f(\bar{x}) = c_1 f_1(\bar{x}) + ... + c_p f_p(\bar{x}) + f_l \ (1),$$

где p – некоторое натуральное число (может быть нулевым), $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., p$, $f_l \in L$. Функции $f_1, ..., f_p$ являются кусочно-постоянными по лемме, так как они образованы подсхемами $(S_1, f_1), ..., (S_p, f_p)$ с выходными элементами θ, а функции $f_1, .., f_p$ являются кусочно-линейными. По определению кусочно-параллельных функций, ввиду линейности пространства PC и выражения (1), следует, что $f \in PP$.

Докажем обратное включение $\mathfrak{L}^{'} \supseteq PP$.
Пусть f – кусочно-параллельная функция. По определению, существует $f_c \in PC$ и $f_l \in L$, что $f = f_c + f_l$. Построив схему для линейной функции f_l согласно рис.2 и поддав на входы сумматора выходы схем для функции f_l и f_c, мы получим искомую схему Мак-Каллока-Питтса для произвольной функции f.

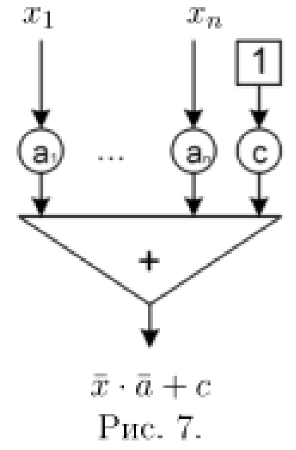


Рис. 2: Любая линейная функция $u(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{a} + c$, $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ может быть реализована нейронной схемой без памяти

Покажем теперь, как построить схему Мак-Каллока-Питтса для произвольной функции $f_c \in PC$

Пусть кусочно-постоянная функция f_c задана гиперплоскостями $l_i : \bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i = 0$, $i = 1, ., k$, которые разбивают $\mathbb{R}^n$ на классы эквивалентности $R_1, ..R_s$, что для некоторых действительных $d_1, ..., d_s$ при $\bar{x} \in R_j$ выполнено $f(\bar{x}) = f_{R_j} = d_j$, $j = 1, ..s$. Будем строить схему для функции f_c по формуле

$$f_c(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{s} d_j \theta \left(\sum_{i=1}^{k} \chi(sgn(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = {\sigma_j}^i) - k \right), \ (2)$$

, а формула построения схемы для функции f будет иметь вид

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{s} d_j \theta \left(\sum_{i=1}^{k} \chi(sgn(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = {\sigma_j}^i) - k \right) + f_l, \ (3),$$

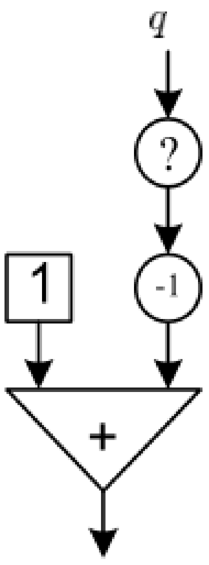
где ${\sigma_j}^i$ – i – я компонента вектора сигнатуры класса $\sigma(R_j)$, $i = 1, .., k, \ j = 1, ..., s$, а обозначение χ раскрывается по следующим формулам:

$$\chi(sgn(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = 1) = \theta^{'}(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = 1 - \theta(-\bar{a}_i \cdot \bar{x} - c_i), \ (4)$$

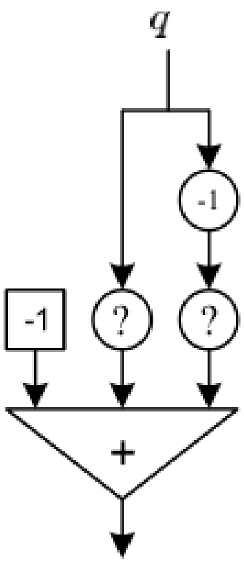
$$\chi(sgn(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = 0) = \theta(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) + \theta(-\bar{a}_i \cdot \bar{x} - c_i) - 1, \ (5)$$

$$\chi(sgn(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = -1) = 1 - \theta(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i), \ (6)$$

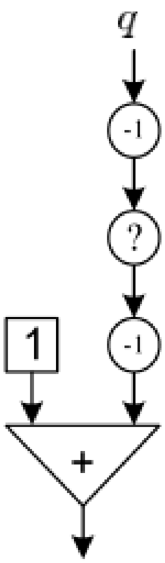
Схемная реализация χ имеет нелинейную глубину один и не содержит элементов F



$A_1(q)$



$A_0(q)$



$A_{-1}(q)$

Список дополнительных вопросов с междисциплинарного экзамена (2021). Только вопросы по непрерывной части

1. а) $y = |x|$, $y = sgn(x)$. Разложить в ряд Фурье в окрестности точки 0, $(-\pi, \pi)$

б) Теорема Дини

в) $y = sin(x)$, в точке $\dfrac{\pi}{2}$ куда сходится ряд Фурье?

г) Для каких функций работает формула Ньютона-Лейбница?

д) Что есть алгебра множеств?

е) Что такое измеримая функция (на измеримом пространстве, по Лебегу)?

ё) Непрерывная функция будет измеримой?

2. а) Интегрируема ли эта функция по Риману? Интегрируема ли по Лебегу?

$$y = \begin{cases} 1/x\,,\ 0 < x \leq 1 \\ 0\,,\ x = 0 \end{cases}$$

б) Что такое заряды на сигма-алгебре?

в) Теорема Жордана

3. а) Приведите пример функции $\varphi(D)$

б) Какая сингулярность у функции Дирака?

в) Лебеговская мера будет ли Борелевской? Станет ли она таковой, если мы рассмотрим ее только на борелевских множествах?

4. а) Докажите свойства борелевских мер

б) Что такое сигма-алгебра, какими свойствами обладает?

5. а) Что такое метрическое пространство?

б) Что такое открытое множество?

в) Что такое окрестность? Приведите пример окрестности в $\mathbb{R}^n$. Напишите формулу шара.

г) Что такое замкнутое множество?

д) Докажите монотонность борелевской меры

е) Расскажите теорему Котельникова

6. а) Дана алгебра и мера. Как расширить меру на сигма-алгебру?

б) Как связаны между собой интегралы Римана и Лебега?

в) Что такое измеримая функция?

7. а) Почему существует интеграл из обратного преобразования Фурье?

б) Чему равно $|e^{i\varphi}|$

в) Что такое аналитическая функция в области D?

г) Расскажите про интеграл Фурье функции, определенной в интервале $(-\pi;\pi)$

д) Расскажите про заряд и теорему Жордана

8. а) Проверьте для $(f,\varphi)=\varphi[0](0)$ условия линейности

б) Измеримость множества на прямой по Лебегу и Борелю

Список дополнительных вопросов с междисциплинарного экзамена (2020)

1. а) Что такое жадный алгоритм? Какой должна быть структура данных чтобы жадный алгоритм давал оптимальное решение? (Строгалов)

б) Задача построения минимального остовного дерева - существует ли жадный алгоритм? (Строгалов)

в) Что такое phi* в определении положительной определенности обобщенной функции? (Садуллаев)

г) Что такое сингулярная обобщенная функция бесконечного порядка? (Садуллаев)

д) Что такое заряд? (Садуллаев)

е) Существует ли не интегрируемая обобщенная функция? (Садуллаев)

2. а) Какие условия накладываются на функцию в интегральном преобразовании Фурье? (Садуллаев)

б) При каких условиях верна формула для обратного преобразования Фурье? (Садуллаев)

в) В чем практический смысл преобразования Фурье? (Альхамов)

г) Сделать дискретное преобразование Фурье для функции x1+x2(mod 2). (Носов)

д) Что такое ситуация равновесия? (Дергач)

е) Что такое равновесие по Нэшу, равновесие по Парето? (Дергач)

ж) Что такое седловая точка? (Альхамов)

3. а) Что такое целая функция? Приведите пример? (Садуллаев)

б) Дайте определение ряда Фурье. (Садуллаев)

в) Что такое пространство L2? Можно ли там ввести скалярное произведение? (Садуллаев)

г) Чем отличается дискретное преобразование Фурье от непрерывного? (Альхамов)

д) Откуда берется параметр обучения? (Строгалов)

е) Сколько может быть скрытых слоев? (Строгалов)

ж) Что понимают под обратным распространением ошибки? (Алексеев)

з) Можно ли ксор распознать персептроном? (Пантелеев)

4. а) Что такое продолжение меры? (Чилин)

б) Что такое борелевская мера? (Чилин)

в) Что такое заряд? (Чилин)

г) Что такое теорема Хана о разложении? (Чилин)

д) Применить теорему Жордана к интегралам Лебега на отрезке [0,1].(Чилин)

е) Почему любую булеву функцию можно представить контактной схемой? (Строгалов)

ж) Построить СФЭ для x1+x2+x3(mod 2) в стандартном базисе. (Строгалов)

5. а) Что такое инверсная неисправность? (Дергач)

б) Что такое функция Шеннона в вашей теореме? (Дергач)

в) Какую задачу мы решаем в этом билете? (Гасанов)

г) В чем отличие проверяющего теста от диагностического? (Гасанов)

д) Будет ли алгеброй счетное пересечение алгебр? (Садуллаев)

е) Что такое метрическое пространство? (Пантелеев)

ж) Почему существует минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые множества? (Чилин)

з) Пример алгебры, которая не является сигма-алгеброй. (Чилин)

и) Почему счетное множество не содержит в себе континуум? (Чилин)

к) Чему равна мощность множества всех подмножеств счетного множества? (Строгалов)

6. а) Сформулируйте общий вид задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП). (Строгалов)

б) Что такое двойственная задача? (Пантелеев)

в) К какому классу сложности относится задача ЦЛП? (Носов)

г) Как отделить легкие случаи задачи ЦЛП от трудных? (Носов)

д) Почему метод отсечения Гомори называется отсечением? (Дергач)

е) Почему отсечение сохраняет оптимальное решение? (Дергач)

ж) Каким еще способом кроме отсечений Гомори можно решать задачу ЦЛП? (Альхамов)

з) Определение вероятностного пространства. (Садуллаев)

и) Почему существует мера у носителей по значениям простой функции? (Садуллаев)

к) Пример интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману функции. (Чилин)

Приложение

Билет 1. Алгебры и σ - алгебры множеств, меры. Примеры и свойства.

С помощью математической индукции устанавливается, что для алгебры подмножеств $\mathfrak{N} \subseteq 2^X$ всегда выполняется включение $\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n \in \mathfrak{N}$, если $A_n \in \mathfrak{N}$, $n = 1, 2, ..., k$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, используя равенство, $A \cap B = X$ $((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$, получим, что $A \cap B \in \mathfrak{N}$ для любых $A, B \in \mathfrak{N}$. После чего, с помощью математической индукции устанавливается, что $\bigcap\limits_{n=1}^{k} A_n \in \mathfrak{N}$, если $n = 1, ..., k, k \in \mathbb{N}$.

Счетная аддитивность длины.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ систему $\sigma[a, b] = \{[\alpha, \beta], [\alpha, \beta), (\alpha, \beta], (\alpha, \beta)\}$, $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. всех отрезков, интервалов и полуинтервалов. Положим

$$\mathcal{N}[a, b] = \{A = \bigcup_{i=1}^{n} P_i,\ P_i \in \sigma[a, b],\ i = 1, ..., n, n \in \mathbb{N}\}$$

. Каждое множество из системы $\mathcal{N}[a, b]$ называется элементарным подмножеством. Система $\mathcal{N}[a, b]$ есть алгебра множеств, но $\mathcal{N}[a, b]$ не является σ-алгеброй подмножеств в $[a, b]$.

Используя математическую индукцию, показывается, что любое множество $A \in \mathcal{N}[a, b]$ единственным образом представляется в виде

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} P_i\,, P_i \in \sigma[a, b]\,, P_i \cap P_j = \emptyset\,, i \neq j\ \in \{1, ..., n\},\ n \in \mathbb{N}$$

Определим действительную функцию $m : \mathcal{N}[a, b] \to \mathbb{R}$,
полагая $m((\alpha, \beta)) = m((\alpha, \beta]) = m([\alpha, \beta)) = m([\alpha, \beta]) = \beta - \alpha$,

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i),\ P_i \in \sigma[a, b]\,, P_i \cap P_j = \emptyset\,, i \neq j\ \in \{1, ..., n\},\ n \in \mathbb{N}$$

.

Мера m на алгебре множеств $\mathcal{N}[a, b]$ является счетно-аддитивной мерой.

Билет 2. Интеграл Лебега для измеримых функций. Связь интегралов Лебега и Римана.

Если измеримая функция f интегрируема по Лебегу, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$ существует.

Действительно, если измеримая функция f интегрируема по Лебегу, то существует последовательность простых интегрируемых функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $f_n \rightrightarrows f$ на X. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n(\varepsilon)$, что $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ для всех номеров $n, m \geq n(\varepsilon)$ и для любого $x \in X$. Поэтому из неравенств

$$|\int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X f_m d\mu| \leq \int\limits_X |f_n - f_m| d\mu < \int\limits_X \varepsilon d\mu = \varepsilon\mu(X)\ , n, m \geq n(\varepsilon)$$

вытекает, что последовательность чисел $\{\int\limits_X f_n d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

Свойства

1. Если $f, g \in \mathcal{L}_1(X)$, то $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_1(X)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, при этом,

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$$

2. Если $f \in \mathcal{L}_1(X)$ и $f \geq 0$, то $\int\limits_X f d\mu \geq 0$.

3. Если $f, g \in \mathcal{L}_1(X)$ и $f \leq g$, то верно равенство

$$\int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X g d\mu$$

4. Если $f \in \mathcal{L}_0(X)$, то $f \in \mathcal{L}_1(X)$ тогда и только тогда, когда $|f| \in \mathcal{L}_1(X)$. При этом верно равенство

$$\left| \int\limits_X f d\mu \right| \leq \int\limits_X |f| d\mu$$

5. Если $f \in \mathcal{L}_0(X)$, $g \in \mathcal{L}_1(X)$ и $|f| \leq |g|$, то $f \in \mathcal{L}_1(X)$

Следствие. Если $f \in \mathcal{L}_0(X)$ ограниченная функция на X, то $f \in \mathcal{L}_1(X)$

6. Если $f \in \mathcal{L}_0(X)$ и $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ для всех $x \in X$, то $f \in \mathcal{L}_1(X)$ и существует такое число $\gamma \in [\alpha, \beta]$, что $\int\limits_X f d\mu = \gamma \mu(X)$

7. Если $A, B \in \mathfrak{M}$, $A \subset B$ и $f \in \mathcal{L}_1(B)$, то $f, |f| \in \mathcal{L}_1(A)$, при этом,$\int\limits_A |f| d\mu \leq \int\limits_B |f| d\mu$

8. Если $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$, $f \colon X \to \mathbb{R}$ – произвольная функция, то $f \in \mathcal{L}_1(A)$ и $\int\limits_A f d\mu = 0$

Теорема (Свойство счетной-аддитивности интеграла Лебега). Если $A_n \in \mathfrak{M}$ и $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m,\ n, m \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $f \in \mathcal{L}_1(A)$, то $f \in \mathcal{L}_1(A_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и верно равенство

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f d\mu$$

Теорема (Достаточное условие для справедливости обратного утверждения к предыдущей теореме). Пусть $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m, n, m \in \mathbb{N}$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Если $f \in L_1(A_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} |f| d\mu$ сходится, то $f \in \mathcal{L}_1(A)$.

Следствие 1. Если $f \in \mathcal{L}_1(A_n)$, $A_n \in \mathfrak{M}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ при $n \neq m$, $n, m = 1, 2, ..., k$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n$, то $f \in \mathcal{L}_1(A)$ и

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f d\mu$$

Следствие 2. Если $f \in \mathcal{L}_1(X)$, $g\colon X \to \mathbb{R}$, и $f = g$ почти всюду, то $g \in \mathcal{L}_1(X)$ и

$$\int\limits_X g d\mu = \int\limits_X f d\mu$$

Теорема (Свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега).
Если $f \in \mathcal{L}_1(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\int\limits_A |f| d\mu < \varepsilon$ для каждого множества из $A \in \mathfrak{M}$ с мерой $\mu(A) < \delta$.

Следствие. Если $f \in \mathcal{L}_1(X)$ и $A_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\int\limits_{A_n} |f| d\mu \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема (Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега).
Если $f_n \in \mathcal{L}_0(X)$, $|f_n| \le \varphi \in \mathcal{L}_1(X)$, $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, то $f \in \mathcal{L}_1(X)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$

Следствие. Пусть $f, f_n \in \mathcal{L}_1(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $|f_n| \le \varphi \in \mathcal{L}_1(X)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$$

.

Утверждение (Неравенство Чебышева). Если $f \in \mathcal{L}_1(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ верно неравенство $\mu(\{|f| \ge \varepsilon\}) \le \dfrac{1}{\varepsilon} \int\limits_X |f| d\mu$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}_1(X)$,$\varepsilon > 0$, $A = \{|f| \ge \varepsilon\} \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$\int\limits_X |f| d\mu = \int\limits_A |f| d\mu + \int\limits_{X \setminus A} |f| d\mu \ge \int\limits_A |f| d\mu \ge \int\limits_A \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu(A),$$

т.е. $\mu(\{|f| \ge \varepsilon\}) = \mu(A) \le \dfrac{1}{\epsilon} \int\limits_X |f| d\mu$

Следствие. $f \in \mathcal{L}_1(X)$ и $\int\limits_X |f| d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду.

Доказательство. В силу неравенства Чебышева, для множества $A_n = \{|f| \ge \dfrac{1}{n}\} \in \mathfrak{M}$ имеем

$$0 \le \mu(A_n) = \mu(\{|f| \ge \frac{1}{n}\}) \le n \int\limits_X |f| d\mu = 0 \text{ , т.е. } \mu(A_n) = 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}$$

Таким образом, $0 \le \mu(\{|f| > 0\}) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$ т.е. $\mu(\{|f| > 0\})$, что влечет равенство $f = 0$ почти всюду.

Теорема (Леви). Пусть $0 \le f_n \le f_{n+1}$, $f_n \in \mathcal{L}_1(X)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\int\limits_X f_n d\mu \le K$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такая интегрируемая по Лебегу функция f, что $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$.

Следствие. Если $f_n \leq f_{n+1}$ (соответственно, $f_n \geq f_{n+1}$), $f_n \in \mathcal{L}_1(X), n \in \mathbb{N}$, и $\int\limits_X f_n d\mu \leq K$ (соответственно, $\int\limits_X f_n d\mu \geq K$) для всех $n \in \mathbb{N}$, то существует такая функция $f \in \mathcal{L}_1(X)$, что $f_n \overset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$.

Следствие. Если $0 \leq f_n \in \mathcal{L}_1(X)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathcal{L}_1(X)$ почти всюду, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$

Теорема (Фату). Пусть $0 \leq f_n \in \mathcal{L}_1(X)$, $\int\limits_X f_n d\mu \leq K$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \overset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} f$. Тогда $f \in \mathcal{L}_1(X)$ и $\int\limits_X f d\mu \leq K$.

Билет 3. Борелевские меры и их свойства. Заряды. Теорема Жордана.

Источник: Садуллаев А.С. Борелевские меры, интегралы и потенциалы. Из-во Академии Мамуна, 2018.

Определение Рассмотрим в области $D \subset R^n$ кольцо множеств $\mathcal{F}$, порожденное компактами $K \subset D$. Это означает, что $\mathcal{F}$ содержит помимо всех компактов, их разности $K_1 \setminus K_2$ и их конечные суммы. σ-аддитивная функция $\mu : \mathcal{F} \to R_+$ называется мерой. σ-аддитивность μ означает, что если множество $A \in \mathcal{F}$ представляется в виде $A = \bigcup\limits_j A_j$, $A_j \cap A_i = \emptyset$ при $i \neq j$, то $\mu(A) = \sum\limits_j \mu(A_j)$.

Для продолжения μ на более широкий класс множеств, для простоты дополнительно требуем, чтобы μ была ограниченной, т.е. существования такой константы C такой, что $\mu(A) \leq C$ для всех $A \in \mathcal{F}$. Если это требование не выполняется, то для продолжения μ мы можем воспользоваться представлением $D = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j$, где $D_j \subset D_{j+1} \subset\subset D$, исчерпание D изнутри компактными областями D_j. Продолжение меры μ на σ-алгебру множеств $E \subset \mathcal{M}$ будет абстрактной мерой Лебега. Она называется борелевской мерой в области D.

Заряды. Разность двух борелевских мер $\nu = \mu_1 - \mu_2$ называется зарядом. Таким образом, заряды - это σ-аддитивная, вещественнозначная функция, определенная на всех борелевских множествах. Напомним, что σ-аддитивная, вещественнозначная функция множества на топологических пространствах пространствах также называется мерой Радона.

Теорема (Жордан) Для любого заряда ν существуют два непересекающиеся борелевские множества $D^- \cup D^+ = D$ такие, что $\nu(E) \leq 0$ при $E \subset D^-$ и $\nu(E) \geq 0$ при $E \subset D^+$

Источник: Чилин В.И. Теория интегрирования. Учебное пособие. Ташкент. Национальный университет Узбекистана. 2018. 179 с.

Число $\mu^*(A) = inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n) \colon \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \sigma(A)\}$ называется внешней мерой множества $A \subset X$.

Множество $A \subset X$ называется измеримым по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathfrak{N}$, что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

Систему всех измеримых по Лебегу подмножеств из X обозначим через $\mathfrak{M}$. Определим на $\mathfrak{M}$ действительную функцию $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, полагая $\mu(A) = \mu^*(A)$ для каждого множества $A \in \mathfrak{M}$.

Теорема Лебега о продолжении меры.

(i). Система $\mathfrak{M}$ всех измеримых по Лебегу подмножеств из X является алгеброй множеств из X, при этом, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$;
(ii). Для любого $A \in \mathfrak{N}$ верно равенство $m(A) = \mu(A)$;
(iii). μ есть счетно аддитивная мера на $\mathfrak{M}$;
(iv). $\mathfrak{M}$ является σ-алгеброй подмножеств из X;
(v). μ — полная мера, т.е. из $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$, $B \subset A$ следует, что $B \in \mathfrak{M}$.

Билет 4. Положительно определенные обобщенные функции. Порядок сингулярности обобщенных функций.

Обобщенная функция. Если в D дана локально интегрируемая функция $f(x) \in L^1_{loc}$, то в $F(D)$ определен следующий функционал.

$$f(\varphi) = \int\limits_D f(x)\varphi(x)dV \ \ ,\varphi \in F(D)$$

. Этот функционал линеен и непрерывен.

Таким образом, любая функция $f(x) \in L^1_{loc}$ определяет некий функционал, т.е. любая такая функция есть функционал в $F(D)$.

Функционалу $f(\varphi) = \varphi(x^0)$, где $x^0 \in D$ фиксированная точка, не соответствует никакая функция f, т.е. не существует функция $f(x) \in L^1_{loc}(D)$, такая, что $\int\limits_D f(x)\varphi(x)dx = \varphi(x^0)$, $\forall \varphi \in F(D)$! Следовательно, класс функционалов шире, чем класс $L^1_{loc}(D)$

Определение. Линейно-непрерывный функционал f в пространстве $F(D)$ называется обобщенной функцией.

Положительно определенные обобщенные функции. Обобщенная функция ψ называется положительно определенной, если $\psi(\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in F(D)$ и $\varphi \geq 0$.

Примеры.

а) Неотрицательная функция $f(x) \in L^1_{loc}(D)$ определяет положительный функционал: $f(\varphi) = \int\limits_D f(x)\varphi(x)dV \geq 0$, $\varphi \geq 0$, тогда и только тогда, когда $f(x) \geq 0$ в D.

б) Любая борелевская мера μ в области D определяет положительный функционал:

$$\mu(\varphi) = \int \varphi(x)d\mu \geq 0 \text{ , если } \varphi \geq 0$$

Теорема. Если f положительная обобщенная функция, то она является мерой, т.е. существует в D мера μ, такая, что

$$f(\varphi) = \int \varphi(x)d\mu \ \ \forall \varphi \in F(D)$$

. **Доказательство**. По теореме Рисса-Маркова достаточно доказать, что положительная обобщенная функция f продолжается в $\overset{0}{C}(D)$. Заметим, что $F(D) = \overset{0}{C^\infty}(D)$ является плотной в $\overset{0}{C}(D)$, т.е. для любой функции $\varphi \in \overset{0}{C}(D)$ существует последовательность $\varphi_j(x) \in \overset{0}{C^\infty}(D)$, такая, что

$$supp\,\varphi_j \subset D_0 \subset\subset D \text{ и } ||\varphi_j(x) - \varphi(x)||_D \to 0 \text{ при } j \to \infty$$

Берем непрерывную функцию $\psi(x) \in \overset{0}{C}(D)$ такую, что $\psi(x) = 1$ при $x \in D_0$ и $0 \leq \psi(x) \leq 1$ при $x \in D$. Тогда, если положим $\alpha_{j,p} = \dfrac{\varphi_{j+p}(x) - \varphi_j(x)}{\psi(x)}$, $p > 0$, то $\epsilon_{j,p} = ||\alpha_{j,p}||_D \to 0$ при $j \to \infty$

Для $x \in D$ имеем $|\varphi_{j+p}(x) - \varphi_j(x)| \leq \epsilon_{j,p}\psi(x)$. Отсюда $\varphi_{j+p}(x) - \varphi_j(x) + \epsilon_{j,p}\psi(x) \geq 0$ и $\epsilon_{j,p}\psi(x) - \varphi_{j+p}(x) + \varphi_j(x) \geq 0$

Так как f – положительная и линейна, то из этих двух последних соотношений имеем

$$|f(\varphi_{j+p} - f(\varphi_j)| \leq f(\psi) \cdot \epsilon_{j,p} \to 0 \text{ при } j \to \infty$$

Следовательно, $f(\varphi_j)$ – фундаментальная, т.е. $\lim\limits_{j\to\infty} f(\varphi_j)$ существует. Если мы положим $f(\varphi) = \lim\limits_{j\to\infty} f(\varphi_j)$, то $f(\varphi)$ будет линейно-непрерывным функционалом в $\overset{0}{C}(D)$, который, с другой стороны, является продолжением f из $\overset{0}{C^\infty}(D)$ в $\overset{0}{C}$. Теорема доказана.

Порядок сингулярности обобщенных функций. Будем говорить,что обобщенная функция f имеет порядок сингулярности не более,чем m, если она непрерывно продолжается в пространство $\overset{0}{C^m}(D)$, m раз дифференцируемых функций; будем говорить,что она имеет сингулярность порядка точно m, если кроме того f не продолжается в $\overset{0}{C^{m-1}}(D)$.

Теорема. Если носитель обобщенной функции компактно лежит в D, то она имеет конечный порядок сингулярности.

Теорема. Любая обобщенная функция f конечного порядка есть конечная сумма дифференциалов от зарядов, т.е. она представляется в виде

$$f = \sum_{|p|\leq m} D^p\nu_p \text{ , где } \nu_p \text{ – заряды}$$

Билет 6. Теорема Котельникова

Источник: Лекции Алимова Ш.А.

Бесконечно дифференцируемые финитные функции. Финитная функция – функция, носитель (*supp*) которой компактен. Финитная функция обращается в ноль за пределами некоторого компакта.

Символом $C_0^\infty(\mathbb{R})$ обозначается класс функций, бесконечно дифференцируемых на всей прямой $\mathbb{R}$ и обращающихся в нуль вне некоторого отрезка (для каждой функции своего).

Функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, называется **кусочно-гладкой**, если существует разбиение

$$P = \{a = c_0 < c_1 < ... < c_m = b\}$$

такое, что на каждом интервале (c_{k-1}, c_k) функция f совпадает с некоторой функцией, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[c_{k-1}, c_k]$. Данное определение допускает, что функция f может иметь разрывы в конечном числе точек c_k, однако эти разрывы могут быть только разрывами первого рода. Пример кусочно-гладкой функции **sign** x.

Интегральное преобразование функции f, определенной на всей числовой прямой

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

Функция $\hat{f}$ называется **преобразованием Фурье** функции f. Достаточно гладкие функции представимы своим интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \text{ – обратное преобразование Фурье}$$

Разложим функцию e^{itx}, зависящую от параметра $t \in \mathbb{R}$, в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Ее коэффициенты Фурье равны:

$$c_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{itx}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \cos x(t-k)dx = \frac{\sin\pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

Следовательно,

$$e^{itx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

Если ряд сходится в среднем квадратичном, то его можно почленно интегрировать. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Тогда $(f, S) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f, v_k)$. Действительно,

$$\left|(f, S) - \sum_{k=1}^{n}(f, v_k)\right| = |(f, S) - (f, S_n)| \leq ||f|| \cdot ||S - S_n|| \to 0$$

Теорема (Р.Пэли, Н.Винер)
Для того, чтобы функция $g(\xi)$ была преобразованием Фурье функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (бесконечно дифференцируемые финитные функции), равной нулю вне отрезка $[-\sigma, \sigma]$, необходимо и достаточно, чтобы функция g аналитически продолжалась с прямой $\mathbb{R}$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и для любого номера m с некоторыми постоянными C_m удовлетворяла условию

$$|g(z)| \leq \frac{C_m}{(1+|z|)^m}e^{\sigma|Imz|},\ z \in \mathbb{C}$$

Теорема (Котельникова) Пусть f – кусочно-гладкая и абсолютно интегрируемая на всей числовой прямой функция. Если ее преобразование Фурье обращается в нуль вне отрезка $[-\pi, \pi]$, то выполняется равенство:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\frac{\sin\pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

Доказательство. Предположим, что *supp* $\hat{f} \subset [-\pi, \pi]$.

Тогда $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi)e^{it\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi(t-k)}{\pi(t-k)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi)e^{it\xi}d\xi = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\frac{\sin\pi(t-k)}{\pi(t-k)}$

Следствие 1 (Nyquist-Shannon sampling theorem). Если кусочно-гладкая и абсолютно интегрируемая на всей числовой прямой функция f удовлетворяет условию
supp $\hat{f} \subset [-\mu\pi, \mu\pi]$, где $\mu > 0$, то выполняется равенство

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)\frac{\sin\pi(\mu t-k)}{\pi(\mu t-k)}\ \ ,t \in \mathbb{R},$$

где $h = \frac{1}{\mu}$
Действительно, введем функцию g такую, что выполняется равенство

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\mu\xi)$$

Тогда, удовлетворяется условие $supp\ \hat{g} \subset [-\pi, \pi]$. Следовательно,

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

. С другой стороны, обозначив $h = \dfrac{1}{\mu}$, получим

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\xi) e^{it\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\mu\xi) e^{it\xi} d\xi = \frac{h}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\eta) e^{ith\eta} d\eta = hf(th)$$

Таким образом, $g(t) = hf(th)$, $g(k) = hf(tk)$

$$f(th) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

Взяв вместо t величину μt, отсюда получим требуемое соотношение.

Билет 9. Оценки функций Шеннона длины проверяющего теста при инверсиях входов схем. верхняя оценка доказывается через то, что число всевозможных инверсий равно 2^n, а есть способ построения тестов (пошаговый) такой, что на каждом шаге число непроверенных неисправностей будет уменьшаться вдвое (как минимум) Это и есть Лемма Погосяна. А нижняя оценка через пример. Даётся функция, для которой сложность будет та штука слева.

Билет 12. Дискретная задача о рюкзаке. Приближенные методы решения, их оценки на погрешность.

«0–1 Рюкзак (Knapsack)»

Даны:
$c_1, ..., c_n$, $c_j \in N$ — «стоимости» предметов;
$a_1, ..., a_n$, $a_j \in N$ — «размеры» или «веса»;
$B \in N$ — «размер рюкзака».

Найти максимальное значение f^* целевой функции $f = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$

с ограничением на размер «рюкзака»: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B, \ \ x_i \in \{0, 1\}$

Содержательно задача означает выбор предметов с наибольшей суммарной стоимостью, умещающихся в рюкзак заданного размера. Эта задача часто возникает при выборе оптимального управления в различных экономико-финансовых областях (распределение бюджета отдела по проектам и т.п.). Первая идея, которая обычно возникает при знакомстве с этой задачей, это выбирать предметы по убыванию их относительной стоимости, помещая в рюкзак все, что помещается. Проблема состоит в том, что «польстившись» на первый небольшой, но «относительно дорогой» предмет, алгоритм рискует пропустить большой и ценный предмет из оптимального набора.

Оказывается, гарантированное качество работы этой эвристики можно улучшить, если после окончания ее работы сравнить стоимость полученного допустимого решения с максимальным коэффициентом c_{max} и в соответствии с максимумом выбрать либо «жадное решение», либо один предмет с максимальной стоимостью (мы считаем, что размеры всех предметов не превосходят размер рюкзака — в противном случае их просто можно исключить из рассмотрения). Получится так называемый модифицированный жадный алгоритм, для которого уже можно гарантировать качество найденного решения.

Теорема. Для значения решения f_G , полученного модифицированным жадным алгоритмом «Рюкзак-Жадный», и оптимального значения f^* для задачи «0–1 Рюкзак (Knapsack)» выполняется

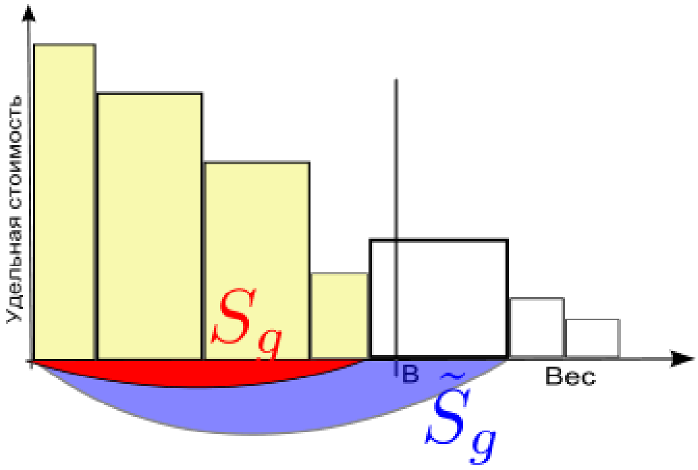
$$\frac{f^*}{2} \leq f_G$$

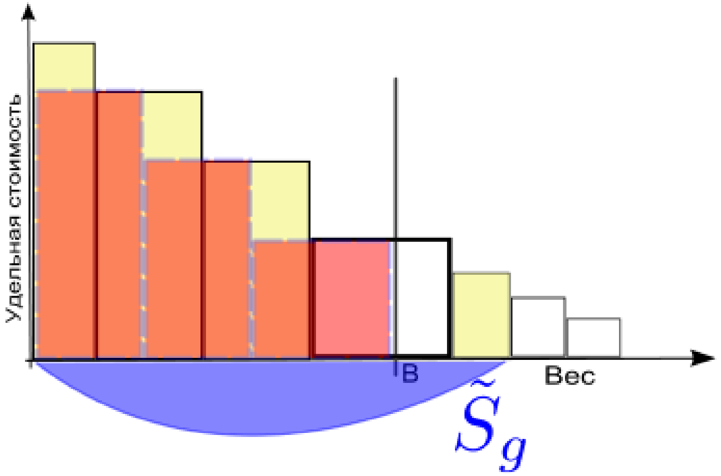
Доказательство Обозначим набор предметов, выбранных жадным алгоритмом «Рюкзак-Жадный», через S_g, а стоимость этого набора через C_g. Рассмотрим набор $\tilde{S}_g$, полученный жадным алгоритмом, которому разрешено (после того, как рюкзак будет заполнен) взять еще один предмет, и обозначим его стоимость $\tilde{C}_g = \sum\limits_{i \in \tilde{S}_g} c_i$.

Заметим, что по определению $\tilde{C}_g \leq C_g + c_{max}$. С другой стороны, $\tilde{C}_g \geq f^*$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что любой предмет (обозначим его индекс через p) из оптимального набора или содержится в $\tilde{S}_g$, или его относительная стоимость не превышает относительной стоимости любого предмета из $\tilde{S}_g$:

$$\frac{c_p}{a_p} \leq \frac{c_i}{a_i} \quad \forall i \in \tilde{S}_g$$

Принимая во внимание, что стоимость равна площади, из рисунка мы видим, что высота любого предмета вне набора $\tilde{S}_g$ не больше высоты предметов в наборе $\tilde{S}_g$. Добавление более «низких» прямоугольников из оптимального набора вместо каких-либо прямоугольников из $\tilde{S}_g$ может только уменьшить суммарную площадь, т.е. стоимость. Поэтому $\tilde{C}_g \geq f^*$. Отсюда следует: $C_g + c_{max} \geq \tilde{C}_g \geq f^*$,
$2f_G = 2max(C_g, c_{max}) \geq C_g + c_max \geq f^*$
Откуда: $f_G \geq f^*$.





Список рекомендованной литературы

[1].Колмогоров А.Н, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. «Наука». 1976. 544 с.

[2].Чилин В.И. Теория интегрирования. Учебное пособие. Ташкент. Национальный университет Узбекистана. 2019. 179 с.

[3] Садуллаев А.С. Борелевские меры, интегралы и потенциалы. Из-во Академии Мамуна, 2018.

[4] Ландкоф Н.С., Основы современной теории потенциала, М., «НАУКА», 1966.

[5] Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа. М., «НАУКА», 1965.

[6] Котельников В. А. О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи — Всесоюзный энергетический комитет. // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности, 1933. Репринт статьи в журнале УФН, 176:7 (2006), 762—770.

[7] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособие. М.: Наука. 1986.

[8] Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики, вып. 10. – М.: Физматгиз, 1963. – С 63-97

[9].Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Долотова О. А., Погосян Г. Р. Теория тестирования логических устройств. М.:Физматлит, 2006. 160 с

[10].Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992. 192 с.

[11] Носов В.А.Комбинаторика и теория графов, Изд-во МИЭМ, М.2000, 88с.

[12]. Носов В.А. Основы теории алгоритмов и анализа их сложности. Курс лекций. М., 1992. 140 с.

[13]. Кузюрин Н.Н, Фомин С.А. Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. Курс лекций. М., 2011. 363 с.

[14] Jorge Nocedal, S. Wright, Numerical Optimization, Springer-Verlag New York, 2006, chapters 3, 5, 6

[15] Sebastian Ruder, An overview of gradient descent optimization algorithms, arXiv, 2016

[16] Art B. Owen, Monte Carlo theory, methods, and examples, 2013, chapters 1-4.

[17]. Шевченко В.Н, Золотых Н.Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. Учебное пособие, Нижний Новгород, 2002. 76 с.

[18]. Григорьев А.В. Теория игр. Учебное пособие, Томск, 2014. 80 с.

[19] А.К. Поляков. Языки VHDL и VERILOG в проектировании цифровой аппаратуры. М.: СОЛОН-Пресс, 2003. — 305 с.

[20]. Таненбаум Э., Бос Х. Современные операционные системы. Классика CS. 4-е изд. — СПб.: Питер, 2015. — 1120 с.

[21] Таненбаум Э., Вудхалл А. Операционные системы. Разработка и реализация. Классика CS. 3-е изд. — СПб.: Питер, 2007. — 704 с.

[22]. Стивенс У., Феннер Б., Рудофф Э. UNIX. Разработка сетевых приложений. – Спб.: Питер, 2007 – 1088 с.

[23]. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. Издание второе, исправленное. Москва, Санкт-Петербург, Киев, 2006. 1104 с.

[24]. Половников В.С. О нелинейной сложности нейронных схем Мак-Каллока-Питса. М., Интеллектуальные системы. Т. 11, 2007. Стр. 261-275.