Филиал Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова в г. Ташкенте
Факультет Прикладная Математика и Информатика

Материалы для подготовки к междисциплинарному экзамену по прикладной математике и информатике (бакалавриат)

(издание первое) После окончания пройдите, пожалуйста, опросник !

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdBFOnvlq1rsevkxooVMd81oiqVnP2iWvhBdC7iZeTeKyzxpw/viewform?usp=sf_link

Ташкент 2022

Содержание

0.1 Источники

1. Билет 1. Билеты 2018 года https://disk.yandex.uz/d/lFo_3JN7SzX80w
2. Билет 2. В.Ф. Бутузов, Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина. Равномерная непрерывность функций одной переменной. http://math.phys.msu.ru/data/28/MA_1s_BLSh_M(UC)_10-11.pdf
3. Билет 3. ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ Математический анализ https://disk.yandex.uz/i/M8jSgBaa6CG2Fg
4. Билет 4. С. А. Теляковский, Курс лекций по математическому анализу http://www.mathnet.ru/links/7b2f96b67629b8480b1adc15ac1de89b/lkn17.pdf
5. Билет 5. С. А. Теляковский, Курс лекций по математическому анализу http://www.mathnet.ru/links/7b2f96b67629b8480b1adc15ac1de89b/lkn17.pdf
6. Билет 6. Лекции ВМК (2020) https://disk.yandex.uz/i/oW08MPeJY7yprQ
7. Билет 7. Конспекты Мехмата http://dmvn.mexmat.net/content/calculus/calculus-3s-podolsky-doc.rar
8. Билет 8. Основы математического анализа, Том 2, Фихтенгольц Г.М., 1968.
9. Билет 9. Основы математического анализа, Том 2, Фихтенгольц Г.М., 1968.
10.Билет 10. Курс высшей математики и математической физики. Основы математического анализа. Часть 2. В.А. Ильин, Э.Г.Поздняк
11.Билет 11. Билеты 2018 года https://disk.yandex.uz/d/lFo_3JN7SzX80w
12.Билет 12. Ю. В. СИДОРОВ, М. В. ФЕДОРЮК, М. И. Шабунин. Лекции по теории комплексного переменного.
13.Билет 13. Ю. В. СИДОРОВ, М. В. ФЕДОРЮК, М. И. Шабунин. Лекции по теории комплексного переменного http://math.nw.ru/~pozharsky/3kypc/FilesAdd/Shabunin_TFKP.pdf
14.Билет 14. В.А. Ильин, Г.Д. Ким - Линейная алгебра и аналитическая геометрия
15.Билет 15. В.А. Ильин, Г.Д. Ким - Линейная алгебра и аналитическая геометрия
16.Билет 16. А.Г. Курош Линейная алгебра
17.Билет 17. Материалы М-19 для подготовки к экзаменами по дифференциальным уравнениям https://disk.yandex.uz/i/F3M2hoGrjXsSvQ и пособие https://disk.yandex.uz/i/wqzAjFumws0tlw
18. Билет 18. Материалы М-19 для подготовки к экзаменами по дифференциальным уравнениям https://disk.yandex.uz/i/F3M2hoGrjXsSvQ
19. Билет 19. Материалы М-19 для подготовки к экзаменами по дифференциальным уравнениям https://disk.yandex.uz/i/F3M2hoGrjXsSvQ
20. Билет 20. Материалы М-19 для подготовки к экзаменами по дифференциальным уравнениям https://disk.yandex.uz/i/F3M2hoGrjXsSvQ
21. Билет 21. https://scask.ru/a_lect_math3.php?id=43 м http://new.math.msu.su/diffur/astashova_lec_2.pdf
22. Билет 22. Б. А. Севастьянов. Курс теории вероятности и математической статистики https://static41.fileskachat.com/download/f/9/87142_46f1ddd271152e3800afcdd8658dd198.pdf
23. Билет 23. Билет 22. Б. А. Севастьянов. Курс теории вероятности и математической статистики https://static41.fileskachat.com/download/f/9/87142_46f1ddd271152e3800afcdd8658dd198.pdf

0.2 Теормин

0.2.1 Математический анализ

Предел функции (по Гейне) Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$ (или при $x \to x_0$), если для любой последовтельности значений аргумента $x_1, \dots, x_n, \quad x_n \to x_0, \forall n (x_n \neq x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = b$.

Предел функции (по Коши) Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \colon \forall x \in X \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Непрерывность функции $f : D \to \mathbb{R}$ на множестве D:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x' \in D \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется **равномерно непрерывной** на множестве D, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in D \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Если функция равномерно непрерывна на D, то она непрерывна на D. Обратное неверно.

Теорема (Кантор). Если функция $f \in C[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Пусть функция f задана в окрестности точки a. Если существует предел $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, то он называется **производной** функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Лемма. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в данной точке. Обратное утверждение неверно. Пример, $f(x) = |x|, \quad a = 0$.

Теорема (Ролль). Пусть функция $f \in C[a, b]$ дифференцируема на интервале (a, b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi)' = 0$.

Теорема (Лагранж). Пусть функция $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$, называют **интегрируемой по Риману** на этом отрезке, если существует число I такое, что для каждого $\varepsilon > 0$ имеется число $\delta(\varepsilon) > 0$, при котором для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ диаметра, меньшего δ, и произвольном выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n$, справедлива оценка $|S_T(f, \xi) - I| < \varepsilon$

Число I называют **определенным интегралом Римана** от функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначают $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$. Числа a и b называют соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а $f(x)$ – подынтегральной функцией.

Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке. Ограниченность функции необходима для ее еинтегрируемости. Но это условие не является достаточным, что видно на примере функции Дирихле.

Функция Дирихле не интегрируема на отрезке $[a, b]$. $D(x) = \begin{cases} 0, x - \text{иррациональное} \\ 1, x - \text{рациональное} \end{cases}$

Формула Ньютона–Лейбница. Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема и имеет первообразную $F(x)$. Тогда справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ которое называют формулой Ньютона–Лейбница.

Теорема. Если функция многих переменных непрерывна в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке по каждой из переменных. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. 1) Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 1, \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(0+\Delta x, 0) - f(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} \right) - 1 = 0$. Значит, функция $f(x,y)$ непрерывна по x в точке $(0,0)$. Аналогично доказывается непрерывность по y в точке $(0,0)$.
Однако $f(x,y)$ не является непрерывной в начале координат: пусть $x_m = \dfrac{1}{m}$, $y_m = \dfrac{1}{m}$, тогда $f(x_m, y_m) = 0$. Мы получили, что последовательность $\{x_, y_m\} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$, но $\{f(x_m, y_m)\}$ не стремится при $m \to \infty$ к $f(0,0) = 1$, то есть функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $(0,0)$ по совокупности аргументов (т.к. не выполняется определение Гейне).

Производной функции $f(x)$ по направлению $e = (cos\,\alpha_1, \ldots, cos\,\alpha_n)$ в точке x^0 называется производная сложной функции $g(t)$ в точке $t_0 = 0$, то есть число

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+te) - f(x^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Вектор $gradf(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), \ldots, f'_{x_n}(x^0))$ называется **градиентом** функции $f(x)$ в точке x^0.

Числовым рядом называется выражение вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... (1)$$

где $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – члены ряда , u_n — общий член ряда

Критерий Коши сходимости числового ряда
Для того , чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился , необходимо и достаточно , чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}:$

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \varepsilon$$

Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится , то $u_n \to 0$ при $n \to \infty$. Данное условие является необходимым, но не достаточным условием сходимости (пример гармонический ряд $u_n = \dfrac{1}{n}$ расходится хотя $u_n \to 0$ при $n \to \infty$)

Признак Даламбера. Если $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall k > k_0$ и $p_k > 0 : \dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ $(\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$ сходится (расходится)

0.2.2 ТФКП

Определение Говорят, что функция f называется $\mathbb{C}$-*дифференциируемой*, если f — $\mathbb{R}$-дифференциируема и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Функция f называется $\mathbb{C}$-*дифференциируемой на множестве* $D \subset \mathbb{C}$, если она $\mathbb{C}$-дифференциируема в каждой точке этого множества.

Определение. Функция f называется **голоморфной** или **аналитической** в точке z_0, если она $\mathbb{C}$-дифференциируема в некоторой окрестности точки z_0.
Будем говорить, что функция f **голоморфна на множестве** $D \subset \mathbb{C}$, если она голоморфна в каждой точке этого множества (для таких множеств понятия голоморфности и $\mathbb{C}$-дифференциируемости совпадают).

Теорема (Условия Коши-Римана). Функция f $\mathbb{C}$-дифференциируема тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{1}$$

Определение. **Вычетом** функции $f(z)$ в точке a (обозначается $\underset{z=a}{res} f(z)$ называется коэффициент ряда Лорана для $f[z)$ в окрестности точки , т.е. $\underset{z=a}{res} f(z) = c_{-1}$, где $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} f(\xi) d\xi$ где окружность $\gamma_\rho : |z - a| = \rho \quad (0 < \rho < \rho_0)$ ориентирована положительно. Отсюда получаем $\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)dz = 2\pi i \cdot \underset{z=a}{res} \quad f(z)$.

Теорема (Интегральная формула Коши). Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D и пусть простая замкнутая кривая γ лежит в D и ориентирована положительно. Тогда для любой точки z, лежащей внутри γ, справедлива формула $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

Теорема (основная теорема теории вычетов). Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и пусть γ — простая замкнутая кривая, лежащая в области D и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} \quad f(z)$ где кривая γ ориентирована положительно.

0.2.3 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Определение. Поле P – называется алгебраически замкнутым, если любой многочлен $f(x) \in P[x]$ степени $n \geq 1$ обладает в P хотя бы одним корнем.

Поле действительных чисел $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым, так как многочлен $x^2 + 1$ не имеет действительных корней.

Теорема (основная теорема алгебры). Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто.

0.3 Билет 1. Непрерывность функций одной переменной. Разрывы первого и второго родов. Свойства непрерывных функций. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.

Общее определение непрерывности функции в точке по Гейне и Коши, связь этих определений. Описание разрывов первого и второго рода с демонстрацией соответствующих примеров. Непрерывность суммы, произведения и частного двух непрерывных функций. Ограниченность непрерывных функций, заданных на отрезке. Достижение экстремальных значений непрерывной функции, заданной на отрезке.

0.3.1 Основная часть

Определение 1 (предел функции (по Гейне)) Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$ (или при $x \to x_0$), если для любой последовтельности значений аргумента $x_1, \dots, x_n, \quad x_n \to x_0, \forall n (x_n \neq x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = b$.

Определение 2 (предел функции (по Коши)) Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \colon \forall x \in X \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\; |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Теорема 1. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство.

1. Пусть b предел функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ по Коши. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\; |f(x) - b| < \varepsilon.$$

   По определению сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x_0 — $\forall \delta > 0 \;\; \exists N > 0 : \forall n \geq N \;\; |x_n - x_0| < \delta$. Так как $\forall n \; (x_n \neq x_0)$, то

$$\forall n \geq N \quad 0 < |x_n - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; \Rightarrow \forall n \geq N \quad |f(x_n) - b| < \varepsilon \Rightarrow \{x_n\} \to x_0, \forall n \quad (x_n \neq x_0) \Rightarrow \lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = b$$

2. Пусть b предел функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ по Гейне. Пусть b не является пределом функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ по Коши. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \; \exists x \in X \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\; |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

   Пусть $\delta_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall \delta_n \quad \exists x_n \colon 0 < |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n} \quad |f(x_n) - b| \geq \varepsilon$, но $\forall \delta_n \exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow \{x_n\} \to x_0$ и по опредлению Гейне $\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = b$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \forall n \geq N \quad |f(x_n) - b| < \varepsilon \Rightarrow$ противоречие.

Определение 3 (формальное). Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x_0 \in X$,если функция $f(x)$имеет в этой точке x_0 предел и этот предел равен частному значению $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0, то есть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 4 (непрерывности по Гейне). Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$,если

$$\forall \{x_n\} \subset X : \; \{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \; \{f(x_n)\} \to f(x_0).$$

Определение 5 (непрерывности по Коши). Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$,если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \; \forall x \in X \; |x - x_0| < \delta \;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Определение 6. Непрерывность функции $f : D \to \mathbb{R}$ на множестве D:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x' \in D \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Пусть $f(x), \; g(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$. Тогда:

1. $f(x) \pm g(x)$ - непрерывна в точке $x_0 \in X$.
2. $f(x) \cdot g(x)$ - непрерывна в точке $x_0 \in X$.
3. $g(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывна в точке $x_0 \in X$.
4. Ограниченность в δ окрестности x_0.
5. В некоторой δ окрестности x_0 функция не меняет знак.

Доказательство.

1. Т.к. $f(x),\ g(x)$ - непрерывны в точке $x_0 \in X$, то по определению непрерывности функции по Коши

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{2}, x_0) > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}(|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\Rightarrow\ |f(x) \pm g(x) - (f(x_0) \pm g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. $f(x),\ g(x)$ - непрерывны в точке $x_0 \in X$, то по определению непрерывности функции по Коши

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\frac{\varepsilon}{C}, x_0) > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{C}(|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{C}).$$

. Т.к. $\forall x \in X |x - x_0| < \delta\ |g(x)| < C_1 < \infty$,ограниченость в δ окрестности x_0(дказательство этого приводится позже), $f(x_0) = C_2 < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta\ (|g(x)| + |f(x_0)|) < C,$$

то по определению Коши

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{C}, x_0) > 0\ \ |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| =$$
$$= |(f(x) - f(x_0) + f(x_0)) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| = |(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))| \leq$$
$$\leq |(f(x) - f(x_0))| \cdot |g(x)| + |f(x_0)| \cdot |(g(x) - g(x_0))| < \varepsilon.$$

3. $f(x),\ g(x)$ - непрерывны, то по определению непрерывности функции по Коши

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta(\frac{\varepsilon}{C}, x_0) > 0 \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{C}(|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{C}).$$

Т.к.

$$\forall x \in X\ |x - x_0| < \delta \quad\ |g(x)| < C_1 < \infty\ (C_1 \neq 0),$$

так как функция ограничена в δ окрестности x_0(дказательство этого приводится позже),

$$g(x_0) = C_2 < \infty\ (C_2 \neq 0),\ \ f(x_0) = C_3 < \infty\ (C_3 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \qquad (|\frac{1}{g(x)}| + |\frac{f(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0)})| < C,$$

то по определению Коши

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{C}, x_0) > 0\ |\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}| =$$
$$= |\frac{(f(x) - f(x_0) + f(x_0))}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}| = |\frac{(f(x) - f(x_0))}{g(x)} + f(x_0) \cdot (\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}))| =$$
$$= |\frac{(f(x) - f(x_0))}{g(x)} + f(x_0) \cdot \frac{-(g(x) - g(x_0))}{g(x) \cdot g(x_0)})| \leq$$
$$\leq |\frac{1}{g(x)}||f(x) - f(x_0)| + |\frac{f(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0)}| \cdot |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

4. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta\ \ -\varepsilon + f(x_0) < f(x) < \varepsilon + f(x_0)$.

5. $$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta\ \ -\varepsilon + f(x_0) < f(x) < \varepsilon + f(x_0) \Rightarrow$$

   для
   $$0 < \varepsilon < |f(x_0)|\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0\ \forall x \in X\ |x - x_0| < \delta\ \ -\varepsilon + f(x_0) < f(x) < \varepsilon + f(x_0)$$

   - функция не меняет знак.

Определение 7 (Точки разрыва) - точка в которой функция не непрерывна, т.е.: $x_0 \in X$

1. $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Определение 8 (устранимая точка разрыва) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \infty$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Пример 1 $f(x) = \dfrac{sinx}{x}$.

Данная функция не определена при $x = 0$. Поскольку $sinx$ является непрерывной функцией для всех x, то искомая функция $f(x) = \dfrac{sinx}{x}$ также непрерывна при всех x за исключением точки $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sinx}{x} = 1$, то в данной точке существует устранимый разрыв. Мы можем сконструировать новую функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{sinx}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases},$$

которая будет непрерывной при любом действительном x.

Определение 9 (Разрыв I-рода) $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) < \infty, \quad \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) < \infty$, но $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Пример 2 $f(x) = arctan\dfrac{1}{x}$.

Данная элементарная функция определена для всех x, исключая точку $x = 0$, где она имеет разрыв. Найдем односторонние пределы в этой точке. $\lim\limits_{x\to 0-0} arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0+0} arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Видно, что в точке $x = 0$ существует разрыв первого рода.

Определение 10 (Разрыв II-рода) $\nexists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ либо $\nexists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$ либо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$.

Пример 3 $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to x_0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$. $x = 0$ - точка разрыв II -рода.

Теорема 2 (Больцано - Коши)

$$f(x) \in C([a, b]) \wedge (f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in (a, b)(f(c) = 0).$$

Доказательство. $[a, b]$ - делим пополам.

$$[a, b] = [a, \frac{a + b}{2}] \cup [\frac{a + b}{2}, b].$$

Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$- доказано. Пусть

$$f(\frac{a + b}{2}) \neq 0 \Rightarrow (f(a) \cdot f(\frac{a + b}{2}) < 0) \vee (f(b) \cdot f(\frac{a + b}{2}) < 0).$$

Пусть $(f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0)$, тогда эту часть снова делим пополам.

Пусть

$$f(a)>0, f(b)<0,\ I_n=[a_n,b_n]: f(a_n)>0,\ f(b_n)<0$$

.

$$s=\{I_n\}, I_1\supset I_2\supset I_3\supset ...\supset I_n$$

.

$$|I_n|=b_n-a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \overset{\text{по т. Кантора}}{\Rightarrow} \exists\,!\ c\in I_n\ \forall n.$$

$$I_n=[a_n,b_n]: f(a_n)>0,\ f(b_n)<0 \overset{\text{по т. Кантора}}{\Rightarrow} (\lim_{n\to\infty} a_n=c)\wedge(\lim_{n\to\infty} b_n=c) \overset{\text{т.к. } f(x)\in C([a,b])}{\Longrightarrow}$$

$$(\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(c)\geq 0)\wedge(\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(c)\leq 0)\Rightarrow f(c)=0.$$

$$f(x)\in C([a,b])\wedge(f(a)=A)\wedge(f(b)=B)\wedge(A\neq B)\Rightarrow \forall C\in[A,B]\vee[B,A]\ \exists c\in[a,b](f(c)=C).$$

$A=B$ - не рассматривается, т.к. очевидно.
Пусть $(A\neq B)\wedge(A<B)$. Рассмотрим Функцию $\varphi(x)=f(x)-C-$ непрерывна, т.к. $f(x),C$ - непрерывны.

$$(\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0)\wedge(\varphi(b)=f(b)-C=B-C>0) \overset{\text{по теореме Больцано-Коши}}{\Longrightarrow}$$

$$\exists c\in[a,b]:\varphi(c)=f(c)-C=0\Rightarrow f(c)=C.$$

Определение 11. Число M (m) называется **точной верхней (точной нижней) гранью** $f(x)$ на X, если:

1. $\forall x\in X(f(x)<M)$
2. $\forall\varepsilon>0\exists x\in X: f(x)>M-\varepsilon\ \ (f(x)<m+\varepsilon)$.

Теорема 3 (Первая теорема Вейерштрасса)

$$f(x)\in C([a,b])\Rightarrow(\forall x\in[a,b](|f(x)|<M<\infty)).$$

f-ограничено на $[a,b]$

$$\Leftrightarrow(\exists m,\ M\in\mathbb{R}\ \forall x\in X(f(x)\leq M)\wedge(f(x)\geq m)).$$

Т.е.

$$\exists M>0:\ \forall x\in[a,b]\ (|f(x)|<M).$$

Доказательство. От противного. Пусть

$$f\in C([a,b])\wedge(\forall M>0\ \exists x\in[a,b]\ (|f(x)|>M)).$$

Пусть $M=n\in\mathbb{N}$
$M=1:\exists x_1\in[a,b]\ (|f(x)|>1)$
...
$M=n:\exists x_1\in[a,b]\ (|f(x)|>n)$
Получим

$$\{x_k\}\subset[a,b] \overset{\text{по теореме Б-В}}{\Longrightarrow} \exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}:\ \{x_{n_k}\}\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0.$$

$\forall\ a\leq x_{n_k}\leq b\Rightarrow\ a\leq x_0\leq b.$
$\lim\limits_{x_{n_k}\to x_0} f(x_n)=f(x_0)$, т.к. функция непрерына, но по предположению $\lim\limits_{x_{n_k}\to x_0} f(x_{n_k})=\infty$ - противоречие.

Теорема 4 (вторая теорема Вейерштрасса)
$f(x)\in C([a,b])\Rightarrow$, то $f(x)$ достигает на этом сегменте точной верхней и точной нижней грани.
Доказательство. Пусть M-точная верхняя грань, не достижима, т.е. $\forall x\in X\ (f(x)<M)$. Тогда рассмотрим

$$F(x)=\frac{1}{M-f(x)}.$$

(Можем рассмотреть, т.к. $M - f(x)$ не обращается в 0)

$$(M - f(x) \in C([a,b])) \wedge (M - f(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]) \Rightarrow F(x) \in C([a,b]) \Rightarrow$$

$F(x)-$ ограничена, т.е.

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \geq A \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) \geq M - \frac{1}{A} \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$$

$M-$ не точная верхняя грань. Противоречие. Для точной нижней грани аналогично.

Теорема 5 (Больцано - Вейерштрасса).

Из всякой ограниченной последовательности точек пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

0.3.2 Дополнительная часть

Определение. Правый (левый) предел (по Гейне) Число b называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если $\forall$ последовательности $\{x_n\}$,

$$x_n \to x_0, x_n > x_0 \ \forall n \ (\textit{или} \ x_n < x_0) \Rightarrow f(x_n) \to b.$$

Определение. Правый (левый) предел (по Коши) Число b называется правым (левым) пределом $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x_0 < x < x_0 + \delta \ (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Правый предел: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = b.$ Левый предел: $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = b.$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$,если

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

(То есть бесконечно малому приращению аргументна соответствует бесконечно малое приращение функции).

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа, если

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x).$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева, если

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

по Коши $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ справа (слева), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in X \ x_0 < x < x_0 + \delta \ (x_0 - \delta < x < x_0) \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Последовательность вложенных отрезков $[x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset ... \supset [x_n, y_n]$ называется последовательностью стягивающихся отрезков, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in N : \forall n > N \mid y_n - x_n \mid < \varepsilon$.

Теорема 6 (теорема Кантора)

Если $[x_1, y_1], [x_2, y_2], ..., [x_n, y_n]$ - последовательность стягивающихся отрезков, то $\exists!$ точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

0.4 Билет 2. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

Определение равномерной непрерывности функции, заданной на своей области определения. Связь непрерывности и равномерной непрерывности. Примеры непрерывных функций, не являющихся равномерно непрерывными. Равномерная непрерывность непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$.

0.4.1 Основная часть

Определение. Непрерывность функции $f : D \to \mathbb{R}$ на множестве D:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x' \in D |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Замечание. В этом определении δ зависит как от ε, так и от выбора точки $x \in D$. Может случиться так, что при фиксированном ε одно δ обслужить все точки $x \in D$ не сможет. Примером может служить функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$.

Определение Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется **равномерно непрерывной** на множестве D, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in D \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Если функция равномерно непрерывна на D, то она непрерывна на D. Обратное неверно.

Теорема (Кантор). Если функция $f \in C[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Предположим противное: пусть функция $f(x)$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$. Это означает, что $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ найдутся точки x', x'' из $[a, b]$, для которых $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x'_n) - f(x''_n| \geq \varepsilon_0$. Выбирая в качестве δ числа вида $\dfrac{1}{n}$, $\quad n \in \mathbb{N}$, для каждого n находим пару точек x'_n и x''_n из $[a, b]$ такую, что $|x'_n - x''_n| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x'_n, x''_n \in [a, b] \quad |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \text{ и } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$$

Рассмотрим последовательности $\{x'_n\}$. Она ограничена, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса). Пусть $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k}$, тогда $x_0 \in [a, b]$. Из неравенства

$$|x''_{n_k} - x_0| \leq |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x''_{n_k} - x_0|$$

следует. что $\lim\limits_{k\to\infty} x''_{n_k} = x_0$. Так как f непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0)$, а это вступает в противоречие с неравенством $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0$

Примеры:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\;(x \geq 1)$.

$$|f(x') - f(x'')| = |\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}| = |\frac{x'' - x'}{x'x''}| = \frac{|x'' - x'|}{x'x''} \leq |x'' - x'|$$

   – равномерно непрерывна . Для этого положим $\delta = \varepsilon$

2. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$. Рассмотрим две последовательности $\{x'_n\}$, $\{x''_n\} \in (0, 1)$

   $x'_n = \dfrac{1}{\pi n}$ и $x''_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot n}$, $n = \mathbb{N}$

$$|f(x') - f(x'')| = |\sin(\pi \cdot n) - \sin(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot n)| = 1.$$

   Если $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, то будет нарушено условие равномерной непрерывности

3. $f(x) = x^2$ - не равномерно непрерывная на $x \in [1, \infty)$.

$$|f(x'') - f(x')| = |(x'' - x') \cdot (x'' + x')| = |(x'' - x')| \cdot |(x'' + x')| > x' \cdot |x'' - x'|,$$

но

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon,$$

при

$$x' = \frac{2 \cdot \varepsilon}{\delta},\ x'' = x' + \frac{\delta}{2} \Rightarrow\ |f(x'') - f(x')| > x' \cdot |x'' - x'| = \frac{2 \cdot \varepsilon}{\delta} \cdot \left| \frac{2 \cdot \varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2} - \frac{2 \cdot \varepsilon}{\delta} \right| = \varepsilon$$

0.4.2 Дополнительная часть

Теорема Больцано - Вейерштрасса
Каждая ограниченная последовательность имеет по крайней мере один частичный предел.

Доказательство. Если множество различных элементов в последовательности $\{a_n\}$ конечно, то по крайней мере одно из них последовательность принимает бесконечно много раз, т.е. для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Если множество различных элементов в $\{a_n\}$ бесконечно, то по теореме Больцано-Вейерштрасса это множество имеет предельную точку a. Пусть n_1 таково, что $|a_{n_k} - a| < 1$. Если номера $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ уже построены, то находим n_k так, чтобы $n_k > n_{k-1}$ из $|a_{n_k} - a| < \dfrac{1}{k}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

0.5 Билет 3. Производная и дифференциал функции одной переменной. Геометрический смысл производной и дифференциала. Теорема Лагранжа. Формула Тейлора.

Определение производной и дифференциала функции, взаимосвязь между этими понятиями. Связь дифференцируемости и непрерывности функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производные суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций. Производная обратной и сложной функции. Теорема Ролля и формула конечных приращений Лагранжа. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора и остаточный член этой формулы в форме Пеано.

0.5.1 Основная часть

Определение 1. Пусть функция f задана в окрестности точки a. Если существует предел $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, то он называется **производной** функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Геометрически выражение под знаком предела равно тангенсу угла наклона между прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(a+h, f(a+h))$ графика функции f, и осью Ox. Уравнение этой прямой имеет вид $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Ее принято называть касательной к графику функций f в точке $(a, f(a))$. Производная - это угловой коэффициент касательной.

Определение 2. Функция f заданная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$ называется **дифференцируемой** в точке a, если существует такое $A \in \mathbb{R}$, что $f(a+h) - f(a) = A \cdot h + o(h), \quad h \to 0$.

Если обозначить $x = a + h$, то $f(x) = f(a) = A(x-a) + o(x-a), \quad x \to a$. Дифференцируемость функции f означает, что ее приращение $f(a+h) - f(a)$ асимптотически линейно в точке a: чем ближе h к 0, тем точнее линейная функция $a \cdot h$ приближает разность $f(a+h) - f(a)$.

Определение 3. Если функция f дифференцируема в точке a, то функция $df(a) : h \to f'(a)h$ называется **дифференциалом** для f в точке a.

$$df(a) = f'(a)dx \quad \text{или } f'(a) = \frac{df(a)}{dx}$$

Смысл дифференциала состоит в том, что он является главной частью приращения функции $f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h)$

Лемма. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в данной точке.

Доказательство. Это следует из определения $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + o(x-a) = o(1)$ при $x \to a$. Обратное утверждение неверно. Пример, $f(x) = |x|, \quad a = 0$.

Теорема 1. Пусть $f, g : D \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $a \in D, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функции λf, $f+g$, $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ дифференцируемы в точке a и справедливы равенства

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \quad (f+g)'(a) = f'(a)+g'(a), \quad (f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Теорема 2. Пусть функция $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in D_f$, а функция $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $b = f(a)$, причем $f(D_f) \subset D_g$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке b и $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Доказательство. Пусть $x \to a$ – произвольная последовательность. Разобъем натуральный ряд на две последовательности $\mathbb{N} = \{n_k\} \cup \{m_k\}$ так, что $f(x_{n_k}) - f(a) = 0$ и $f(x_{m_k}) - f(a) \neq 0$. Тогда, если $\{n_k\}$ содержит бесконечно много элементов, то $f'(a) = 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{n_k})) - g(f(a))}{x_{n_k} - a} = 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Кроме того, так как $f(x_{m_k}) \to f(a)$ по лемме о связи непрерывности и дифференцируемости, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{m_k})) - g(f(a))}{x_{m_k} - a} = \lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{m_k})) - g(f(a))}{f(x_{m_k}) - f(a)} \cdot \frac{f(x_{m_k}) - f(a)}{x_{m_k} - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Теорема 3. Пусть функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ имеет обратную, дифференцируема в точке $a \in D$, причем $f'(a) \neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $b = f(a)$ и $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Доказательство. Пусть $y_n \to b$, $y_n \neq b$, тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $x_n \in D_f$, что $f(x_n) = y_n$. Тогда $f^{-1}(y_n) = x_n$. При этом $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Запишем $\dfrac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}$

Совершая здесь предельный переход, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \dfrac{1}{f'(a)}$

Если функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ дифференцируема на некотором множестве $X \subset D$ (дифференцируема в каждой точке $x \in X$), то рассмотрим функцию $f'\colon X \to \mathbb{R}$. Производные высших порядков определяются индуктивно $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$. Для существования n – производной в точке a необходимо потребовать существования всех предыдущих производных $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ для x из некоторой окрестности точки a.

Теорема 4 (Ролль). Пусть функция $f \in C[a,b]$ дифференцируема на интервале (a,b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f(\xi)' = 0$.

Доказательство. Если f – тождественная постоянная, то очевидно. Если f не является тождественной постоянной, то по крайней мере одно из значений $M = sup\, f([a,b])$ или $m = inf\, f([a,b])$ принимается (по теореме Вейерштрасса) в некоторой точке $\xi \in (a,b)$ и эта точка являктся (экстремумом) функции f. В силу (по лемме Ферма) $f(\xi)' = 0$.

Теорема 5 (Лагранж). Пусть функция $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $\quad x \in [a,b]$, которая удовлетворяет условию теоремы Ролля. Поэтому существует точка $\xi \in (a,b)$ для которой $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

Определение 4. Будем называть многочлен $T_n(x,a,f) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ полиномом Тейлора n – го порядка для f в точке a. Для его существования необходимо существование $f^{(n)}(a)$ (тогда производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ должны существовать в некоторой окрестности точки a.

Определение 5. Разность $r_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ будем называть n - остатком Тейлора для f в точке a.

Формула Тейлора с остатком Пеано. Если функция f n - раз дифференцируема в точке a, то $r_n(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ утверждение следует из определения дифференцируемости и существования производной. $T_n'(x,a,f) = T_{n-1}(x,a,f')$. Поэтому, используя правило Лопиталя, получаем $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - T_n(x,a,f)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x) - T_n'(x,a,f)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x) - T_{n-1}(x,a,f')}{n(x-a)^{n-1}} = 0$ в силу предположения индукции, примененного к производной f'.

0.5.2 Дополнительная часть

Теорема 6. Следующие условия равносильны i) f дифференцируема в точке a, ii) существует производная $f'(a)$. Если выполнено одно из этих условий, то $A = f'(a)$.

Доказательство. При $h \to 0$ соотношение $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ означает, что $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = o(1)$. Умножая обе части на h получим $f(a+h)-f(a)-f'(a)h = o(h)$ или $f(a+h)-f(a) = f'(a)h + o(h)$ из ii) следует i). Аналогично, доказывается из i) в ii) (заменить $f'(a)$ на A).

Определение. Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки a. Тогда a называется точкой
локального максимума, если $\exists U_a^\circ \quad \forall x \in U_a^\circ \quad \forall f(x) \le f(a)$
локального минимума, если $\exists U_a^\circ \quad \forall x \in U_a^\circ \quad \forall f(x) \ge f(a)$
строгого локального максимума, если $\exists U_a^\circ \quad \forall x \in U_a^\circ \quad \forall f(x) < f(a)$
локального максимума, если $\exists U_a^\circ \quad \forall x \in U_a^\circ \quad \forall f(x) > f(a)$
Общее название для всех видов минимума и максимума – экстремумы.

Теорема Вейерштрасса. Если функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $m = inf\, f([a,b])$, $M = sup\, f([a,b])$. Тогда существуют такие точки $\alpha, \beta \in [a,b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$.

Доказательство. По определению точной нижней границы для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такая $x_n \in [a,b]$, что $m \le f(x_n) \le m + \dfrac{1}{n}$, откуда $f(x_n) \to m$. Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to f(a)$. В силу единственности предела $f(\alpha) = m$. Существование β доказывается аналогично.

Лемма Ферма. Пусть функция f дифференцируема в точке a. Тогда если a является точкой экстремума, то $f'(a) = 0$.

Доказательство. Пусть, например, a – точка минимума (для максимумов рассуждения аналогичны). Заметим, что $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0$ при $x < a$ и $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$ при $x > a$ откуда $0 \le \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0$.

0.6 Билет 4. Определенный интеграл Римана. Интегральные суммы и их предел. Критерий интегрируемости с использованием сумм Дарбу

Определенный интеграл Римана как предел интегральных сумм. Ограниченность интегрируемых функций. Верхние и нижние суммы Дарбу. Критерий интегрируемости на языке верхних и нижних сумм Дарбу. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций. Свойства интегрируемых функций. Аддитивность интеграла Римана.

0.6.1 Основная часть

Говорят, что точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ образуют **разбиение** отрезка $[a, b]$, если $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, т.е. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – строго возрастающая последовательность точек и концы отрезка принадлежат этой последовательности. Разбиения отрезка будем обозначать T. Таким образом, отрезок $[a.b]$ разделен точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ на n отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Длину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ $\Delta x_k = [x_{k-1}, x_k]$. Наибольшую из длин отрезков, полученных при разбиении T, т.е. число $\lambda_T = \underset{k=1,\ldots n}{max} \Delta x_k$, называют **диаметром разбиения** T.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и T – некоторое разбиение $[a, b]$. В каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения T возьмем произвольно точку ξ_k и составим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Определение. Сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ называют **интегральной суммой Римана** функции f, соответствующей разбиению T и выбору точек $\{\xi_k\}$ и обозначают $S_T(f, \xi)$.

Определение. Функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$, называют **интегрируемой по Риману** на этом отрезке, если существует число I такое, что для каждого $\varepsilon > 0$ имеется число $\delta(\varepsilon) > 0$, при котором для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ диаметра, меньшего δ, и произвольном выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, n$, справедлива оценка

$$|S_T(f, \xi) - I| < \varepsilon$$

.

Число I называют **определенным интегралом Римана** от функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$. Числа a и b называют соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а $f(x)$ – подынтегральной функцией.

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, будем писать $f \in R[a, b]$.

Теорема 1. Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[a, b]$, и рассмотрим для произвольного разбиения T отрезка $[a, b]$ интегральную сумму Римана при каком-либо выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, n$:

$S_T(f, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. Функция $f(x)$ неограничена по крайней мере на одном из отрезков разбиения. Пусть это отрезок $[x_{j-1}, x_j]$. Тогда

$$S_T(f, \xi) = f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{k=1,\, k\neq j}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

и, значит, $|S_T(f, \xi)| \geq |f(\xi_j)|\Delta x_j - \left|\sum\limits_{k=1,\, k\neq j}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right|$.

Считая числа ξ_k при $k \neq j$ фиксированными, для каждого числа M точку ξ_j можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $|S_T(f,\xi)| > M$. Таким образом, интегральные суммы Римана неограничены и, значит, функция f не интегрируема.

Замечание. Ограниченность функции необходима для ее еинтегрируемости. Но это условие не является достаточным, что видно на примере функции Дирихле.

Функция Дирихле не интегрируема на отрезке $[a,b]$. $D(x) = \begin{cases} 0, x - \text{иррациональное} \\ 1, x - \text{рациональное} \end{cases}$

Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[0,1]$. Тогда для любого натурального числа k, $1 \leq k \leq n$, найдется рациональное число $\xi_k^{'} \in [x_{k-1}, x_k]$ и иррациональное число $\xi_k^{''} \in [x_{k-1}, x_k]$. Значит, $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1$, $s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$, то есть $S(T) - s(T) = 1$ для любого разбиения T отрезка $[0,1]$. Это означает, что функция Дирихле не интегрируема на этом отрезке (критерий Римана интегрируемости функции). Очевидно, что те же самые рассуждения справедливы для любого отрезка $[a,b]$ действительной оси.

Если функция f ограничена на $[a,b]$ и ее значениями являются действительные числа, то для каждого разбиения T конечны величины $M_k(f) = M_k := \underset{x \in [x_{k-1}, x_k]}{sup} f(x)$. $m_k(f) = m_k := \underset{x \in [x_{k-1}, x_k]}{inf} f(x)$.

Определение. Сумму $\overline{S}_T(f) = \overline{S}_T := \sum\limits_{k=1}^{n} M_k(f) \Delta x_k$ называют **верхней**, а сумму $\underline{S}_T(f) = \underline{S}_T := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(f) \Delta x_k$ – **нижней интегральными суммами Дарбу** функции $f(x)$, соответствующими разбиению T.

Замечание. В отличие от интегральных сумм Римана, которые определяются разбиением T и выбором точек ξ, суммы Дарбу зависят только от разбиения T.

Для каждой ограниченной функции конечна нижняя грань $\underset{T}{inf} \overline{S_T}$ и $\underline{S_{T_1}} \leq \underset{T}{inf} \overline{S}_T$ для любого разбиения T_1. Обозначим $I^*(f) = \underset{T}{inf} \overline{S}_T$. Число $I^*(f)$ называют **верхним интегралом Дарбу** функции f. Аналогично, величину $I_*(f) = \underset{T}{sup} \underline{S}_T$ называют **нижним интегралом Дарбу** функции f.

Теорема 2. Для интегрируемости ограниченной на отрезке функции f необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения T, диаметр которого $\lambda_T < \delta$, справедлива оценка $\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$

Доказательство. Пусть функция f интегрируема и I – ее интеграл. Согласно определению интеграла для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для произвольного разбиения T диаметр которого $\lambda_T < \delta$, и любого набора точек ξ_k, принадлежащих отрезкам разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, для интегральных сумм Римана $S_t(f,\xi)$ выполняются оценки

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < S_T(f,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя в этом двойном неравенстве к верхним и нижним граням по ξ и пользуясь равенствами

$$\underset{\xi}{sup} S_T(\xi) = \overline{S}_T, \quad \underset{\xi}{inf} S_T(\xi) = \underline{S}_T, \quad \text{находим } I - \frac{\varepsilon}{3} \leq \underline{S}_T(f) \leq \overline{S}_T(f) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Отсюда следует, что $\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) \leq \left(I + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Докажем достаточность. По $\varepsilon > 0$ находим $\delta > 0$ такое, что $\overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$ для любого разбиения T, для которого $\lambda_T < \delta$. Согласно $\underline{S}_T \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \overline{S}_T$ $\underline{S}_T(f) \leq I^* \leq \overline{S}_T(f)$ а для интегральных сумм Римана при любом выборе точек ξ имеем $\underline{S}_T(f) \leq S_T(f,\xi) \leq \overline{S}_T(f)$

Значит, для произвольных точек ξ $|S_T(f,\xi) - I^*| \le \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$. Так как эта оценка имеет место для каждого разбиения T, для которого $\delta_T < \delta$, то функция f интегрируема и ее интеграл Римана равен верхнему интегралу Дарбу.

Классы интегрируемых функций

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда она равномерно непрерывна на этом отрезке (теорема Кантора). Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, то для любых точек $\xi^{'}$, $\xi^{''}$, из отрезка $[a,b]$, $|f(\xi^{'}) - f(\xi^{''})| < \delta$, выполнено: $|f(\xi^{'}) - f(\xi^{''})| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$- произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, удовлетворяющее условию $\lambda_T < \delta$. Тогда для любого натурального числа k, $1 \le k \le n$, справедливы неравенства $|M_k - m_k| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ (так как $f(x)$ непрерывна на любом отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, то она достигает на нем своих точных граней, значит, существуют точки $\xi^{'}, \xi^{''} \in [x_{k-1}, x_k]$, для которых $f(\xi^{'}) = M_k(f)$, $f(\xi^{''}) = m_k(f)$. Отсюда следует, что для разности верхней и нижней сумм Дарбу функции $f(x)$, соответствующих разбиению T, справедлива оценка

$$\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon.$$

Согласно критерию Римана интегрируемости функции на отрезке, это означает, что $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a,b]$. Тогда она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Будем считать для определенности, что $f(x)$ не убывает на $[a,b]$ (случай, когда $f(x)$ не возрастает, рассматривается аналогично). Если $f(a) = f(b)$, то $f(x) = f(a) = f(b)$ для любой точки x из $[a,b]$ и $f(x)$ интегрируема. Пусть $f(a) < f(b)$.

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Обозначим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, $\lambda_T < \delta$. Тогда

$$\overline{S_T}(f) - \underline{S}_T(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\lambda_T = (f(b) - f(a))\lambda_T$$

По $\varepsilon > 0$ выберем разбиение T, для которого $\lambda_T < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Тогда $\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$

Свойства определенного интеграла

Теорема (аддитивность интеграла Римана) Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и $a < c < b$. Если функция f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$. Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то она интегрируема и на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ и справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Доказательство. Если T – разбиение отрезка $[a,b]$, содержащее точку c, то точки T, принадлежащие отрезку $[a,c]$, образуют разбиение этого отрезка, которое обозначим T'. Аналогичное разбиение отрезка $[c,b]$ обозначим T''.

Имеем $\overline{S}_T - \underline{S}_T = (\overline{S}_{T'} - \underline{S}_{T'}) + (\overline{S}_{T''} - \underline{S}_{T''})$ Если f интегрируема на $[a,b]$, то согласно теореме 2 существует разбиение T, при котором как угодно мала разность в левой части $\overline{S}_T - \underline{S}_T = (\overline{S}_{T'} - \underline{S}_{T'} + (\overline{S}_{T''} - \underline{S}_{T''})$. Значит, малы и обе разности верхних и нижних сумм Дарбу из правой части $\overline{S}_T - \underline{S}_T = (\overline{S}_{T'} - \underline{S}_{T'} + (\overline{S}_{T''} - \underline{S}_{T''})$, так как такие разности всегда неотрицательны. Поэтому f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$. Наоборот, если малы разности в правой части $\overline{S}_T - \underline{S}_T = (\overline{S}_{T'} - \underline{S}_{T'}) + (\overline{S}_{T''} - \underline{S}_{T''})$, то мала и разность в левой части. Значит, из интегрируемости функции на $[a, c]$ и $[c, b]$ следует ее интегрируемость на $[a, b]$.

Докажем равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. Задав положительное ε, найдем $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения T отрезка $[a, b]$ с $\lambda_T < \delta$ при любом выборе точек ξ_k $|\int\limits_a^b f(x)dx - S_T(f, \xi)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Возьмем интегральные суммы Римана $S_{T'}(f, \xi')$ и $S_{T'}(f, \xi'')$ функции f на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно такие, что $\lambda_{T'} < \delta$ и $\lambda_{T''} < \delta$ и

$$\left| \int\limits_a^c f(x)dx - S_{T'}(f, \xi') \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

,

$$\left| \int\limits_c^b f(x)dx - S_{T''}(f, \xi'') \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда $S_{T'}(f, \xi') + S_{T''}(f, \xi'')$ является интегральной суммой Римана функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующей разбиению, диаметр которого меньше δ. Значит, для этой интегральной суммы справедлива оценка $\left| \int\limits_a^b f(x)dx - S_T(f, \xi) \right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Таким образом,

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_c^b f(x)dx \right| \leq \left| \int\limits_a^b f(x)dx - (S_{T'}(f, \xi') + S_{T''}(f, \xi'')) \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_a^b f(x)dx - S_{T'}(f, \xi') \right| + \left| \int\limits_a^b f(x)dx - S_{T''}(f, \xi'') \right|$$

Отсюда вытекает $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, так как левая часть в полученном неравенстве не зависит от ε.

1) Если $f(x) \in R[a, b]$, то $(c \cdot f(x)) \in R[a, b]$, причем $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доказательство. Доказательство этого факта вытекает из соотношения $\sum\limits_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

2) Если $f(x) \in R[a, b], \quad g(x) \in R[a, b]$, то $(f(x) \cdot g(x)) \in R[a, b]$.

3) Пусть $f(x) \in R[a, b], \quad a \leq c \leq d \leq b$. Тогда $f(x) \in R[c, d]$

4) Пусть $f(x) \in R[a, c]$ и $f(x) \in R[c, b]$, где $a < c < b$. Тогда $f(x) \in R[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

5) Пусть $f(x) \in R[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ для любой точки $x \in [a, b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$

6) Пусть $f(x) \in R[a, b]$ и $g(x) \in R[a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ для любой точки $x \in [a, b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$

7) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ для любой точки $x \in [a,b]$. Пусть существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) > 0$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$

8) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ для любой точки $x \in [a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

9) Если $f(x) \in R[a,b]$, то $|f(x)| \in R[a,b]$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

0.7 Билет 5. Первообразная. Формула Ньютона – Лейбница

Определение первообразной функции и неопределенного интеграла. Свойства неопределённых интегралов. Замена переменных и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона – Лейбница.

0.7.1 Основная часть

Промежутки означают отрезки, интервалы или полуинтервалы (когда один конец принадлежит промежутку, а другой – нет). При этом интервалы и полуинтервалы могут быть конечными и бесконечными.

Определение. Пусть на промежутке I задана функция $f(x)$. Функцию $F(x)$ называют **первообразной** функции $f(x)$ на I, если в каждой точке $x \in I$ существует производная $F'(x)$ и $F'(x) = f(x)$

Теорема. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b). Тогда, для того чтобы функция $\Phi(x)$ также была первообразной для функции $f(x)$ на том же интервале, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in (a, b)$ разность $\Phi(x) - F(x) = C$, где $C = const$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b). Тогда на этом интервале имеют места равенства $F'(x) = f(x)$ и $\Phi'(x) = f(x)$, следовательно, $(\Phi(x) = F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = 0 \Rightarrow$ (по теореме Лагранжа) $\Phi(x) - F(x) = const$.

Достаточность.Пусть на интервале (a, b) выполнено $\Phi(x) - F(x) = C$. Тогда на этом интервал $\Phi(x) = F(x) + C$, откуда $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = f(x)$, что означает, что $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на данном интервале.

Определение. **Неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется множество всех первообразных этой функции на этом интервале.

Неопределенный интеграл обозначают следующим образом $\int f(x)dx$, где $f(x)$ – подинтегральная функция, $f(x)dx$ – подинтегральное выражение.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int dF(x)dx = F(x) + C$
2. $d \int f(x)dx = f(x)dx$
3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x) \pm \int g(x)dx$
4. $\int [Af(x)]dx = A \int f(x)dx \ A = const$

Теорема (интегрирование по частям). Пусть на некотором промежутке функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные и существует интеграл $\displaystyle\int u'vdx$. Тогда на этом промежутке существует интеграл $\displaystyle\int uv'dx$ и справедливо равенство, которое называют формулой интегрирования по частям $\displaystyle\int u'vdx = uv - \int u'vdx + C$, где C – некоторая постоянная.

Доказательство. Найдем производную функции из правой части

$$\left(uv - \int u'vdx + C\right)' = (uv)' - \left(\int u'vdx\right)' = u'v + uv' - u'v = uv'$$

Таким образом, функция $uv - \int u'vdx + C$ является первообразной функции uv'. Значит, неопределенный интеграл $\int uv'dx$ существует и отличается от этой первообразной на некоторую постоянную. Формулу интегрирования по частям записывают также следующим образом:

$$\int udv = uv - \int vdu + C$$

Теорема (замена переменной). Пусть функция $f(x)$ на некотором промежутке имеет первообразную $F(x) = \int f(x)dx + C$. Если функция $x = \varphi(t)$ имеет производную на промежутке I и все значения $\varphi(t)$ принадлежат промежутку, на котором справедливо равенство $F(x) = \int f(x)dx + C$, то на I функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство. В силу условий теоремы сложная функция $f(\varphi(t))$ имеет смысл на промежутке I, а значит, имеет смысл и сложная функция $F(\varphi(t))$. Согласно теореме о производной сложной функции имеем для $t \in I$

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{dF(x)}{dx}\bigg|_{x=\varphi(t)} \quad \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(x)\bigg|_{x=\varphi(t)} \quad \frac{d\varphi}{dt}(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Отсюда вытекает равенство $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$. Теорема доказана.

Формулу $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$ можно записать иначе. Сделаем в $F(x) = \int f(x)dx + C$ замену $x = \varphi(t)$: $F(\varphi(t)) = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C$. Таким образом, $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C$ т.е. для вычисления интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ находим интеграл $\int f(x)dx$ и делаем затем замену $x = \varphi(t)$. Равенство $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C$ называют **формулой интегрирования подстановкой**.

Существование первообразной непрерывной функции.

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то согласно теореме об аддитивности интеграла относительно промежутка интегрирования f интегрируема на любом отрезке $[a, x]$ при $x \leq b$. Значит, на $[a, b]$ можно определить интеграл с переменным верхним пределом интегрирования $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

Теорема. Если интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $\Phi(x)$ верхнего предела интегрирования имеет в точке x_0 производную и $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство. Рассмотрим отношение приращения функции Φ к приращению аргумента в точке x_0. Если $x_0 + h \in [a, b]$, то $\dfrac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \dfrac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0) + \dfrac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt$

В силу непрерывности f в точке x_0 для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, если $|t - x_0| < \delta$. Поэтому, для $|h| < \delta$.

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)\right| dt \leq \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)dt\right| \leq \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt\right| = \varepsilon|h|$$

Получим $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$

Следствие. Непрерывная на отрезке функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является функция $\Phi(x)$ верхнего предела интегрирования.

Теорема (Формула Ньютона–Лейбница). Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема и имеет первообразную $F(x)$. Тогда справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ которое называют формулой Ньютона–Лейбница.

Доказательство. Пусть T_n – разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ равной длины $\dfrac{(b-a)}{n}$. Имеем $F(b) - F(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1})$. Согласно формуле конечных приращений Лагранжа для каждого k существует точка $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ такая, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)\frac{b-a}{n} = f(\xi_k)\frac{b-a}{n}.$$

Таким образом, $F(b) - F(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\dfrac{b-a}{n}$. Эта сумма является интегральной суммой Римана $S_{T_n}(f, \xi)$, где ξ – набор точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Так как функция f интегрируема, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что при любом выборе точек ξ^*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - S_{T_n}(f, \xi^*) \right| < \varepsilon$$

Отсюда вытекает справедливость равенства $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

0.7.2 Дополнительная часть

Теорема о производной сложной функции Рассмотрим сложную функцию $f(\varphi)$, определенную на множестве $M \subset \mathbb{R}$ имеет сопоставляюшую каждому $t \in M$ число $f(\varphi(t)]$. Пусть функция φ дифференцируема в точке $a \in M$ и пусть функция f дифференцируема в соответствующей точке $b = \varphi(a) \in E$ $(E \subset \mathbb{R})$. Тогда сложная функция $F(t) = f[\varphi(t)]$ дифференцируема в точке a и выполняется равенство $F'(a) = f'(b) \cdot \varphi'(a)$

Теорема (Лагранж). Пусть функция $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Теорема об аддитивности интеграла. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и $a < c < b$. Если функция f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$. Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то она интегрируема и на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ и справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

0.8 Билет 6. Функции многих переменных. Частные производные и полный дифференциал для функций многих переменных. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

Определение предела и непрерывности для функции многих переменных. Частные производные и дифференцируемость для функций многих переменных. Связь этих понятий. Полный дифференциал для функций многих переменных. Связь дифференцируемости и непрерывности для функции многих переменных. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению. Градиент дифференцируемой функции.

0.8.1 Основная часть

Определение. Пространство $\mathbb{R}^n$ – n - мерное действительное пространство это множество упорядоченных всех наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$.

Числа x_k называются **координатами точки (вектора)** $x \in \mathbb{R}^n$. Из курса линейной алгебры известно, что пространство $\mathbb{R}^n$ - это линейное пространство относительно операций сложения: $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и умножения на скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Это пространство является евклидовым относительно скалярного произведения $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. В нем можно ввести норму: $||x|| = (x, x) = \sqrt{(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2}$ и расстояние (метрику): $\rho(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

Определение. Открытым n-мерным шаром радиуса R с центром в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ называется множество $B_R(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \rho(x, x^0) < R\}$

Определение. ε - окрестностью точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x^0. Обозначение $B_\varepsilon(x^0)$.

Определение. Множество $\overset{0}{B}_\varepsilon(x^0) = B_\varepsilon \setminus \{x^0\}$ называется проколотой ε - окрестностью точки x^0.

Определение. Точка x^0 называется **предельной точкой множества** $A \subset \mathbb{R}^n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x \in A$ такая, что $x \in \overset{0}{B}_\varepsilon(x^0)$

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если существует число $R > 0$ такое, что $A \subset B_R(0)$.

Определение. Если каждому натуральному числу поставить в соответствие какую-либо точку пространства $\mathbb{R}^n$, то полученное множество точек $x^1, x^2, \ldots, x^m, \ldots$ называется последовательностью точек $\mathbb{R}^n$ и обозначается $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ или просто $\{x^m\}$.

Говорят, что последовательность $\{x^m\}$ сходится, если существует точка $a \in \mathbb{R}^n$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого $m \geq N$ выполнено: $\rho(x^m, a) < \varepsilon$. Точка a называется **пределом последовательности**. Обозначение: $\lim\limits_{m \to \infty} x^m = a$ или $x^m \underset{m \to a}{\longrightarrow} a$

Определение. Последовательность $\{x^m\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ - такое, что для любого натурального $m \geq N$ и для любого натурального p выполнено: $\rho(x^{m+p}, x^m) < \varepsilon$.

Теорема 1 (критерий Коши сходимости последовательности). Последовательность $\{x^m\}$ точек пространства $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Доказательство. Последовательность фундаментальна тогда и только тогда, когда она фундаментальна покоординатно. Каждая из координатных последовательностей является обычной числовой последовательностью. Она сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна (критерий Коши сходимости числовой последовательности). Но последовательность точек $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она сходится покоординатно. Значит, последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Определение. Если каждой точке x из множества $X \subset \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие по известному закону действительное число $f(x)$, то говорят, что на множестве X задана функция n переменных $f(x)$ (или

$f(x_1, \ldots, x_n)$. Множество X называется областью определения функции $f(x)$ и обозначается D_f.

Определение (предел функции по Коши). Число $b \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$ такой, что $0 < \rho(x, a) < \delta$ выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x_1 \to a_1 \ldots x_n \to a_n} f(x) = b$

Определение (предел функции по Гейне). Число $b \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$, если для любой последовательности аргументов $\{x^m\}$, $x^m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} a, \quad x^m \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x^m) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} b$.

Доказательство. Доказательство эквивалентности определении по Коши и по Гейне проводится точно так же, как в одномерном случае.

Определение. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке $a \in \mathbb{R}^n$ (при $x \to \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in D_f$, таких, что $0 < \rho(x', a) < \delta$, $0 < \rho(x'', a) < \delta$ $(||x'|| > \delta, ||x''|| > \delta)$, выполнено: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема (критерий Коши существования предела функции многих переменных). Функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке $a \in \mathbb{R}^n$ (при $x \to \infty$) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши в точке a (при $x \to \infty$).

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$, a является предельной точкой множества X.

Определение (формальное). Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение (Коши). Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $x \in D_f$, для которой $\rho(x, a) < \delta$, выполнено: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Определение (Гейне). Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если для любой последовательности аргументов $\{x^m\}$ $x^m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x^m) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ таково, что любая его точка является для него предельной. **Определение**. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется непрерывной на этом множестве, если она непрерывна в каждой точке $x \in X$.

Замечание. Если функция непрерывна в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке по каждой из переменных. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. 1) Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} \right) - 1 = 0$. Значит, функция $f(x, y)$ непрерывна по x в точке $(0, 0)$. Аналогично доказывается непрерывность по y в точке $(0, 0)$.

Однако $f(x, y)$ не является непрерывной в начале координат: пусть $x_m = \dfrac{1}{m}$, $y_m = \dfrac{1}{m}$, тогда $f(x_m, y_m) = 0$. Мы получили, что последовательность $\{x, y_m\} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} (0, 0)$, но $\{f(x_m, y_m)\}$ не стремится при $m \to \infty$ к $f(0, 0) = 1$, то есть функция $f(x, y)$ не является непрерывной в точке $(0, 0)$ по совокупности аргументов (т.к. не выполняется определение Гейне).

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ - внутренняя точка множества X; $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, где $\Delta x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ приращения аргументов, такие, что $x = x^0 + \Delta x \in X$.

Определение. Частной производной функции $f(x)$ по переменной x_k в точке x^0 называется предел:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_k}$$

Часто вместо $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ применяют обозначение $f'_{x_k}(x^0)$.Заметим, что частная производная – это обычная производная функции одной переменной, которая получается из функции $f(x)$, если зафиксировать и считать постоянными все её переменные, кроме x_k. А поскольку из дифференцируемости функции одной переменной следует её непрерывность (в данной точке), то отсюда сразу следует, что если существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0 по переменной x_k.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, если существует такая окрестность $B_\delta(x^0)$ точки x^0, что для любого $x \in B_\delta(x^0)$ приращение $\Delta f = f(x) - f(x^0)$ имеет вид: $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - фиксированные числа, не зависящие от x. $\rho = ||\Delta x|| = \sqrt{\Delta_1^2 + \ldots + \Delta_n^2}$. Заметим, что

$$o(\rho) = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} \cdot \Delta x_1 + \ldots + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_n}{\rho} \cdot \Delta x_n$$

Поскольку $\dfrac{\Delta x_k}{\rho} \le 1$, а величина $\dfrac{o(\rho)}{\rho}$ - бесконечно мала при $\rho \to 0$, то, обозначив $\alpha_k = \dfrac{o(\rho) \cdot \Delta x_k}{\rho^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ получаем: $o(\rho) = \alpha_1 \cdot \Delta x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot \Delta x_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - бесконечно малы при $\rho \to 0$, или, равносильно, при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$.Это позволяет получить следующее представление приращения дифференцируемой функции: $\Delta f = A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots \alpha_n \Delta x_n = (A, \Delta x) + (\alpha, \Delta x)$, Здесь в скалярных произведениях участвуют векторы $A = (A_1, \ldots, A_n)$,$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, x_n)$. Наоборот, $\alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_n \Delta x_n = \rho \cdot (\alpha_1 \dfrac{\Delta x_1}{\rho} + \ldots + \alpha_n \dfrac{\Delta x_n}{\rho}) = o(\rho), \quad \rho \to 0$ При этом выражение $A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n = (A \Delta x)$ есть главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции Δf.

Определение. Дифференциалом (первым дифференциалом) функции) $f(x)$ в точке x^0 (соответствующим вектору Δx приращений переменных) называется главная, линейная относительно приращений переменных, часть приращения функции: $df(x^0, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n$, где константы $A_1, \ldots, A_n$ определены из равенства $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0$.

Определение. **Полным дифференциалом** функции многих переменных называется величина, равная сумме всех ее частных дифференциалов.

Теорема (Необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то в этой точке существуют её частные производные f'_{x_k} по всем переменным x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, $f'_{x_k}(x^0) = A_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, A_k - постоянные из формулы $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0$.

Доказательство. Возьмём вектор приращений $\Delta x = \Delta_k x = (0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0)$, то есть переместимся от точки x^0 в некоторую точку x вдоль координатной оси x_k. Поскольку $f(x)$ дифференцируема в x^0, то её приращение (согласно $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0$) в данном случае имеет вид: $\Delta f = A_k \Delta x_k + o(\rho), \quad \rho = |\Delta x_k|$. Следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = A_k$, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Используя представление $\Delta f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n + o(\rho)$ и неравенства: $|\Delta x_k| < \rho$, $k = 1, 2, \ldots, n$ получаем: $|\Delta f| = |\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n + o(\rho)| \le |\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1| + \ldots + |\dfrac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n| + |o(\rho)| \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right|\right) \cdot \rho + |\o(\rho)|$ Отсюда ясно, что $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta f = 0$. Это и означает непрерывность функции $f(x)$ в данной точке. Теорема доказана.

Теорема (Достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки x^0, и все они непрерывны в самой точке x^0, то $f(x)$ дифференцируема в точке x^0.

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $f(x)$ в точке x^0:

$$\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) =$$

$$= \left[f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0)\right] +$$

$$+ \left[f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_{n-2}^0 + \Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_{n-2} + \Delta x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)\right] +$$

$$+ \ldots + [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)] =$$

(применяя теорему Лагранжа к разностям в квадратных скобках, получаем)

$$f'_{x_n}(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_{n-1}^0 + \Delta x_{n-1}, x_n^0 + \theta_n \Delta x_n)\Delta x_n +$$

$$+ f'_{x_{n-1}}(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_{n-1}^0 + \theta_{n-1}\Delta x_{n-1}, x_n^0)\Delta x_{n-1} + \ldots + f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^n, \ldots, x_n^0)\Delta x_1 =$$

(в силу непрерывности частных производных в точке x^0)

$$= (f'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0) + \alpha_n)\Delta x_n + (f'_{x_{n-1}}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0) + \alpha_{n-1})\Delta x_{n-1} + \ldots +$$

$$\ldots + f'_{x_1}(x^0)\Delta x_1 + \ldots f'_{x_n}\Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \ldots + \alpha_n \Delta x_n,$$

где $a_k \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Это и означает дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x^0.Теорема доказана.

Рассмотрим некоторое обобщение понятия частной производной функции многих переменных. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ - внутренняя точка области определения функции $f(x, y, z)$. Пусть задан вектор $e \in \mathbb{R}^3$, $||e|| = 1$. Тогда $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы между вектором e и осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Рассмотрим функцию $g(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$, где $t \in \mathbb{R}$ вещественный параметр.

Определение. Производной функции $f(x)$ по направлению вектора $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется производная сложной функции $g(t)$ в точке $t_0 = 0$, то есть число $\dfrac{\partial f}{\partial e}(M_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(M_0 + te) - f(M_0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$ Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке M_0. Тогда функция $g(t)$ дифференцируема в нуле как сложная функция и справедлива формула:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(M_0) = f'_x(M_0) \cdot \cos\alpha + f'_y \cdot \cos\beta + f'_z \cdot \cos\gamma,$$

где α - угол между вектором e и осью Ox.

Пусть теперь $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ - фиксированная точка, внутренняя для области определения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, и пусть задан вектор e, $e \in \mathbb{R}^n$, $||e|| = 1$. В этом случае координаты вектора e равны его направляющим косинусам: $e = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, где α_i - угол между осью Ox_i и вектором e, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим функцию $g(t) = f(x^0 + te) = f(x_1^0 + t cos\,\alpha_1, \ldots, x_n^0 + t cos\,\alpha_n)$, где $t \in \mathbb{R}$ – вещественный параметр.

Определение. Производной функции $f(x)$ по направлению $e = (cos\,\alpha_1, \ldots, cos\,\alpha_n)$ в точке x^0 называется производная сложной функции $g(t)$ в точке $t_0 = 0$, то есть число

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + te) - f(x^0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Вектор $gradf(x^0) = (f'_{x_1}(x^0), \ldots, f'_{x_n}(x^0))$ называется **градиентом** функции $f(x)$ в точке x^0. Таким образом, получаем равенство: $\dfrac{\partial f}{\partial e}(x^0) = (gradf(x^0), e)$

Градиент функции (в данной точке) – это вектор, направление которого есть направление наибольшей скорости роста функции, а норма градиента равна этой наибольшей скорости роста.

0.8.2 Дополнительная часть

Эквивалентность определений по Коши и Гейне в одномерном случае.

1. Пусть b предел функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ по Коши. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

   По определнию сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x_0 —

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists N > 0 : \forall n \geq N \ \ |x_n - x_0| < \delta.$$

   Так как $\forall n \ (x_n \neq x_0)$, то

$$\forall n \geq N \ 0 < |x_n - x_0| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N \ |f(x_n) - b| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x_n\} \to x_0, \forall n (x_n \neq x_0) \Rightarrow \lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = b.$$

2. Пусть b предел функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ по Гейне. Пусть b не является пределом функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ по Коши. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ \exists x \in X \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

   Пусть

$$\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall \delta_n \exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ |f(x_n) - b| \geq \varepsilon,$$

   но

$$\forall \delta_n \exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow \{x_n\} \to x_0$$

   и по опредлению Гейне

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = b,$$

   то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N > 0 : \forall n \geq N \ \ |f(x_n) - b| < \varepsilon \Rightarrow$$

   противоречие.

0.9 Билет 7. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.

Частичные суммы и сходимость ряда. Критерий сходимости Коши для ряда. Условие сходимости положительного ряда. Сравнение положительных рядов. Признаки Коши и Даламбера. Интегральный признак сходимости рядов.

0.9.1 Основная часть

Определение. Числовым рядом (или просто рядом) называется выражение вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

где $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – члены ряда , u_n — общий член ряда

Сумму первых n членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ принято называть n – й частичной суммой ряда и обозначать символом S_n , т.е. $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится (ряд сходится , если сходится последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ этого ряда) , если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда: $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ расходится , если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

Пример 1 . Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ расходится , поскольку последовательность его частичных сумм $S_n = (-1)^{n-1}$ не имеет предела .

Пример 2 . Сходимость геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...(a \neq 0)$$

Сумма первых n – членов геометрической прогрессии

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^n)}{1-q}\,(q \neq 1)$$

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, ряд сходится , его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд расходится

3. Если $|q| = 1$, то :

– при $q = 1$ ряд принимает вид $a + a + ...$. Для него $S_n = na$ и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е ряд расходится.

– при $q = -1$ ряд принимает вид $a - a + a - a + ..$. В этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n.

Следовательно , $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и ряд расходится.Таким образом , при $|q| < 1$ – ряд сходится и его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$ и расходится при $|q| \geq 1$

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости числового ряда)

Для того , чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился , необходимо и достаточно , чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \varepsilon$$

Доказательство. Сходимость числового ряда – это сходимость последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм , а для сходимости $\{S_n\}$ необходимо и достаточно , чтобы она была фундаментальной , т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, или $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \varepsilon$ что доказывает теорему.

Следствие 1 (необходимое условие сходимости ряда) :
Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится , то $u_n \to 0$ при $n \to \infty$

Доказательство: Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится , то выполнено условие $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k| \le \varepsilon$. Возьмем $p = 1$: $|u_{n+1}| \le \varepsilon \; \forall n \ge N$. Это и означает , что $u_n \to 0$ при $n \to \infty$

Данное условие является НЕОБХОДИМЫМ , НО НЕ ДОСТАТОЧНЫМ условием сходимости (пример гармонический ряд $u_n = \frac{1}{n}$ расходится хотя $u_n \to 0$ при $n \to \infty$)

Следствие 2 Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится , то $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь r_n – остаток ряда.

Доказательство : Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S$, то $S = S_n + r_n$, а поскольку $S_n \to S$ при $n \to \infty$, то $r_n \to 0$ при $n \to \infty$

Расходимость гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$

Ясно , что $\lim\limits_{n\to\infty} u_k = 0$. Однако ряд расходится. Как известно , $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $(1+\frac{1}{n})^n < e$. Получим $n\, ln(1+\frac{1}{n}) < 1$, т.е. $\frac{1}{n} > ln(\frac{n+1}{n})$,
$\frac{1}{n} > ln(n+1) - ln(n) \Rightarrow 1 > ln(2), \frac{1}{2} > ln(3) - ln(2), \frac{1}{3} > ln(4) - ln(3), ... \frac{1}{n} > ln(n+1) - ln(n) \Rightarrow S_n > ln(n+1)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} ln(n+1) = \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. гармонический ряд расходится.

Ряды с положительными членами. Условие сходимости положительного ряда

Если все $u_k \ge 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ называется рядом с положительными членами. Последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм в этом случае будет неубывающей и поэтому для сходимости ряда с полож.членами необходимо и достаточно , чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.

Критерий сходимости положительного ряда

Положительный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится $\Leftrightarrow$, когда последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ограничена сверху .

Признак сравнения рядов.

Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Если для $\forall k$ выполняется неравенство : $u_k \le v_k$, то
1.Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.
2.Тогда из расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.

Доказательство. Обозначим n – частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ соответственно через $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$. Из неравенства $u_k \le v_k$ следует , что $S_n^{(u)} \le S_n^{(v)}$. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится и его сумма равна S_2 . Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_2$. Члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k > 0$, поэтому $S_n^{(v)} < S_2$ и $S_n^{(u)} \le S_2$. Таким образом , последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, S_n^{(u)}, ...$ монотонно возрастает ($u_k > 0$) и ограниченна сверху числом $S_2 \Rightarrow S_n$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = S_1$, т.е. ряд

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится . Пусть теперь ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ расходится. Так как члены ряда $\geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \infty$. Из $S_n^{(u)} \leq S_n^{(v)}$ получим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = \infty$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ расходится.

Предельный признак сравнения.

Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{u_k}{v_k} = A \ (0 < A < \infty)$, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся или расходятся одновременно .

Доказательство. По определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0, \forall n \geq n_0$ выполняется неравенство : $|\dfrac{u_k}{v_k} - A| < \varepsilon$ или

$$-\varepsilon < \frac{u_k}{v_k} - A < \varepsilon$$

$$(A-\varepsilon)v_k < u_k < (A+\varepsilon)v_k$$

Так как $A > 0$ мы можем взять ε достаточно малым , чтобы $A - \varepsilon > 0$. Но тогда $v_k < \dfrac{u_k}{A-\varepsilon}$, откуда по признаку сравнения если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, то сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Аналогично $u_k < (A+\varepsilon)v_k$, если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится.

Признак Даламбера.

Если $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall k > k_0$ и $p_k > 0$: $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ $(\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$ сходится (расходится)

Доказательство.
$\dfrac{p_2}{p_1} \leq q$, $\dfrac{p_3}{p_2} \leq q$, ... , $\dfrac{p_k}{p_{k-1}} \leq q$. Перемножаем почленно неравенства : $p_k \leq p_1 q^{k-1}$. При $q < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p_1$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$ сходится . Если $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$, то $p_{k+1} \geq p_k \geq ... \geq p_1 > 0$ тем самым не выполнено необходимое условие сходимости ряда ($\lim\limits_{k\to\infty} p_k = 0$) .

Признак Даламбера в предельной форме

Если $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_{k+1}}{p_k} = q$. Если $q < 1 (q > 1)$ то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).

Доказательство:
$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_{k+1}}{p_k} = A$. По определению предела $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in N : \forall k > N_\varepsilon\ |\dfrac{p_{k+1}}{p_k} - A| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow A - \varepsilon < \dfrac{p_{k+1}}{p_k} < A + \varepsilon$. 1. Если $A < 1$, то положим $\varepsilon = \dfrac{1-A}{2}$, тогда $q = A + \varepsilon < 1$, тогда по признаку Даламбера ряд сходится . 2. Если $A > 1$, то положим $\varepsilon = \dfrac{A-1}{2}$, тогда $q = A - \varepsilon > 1$, а значит ряд расходится.

Замечание. Признак Даламбера в предельной форме не позволяет судить о расходимости или сходимости если $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_{k+1}}{p_k} = 1$.

Пример. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$. Оба удовлетворяют условию. Но первый расходится .

Признак Коши. Если $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall k > k_0$ и $p_k \geq 0$ $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 (\sqrt[k]{p_k} \geq 1)$ то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).

Доказательство. Пусть $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 : \sqrt[k]{p_k} \leq q \Leftrightarrow p_k \leq q^k$. 1. Если $0 < q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ будет сходится, а значит по признаку сравнения будет сходиться и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$.

Пусть $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 : \sqrt[k]{p_k} \geq 1 \Leftrightarrow p_k \geq 1$, что противоречит необходимому условию сходимости ряда .

Признак Коши в предельной форме . Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = q$. Если $q < 1$ $(q > 1)$ то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).

Доказательство. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = A$

По определению предела $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in N : \forall k > N_\varepsilon\ |\sqrt[k]{p_k} - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < A + \varepsilon$. Если $A < 1$, то $q = A + \varepsilon < 1$ и по признаку Коши ряд сходится. Если $A > 1$, то $q = A - \varepsilon > 1$, а тогда ряд расходится.

Замечание. Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = 1$ то ряд может как сходиться, так и расходиться .

Интегральный признак Коши-Маклорена. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ является рядом с положительными членами и пусть $\exists$ функция $f(x)$, определенная при $x \geq 1$ и удовлетворяющая условиям:
1.$f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$

2.$f(x)$ не возрастает при $x \geq 1$ (начальным значением номера n вместо 1 может быть $\forall n_0 \in \mathbb{N}$)
$x \geq n_0$) 3. $\forall k : f(k) = p_k$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится $\Leftrightarrow$ когда $\exists \displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$

Доказательство. Ясно, что $p_k \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq p_{k-1}$. Просуммируем это неравенство по k от 2 до n: $p_2 + p_3 + ... + p_n \leq \displaystyle\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + ... + \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq p_1 + p_2 + ... + p_{n-1}$ или $S_n - p_1 \leq u_n \leq S_{n-1}$, где $u_n = \displaystyle\int_1^n f(x)dx$ и $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ Так как $f(x) \geq 0$, то $\{u_k\}$ — неубывающая последовательность. Для ее сходимости , т.е. для $\exists$ предела $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ необходимо и достаточно , чтобы она была ограничена. Для сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ необходимо и достаточно, чтобы $\{S_n\}$ его частичных сумм была ограничена . Следовательно , S_n сходится (сходится и ряд) $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} u_n$

0.9.2 Дополнительная часть

Свойства числовых рядов:

1.Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cu_k = cu_1 + cu_2 + ... + cu_k + ...$ также сходится и его сумма cS. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cu_k = cu_1 + cu_2 + ... + cu_k + ...$ расходится.

Доказательство.

Обозначим n — ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cu_k = cu_1 + cu_2 + ... + cu_k + ...$ через $S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + ... + cu_k = c(u_1 + u_2 + ... + u_k) = c * S_n$. Следовательно , $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim\limits_{n\to\infty} cS_n = c \lim\limits_{n\to\infty} S_n = cS$ (ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cu_k = cu_1 + cu_2 + ... + cu_k + ...$ сходится и имеет сумму cS) . Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cu_k = cu_1 + cu_2 + ... + cu_k + ...$ расходится. Допустим противное : ряд (3) сходится и имеет сумму S_1. Тогда $S_1 = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim\limits_{n\to\infty} cS_n = c\lim\limits_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{S_1}{c}$, т.е. ряд сходится, что противоречит условию расходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$

2. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ и их суммы равны S_1 и S_2 соответственно , то сходятся и ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$

Доказательство. Обозначим n–ю частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$ через $S_n^{(u)}, S_n^{(v)}$ и S_n соответсвенно.Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} \pm \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{v} = S_1 \pm S_2$ – каждый из рядов сходится , значит и их сумма сходится.

3. Если к ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u_1+u_2+...+u_n+...$ прибавить (или отбросить) конечное число членов , то полученный ряд и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Обозначим через S сумму отброшенных членов , через k – наибольший из номеров этих членов . На месте отброшенных членов поставили 0 . Тогда $n > k$ будет выполнено равенство $S_n - S_n^{'} = S$, где $S_n^{'}$ – это n–частичная сумма ряда, полученного из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ путем отбрасывания конечного числа членов . $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S + \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{'} \Rightarrow$ пределы в левой и правой частях одновременно $\exists$ или $\nexists$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ сходится (расходится) $\Leftrightarrow$ когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов . Аналогично и в случае приписывания к ряду конечного числа членов .

4.Если ряды u_k и v_k сходятся и их суммы равны соответственно S_1 и S_2 , то для $\forall \alpha, \beta$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha u_k + \beta v_k)$ сходится и его сумма $S = \alpha S_1 + \beta S_2$
$\forall n : \sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{n} v_k \Rightarrow$ (при $n \to \infty$) $S = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = \alpha S_1 + \beta S_2$

Второй признак сравнения.

Если для членов строго полож. рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, начиная с некоторого места $(n > N)$ выполняется неравенство : $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \le \dfrac{v_{k+1}}{v_k}$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ следует сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, а из расходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ следует расходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$

Доказательство.
$\dfrac{u_2}{u_1} \le \dfrac{v_2}{v_1}, \dfrac{u_3}{u_2} \le \dfrac{v_3}{v_2}, ...\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \le \dfrac{v_n}{v_{n-1}}$. Почленно перемножим неравенства получим $\dfrac{u_n}{u_1} \le \dfrac{v_n}{v_1}$ или $u_n \le \dfrac{u_1}{v_1} v_n$. $\dfrac{u_1}{v_1} = c$ — положительная константа. Дальше применить признак сравнения.

Признак Раабе. Если $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall k > k_0 : k(1 - \dfrac{p_{k+1}}{p_k}) \ge q > 1$ $(k(1 - \dfrac{p_{k+1}}{p_k}) \le 1)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится)

Признак Раабе в предельной форме . Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} k(1 - \dfrac{p_{k+1}}{p_k}) = L$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L > 1$ и при $L < 1$ расходится.

Признак Гаусса . Пусть дан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \ge 0)$ и ограниченная числовая последовательность $\{c_n\}$. Тогда если отношение $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ представимо в виде : $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha + \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{c_n}{n^{\lambda}}$, где $\alpha, \beta, \lambda = \text{const}$ $(\lambda > 1)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$. Если же $\alpha = 1$, то ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \le 1$

Расходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha \le 1)$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + ... + \dfrac{1}{k^\alpha} + ...$

При $\alpha \le 1$ $\forall k : \dfrac{1}{k^\alpha} \ge \dfrac{1}{k}$ Так как гармонический ряд расходится $\Rightarrow$ при $\alpha \le 1$ обобщенный гармонический ряд по признаку сравнения расходится

Сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha > 1)$

Введем функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Она будет положительной и убывающей при $x \ge 1$, причем $f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha}$ Поскольку $u_n = \int_1^n \dfrac{dx}{x^\alpha} = \dfrac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_1^n = \dfrac{n^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} \to \dfrac{1}{1-\alpha}$ при $n \to \infty$, то по интегральному признаку ряд сходится .

Замечания 1.В признаке Даламбера неравенство $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \le q < 1$ нельзя заменить на $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} < 1$ Пример гармонический ряд расходится , но для этого ряда $\forall k : \dfrac{p_{k+1}}{p_k} = \dfrac{k}{k+1} < 1$

2.В признаке Коши неравенство $\sqrt[k]{p_k} \le q < 1$ нельзя заменить на $\sqrt[k]{p_k} < 1$

3.Признак Коши сильнее чем признак Даламбера . Ибо всякий раз когда действует признак Даламбера действует и признак Коши . Обратное неверно. Пример. $\dfrac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}$

По Коши : $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}} = \dfrac{1}{2}$. По Даламберу : $\nexists \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\dfrac{(-1)^{k+1} + 3}{2^{k+2}}}{\dfrac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}}$

4. Сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд. Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящейся так и расходящейся.

0.10 Билет 8. Абсолютная и условная сходимость рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Абсолютная и условная сходимость рядов, их взаимосвязь. Знакопеременные ряды и теорема Лейбница для таких рядов. Теорема Дирихле для абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана для не абсолютно сходящихся рядов.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ldots$ сходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$,то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ldots$ называется **абсолютно сходящимся**.

Теорема (Коши). Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленного из абсолютных величин ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, влечет за собой и сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Доказательство. Получается из признака сходимости. Неравенство $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| = \ldots + |a_{n+m}|$ показывает, что если условие выполнено для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то оно будет выполнено и для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение. Ряд называется **условно** сходящимся, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ не сходится.

Определение. **Знакопеременными** называются ряды, члены которых поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки.

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots, \quad (c_n > 0)$$

Теорема (Лейбниц). Если члены знакопеременного ряда $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots, \quad (c_n > 0)$ монотонно убывают по абсолютной величине: $c_{n+1} < c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ и стремятся к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, то ряд сходится.

Доказательство. Частичную сумму четного порядка C_{2m} можно написать в виде $C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m})$. Так как каждая скобка, ввиду $c_{n+1} < c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$, есть положительное число, то отсюда ясно, что с возрастанием m сумма C_{2m} также возрастает. С другой стороны, $C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}$, то можно заметить, что C_{2m} остается сверху ограниченной: $c_{2m} < c_1$. В таком случае, по теореме о пределе монотонной последовательности, при безграничном возрастании m частичная сумма C_{2m} имеет конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} C_{2m} = C$. Переходя к частичной сумме нечетного порядка C_{2m-1}, имеем $C_{2m-1} = C_{2m} + c_{2m}$. Так как общий член стремится к нулю, то и $\lim\limits_{m\to\infty} C_{2m-1} = C$. Отсюда следует, что C и будет суммой данного ряда.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$. Данный ряд сходится по теореме Лейбница, но ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$ расходится (гармонический ряд).

Теорема (Дирихле). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ абсолютно сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k = (a')_1 + (a')_2 + \ldots + (a')_k + \ldots$ полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет сумму A, что и исходный ряд.

Доказательство. Предположим сначала, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительный. Рассмотрим произвольную частичную сумму A'_k ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$ Так как $a'_1 = a_{n_1}, \quad a'_2 = a_{n_2}, \quad a'_k = a_{n_k}$, то взяв n' большим всех номеров

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ будем иметь $A'_k \leq A_n$. Следовательно, $A'_k \leq A$. В таком случае $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$ будет сходящимся (по теореме о сходимости положительного ряда), и его сумма A' не превзойдет A: $A' \leq A$. Но и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ получается из $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a'_k$ получается перестановкой членов, поэтому аналогично $A \leq A'$. Отсюда,$A = A'$.

Пусть теперь $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ будет произвольный абсолютно сходящийся ряд. Так как сходящийся положительный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ по доказанному, при любой перестановке членов останется сходящимся, то по теореме Коши сохранит при этом свою (абсолютную) сходимость и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В случае абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, его сумма выражается как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$- $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m$, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m$ суммы положительных рядов, составленных соответственно из положительных членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и из абсолютных величин его отрицательных членов. Перестановка членов в ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вызовет перестановку членов и в этих рядах, но не отразится (по доказанному) на их суммах $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m$. Следовательно, сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ останется прежней.

Теорема (Риман). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то какое бы ни взять наперед число L, конечное или равное $\pm\infty$, можно так переставить члены в этом ряде, чтобы преобразованный ряд имел суммой именно L.

Доказательство. Докажем, для случая конечного L. Так как все остатки рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m$ (суммы положительных рядов, составленных соответственно из положительных членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и из абсолютных величин его отрицательных членов) будут расходящимися, так что в каждом из этих рядов, начиная с любого места можно набрать столько членов, чтобы их сумма превзошла любое число. Пользуясь этим произведем перестановку ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Сначала возьмем столько положительных членов нашего ряда в том порядке,в каком они и расположены, чтобы их сумма превзошла число L: $b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} > L$.

Вслед за ними выпишем отрицательные члены (в том порядке, в котором они расположены в данном ряде), взяв их столько, чтобы общая сумма стала меньше чем L.

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m_1} < L$$

После этого снова поместим положительные члены из числа оставшихся так, чтобы было

$$b_1 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - \ldots - c_{m-1} + b_{k_1+1} + \ldots + b_{k_2} > L$$

Затем наберем столько отрицательных членов из числа оставшихся, чтобы было

$$b_1 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - \ldots - c_{m_1} + b_{k_1+1} + \ldots + b_{k_2} - c_{m_1+1} - \ldots - c_{m_2} < L$$

и т.д. Процесс этот мы мыслим продолженным до бесконечности. Каждый член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, и притом со своим знаком, встретится на определенном месте. Если всякий раз, выписывая члены b или c, набирать их не больше, чем необходимо для осуществления требуемого неравенства,то уклонение от числа L в ту или иную сторону не превзойдет по абсолютной величине последнего написанного члена. Тогда из $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$, $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = 0$ ясно, что ряд

$$(b_1 + \ldots + b_{k_1}) - (c_1 + \ldots + c_{m_1}) + \ldots + (b_{k_{i-1}+1} + \ldots + b_{k_i}) - (c_{m_{i-1}+1} + \ldots + c_{m_i}) + \ldots$$

имеет своей суммой L. Если $L = +\infty$, то можно было бы набор положительных чисел подчинить требованию, чтобы суммы последовательно становились больше 1,2,3 и т.д, а из отрицательных членов помещать лишь по одному после каждой группы положительных.

Теорема (О пределе монотонной последовательности). Пусть дана монотонно возраставющая последовательность x_n. Если она ограниченна сверху $x_n \leq M, \quad (M = const \quad n = 1, 2, 3, \ldots)$, то необходимо имеет конечный предел, в противном случае она стремится к $+\infty$. Точно так же имеет и монотонно убывающая последовательность x_n. Ее предел конечен, если она ограниченна снизу,в противном случае ее пределом служит $-\infty$.

Теорема (О сходимости положительного ряда). Положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad (a_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots)$ всегда имеет сумму; эта сумма будет конечной (и, следовательно ряд сходящимся), если частичные суммы ряда ограниченны сверху и бесконечной (а ряд расходящимся) в противном случае.

Пояснение 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (A^*)$

Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходится. Из сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m$ суммы положительных рядов, составленных соответственно из положительных членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и из абсолютных величин его отрицательных членов. $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$, $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = 0$ В данном случае они расходятся. Действительно, если среди первых n членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ есть k положительных и m отрицательных членов, то $A_n = B_k - C_m, \quad A_n^* = B_k + C_m$. Второе из этих равенств показывает, что оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m$ не могут одновременно сходиться, иначе сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ вопреки предположению. А из первого усматриваем, что если бы один из этих рядов сходился, а другой нет, то расходился бы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что также противоречит предположению.

0.11 Билет 9 Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Признаки Вейерштрасса и Дини. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Равномерная сходимость последовательности функций. Критерий Коши для равномерной сходимости. Непрерывность равномерного предела непрерывных функций. Функциональные ряды и их равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса для равномерной сходимости ряда. Теорема Дини для положительных функциональных рядов. Предельный переход под знаком функционального ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.

0.11.1 Основная часть

Предположим, что дана последовательность. элементами которой являются функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ от одной и той же переменной x, определенные в некоторой области ее изменения $X = \{x\}$. Пусть для каждого x из X эта последовательность имеет конечный предел. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, которую мы будем называть **предельной** функцией для последовательности $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ или для функции $f_n(x)$. Рассмотрим теперь ряд членами которого являются функции от одной и той же переменной x в некоторой области X: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$. Пусть этот ряд сходится при каждом значении x в X. Тогда его сумма также представит собой некоторую функцию от x: $f(x)$. Под $f_n(x)$ будем подразумевать частичную сумму $f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$.

Определение. 1. Последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ имеет в X предельную функцию $f(x)$. 2. Для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой не зависящий от x номер N, что при $n > N$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется одновременно для всех $x \in X$, то говорят что последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно x в области X.

Определение. Предполагая ряд сходящимся, обозначим сумму ряда за $f(x)$, частичную сумму $f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) = \ldots + u_n(x) + \ldots$ и остаток после n-го члена $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x)$. При любом фиксированном x: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$. Если частичная сумма $f_n(x)$ стремится к сумме ряда $f(x)$ равномерно относительно x в области X (или что то же, остаток ряда φ_n равномерно стремится к нулю), то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ равномерно сходится в этой области.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$, сходящийся для всех x из области X, называется равномерно сходящимся в этой области, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой не зависящий от x номер N, что при $n > N$ неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad |\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

выполняется одновременно для всех x из X.

Теорема (Критерий Коши для равномерной сходимости). Для того, чтобы последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ 1. имела предельную функцию 2.сходилась к этой функции равномерно относительно x в области X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой не зависящий от x номер N, что при $n > N$ и любом $m = 1, 2, 3, \ldots$ неравенство $|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ имело место для всех x из X одновременно.

Доказательство. Необходимость. Если последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ имеет предельную функцию $f(x)$ и сходится к ней равномерно в X, то по заданному $\varepsilon > 0$ такой не зависящий от x номер N, что при $n > N$ будет $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех x. Аналогично, $|f_{n+m}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$. Из данных неравенств вытекает $|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть условие, указанное в теореме, выполнено. Тогда, какое бы значение x из X ни фиксировать, в лице последовательности $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ мы будем иметь числовую последовательность для которой выполнено условие Больцано-Коши. Следовательно, для этой последовательности существует конечный предел, чем доказано существование для подпоследовательности $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ предельной функции $f(x)$. Теперь взяв для произвольных $n > N$ и x из X, станем в неравенстве $|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ безгранично увеличивать m (при постоянных n и x). Переходя к пределу, получим $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Этим устанавливается равномерное стремление $f_n(x)$ к $f(x)$.

Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ сходился равномерно в области X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой не зависящий от x номер X, что при $n > N$ и любом $m = 1, 2, 3, \ldots$ неравенство $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)| = |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_{n+m}(x)| < \varepsilon$ имеет место для всех x из X.

Определение (Признак Вейерштрасса). Если члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ удовлетворяют в области X неравенствам $|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$, где c_n – члены некоторого сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходятся в X равномерно.

Теорема 2. Если функции $u_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ определены и непрерывны в промежутке $X = [a, b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ сходится в X равномерно к сумме $f(x)$, то и эта сумма будет непрерывна в промежутке X.

Доказательство. Возьмем в промежутке X какую-либо точку x_0 и установим непрерывность функции $f(x)$ в этой точке. Имеем при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$ и любом x из X: $f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x)$ и в частности $f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0)$, откуда

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)|$$

Зададимся теперь произвольным $\varepsilon > 0$. Ввиду равномерной сходимости ряда можно фиксировать номер n так, чтобы неравенство $|\varphi_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ выполнялось для всех x в промежутке X (в том числе и для $x = x_0$). Отметим, что при фиксированном n функция $f_n(x)$ есть сумма определенного конечного числа функций $u_k(x)$, непрерывных в точке $x = x_0$. Поэтому она также непрерывна в этой точке, и по заданному $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ будет $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда ввиду $|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)|$, $|\varphi_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, неравенство $|x - x_0| < \delta$ влечет за собой $f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Теорема. Если последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ определенных и непрерывных в промежутке $X = [a, b]$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно в X, то и $f(x)$ непрерывна в X.

Теорема (Дини). Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ непрерывны в промежутке $X = [a, b]$ и неотрицательны. Если ряд имеет сумму $f(x)$, также непрерывную в промежутке X, то ряд сходится в этом промежутке равномерно.

Доказательство. Рассмотрим остатки ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$: $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x)$. Функция $\varphi_n(x)$, как разность двух непрерывных функций, также непрерывна. Ввиду положительности членов ряда, последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, при постоянном x является убывающей (невозрастающей):

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \ldots \geq \varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \geq \ldots$$

Наконец, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в промежутке X, при любом постоянном x $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$. Для того, чтобы установить равномерную сходимость ряда, достаточно доказать, что для каждого числа $\varepsilon > 0$

существует хоть одно значение n, при котором $\varphi_n(x) < \varepsilon$ одновременно для всех x. Докажем от противного. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ такого номера n не существует. Тогда при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$ в промежутке X найдется такое значение $x = x_n$, что $\varphi_n(x_n) \geq \varepsilon$. К последовательности $\{x_n\}$, все элементы которой содержатся в конечном промежутке X, применим лемму Больцано-Вейерштрасса и выделим из нее частичную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к пределу x_0. Ввиду непрерывности $\varphi_n(x)$, имеем: $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0)$, каково бы не было m. С другой стороны, при любом m, для достаточно больших k: $n_k \geq m$, так что $\varphi_m(x_{n_k}) \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon$. А это неравенство, имеющее место при любом m, противоречит тому, что $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) = 0$.

Теорема (Дини). Пусть последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ непрерывных в промежутке $X = [a, b]$ функций стремится при $n \to \infty$ к предельной функции $f(x)$, монотонно возрастая, так что $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Если функция $f(x)$ также непрерывна в X, то $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно в X.

Теорема (Предельный переход под знаком функционального ряда). Пусть каждая из функций $u_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ определена в области X и имеет, при стремлении x к a конечный предел: $\lim\limits_{x\to\infty} u_n(x) = c_n$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области X сходится равномерно, то

1) сходится ряд, составленный из этих пределов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = C$

2) сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $f(x)$ также имеет при $x \to a$ предел: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$

Доказательство. Согласно условию равномерной сходимости для произвольно взятого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при $n > N$ и $m = 1, 2, 3, \ldots$ неравенство $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)| = |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_{n+m}(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех x из X. Переходя к пределу при $x \to a$ найдем, что $|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m}| \leq \varepsilon$ так что для ряда C выполняется условие сходимости. Если C,C_n,γ_n означают сумму,частичную сумму и остаток, то $C = C_n + \gamma_n$. Вычитая это равенство почленно из $f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x)$ получим $|f(x) - C| \leq |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n|)$. Ввиду равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и сходимости ряда C по любому $\varepsilon > 0$ можно фиксировать n столь большим, чтобы для всех x из X было $|\varphi_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $|\gamma_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = C_n$. То если ограничиться случаем конечного a найдется такое $\delta > 0$, что при $|x - a| < \delta$ будет $|f_n - C_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда при указанных значениях x: $|f(x) = C| < \varepsilon$

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\lim_{x\to a} u_n(x)\}$$

Теорема (Почленное интегрирование функциональных рядов). Если функции $u_n(x)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ непрерывны в промежутке $X = [a, b]$ и составленный из них ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в этом промежутке равномерно, то интеграл от суммы $f(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ представляется следующим образом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx = \int\limits_a^b u_1(x)dx + \int\limits_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int\limits_a^b u_n(x)dx + \ldots$$

Доказательство. Ввиду непрерывности функций $u_n(x)$ и $f(x)$ существование интегралов очевидно. Проинтегрировав тождество $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \varphi_n(x)$ в промежутке $[a, b]$ получим $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b u_1(x)dx + \int\limits_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int\limits_a^b u_n(x)dx + \int\limits_a^b \varphi_n(x)dx$

Для завершения доказательства нужно установить, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой что $n > N$: $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех x в рассматриваемом промежуточке. Тогда для тех же значений n будет: $|\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx| \leq \int\limits_a^b |\varphi_n(x)|dx < (b-a)\varepsilon$, что и доказывает $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = 0$.

Теорема (Почленное интегрирование функциональных последовательностей).Если последовательность $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ функций, непрерывных в промежутке $X = [a,b]$, сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно в X, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx$

Теорема (Почленное дифференцирование функциональных рядов). Пусть функции $u_n(x), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ определены в промежутке $X = [a,b]$ и имеют в нем непрерывные производные $u'_n(x)$. Если в этом промежутке не только сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, но и равномерно сходится ряд, составленный из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots$, то и сумма $f(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеет в X производную, причем $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

Доказательство. Обозначим через $f^*(x)$ сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots$. В силу теоремы это будет непрерывная функция от x. Воспользуясь теоремой о почленном интегрировании функциональных рядов, проинтегрируем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ почленно в промежутке от a до произвольного значения x из X получим $\int\limits_a^x f^*(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^x u'_n(t)dt$. Но $\int\limits_a^x u'_n(t)dt = u_n(x) - u_n(a)$ так что $\int\limits_a^x f^*(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_n(a)] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a)$. Так как интеграл слева ввиду непрерывности подинтегральной функции имеет производную равную $f^*(x)$, то ту же производную имеет и функция $f(x)$, которая от интеграла отличается лишь на постоянную.

0.11.2 Дополнительная часть

Лемма Больцано-Вейерштрасса Из любой ограниченной последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ всегда можно извлечь такую частичную последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots$, которая сходилась бы к конечному пределу.

Признак сходимости. Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon > 0$ отвечал такой номер N, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство $|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon \quad \forall m \, m = 1, 2, 3, \dots$

0.12 Билет 10. Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Определение степенного ряда и области его сходимости. Радиус сходимости степенного ряда и формула Коши-Адамара для его вычисления. Непрерывность суммы степенного ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

0.12.1 Основная часть

Определение. **Степенным рядом** называется функциональный ряд вида $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0+a_1x+a_2x^+\ldots+a_nx^n+\ldots$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ - постоянные вещественные числа, называемые коэффициентами ряда.

Составим с помощью коэффициентов a_n ряда $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ числовую последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

Теорема 1 (Коши-Адамара).

- Если последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ не ограничена, то степенной ряд $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ сходится лишь при $x=0$
- Если последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ ограничена и имеет верхний предел $L>0$, то ряд $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ абсолютно сходится для значений x , удовлетворяющих неравенству $|x|<\dfrac{1}{L}$ и расходится для значений x , удовлетворяющих неравенству $x>\dfrac{1}{L}$
- Если последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ ограничена и имеет верхний предел $L=0$, то ряд $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ абсолютно сходится для $\forall x$

Доказательство.

1.Пусть последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ неограничена. Тогда при $x \neq 0$ последовательность $|x|\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_nx^n|}$ также не ограничена , т.е. у этой последовательности имеются члены со сколь угодно большими номерами n , удовлетворяющие неравенству $\sqrt[n]{|a_nx^n|}>1$ или $|a_nx^n|>1 \Rightarrow$ нарушено необходимое условие сходимости числового ряда $\Rightarrow$ ряд $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ расходится при $x \neq 0$

2. Пусть последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ ограничена и имеет верхний предел $L>0$:

а) Фиксируем сначала любое x удовлетворяющий $|x|<\dfrac{1}{L}$. Тогда $\exists \varepsilon>0$ такой что $|x|<\dfrac{1}{L+\varepsilon}$ По свойству верхнего предела все элементы $\sqrt[n]{|a_n|}$, начиная с некоторого номера n удовлетворяют неравенству : $\sqrt[n]{|a_n|} < L+\dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ начиная с указанного n справедливо :

$\sqrt[n]{|a_nx^n|} = |x|\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{L+\dfrac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon} < 1 \Rightarrow$ по критерию Коши ряд абсолюно сходится .

б) Фиксируем любой x удовлетворяющий неравенству $|x|>\dfrac{1}{L}$. Тогда $\exists \varepsilon>0 : |x|>\dfrac{1}{L-\varepsilon}$. По определению верхнего предела из последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$ $(n=1,2,..)$ можно выделить подпоследовательность $\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$ (k=1,2,..) сходящуюся к $L \Rightarrow$ начиная с указанного номера k

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}x^{n_k}|} = |x|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon} = 1$$

или $|a_{n_k}x^{n_k}|>1 \Rightarrow$ нарушено необходимое условие сходимости ряда $a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ — ряд расходится

3. Пусть последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ ограничена и имеет верхний предел $L = 0$. Фиксируем произвольное $x \neq 0$. Поскольку верхний предел $L = 0$ и последовательность $\sqrt[n]{|a_n|}$ $(n = 1, 2, ..)$ не может быть иметь отрицательных предельных точек $L = 0$ – единственная предельная точка $\Rightarrow$ последовательность $\sqrt[n]{|a_n|}$ $(n = 1, 2, ..)$ бесконечно малая $\Rightarrow$ $\frac{1}{2|x|} > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$: начиная с которого $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|$ $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ по признаку Коши ряд абсолюно сходится .

Теорема 2. Для каждого степенного ряда $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, если он не является рядом сходящимся лишь в точке $x = 0$, $\exists R > 0$ (возможно $R = \infty$) такое , что этот ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$

R – радиус сходимости степенного ряда.$(-R, R)$ – промежуток сходимости этого ряда.

Формула Коши-Адамара $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (в случае $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, R = \infty$)

Замечание На концах промежутка в точках $x = R$ и $x = -R$ ряд $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ может как сходится , так и расходится .

Пусть степенной ряд $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ имеет радиус сходимости $R > 0$.

Лемма. Каково бы ни было r : $0 < r < R$ ряд $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ равномерно сходится на сегменте $[-r, r]$, т.е. $|x| \leq r$

Доказательство По теореме 2 ряд $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ абсолютно сходится при $x = r$, т.е. сходится ряд $|a_0| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k$. Последний числовой ряд мажорирует ряд $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ при $\forall x \in [-r, r] \Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса (Д2) ряд $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ сходится равномерно на сегменте $[-r, r]$.

Следствие 1. В условиях леммы сумма ряда $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ является функцией, непрерывной на сегменте $[-r, r]$

Теорема 3 (непрерывность суммы степенного ряда). Сумма степенного ряд внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией .

Доказательство. Пусть $S(x)$ – сумма степенного ряда $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, а R – его радиус сходимости . Фиксируем $\forall x : |x| < R \Rightarrow \exists r : |x| < r < R. \Rightarrow$ по следствию из леммы функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $[-r.r] \Rightarrow S(x)$ непрерывна в точке x .

Теорема 4 (Почленное интегрирование степенного ряда). Если $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, а x – удовлетворяет условию $|x| < R$, то ряд можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$. Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости , что и исходный ряд.

Доказательство. Для $\forall x : |x| < R$ $\exists r : |x| < r < R$. По лемме ряд $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ сходится равномерно на сегменте $[-r, r]$, а значит $\Rightarrow$ на $[0, x]$. Но тогда по теореме этот ряд можно почленно интегрировать на $[0, x]$. В результате почленного интегрирования получится степенной ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + ... + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + ..$$

радиус сходимости которого величина обратная верхнему пределу последовательности .

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]^{\frac{n}{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]$$

Так как верхний предел $\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}$ тот же что и у $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ – теорема доказана .

Теорема 5 ((Почленное дифференцирование степенного ряда)). Степенной ряд $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно . Ряд , полученный почленным дифференцированием имеет тот же радиус сходимости R , что и исходный ряд .

Первая часть утверждения (из теоремы и леммы)

Вторая часть : $a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + ... + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n + ...$ Радиус сходимости R обратен верхнему пределу последовательеноcти $\{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}\}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1, \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]$$

Следствие

Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз. Ряд , полученный n - кратный почленным дифференцированием исходного степенного ряда , имеет тот же радиус сходимости , что и исходный ряд

0.12.2 Дополнительная часть

Теорема 6. Пусть каждая функция $f_n(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ производную $f_n(x)'$, причем последовательеность производных $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, а сама последовательеность $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента $[a, b]$. Тогда последовательеность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторой предельной функции $f(x)$ равномерно на всем сегменте $[a, b]$, причем эту последовательеность можно дифференцировать на сегменте $[a, b]$ почленно, т.е. всюду на сегменте $[a, b]$ предельная функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, являющуюся предельной функцией последовательеноcти $\{f_n'(x)\}$.

Теорема 7. Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x) \rightrightarrows$ на сегменте $[a, b]$ и если каждая функция $f_n(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и предельная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, причем указанную последовательность можно интегрировать на сегменте $[a, b]$ почленно , т.е. предел $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ и равен $\int_a^b f(x)dx$

0.13 Билет 11. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Комплексные числа и их полярная форма. Сходимость последовательностей комплексных чисел. Область в множестве комплексных чисел. Функции комплексного переменного, понятие предела для таких функций. Непрерывность функций комплексного переменного. Дифференцируемость функций комплексного переменного в смысле комплексного анализа. Условия Коши-Римана. Голоморфные функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной голоморфной функции.

0.13.1 Основная часть

Определение 1. Число z называется **комплексным числом**, если оно представимо в следующем виде

$$z = x + i \cdot y, \tag{2}$$

где i — *мнимая единица* ($i^2 = -1$), x называется **действительной частью** числа z и обозначается $Re(z)$, y называется **мнимой частью** числа z и обозначается $Im(z)$. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ и $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ являются равными тогда и только тогда, когда их дейсвтительные и мнимые части совпадают, т.е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2). \tag{3}$$

Определение 2. Число $\overline{z}$ называется *сопряженным* к числу $z = x + i \cdot y$, если оно представимо в виде

$$\overline{z} = x - i \cdot y. \tag{4}$$

Определение 3. Множество, состоящее из комплексных чисел $z = x + i \cdot y$, где $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$, называется **множеством комплексных чисел** и обозначается через $\mathbb{C}$.

Определение 4. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ и $G \subset \mathbb{C}$, тогда *функцией комплексного переменного* называется отображение

$$f : D \to G. \tag{5}$$

Функцию комплексного переменного можно представить в виде

$$f(z) = u(z) + i \cdot v(z), \tag{6}$$

где $u : \mathbb{R}' \to \mathbb{R}''$ и $v : \mathbb{R}' \to \mathbb{R}''$, $\mathbb{R}' \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}'' \subset \mathbb{R}$.

Так как в комплексном переменном участвуют переменные x и y, выражение (4) можно переписать в виде

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y). \tag{7}$$

Определение 5. Функция $f(z)$ называется *взаимно однозначной* или *однолистной*, если она переводит любые две различные точки $z_1, z_2 \in D$, в различные. Иными словами из равенства $f(z_1) = f(z_2)$ следует равенство $z_1 = z_2$.

Определение 6. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in D$, тогда говорят, что число $a \in G$ называется пределом этой функции при z, стремящемся к z_0,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a, \tag{8}$$

если для любой окрестности U_a точки a найдется такая окрестность U_{z_0}, что для всех $z \in U_{z_0}$ значения $f(z)$ принадлежат U_a.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon. \tag{9}$$

Определение 7. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in D$, тогда будем называть ее *непрерывной в точке* z_0, если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{10}$$

Дифференциируемость. Пусть функция $f = u + i \cdot v$ определена и конечна в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + i \cdot y_0 \in \mathbb{C}$.

Определение 8. Говорят, что функция f называется $\mathbb{R}$-*дифференциируема* в точке z_0, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференциируемы в точке (x_0, y_0): дифференциалом f в точке z_0 нызывается выражение

$$df = du + i \cdot dv. \tag{11}$$

Распишем (10)

$$df = du + i \cdot dv = \tfrac{\partial u}{\partial x}dx + \tfrac{\partial u}{\partial y}dy + i \cdot (\tfrac{\partial v}{\partial x}dx + \tfrac{\partial v}{\partial y}dy) =$$

$$|dz = dx + i \cdot dy, d\overline{z} = dx - i \cdot dy|$$

$$= (\tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{\partial f}{\partial x}dx - i \cdot \tfrac{\partial f}{\partial y})dz) + (\tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{\partial f}{\partial x} + i \cdot \tfrac{\partial f}{\partial y})d\overline{z}) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}. \tag{12}$$

Определение 9. Говорят, что функция f называется $\mathbb{C}$-*дифференциируемой*, если f — $\mathbb{R}$-дифференциируема и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
Функция f называется $\mathbb{C}$-*дифференциируемой на множестве* $D \subset \mathbb{C}$, если она $\mathbb{C}$-дифференциируема в каждой точке этого множества.

Теорема 1(Условия Коши-Римана). Функция f $\mathbb{C}$-дифференциируема тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть f $\mathbb{C}$-дифференциируема, тогда по определению 8 можно представить df в виде (11). Распишем условие $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{i}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = 0. \tag{14}$$

(12) верно тогда и только тогда, когда его вещественная и мнимая часть равны 0, т.е. когда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.
Достаточность. Доказательство необходимости с обратным порядком выполнения операций.

Определение 10. Функция f называется *голоморфной* или *аналитической* в точке z_0, если она $\mathbb{C}$-дифференциируема в некоторой окрестности точки z_0.
Будем говорить, что функция f *голоморфна на множестве* $D \subset \mathbb{C}$, если она голоморфна в каждой точке этого множества (для таких множеств понятия голоморфности и $\mathbb{C}$-дифференциируемости совпадают).

Примеры:

1. $w(z) = x + 2i \cdot y$

Выделим функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$
$u(x, y) = Re(w(z)) = x, v(x, y) = Im(w(z)) = 2y.$
Проверим условия Коши-Римана

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 2.$
Отсюда следует то, что функция $w(z)$ нигде не дифференциируема в $\mathbb{C}$.

2. $w(z) = x^2 - y^2 + 2i \cdot y$
$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2x \cdot y$
I. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$
II. $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial y} = -2y.$
I. и II. выполняются одновременно для любых x и $y \in \mathbb{R}$, следовательно функция $w(z)$ голоморфна на всем $\mathbb{C}$.

Определение 12. Отображение $w = w(z)$, отображающее множество $D \subset \mathbb{C}$ в множество $G \subset \mathbb{C}$ называется *конформным*, если оно однозначно и голоморфно в области D за исключением, быть может, одной точки.

Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Если функция f $\mathbb{R}$-дифференциируема в точке z_0, то ее приращение $\Delta f = f(z) - f(z_0)$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Delta \overline{z} + o(\Delta z), \tag{15}$$

где $\Delta z = z - z_0, \Delta \overline{z} = \overline{z} - \overline{z}_0$, а $o(\Delta z)$ обозначает малую величину высшего порядка относительно Δz (т.е. величину, отношение которой к Δz стремится к 0 при $\Delta z \to 0$). Полагая $\Delta z = |\Delta z|e^{i\theta}$, получаем $\Delta \overline{z} = |\Delta z|e^{-i\theta}$ и из (14) находим

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}e^{-2i\theta} + \eta(\Delta z), \tag{16}$$

где $\eta(\Delta z) = \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$ стремится к нулю при $\Delta z \to 0$.
Отсюда видно, что для существования предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ нужно потребовать, чтобы при стремлении Δz к нулю величина $\theta = arg\Delta z$ стремилась к некоторому пределу ϑ. Предел $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ при таком стремлении Δz к 0 называется *производной по направлению* ϑ функции f в точке z_0. Из формулы (15) видно, что эта производная по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial z_\vartheta} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}e^{-2i\vartheta}. \tag{17}$$

Определение 11. *Производной* функции f в точке z_0 называется

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0), \tag{18}$$

если этот предел существует.

Теорема 2. Для того чтобы функция f, определенная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, имела в этой точке производную, необходима и достаточна $\mathbb{C}$-дифференциируемость f в точке z_0.

Доказательство. Необходимость. Пусть f $\mathbb{C}$-дифференциируема в точке z_0, тогда она $\mathbb{R}$-дифференциируема в точке z_0 и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ в этой точке. Из формулы (15) имеем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \eta(\Delta z),$$

где $\eta \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Отсюда видно, что существует $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$.
Достаточность. Пусть f имеет в точке z_0 производную $f'(z_0)$, тогда для достаточно малых Δz имеем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) + \eta(\Delta z),$$

где $\eta \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Таким образом, $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$, откуда видно, что f $\mathbb{R}$-дифференциируема в точке z_0 и что $df = f'(z_0)dz$, а это означает $\mathbb{C}$-дифференциируемость в точке z_0.

Геометрический смысл модуля производной. Пусть функция f $\mathbb{C}$-дифференциируема в точке z_0, тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz \sim f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$f(z_0) - \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \alpha(z, z_0), \lim_{z \to z_0} \alpha(z, z_0) = 0$$

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) - \alpha(z, z_0)(z - z_0) \tag{19}$$

Выражение (18) называется *касательной* к f в точке z_0.

Пусть $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow (18) \sim f'(z_0)(z - z_0)$, т.к. $\alpha(z, z_0)(z - z_0) = o(\alpha)$.

Рассмотрим модуль разности функции в точках z и z_0

$$f(z) - f(z_0)| = |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|, \tag{20}$$

т.к. производная f в точке z_0 принимает конкретное значение $(19) = C \cdot |z - z_0|$.
Пусть $w = f(z), w_0 = f(z_0)$ и $|z - z_0| = r$, тогда

$$f : \{z : |z - z_0| = r\} \to \{w : |w - w_0| = C \cdot r\},$$

т.е. отображение f переводит окружность с радиусом r в окружность с радиусом $C \cdot r$. Таким образом, $|f'(z_0)|$ является *коэффициентом растяжения длин* в точке z_0 при отображении f.

Если не пренебрегать $\alpha(z, z_0)(z - z_0)$, то получится фигура, близкая к окружности $|w - w_0| = C \cdot r$.

Геометрический смысл аргумента. Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$, будем считать, что $f' \neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0.
Рассмотрим $arg(w - w_0)$ по (19) его можно представить в следующем виде

$$arg(w - w_0) = arg(f'(z_0) \cdot (z - z_0)) = arg(f'(z_0)) + arg(z - z_0). \tag{21}$$

По (20) видно, что $arg(f'(z_0))$ означает *угол поворота* векторов, соответствующих точкам w и w_0, а также z и z_0 относительно оси OX. Иными словами угол между векторами w и w_0 будет таким же, как и угол между векторами z и z_0, а изменится лишь их углы относительно оси OX на величину $arg(f'(z_0))$.

0.14 Билет 12. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

Интегрирование функций комплексного переменного вдоль пути. Свойства интегралов от комплексных функций. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши для голоморфных функций. Ряд Тейлора для голоморфной функции. Теорема Лиувилля.

0.14.1 Основная часть

Определение. Пусть на кривой γ определена комплекснозначная функция $f(z)$. Рассмотрим разбиение кривой γ на дуги $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ точками $z_0, z_1, \dots, z_n$ взятыми в порядке следования по кривой γ, где z_0 – начало, а z_n – конец кривой γ. Обозначим через $l_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$ длину дуги γ_k (z_{k-1} – начало, а z_k – конец дуги γ_k и пусть $l = \max\limits_{1 \le k \le n} l_k$. На каждой дуге γ_k выберем точку $\zeta_k \in \gamma_k$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$. Если при $l \to 0$ существует конечный предел интегральных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$, не зависящий от выбора точек z_k,ζ_k, то этот предел называется **интегралом от функции** $f(z)$ по кривой γ: $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \lim\limits_{l \to 0} \sum\limits_{h=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Введем обозначения $z_k = x_k + iy_k$,$x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$,$y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum\limits_{k=1}^{n} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k)$, где $u_k = u(\xi_k, \eta_k)$, $v_k = v(\xi_k, \eta_k)$. Переходя к пределу при $l \to 0$, получаем $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} udx - vdy + i \int\limits_{\gamma} vdx + udy$.

Свойства интегралов

1. Из формулы $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} udx - vdy + i \int\limits_{\gamma} vdx + udy$ следует, что непрерывная на кривой функция интегрируема на этой кривой.

2. $\int\limits_{\gamma} [af(z) + bg(z)]dz = a \int\limits_{\gamma} f(z) + b \int\limits_{\gamma} g(z)dz$ (линейность интеграла), где a и b – любые комплекснозначные числа.

3. $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma^{-1}} f(z)dz$ т.е.при изменении ориентации кривой интеграл меняет знак

4. $\int\limits_{\gamma_1\gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz$

5. Если вдоль кривой γ имеет место неравенство $|f(z)| < M$, где M – постоянное число, то обозначая через l длину кривой γ имеем $|\int\limits_{\gamma} f(z)dx| \le Ml$

Пример 1. Пусть $f(z) = 1$, a и b соответственно начало и конец кривой γ. Тогда интегральная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ равна $\sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 = b - a$, откуда $\int\limits_{\gamma} dz = b - a$. Таким образом, $\int\limits_{\gamma} dz$ зависит только от начальной и конечной точек кривой γ и не зависит от пути интегрирования. В этом случае вместо $\int\limits_{\gamma} dz$ можно писать $\int\limits_{a}^{b} dz$. В частности, если $a = b$, то $\int\limits_{\gamma} dz = 0$, т.е. интеграл $\int\limits_{\gamma} dz$ по любой замкнутой кривой равен нулю.

Пример 2. Пусть $f(z) = z$, γ – кривая с началом в точке a и концом в точке b. Так как функция $f(z)$ непрерывна на кривой γ, то интеграл $\int\limits_{\gamma} zdz$ существует и предел $\lim\limits_{l \to 0} \sum\limits_{h=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ не зависит от выбора точек z_k, ζ_k. Полагая $\zeta_k = z_{k-1}$ Тогда $\int\limits_{\gamma} zdz = \lim\limits_{l \to 0} S$, где $S = \sum\limits_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1})$. Полагая $\zeta_k = z_k$ получаем $\int\limits_z dz = \lim\limits_{l\to 0}\tilde{S}$, где $\tilde{S} = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1}$. Следовательно, $\int\limits_\gamma zdz = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{l\to 0}(S+\tilde{S})$, $S+\tilde{S} = \sum k = 1^n(z_k^2 - z_{k-1}^2) = z_1^2 - z_0^2 + z_2^2 - z_1^2 + \ldots + z_n^2 - zn - 1^2 = z_n^2 - z_0^2 = b^2 - a^2$,откуда находим $\int\limits_\gamma zdx = \dfrac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Таким образом, интеграл $\int\limits_\gamma zdz$ не зависит от пути интегрирования. В частности, интеграл $\int\limits_\gamma zdz$ по любой замкнутой кривой γ равен нулю.

Пример 3. Вычислим интеграл $I_n = \int\limits_{C_\rho}(z-a)^n dz$, где n — целое число, C_ρ — окружность $|z-a| = \rho$, $\rho > 0$, ориентированная против часовой стрелки. Уравнение окружности C_ρ запишем в виде $z = a + \rho e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Тогда $dz = i\rho e^{it}dt$ и по формуле находим $I_n = i\rho^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt$, откуда при $n = -1$ получаем $I_{-1} = 2\pi i$, а при $n \ne -1$ по формуле Ньютона-Лейбница находим $I_n = \dfrac{\rho^{n+1}}{n+1}e^{it(n+1)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0$. Таким образом,

$$\int\limits_{|z-a|=\rho}(z-a)^n dz = \begin{cases} 0, n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\ 2\pi i, \quad n = -1 \end{cases}$$

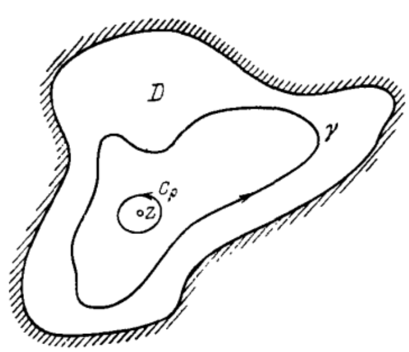
Теорема (интегральная теорема Коши). Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D. Тогда интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D равен нулю $\int\limits_\gamma f(z) = 0$.

Доказательство. 1. если дополнительно требовать непрерывность производной
2. Доказательство в общем случае.

Пример 4. Функция $f(z) = \dfrac{1}{z}$ - дифференцируема в кольце $0 < |z| < 2$, но $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{dz}{z} \ne 0$. Этот пример показывает, что требование односвязности области в теореме Коши существенно.

Теорема (Интегральная формула Коши). Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D и пусть простая замкнутая кривая γ лежит в D и ориентирована положительно. Тогда для любой точки z, лежащей внутри γ, справедлива формула $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$

Доказательство. Функция $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}$ дифференцируема по ζ в области D с выколотой точкой z. Выберем ρ так, чтобы круг $|\zeta^- z| < \rho$ вместе с его границей C_ρ: $\quad |\zeta^- z| = \rho$ лежал внутри γ. Тогда, используя следствие из интегральной теоремы Коши



$I = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\dfrac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} = I_1 + f(z)\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\dfrac{d\zeta}{\zeta - z}$ где $I_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta$. Так как $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\dfrac{d\zeta}{\zeta - z} = 1$, то $I = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = I_1 + f(z)$ и поэтому для доказательства формулы $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ достаточно установить, что $I_1 = 0$. В силу непрерывности функции $f(\zeta)$ в точке z для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ выполняется при $|\zeta - z| < \delta$ Следовательно, $|I_1| \le \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\rho}\dfrac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}|d\zeta| < \dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{\varepsilon}{\rho}\int\limits_{C_\rho}|d\zeta| = \varepsilon$ если $\rho \le \delta$. Учитывая, что I_1 не зависит от ρ, получаем $I_1 = 0$, т.е. $I = 0$.

Определение. Функция $f(z)$, регулярная во всей комплексной плоскости, называется целой.

Теорема (Лиувилля). Пусть целая функция $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ удовлетворяет в области $|z| > R_1$ неравенству $|f(z)| < M|z|^n$, $n \leq 0$ — целое. Тогда $f(z)$ — многочлен степени не выше n.

Теорема (Лиувилля) Если функция $f(z)$ голоморфная во всей плоскости является ограниченной по модулю, то она тождественная постоянная.

Доказательство. Используя неравенства Коши получаем при $R \geq R_1$ следующую оценку для коэффициентов ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k : |c_k| \leq \dfrac{MR^n}{R^k}, \quad k = 1, 2, \ldots$ Если $k > n$, то из $|c_k| \leq \dfrac{MR^n}{R^k}, \quad k = 1, 2, \ldots$ следует, что $c_k = 0$, так как R можно взять сколь угодно большим, а коэффициенты c_k не зависят от R. Итак, $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$, т. е. $f(z)$ — многочлен степени не выше n.

0.14.2 Дополнительная часть

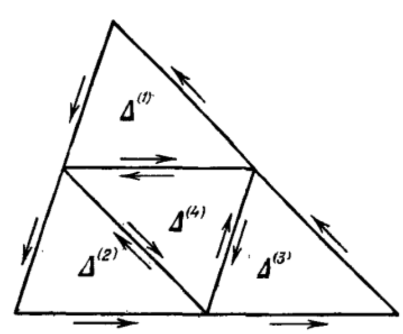
Формула вычисления интеграла Если кривая γ задана уравнением $z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(u\xi' - v\eta')dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta}(v\xi' + u\eta')dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(u + iv)(\xi' + i\eta')dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\sigma(t))\sigma'(t)dt$

Теорема. Если область D односвязна, то для того чтобы интеграл $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy$ по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы во всей области D выполнялось равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Лемма. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D и кривая f лежит в D. Тогда интеграл от $f(z)$ по f можно с любой точностью приблизить интегралом от $f(z)$ по ломаной, лежащей в области D, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует ломаная , лежащая в области D, такая, что $|\int\limits_{\gamma} f(z)dz - \int\limits_{C} f(z)dz| < \varepsilon$.

Доказательство. Интегральная теорема Коши (если дополнительно требовать непрерывность производной). Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то по формуле $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} udx - vdy + i\int\limits_{\gamma} vdx + udy$ имеем $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = I_1 + iI_2$, где $I_1 = \int\limits_{\gamma} udx - vdy$, $I_2 = \int\limits_{\gamma} vdx - udy$ Так как функция $f(z)$ имеет непрерывную производную в области D, то частные производные первого порядка функций u, v непрерывны в области D и выполняются условия Коши — Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$. В силу теоремы следует $I_1 = I_2 = 0$. Таким образом, $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = I_1 + iI_2 = 0$

Доказательство. Интегральная теорема Коши (общий случай). Приведем доказательство интегральной теоремы Коши, принадлежащее Гурса.
1. Докажем сначала теорему для случая* когда кривая f является контуром треугольника, лежащего в области D. Проведем доказательство от противного. Пусть теорема неверна.



Тогда найдется треугольник (контур этого треугольника и сам треугольник обозначим символом Δ такой, что $|\int\limits_{\Delta} f(z)dz| = \alpha > 0$

Соединив середины сторон треугольника Δ отрезками прямых, разобьем его на четыре треугольника $\Delta^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{4} \int\limits_{\Delta^{(k)}} f(z)dz = \int\limits_{\Delta} f(z)dz$. В самом деле, $\sum\limits_{k=1}^{4} \int\limits_{\Delta^{(k)}} f(z)dz$ равна сумме, состоящей из интеграла по контуру треугольника Δ и интегралов, взятых два раза (в противоположных направлениях) по каждой стороне треугольника

Δ^4 (эти интегралы взаимно уничтожаются). Из равенств $|\int\limits_{\Delta} f(z)dz| = \alpha > 0$ и следует, что по крайней мере для одного из интегралов в левой части $\sum\limits_{k=1}^{4} \int\limits_{\Delta^{(k)}} f(z)dz$ (обозначим соответствующий треугольник Δ_1 справедлива оценка $|\int\limits_{\Delta_1} f(z)dz| \geq \dfrac{\alpha}{4}$ так как в противном случав $\alpha = |\int\limits_{\Delta} f(z)dz| \leq \sum\limits_{k=1}^{4} |\int\limits_{\Delta^{(k)}} f(z)dz| < 4 \cdot \dfrac{\alpha}{4} = \alpha$, т.е. $\alpha < \alpha$, что невозможно.

Далее, разбивая треугольник Δ_1 указанным выше способом на четыре треугольника и повторяя предыдущие рассуждения, найдем такой треугольник Δ_2, что $|\int\limits_{\Delta_2} f(z)dz| \geq \dfrac{\alpha}{4^2}$. Продолжая. этот процесс, получаем последовательность треугольников $\{\Delta_n\}$ такую, что каждый треугольник Δ_n, содержит треугольник Δ_{n+1} $(n = 1, 2, \dots)$ и имеет место неравенство: $I_n = |\int\limits_{\Delta_n} f(z|dz \geq \dfrac{\alpha}{4^n}$.

Получили оценку снизу для I_n. Найдем для I_n оценку сверху. Пусть — периметр исходного треугольника; тогда периметр $_n$ треугольника Δ_n равен $\dfrac{P}{2^n}$ и, следовательно, $P_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Таким образом, последовательность треугольников $\{\Delta_n\}$ является стягивающейся: каждый треугольник Δ_n содержит все последующие треугольники $\Delta_{n+1}, \Delta_{n+2}, \dots$ и периметр треугольника Δ_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что существует единственная точка z_0, лежащая внутри или на границе треугольника Δ и принадлежащая всем треугольникам $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ По условию, точка z_0 принадлежит области D. Так как функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$, откуда $\int\limits_{\Delta_n} f(z)dz = f(z_0) \int\limits_{\Delta_n} dz + f'(z_0) \int\limits_{\Delta_n} zdz - z_0 f'(z_0) \int\limits_{\Delta_n} dz + \int\limits_{\Delta} o(z - z_0)dz$. Так как $\int\limits_{\Delta_n} dz = 0$ и $\int\limits_{\Delta_n} zdz = 0$ (см примеры 1 и 2). Получим $\int\limits_{\Delta_n} f(z)dz = \int\limits_{\Delta_n} o(z - z_0)dz$. Из определения величины $o(z^- z_0)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех z: $|z - z_0| < \delta$ имеет место неравенство $|o(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$ Выберем n столь большим, чтобы треугольник Δ лежал в круге $|z^- z_0|$. Получим; $I_n = |\int\limits_{\Delta_n} f(z)dz| \leq \varepsilon \int\limits_{\Delta_n} |z - z_0||dz| < \varepsilon P_n \int\limits_{\Delta_n} |dz| = \varepsilon P_n^2 = \varepsilon \cdot \dfrac{P^2}{4^n}$, т.е. $I_n < \varepsilon \cdot \dfrac{P^2}{4^n}$. Сравнивая $I_n < \varepsilon \cdot \dfrac{P^2}{4^n}$ и $I_n = |\int\limits_{\Delta_n} f(z|dz \geq \dfrac{\alpha}{4^n}$. получаем $\dfrac{\alpha}{4^n} < \varepsilon \cdot \dfrac{P^2}{4^n}$, т. е. $\alpha < \varepsilon P^2$, что при $\alpha > 0$ невозможно, так как $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Следовательно, $\alpha = 0$, т. е. равенство $\int\limits_{\gamma} f(z) = 0$ справедливо для любого треугольника, лежащего в области D.

2. Пусть теперь в качестве f взят контур произвольного замкнутого многоугольника, лежащего в области D. Если многоугольник является выпуклым, то его можно разбить на треугольники диагоналями, проведенными из одной вершины. Представляя $I = \int\limits_{\gamma} f(z)dz$ в виде суммы интегралов, взятых по границам треугольников, на которые разбивается данный многоугольник, получаем $I = 0$. Далее, любой многоугольник можно разбить на конечное число выпуклых многоугольников. Следовательно, и в этом случае $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$.

3. Пусть, наконец, γ — произвольная замкнутая кривая, лежащая в области D. По лемме, $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ можно с любой точностью приблизить интегралом по замкнутой ломаной, лежащей в области D, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутая ломаная L такая, что $|\int\limits_{\gamma} f(z)dz - \int\limits_{L} f(z)dz| < \varepsilon$. По доказанному выше $\int\limits_{L} f(z)dz = 0$ и поэтому последнее неравенство принимает вид $|\int\limits_{\gamma} f(z)dz| < \varepsilon$, откуда в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ заключаем, что $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$

Следствие из интегральной теоремы Коши Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D (не обязательно односвязной) и пусть γ и γ_1 — простые замкнутые кривые (одна из них лежит внутри другой), образующие границу области $D_1 \subset D$. $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz$. Обход кривых γ и γ_1 совершается в одном и том же направлении.

Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце D: $\rho_0 < |z^-| <$

R_0. Тогда коэффициенты ряда Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ для функции $f(z)$ в кольце D удовлетворяют неравенствам $|c_n| < \dfrac{M}{R^n} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ где $M = \max\limits_{z \in \gamma_R} |f(z)|, \quad \gamma_R : |z-a| = R, \rho < R < R_0$.

Теорема. Если функция $f(z)$ регулярна в круге : $|z^{-}| < R$, то она представляется рядом Тейлора $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ сходящимся во всем круге .

0.15 Билет 13. Ряд Лорана. Полюса и существенно особые точки. Вычеты.

Теорема Лорана о разложении в ряд функции, голоморфной в кольце. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Классификация изолированных особых точек для функций комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия наличия полюса у функций комплексного переменного. Порядок полюса. Существенно особые точки функций комплексного переменного. Критерий их существования. Вычет функций комплексного переменного в точке. Теорема Коши о вычетах.

0.15.1 Основная часть

Определение 1. Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ где a — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — заданные комплексные числа, называется **рядом Лорана**. Этот ряд называется сходящимся в точке z, если в этой точке сходятся ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n = \sum\limits_{n=1} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ а сумма ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ по определению равна сумме рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ и $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n = \sum\limits_{n=1} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$

Теорема 1 (Разложение регулярной функции в ряд Лорана). Функция $f(z)$, регулярная в кольце D: $\rho < |z^-| < R$, представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}d\zeta}, \quad \rho < R_0 < R. \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots$

Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $K : 0 < |z-a| < \rho$. Тогда эту функцию можно разложить в ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ сходящийся в кольце . Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ называется рядом Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки , а ряды $f_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ и $f_2(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ называются соответственно **главной** и **правильной** частью ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$

Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце D: $\rho_0 < |z-a| < R_0$. Тогда коэффициенты ряда Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ для функции $f(z)$ в кольце D удовлетворяют неравенствам $|c_n| < \frac{M}{R^n} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ где $M = \underset{z \in \gamma_R}{max} |f(z)|, \quad \gamma_R : |z-a| = R, \rho < R < R_0$.

Классификация изолированных особых точек однозначного характера.

Определение. Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z^-| < \rho$, но не регулярна в точке a ($a \neq \infty$) Тогда точка a называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$. Аналогично, бесконечно удаленная точка называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, если функция $f(z)$ регулярна в области $\rho < |z| < \infty$.

Определение 2. Изолированная особая точка a однозначного характера функции $f(z)$ называется

А)**устранимой особой точкой**, если $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ существует и конечен.

Теорема 2. Для того чтобы изолированная особая точка была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки a была тождественным нулем.

Теорема 3. Для того чтобы изолированная особая точка была устранимой особой точкой для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была регулярна и ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Пример. Для функции $f(z) = \frac{sin\,(z)}{z}$ точка $z = 0$ является устранимой особой точкой, так как функция $f(z)$ регулярна при $z \neq 0$ и $\lim\limits_{z\to 0} \frac{sin\,(z)}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \ldots}{z} = 1$

Б) **полюсом**, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;

Пример. Для функции $f(z) = \frac{z}{z+1}$ точка —1 является полюсом, так как эта функция регулярна при $z \neq -1$ и $\lim\limits_{z\to -1} f(z) = \infty$.

Теорема 4. Для того чтобы точка $a \neq \infty$ была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция представлялась в виде $f(z) = (z-a)^{-m}\psi(z), \quad \psi(a) \neq 0$, где $\psi(z)$ — функция, регулярная в точке $a \quad m \geq 1$, — целое. Это число m называется порядком полюса a функции $f(z)$. Аналогично, точка $z = \infty$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $f(z) = z^m h(z), \quad h(\infty) \neq 0$; где $h(z)$ — функция, регулярная в точке $z = \infty$, $m \geq 1$ — целое (m — порядок полюса $z = \infty$ функции $f(z)$).

В) **существенно особой точкой**, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует.

Пример. Для функции $f(z) = e^{1/z^2}$ точка $z = 0$ является существенно особой точкой, так как функция $f(z)$ регулярна при $z \neq 0$ и не имеет предела при $z \to 0$. В самом деле, если $z =$, то $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0} e^{1/x^2} = \infty$, а если $z = iy$, то $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{y\to 0} e^{1/y^2} = 0$

Теорема 5. Для того чтобы изолированная особая точка была полюсом для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки содержала лишь конечное число членов.

Теорема 6. Для того чтобы изолированная особая точка была **существенно особой точкой** для функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности точки a содержала бесконечное число членов.

Пример. Точка $z = 0$ является существенно особой для функции $f(z) = e^{1/z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ так как главная часть ряда Лорана для $e^{1/z}$ содержит бесконечное число членов.

Теорема 7 (Сохоцкого). Пусть — существенно особая точка для функции $f(z)$. Тогда для любого комплексного числа найдется последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к точке и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Определение. **Вычетом** функции $f(z)$ в точке a (обозначается $\underset{z=a}{res} f(z)$ называется коэффициент ряда Лорана для $f[z)$ в окрестности точки , т.е. $\underset{z=a}{res} f(z) = c_{-1}$, где $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} f(\xi)d\xi$ где окружность $\gamma_\rho : |z-a| = \rho \quad (0 < \rho < \rho_0)$ ориентирована положительно. Отсюда получаем $\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)dz = 2\pi i \cdot \underset{z=a}{res} \quad f(z)$.

Пример. Найдем вычет функции $e^{1/z}$е в точке $z = 0$. Так как $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ldots$, то $c_{-1} = 1 \ \underset{z=0}{res} \quad e^{1/z} = 1$. Отсюда следует, что $\int\limits_{|z|=1} e^{1/z}dz = 2\pi i \cdot \underset{z=0}{res} \quad e^{1/z} = 2\pi i$

Случай простого полюса. Если точка a — простой полюс функции $f(z)$, то ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки имеет вид $f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, откуда находим $c_(-1) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$, и поэтому $\underset{z=a}{res} \quad f(z) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$.

Случай кратного полюса. Если точка a - полюс порядка m для функции $f(z)$, то ряд Лорана в окрестности точки a имеет вид $f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$. Умножая обе части на $(z-a)^m$, получаем $(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \ldots$. Дифференцируя равенство $m-1$ раз и переходя к пределу при $z \to a$, находим $(m-1)!c_{-1} = \lim\limits_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$ откуда получаем формулу для вычисления вычета в полюсе m-го порядка: $\underset{z=a}{res} f(z) \quad = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$ В частности, если $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$, где функция $h(z)$ регулярна в точке a, $h(a) \neq 0$, то $\underset{z=a}{res} \frac{h(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(a)$

Пример. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ имеющую полюс первого порядка в точке $z=1$ и полюс второго порядка в точке $z=2$. Получаем $\underset{z=1}{res} \quad f(z) = \left[\frac{z}{(z-2)^2}\right]_{z=1} = 1$ и $\underset{z=2}{res} \quad f(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)'_{z=2} = -1$

Теорема (основная теорема теории вычетов). Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и пусть γ — простая замкнутая кривая, лежащая в области D и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} \quad f(z)$ где кривая γ ориентирована положительно.

0.16 Билет 14. Кольцо многочленов от одной переменной над числовым полем. Корни многочлена. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

Определение поля. Примеры числовых полей: поля рациональных, действительных и комплексных чисел. Кольцо многочленов от одной переменной над числовым полем. Деление многочленов с остатком. Корни многочлена и их кратность. Деление многочлена на линейный многочлен без остатка и связь с корнями этого многочлена. Основная теорема алгебры для кольца многочленов над полем комплексных чисел. Разложение многочленом с комплексными коэффициентами на линейные множители.

Определение. **Кольцо** - множество K, на котором заданы две бинарные операции: $+$ и $\times$ (называемые сложение и умножение), со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a, b, c \in K$:

$a + b = b + a$ — коммутативность сложения;

$a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность сложения;

$\exists 0 \in K \ (a + 0 = 0 + a = a)$ — существование нейтрального элемента относительно сложения;

$\forall a \in K \ \exists b \in K \ (a + b = b + a = 0)$ — существование противоположного элемента относительно сложения;

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ — ассоциативность умножения;

$$\begin{cases} a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \\ (b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a) \end{cases}$$

— дистрибутивность.

Кольца могут обладать следующими дополнительными свойствами:

наличие единицы: $\exists e \in K \ \forall a \in K \ (a \times e = e \times a = a)$ (кольцо с единицей), обычно единица обозначается 1;

коммутативность умножения: $\forall a, b \in K \ (a \times b = b \times a)$ (коммутативное кольцо);

Свойства:

- Относительно сложения в кольце нейтральный элемент единственен;
- Для любого элемента кольца обратный к нему по сложению элемент единственен;
- Нейтральный элемент относительно умножения, если он существует, единственен;
- $a \cdot 0 = 0$, то есть 0 — поглощающий элемент по умножению;
- $(-b) = (-1) \cdot b$, где $(-b)$ — элемент, обратный к b по сложению;
- $(-a) \cdot b = (-ab)$;
- $(-a) \cdot (-b) = (ab)$

Определение. **Полем** называется коммутативное кольцо с единицей, содержащее не менее двух элементов, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный элемент.

Свойства:

- Поле обладает всеми свойствами кольца
- В поле нет делителей нуля, так как $ab = 0, \quad a \neq 0$, то $a^{-1}(ab) = b = 0$
- Существует и притом единственная единица, причем $1 \neq 0$
- Для любого элемента $a \neq 0$ существует, и притом единственный обратный элемент
- Для любых $a, b \in P, \quad a \neq 0$ уравнение $ax = b$ имеет единственное решение, при этом $x = a^{-1}b = ba^{-1}$

Определение. Пусть P – поле. Многочленом (полиномом) n – степени $(n \geq 0)$ от переменной x над полем P называется выражение $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, где $a_i, \quad i = \overline{0,n}$ – фиксированные элементы из поля P и $a_n \neq 0$. Эти элементы называются коэффициентами многочлена, а элемент a_n – старшим коэффициентом.

Элемент $0 \in P$ по определению считается многочленом с нулевыми коэффициентами и называется **нулевым многочленом**. Степень нулевого многочлена не определена.

Многочлен обычно обозначается символом $f(x)$ или $f_n(x)$, **степень многочлена** $f(x)$ – символом $deg\, f$, множество всех многочленов от переменной x над полем P – символом $P[x]$. $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i \in P[x], \quad deg\, f = n$

Определение. Два многочлена $f(x), g(x) \in P[x]$ называются равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x из обозначаются $f(x) = g(x)$. $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i, \quad g(x) = \sum\limits_{i=0}^{s} b_ix^i$ равенство $f(x) = g(x)$ означает $deg\, f = deg\, g = n \quad a_i = b_i \quad i = \overline{0,n}$

Определение. Суммой многочленов $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$ и $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{s} b_ix^i \quad (*)$ называется многочлен $h(x) = \sum\limits_{i=0}^{max(n,s)} c_ix^i \quad c_i = a_i + b_i$. Здесь недостающие коэффициенты заменяют нулями.

Из определения следует:
1. Для любого многочлена $f(x) \in P[x]$ $f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$
2. Для ненулевых многочленов $f(x), g(x), f(x) + g(x)$ $deg(f + g) \leq max(deg\, f, deg\, g)$
3. Если $f(x), g(x) \in P[x]$, то $f(x) + g(x) \in P[x]$.

Определение. Произведением многочленов $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$ и $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{s} b_ix^i$ называется многочлен $h(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+s} c_kx^k \quad c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i + b_j \quad k = \overline{0, n+s}$. Здесь суммирование в $\sum\limits_{i+j=k} a_i + b_j$ ведется по всевозможным индексам i и j для которых $i + j = k$.

Из определения следует:
1. Произведение ненулевых многочленов над полем P не может быть нулевым, при этом $deg\, fg = deg\, f + deg\, g$
2. Если $f(x), g(x) \in P[x]$, то $f(x) \cdot g(x) \in P[x]$
3. Если $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$ и $\alpha \in P$, то $\alpha f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha a_ix^i$

Теорема. Множество $P[x]$ всех многочленов над полем P является коммутативным кольцом с единицей и без делителей нуля.

Доказательство. Проверим все аксиомы кольца.

1. Коммутативность и ассоциативность сложения (см. определение суммы многочленов)
2. Нулем является нулевой многочлен в силу $f(x) \in P[x]$ $f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$.
3. Противоположным к многочлену $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$ является многочлен $-f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-a_i)x^i$
4. Коммутативность умножения следует из коммутативности умножения элементов в поле.
5. Докажем ассоциативность умножения. Пусть $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$, $g_s(x) = \sum\limits_{k=0}^{s} b_kx^k$ и $h_p(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_kx^k$. Обозначмм через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ коэффициенты при x^k у многочленов $f(x)g(x), g(x)h(x), (f(x)g(x))h(x)$ и $f(x)(g(x)h(x))$ соответственно. $\gamma_k = \sum\limits_{i+j=k} \alpha_ic_j = \sum\limits_{i+j=k} \left(\sum\limits_{r+t=i} a_rb_t \right) c_j = \sum\limits_{r+t+j=k} a_rb_tc_j$, $\delta_k = \sum\limits_{r+i=k} a_r\beta_i = \sum\limits_{r+i=k} a_r \left(\sum\limits_{t+j=i} b_tc_j \right) = \sum\limits_{r+t+j=k} a_rb_tc_j$, т.е. $\gamma_k = \delta_k$. Отсюда,если учесть, что $deg(fg)h = degf(gh) = n + s + p$, следует равенство $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$

6. Роль единицы при умножении многочленов играет число 1, рассматриваемое как многочлен нулевой степени.

7. Справедливость аксиомы дистрибутивности вытекает из равенство $\sum\limits_{i+j=k}(a_i+b_i)c_j = \sum\limits_{i+j=k} a_ic_j + \sum\limits_{i+j=k} b_ic_j$, так как левая часть этого равенства является коэффициентом при x^k в многочлене $(f(x)+g(x))h(x)$, а правая часть – коэффициентом при этой же степени x в многочлене $f(x)h(x)+g(x)h(x)$

8. Согласно тому, что произведение ненулевых многочленов над полем P не может быть нулевым, при этом $deg\, fg = deg\, f + deg\, g$ в $P[x]$ нет делителей нуля.

Замечание. Кольцо $P[x]$ не является полем, так как не всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ обладает обратным многочленом $f^{-1}(x)$. Из равенства $f(x)f^{-1}(x) = 1$ следует что только многочлены нулевой степени обладают обратными.

Теорема (представление многочленов). Для двух любых многочленов $f(x), g(x) \in P[x]$, где $g(x) \neq 0$ существует и при том единственная пара многочленов $q(x), r(x) \in P[x]$ такая что: $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $deg\, r < deg\, g$. Многочлен $q(x)$ – частное (или неполное частное) от деления $f(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ – остатком от данного деления. Если $r(x) = 0$, то $f(x)$ делится (нацело делится) на $g(x)$, при этом $g(x)$ называется делителем $f(x)$.

Определение. Корнем многочлена $f(x) \in P[x]$ называется элемент $c \in P$ такой, что $f(c) = 0$.

Теорема (Безу). Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - c$ равен $f(c)$.

Доказательство. Разделим многочлен $f(x)$ на многочлен $x - c$. Тогда $f(x) = (x-c)q(x) + r(x)$, где $deg\, r < deg(x - c) = 1$, так что $r(x) = r$ – константа. Рассматривая значение обеих частей этого равенства при $x = c$, получим, что $r = f(c)$.

Следствие. Элемент $c \in P$ является корнем многочлена $f(x) \in P[x]$ тогда и только тогда, когда многочлен $f(x)$ делится на $x - c$.

Определение. Поле P – называется алгебраически замкнутым, если любой многочлен $f(x) \in P[x]$ степени $n \geq 1$ обладает в P хотя бы одним корнем. Поле действительных чисел $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым, так как многочлен $x^2 + 1$ не имеет действительных корней.

Лемма 1. Точная нижняя грань модуля многочлена достижима, т.е. существует число z_0 такое, что $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ при всех комплексных z.

Лемма 2 (Даламбера).Если $f(z)$ – многочлен степени $n \geq 1$ и $f(z_0) \neq 0$, то найдется число z_1 такое, что $|f(z_1)| < |f(z_0)|$

Теорема (основная теорема алгебры). Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Доказательство. Пусть $f(z)$ – произвольный многочлен степени $n \geq 1$ над полем $\mathbb{C}$ от комплексной переменной z. Согласно лемме 1 множество всевозможных значений $|f(z)|$ имеет точную нижнюю грань m, которая достигается в некоторой точке z_0, так что $|f(z_0)| = m$. Тогда $f(z_0) = 0$, так как в противном случае, если $|f(z_0)| \neq 0$, то согласно лемме 2 найдется точка z_1, для которой $|f(z_1)| < |f(z_0)| < inf|f(z)|$, что невозможно. Таким образом, z_0 – корень $f(z)$ и поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел замкнуто.

Теорема. Для любого многочлена $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ степени $n \geq 1$ существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ такие что $f(z) = a_n(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_n)$. Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

0.17 Билет 15. Линейные пространства, их базисы, размерности. Координаты вектора. Матрица перехода к другому базису. Теорема о ранге матрицы.

Определение линейного пространства. Примеры: R^n,C^n, $C[a,b]$. Конечномерные линейные пространства и их базисы. Разложение элементов конечномерного линейного пространства по базису. Связь между базисами и матрица перехода от одного базиса к другому базису. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому базису. Определение ранга матрица и теорема о вычислении ранге матрицы.

0.17.1 Основная часть

Определение 1. Непустое множество V называется **вещественным линейным пространством**, если на нем заданы два закона композиции:

- $a+b=b+a, \quad \forall a,b \in V$ (аксиома коммутативности)
- $(a+b)+ \ = a+(b+c), \quad \forall a,b,c \in V$ (аксиома ассоциативности)
- $\exists \theta \in V : a+\theta, \quad a \in V$
- $\forall a \in V \quad \exists(-a) \in V : a+(-a)=\theta$
- $1 \cdot a = a, \quad \forall a \in V$
- $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in V$
- $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in V$
- $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a,b \in V$

Линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ называется **вещественным линейным пространством**, а над полем $\mathbb{C}$ – комплексным.

Определение 2.**Базисом** линейного пространства называется упорядоченная линейно независимая система векторов пространства, через которую линейно выражается любой вектор пространства. Система векторов $e_1,\ldots,e_n$ линейного пространства V образует базис V, если

- $e_1,\ldots,e_n$ линейно независима
- для любого вектора $x \in V$ существуют числа $x_1,\ldots,x_n$ такие что $x = x_1e_1+\ldots+x_ne_n$

Теорема 1.Система векторов $e_1,\ldots,e_n$ линейного пространства является его базисом тогда и только тогда, когда она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пространства.

Доказательство. Необходимость. Базис пространства является максимальной линейно независимой системой векторов в этом пространстве, так как любая большая система векторов линейно выражается через этот базис (т.е. через меньшую систему) и на основании теоремы линейно зависима.

Достаточность. Пусть $e_1,\ldots,e_n$ – максимальная линейно независимая система векторов пространства V, тогда для любого вектора $x \in V$ система векторов $e_1,\ldots,e_n$, x линейно зависима, так как содержит более чем n векторов. Вектор x является линейной комбинацией $e_1,\ldots,e_n$. Следовательно, векторы $e_1,\ldots,e_n$ образуют базис пространства V.

Определение 3.Число векторов базиса называется **размерностью** линейного пространства. Размерность нулевого пространства по определению равна нулю. Обозначение $dim\, V$.

Линейное пространство размерности n, где n – целое неотрицательное число называется n - мерным пространством. Любое n–мерное пространство называется **конечномерным** линейным пространством.

Теорема 2. Разложение вектора по базису единственно.

Если $e_1, \ldots, e_n$ базис пространства и $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, то будем обозначать через x_e вектор-столбец из координат вектора x в этом базисе $x_e = [x_1, \ldots, x_n]^T$. Столбец x_e называют координатным столбцом вектора x в базисе x. Положим $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Тогда $x = ex_e$.

Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ два базиса n–мерного пространства V.Векторы второго базиса, как векторы пространства V разлагаются по базису e. Пусть

$$\begin{cases} f_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\ \ldots \\ f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases}$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, которая называется матрицей перехода от базиса e к базису f. $f = eC$

Теорема 3. Матрица перехода к другому базису не вырождена.

Доказательство. Пусть $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица перехода от базиса e к базису f. Пусть $|C| = 0$. Тогда один из столбцов матрицы C является линейной комбинацией других ее столбцов. В силу свойства линейности координат отсюда следует, что один из векторов $f_1, \ldots, f_n$ линейно выражается через другие векторы этой системы. Это противоречит линейной независимости $f_1, \ldots, f_n$.

Теорема 4. Если C – матрица перехода от базиса e к базису f, то C^{-1} матрица перехода от базиса f к базису e.

Доказательство. Пусть $f = eC$. Умножив обе части этого равенства на C^{-1}, получим, что $e = fC^{-1}$, откуда следует, что C^{-1} матрица перехода от базиса f к базису e.

Теорема 5. Координаты вектора x в базисах e и f связаны между собой соотношением $x_e = Cx_f$, где C – матрица перехода от базиса e к базису f,

Теорема 6. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов (строк).

Доказательство. Пусть $rg\,A = r$ и $r > 0$ (случай $r = 0$ очевиден). Тогда в матрице A существуют r линейно независимых строк (столбцов) – это ее базисные строки (столбцы). При этом любая система из большего числа строк (столбцов) линейно зависима.

Теорема 7. Если все строки (столбцы) матрицы A линейно выражаются через строки (столбцы) матрицы B, то $rg\,A \leq rg\,B$

Доказательство. Пусть $rg\,A = r$,$rg\,B = s$ и пусть $a_1, \ldots, a_r$ и $b_1, \ldots, b_s$ – базисные столбцы матриц A и B. Докажем, что $r \leq s$. Пусть $r > s$, тогда согласно условию теоремы система $a_1, \ldots, a_r$ линейно выражается через систему столбцов матрицы B, которая, в свою очередь в силу теоремы линейно выражается через систему базисных столбцов $b_1, \ldots, b_s$. Отсюда следует, что $a_1, \ldots, a_r$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_s$, причем $r > s$. Из теоремы вытекает линейная зависимость $a_1, \ldots, a_r$. Это противоречит тому, что $a_1, \ldots, a_r$ – базисные столбцы.

Примеры линейных пространств.

- Пространство $\mathbb{R}^n$ - n - мерное векторное пространство, $dim\,\mathbb{R}^n = n$.
- Пространство $\mathbb{C}^n$

- Пространство $C[a, b]$ - пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

0.17.2 Дополнительная часть

Теорема (о базисном миноре). Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Любая строка (столбец) является комбинацией базисных строк (столбцов).

Следствие (необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя). Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо ее строка (столбец) является линейной комбинацией других ее строк (столбцов).

Теорема. Если в линейном пространстве большая система векторов линейно выражается через меньшую, то большая система линейно зависима.

0.18 Билет 16. Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, их связь с характеристическими корнями.

0.18.1 Основная часть

Определение. Пусть дано n - мерное линейное пространство V_n. Рассмотрим преобразование этого пространства, т.е. отображение, переводящее каждый вектор а пространства V_n в некоторый вектор a' этого же пространства. Вектор a' называется **образом вектора** a при рассматриваемом преобразовании.

Преобразование f линейного пространства V_n называется **линейным преобразованием** этого пространства, если выполнены следующие условия:

- $f(a+b) = f(a) + f(b)$
- $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

Утверждение. Из определения линейного преобразования следует, что линейное преобразование линейного пространства переводит любую линейную комбинацию данных векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ в линейную комбинацию образов этих векторов: $f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k) = \alpha_1 f(a_1) + \ldots + \alpha_k f(a_k)$.

Доказательство. Вытекает из определения линейного преобразования линейного пространства.

Утверждение. Любое линейное преобразование линейного пространства V_n, оставляет нулевой вектор O неподвижным: $f(O) = O$

Доказательство. Вытекает из определения линейного преобразования линейного пространства.

Утверждение. Образ противоположного вектора, для данного вектора a, есть противоположный вектор для образа вектора a: $f(-a) = -f(a)$

Доказательство. Вытекает из определения линейного преобразования линейного пространства.

Примеры линейных преобразований линейного пространства:

- Тождественное преобразование, оставляющее произвольный вектор a на месте: $f(a) = a$
- Нулевое преобразование, переводящее произвольный вектор a в O:

Определение. L называется **линейным подпространством** V_n, если :

- Если вектора $a, b \in L \Rightarrow (a+b) \in L$
- Если вектор $a \in L \Rightarrow \alpha a \in L$ при любом значении α

Из определения следует, что если L линейное подпространство V_n, то и совокупность $f(L)$ образов всех векторов L также будет линейным подпространством.

Определение. Областью значений линейного преобразования f линейного пространства V_n, называется совокупность $f(V_n)$ образов всех векторов V_n.

Определение. Совокупность $N(f)$ всех векторов пространства V_n, отображающихся при линейном преобразовании f в нулевой вектор, будем называть ядром преобразования f.

Пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \quad (4)$$

произвольный базис линейного пространства V_n. Так как всякий вектор a линейного пространства V_n единственным образом представляется в виде линейной комбинации (4) базиса пространства V_n, то ввиду того что, образ вектора a с теми же коэффициентами выражается через образы векторов базиса. Получается что всякое линейное преобразование f линейного пространства V_n однозначно определяется заданием образов $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ всех векторов фиксированной базы (4).

Утверждение. Какова бы ни была упорядоченная система из n векторов пространства V_n, $c_1, c_2, \dots, c_n$ (5) существует, притом единственное, такое линейное преобразование f этого пространства, что (5) служит системой образов векторов базиса (4) при этом преобразовании,

$$f(e_i) = c_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Доказательство. Единственность преобразования f уже доказана выше(в силу единственности разложения по базису) и нужно лишь доказать существование. Определим преобразование f следующим образом: если a – произвольный вектор пространства и

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \text{ – его запись в базисе (4), то положим } f(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i \ (7)$$

Докажем линейность этого преобразования. Если $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ – любой другой вектор пространства, то $f(a + b) = f\left[\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) c_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i c_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i c_i = = f(a) + f(b)$

Аналогично проводим рассуждения для произвольного числа γ и значения $f(\gamma a)$, оно будет равно $\gamma f(a)$. Что же касается справедливости равенства (6), то она вытекает из определения (7) преобразования f, так как все координаты вектора e_i, кроме i-ой координаты равно единице,равны нулю.

В ходе доказательства этого утверждения было установлено взаимно однозначное соответствие между всеми линейными преобразованиями линейного пространства V_n и всеми упорядоченными системами (5) из n векторов этого пространства.

Всякие вектор c_i обладает определенной записью в базисе (4):

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, i = 1, 2, \dots, n \ (8)$$

Из координат вектора c_i в базисе (4) можно составить квадратную матрицу $A = (\alpha_{ij})$ (9)

беря в качестве ее i-ой строки строку координат вектора вектора $c_i, i = 1, 2, \dots, n$. Так как система (5) была взята произвольно, то матрица A будет произвольной матрицей порядка n с действительными элементами. Таким образом мы установили взаимно однозначное соответствие между всеми линейными преобразованиями пространства V_n и всеми квадратными матрицами порядка n. Будем говорить что матрица A задает линейное преобразование f в базисе (4).

$$f(e) = Ae \quad (10)$$

Операции над линейными преобразованиями

1) Пусть f, g линейные преобразования линейного пространства V_n, тогда суммой двух линейных преобразований назовем: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$. (14)

Доказательство. Вытекает из представления линейного преобразования квадратной матрицей.

2) Сумма двух линейных преобразований, тоже является линейным преобразованием $(f + g)(a + b) = f(a + b) + g(a + b) = f(a) + f(b) + g(a) + g(b) = (f + g)(a) + (f + g)(b)$

$(f + g)(\alpha a) = f(\alpha a) + g(\alpha a) = \alpha f(a) + \alpha g(a) = \alpha(f(a) + g(a)) = = \alpha((f + g)(a))$

Следовательно сумма линейных преобразований линейна.

3) Пусть f, g линейные преобразования линейного пространства V_n, тогда произведением двух линейных преобразований назовем: $(fg)(a) = g(f(a)) \quad (15)$.

4) Произведение двух линейных преобразований, тоже является линейным преобразованием.
$(fg)(a+b) = g(f(a+b)) = g(f(a)+f(b)) = g(f(a)) + g(f(b)) = = (fg)(a) + (fg)(b)$

5) Пусть f линейное преобразование линейного пространства V_n,а χ произвольное число, тогда произведением линейного преобразования на число назовем: $(\chi f)(a) = \chi f(a) \quad (16)$

6)Произведение линейного преобразования и числа, также является линейным преобразованием
$(\chi f)(a+b) = \chi f(a+b) = \chi(f(a)+f(b)) = \chi f(a) + \chi f(b) = (\chi f)(a) + +(\chi f)(b)$

$(\chi f)(\alpha a) = \chi f(\alpha a) = \chi(\alpha f(a)) = \alpha(\chi f(a)) = \alpha(\chi f)(a)$

Пусть в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ преобразования f, g задаются соответственно матрицами $A = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij})$ $f(e) = Ae, g(e) = Be$. Тогда в виду (14),(15),(16) получаем:

$(g+f)(e_i) = g(e_i) + f(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j + \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) e_j$, то есть $(f+g)(e) = (A+B)e$

$(fg)(e_i) = g(f(e_i)) = g(\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} g(e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} (\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{jk} e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{jk}) e_k$, то есть $(fg)(e) = (AB)e$.

$(\chi f)(e_i) = \chi f(e_i) = \chi \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} (\chi \alpha_{ij}) e_j$, то есть $(\chi f)(e) = = (\chi A)e$.

Получаем что свойства матриц сохраняются и для линейных преобразований.

Определение. Пусть в действительном линейном пространстве V_n задано линейное преобразование f. Если вектор b, отличный от нуля, переводится преобразованием f в вектор, пропорциональный самому b, т.е. $f(b) = \lambda_0 b$

где λ_0 – некоторое действительное число, то b называется **собственным вектором** преобразования f, а число λ_0 – **собственным значением** этого преобразования для собственного вектора b. Вектор $b = 0$ не считается собственным вектором, хотя удовлетворяет условию для любого собственного значения.

Пусть матрица $A = (\alpha_{ij})$ – квадратная матрица порядка n с действительными элементами, а λ– некоторое неизвестное. Тогда матрица $A - \lambda E$, где E– единичная матрица порядка n, называется **характеристической матрицей** матрицы A.

Определитель характеристической матрицы для матрицы A будет равен многочлену от λ степени n. Этот многочлен называется **характеристическим многочленом** матрицы A, а его корни будут называться **характеристическими корнями** этой матрицы. Так как каждому линейному преобразованию соответствует некоторая матрица, то характеристические корни и многочлен можно назвать характеристическими корнями и многочленом данного линейного преобразования.

Утверждение. Действительные характеристические корни линейного преобразования f, если они существуют, и только они служат собственными значениями этого преобразования.

Пусть преобразование f имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрицу $A = (\alpha_{ij})$ и пусть вектор $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ является собственным вектором преобразования f, $f(b) = \lambda_0 b$ (2). В силу доказанных выше свойств линейного преобразования получим: $f(b) = ((\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)A)e$ (3). В силу (2) и (3) получим систему уравнений:

$$\beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{21} + \ldots + \beta_n \alpha_{n1} = \lambda_0 \beta_1$$

$$\beta_1 \alpha_{12} + \beta_2 \alpha_{22} + \ldots + \beta_n \alpha_{n2} = \lambda_0 \beta_2$$

$$\ldots$$

$$\beta_1 \alpha_{1n} + \beta_2 \alpha_{2n} + \ldots + \beta_n \alpha_{nn} = \lambda_0 \beta_n$$

Так как $b \neq 0$ получается что не все числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ равны нулю таким образом система линейных однородных уравнений:

$$x_1(\alpha_{11} - \lambda_0) + x_2\alpha_{21} + \ldots + x_n\alpha_{n1} = 0$$

$$x_1\alpha_{12} + x_2(\alpha_{22} - \lambda_0) + \ldots + x_n\alpha_{n2} = 0$$

$$\ldots$$

$$x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n} + \ldots + x_n(\alpha_{nn} - \lambda_0) = 0$$

обладает ненулевым решением, а потому определитель матрицы составленный из коэффициентов однородной системы равен 0. Транспонируя определитель получаем $|A - \lambda_0 E| = 0$, получается что собственное значение λ_0 если корень характеристического уравнения матрицы A.

В обратную сторону. Пусть λ_0 будет любым действительным характеристическим корнем преобразования f. Тогда имеет место равенство $|A - \lambda_0 E| = 0$, с помощью транспонирования данного равенства получаем что система однородных линейных уравнений имеет ненулевое решение

$$x_1(\alpha_{11} - \lambda_0) + x_2\alpha_{21} + \ldots + x_n\alpha_{n1} = 0$$

$$x_1\alpha_{12} + x_2(\alpha_{22} - \lambda_0) + \ldots + x_n\alpha_{n2} = 0$$

$$\ldots$$

$$x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n} + \ldots + x_n(\alpha_{nn} - \lambda_0) = 0$$

Обозначим это решение через $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ (1), то будут выполняться равенства

$$\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{21} + \ldots + \beta_n\alpha_{n1} = \lambda_0\beta_1$$

$$\beta_1\alpha_{12} + \beta_2\alpha_{22} + \ldots + \beta_n\alpha_{n2} = \lambda_0\beta_2$$

$$\ldots$$

$$\beta_1\alpha_{1n} + \beta_2\alpha_{2n} + \ldots + \beta_n\alpha_{nn} = \lambda_0\beta_n$$

Обозначим через b вектор пространства V_n имеющий в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ строку координат (1). Тогда будут справедливы равенства (3), а из (3) и последней системы уравнений получим (2). Вектор b оказался, собственным вектором преобразования f, который относится к собственному значению λ_0.

Утверждение доказано.

0.19 Билет 17. Задача Коши и теорема о существовании и единственности решения.

Определения дифференциального уравнения, порядка уравнения, общего решения, частного решения, общего интеграла, частного интеграла для дифференциальных уравнений. Интегрирования дифференциального уравнения.

Определение. Дифференциальным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная функция находится под знаком производной или дифференциала. Наивысший порядок производной, участвующий в уравнении, называется **порядком** этого дифференциального уравнения. Общий вид дифференциального уравнения n - го порядка: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ на интервале $x \in (a, b)$, если:

- 1. Эта функция имеет n непрерывных производных на этом интервале;
- 2. При подстановке в уравнение $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ превращает его в справедливое на всем интервале (a, b) тождество $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$

Определение. Задача Коши ставится следующим образом:
Найти такое решение уравнения $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, $y = y(x)$, которое удовлетворяло бы начальному условию $y(x_0) = y_0$ (x_0, y_0) начальные данные.

Определение. Решение уравнения $y' = f(x, y)$, в каждой точке которого нарушается единственность, называется **особым решением**.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения называется совокупность всех его решений.

Докажем, что при некоторых условиях существует единственное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y) \quad (1)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0 \quad (2)$.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) | |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$.

Функция $g(y)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве Y, если $\exists L > 0 \quad |g(y_1) - g(y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall x, y \in Y$. Число L - постоянная Липшица. Условие Липшица сильнее, чем непрерывность, но слабее, чем дифференцируемость.

Теорема (теорема о существовании и единственности решения). Если функция $f(x, y)$ непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по y, то в некоторой окрестности $(x_0 - h, x_0 + h)$ точки x_0 существует единственное решение задачи Коши.

Доказательство.
Существование решения
1.Перейдем от задачи Коши к интегральному уравнению. Пусть $y(x)$ – решение задачи Коши (1),(2), определенное в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$. Тогда выполняется тождество $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall xin(x_0 - h, x_0 + h)$. Интегрируем это тождество от x_0 до x.

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in (x_0 - h, x_0 + h) \quad (3)$$

Получили, что $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3). Если $y(x)$ – решение уравнения (3), то $y(x)$ является также решением задачи Коши.

2. Построим последовательность функций по следующему правилу:

Пусть $\varphi_0(x) = y_0, \varphi_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt, \ldots, \varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt \quad (4)$. Чтобы эти формулы имели смысл, должно выполнятся условие $|\varphi_n(x) - y_0| \leq b \quad \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) \quad n = 0, 1 \ldots$.

Выберем h так, чтобы это условие выполнялось. При $n = 0 \quad |\varphi_0(x) - y_0| = 0 \leq b$. Обозначим $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y) \quad (5)$.

При $n = 1 \quad |\varphi_1(x) - y_0| \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh$.

Пусть $h = min(\frac{b}{M}, a) \quad (6)$. Тогда $|\varphi_1(x) - y_0| \leq b$. Применим метод математической индукции. Предположим, что $|\varphi_{n-1}(x) - y_0| \leq b$ и оценим $|\varphi_n(x) - y_0| \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt \right| \leq Mh \leq b$.

3. Докажем, что последовательность φ_n равномерно сходится. Рассмотрим функциональный ряд $\varphi_0(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] \quad (7)$.

Частичные суммы ряда $S_n(x) = \varphi_n(x)$. Поэтому ряд равномерно сходится тогда и только тогда, когда равномерно сходится последовательность φ_n.

Оценим члены ряда.
При $k = 1 \quad |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq M|x - x_0|$
При $k = 2 \quad |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t))| \right| dt \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} L|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)|dt \right| \leq ML\frac{|x - x_0|^2}{2}$
Применим метод математической индукции. Предположим, что
$|\varphi_{n-1}(x) - \varphi_{n-2}(x)| \leq ML^{n-2}\frac{|x - x_0|}{(n-1)!}$. Тогда $|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1}\frac{h^n}{n!} \quad (8)$

Функциональный ряд (7) мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}$. Числовой ряд сходится по признаку Даламбера $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{Lh}{n+1} \to 0 < 1$ при $n \to +\infty$. Поэтому функциональный ряд сходится равномерно.

4. Докажем, что предел последовательности $\varphi_n(x)$ – решение интегрального уравнения. Обозначим $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$. Перейдем к пределу $n \to +\infty$ в равенстве $\varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt$. Так как функция $f(x, y)$ непрерывна и последовательность $\varphi_n(x)$ равномерно сходится, то последовательность $f(x, \varphi_n(x))$ тоже равномерно сходится. Тогда

$$\varphi(x) = y_0 + \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \lim_{n\to+\infty} \varphi_{n-1}(t))dt = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

. Таким образом, $\varphi(x)$ решение интегрального уравнения (3) и $\varphi(x)$ – решение задачи Коши.

Единственность решения
5. Докажем вспомогательную лемму об интегральных неравенствах.

Лемма (Гронуола-Беллмана). Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $\quad A > 0, \quad B > 0$. Если $|y(x)| \leq A + B|\int\limits_{x_0}^{x} |y(t)|dt| \quad \forall x, x_0 \in [a, b] \quad (I)$, то $|y(x)| \leq Ae^{B|x-x_0|} \quad \forall x, x_0 \in [a, b] \quad (II)$.

Доказательство. Обозначим $N = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$. Пусть для определенности $x > x_0$. Тогда из неравенства I следует $|y(x)| \leq A + B\int\limits_{x_0}^{x} |y(t)|dt \leq A + B\int\limits_{x_0}^{x} N dt = A + BN(x - x_0)$. Подставим правую часть этого неравенства в неравенство (I): $|y(x)| \leq A + B\int\limits_{x_0}^{x}[A + BN(t - x_0)]dt = A + BA(x - x_0) + B^2N\dfrac{(x - x_0)^2}{2}$. Подставим правую часть этого неравенства в неравенство (I) и так далее. На шаге с номером n получим $|y(x)| \leq A + B(x - x_0) + \ldots + B^nA\dfrac{(x - x_0)^n}{n!} + B^{n+1}N\dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$. Перейдем к пределу при $n \to +\infty$. Получим $|y(x)| \leq Ae^{B(x-x_0)}$. Если $x < x_0$, то $|y(x)| \leq Ae^{B(x_0-x)}$. Неравенство (II) доказано.

6. Докажем, что у задачи Коши может быть только одно решение. Предположим, что функции $\varphi(x), \psi(x)$ – решения интегрального уравнения (3). Тогда $\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$, $\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))dt$. Рассмотрим разность $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))|dt \leq$ (условие Липшица) $\leq L\left|\int\limits_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \psi(t)|dt\right|$. Применим лемму об интегральных неравенствах и получим $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq 0$. Следовательно, $\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x$.

Замечание.Если функция по y не удовлетворяет условию Липшица, а только непрерывна, то можно доказать существование решения и нельзя доказать его единственность. Метод доказательства существования решения - это метод последовательных приближений Пикара.

0.20 Билет 18. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными, с разделяющимися переменными, линейные, однородные, Бернулли и Риккати. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах, неразрешенные относительно производной, Лагранжа, Клеро. Постановка задачи Коши, данные и условия Коши. Теорема Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка.

Уравнения вида $y' = f(x)$. Пусть функция $f(x)$ – определена и непрерывна на некотором интервале $a < x < b$. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения определяются формулой $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно найти постоянную C.

Определение. Уравнение вида $X(x)dx - Y(y)dy = 0$ называется **уравнением с разделенными переменными**.

Решение. Пусть решение существует. Тогда, подставляя это решение в записанное выше уравнение, получим общий интеграл $X(x)dx - Y(y)dy = 0 \Leftarrow d\left(\int X(x)dx - \int Y(y)dy\right) = 0 \Leftarrow \int X(x)dx - \int Y(y)dy = C$ т.е. уравнение проинтегрировано в квадратурах. В случае задачи Коши с начальным условием $y_(x_0) = y_0$, решение определяется соотношением $\int\limits_{y_0}^{y} Y(\eta)d\eta - \int\limits_{x_0}^{x} X(\xi)d\xi = 0$.

Определение. Уравнение вида $m_1(x)n_1(y)dx + m_2(x)n_2(y)dy = 0$ называется **уравнением с разделяющимися переменными.**

Решение. Пусть $m_2(x)n_1(y) \neq 0$ и разделим рассматриваемое уравнение на него $\dfrac{m_1(x)}{m_2(x)}dx + \dfrac{n_1(x)}{n_2(x)}dy = 0$. Уравнение стало уравнением с разделенными переменными, общий интеграл которого имеет вид $\int \dfrac{m_1(x)}{m_2(x)}dx + \int \dfrac{n_1(x)}{n_2(x)}dy = C$ Если существует некоторое значение $y = b \quad (x = a)$, при котором $n_1(b) = 0 \quad (m_2(a) = 0)$, то оно так же будет решением.

Определение. Уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется **однородным**, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ однородные функции одного и того же порядка, т.е. $M(tx, ty) = t^m M(x, y), N(tx, ty) = t^m N(x, y)$.

Решение. Уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ можно свести к уравнению с разделяющимися переменными заменой $\dfrac{y}{x} = z(x), \quad y = z \cdot x, \quad dy = xdz + zdx$. Подставляя замену в уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, получим $M(x, xz)dx + N(x, xz)(xdz + zdx) = 0$. В силу однородности функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$. $x^m M(1, z)dz + x^m N(1, z)(xdz + zdx) = 0$, $(M(1, z) + zN(1, z))dx + xN(1, z)dz = 0$. Мы пришли к уравнению с разделяющимися переменными, общий интеграл которого имеет вид $\int \dfrac{dx}{x} + \int \dfrac{N(1, z)dz}{M(1, z) + zN(1, z)} = C$. Если $M(1, z_0) + z_0 N(1, z_0) = 0$, то $y = z_0 \cdot x$ - утерянное решение.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, где $a(x), b(x)$ и $c(x)$ в дальнейшем будем считать непрерывными функциями x в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, причем $a(x)$ не обращается в ноль во всей этой области. Разделим уравнение на $a(x)$ и получим уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ называемое **приведенным линейным дифференциальным уравнением** $(p(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)} \quad q(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)})$

Если $q(x) = 0$, то уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ называется линейным однородным . В линейном однородном уравнении переменные разделяются и $y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Для интегрирования неоднородного линейного уравнения

$y' + p(x)y = q(x)$ может быть применен так называемый метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). При применении этого метода решение неоднородного уравнения $y' + p(x)y = q(x)$ ищется в таком же виде, что и общее решение соответствующего однородного уравнения, считая C функцией от x, т. е. $y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Общее решение неоднородного линейного уравнения

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

Определение. Уравнение вида $a(x)y' + b(x)y = c(x)y^n$, где n любое действительное число, $a(x), b(x), c(x)$ известные функции непрерывные на отрезке $[x_1, x_2]$, причем $a(x)$ не обращается в нуль на этом отрезке, называется **уравнением Бернулли**.

В силу условий, наложенных на функцию $a(x)$, уравнение $a(x)y' + b(x)y = c(x)y^n$ можно переписать в виде $y' + p(x)y = q(x)y^n$ где $p(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)} \quad q(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}$.

Определение. Уравнение вида $a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 = d(x)$, где $a(x), b(x), c(x), d(x)$ известные функции непрерывные на отрезке $[x_1, x_2]$, причем $a(x)$ не обращается в нуль на этом отрезке, называется **уравнением Риккати**. В общем виде не интегрируется в квадратурах, но может быть заменой переменных преобразовано в уравнение Бернулли, если известно одно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения.

Определение. Уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть уравнения является полным дифференциалом от некоторой функции.

В уравнении $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ предполагается, что функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ удовлетворяют следующим условиям $M(x, y), N(x, y) \in C, \quad M_x, N_x \in C, \quad M^2 + N^2 = 0$.

Согласно определению, существует некоторая функция $U(x, y)$ такая, что $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y)$, $dU(x, y) = 0$, $U(x, y) = C$ – общее решение. Для того чтобы $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ являлась полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, как известно $\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)$, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{M(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$. Условие $\dfrac{M(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ называют необходимым условием для того, чтобы $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах.

Определение. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка неразрешенного относительно производной $F(x, y, y') = 0$.

Определение. Уравнение вида $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ называется уравнение Лагранжа. Здесь функции φ, ψ произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Вводя параметр $y' = p$, $dy = pdx$, $dx = \dfrac{dy}{p}$ получим $y = x\varphi(p) + \psi(p)$. Если $p \equiv \varphi(p)$ уравнение Лагранжа примет вид $y = xy' + \psi(y')$ и называется **уравнением Клеро**.

Определение. Задача Коши. Найти такое решение уравнения $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, $y = y(x)$, которое удовлетворяло бы начальному условию $y(x_0) = y_0$ (x_0, y_0) начальные данные.

0.21 Билет 19. Теоремы о фундаментальной системе решений для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка и методы их интегрирования. Понижение порядка уравнения в случаях, когда заданная функция не зависит от искомой функции и производных от искомой функции до некоторого порядка, не содержит явно независимую переменную искомой функции, уравнение является однородным или обобщенно- однородным. Линейно зависимые и независимые системы функций. Определитель Вронского. Теоремы о линейной зависимости и независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Фундаментальная система функций. Структура решений линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка. Восстановление дифференциального уравнения по фундаментальной системе. Формула Остроградского- Лиувилля. Дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Определение. Общий вид линейного дифференциального уравнения n - го порядка $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots a_n(x)y=\varphi(x)$ Функции $a_i(x) \quad (i=\overline{0,n}) \quad \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, причем $a_0 \neq 0 \quad \forall x \in [a.b]$.

Определение. **Определителем Вронского** функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется следующий определитель

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема. Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского этих функций тождественно равен 0 на всем отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Т.к. функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы, то существует не нулевой набор констант $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такой, что $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\dots+\alpha_n y_n(x)=0, \quad \forall x \in [a,b]$. Продифференцируем последнее тождество $n-1$ раз и составим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\dots+\alpha_n y_n(x)=0 \\ \alpha_1 y_1'(x)+\alpha_2 y_2'(x)+\dots+\alpha_n y_n'(x)=0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x)+\alpha_2 y_2^{(n-1)}(x)+\dots+\alpha_n y_n^{(n-1)}(x)=0 \end{cases}$$

Рассмотрим последнюю систему как алгебраическую систему относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Эта система имеет ненулевое решение, следовательно, определитель системы $\Delta=W(x)\equiv 0, \quad \forall x \in [a,b]$. Обратной теоремы нет.

Теорема. Пусть линейно независимые функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются решениями некоторого линейного однородного дифференциального уравнения $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots a_n(x)y=0$ с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами. Тогда определитель Вронского этих функций не равен нулю ни в одной точке данного отрезка и наоборот, если определитель Вронского хотя бы в одной точке равен нулю, то функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$.

Доказательство.Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимые функции на отрезке $[a,b]$. Пусть существует $x_0 \in [a,b]$: $W(x_0)=0$.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\dots+\alpha_n y_n(x)=0 \\ \alpha_1 y_1'(x)+\alpha_2 y_2'(x)+\dots+\alpha_n y_n'(x)=0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x)+\alpha_2 y_2^{(n-1)}(x)+\dots+\alpha_n y_n^{(n-1)}(x)=0 \end{cases}$$

Т.к. определитель этой системы $\Delta=W(x_0)=0$, то она обладает ненулевым решением $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}$. Рассмотрим функцию $y=\overline{\alpha_1}y_1(x)+\overline{\alpha_2}y_2(x)+\dots+\overline{\alpha_n}y_n(x)$. Эта функция является решением уравнения

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots a_n(x)y = 0$, как линейная комбинация решений. Причем $y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда согласно теореме существования и единственности решения задачи Коши $y \equiv 0$, т.е. $\overline{\alpha_1}y_1(x) + \overline{\alpha_2}y_2(x) + \ldots + \overline{\alpha_n}y_n(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [a,b]$. И значит, функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, а это противоречие.

Теорема (Теорема об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения). Пусть в уравнении $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots a_n(x)y = 0$ все коэффициенты непрерывны на отрезке $[a,b]$, тогда общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимые решения уравнения $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots a_n(x)y = 0$ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Из этой теоремы следует, что максимальное число линейно независимых решений равно порядку уравнения

Доказательство. Заметим, что $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ при любых постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ является решением уравнения $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots a_n(x)y = 0$ как линейная комбинация решений. Осталось показать, что это общее решение. Т.е. любое другое решение может быть записано в виде $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$. А это значит, что какие бы не задали начальные условия $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ выбором констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно удовлетворить этим начальным условиям. Удовлетворим $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ н

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = y_0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = y_0' \\ \ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)} \end{cases}$$

Последняя система является линейной неоднородной системой алгебраических уравнений, определитель которой отличен от 0(как определитель Вронского линейно независимых функций, являющихся решением линейного дифференциального уравнения). Следовательно, мы однозначно определим $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Определение. n линейно независимых решений уравнения называются фундаментальной системой решений этого уравнения.

Тогда формулировка Теоремы звучит так: общее решение уравнения $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots a_n(x)y = 0$ есть линейная комбинация фундаментальной системы решений. Т.е. фундаментальная система решений является базисом в линейном пространстве решений.

Лемма. Пусть уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)y = 0 \tag{22}$$

имеют одинаковую фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогда $p_i(x) = q_i(x), \quad i = \overline{1,n}$. Т.е. фундаментальная система решений однозначно восстанавливает линейное однородное дифференциальное уравнение n– порядка.

Доказательство. Вычтем эти уравнения $(p_1(x) - q_1(x))y^{(n-1)} + \ldots + (p_n(x) - q_n(x))y$. Если предположить, что в последнем уравнении хотя бы один из коэффициентов не равен 0, то мы получим, что уравнение порядка не более $n-1$ имеет n линейно независимых решений.

Пусть задана фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Нужно восстановить уравнение.

Решение. Если предположим, что $y(x)$ общее решение искомого уравнения, то $y(x)$ будет линейно зависим с $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ и определитель Вронского этих $n+1$ функций будет равен 0.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^n(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

Разложим этот определитель по элементам последнего столбца

$$W(x)y^{(n)}(x) - y^{(n-1)}(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_{n-1} & y_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n)}(x) & y_n^n(x) \end{vmatrix} + \ldots = 0$$

Согласно правилу дифференцирования определителя

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_{n-1} & y_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n)}(x) & y_n^n(x) \end{vmatrix}$$

Запишем уравнение в стандартной форме $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ Запишем уравнение в стандартной форме $p_1(x) = -\dfrac{W'(x)}{W(x)}$. Проинтегрируем последнее уравнение $ln|W(x)| - ln|W(x_0)| = \int\limits_{x_0}^{x} p_1(s)ds$. Избавляясь от логарифмов, получим **формулу Остроградского - Лиувилля** $W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(s)ds}$

0.22 Билет 20. Теорема о фундаментальной системе решения для линейных систем.

Линейные системы дифференциальных уравнений, записанные в нормальной форме; их матричная запись. Постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности решения. Линейная зависимость, независимость систем вектор-функций. Определитель Вронского. Формула Остроградского-Лиувилля. Структура решений линейных однородных и неоднородных систем дифференциальных уравнений.

Запишем линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

Введем обозначения

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда систему можно записать в векторной форме $Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x)$. Зададим условия Коши $Y(x_0) = Y_0$, где

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10}(x) \\ \ldots \\ y_{n0}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \ldots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}, \quad x_0 \in [a, b]$$

$||Y(x)|| = \underset{1 \le i \le n}{max} |y_i(x)|$ – норма вектора. $||Y||_{C[a,b]} = \underset{x \in [a,b]}{max} ||Y(x)||$ – норма в пространстве функций непрерывных на отрезке $[a, b]$. $||A|| = \underset{1 \le k \le n}{max} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ki}(x)|$, $||A||_{C[a,b]} = \underset{x \in [a,b]}{max} ||A||$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений. Пусть матрица $A(x)$ и вектор $F(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Тогда существует единственное решение системы $Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x)$, определенное на всем отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющее условию $Y(x_0) = Y_0$.

Определение. **Определителем Вронского** вектор-функций $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ называется определитель, столбцами которого являются эти функции

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & \ldots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \ldots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема. Если вектор функции $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ линейно зависимы на отрезке $[[a, b]$, то определитель Вронского этих функций тождественно равен 0 на этом отрезке.

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию функций $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \ldots + \alpha_n Y_n \equiv 0$. Распишем последнее равенство покоординатно

$$\begin{gathered} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{12} + \ldots + \alpha_n y_{1n} \equiv 0, \\ \alpha_1 y_{21} + \alpha_2 y_{22} + \ldots + \alpha_n y_{2n} \equiv 0, \\ \ldots \\ \alpha_1 y_{n1} + \alpha_2 y_{n2} + \ldots + \alpha_n y_{nn} \equiv 0. \end{gathered}$$

Т.к. вектора линейно зависимы, то система уравнений должна обладать нетривиальным решением. Следовательно, определитель этой системы должен быть равен 0. $\Delta = W(x) = 0$

Теорема. Если определитель Вронского решений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ системы линейных однородных уравнений с непрерывными коэффициентами на отрезке $[a, b]$ равен 0 хотя бы в одной точке, то решения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ линейно зависимы на всем отрезке.

Доказательство. Пусть $W(x_0) = 0$. Следовательно, существует ненулевой набор констан такой, что $\alpha_1 Y_1(x_0) + \alpha_2 Y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n Y_n(x_0) \equiv 0$. Рассмотрим функцию $Y(x) = \alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) + \ldots + \alpha_n Y_n(x)$, причем $Y(x_0) = 0$. Но, согласно теореме существования и единственности, это решение $Y(x) \equiv 0$, а значит $Y(x) = \alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) + \ldots + \alpha_n Y_n(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b]$.

Теорема (Теорема об общем решении системы) $Y'(x) = A(x)Y(x)$. Если матрица $A(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то общее решение системы имеет вид $Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \ldots + C_n Y_1 n(x)$ где $Y_i(x)$ - линейно независимые решения, C_i - произвольные постоянные.

Пусть дана система $Y'(x) = A(x)Y(x)$ и n линейно независимых решений этой системы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Составим их определитель Вронского и посчитаем его производную.

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y'_{k1}(x) & y'_{k2}(x) & \ldots & y'_{kn}(x) \\ \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Но каждый $Y_i(x)$ удовлетворяет системе $Y'(x) = A(x)Y(x)$ и $Y'_i(x) = A(x)Y_i(x)$. Выпишем k-ю координату для каждого $Y_i(x)$ $y'_{ki} = \sum_{[} j = 1]^n a_{kj} y_{ji}, \quad i = \overline{1, n}$. Подставим

$$W'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} y_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} y_{j2} & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} y_{jn} \\ \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Отличными от нуля являются определители, в которых $k = j$ $W'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk} W(x), \quad \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk} = tr(A(x))$. Имеем $W'(x) = tr(A(x)) \cdot W(x)$. Разделяя переменные и интегрируя от x_0 до x. $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dW}{W} = \int\limits_{x_0}^{x} tr(A(s))ds$. отсюда $ln|W(x)| = ln|W(x_0)| + \int\limits_{x_0}^{x} tr(A(s))ds$.

Формула Остроградского-Лиувилля $W(x) = W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x} tr(A(s))ds}$

Пусть задана система $Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x)$ и соответствующая однородная система $Y'(x) = A(x)Y(x)$. Основные свойства решений системы $Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x)$:

- Сумма частного решения однородной системы и частного решения неоднородной, есть решение неоднородной системы.
- Разность двух частных решений неоднородной системы есть решение линейной однородной системы.

Теорема об общем решении линейной неоднородной системы $Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x)$. Пусть матрица $A(x)$ и вектор $F(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Тогда общее решение системы $Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x)$. равно сумме общего решения системы $Y'(x) = A(x)Y(x)$ и частного решения системы $Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x)$.

0.23 Билет 21. Метод вариации постоянных для систем дифференциальных уравнений

Нахождение частных решений линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений методом вариации постоянных. Нахождение частных решений линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом подбора.

0.23.1 Основная часть

Система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{1n}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{cases} \qquad (1)$$

или $\dfrac{dy}{dt} = Ay + f(t)$ где $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ – заданная непрерывная на (a, b) вектор-функция, a_{ki} - заданные постоянные числа и $A = ||a_{ki}||$, называется **неоднородной системой дифференциальных уравнений** первого порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение системы (1) равно сумме

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k y^k(t) + y^0(t) \quad (2)$$

какого-либо ее частного решения $y^0(t)$ и общего решения $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k y^k(t)$ соответствующей однородной системы $L[y] = \dfrac{dy}{dt} - Ay = 0 \quad (3)$.

В самом деле, сумма (2) при любых постоянных есть, очевидно, решение системы (1) $L\left[\sum\limits_{k=1}^{n} C_k y^k + y^0\right] = L[y^0] = f$. А с другой стороны, если есть решение системы (1), то $L[y - y^0] = L[y] - L[y^0] = f - f = 0$, но тогда для некоторых постоянных C_k: $y - y^0 = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y^k$. Если известно общее решение однородной системы (3), то частное решение неоднородной системы (1) можно находить методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Метод вариации постоянных. Пусть $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y^k(t)$ - общее решение системы (3), т.е. $y^k(t)$ - линейно независимые частные решения (3): $L[y^k] = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$.
Будем считать $C_k = C_k(t)$ функциями от t и подберем их так, чтобы функция $U(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(t) y^k(t) \quad (4)$ была частным решением неоднородной системы (1). Дифференцируя, имеем $\dfrac{dU}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[C_k(t)\dfrac{dy^k}{dt} + C'_k(t) y^k(t)\right]$.
Подставляя значения U и $\dfrac{dU}{dt}$ в (1), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \left[C_k(t)\frac{dy^k}{dt} + C'_k(t) y^k(t)\right] - \sum_{k=1}^{n} C_k(t) A y^k = f(t)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(t) L[y^k] + \sum_{k=1}^{n} C'_k(t) y^k(t) = f(t)$$

Так, как $L[y^k] = 0$, то для определения $C_k(t)$ мы получаем систему $C'_k(t) y^k(t) = f(t)$ с непрерывными на (a, b) вектор-функциями $f(t)$ и $y^k(t)$.

Система (5) является линейной относительно $C'_k(t)$ с определителем, равным определителю Вронского системы векторов $y_1, \dots, y_n$. Так как этот определитель не равен нулю, то система (5) имеет единственное решение:

$$C'_k(t) = \varphi_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

. Функции $\varphi_k(t)$ непрерывны, потому что непрерывны вектор-функции $f(t)$ и $y^k(t)$. Интегрируя, находим

$$C_k(t) = \int \varphi_k(t)dt \quad (k = 1, 2, \dots)$$

. Подставляя эти значения в (4), получаем частное решение системы (1).

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 + e^t \\ y'_2 = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

Легко проверить, что $y_1 = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}, \quad y_2 = C_1e^{3t} - C_2e^{-t}$ является общим решением однородной системы. Найдем частное решение неоднородной системы методом Лагранжа. Будем считать $C_1 = C_1(t), C_2 = C_2(t)$ функциями от t. Тогда

$$y'_1 = 3C_1(t)e^{3t} - C_2(t)e^{-t} + C'_1(t) + C'_2(t)e^{-t}$$
$$y'_1 = 3C_1(t)e^{3t} + C_2(t)e^{-t} + C'_1(t) - C'_2(t)e^{-t}$$

Подставляя эти значения производных и сами функции в нашу систему, получаем $C'_1(t)e^{3t} + C'_2(t)e^{-t} = e^t, \quad C'_1(t)e^{3t} - C'_2(t)e^{-t} = 0$ Определитель данной системы есть определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2e^{-t} \neq 0$$

Поэтому система разрешима: $C'_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}, \quad C'_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$.

Интегрируя, получаем $C_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}, \quad C'_2(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$ Таким образом, частное решение имеет вид $y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = -\frac{1}{2}e^t$ Общее решение можно записать в форме $y_1(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}, \quad y_2(t) = C_1e^{3t} - C_2e^{-t} - \frac{1}{2}e$. В векторной (матричной) форме это выглядит так:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}$$

0.23.2 Дополнительная часть

Метод неопределенных коэффициентов (метод подбора)

Рассматривается неоднородная система $x' = Ax + f(t)$ Ее решение представляется как $x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$. Обозначим через $P_m(t)$ многочлен степени m. Если

$$f(t) = \begin{pmatrix} P^1_{m_1}(t) \\ \vdots \\ P^n_{m_n}(t) \end{pmatrix} e^{at}$$

, то

$$x_{\text{чн}}(t) = \begin{pmatrix} S^1_{m+r}(t) \\ \vdots \\ S^n_{m+r}(t) \end{pmatrix} e^{at}$$

, где $m = max(m_1, \dots, m_n)$, r — кратность корня a характеристического уравнения. Если

$$f(t) = e^{at} \left(\begin{pmatrix} P^1_{m_1}(t) \\ \vdots \\ P^n_{m_n}(t) \end{pmatrix} cos(bt) + \begin{pmatrix} Q^1_{l_1}(t) \\ \vdots \\ Q^n_{l_n}(t) \end{pmatrix} sin(bt) \right)$$

, то

$$x_{\text{чн}}(t) = \left(\begin{pmatrix} R^1_{m+r}(t) \\ \vdots \\ R^n_{m+r}(t) \end{pmatrix} cos(bt) + \begin{pmatrix} T^1_{m+r}(t) \\ \vdots \\ T^n_{m+r}(t) \end{pmatrix} sin(bt) \right)$$

, где $m = max(m_1, \dots, m_n, l_1, \dots, l_r)$, r — кратность корня $a + ib$ характеристического уравнения.

0.24 Билет 22. Центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин

Определение центральной предельной теоремы (ЦПТ). ЦПТ для последовательности независимых и одинаково распределённых случайных величин (Теорема Ляпунова). ЦПТ для последовательности независимых и разно распределённых случайных величин (Теорема Линдберга).

Функцию нормального распределения будем обозначать $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин. Мы будем говорить, что для этой последовательности выполнена **центральная предельная теорема**, если при любом x справедливо следующее предельное соотношение для сумм $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\zeta_n - M\zeta_n}{\sqrt{D\zeta_n}} \le x\right\} = \Phi(x)$

Дана последовательность взаимно независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ о которых мы предположим, что они имеют конечные математические ожидания и дисперсии. Введем следующие обозначения $a_k = M\xi_k, \quad b_k^2 = D\xi_k, \quad B_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 = D\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k, \quad F_k(x)$ обозначает функцию распределения величинs ξ_k.

Теорема (Линдеберга). Если последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ при любом постоянном $\tau > 0$ удовлетворяет условию Линдеберга $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{B_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) = 0$, то при $n \to \infty$ равномерно относительно x.

$$P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{(-\frac{z^2}{2} dz)}$$

Доказательство. Введем обозначения $\xi_{nk} = \dfrac{\xi_k - a_k}{B_n}, \quad F_{nk}(x) = P\{\xi_{nk} < x\}$. $M\xi_{nk} = 0, \quad D\xi_{nk} = \dfrac{1}{B_n^2} D\xi_k$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_{nk} = 1$. Условие Линдеберга в этих обозначениях принимает следующий вид $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\tau} x^2 dF_{nk}(x) = 0$. Характеристическая функция суммы $\dfrac{1}{B_n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) = \sum\limits_{k=1} n\xi_{nk}$ равна $\varphi_n(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} f_{nk}(t)$. Нам нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

С этой целью мы установим прежде всего, что множители f_{nk} при $n \to \infty$ равномерно относительно $k, \quad 1 \le k \le n)$ стремятся к 1. Принимая во внимание равенство $M\xi_{nk} = 0$, находим, что $f_{nk}(t) - 1 - \int(e^{itx} - 1 - itx) dF_{nk}(x)$. Так как при любом вещественном α $|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \le \dfrac{\alpha^2}{2}$, то $|f_{nk} - 1| \le \dfrac{t^2}{2} \int x^2 dF_{nk}(x)$.

Пусть ε произвольное положительное число; тогда очевидно, что

$$\int x^2 dF_{nk}(x) = \int\limits_{|x|\le\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \le \varepsilon^2 + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x)$$

Таким образом, для всех достаточно больших n равномерно относительно $k, \quad (1 \le k \le n)$ и t в любом конечном интервале $|t| \le T$. $|f_{nk}(t) - 1| \le \varepsilon^2 T^2$. Отсюда мы заключаем, что равномерно относительно $k, \quad (1 \le k \le n)$. $\lim\limits_{n\to\infty} f_{nk}(t) = 1$. и что для всех достаточно больших n при t, лежащих в произвольном конечном интервале $|t| \le T$, выполняется неравенство $|f_{nk}(t) - 1| < \dfrac{1}{2}$. Мы можем, следовательно, в интервале $|t| \le T$ написать разложение (ln обозначает главное значение логарифма)

$$ln\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} ln f_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{n} ln[1 + (f_{nk}(t) - 1)] = \sum_{k=1}^{n} (f_{nk}(t) - 1) + R_n$$

, где $R_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{s=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^s}{s}(f_{nk}(t)-1)^s$. В силу $|f_{nk}(t)-1|<\dfrac{1}{2}$

$$|R_n|\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{2}|f_{nk}(t)-1|^s=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{|f_{nk}(t)-1|^2}{1-|f_{nk}-1|}\le\sum_{k=1}^{n}|f_{nk}(t)-1|^2$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n}|f_{nk}(t)-1|=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\int(e^{itx}-1-itx)dF_{nk}(x)\right|\le\dfrac{t^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\int x^2dF_{nk}(x)=\dfrac{t^2}{2}$, то $|R_n|\le\dfrac{t^2}{2}\max\limits_{1\le k\le n}|f_{nk}(t)-1|$. Из $\lim\limits_{n\to\infty}f_{nk}(t)=1$ вытекает, что равномерно относительно t в произвольном конечном интервале $|t|\le T$, при $n\to\infty$. $R_n\to 0$. Но $\sum\limits_{k=1}^{n}(f_{nk}(t)-1)=-\dfrac{t^2}{2}+\rho_n$, где $\rho_n=\dfrac{t^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\int(e^{itx}-1-itx)dF_{nk}(x)$. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно; тогда

$$\rho_n=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\le\varepsilon}\left(e^{itx}-1-itx-\frac{(itx)^2}{2}\right)dF_{nk}(x)+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\left(\frac{t^2x^2}{2}+e^{itx}-1-itx\right)dF_{nk}(x)$$

Получим следующую оценку

$$|\rho_n|\le\frac{|t|^3}{6}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\le\varepsilon}|x^3|dF_{nk}(x)+t^2\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)\le\frac{|t|^3}{6}\cdot\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\le\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)+t^2\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)=$$

$$=\frac{|t|^3}{6}\cdot\varepsilon+t^2\left(1-\frac{|t|}{6}\varepsilon\right)\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\le\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)$$

Согласно условию

$$P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a_k)<x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{(-\frac{z^2}{2}dz)}$$

второе слагаемое при любом ε может быть сделано меньше любого $\eta>0$, лишь бы было достаточно большим. А так как $\varepsilon>0$ произвольно, то мы можем его выбрать настолько малым, чтобы, каковы бы ни были $\eta>0$ и T, для всех t, заключенных в интервале $|t|\le T$, выполнялось неравенство $|\rho_n|<2\eta\quad(n\ge n_0(\varepsilon,\eta,T)$. Это неравенство показывает, что равномерно в каждом интервале значений t $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$. Собрав вместе соотношения $ln\varphi_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}lnf_{nk}(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}ln[1+(f_{nk}(t)-1)]=\sum\limits_{k=1}^{n}(f_{nk}(t)-1)+R_n$, $R_n\to 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n}f_{nk}(t)-1=-\dfrac{t^2}{2}+\rho_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$ мы получаем окончательно, что равномерно в каждом конечном интервале t. $\lim\limits_{n\to\infty}ln\varphi_n(t)=-\dfrac{t^2}{2}$.

Следствие. Если независимые случайные величины $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots$ одинаково распределены и имеют конечную, отличную от нуля дисперсию, то при $n\to\infty$ равномерно по x.

$$P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k)<x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-fracz^22}dz$$

Доказательство. Нам достаточно проверить, что при сделанных предположениях выполнено условие Линдеберга. Заметим, что в нашем случае $B_n=b\sqrt{n}$, где b^2 обозначает дисперсию отдельного слагаемого. Положим $M\xi_k=a$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{B_n^2}\int\limits_{|x-a|>\tau B_n}(x-a)^2dF_k(x)=\frac{n}{nb^2}\int\limits_{|x-a|>\tau B_n}(x-a)^2dF_1(x)=\frac{1}{b^2}\int\limits_{|x-a|>\tau B_n}(x-a)^2dF_1(x)$$

В силу предположения о конечности дисперсии и ее положительности заключаем, что интеграл, стоящий в правой части последнего неравенства, стремится к 0 при $n\to\infty$.

Теорема (Ляпунова). Если для последовательности взаимно независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ можно подобрать такое положительное $\delta > 0$, что при $n \to \infty$ $\dfrac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum\limits_{k=1}^{n} M|\xi_k = a_k|^{2+\delta} \to 0$, то при $n \to \infty$ равномерно по x.

$$P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Доказательство. Нам достаточно проверить, что условие Ляпунова $\dfrac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum\limits_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \to 0$ влечет за собой выполнение условий Линдеберга

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a|>\tau B_n}(x-a_k)^2 dF_k(x) \le \frac{1}{B_n^2(\tau B_n)^\delta}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n}|x-a_k|^{2+\delta}dF_k(x) \le \frac{1}{\tau^\delta}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\int|x-a_k|^{2+\delta}dF_k(x)}{B_n^{2+\delta}}$$

0.25 Билет 23. Доверительные интервалы для неизвестных параметров нормально распределённой генеральной совокупности.

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания $M\xi$ при известной дисперсии $D\xi$. Доверительный интервал для неизвестного $M\xi$ при неизвестной $D\xi$. Доверительный интервал для неизвестной $D\xi$ при известном $M\xi$. Доверительный интервал для неизвестной $D\xi$ при неизвестном $M\xi$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка (далее мы всегда будем предполагать, что она независимая) из некоторого распределения с плотностью $p(x;\theta) = p(x1, ..., xn;\theta)$, зави- сящей от параметра θ, который может изменяться в интервале $\theta_0 < \theta < \theta_1$.

Пусть $y(x_1, ..., x_n)$ — некоторая статистика (т.е. функция от выборки) и $F(x;\theta) = P\{\eta, x\}$ — функция распределения случайной величины $\eta = y(x_1, \ldots, x_n)$, когда выборка $y(x_1, ..., x_n)$ имеет распределение с плотностью $p(x_1, \ldots, x_n;\theta)$. Предположим, что $F(x;\theta)$ есть убывающая функцияот параметра θ. Обозначим $x_\gamma(\theta)$ квантиль распределения $F(x;\theta)$, т.е. корень уравнения $F(x;\theta) = 1 - \gamma$.

В этом случае квантиль $x_\gamma(\theta)$ есть возрастающая функция от θ. Зададимся малым числом $\alpha > 0$. Пусть $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. При каждом θ неравенства $x_{1-\alpha_2}(\theta) \le \eta \le x_{\alpha_1}(\theta)$ выполняются с вероятностью $1 - \alpha$, близкой к единице. Обозначим функцию, обратную к $x_\gamma(\theta)$, т.е. решение уравнения $y = x_\gamma(\theta)$, через $\theta = x_\gamma^{-1}(\theta)$.

Тогда неравенства $x_{1-\alpha_2}(\theta) \le \eta \le x_{\alpha_1}(\theta)$ можно записать иначе: $x_{\alpha_1}^{-1}(\eta) \le \theta \le x_{1-\alpha_2}^{-1}(\eta)$

Таким образом, неравенства $x_{\alpha_1}^{-1}(\eta) \le \theta \le x_{1-\alpha_2}^{-1}(\eta)$ при любом θ выполняются с вероятностью $1-\alpha$. Обозначим $x_{\alpha_1}^{-1}(\eta) = \underline{\theta}(\eta)$, $x_{1-\alpha_2}^{-1}(\eta) = \overline{\theta}(\eta)$ и запишем $x_{1-\alpha_2}(\theta) \le \eta \le x_{\alpha_1}(\theta)$ в следующем виде: $P_0\{\underline{\theta}(\eta) \le \theta \le \overline{\theta}(\eta)\} = 1\alpha$

Определение. Интервал $\underline{\theta}(\eta) \le \theta \le \overline{\theta}(\eta)$ называется **доверительным интервалом** для параметра θ, а вероятность $1 - \alpha$ - **доверительной вероятностью**.

Пусть независимая выборка $x_1, \ldots, x_n$ взята из нормального распределения с параметрами (a, σ).

Доверительный интервал для a при известном σ.

Возьмем за статистику η среднее арифметическое $\overline{x}$. $\overline{x}$ имеет нормальное распределение с параметрами $(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Обозначим через u_γ квантиль нормального распределения, т.е. $1 - \Phi(u_\gamma) = \gamma$. Пусть $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Так как $u_{1-\gamma} = -u_\gamma$, то неравенства $a - u_{\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{x} \le a + u_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, выполняются с вероятностью $1 - \alpha$. Разрешая неравенства $a - u_{\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{x} \le a + u_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ относительно a, имеем доверительный интервал для a $\overline{x} - u_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le a \le \overline{x} + u_{\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Доверительная вероятность равна $1 - \alpha$.

Доверительный интервал для a при неизвестном σ

Выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и дисперсия $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)^2$ для выборки $x_1, \ldots, x_n$ из нормального распределения. Для построения доверительного интервала для a при неизвестном σ воспользуемся отношением Стьюдента $\tau = \frac{(\overline{x} - a)\sqrt{n}}{s}$. Пусть $S_n(t)$ — функция распределения Стьюдента с n степенями свободы. Обозначим $t_\gamma(n)$ квантиль распределения $S_n(t)$, т.е. корень уравнения $S_n(t) = 1 - \gamma$. Так как распределение Стьюдента симметрично, то $t_{1-\gamma}(n) = -t_\gamma(n)$ и при построении доверительного интервала надо брать $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$. Неравенство $-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \overline{x} - a \le \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$. выполняется с вероятностью $1 - \alpha$. Это дает нам доверительный интервал $\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le a \le \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

Доверительный интервал для σ при известном a.

Статистика $\dfrac{\eta}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{x_i - a}{\sigma})^2$ является достаточной для параметра σ и имеет ξ^2 - распределение с n степенями свободы.

Обозначим через $K_n(x)$ функцию распределения $\dfrac{\eta}{\sigma^2}$ и через $k_\gamma(n)$ квантиль $K_n(x)$, т.е. корень уравнения $K_n(x) = 1-\gamma$. Пусть $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$. Тогда неравенства $k_{1-\alpha_1}(n) \leq \dfrac{\eta}{\sigma^2} \leq k_{\alpha_2}(n)$ выполняются с вероятностью $1-\alpha$. Это дает доверительный интервал $\sqrt{\dfrac{\eta}{k_{\alpha_2}(n)}} \leq \sigma \leq \sqrt{\dfrac{\eta}{k_{1-\alpha_1}(n)}}$ Доверительная вероятность $1-\alpha$, если α_1 и α_2 выбраны так, что плотность $k_n(x) = K'_n(x)$ удовлетворяет равенству $k_n(k_{1-\alpha_1}(n)) = k_n(k_{\alpha_2}(n))$.

Доверительный интервал для σ при неизвестном a.

В этом случае за основную статистику η возьмем эмпирическую дисперсию. $\dfrac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ имеет χ^2 - распределение с $(n-1)$-й степенью свободы. $s\sqrt{\dfrac{n-1}{k_{\alpha_2}(n-1)}} \leq \sigma \leq s\sqrt{\dfrac{n-1}{k_{1-\alpha_1}(n-1)}}$ с доверительной вероятностью $1-(\alpha_1+\alpha_2)$.

0.26 Теормин

0.26.1 Дискретная математика

Функция f называется **монотонной функцией**, если:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in E_2,\ \alpha_1 \preceq \alpha_2 \Rightarrow f(\alpha_1) \leq f(\alpha_2).$$

Пусть $P \subseteq P_2$. **Замыканием** P называется множество всех функций, которые можно получить путём конечного применения операций суперпозиции к функциям из множества P. Обозначается: [P].
5 операций суперпозиции.
1. Добавление фиктивной переменной:

$$\hat{f}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = f(a_1, \dots, a_n),\ \forall a_1, \dots, a_n.$$

2. Удаление фиктивной переменной:

$$\hat{f}(a_1, \dots, a_{n-1}) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, 1),\ \forall a_1, \dots, a_n,$$

где a_n — фиктивная переменная.
3. Переименование переменных:

$$\hat{f}(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_n),\ \forall a_1, \dots, a_n,$$
$$\forall i, j \in \{1, .., n\}.$$

4. Отождествление переменных:

$$\hat{f}(a_1, a_3, ..., a_n) = f(a_1, a_1, a_3, ..., a_n),\ \forall a_1, \dots, a_n.$$

5. Операция подстановки:

$$\hat{f}(a_1, ..., a_{n-1}, b_1, ..., b_m) = g(a_1, ..., a_{n-1}, h(b_1, ..., b_m)),\ \forall a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_m.$$

Лемма о немонотонной функции. Подстановкой 0,1 в $f \notin M$ вместо некоторых переменных можно получить $\bar{x}$.
Лемма (о нелинейной функции). Пусть задана нелинейная функция $f(x_1, \dots, x_n) \notin L$. Тогда подстановкой $0, 1, \overline{x}$ в функцию f вместо её переменных можно получить функции $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$ или $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
Лемма (о несамодвойственной функции). Если $f(x_1, ..., x_n) \notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\overline{x}$ можно получить константу.
Теорема(Янова). При $k \geq 3$ в P_k существует замкнутый класс, не имеющий базиса.
Понятие базиса в P_k*:*
$V \subseteq P_k, u \subseteq V$ — базис в V, если:

$$\begin{cases} 1)[u] = V, \\ 2)\forall f \in u, [u \setminus f] \neq V \end{cases}$$

Счетное множество — это множество, которое равномощно множеству натуральных чисел (N), то есть его элементы можно упорядочить первый, второй, третий и так далее.
Теорема Мучника:. Для любого $k \geq 3$, в P_k существует замкнутый класс со счетным базисом.

0.26.2 Теория графов

Определение. **Графом** G называется пара (V, E), где V – конечное непустое множество и E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы V называются *вершинами* графа, элементы E – *ребрами.*

Дерево – связный граф без циклов.

Теорема.Для (n, m) - графа G следующие утверждения эквивалентны:

- G – дерево
- G – связный граф и $m = n - 1$
- G – ациклический граф и $m = n - 1$
- любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь
- G – ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл

Теорема (Понтрягина-Куратовского). Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подразделений полного графа с пятью вершинами (K_5) и полного двудольного графа с тремя вершинами в каждой доле ($K_{3,3}$).

0.26.3 Теория интеллектуальных систем

Задача XOR не решаема однослойным персептроном, потому что нули и единицы XOR линейно не разделимы.

Теорема (Гильберта Анселя). Число ψ(n) монотонных булевых функций n переменных удовлетворяет неравенствам

$$2^{C_n^{[n/2]}} \leq \psi(n) \leq 3^{C_n^{[n/2]}}.$$

0.27 Билет 1. Замкнутость класса монотонных функций в алгебре логики. Лемма о немонотонной функции.

Понятие функции алгебры логики. Определение монотонной функции алгебры логики. Доказательство замкнутости класса монотонных функций алгебры логики. Формулировка и доказательство леммы о немонотонной функции.

Определение 1. Обозначим за E_2 множество

$$E_2 = \{0,1\},\ \ E_2^n = \underbrace{E_2 \times E_2 \times E_2 \times ... \times E_2}_{n}.$$

Обозначим множество n-местных функций: $P_2^n = \{f \mid f : E_2^n \longrightarrow E_2\}$.

Множеством всех функций алгебры логики обозначим: $P_2 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_2^n$.

Определение 2.

$$\alpha_1, \alpha_2 \in E_2^n:\ \alpha_1 = (a_1, \dots, a_n),\ \alpha_2 = (b_1, \dots, b_n).$$
$$\alpha_1 \preceq \alpha_2 \Leftrightarrow a_i \le b_i.\ \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Функция f называется **монотонной функцией**, если:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in E_2,\ \alpha_1 \preceq \alpha_2 \Rightarrow f(\alpha_1) \le f(\alpha_2).$$

Определение 3.

Пусть $P \subseteq P_2$. **Замыканием** P называется множество всех функций, которые можно получить путём конечного применения операций суперпозиции к функциям из множества P. Обозначается: [P].

5 операций суперпозиции.

1. Добавление фиктивной переменной:

$$\hat{f}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = f(a_1, \dots, a_n),\ \forall a_1, \dots, a_n.$$

2. Удаление фиктивной переменной:

$$\hat{f}(a_1, \dots, a_{n-1}) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, 1),\ \forall a_1, \dots, a_n,$$

где a_n — фиктивная переменная.

3. Переименование переменных:

$$\hat{f}(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_n),\ \forall a_1, \dots, a_n,$$
$$\forall i, j \in \{1, .., n\}.$$

4. Отождествление переменных:

$$\hat{f}(a_1, a_3, ..., a_n) = f(a_1, a_1, a_3, ..., a_n),\ \forall a_1, \dots, a_n.$$

5. Операция подстановки:

$$\hat{f}(a_1, ..., a_{n-1}, b_1, ..., b_m) = g(a_1, ..., a_{n-1}, h(b_1, ..., b_m)),\ \forall a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_m.$$

Обозначим M — класс монотонных функций.

Утверждение 1. [M]=M.

Доказательство.

Докажем замкнутость класса M относительно 5 операций суперпозиции. Пусть имеется монотонная функция $f(x_1, ..., x_n) \in M$ и два сравнимых набора $\alpha_1 = (a_1, \ldots, a_n)$,
$\alpha_2 = (b_1, \ldots, b_n)$.

1.Добавление фиктивной переменной x_{n+1}. Пусть $a_1 \leq b_1, ..., a_{n+1} \leq b_{n+1}$. Тогда

$$\hat{f}(a_1, ..., a_{n+1}) = f(a_1, ..., a_n) \ \leq \ f(b_1, ..., b_n) = \hat{f}(b_1, ..., b_{n+1}).$$

2.Удаление фиктивной переменной x_n. Пусть $a_1 \leq b_1, ..., a_{n-1} \leq b_{n-1}$. Тогда

$$\hat{f}(a_1, ..., a_{n-1}) = f(a_1, ..., a_{n-1}, 0) = f(a_1, ..., a_{n-1}, 1) \ \leq \ f(b_1, ..., b_{n-1}, 0) =$$
$$= f(b_1, ..., b_{n-1}, 1) = \hat{f}(b_1, ..., b_{n-1}).$$

3.Переименование переменных. Пусть $a_1 \leq b_1, ..., a_n \leq b_n$. Тогда

$$\hat{f}(a_1, a_2, ..., a_n) = f(a_2, a_1, ..., a_n) \ \leq \ f(b_2, b_1, ..., b_n) = \hat{f}(b_1, ..., b_n).$$

4.Отождествление переменных. Пусть $a_1 \leq b_1, ..., a_{n-1} \leq b_{n-1}$. Тогда

$$\hat{f}(a_1, a_3, ..., a_n) = f(a_1, a_1, a_3, ..., a_n) \ \leq \ f(b_1, b_1, b_3, ..., b_n) = \hat{f}(b_1, b_3 ..., b_n).$$

5.Подстановка. Пусть $a_1 \leq \hat{a_1}, ..., a_{n-1} \leq \hat{a_{n-1}}, b_1 \leq \hat{b_1}, ..., b_m \leq \hat{b_m}$. Тогда

$$\hat{f}(a_1, ..., a_{n-1}, b_1, ..., b_m) = g(a_1, ..., a_{n-1}, h(b_1, ..., b_m)) \ \leq \ g(\hat{a_1}, ..., \hat{a_{n-1}}, h(\hat{b_1}, ..., \hat{b_m})) =$$
$$= \hat{f}(\hat{a_1}, ..., \hat{a_{n-1}}, \hat{b_1}, ..., \hat{b_m}).$$

Замкнутость доказана.

Лемма о немонотонной функции. Подстановкой 0,1 в $f \notin M$ вместо некоторых переменных можно получить $\bar{x}$.

Доказательство.

Пусть функция $f(x_1, ..., x_n) \notin M$. Тогда, существуют наборы $\alpha_1 = (a_1, \ldots, a_n)$,
$\alpha_2 = (b_1, \ldots, b_n)$ такие, что:

$$a_1 \leq b_1, ..., \ a_n \leq b_n : f(a_1, ..., a_n) = 1, \ f(b_1, ..., b_n) = 0.$$

Пусть, наборы α_1, α_2 совпадают в k позициях. Без ограничения общности, будем считать, что

$$a_1 = b_1, ..., \ a_k = b_k, \ a_{k+1} = 0, ..., \ a_n = 0, \ b_{k+1} = 1, ..., \ b_n = 1.$$

Берём цепочку наборов вида:

$$\begin{gathered} a_1, ..., a_k, 0, ..., 0, 0, \\ a_1, ..., a_k, 0, ..., 0, 1, \\ a_1, ..., a_k, 0, ..., 1, 1, \\ ... \\ a_1, ..., a_k, 1, ..., 1, 1. \end{gathered}$$

Значение функции на первом наборе равно 1, а на последнем 0. Значит, существуют соседние наборы в этой цепочке, в которых функция принимает разные значения. Допустим, эти наборы соседние в j позиции:

$$\hat{\alpha_1} = (a_1, ..., a_{j-1}, 0, a_{j+1}, ..., a_n),$$
$$\hat{\alpha_2} = (a_1, ..., a_{j-1}, 1, a_{j+1}, ..., a_n).$$

Подставим в нашу функцию $f(x_1, ..., x_n)$ вместо x_i константу a_i, если $i \neq j$. В результате, получим функцию от одной переменной g(x) такую, что:

$$g(0) = f(\hat{\alpha_1}) = 1,$$
$$g(1) = f(\hat{\alpha_2}) = 0.$$

Значит, g(x) $= \bar{x}$.

Лемма доказана.

0.28 Билет 2. Замкнутость класса линейных функций алгебры логики. Лемма о нелинейной функции.

Понятие функции алгебры логики. Определение линейной функции алгебры логики. Доказательство замкнутости класса линейных функций алгебры логики. Формулировка и доказательство леммы о нелинейной функции.

Обозначим за E_2 множество $E_2 = \{0, 1\}$.

Назовём n-местной функцией алгебры логики $P_2^n = \{f\colon E_2^n \to E_2\}$.

Множеством всех функций алгебры логики назовём $P_2 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_2^n$.

Обозначим за L множество всех линейных функций.

Определение 1. Функция f из P_2 называется **линейной**, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots a_nx_n \oplus a_{n+1}$, где $\oplus$ – сложение по модуля 2, $a_i \in E_2$.

Определение 2. Пусть R некоторое подмножество функций из P_2. Замыканием R называется множество всех функций, которые можно получить путём конечного применения операций суперпозиции к функциям множества R. Замыкание обозначается $[R]$.

Определение 3. Класс функций называется **замкнутым**, если применяя оператор замыкания мы не выйдем за предел класса, то есть $[R] = R$. Операции суперпозиции в операторе замыкания:

- Добавление фиктивной переменной.
- Удаление фиктивной переменной.
- Переименование.
- Отождествление переменных.
- Подстановка.

Утверждение. Класс линейных функций замкнут. $[L] = L$.

Доказательство. Пусть задана линейная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L$. Для того, чтобы проверить, является ли класс L замкнутым, достаточно проверить, не выводят ли операции суперпозиции за пределы класса:

1. Добавление фиктивной переменной. Пусть x_{n+1} — новая фиктивная переменная, тогда $\hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus 0x_{n+1} \oplus a_{n+1}$.

2. Удаление фиктивной переменной. Пусть x_{n+1} — новая фиктивная переменная, тогда $\hat{f}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_{n-1}x_{n-1} \oplus 0x_n \oplus a_{n+1} = a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_{n-1}x_{n-1} \oplus a_{n+1}$.

3. Переименование. Пусть переименованы (без ограничения общности) первые 2 переменные (x_1, x_2), тогда $\hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) = a_1x_2 \oplus a_2x_1 \oplus a_3x_3 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_{n+1} = a_1x_2 \oplus a_2x_1 \oplus a_3x_3 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_{n+1}$.

4. Отождествление переменных. Пусть отождествлены (без ограничения общности) первые 2 переменные, тогда $\hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}) == a_1x_1 \oplus a_2x_1 \oplus a_3x_3 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_{n+1} = (a_1 \oplus a_2)x_1 \oplus a_3x_3 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_{n+1}$

5. Подстановка. Пусть есть две монотонные функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_m)$. Без ограничения общности, подставим функцию g в функцию f вместо переменной x_n. Тогда $\hat{f}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots, x_{n+m-1}) = f(x_1, x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1})) = a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_{n-1}x_{n-1} \oplus a_n(b_1x_n \oplus \ldots b_mx_{n+m-1} \oplus b_{n+1}) \oplus a_{n+1} = a_1x_1 \oplus$

$\ldots \oplus a_{n-1}x_{n-1} \oplus a_n b_1 x_n \oplus \ldots \oplus a_n b_m x_{n+m-1} \oplus (a_n b_{m+1} \oplus a_{n+1})$. Замкнутость доказана.

Лемма (о нелинейной функции). Пусть задана нелинейная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$. Тогда подстановкой $0, 1, \overline{x}$ в функцию f вместо её переменных можно получить функции $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$ или $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Теорема (Жегалкина). Для любой n-мерной функции алгебры логики $f \in P_2^n$ существует и единственнен полином Жегалкина от $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 4. **Моном** — $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ или 1.

Определение 5. **Полином** — возможно пустая сумма (по модулю 2) маномов.

Доказательство. Очевидно, любой полином от $x_1, \ldots, x_n$ задаёт функцию из P_2^n Так как система функций $\{\wedge, \vee, \neg\}$ полна в P_2, покажем полноту полиномов:

$x_1 \wedge x_2$ — полином, $x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$ - полином, $\neg x = x \oplus 1$ — полином.

Замыкание полинома — полином $\Rightarrow$ любую n-мерную функцию алгебры логики можно представить в виде полинома Жегалкина от n переменных. Далее, заметим, что количество функций алгебры логики от n переменных $|P_2^n = 2^{2^n}|$. При этом маномов ровно $2^n \Rightarrow$ полиномов 2^{2^n}, значит существование единственно.

Доказательство леммы. Пусть задана нелинейная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$, следовательно в её полиноме найдётся маном с хотя бы второй степенью, тогда без ограничения общности сгруппируем переменные x_1 и x_2: $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 f_1(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_1 f_2(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_2 f_3(x_3, \ldots, x_n) \oplus f_4(x_3, \ldots, x_n)$. При этом функция f_1 не равна тождественному нулю $f_1(x_3, \ldots, x_n) \neq 0$, в противном случае полином Жегалкина слагаемых с произведением $x_1 x_2$ не имеет $\Rightarrow$ существует набор $(a_3, ..., a_n)$: $f_1(a_3, \ldots, a_n) = 1$. Пусть на этом наборе значения функций f_2, f_3 и f_4 будут a, b и c соответственно, тогда функция имеет вид $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \oplus a x_1 \oplus b x_2 \oplus c$.

Если $b = 1$, то подставим отрицание $\overline{x_1}$ вместо x_1

$$f(\overline{x_1}, x_2) = (x_1 \oplus 1)x_2 \oplus a(x_1 \oplus 1) \oplus b x_2 \oplus c = x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus a x_1 \oplus a \oplus x_2 \oplus c = x_1 x_2 \oplus a x_1 \oplus a \oplus c$$

Аналогичным образом можем избавиться от коэффициента a получив либо конъюнкию, либо её отрицание.

0.29 Билет 3. Теорема Поста о функциональной полноте алгебры логики.

Понятие полной системы функций. Предполные классы. Формулировка и доказательство критерия Поста о полноте систем функций алгебры логики.

Определение. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой называется разложение вида:

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,...,\sigma_n)=1}} {x_1}^{\sigma_1}\&...\&{x_n}^{\sigma_n}. \tag{23}$$

Теорема (о представимости функций алгебры логики в СДНФ). Каждая функция алгебры логики может быть выражена в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Определение. *Операциями суперпозиции* называются следующие операции:

1. Отождествление переменных;
2. Переименование переменных;
3. Подстановка функций вместо переменных;
4. Удаление фиктивной переменной;
5. Добавление фиктивной переменной.

Определение. Пусть B – некоторое подмножество функций из P_2. *Замыканием* B называется множество всех булевых функций, которые можно получить путем конечного применения операций суперпозиции над функциями из B. Замыкание B обозначается через $[B]$.

Определение. Система функций $B = \{f_1, f_2, ..., f_s, ...\}$ из P_2 называется (функционально) *полной*, если ее замыкание совпадает с P_2, т.е. $[B] = P_2$.

Определение. Обозначим через T_0 класс функций из P_2 сохраняющих константу 0, т.е. функций, для которых выполнено равенство

$$f(0,...,0) = 0. \tag{24}$$

Определение. Обозначим через T_1 класс функций из P_2 сохраняющих константу 1, т.е. функций, для которых выполнено равенство

$$f(1,...,1) = 1. \tag{25}$$

Определение. Функция из P_2 называется *самодвойственной*, если на противоположных наборах она дает противоположные значения, т.е. функция вида

$$f(x_1,...,x_n) = \overline{f}(\overline{x_1},...,\overline{x_n}). \tag{26}$$

Определение. Обозначим через S класс всех самодвойственных функций в P_2.

Лемма (о несамодвойственной функции). Если $f(x_1,...,x_n) \notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\overline{x}$ можно получить константу.

Определение. Для двух наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n)$ выполнено отношение предшествования $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$, если

$$\alpha_1 \le \beta_1, ..., \alpha_n \le \beta_n. \tag{27}$$

Определение. Функция называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, таких что $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$, имеет место неравенство

$$f(\widetilde{\alpha}) \le f(\widetilde{\beta}). \tag{28}$$

Определение. Обозначим через M класс всех монотонных функций в P_2.

Лемма (о немонотонной функции). Если $f(x_1, ..., x_n) \notin M$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функции x можно получить функцию $\overline{x}$.

Определение. Функция n переменных $(n = 0, 1, 2, ...)$ называется *линейной*, если она имеет следующий вид:

$$f(x_1, ..., x_n) = c_0 + c_1 x_1 + ... + c_n x_n, \tag{29}$$

где $c_i = \{0, 1\}, i = \overline{0, n}$.

Определение. Обозначим через L класс всех линейных функций в P_2.

Лемма (о нелинейной функции). Если $f(x_1, ..., x_n) \notin L$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функций x и $\overline{x}$, а также, возможно, путем навешивания отрицания над f, можно получить функцию $x_1 \& x_2$.

Теорема (о функциональной полноте). Для того, чтобы система функций B была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L.

Доказательство. Необходимость. Пусть B полна, т.е. $[B] = P_2$. Допустим, что B содержится в одном из указанных классов. Обозначим его через R, т.е. $B \subseteq R$. Тогда в силу свойств замыкания и замкнутости R имеем

$$P_2 = [B] \subseteq [R] = R. \tag{30}$$

Значит $R = P_2$. Получили противоречие.
Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть B целиком не содержится ни в одном из классов. Тогда мы можем выделить из B подсистему B', содержащую в себе не более пяти функций таких, что B' так же полностью не лежит ни в одном из указанных классов. Возьмем из B функции $f_{T_0}, f_{T_1}, f_S, f_M, f_L$, которые не принадлежат классам T_0, T_1, S, M, L соответственно.

$$B' = \{f_{T_0}, f_{T_1}, f_S, f_M, f_L\}. \tag{31}$$

Считаем, что все функции B' зависят от одних и тех же переменных $x_1, ..., x_n$.
Рассмотрим функцию $f_{T_0} \notin T_0$. Возможны два случая:
1. $f_{T_0}(1, ..., 1) = 1$. Тогда $\varphi(x) = f_{T_0}(x_1, ..., x_n)$ есть константа 1, так как

$$\varphi(0) = f_{T_0}(0, ..., 0) = 1, \varphi(1) = f_{T_0}(1, ..., 1) = 1. \tag{32}$$

2. $f_{T_0}(1, ..., 1) = 0$. Тогда $\varphi(x) = f_{T_0}(x_1, ..., x_n)$ есть $\overline{x}$, так как

$$\varphi(0) = f_{T_0}(0, ..., 0) = 1, \varphi(1) = f_{T_0}(1, ..., 1) = 0. \tag{33}$$

Аналогичные рассуждения по отношению к функции $f_{T_1} \notin T_1$ дают константу 0 или $\overline{x}$.
В случае, когда мы получаем из f_{T_0} или f_{T_1} функцию $\overline{x}$, рассмотрим функцию $f_S \notin S$. Так как мы имеем функцию $\overline{x}$, по лемме о несамодвойственной функции мы можем получить константы.
В случае, когда мы получаем из f_{T_0} константу 1, а из f_{T_1} константу 0, рассмотрим функцию $f_M \notin M$. При помощи констант 0 и 1 по лемме о немонотонной функции можем построить функцию $\overline{x}$.
Имея обе константы и функцию $\overline{x}$, рассмотрим функцию $f_L \notin L$. При помощи констант 0 и 1 и функции $\overline{x}$ по лемме о нелинейной функции можем построить $x_1 \& x_2$.
Таким образом, имея конъюнкцию и отрицание и используя закон де Моргана

$$\overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2}} = x_1 \vee x_2, \tag{34}$$

мы можем построить СДНФ. По теореме о представимости функции алгебры логики в СДНФ можем построить любую функцию из P_2. Достаточность доказана.

0.30 Билет 4. Конечная порождённость P_k. Теорема Янова

Понятие функций многозначной логики. Понятие базиса в P_k. Доказательство существования конечного базиса в P_k. Формулировка и доказательство теоремы Янова о существовании в P_k замкнутого класса, не имеющего базиса.

Обозначим за E_k множество $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$. Тогда $E_k^n = E_k \times ... \times E_k$.

Назовём n-местной функцией алгебры k-значной логики $f : E_k^n \to E_k$.

Множество всех n-местных функций обозначим $P_k^n = \{f : E_k^n \to E_k\}$.

Множество всех функций алгебры k-значной логики назовём $P_k = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_k^n$.

Определение 1. *Замыканием* системы функций F называется множество $[F]$, которое может быть полученно из F путём конечного применения операций суперпозиции.

Определение 2. Пусть $V \subseteq P_k$ — множество функций из P_k. $U \subseteq V$ — *базис* в V, если
1. $[U] = V$,
2. $\forall f \in U : [U \setminus \{f\}] \neq V$.

Докажем существование конечного базиса в P_k.

Определение 3. *Первая форма* это система функций

$$F_1 = \{0, 1, ..., k-1, J_0(x), ..., J_{k-1}(x), max(x_1, x_2), min(x_1, x_2)\}, \text{где}$$

$$J_i(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq i, \\ k-1 & , x = i. \end{cases}$$

Утверждение 1. $[F_1] = P_k$ при $k \geq 3$.
Данная система полна, так как с помощью данных функций строится аналог СДНФ:

$$f(x_1, ..., x_n) = \max_{(\sigma_1, ..., \sigma_n) \in E_k^n} (\min(J_{\sigma_1}(x_1), ..., J_{\sigma_n}(x_n))).$$

Так как существует конечная полная система, то в ней существует и конечный базис.

Определение 4. *Вторая форма* это система функций

$$F_2 = \{x_1 \oplus_k x_2, j_0(x), ..., j_{k-1}(x), 0, ..., k-1, min(x_1, x_2)\}, \text{где}$$

$$j_i(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq i, \\ 1 & , x = i. \end{cases}$$

Утверждение 2. $[F_2] = P_k$ при $k \geq 3$.
Данная система полна, так как любую функцию в P_k можно представить в следующем виде:

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigoplus_{(\sigma_1, ..., \sigma_n) \in E_k^n} (f(\sigma) \cdot \min(j_{\sigma_1}(x_1), ..., j_{\sigma_n}(x_n)).$$

Так как существует конечная полная система, то в ней существует и конечный базис.

Определение 5. $V(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2) \oplus_k 1$ — *функция Вебба.*

Утверждение 3. $[V] = P_k$ при $k \geq 3$.

Подставив функцию Вебба саму в себя, получим $\max(x_1, x_2)$.

1. Отождествив переменные в функции Вебба, получим отрицание Поста:

$$\max(x, x) \oplus 1 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x} = x \oplus 1.$$

2. Подставляя функцию $x \oplus 1$ саму в себя, получим функции $x \oplus 2, ..., x \oplus k-1$. Теперь, подставив их в функцию max, получим константу $k-1$:

$$\max(x, x \oplus 1, ..., x \oplus k-1) = k-1.$$

3. Подставив константу k-1 в функцию $x \oplus 1$, получим 0. Далее подставляя константы получим их все.

4. Рассмотрим функцию g, равную максимуму между некоторой константой c и $\max(k-2, x) \oplus 1$. Заметим, что функция g равна константе при $x = k-1$ и обращается в ноль в остальных случаях.

$$g = \max(c, \max(k-2, x) \oplus 1) = \begin{cases} k-1 & , x \neq k-1, \\ c & , x = k-1 \end{cases}$$

5. Если прибавить 1 к функции g, получим

$$g \oplus 1 = \begin{cases} 0 & , x \neq k-1, \\ c \oplus 1 & , x = k-1 \end{cases}$$

Назовем эту функцию иголкой и обозначим $N(x)$.

6. Подставив в иголку $x \oplus c$ вместо переменной, получим сдвинутую иголку, то есть

$$N(x \oplus c) = \begin{cases} 0 & , x \neq k-c-1, \\ c \oplus 1 & , x = k-c-1 \end{cases}$$

Получим множество иголок по всем позициям. Обозначим за N_i иголку на позиции i.

7. Подставив все N_i в функцию max, получим все одноместные функции.

$\max(N_0(x), ..., N_{k-1}(x))$ - любая одноместная функция.

Значит, имеем $J_0(x), ..., J_{k-1}(x), 0, 1, .., k-1, \max(x_1, x_2)$. Для первой формы не хватает только функции $\min(x_1, x_2)$.

8. Минимум можно получить, используя отрицание Лукашевича и функцию $\max(x_1, x_2)$.

$$\min(x_1, x_2) = k-1-(max(k-1-x_1, k-1-x_2)).$$

Таким образом, из функции Вебба получена первая форма, а это полная система.

Теорема(Янова). При $k \geq 3$ в P_k существует замкнутый класс, не имеющий базиса.

Рассмотрим систему функций $F = \{f_0, f_1, ...\}$, где

$$f_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0; \;\; f_i(x_1, ..., x_i) = \begin{cases} 1 & , x_1 = ... = x_i = 2, \\ 0 & , \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что множество $\{f_0, f_1, ...\}$ замкнуто. Для это покажем, что применение операций суперпозиции не выводит за пределы множества.

1. Операция отождествления переменных приводит к уменьшению индекса i, следовательно получаем функцию из F.

2. Операция перестановки переменных не меняет функцию.

3. Операция подстановки даст f_0.

4. Операция удаления фиктивной переменной не влияет на существенные переменные.

5. С операцией добавления фиктивных переменных аналогично.

Докажем, что система F не имеет базиса.

Предположим, что у множества $F = \{f_0, f_1, ...\}$ есть базис. Это возможно при двух случаях:

1. Базис содержит две функции f_{n_0} и f_{n_1} причём $n_1 > n_0$. Так как f_{n_0} может быть получена из f_{n_1} путём отождествления переменных, то f_{n_0} выражется через f_{n_1}, а это противоречит определению базиса.

2. Базис состоит из единственной функции f_{n_0}, в этом случае никакая функция f_n при $n > n_0$, не может быть получена из f_{n_0}. Опять противоречие.

0.31 Билет 5. Теорема Мучника о существовании в P_k замкнутого класса со счетным базисом

Понятие функций многозначной логики. Понятие базиса в P_k. Формулировка и доказательство теоремы Мучника о существовании в P_k замкнутого класса, со счетным базисом.

Определение 1. *Понятие функций многозначной логики:*

$$E_k = \{0, 1, 2, ..., k-1\}, \;\; E_k^n = \underbrace{E_k \times E_k \times E_k \times ... \times E_k}_{n},$$

$$P_k^n = \{f \mid f : E_k^n \longrightarrow E_k\}, \;\; P_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_k^n.$$

Определение 2:
Понятие базиса в P_k:
$V \subseteq P_k, u \subseteq V$ — базис в V, если:

$$\begin{cases} 1)[u] = V, \\ 2)\forall f \in u, [u \setminus f] \neq V \end{cases}.$$

Определение 3:
Замыкание в P_k:

Пусть F — подмножество функций из P_k. Замыканием F называется множество всевозможных функций, полученных с помощью конечного применения операций суперпозиций к функциям из F. Обозначается: [F].

Определение №4:

Счетное множество — это множество, которое равномощно множеству натуральных чисел (N), то есть его элементы можно упорядочить первый, второй, третий и так далее.

Теорема Мучника:
Для любого $k \geq 3$, в P_k существует замкнутый класс со счетным базисом.
Доказательство:
Рассмотрим замкнутый класс и докажем, что в нем счетный базис.
Построение замкнутого класса.
Вводится система функций:

$$f_i(x_1, ..., x_i) = \begin{cases} 1, x_1 =...= x_{j-1} = x_{j+1} =...= x_i = 2, x_j = 1, 1 \leq j \leq i, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

(i=2,3,4,...).

У нас есть класс функций: $F \overset{\text{def}}{=} \{f_2, f_3, ...\}$, возьмем его замыкание ($V \overset{\text{def}}{=} [F]$). Замыкание класса — замкнутый класс (смотри свойства замыкания). Этот класс и будет тем самым классом из формулировки, у которого счетный базис.

Требуется доказать, что у этого класса счетный базис. Для этого покажем, что F, наша исходная система, и есть этот счетный базис.

Очевидно, что F порождает $[F]$, надо доказать, что ни какое подмножество F этим свойством не обладает.

Предположим противное, что некоторую функцию из базиса
(из $F \overset{\text{def}}{=} \{f_2, f_3, ...\}$), можно выкинуть так, что F можно получить замыканием оставшийся функции. Это значит, что:

$$f_m = u[f_2, ..., f_{m-1}, f_{m+1}, ...], \text{ где u[...] — какая-то формула.}$$

То есть:

$$f_m = u[f_2, ..., f_{m-1}, f_{m+1}, ...] = f_k(u_1[f_2, ..., f_{m-1}, f_{m+1}, ...], ..., u_k[f_2, ..., f_{m-1}, f_{m+1}, ...]).$$

Рассмотрим 3 возможных случая:

1) В качестве аргументов функции f_k существует хотя бы две не переменные (то есть какие-то функции). Существует: u_i, u_j — формулы. Тогда значениями этих формул при разных наборах может быть только 0 или 1. Значит два аргумента функции f_k, имеют следующие значения: $(0,0), (0,1), (1,0)$ и $(1,1)$, следовательно:

$$f_k \equiv 0 \neq f_m\ .$$

Противоречие.

2) В качестве аргументов функции f_k только одна позиция не является переменной (то есть формула), на всех остальных позициях переменные:

$$f_m = f_k(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{s-1}}, f_l(...), x_{i_{s+1}}, ..., x_{i_k}).$$

Тогда подбираем такие значения переменных входящих в левую и правую часть, что слева будет единица, а справа нуль. Берем:

$$x_{i_1}, \text{ или } x_{i_2}, \text{ или ... } x_{i_k} = 1, \text{ а остальные переменые} = 2.$$

Тогда: $f_m = 1$, а справа есть функция f_l, которая принимает не двойку (0 или 1) и одна из переменных принимает значение 1. Следовательно, хотя бы две позиции не двойки, тогда $f_k = 0$.

$$1 = f_m(x_1, x_2, ..., x_m) \neq f_k(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{s-1}}, f_l(...), x_{i_{s+1}}, ..., x_{i_k}) = 0.$$

Противоречие.

3) В качестве аргументов f_k все переменные:

$$f_m(x_1, x_2, ..., x_m) = f_k(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}).$$

Так как в f_m все переменные существенные, то у функции f_k должно быть хотя бы m существенных переменных, то есть k > m(поскольку, если $k < m$, то справа не хватит существенных переменных, если $k = m \Rightarrow f_m = f_k$, а этого не может быть, так как мы же выкинули f_m из базиса). Таким образом, если $k > m$, то некоторые из переменных: $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$, по принципу Дирихле, обязательно совпадают, то есть:

$$\exists x_{i_a} = x_{i_b}, \text{ где } a, b \in \{1, ..., k\}.$$

Тогда мы подставим в эту совпадающую пару единицу, а все остальные переменные будут двойками, то есть:

$$x_1 = x_2 = ... = x_{p-1} = x_{p+1} = ... = x_m = 2, \text{ а } x_p = 1.$$

На этом наборе значение функция $f_m = 1$, в тоже время значение $f_k = 0$, так как какое-то x_p будет повторяться в f_k.

Противоречие.

Во всех случаях получаем противоречия, а следовательно f_m не выводится из формул функций системы F, кроме как из себя. **Теорема доказана.**

0.32 Билет 6. Теорема о полноте системы полиномов в P_k

Полиномы в многозначной логике. Формулировка малой теоремы Ферма. Формулировка и доказательство теоремы о полноте системы полиномов в P_k

Определение 1. **Второй формой** будем называть систему F_2 вида

$$F_2 = \{0 \dots k-1, j_0(x) \dots j_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), x_1 \oplus_k x_2\},$$

где $j_i, i = \overline{0, k-1}$, функции вида

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & x \neq i \end{cases}.$$

Определение 2. **Мономом** будем называть либо константу 1, либо выражение вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \& \dots \& x_{i_n}^{\sigma_n},$$

где $\sigma_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}$ и $x_{i_j} \neq x_{i_k}$ при $i_j \neq i_k$.

Определение 3. **Полиномом** по модулю k будем называть либо константу 0, либо формулу вида

$$\sum_{i=1}^{l} c_i K_i,$$

где $l \geq 1$, K_i, $i = \overline{1, l}$ — различные мономы, а $c_i \in E_k \setminus \{0\}, i = \overline{1, l}$.

Лемма 1 (Теорема Эйлера)
Если $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, где $\varphi(m)$ — функция Эйлера (функция, равная количеству натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с ним, то есть $\varphi(m) = |\{a | 1 \leq a < m, (a, m) = 1\}|$).

Доказательство. Пусть $x_1, \dots x_{\varphi(m)}$ — все различные натуральные числа, меньшие m и взаимно простые с ним.

Рассмотрим все возможные произведения $x_i a$ для всех $i = \overline{1, \varphi(m)}$. Поскольку a взаимно просто с m и x_i взаимно просто с m, то и $x_i a$ также взаимно просто с m, то есть $x_i a \equiv x_j \pmod m$ для некоторого j.

Отметим, что все остатки $x_i a$ при делении на m различны. Действительно, пусть это не так, тогда существуют такие $i_1 \neq i_2$, что

$$x_{i_1} a \equiv x_{i_2} a \pmod m$$

или

$$(x_{i_1} - x_{i_2}) a \equiv 0 \pmod m.$$

Так как a взаимно просто с m, то последнее равенство равносильно тому, что

$$x_{i_1} - x_{i_2} \equiv 0 \pmod m$$

или

$$x_{i_1} \equiv x_{i_2} \pmod m.$$

Это противоречит тому, что числа $x_1, \dots, x_{\varphi(m)}$ попарно различны по модулю m.

Перемножим все сравнения вида $x_i a \equiv x_j \pmod m$. Получим:

$$x_1 \cdots x_{\varphi(m)} a^{\varphi(m)} \equiv x_1 \cdots x_{\varphi(m)} \pmod m$$

или

$$x_1 \cdots x_{\varphi(m)}(a^{\varphi(m)} - 1) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Так как число $x_1 \cdots x_{\varphi(m)}$ взаимно просто с m, то последнее сравнение равносильно тому, что

$$a^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$$

или

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Лемма 2 (Малая теорема Ферма)
Если $(a, p) = 1$, где p — простое число, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Очевидно, что $\varphi(p) = p - 1$, когда p — простое число. Тогда, нетрудно заметить, что при $m = p$ малая теорема Ферма является следствием теоремы Эйлера.

Лемма 3 (О второй форме)
Пусть $k \geq 2$, тогда каждая функция k-значной логики
$f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ может быть задана формулой вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \ldots j_{\sigma_n}(x_n) \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

где в качестве $x_1 \& x_2$ взята функция $\min(x_1, x_2)$.

Теорема
При $k \geq 3$ система полиномов по модулю k полна в P_k тогда и только тогда, когда k — простое число.

Доказательство
Пусть k — простое число, тогда по малой теореме Ферма имеем
$a^{k-1} \equiv 1 \pmod{k}$, где $1 \leq a \leq k - 1$. Тогда $j_0(x) = 1 - x^{k-1} \pmod{k}$ **(∗)**. Следовательно $j_0(x)$ — полином.

Заметим, что $j_\sigma(x) = j_0(x - \sigma)$ **(∗∗)**. Так как $j_0(x)$ — полином, то и $j_\sigma(x)$ — полином.

Теперь, используя вторую форму покажем, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима в виде полинома. Действительно, подставив вместо $j_\sigma(x)$ выражение **(∗∗)** и заменив $j_0(x)$ на **(∗)**, имеем:

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_k^n} (1 - (x_1 - \sigma_1)^{k-1}) \ldots (1 - (x_n - \sigma_n)^{k-1}) \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n). \end{aligned}$$

Затем перемножаем скобки по свойствам дистрибутивности, коммутативности и ассоциативности; приводим подобные слагаемые. Так как сумма и произведение полиномов — полином, то полученное разложение есть полином для функции $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Таким образом любая функция k-значной логики представима в виде полинома при простом k.

Теперь пусть k — составное число, то есть $k = k_1 k_2$, где $k_1 \geq k_2 > 1$. Докажем, что в этом случае функция $j_0(x)$ не задается полиномом по модулю k.

От противного: пусть функция $j_0(x)$ задается полиномом по модулю k:

$$j_0(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \pmod{k},$$

где $c_i \in E_k, i = \overline{0, s}$ — коэффициенты и $c_s \neq 0$.

Тогда, при $x = 0$ имеем:

$$j_0(0) = c_0 = 1.$$

При $x = k_2$ имеем:

$$j_0(k_2) = 0 = c_s k_2^s + c_{s-1} k_2^{s-1} + \cdots + c_1 k_2 + 1 \pmod{k}.$$

Так как k_2 делитель k, то левая часть выражения (0.32) делится на k_2, слагаемое $c_s k_2^s + c_{s-1} k_2^{s-1} + \cdots + c_1 k_2$ в правой части выражения (0.32) тоже делится на k_2, а значит и c_0 делится на k_2. Но $c_0 = 1$, 1 не может делиться на k_2 потому что $k_2 > 1$. Противоречие.

Полученное противоречие доказывает, что система полиномов полна в P_k, тогда и только тогда, когда k — простое число.

0.33 Билет 7. Замкнутость класса ограниченно-детерминированных функций относительно операций суперпозиции и обратной связи. Конечная порожденность этого класса.

Понятие детерминированных и ограниченно-детерминированных функций. Операции суперпозиции и обратной памяти. Доказательство замкнутости класса ограниченно- детерминированных функций относительно операций суперпозиции и обратной связи. Доказательство существования конечной полной системы ограниченно-детерминированных функций.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ - алфавит входных символов, а $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ - алфавит выходных символов. Алфавиты A и B конечны. Функция $f\colon A^* \to B^*$ используется для описания дискретных процессов в дискретный момент времени $t = 1, 2, \ldots$, при этом слово $\alpha, \alpha \in A^*$, последовательность входных символов, а слово $\beta, \beta \in B*$, последовательность выходных символов. Функция $f\colon A^* \to B^*$ называется **детерминированной**, если выполняются следующие условия:

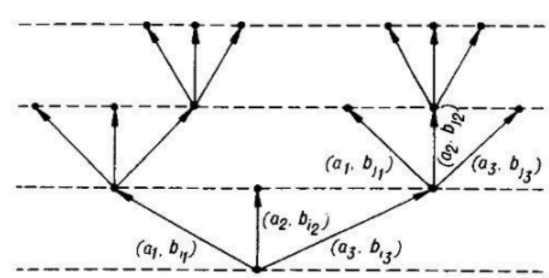
а) Если $\alpha \in A^*$, то $|\alpha| = |f(\alpha)|$, т.е. длина входного слова равна длине выходного слова.

б) Если $\alpha_1 = a(1)\ldots a(k)$, $\alpha_2 = a'(1)\ldots a'(k)$, $f(\alpha_1) = b(1)\ldots b(k)$, $f(\alpha_2) = b'(1)\ldots b'(k)$, причем $a(1) = a'(1), \ldots, a(s) = a'(s)$ при $1 \leq s \leq k$, то $b(1) = b'(1), \ldots, b(s) = b'(s)$ $(a(i)$, здесь $a'(i) \in A$, $b'(i) \in B$, т.е. каждый выходной сигнал определяется однозначно последовательностью входных символов и не зависит от символов, поступающих в последующие моменты времени.

Информационное дерево и остаточные функции Детерминированные (д-функции) функции удобно задавать информационными деревьями. Информационное дерево - бесконечный ориентированный граф G, каждому ребру которого приписана пара (a, b), $a \in A$, $b \in B$, причем выполняются условия:

1) Существует корень дерева, из которого достижимы все вершины. Для каждой вершины $v \in G$ существует единственная последовательность вида $v_1, p_1, v_2, p_2, \ldots, p_i, v_i + 1 = v$, где $i \geq 0$, $v_1, v_2, \ldots, v_{i+1}$ - вершины G, p_j - ребро, ведущее от v_j к v_{j+1}, $j = 1, \ldots, i$.

2) Из каждой вершины v графа G выходит ровно m ребер, которым сопоставлены пары вида $(a_1, b_{i1}), \ldots, (a_m, b_{im}), \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. На следующем рисунке показан примерный вид информационного дерева.



Пусть G - информационное дерево в алфавитах A, B, v_1 - корень дерева, v - произвольная вершина. Подграф графа G, образованный вершинами, достижимыми из v (включая v), тоже является информационным деревом. Обозначим его $G(v)$. Установим связь между функциями $f = f_G$ и $f' = f_{G}(v)$, которые реализуют деревья G и $G(v)$ соответственно. Рассмотрим путь π из корня v_1 дерева G, соответствующий такому слова $\alpha, \alpha \in A^*$, что концом пути π служит вершина v. Определяемое путем π слово в алфавите B обозначим β. По определению функции f имеем $f(\alpha) = \beta$. Пусть γ - произвольное слово в алфавите A. Рассмотрим путь π_1 из корня v_1 дерева G, соответстующий слову $\alpha\gamma$, а также путь π_2 из корня v дерева $G(v)$, соответствующий слову γ. Обозначим δ_1 и δ_2 определяемые путями π_1 и π_2 слова в алфавите B. Путь π_2 представляет собой концевой отрезок пути π_1, а слово δ_2 является концом слова δ_1. Так как соответствующий слову α начальный отрезок пути π_1 есть путь π, то получаем представление слова δ_1 в виде $\beta\delta_2$, при этом $\delta_1 = f(\alpha\gamma)$, $\delta_2 = f')\gamma)$.

Таким образом, получаем тождество $f(\alpha\gamma) = f(\alpha)f'(\gamma)$, где α - фиксированное слово из A^*, а γ - произвольное слово из A^*. Функции f', которые удовлетворяют этому тождеству для различных α из A^*, называются **остаточными функциями** д. функции f.

Менее формально - любое поддерево дерева G с корнем в вершине, отличной от v_0, определяет остаточную функцию. Если ввести отношение изоморфизма (похожести) на всех поддеревьях G (а их всего бесконечно), то можно разделить все поддеревья на классы эквивалентности. Отношение изоморфизма введем так: два поддерева изоморфны, если «наложив» корни этих поддеревьев друг на друга, «совпадут» и ребра и метки на ребрах у этих поддеревьев. Разобьем все поддеревья (остаточные функции) на классы эквивалентности - все изоморфные деревья попадают в один класс.

Ограниченно-детерминированные функции

Д. функция называется **ограниченно-детерминированной (о.д.-функцией)**, если множество ее остаточных функций конечно. Отношение изоморфизма, введенное выше, разбивает множество поддеревьев $G(v)$ информационного дерева G на классы эквивалентности - $Q_1, Q_2, \ldots$ Очевидно, любые два дерева $G(v)$ из одного и того же класса Q_i определяют одну и ту же д.функцию, а из разных классов Q_i - различные д.функции. Определим функции φ и ψ таким образом:

$$\varphi(Q_i, a) = Q_j, \quad \psi(Q_i, a) = b_j$$

Функция φ определена на множестве $Q_1, Q_2, \ldots \times A$ и принимает значения из $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$, а ψ на множестве $\{Q_1, Q_2, \ldots\} \times A$ и принимает значения из B.

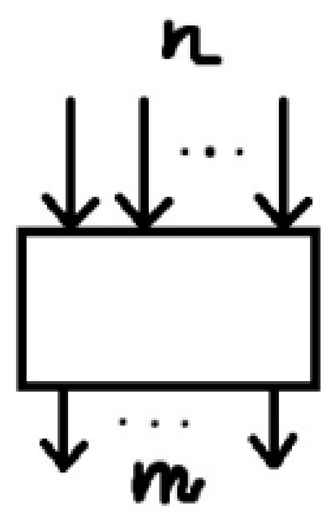
Рассмотрим произвольное слово α, $\alpha = \alpha(1), \ldots, \alpha(p)$, $\alpha \in A^*$. Пусть $v_1, p_1, v_2, p_2, \ldots, p_p, v_{p+1}$ - путь из корня v_1 инф. дерева G, соответствующий слову α. Обозначим $(a(i), b(i))$ отметку ребра p_i,$i = 1, \ldots, p$, $\quad q(t)$ - такой класс Q_{j_i}, что $G(v_i) \in Q_{j_i}$, $i = 1, \ldots, p+1$. Согласно определению функций φ и ψ выполняются соотношения:

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)), t = 1, \ldots, p \end{cases} \qquad (1)$$

Если множество $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ конечно, то рассматриваемая д. функция является конечно автоматной функцией, реализуемой инициальным конечным абстрактным автоматом $V = \{A, Q, B, \varphi, \psi, Q_{j_1}\}$. Получается с каждым инициальным конечным автоматом можно связать о-д. функцию $F_V \colon A^* \to B^*$, $F_V(\alpha) = \psi(q_0, \alpha)$. Здесь A и B - произвольные конечные алфавиты. На практике, однако, удобно иметь дело не с буквами этих алфавитов, а с некоторыми их кодами.

Канонические уравнения о-д. функций

Таким образом, с самого начала можно считать, что имеется некоторый основной алфавит $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$, который используется для кодирования букв алфавитов A, Q, B. Сначала $T = \{0, 1\}$, $A = \{0, 1\}^n$, $Q = \{0, 1\}^r$, $B = \{0, 1\}^m$. Графически это будет выглядеть так



Однако для задачи синтеза схем не важно сколько выходов у автомата, т.к мы можем использовать m автоматов, у каждого из которых по n входов и 1 выходу. Таким образом мы можем считать, что у автомата V имеется n входов и 1 выход. Множество всех функций, вычисляемых автоматами со многими входами, обозначим через P. С учетом нововведений канонические уравнения запишутся в виде:

$$\begin{cases} q(1) = q_1^0, \ldots, q_r(1) = q_r^0, \\ q(t+1) = \varphi(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)), \\ \ldots \\ q_r(t+1) = \varphi_r(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)), \\ b(t) = \psi(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \qquad (2)$$

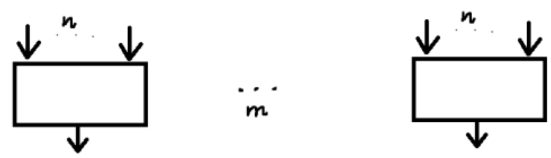
Итак, о.-д. функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, вычисляемая автоматом $V = (\{0,1\}^n, \{0,1\}^r, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0)$ может быть задана с помощью канонических уравнений, где все функции в правых частях функции алгебры логики.

Пример. Уравнения о. д. функции, которая реализуется задержкой с нулевым начальным состоянием - G_0 (в первый момент времени выдает 0, дальше выдает предыдущий символ, который подали на вход).

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = x(t), \\ y(t) = q(t) \end{cases} \qquad (3)$$

Операция суперпозиции и обратной связи.

С каждым автоматом (получается и с о -д. функцией) мы можем связать схему, которая реализует этот автомат.



Операции суперпозиции: отождествление переменных, перестановка переменных, добавление фиктивной переменной, удаление фиктивной переменной, подстановка функции вместо переменной. Удобно интерпретировать эти операции графически.

Операция обратной связи: Пусть $n \geq 2$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ - о.-д. функция, которая задается канонической системой:

$$\begin{cases} q_1(1) = q_1^0, \ldots, q_r(1) = q_r^0 \\ q_i(t+1) = \varphi_i(q_1(t), \ldots, q_r(r), x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad i = 1, \ldots, r \\ y(t) = \psi(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \qquad (4)$$

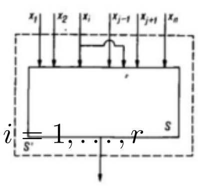


Рис. 1: Отождествление.

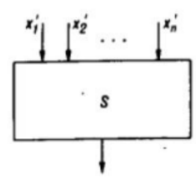


Рис. 2: Перестановка.

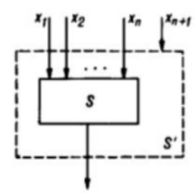


Рис. 3: Добавление фиктивной.

Пусть f зависит фиктивно от какий-нибудь переменной, допустим x_1. Получим ψ' из ψ изъятием фиктивной переменной $x_1(t)$. Тогда о-д. функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задается системой

$$\begin{cases} q_1(1) = q_1^0, \ldots, q_r(1) = q_r^0 \\ q_i(t+1) = \varphi_i(q_1(t), \ldots, q_r(r), x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad i = 1, \ldots, r \\ y(t) = \psi'(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \qquad (5)$$

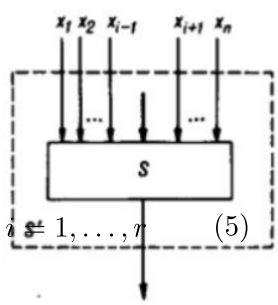


Рис. 4: Удаление фиктивной.

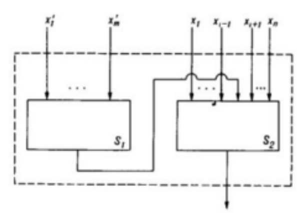


Рис. 5: Подстановка функции.

Теперь вместо фиктивной x_1 в φ_i, $i = 1, \ldots, r$ подставим ψ' (мы можем это сделать, т.к. ψ' не зависит от x_1). Получится следующая система:

$$\begin{cases} q_1(1) = q_1^0, \ldots, q_r(1) = q_r^0 \\ q_i(t+1) = \varphi_i(q_1(t), \ldots, q_r(r), \psi'(q_1(t), \ldots, q_r(t)), x_2(t), \ldots, x_n(t)), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, \ldots, r \\ y(t) = \psi'(q_1(t), \ldots, q_r(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \qquad (5)$$

Эта система задает некоторую функцию f' которая получилась из функции f применением операции обратной связи.

Замкнутость и конечная порожденность класса о-д функций Оператор Σ - замыкание относительно операций суперпозиции.
Оператор K - замыкание относительно операций суперпозиции и операции обратной связи. Функция Шеффера на множестве о-д функций: о.-д. функция, у которой в канонических уравнениях функцией выходов является функция Шеффера:

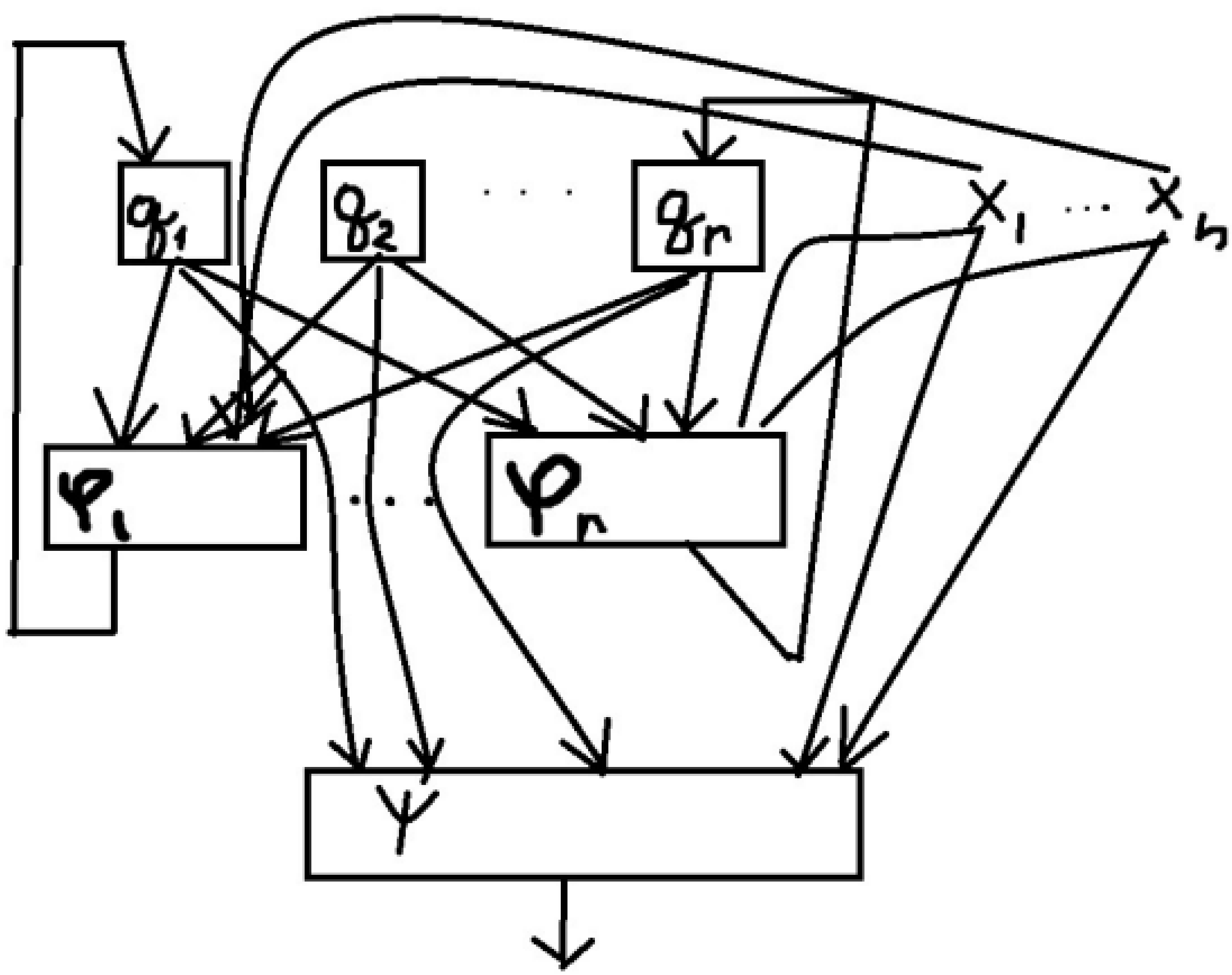
$$\begin{cases} q_1(1) = 0, \\ q(t+1) = q(t), \\ y(t) = \overline{x_1}(t) \vee \overline{x_2}(t) \end{cases}$$

Она является аналогом функции Шеффера из алгебры логики на множестве о-д функций.

Теорема 1. Конечным применением оператора K к системе функций, состоящей из функции нулевой задержки и функции Шеффера можно построить все о-д функции.

Доказательство: Построим схему, которая реализует произвольную о-д функцию по определению канонических уравнений (2) произвольной о-д функции. Для синтеза схемы нам потребуется реализовать функции из системы (2) - все q_i, ψ_i, φ и x_j, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, n$. Все функции кроме q_i построим из функции Шеффера, q_i построим из задержек нуля и единицы. Сначала построим задержку единицы из задержки нуля таким образом:

Используем задержки для построения q_i. Далее построим следующую схему:



0.34 Билет 8. Теорема о преобразовании периодических последовательностей ограниченно-детерминированными функциями

Понятие конечного автомата. Автомат как преобразователь последовательностей. Формулировка и доказательство теоремы о преобразовании периодических последовательностей ограниченно-детерминированными функциями.

Понятие конечного автомата.
Определение 1. V=(A, Q, B, ϕ, ψ, q_0) – конечный абстрактный инициальный детерминированный автомат:
A – входной конечный алфавит,
Q – конечный алфавит состояний,
B – выходной конечный алфавит,
ϕ : A $\times$ Q $\to$ Q – функция переходов,
ψ: A $\times$ Q $\to$ B – функция выходов,
q_0 – начальное состояние ($q_0 \in$ Q).
Что значит, что некоторый конечный абстрактный инициальный детерминированный автомат преобразует некоторые последовательности?
Определение 2.

$$\begin{gathered} X(1)X(2)\ldots \to Y(1)Y(2)\ldots \\ Y(1) = \psi(X(1), q_0), \quad q_1 = \phi(X(1), q_0) \\ Y(2) = \psi(X(2), q_1), \quad q_2 = \phi(X(2), q_1) \\ \ldots \end{gathered}$$

В начальный момент времени состояние у автомата q_0 . Подаём на вход автомата букву $X(1)$, с помощью функции выхода вычисляем первую выходную букву в данный момент времени $Y(1)$. С помощью функции перехода от начального состояния и входной буквы вычисляем следующее состояние q_1. В следующий второй момент времени с помощью функции выхода от второй входной буквы и текущего состояния, вычисленного раннее, вычисляем вторую выходную букву . Состояние в третий момент времени q_2 вычисляем с помощью функции перехода от входного значения и текущего состояния. И так далее.

Формулировка и доказательство теоремы о преобразовании периодических последовательностей

Определение 3. $x = (x(1), x(2), \ldots) \in A^{\infty}$— бесконечная периодическая последовательность с длиной периода $t \in N$ и предпериодом T, если $x(\alpha) = x(\alpha + t) \;\; \forall \alpha > T$, где A^{∞} — множество сверхслов. $\alpha, T \in N$.

Утверждение. Если на входе ограниченно-детерминированной функции f веса n периодические последовательности с длинами периодов t_1, ... ,t_n , то на выходе тоже будет периодическая последовательность с длиной периода $k * HOK$ (t_1, ... ,t_n), где $k \leq n$.

Доказательство. Каждые HOK (t_1, ... ,t_n) тактов начиная с максимального предпериода входной набор повторяется. Отсчитаем n раз этот HOK (t_1, ... ,t_n), получим n+1 момент времени. Тогда (по принципу Дирихле) найдется 2 момента с одинаковым состоянием. Разница между ними есть величина $k * HOK$ (t_1, ... ,t_n), где $k \leq n$. Отсюда, если q-состояние и входной набор совпадают, то прошли целый период.

Замечание. Данная теорема используется при доказательстве следующего факта: класс ограниченно-детерменированных функций не содержит конечной системы функций, полной относительно операций суперпозиции Σ.

0.35 Билет 9. Критерий Маркова однозначности алфавитного кодирования

Понятие алфавитного кодирования. Свойство взаимной однозначности кодов. Формулировка и доказательство критерий Маркова взаимной однозначности алфавитного кодирования.

Определение 1. Пусть A, B — конечные непустые алфавиты. Рассмотрим отображение $f : A \to B^*$, которое называется *схемой алфавитного кодирования*. B^* — множество слов в алфавите B.

$f(a_1), f(a_2), ...f(a_n)$ — это слова, которые называются *элементарными кодами*. Множество элементарных кодов называется *кодом*.

По схеме алфавитного кодирования можно определить функцию алфавитного кодирования следующим образом:

$$\hat{f} : A^* \to B^* : \hat{f}(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_s}) = f(a_{i_1}), f(a_{i_2}) \dots f(a_{i_s}).$$

Алфавитное кодирование осуществляется побуквенно, то есть каждая буква в слове кодируется своим элементарным кодом и последовательно приписывается друг к другу.

Свойство взаимной однозначности кодов

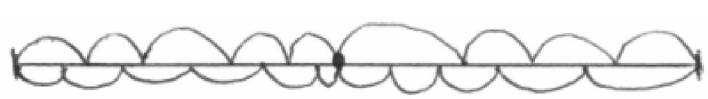
Определение 2. Если разные слова переходят в разные слова при кодировании, то тогда говорим, что такое кодирование обладает *свойством взаимной однозначности*, то есть:

$$\forall \alpha, \beta \in A^*, \text{ таких что } \alpha \neq \beta \Rightarrow \hat{f}(\alpha) = \hat{f}(\beta).$$

Формулировка и доказательство теоремы Маркова

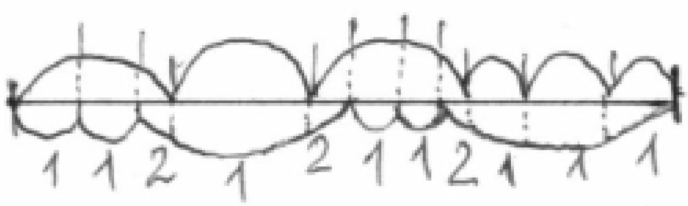
Пусть $|A| = r$, $L = \sum\limits_{i=1}^{r} |f(a_i)|$ — длина схемы (сумма длин элементарных кодов в схеме кодирования), W — максимальное число вхождений подряд элементарных кодов в элементарный код.
Теорема. Функция алфавитного кодирования $\hat{f}$ взаимно-однозначна тогда и только тогда, когда она взаимно-однозначна на словах длины, не превосходящей величины $N =]\frac{(L-r+2)(W+1)}{2}[$.

Доказательство. Основная идея. Предположим, что у функции $\hat{f}$ есть *склейка*, то есть какая-то пара различных слов имеет одинаковый образ: $\hat{f}(\alpha) = \hat{f}(\beta), \alpha \neq \beta$. Тогда можем утверждать, что найдется склейка на словах длины не больше N. Таким образом, если мы склейку должны найти, то мы ее найдем на словах длины не больше N. А если у $\hat{f}$ не существует склейки, то ее не существует и на словах длины не больше N. Покажем, что можно найти склейку на словах длины не больше N, если, конечно, она существует.
Шаг 1. (неприводимость) Рассмотрим произвольную склейку.



Сверху рисуем образ первого слова, снизу — образ второго слова. Эти образы совпадают, в итоге получается слово в выходном алфавите B. Если где-то точки границ верхнего разбиения (первое слово) совпадают с точками границ нижнего (второе слово), то тогда это слово обрежем и можно рассматривать только левую или только правую часть. Очевидно, что хотя бы в левой или правой части, эти верхнее и нижнее разбиения будут отличаться, потому что это было так для исходных разбиений. Тем самым, мы получили новую склейку, сократив ее длину. Таким образом, можем считать, что у нашей склейки нет общих точек верхнего и нижнего разбиния. Такие разбиения называются *неприводимыми*.

Шаг 2. (измельчение и деление на куски 1 и 2 типа)

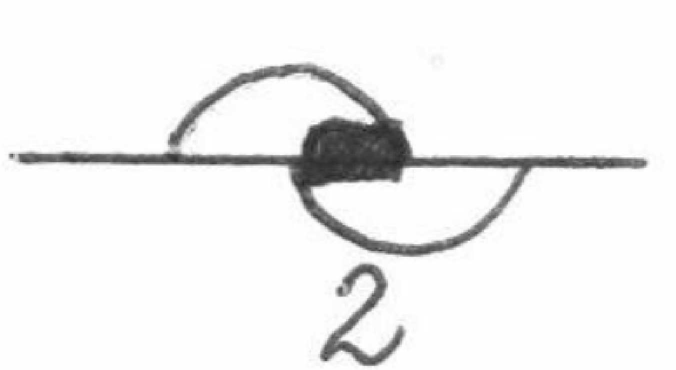


Рассмотрим точки измельчения сверху и снизу на границе. Они разбивают нашу склейку на куски двух типов:

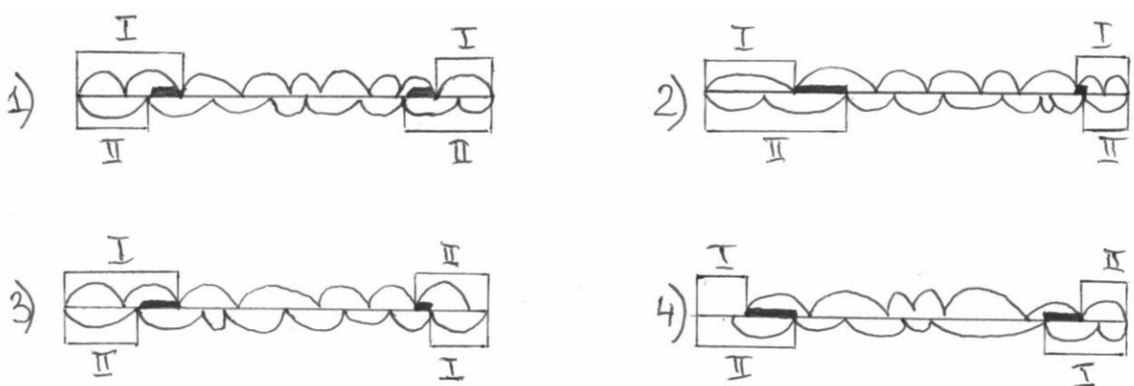
1. такой кусок, который является элементарным кодом хотя бы одного из разбиений.

2. все остальные куски.

Отдельно показано, как образован кусок 2 типа:



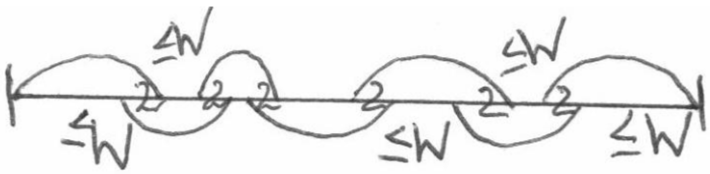
Шаг 3. (склеивание одинаковых кусков 2 типа)
Покажем, что все куски 2 типа встречаются только 1 раз. Для этого покажем, что если нашлись два таких одинаковых куска, то можно сделать склейку более короткой, избавившись от некоторой части этого слова так, что в новой склейке уже не будет этих 2 кусочков.
Существуют 4 варианта, как эти куски могут быть образованы:



Рассматриваем исходное слово и выкидываем из него кусок, который находится между повторяющимися словами 2 типа. А также отбрасываем один кусок 2 типа из этих двух. Тогда оставшаяся часть слова разбивается 2 разными способами на элементарные коды. В первом случае проходим сверху в одном блоке, потом во втором. Затем снизу. Аналогичная ситуация во втором случае. Третий случай (в котором наблюдаем перекрест). Выкидываем середину. Потом идем сверху одного блока, а затем снизу другого блока. Другой способ идти сначала снизу одного блока, а затем сверху другого блока. Получили новую склейку. Аналогичная ситуация в четвертом случае. Таким образом, нам удалось добиться, что куски 2 типа не повторяются.

Шаг 4.(оценка) Нужно оценить количество кусков 2 типа. Так как они не повторяются, значит их количество не больше

$$(L-r) = (l(A_1)-1) + \ldots (l(A_r)-1).$$

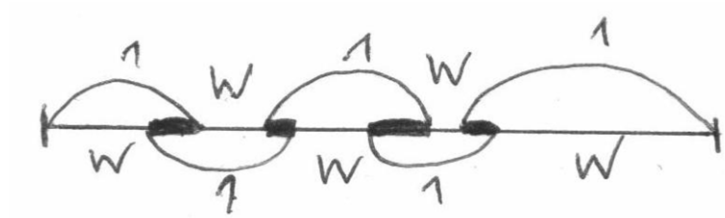


Количество вхождений элементарных кодов подряд не больше W. Отсюда видно, что можно написать некоторую оценку на количество кусочков в верхнем или нижнем разбиении. Полученная оценка – это и есть оценка на длину слов склейки входных слов, потому что каждая входная буква образует в образе элементарный код. Задача состоит в том, что нужно доказать, что в верхнем и нижнем разбиении не больше N элементарных кодов. Возможны 2 варианта.

1 вариант: (четное количество кусков 2 типа, на картинке закрашены черным)

Куски идут сверху вниз, вверх вниз ... и заканчиваются сверху. Оцениваем в 1 случае количество кусков сверху: замечаем, что идет чередование 1 и W. Сверху кусков не больше:

$$(1+W)\frac{(L-r)}{2} + 1 \leq (1+W)\left(\frac{(L-r)}{2}+1\right) \leq]\frac{(L-r+2)(W+1)}{2}[.$$



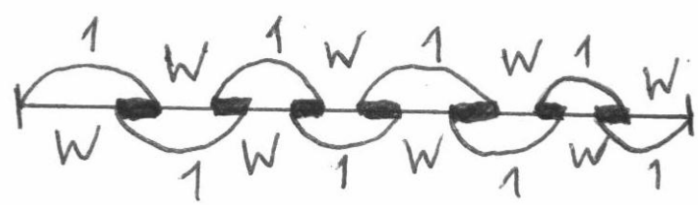
Снизу кусков не больше:

$$(1+W)\frac{(L-r)}{2} + W \leq (1+W)\left(\frac{(L-r)}{2}+1\right) \leq]\frac{(L-r+2)(W+1)}{2}[.$$

2 вариант. (нечетное количество кусков 2 типа, на картинке закрашены черным) Куски идут сверху вниз, вверх вниз ... заканчиваются снизу.

Оцениваем сверху и снизу. Получаем, что количество кусков не больше

$$(1+W)\frac{(L-r+1)}{2} \leq (1+W)\frac{(L-r+2)}{2}.$$



И все это не превосходит числа N.
Теорема доказана.

0.36 Билет 10. Теорема Журавлева о дизъюнктивных нормальных формах типа сумма тупиковых

Дизъюнктивные нормальные формы. Задача минимизации дизъюнктивных нормальных форм. Геометрическая интерпретация задачи минимизации дизъюнктивных нормальных форм. Тупиковые ДНФ. Формулировка и доказательство теоремы Журавлева о дизъюнктивных нормальных формах типа сумма тупиковых.

Определение 1. Произведение переменных

$$x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_s}^{a_s},$$

возможно с отрицаниями, называется *элементарной конъюнкцией*, при этом переменные не должны повторяться и переменная не должна входить со своим отрицанием, иначе это бы был тождественный нуль.

Определение 2. *n-мерный булев куб B^n* — это неориентированный граф с вершинами из E_2^n (то есть наборы из 0 и 1 длины n) и ребрами, соединяющими соседние наборы (то есть наборы, отличающиеся ровно в одной компоненте).

Определение 3. *Носитель* — это множество таких наборов, на которых данная функция равна 1. Носитель обозначается через N_f.

Определение 4. Носитель элементарной конъюнкции — это *грань* в n-мерном булевом кубе.

Определение 5. *ДНФ* — это дизъюнкция некоторых элементарных конъюнкций (ЭК).

Замечание. Одну и ту же функцию можно задать разными ДНФ. Обратное неверно. Любая ДНФ задает единственную функцию.

Определение 6. *Сложностью ДНФ* называется количество переменных в ней с учетом кратности.

Также сложностью ДНФ еще можно называть количество в ней ЭК или отрицаний. В этом билете под сложность ДНФ мы будем понимать количество вхождений переменных в эту ДНФ с учетом кратности.

Определение 7. *Минимальная ДНФ* для заданного N_f, совпадающего с этой ДНФ, — это такая ДНФ, соответсвующая этому носителю, сложность которой минимальна.

Определение 8. *Максимальная грань* в носителе N_f — это такая грань в N_f, из которой нельзя выкинуть переменные так, чтобы остаться в N_f, то есть ее нельзя расширить ни до какой любой грани в этом носителе.

Определение 9. *Тупиковая ДНФ* — это такая ДНФ, задающая N_f, которая состоит из максимальных граней в этом носителе, при этом из этой ДНФ нельзя выкинуть никакую из граней.

Определение 10. *Сокращенная ДНФ* — это такая ДНФ, задающая N_f, которая состоит из всех максимальных граней в этом носителе.

Определение 11. *Кратчайшая ДНФ* — это ДНФ, имеющая минимальное количество граней среди всех ДНФ, задающих данную функцию.

Заметим, что любая минимальная ДНФ является подмножеством сокращенной ДНФ и обязательно является тупиковой ДНФ.

Если минимальная ДНФ не является подмножеством сокращенной, то в ней есть какая-либо грань, не являющаяся максимальной. Это означает, что мы можем заменить эту грань на большую, а если грань больше, то количество переменных в конъюнкции, задающей эту грань, будет меньше. Это значит, что сложность уменьшится. Это противоречит минимальности ДНФ. Минимальная ДНФ является тупиковой в силу того, что мы не можем выкинуть какую-либо грань, не изменив носитель, поскольку в таком случае уменьшилась бы сложность.

Задача минимизации ДНФ

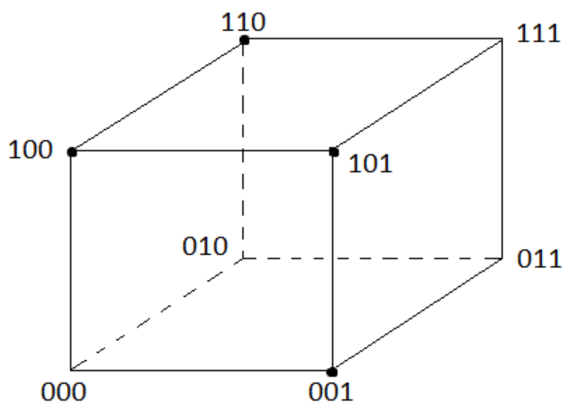
Задача минимизации ДНФ — для данной функции f и ее носителя N_f найти ДНФ с минимальной сложностью.

Задача может иметь несколько ответов в случае, если минимальные ДНФ имеют одинаковую сложность.

Геометрическая интерпретация задачи минимизации ДНФ

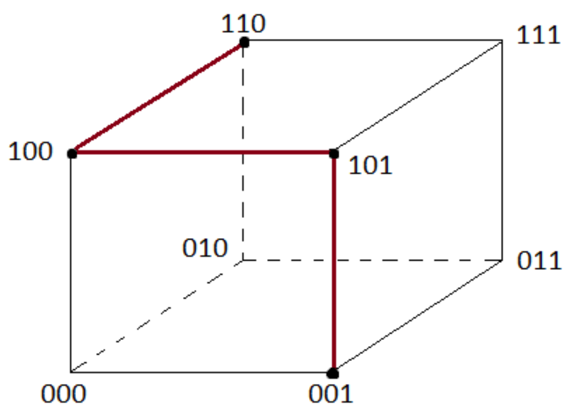
Носитель функции N_f — подмножество вершин куба. Задача состоит в том, чтобы накрыть эти вершины максимальными гранями.

Пример.

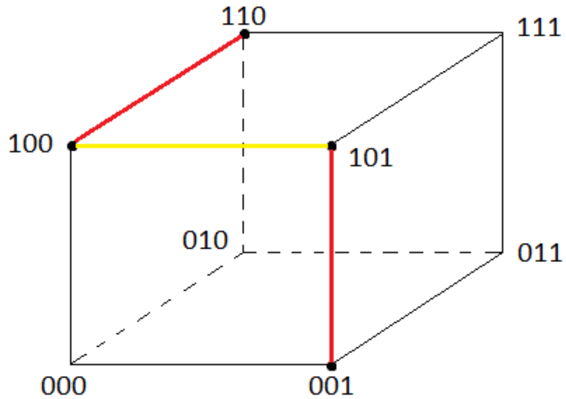


Носитель N_f — вершины куба 001, 101, 100, 110. На этих вершинах функция принимает значение 1, на остальных — 0. Нужно найти минимальную ДНФ данной функции.

ДНФ — объединение некоторых граней в данном кубе, лежащих в носителе. Минимальная ДНФ — ДНФ, состоящая только из максимальных граней. В данном примере максимальными гранями являются $x_1\ \bar{x_3}$, $x_1\ \bar{x_2}$, $\bar{x_2}\ x_3$.



Ясно, что грани $x_1\ \bar{x_3}$ и $\bar{x_2}\ x_3$ точно войдут в минимальную ДНФ, поскольку только эти грани накрывают вершины 110 и 001. Грань $x_1\ \bar{x_2}$ не войдет в минимальную ДНФ, поскольку вершины, которые накрывает эта грань, уже накрыты двумя другими гранями.



Таким образом, минимальная ДНФ — $x_1 \bar{x_3} \vee \bar{x_2}\, x_3$.

Тупиковая ДНФ

См. определение 9.

Любая минимальная ДНФ является тупиковой.

Формулировка и доказательство Теоремы Журавлева о ДНФ типа сумма тупиковых

Определение 12. *ДНФ типа сумма тупиковых* — объединение всех граней внутри носителя, которые входят хотя бы в одну тупиковую ДНФ для данного носителя.

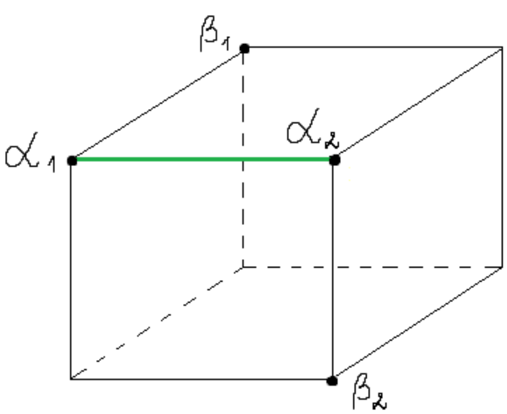
Определение 13. *Пучок* T_β граней Т через точку β из носителя N_f — это максимальные грани в носителе, проходящие через эту точку.

Определение 14. Точка $\alpha \in$ К $\subset N_f$ *регулярна в К*, если существует точка $\beta \in N_f \setminus$ К такая, что $T_\beta \subseteq T_\alpha$.

Определение 15. *Грань* является *регулярной* для данного носителя N_f тогда и только тогда, когда все точки регулярны в этой грани.

Теорема. Грань К $\subseteq N_f$ входят в ДНФ типа сумма тупиковых тогда и только тогда, когда эта грань не является регулярной.

Пример.



Рассмотрим выделенную грань и точку α_1. Покажем, что точка α_1 регулярна в рассматриваемой грани. Действительно, для точки α_1 найдется точка β_1 такая, что любая грань из носителя, которая проходит через нее, проходит и через α_1.

Аналогично и для точки α_2 найдет точка β_2 такая, что любая грань из носителя, которая проходит через нее, проходит и через α_2. Отсюда следует, что точка α_2 регулярна в рассматриваемой грани.

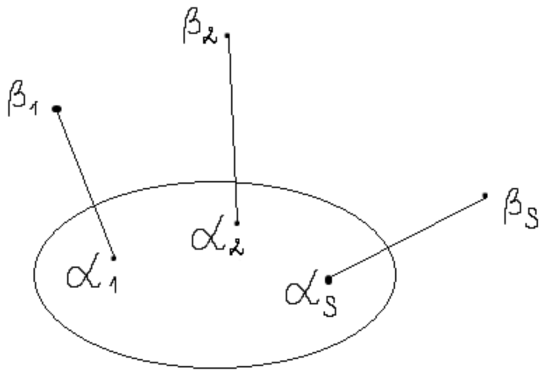
Таким образом, мы получили, что рассматриваемая грань регулярна. По теореме Журавлева данная грань не входит в ДНФ типа сумма тупиковых.

Определение 16. Максимальная грань К в носителе функции N_f называется ядровой, если в этой грани существует такая точка α, через которую проходит только данная грань К и никакая из других максимальных граней в носителе.

Доказательство теоремы Журавлева.

1. *Достаточность.* Пусть грань К регулярна внутри носителя, то есть для каждой точки α в этой грани найдется своя точка β не из этой грани, но внутри носителя, такая, что любая максимальная грань, проходящая через β, проходит и через соответствующую α. Покажем, что грань К не входит в ДНФ типа сумма тупиковых.

Обозначим через α_1, ... , α_s точки грани К.



От противного, предположим, что данная грань входит в какую-либо тупиковую ДНФ. В силу регулярности грани К, в этой тупиковой ДНФ есть грань, проходящая через β_1, что значит, что эта грань проходит и через α_1. Аналогично и для α_2, ... , α_s. Отсюда следует, что эти грани целиком накрывают рассматриваемую грань К, что значит, что ее можно выкинуть из тупиковой ДНФ. Пришли к противоречению, то есть рассматриваемая грань не входит в тупиковую ДНФ. ***Достаточность доказана.***

2. *Необходимость.* Пусть К – не регулярная грань. Докажем, что она входит в ДНФ типа сумма тупиковых.

Из определения нерегулярности грани следует, что существует $\alpha \in$ К такая, что для любого $\beta \in N_f \backslash$К существует грань $G_\beta \in T_\beta$ такая, что G_β проходит через точку β, но не проходит через точку α.

Возьмем объединение таких граней по всем $\beta \in N_f \backslash$К. Очевидно, что данное покрытие не содержит в себе грань К в силу выбора β.

Выберем из этого объединения тупиковое покрытие $N_f \backslash$К, а остальные грани удалим. Добавляем к получившемуся покрытию грань К и получаем тупиковую ДНФ, поскольку грань К проходила через α, через которую не проходили все остальные грани покрытия, то есть К лежит в ДНФ типа сумма тупиковых. ***Теорема доказана.***

0.37 Билет 11. Понятия плоского и планарного графов. Формула Эйлера. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$

Определение графа. Понятия плоского и планарного графов. Формула Эйлера для плоских графов. Доказательство непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$.

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение. **Графом** G называется пара (V, E), где V – конечное непустое множество и E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы V называются *вершинами* графа, элементы E – *ребрами.*

Определение. **Плоским графом** называется изображение графа на плоскости, причем вершинам графа сопоставлены точки на плоскости, а ребрам – кусочно гладкие линии, соединяющие соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме концевых вершин.

Определение. **Гранью** называется область, ограниченная ребрами в плоском графе и не содержащая внутри себя вершин и ребер графа. Одна из граней не ограничена и называется *внешней* гранью, а остальные – *внутренними* гранями. *Границей грани* будем считать множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

Определение. Граф называется *планарным*, если он представим в виде плоского графа.

Вспомогательное определение. Максимальный связный подграф в G называется *компонентой связности* графа G.

Вспомогательное определение. $G' \subseteq G$ является *остовным подграфом* в G, если $V' = V$.

Обозначение. K_5 – полный граф из 5 вершин, то есть между двумя любыми вершинами из множества вершин $V(K_5)$ существует ребро.

Обозначение. $K_{3,3}$ – полный двудольный граф, то есть множество вершин $V(K_{3,3})$ разбито на 2 класса по 3 вершины и каждые две вершины из разных классов соединены ребром, а вершины из одного и того же класса не соединены.

Лемма. В любом дереве T с n вершинами количество ребер равно $n - 1$.

Воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ тривиально. Пусть $n > 1$, $e \in E(T)$. В T нет циклов $\Rightarrow T - e$ имеет ровно две компоненты T_1 и T_2, каждая из которых есть дерево. Пусть T_i содержит n_i вершин и m_i ребер, $i = 1, 2$. По индуктивному предположению $m_i = n_i - 1$. Далее имеем:
$m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n - 1$.

Теорема.[Формула Эйлера] Для произвольного плоского связного графа G с n вершинами, m ребрами и f гранями справедливо:

$$n - m + f = 2.$$

Рассмотрим некоторое остовное дерево T графа G. В T n вершин, $n - 1$ ребро (по доказанной лемме) и одна грань (внешняя). Отсюда $n - (n - 1) + 1 = 2$, то есть формула верна. Будем поочередно добавлять к T недостающие ребра в G. В результате, на каждом шаге число вершин не меняется, число ребер увеличивается на 1, число граней так же увеличивается на 1, поскольку при соединении двух вершин ребром грань, на границе которой содержатся эти вершины, разбивается на две грани. Таким образом, для всех графов, получаемых при этой процедуре, в частности, и для G, формула остается верной.

Теорема.[Общая формула Эйлера] Для произвольного плоского графа G с n вершинами, m ребрами, f гранями и k компонентами связности справедливо:

$$n - m + f = 1 + k.$$

Рассмотрим каждую компоненту связности G_i, $i = 1, \dots, k$ и проведем доказательство, опираясь на теорему 1.

Теорема. K_5 непланарен.

От противного. Так как $n = 5$, $m = 10$, по формуле Эйлера для планарности K_5 должно быть $f = 7$. Каждое ребро принадлежит двум граням; всякая грань ограничена по крайней мере тремя ребрами. Значит, $2m \geq 3f$, то есть $20 \geq 21$. Противоречие.

Теорема. $K_{3,3}$ непланарен.

От противного. Так как $n = 6$, $m = 9$, по формуле Эйлера для планарности $K_{3,3}$ должно быть $f = 5$. Каждое ребро принадлежит двум граням; всякая грань ограничена по крайней мере четырьмя ребрами (двудольный граф не содержит нечетных циклов). Значит, $2m \geq 4f$, то есть $18 \geq 20$. Противоречие.

0.38 Билет 12. Оптимальность по порядку метода Шеннона синтеза схем из функциональных элементов.

Понятие схемы из функциональных элементов. Задача синтеза схем из функциональных элементов. Описание метода Шеннона синтеза схем из функциональных элементов и оценка его сложности. Совпадение по порядку оценки Шеннона с мощностной нижней оценкой.

Схема функциональных элементов (СФЭ). Сложность СФЭ.

Определение. Схемой из функциональных элементов с N входами и P выходами называется ориентированный граф без циклов, определенный над базисом $B \subseteq P_2$. N вершин графа называются входами, P вершин — выходами, остальные называются внутренними. Каждой внутренней вершине сопоставляется функция из множества B таким образом, что количество рёбер, входящих в вершину, должно быть равно арности функции, которая ей сопоставлена. Рёбра, входящие во внутреннюю вершину, пронумерованы от 1 до арности функции. Для входных вершин количество входящих рёбер равно нулю.

Определение. Множество всех схем из функциональных элементов обозначим как A.

Определение. Сложностью схемы $L : A \to \mathbb{N}$ назовём количество внутренних вершин.

Лемма. Любая СФЭ корректно задаёт булеву функцию по своему выходу.

Доказательство. Рассмотрим выходную вершину v. Из определения СФЭ следует, что существуют пути от входных вершин к v. Докажем лемму индукцией по длине наибольшего пути.

База. Длина наибольшего пути равна 1. Тогда выходной вершине соответствует один вход x_i. Выходная вершина задаёт функцию x_i.

Переход индукции. Длина наибольшего пути равна n. Преподоложим, что мы вычислили функции по всем путям, у которых длина менее, чем $n-1$. Тогда в v идёт ребро из внутренней вершины u, которой соответствует функция из базиса B. По определению СФЭ, количество рёбер входящих в u равно арности функции. Но длина путей до этой вершины менее, чем $n-1$, следовательно, функции соответствующие этим путям вычислены. Подставим их в аргументы функции, соответствующей вершине u и получим новую функцию, которая соответствует выходной вершине v.

Таким образом, каждой выходной вершине СФЭ соответствует функция из $P_2(n)$.

Определение. Будем говорить, что СФЭ S реализует функцию $f \in P_2$, если у S существует выходная вершина, которой соответствует функция f. Обозначим это как $S \to f$.

Задача синтеза. Функция Шеннона. Далее будем считать, что $B = \{\wedge, \vee, \neg\}$.

Пусть дана некоторая функция $f \in P_2$. Задачей синтеза является построение схемы минимальной сложности функциональных элементов над вышеупомянутым базисом, реализующую функцию f.

Определение. Функцией Шеннона называется функция

$$L_{\text{Ш}}(n) = \max_{f \in P_2^n} \min_{S \to f} L(S).$$

Верхняя оценка функции Шеннона

Определение. $f(x) \lesssim g(x)$, если $\exists x_0$, такое, что

$$\forall x \geq x_0 : f(x) \leq g(x).$$

Утверждение. $L_{\text{Ш}}(n) \lesssim 9 \cdot \frac{2^n}{n}$.

Доказательство. Любую функцию от n переменных можно представить в виде

$$f(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, ..., \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \cdot ... \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, ..., \sigma_k, x_{k+1}, ..., x_n) \quad (*).$$

Реализуем такую функцию в виде схемы из функциональных элементов в три шага.

Шаг 1. Универсальный конъюнктор. **Определение**. Универсальным конъюнктором V_k называется СФЭ, которая реализует всевозможные конъюнкции длины k. То есть СФЭ с k входными вершинами, 2^k выходными вершинами, где каждой выходной вершине сопоставлена конъюнкция вида $x_1^{\sigma_1} ... x_k^{\sigma_k}, \sigma_i \in \{0, 1\}$.

Докажем, что можно собрать универсальный конъюнктор, для которого $L(V_k) \leq 2 \cdot 2^k + k - 4$. Доказательство по индукции.

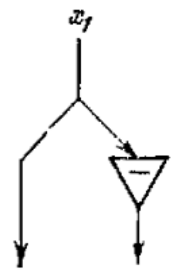


Рис. 1: Универсальный конъюнктор при $k = 1$

База: $k = 1$. Необходимо собрать СФЭ, которая реализует функции x и $\bar{x}$ со сложностью $L(V_1) \leq 2{\cdot}2^1{+}1{-}4 = 1$.

Необходимая СФЭ представлена на Рис.1. В данной схеме только одной вершине соответствует функция из базиса B, следовательно, сложность схемы равна 1.

Переход индукции. Предположим, что СФЭ V_{n-1} собрана. Соберем СФЭ при n. Любая конъюнкция из n переменных имеет вид: $x_1^{\sigma_1}...x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \wedge x_n$ или $x_1^{\sigma_1}...x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \wedge \bar{x}_n$. Но все конъюнкции длины $n-1$ реализованы в V_{n-1}. Тогда введём новый вход x_n и подключим его к каждой конъюнкции из V_{n-1}, для этого нам потребуется дополнительно 2^{n-1} конъюнкций из базиса B. Аналогично сделаем с $\bar{x}_n$. Для этого нам потребуется ещё 2^{n-1} конъюнкций и одно отрицание.

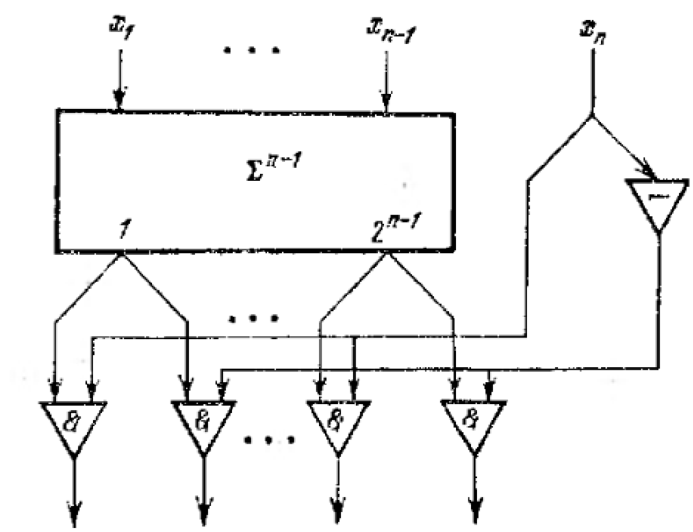


Рис. 2: Универсальный конъюнктор V_n, полученный из V_{n-1}

Посчитаем сложность получившейся СФЭ.

$$L(V_n) = L(V_{n-1}) + 1 + 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2 \cdot 2^{n-1} + n - 1 - 4 + 1 + 2 \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot 2^n + n - 4.$$

Универсальный конъюнктор с требуемой сложностью построен.

Шаг 2. Универсальный многополюсник.

Определение. Универсальным многополюсником U_n называется СФЭ, которая реализует все булевы функции от n переменных.

Докажем, что можно собрать универсальный многополюсник, для которого $L(U_n) \leq 2 \cdot 2^{2^n}$. Доказательство по индукции.

База: $n = 1$. Необходимо собрать СФЭ, которая реализует все функции от одной переменной со сложностью $L(U_1) \leq 2 \cdot 2^2 = 8$.

Необходимая СФЭ представлена на Рис. 3. В данной СФЭ трём вершинам сопоставлены функции из базиса B, следовательно, сложность это схемы равна $3 \leq 8$. Необходимая сложность достигнута.

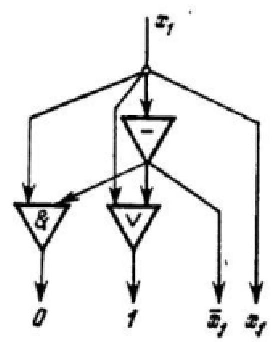


Рис. 3: Универсальный многополюсник при $n = 1$

Переход индукции. Предположим, что СФЭ U_{n-1} построена. Построим U_n. Для этого воспользуемся следующей формулой

$$f(x_1, ..., x_n) = x_n \cdot f_1(x_1, ..., x_{n-1}) \vee \bar{x}_n \cdot f_2(x_1, ..., x_{n-1}).$$

Рассмотрим три случая:

1. $f_1 = f_2 \equiv 0 \implies f \equiv 0.$
2. $f_1 \equiv 0, f_2 \not\equiv 0$ или $f_1 \not\equiv 0, f_2 \equiv 0$. В этом случае f_i можно выбрать $2^{2^{n-1}} - 1$ способами.
3. $f_1 \not\equiv 0, f_2 \not\equiv 0$. Все оставшиеся функции, их количество равно $2^{2^n} - 2 \cdot (2^{2^{n-1}} - 1) - 1$.

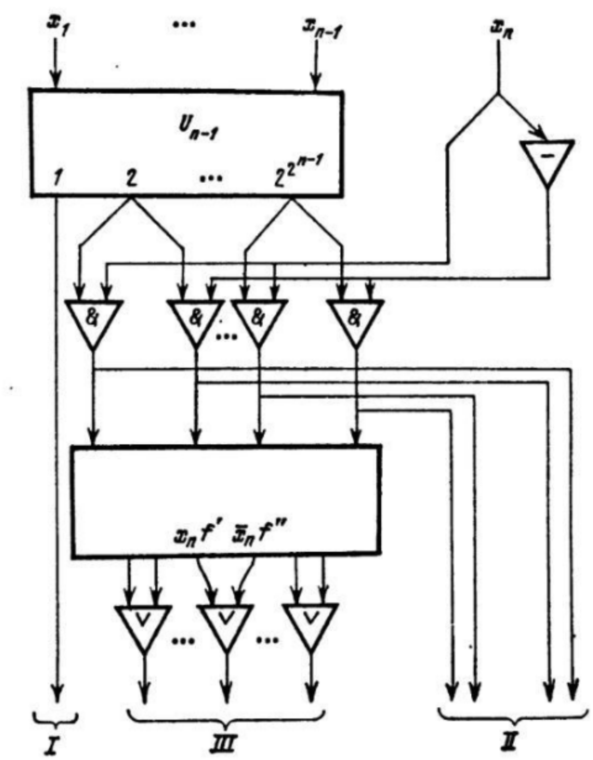


Рис. 4: Универсальный многополюсник U_n

На основании предыдущего рассуждения, булевы функции от n переменных можно разделить на 3 класса. На Рис 4. изображена U_n, полученная из U_{n-1}, следующим образом:

1. Единственной функцией из первого класса является тождественный ноль и, так как он имеется на выходе U_{n-1}, по предположению индукции, то протянем его к выходу новой СФЭ.

2. Для того чтобы получить функции второго класса, соединим все выходы U_{n-1}, кроме тождественного нуля, с конъюнкциями, а на второй вход для конънкций подадим x_n. Аналогично сделаем с $\bar{x}_n$, для этого дополнительно потребуется одна вершина с отрицанием. Мы получили все функции из второго класса, подключим каждую из них к выходным вершинам.

3. Для того чтобы получить функции из третьего класса, возьмем все функции полученные из второго класса и попарно соединим их дизъюнкциями.

Сложность получившейся схемы

$$L(U_n) = L(U_{n-1}) + 1 + 2 \cdot (2^{2^{n-1}} - 1) + 2^{2^n} - 2 \cdot (2^{2^{n-1}} - 1) - 1 \leq$$

$$\leq 2 \cdot 2^{2^{n-1}} + 1 + 2 \cdot 2^{2^{n-1}} - 2 + 2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^{n-1}} + 2 - 1 = 2^{2^n} + 2 \cdot 2^{2^{n-1}} \leq 2 \cdot 2^{2^n}.$$

Шаг 3. СФЭ реализующая формулу (*). Для этого нам потребуется V_k, U_{n-k}, 2^k конъюнкций и $2^k - 1$ дизъюнкций. Оценим сложность.

$$L(f) \leq L(V_k) + L(U_{n-k}) + 2^k + (2^k - 1) \leq$$

$$\leq 2^{k+1} + k - 4 + 2 \cdot 2^{2^{n-k}} - 1 = 2^{k+2} + 2 \cdot 2^{2^{n-k}} + k - 5.$$

В качестве k возьмём число $n - [\log_2(n - 2 \cdot \log_2 n)]$.

$$n - k \leq [\log_2(n - 2 \cdot \log_2 n)] \implies 2 \cdot 2^{2^{n-k}} \leq 2 \cdot 2^{n - 2 \cdot \log_2 n} = 2 \cdot \frac{2^n}{n^2}.$$

$$k \leq n - \log_2(n - 2 \cdot \log_2 n) + 1 \implies 2^{k+2} \leq 4 \cdot \frac{2^{n+1}}{n - 2 \cdot \log_2 n}.$$

$$L(S_*) \leq 2^{k+2} + 2 \cdot 2^{2^{n-k}} + k - 5 \leq 2 \cdot \frac{2^n}{n^2} + 8 \cdot \frac{2^n}{n - 2 \cdot \log_2 n} + k - 5 \lesssim 9 \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Нижняя мощностная оценка функции Шеннона

Определение. $f(x) \gtrsim g(x)$, если $\exists x_0$, такое, что

$$\forall x \geq x_0 : f(x) \geq g(x).$$

Утверждение. $L_{\text{Ш}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$.

Доказательство. Идея доказательства: посчитаем количество различных схем сложности не более, чем $\frac{2^n}{n}$ и убедимся, что таких схем меньше, чем количество всех функций от n переменных, что будет означать, что какую-то функцию от n переменных задать схемой такой сложности не получится. Следовательно, найдется функция от n переменных, у которой сложность минимальной схемы больше, чем $\frac{2^n}{n}$.

Пусть $S_0(n, 1, h)$ — это количество минимальных схем функциональных элементов, у которых n входов, 1 выход и сложность h.

$S(n, 1, h)$ — это количество минимальных схем функциональных элементов, у которых n входов, 1 выход и сложность не превосходит h.

Наблюдение: в каждой схеме, которая входит в S_0, пронумеруем внутренние вершины числами от 1 до h. Получим нумрованную схему. Количество различных нумерованных схем оценивается сверху как $h! \cdot S_0(n, 1, h)$. Заметим, что чтобы задать занумерованную схему, нужно в каждой вершине сопоставить функцию из базиса B. Это можно сделать тремя способами, соответствено, количество способов задать функции на вершинах 3^h. Дальше нужно соединить вершины проводами. Эти провода могут идти либо в другие внутренние вершины, либо во входные вершины. Вариантов выбрать вершину $(n+h)$ штук. Так как к каждой вершине можно подключить максимум два провода, то есть вариантов на каждый узел схемы $(n + h)^2$. Всего узлов в схеме h штук, то есть всего вариантов протянуть проводки по узлам схем $(n+h)^{2h}$. Также есть $n+h$ способов выбрать выходную вершину. Следовательно, количество способов построить занумерованную схему сложности h не превосходит $3^h \cdot (n+h)^{2h} \cdot (n+h)$.

Таким образом, для S_0 верна оценка $S_0(n,1,h) \leq \frac{\cdot 3^h \cdot (n+h)^{2h+1}}{h!}$. Оценим сверху $S(n,1,h)$.

$$S(n,1,h) \leq \sum_{i=0}^{h} \frac{1}{i!} \cdot 3^h \cdot (n+i)^{2i+1} \leq (h+1)\frac{1}{h!} \cdot 3^h \cdot (n+h)^{2h+1} \leq$$

$$\leq (h+n)\frac{1}{h!} \cdot 3^h \cdot (n+h)^{2h+1} \leq \frac{1}{h!} \cdot 3^h \cdot (n+h)^{2h+2}.$$

В качестве h возьмём $[\frac{2^n}{n}]$, и покажем, что число схем с не более чем такой сложностью, меньше, чем количество функций от n переменных.

При $n \to \infty$, начиная с некоторого момента, $h > n$, поэтому n можно заменить на h в оценке $\frac{1}{h!} \cdot 3^h \cdot (n+h)^{2h+2}$. Получим $(2h)^{2h+2}$. Продолжим оценивать сверху, для этого знаменатель $h!$ оценим снизу и воспользуемся известной оценкой $h! \geq (\frac{h}{e})^h$.

$$S(n,1,h) \lesssim (\frac{3e}{h})^h \cdot (2h)^{2h+2} = 4h^2 \cdot (\frac{3e}{h})^h \cdot (4h^2)^h = 4h^2 \cdot (12eh)^h.$$

Далее можно найти такое число c, что, начиная с какого-то n_0, неравенство асимптотически можно оценить как $(ch)^h$ при $h \to \infty$.

То есть $4h^2 \cdot (12eh)^h \lesssim (ch)^h$, потому что $4h^2$ можно заменить на 2^h, так как асимптотически экспонента растёт быстрее полинома.

Докажем, что при $n \to \infty$ верно $(ch)^h < 2^{2^h}$. Прологарифмируем данное неравенство:

$$\log_2((ch)^h) = h \cdot \log_2(ch) \leqslant \frac{2^n}{n} \cdot (\log_2 c + \log_2 h) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^n}{n} \cdot (\log_2 c + n - \log_2 n) = 2^n + \frac{2^n}{n} \cdot (\log_2 c - \log_2 n) < 2^n.$$

Последний переход верен, так как $c < n$.

При $h \to \infty$ верно неравенство $(ch)^h < 2^{2^n}$, то есть схем сложности не более, чем h меньше, чем функций в $P_2(n)$. Следовательно, $h = [\frac{2^n}{n}]$ не хватает для $P_2(n)$, то есть $L_{\text{Ш}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$.

0.39 Билет 13. Моделирование зрительного восприятия. Теорема Козлова об аффинной эквивалентности изображений.

Задача распознавания образов. Моделирование зрительного восприятия. Кодирование изображений. Формулировка и доказательство теоремы Козлова об аффинной эквивалентности изображений.

Задача распознавания образов

Имеется несколько изображений, принадлежащих к некоторым классам. Например, есть картинки с цифрами и надо отнести их к одному из классов «0», ..., «9».

Пример. Изображение выше относится к классу «2».

Моделирование зрительного восприятия

Определение №1: Конечное множество точек на плоскости — *изображение.*

Определение №2: Любое аффинное преобразование представимо в виде комбинации операций поворота, растяжения(сжатия), отражения и сдвига.

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A является матрицей поворота.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} a_{i,j} \in \mathbb{R}, \text{ при } \Delta A \neq 0.$$

Поворот

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица B является матрицей сдвига

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Растяжение вдоль оси

$$A = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}.$$

Отражение

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ что означает следующее } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

Определение №3: Три точки плоскости, которые не лежат на одной прямой, называются *точками общего положения.*

Утверждение №1: Афинное преобразование однозначно задается тройкой точек общего положения и тройкой их образов, не лежащих на одной прямой.

Доказательство: Произвольный треугольник можно афинными преобразованиями перевести в равносторонний. Опустим высоту из любой вершины треугольника. Растянем(или сожмем) его вдоль этой высоты так, чтобы он стал равнобедренным. Затем повернем его так, чтобы основание стало параллельно оси абсцисс. Теперь сожмем(или растяням) его вдоль оси ординат, пока он не станет равносторонним. Очевидно, любые два равносторонних треугольника афинно экваваленты, что и доказывает теорему.

Кодирование изображений и доказательство теоремы Козлова об аффинной эквивалентности изображений

Определение №4: Изображение назовем *плоским*, если все его точки не лежат на одной прямой или двух параллельных прямых.

Пронумеруем точки изображения. Для всех пар троек номеров возьмем отношения площадей соответствующих треугольников. Полагаем, что отношения с 0 в знаменателе не определены.

Определение №5: Множество таких отношений при заданной нумерации назовем *кодом Козлова.*

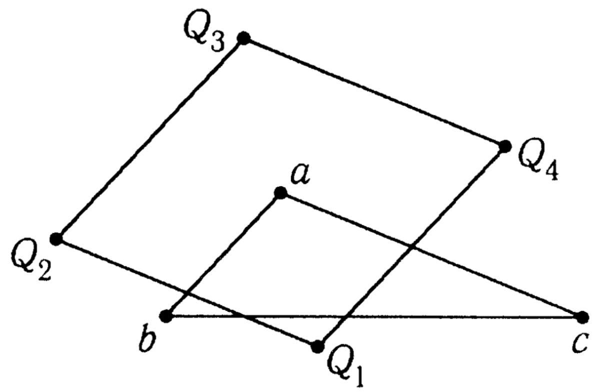
Определение №6: Два изображения *экваваленты по Козлову*, если существуют такие нумерации их точек, что их коды Козлова в точности совпадают.

Лемма №1: *Если изображения афинно эквивалентны, то они экваваленты по Козлову.*
Доказательство Любое афинное преобразование представимо в виде композиции операций поворота, сдвига, отражения и сжатия(растяжения). Первые три операции, очевидно не меняют площадей треугольников и, следовательно, код Козлова не меняется. Пусть происходит сжатие(растяжение). Площади всех треугольников изменяются в $k_x k_y$ раз, а значит отношения тоже не меняются. Лемма доказана.

Лемма №2: *Если по коду плоского изображения выбраны какие-либо его три точки, не лежащие на одной прямой, и задано пложение этих точек на плоскости(но не на одной прямой), то положение остальных точек однозначно определяется по коду Козлова.*

Доказательство

Пусть дано плоское изображение A и заданы точки a, b и c, не лежащие на одной прямой, и надо определить положение точки x. Площадь треугольника abc нам известна. Из кода Козлова выберем следующие отношения: S_{abx}/S_{abc}, S_{acx}/S_{abc}, S_{bcx}/S_{abc}. Из них находим длины высот h_{ab},h_{ac},h_{bc}, опущенных из точки x на стороны ab, ac, bc соответственно. В итоге задача свелась к построению по заданному треугольнику abc точки x такой, что высоты, из нее опущенные на стороны ab, bc, ac равны h_{ab},h_{ac},h_{bc}. Проведем две прямые, параллельные стороне ab и отстоящие от нее на величину h_{ab}, и две прямые, параллельные стороне ac и отстоящие от нее на величину h_{ac}.



Получился параллелограмм, вершины которого на рисунке выше обозначены как Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Точка x может располагаться только в вершинах этого параллелограмма.

От противного, пусть для точки x возможны два разных положения x' и x''. Тогда, в сущности, возможны два случая:

1. Точки x' и x'' — вершины параллелограмма, соединенные стороной. Без ограничения общности, пусть это будут точки Q_1 и Q_2. Они должны быть равноудалены и от третьей стороны треугольника, bc. Тогда либо отрезок Q_1Q_2 параллелен bc, либо bc проходит через середину Q_1Q_2. Первое противоречиво, так как отрезок Q_1Q_2 параллелен ac. Середина Q_1Q_2 лежит на прямой ab, и, значит, это точка b. Тогда a, b, c, x лежат на двух параллельных прямых, и, так как изображение A плоское, то существует другая точка, d, не лежащая на них. Тогда либо отрезок Q_1Q_2 параллелен отрезку da, либо точка b лежит на ad. Первое невозможно, так как тогда d лежит на ac. Во втором случае, так как точка b, аналогично, должна лежать еще и на dc, то она совпадает с d, что противоречит выбору точки d.

2. Точки x' и x'' — вершины параллелограмма, соединенные диагональю. Без ограничения общности, пусть это будут точки точки Q_2 и Q_4. Чтобы концы отрезка Q_2Q_4 были равноудалены от стороны bc, он должен либо делиться ей пополам, либо быть ей параллельным. В первом случае получается, что точка a лежит на bc, что противоречит выбору точек a, b и c. Во втором случае точки a, b, c и x лежат на двух параллельных прямых — Q_2Q_4 и bc. Так как изображение A плоское, то существует другая точка, d, не лежащая на них. Тогда либо отрезок Q_2Q_4 параллелен отрезку db, либо точка a лежит на bd. Первое невозможно, так как тогда d лежит на bc. Во втором случае, так как точка a, аналогично, дожна лежать еще и на dc, то она совпадает с d, что противоречит выбору точки d. Лемма доказана.

Основная теорема(Козлова). *Плоские изображения экваваленты по Козлову тогда и только тогда, когда они афинно экваваленты.*

Доказательство

В одну сторону теорема следует из леммы 1.

Покажем, что если плоские изображения A и B эквивалентны по Козлову, то они афинно экваваленты. Возьмем из A три точки a, b и c, не лежащие на одной прямой. Этим точкам поставлены в соответствие некоторые точки a', b', c' изображения B. Афинным преобразованием совместим точки a', b' и c' и с точками a, b, c. Поскольку положение остальных точек изображения B при заданных точках a', b', c' определяется, согласно лемме 2, однозначно, то они совпадут с точками изображения A. Теорема доказана.

0.40 Билет 14. Персептрон Розенблатта. Теорема Новикова.

Модель формального нейрона. Простейшая нейронная сеть – персептрон Розенблатта. Формулировка и доказательство теоремы Новикова об обучении персептрона Розенблатта.

Модель персептрона Розенблатта.

В 1943 году американскими учеными Маккаллоком и Питтсом была предложена формальная модель нейрона – живой клетки которая, различая по заряду цитоплазмы, может находиться в двух состояниях: покоя и возбуждения. Аксоны одних клеток соединены с дендритами других. Текущее состояние нейрона зависит от состояния аксонов соединенных с ним других нейронов и чувствительности дендритов.

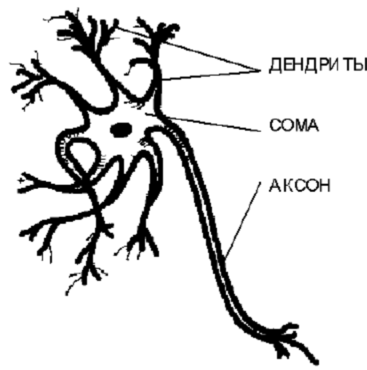


Рис. 5: Общая схема строения биологического нейрона

Основываясь на этой модели, нейрона в 1957 году Розенблатт (F. Rosenblatt)предложил модель персептрона (PERCEPTRON), одну из первых искус-ственных сетей, способных к перцепции (восприятию) и формированию реакции на воспринятый стимул.

Это физическое устройство, состоящее из трех слоев:

• рецепторный слой - 20x20 фотоэлементов

• передающий слой – 512 нейронов, каждый из которых имеет 10 входов, случайно соединенных с элементами рецепторного слоя, причем для каждого j = 1, 2, ..., 512 верно, что

$$y_j = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{10} x_{ji} \geqslant 5 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где x_{ji} входы j-ого элемента передающего слоя

• решающий элемент, принимающий значение

$$z = F(y_1, y_2, ..., y_{512}) = \begin{cases} 1, & \bar{a} \cdot \bar{y} > c \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{35}$$

где $\bar{a}$ - весовой вектор решающего элемента, c - пороговое число.

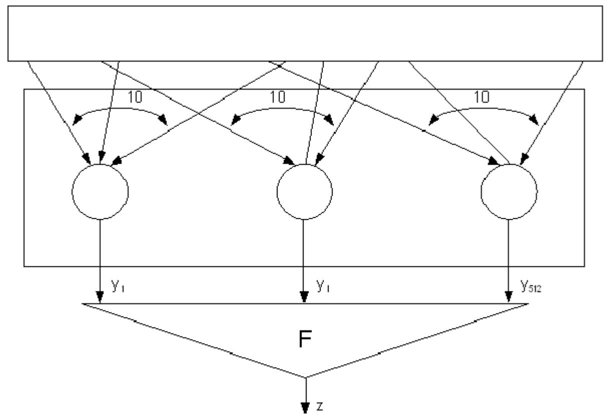


Рис. 6: Персептрон Розенблатта

Схема соединения нейронов фиксирована и не может изменяться в процессе обучения, а дендриты нейронов могут менять чувствительность. То есть в процессе обучения персептрона можно менять весовой вектор $\bar{a}$ и порог c.

В данной схеме образ подается на рецепторный слой. Поскольку каждый элемент передающего слоя жестко связан с элементами рецепторного слоя, то на входе решающего элемента образ кодируется вектором длины, равной количеству элементов в передающем слое, в данном случае 512. Этот вектор $\bar{y} = (y_1, ..., y_{512})$ называется вектором признаков.

Считается, что образы, подаваемые на персептрон, принадлежат одному из двух классов. Хотелось бы так настроить весовые коэффициенты $\bar{a} = (a_1, ..., a_{512})$ и порог c решающего элемента, чтобы на образах из первого класса решающий элемент выдавал 0, а на образах из второго класса — 1. Настройка весовых коэффициентов осуществляется с помощью обучающего алгоритма, на вход которого поступает обучающая выборка, т.е. последовательность образов, для которых известно, к какому классу они принадлежат. В зависимости от правильности отнесения очередного образа из обучающей выборки к своему классу обучающий алгоритм может менять весовые коэффициенты.

Возникает вопрос: какие классы образов могут распознаваться персептроном? Из самого вида решающего правила видно, что распознаваться могут только классы, которые в признаковом пространстве могут быть отделены друг от друга гиперплоскостью. Тогда встает вопрос: если классы образов отделимы гиперплоскостью в признаковом пространстве, то существует ли алгоритм обучения персептрона? Ответ на этот вопрос дает теорема Новикова.

Теорема Новикова.

Пусть R^k - признаковое пространство, $M_i \subseteq R^k, M_i \neq \varnothing, i = 1, 2, M_1 \cap M_2 = \varnothing$. Множества M_1 и M_2 строго *строго линейно отделимы* точно тогда, когда существуют $\bar{a} \in Rc \in R$, что для любых $\bar{x}_1 \in M_1$ и $\bar{x}_2 \in M_2$ выполнено $\bar{a} \cdot \bar{x}_1 > c, \bar{a} \cdot \bar{x}_2 < c$.

Множества $M_1, M_2 \subseteq R^k$ строго 0-отделимы точно тогда, когда существуют $\bar{a} \in R^k$, что для любых $\bar{x}_1 \in M_1$ и $\bar{x}_2 \in M_2$ выполнено $\bar{a} \cdot \bar{x}_1 > 0, \bar{a} \cdot \bar{x}_2 < 0$.

Множество $M \subseteq R^k$ строго линейно отделимо от нуля точно тогда, когда существуют $\bar{a} \in R^k$, что для любых $\bar{x} \in M$ выполнено $\bar{a} \cdot \bar{x} > 0$.

Утверждение 1. Если $M_1, M_2 \in R^k$ и

$$\widetilde{M_i} = \{(x_1, x_2, ..., x_k, 1) : (x_1, ..., x_k) \in M_i\}, i = 1, 2,$$

то M_1 и M_2 *строго линейно отделимы* тогда и только тогда, когда $\widetilde{M_1}$ и $\widetilde{M_2}$ *строго 0-отделимы.*

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 строго линейно отделимы гиперплоскостью $l : \bar{a} \cdot \bar{x} = c$. Определим $\bar{b} \in R^{k+1}, \bar{b} = (a_1, \ldots, a_k, -c)$. Тогда для всех $\bar{x}' \in \widetilde{M_1}, \bar{x}' = (\bar{x}, 1)$, выполнено $\bar{b} \cdot \bar{x}' = \bar{a} \cdot \bar{x} - 1 \cdot c > 0$. И для всех $\bar{x}' \in \widetilde{M_2}, \bar{x}' = (\bar{x}, 1)$, выполнено $\bar{b} \cdot \bar{x}' = \bar{a} \cdot \bar{x} - 1 \cdot c < 0$. То есть множетства $\widetilde{M_1}$ и $\widetilde{M_2}$ строго 0-отделимы гиперплоскостью $l' : \bar{b} \cdot \bar{x}' = 0$.

Обратно, пусть множества $\widetilde{M_1}$ и $\widetilde{M_2}$ строго 0-отделимы гиперплоскостью $l' : \bar{b} \cdot \bar{x}' = 0$. Положим $c = -b_{k+1}, \bar{a} = (b_1, ..., b_k)$. Тогда M_1 и M_2 строго линейно отделимы гиперплоскостью $l : \bar{a} \cdot \bar{x} = c$.

Утверждение 2. Если $M_1, M_2 \subseteq R^k, M' = M_1 \cup \{-\bar{x} : \bar{x} \in M_2\}$, Тогда M_1, M_2 строго 0-отделимы тогда и только тогда, когда M' строго линейно отделимо от 0.

Доказательство. Пусть M' строго отделимо от 0, тогда существует $\bar{a}$, что для любого $\bar{x}' \in M' : \bar{a} \cdot \bar{x}' > 0$, значит для $\forall \bar{x} \in M_1 : \bar{a} \cdot \bar{x} > 0$, и для любого $\bar{x} \in M_2 : \bar{a} \cdot \bar{x} < 0$, значит M_1, M_2 строго 0-отделимы.
Пусть M_1, M_2 строго 0-отделимы гиперплоскостью l: $\bar{a} \cdot \bar{x} = 0$, значит $\bar{a} \cdot \bar{x}' > 0$ для любого $\bar{x}' \in M'$.

Пусть множества $M_1, M_2 \subset R^{n-1}$ - строго линейно отделимы, множество $M' = M_1 \cup \{-\bar{x} : \bar{x} \in M_2\}$. Тогда согласно утверждениям 1, 2 множество M $= \{(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 1) : (x_1, ..., x_n) \in M'\} \subset R^n$ строго линейно отделимо от 0.

Рассмотрим следующий алгоритм А, который для строго линейно отделимого от нуля множества М позволяет находить нормаль отделяющей гиперплоскости. На вход алгоритма поступает бесконечная последовательность $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ...$ такая, что для любого $i = 1, 2, ...$ выполнено $\bar{y}_i \in M$. Эта последовательность называется обучающей последовательностью. Алгоритм А состоит в итеративном уточнении нормали $\bar{a}$ отделяющей гиперплоскости, называемой весовым вектором, по следующей схеме:

Шаг 0. $\bar{a}_0 := (0, ..., 0)$.

Шаг $i (i > 0)$. Если $\bar{y}_i \cdot \bar{a}_{i-1} \leqslant 0$, то $\bar{a}_i = \bar{a}_{i-1} + \bar{y}_i$, иначе $\bar{a}_i = \bar{a}_{i-1}$.

Для вектора $\bar{y}$ через $||\bar{y}||$ обозначим его длину.
Для конечного $M = \bar{y}_1, ..., \bar{y}_s$ из R^n введем обозначения:

$$D(M) = \max_{\bar{y} \in M} ||\bar{y}||,$$

$$V(M) = \{\sum_{i=1}^{s} a_i \bar{y}_i : \sum_{i=1}^{s} a_i = 1, a_i \geqslant 0, 1, ..., s\} -$$

выпуклая оболочка множетсва M,

$$\rho(M) = \min_{\bar{y} \in V(M)} ||\bar{y}||.$$

Для вещественного a через $[a]$ обозначим наибольшее целое, не большее a.

Теорема Новикова. Пусть М $\subset R^n$ строго линейно отделимо от 0, $|\text{M}| < \infty$. Пусть $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, ... - обучающая последовательность такая, что для всех i = 1, 2, ... верно, что $\bar{y}_i \in M$, и каждый элемент $\bar{y}$ из М встречается в обучающей последовательности бесконечное число раз. Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ...$ - последовательность весовых векторов, полученных в результате применения алгоритма А к обучающей последовательности. Тогда существует натуральное число N такое, что для любого i > N верно $\bar{a}_i = \bar{a}_N$, при этом для любого $\bar{y} \in M \bar{a}_N \cdot \bar{y} > 0$, и для числа изменений s в последовательности $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, ... выполнено s < $[\frac{D^2(M)}{\rho^2(M)}]$.

Доказательство. Из строгой линейной отделимости множества М от 0 следует, что $\rho(M) > 0$. Тем самым последние отношения в формулировке теоремы корректно. Пусть $i_1, i_2, ..-$ последовательность всех индексов, для которых $\bar{y}_{i_j} \cdot \bar{a}_{i_{j-1}} \leqslant 0, j = 1, 2, ...$, т.е. это последовательность индексов, в которых последовательность $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ...$ изменяется. Обозначим $\widetilde{y}_j = \bar{y}_{i_j}, \widetilde{a}_0 = \bar{a}_0, \widetilde{a}_j = \bar{a}_{i_j}, j = 1, 2, ...$

Пусть $\bar{x}$ - ближайшая точка к 0 из $V(M)$, т.е. $||\bar{x}|| = \rho(M)$. Обозначим $\bar{e} = \frac{\bar{x}}{||\bar{x}||}$. Рассмотрим гиперплоскость H, задаваемую уравнением $\bar{e} \cdot \bar{y} = ||\bar{x}||$.

Легко показать, что все точки из $V(M)$ лежат не ниже, чем гиперплоскость H, т.е. для любой точки $\bar{y} \in V(M)$ выполнено $\bar{e} \cdot \bar{y} \geqslant ||\bar{x}||$. В самом деле, предположим, что существует точка $\bar{y} \in V(M)$ такая, что $\bar{e} \cdot \bar{y} \leqslant ||\bar{x}||$. Проведем через 3 точки $\bar{x}, \bar{y}$ и точку 0 плоскость L. На рисунке 3 изображены эти точки на плоскости L. Здесь прямая $(l, \bar{x})-$ есть прямая пересечения плоскости L и гиперплоскости H, т.е. прямая $(l, \bar{x})$ перпендикулярна отрезку $[0, \bar{x}]$. Так как $\bar{e} \cdot \bar{y} \leqslant ||\bar{x}||$, то угол $\angle 0\bar{x}\bar{y}-$ острый. Из точки 0 опустим на отрезок $[\bar{x}, \bar{y}]$ перпендикуляр $[\bar{x}, \bar{y}]$. Так как $\bar{y} \in V(M)$ и $\bar{x} \in V(M)$, то и $\bar{z} \in V(M)$. Из остроты угла $\angle 0\bar{x}\bar{y}$ следует, что $||\bar{z}|| < ||\bar{x}||$, что противоречит минимальности $||\bar{x}||$.

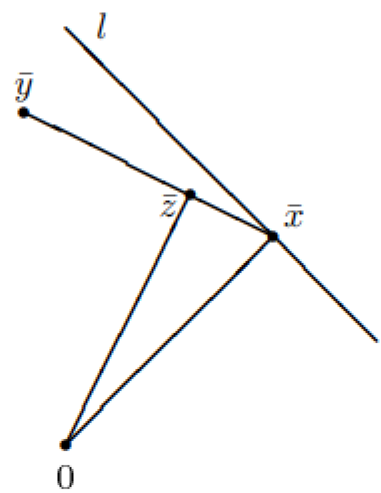


Рис. 7: Доказательство

Так как для любого допустимого индекса k справедливо $\widetilde{a_k} = \widetilde{a_k - 1} + \widetilde{y}_k$, то

$$||\widetilde{a}_k|| \geqslant \widetilde{a}_k \cdot \bar{e} \geqslant \widetilde{a}_{k-1} \cdot \bar{e} + \widetilde{y}_k \cdot \bar{e} \geqslant \widetilde{a}_{k-1} \cdot \bar{e} + \rho(M) \geqslant \widetilde{a}_0 \cdot \bar{e} + k\rho(M) = k\rho(M).$$

С другой стороны

$$\widetilde{a}_k \cdot \widetilde{a}_k = \widetilde{a}_{k-1} \cdot \widetilde{a}_{k-1} + \widetilde{y}_k \cdot \widetilde{y}_k + 2\widetilde{a}_{k-1} \cdot \widetilde{y}_k.$$

Но $\widetilde{y}_k \cdot \widetilde{y}_k \leqslant D^2(M)$ и $\widetilde{a}_{k-1} \cdot 2\widetilde{y}_k \leqslant 0$ и значит,

$$||\bar{a}_k||^2 \leqslant ||\bar{a}_{k-1}||^2 + D^2(M) \leqslant ||\bar{a}_0||^2 + kD^2(M) \leqslant kD^2(M).$$

Следовательно, $k^2\rho^2(M) \leqslant kD^2(M)$ и $k \leqslant [D^2(M)/\rho^2(M)]$ для любого допустимого индекса k. Откуда сразу следует, что для числа s изменений весовых векторов верно

$$\frac{D^2(M)}{\rho^2(M)}.$$

Возьмем $N = i_s$. Тогда для любого индекса $j \geqslant N$ справедливо $\bar{a}_j = \bar{a}_N$, а так как в последовательности $\bar{y}_N, \bar{y}_{N+1}, ...$ встречаются все элементы множества М, то для любого $\bar{y} \in M$ справедливо $\bar{a}_N \cdot \bar{y} > 0$.

Теорема доказана.

0.41 Билет 15. Теорема Гильберта-Анселя о числе монотонных функций

Понятие монотонной функции алгебры логики. Формулировка и доказательство леммы Анселя о покрытии булевого куба цепями. Формулировка и доказательство теоремы Гильберта- Анселя о числе монотонных функций.

Теорема Гильберта–Анселя дает оценку числу монотонных функций n переменных. Перед доказательством теоремы рассмотрим лемму Анселя.

Лемма (Анселя): Булев n-мерный куб E_2^n может быть покрыт множеством из $C_n^{n/2}$попарно непересекающихся цепей, обладающих следующими свойствами:

a) число цепей длины $n+1-2p$ равно $C_n^p - C_n^{p-1} (0 \le p \le [n/2])$, причём минимальный элемент каждой такой цепи принадлежит p-му слою (т.е. это набор с p единицами и $n-p$ нулями), а максимальный принадлежит $(n-p)$-му слою (т.е. имеет p нулей и $n-p$ единиц);

b) если заданы три элемента a_1, a_2, a_3, образующие цепь и принадлежащие одной и той же цепи длины $n+1-2p$, то дополнение цепи a_1, a_2, a_3 до квадрата принадлежит цепи длины $n-1-2p$.

Доказательство. Доказывать лемму будем индукцией по n.

Базис индукции. Для $n = 1, 2$ лемма верна. В самом деле, для n = 1 имеется одна цепь $(0), (1)$, которая удовлетворяет условиям леммы. Для n = 2 булев куб покрывается двумя цепями — первая: $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$, и вторая: $(1, 0)$. Причем $(1, 0)$ является дополнением до квадрата цепи $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$.

Индуктивный переход.

Пусть для куба E^{n-1} лемма верна и нужное покрытие цепями для него построено. Возьмем два куба E^{n-1} с одинаковым разбиением на цепи, удовлетворяющим условиям леммы. Всем наборам первого куба слева припишем 0 и обозначим E_0^n. Всем наборам второго куба слева припишем 1 и обозначим E_1^n. Соединим ребрами вершины этих двух кубов, отличающиеся только в первой компоненте, и получим куб E^n.

Покрытие E^n множеством цепей определим следующим образом.

Возьмем произвольную цепь C_1 из E_0^n, которая начинается в вершине p-го слоя и соответственно оканчивается в вершине $(n-1-p)$-го слоя. Пусть C_2 — цепь, изоморфная C_1 в E_1^n, и пусть y_2 — ее наибольший элемент. Продолжим C_1, добавив к ней y_2 (см. рис. 1), при этом отнимем у цепи C_2 ее наибольший элемент y_2. После осуществления этих преобразований мы получим две новые цепи $C_1^{'}$ и $C_2^{'}$, причем цепь $C_1^{'}$ начинается в вершине p-го слоя и оканчивается в вершине $(n-p)$-го слоя, а цепь $C_2^{'}$ начинается в вершине $(p+1)$-го слоя и оканчивается в вершине $(n-p-1)$-го слоя.

Произведем те же самые операции со всеми цепями из E_0^n.

По построению полученные цепи, покрывающие E^n, не будут пересекаться.

Подсчитаем число цепей длинып $n+1-2p$. Цепи такой длины мы могли получить удлинением цепей из E_0^n (таких цепей по предположению индукции $C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}$) и укорачиванием цепей из E_1^n (таких цепей $C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}$). Таким образом цепей длины $n+1-2p$ будет равно

$$(C_{n-1}^{p}-C_{n-1}^{p-1})+(C_{n-1}^{p-1}-C_{n-1}^{p-2})=C_{n-1}^{p}-C_{n-1}^{p-2}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}-\frac{(n-1)!}{(p-2)!(n+1-p)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!((n+1-p)(n-p)-p(p-1))}{p!(n+1-p)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!((n^2+n(1-2p)+p(p-1)-p(p-1))}{p!(n+1-p)!}=$$

$$=\frac{n!(n+1-p-p)}{p!(n+1-p)!}=C_n^p-C_n^{p-1}.$$

Подсчитаем общее количество цепей:

$$\sum_{p=0}^{[n/2]}(C_n^p-C_n^{p-1})=C_n^{[n/2]}-C_n^{[n/2]-1}+C_n^{[n/2]-1}-C_n^{[n/2]-2}+...+C_n^0-C_n^{-1}=C_n^{[n/2]}.$$

Свойство б) леммы является не посредственным следствием вышеприведенной конструкции.

В самом деле, цепи в E^n — двух сортов: "удлиненные возникшие из цепей E_0^n , и "укороченные возникшие из цепей E_1^n. Рассмотрим возможные случаи для трех элементов a_1, a_2, a_3, образующих цепь и лежащих на построенной цепи C в E^n (длины $n+1-2p$).

1) C — удлиненная цепь, и a_3 не есть ее максимальный элемент. В этом случае a_1, a_2, a_3 лежат на некоторой "старой"цепи в E_0^n (длины $n-1+1-2p=n-2p$). По предположению индукции дополнение цепи a_1, a_2, a_3 до квадрата находится на некоторой цепи C' (длины n - 2p - 2) в E_0^n, которая будет продолжена при переходе к E^n до цепи длины $n-2p-1$.

2) C — удлиненная цепь, и a_3 — ее максимальный элемент. Пусть $C=C_1'$ (см. рис) возникла в результате удлинения цепи C_1 из E_0^n; C_2 — цепь в E_1^n, изоморфная C_1; C_2' — укороченная цепь, возникшая из C_2 (C_2' имеет длину $n-2p-1$). Тогда дополнение цепи a_1, a_2, a_3 до квадрата есть максимальный элемент цепи C_2' (см. рис.1).

3) C— укороченная цепь. Пусть $C=C_2'$ возникла из цепи C_2' (длины $n-2p+2$) в E_1^n. Тогда, во-первых, a_3 — не максимальный элемент цепи C_2 и, во-вторых, в силу второй части свойства а) максимальный a элемент цепи C_2 имеет $p-1$ нулей. По предположению индукции в силу свойства б) дополнение b цепи a_1, a_2, a_3 до квадрата принадлежит некоторой цепи $\tilde{C}$ длины $n-2p$ в E_1^n; максимальный элемент этой цепи имеет p нулей. Так как $b<a_3<a$, то b имеет не менее $p+1$ нулей и поэтому не является максимальным элементом цепи $\tilde{C}$. Следовательно, b принадлежит укороченной цепи длины $n-1-2p$, получающейся из $\tilde{C}$.

Лемма доказана.

Формулировка (Теорема Гильберта–Анселя): *Число $\psi(n)$ монотонных булевых функций n переменных удовлетворяет неравенствам*

$$2^{C_n^{[n/2]}}\le\psi(n)\le3^{C_n^{[n/2]}}.$$

Доказательство: *Нижняя оценка.* Понятно, что монотонная функция однозначно задается своими нижними единицами. Любая пара нижних единиц несравнима. Поэтому любое множество несравнимых наборов может быть объявлено множеством нижних единиц монотонной функции и будет ее задавать. Поэтому число монотонных функций не меньше, чем число подмножеств попарно несравнимых наборов булевого куба. Рассмотрим множество S, являющееся $[n/2]$-м слоем булевого куба E_n, т.е. S — множество всех наборов, содержащих ровно $[n/2]$ единиц. Понятно, что любая пара наборов из S попарно несравнима. Следовательно, любое подмножество S может быть использовано в качестве множества нижних единиц некоторой монотонной функции. Откуда сразу следует, что

$$\psi(n) \geq 2^{|S|} = 2^{C_n^{[n/2]}}.$$

Верхняя оценка. Разобьем n-мерный булев куб на цепи Анселя. Мы хотим показать, что если мы будем определять значения монотонной функции, начиная с самых коротких цепей Анселя, и далее в порядке возрастания их длин, то на каждой цепи Анселя значение функции можно доопределить не более чем тремя способами. Учитывая, что цепей Анселя всего $C_n^{[n/2]}$ штук, то отсюда сразу будет следовать, что число монотонных функций будет не больше чем $3^{C_n^{[n/2]}}$.

Если n — четное число, то самые короткие цепи Анселя имеют длину $n + 1 - 2 * n/2 = 1$. На таких цепях значение монотонной функции можно определить ровно двумя способами: либо нулем, либо единицей.

Если n — нечетное число, то самые короткие цепи Анселя имеют длину $n + 1 - 2(n-1)/2 = 2$. На таких цепях значение монотонной функции можно определить ровно тремя способами: $(0,0)(0,1)(1,1)$. Здесь первая компонента соответствует значению на меньшем наборе цепи, а вторая — значению на большем наборе. Пара $(1,0)$ невозможна, поскольку в силу монотонности функции значение на меньшем наборе не может быть больше чем значение на большем наборе.

Предположим мы определили значение монотонной функции f на всех цепях Анселя длины меньшей чем $n+1-2p$. Рассмотрим некую произвольную цепь Анселя $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1-2p}$ длины $n+1-2p$. Пусть тогда $B = \{ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1-2p} \}$ — множество вершин куба, являющихся дополнениями до квадрата троек рассматриваемой цепи, т.е. β_i есть дополнение до квадрата цепи $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, i = 1, 2, ..., n-1-2p$. Поскольку все вершины из B находятся на цепях Анселя длины $n-1-2p$, то значения функции f на этих вершинах уже определены.
Заметим, что если $f(\beta_i) = 0$ для некоторого номера i, то в силу монотонности функции f для всех $j, j \leq i$, должно выполняться равенство $f(\alpha_j) = 0$. Если $f(\beta_i) = 1$ для некоторого номера i, то в силу монотонности функции должно быть $f(\alpha_j) = 1$ для всех $j, j \geq i+2$.
Возможны следующие 3 случая для значений рассматриваемой функции f на наборах из множества B.
1) Существуют такие номера i и j, что $j \geq i+2$ и $f(\beta_j) = 0, f(\beta_i) = 1$. Рассмотрим любой номер k такой, что $i+2 \leq k \leq j$. Такой номер существует, так как $j \geq i+2$. Поскольку $f(\beta_i) = 1$, то $f(\alpha_k) = 1$. С другой стороны, так как $f(\beta_j) = 0$, то должно быть $f(\alpha_k) = 0$. Получили противоречие. Значит, монотонной функции с такими значениями наборов из B не существует, т.е. ни одним способом доопределить функцию f на рассматриваемой цепи $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1-2p}$ нельзя.
2) Существует такой номер i, что $f(\beta_i) = 1, f(\beta_{i+1}) = 0, f(\beta_j) = 0$ для $j \in \{1, ..., i-1\}$ и $f(\beta_j) = 1$ для $j \in \{i+2, ..., n-1-2p\}$. Поскольку $f(\beta_i) = 1$, то $f(\alpha_j) = 1$ для любого $j, j \geq i+2$. Так как $f(\beta_{i+1}) = 0$, то $f(\alpha_j) = 0$ для любого $j, j \leq i+1$. Тем самым функция f однозначно определена на рассматриваемой цепи $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1-2p}$.
3) Существует такой номер i, что $f(\beta_j) = 0$ для $j \in \{ 1, ..., i\}$ и $f(\beta_j) = 1$ для $j \in \{ i+1, ..., n-1-2p \}$. Поскольку $f(\beta_i) = 0$, то $f(\alpha_j) = 0$ для любого $j, j \leq i$. Так как $f(B_{i+1}) = 1$, то $f(\alpha_j) = 1$ для любого $j, j \geq i+3$. Тем самым функция f не определена только на наборах α_{i+1} и α_{i+2}. На этих наборах функцию можно доопределить только тремя способами, поскольку доопределение $f(\alpha_{i+1}) = 1, f(\alpha_{i+2}) = 0$ невозможно.

Тем самым мы показали, что если определять значения монотонной функции, начиная с самых коротких цепей Анселя, и далее в порядке возрастания их длин, то на каждой цепи Анселя значение функции можно доопределить не более чем тремя способами. Откуда, поскольку число цепей Анселя равно $C_n^{[n/2]}$, получаем

$$\psi(n) \leq 3^{C_n^{[n/2]}}.$$

Теорема доказана.

0.42 Билет 16. Теорема о полноте исчисления высказываний.

Логика высказываний. Формулы логики высказываний. Исчисление высказываний. Теорема дедукции Эрбрана. Лемма об интерпретациях. Формулировка и доказательство теоремы о полноте исчисления высказываний.

Определение 1. **Алфавит языка логики высказываний** состоит из: 1. Счетного списка переменных: $x_1, x_2, \ldots$;
2. Двух логических констант: И, Л;
3. Заданного набора логических связок: $\rightarrow$,$\neg$; 4. Скобок: (,).

Определение 2. Правильные выражения языка логики высказываний называются **формулами**.

Вводятся индуктивно: 1. (база) Однобуквенное слово, состоящее из переменной или логической константы, есть формула.
2. (переход) Если A и B — формулы, тогда $(\neg A), (A \rightarrow B)$ — формулы.

Определение 3. **Интерпретацией языка логики высказываний** называется отображение I, определенное на множестве переменных $x_1, x_2, \ldots$ и сопоставляющее каждой переменной x_i некоторое значение из И, Л. $I\colon x_1, x_2, \ldots \rightarrow$ И,Л.

1) I(И) = И, I(Л) = Л;
2) Если $F = x_i$, то $I(F) = I(x_i)$;
3) $I((\neg f)) = \neg I(f)$;
4) $I((f \rightarrow g)) = I(f) \rightarrow I(g)$.

Определение 4. Модель формулы f — произвольная интерпретация, в которой f принимает значение И.

Формула, имеющая хотя бы одну модель, называется **выполнимой**. Формула, для которой каждая интерпретация является моделью, называется **общезначимой**.

Определение 5. Вводим 3 аксиомы, где f, g, h — формулы
1) $(f \rightarrow (g \rightarrow f))$ Покажем, что данная аксиома является общезначимой, то есть $(f \rightarrow (g \rightarrow f)) =$ И. Для доказательства предположим обратное, $(f \rightarrow (g \rightarrow f)) =$ Л. Чтобы данная формула была не общезначимой необходимо, чтобы $f =$ И и $(g \rightarrow f) =$ Л

$(g \rightarrow f) =$ Л $\Rightarrow g =$ И, $f =$ Л - получили противоречие, так как $f =$ И по предположению.

2) $((f \rightarrow (g \rightarrow h)) \rightarrow ((f \rightarrow g) \rightarrow (f \rightarrow h)))$

Для доказательства общезначимости данной аксиомы, также как и с первой аксиомой предположим обратное. $((f \rightarrow (g \rightarrow h)) \rightarrow ((f \rightarrow g) \rightarrow (f \rightarrow h))) =$ Л
$(f \rightarrow g) \rightarrow (f \rightarrow h) =$ Л
$f =$ И, $h =$ Л, $g =$ И
$f \rightarrow (g \rightarrow h) =$ И
$f =$ И, $h =$ Л, $g =$ Л - получили противоречие

3) $((\neg f \rightarrow \neg g) \rightarrow ((\neg f \rightarrow g) \rightarrow f))$ Для доказательства общезначимости данной аксиомы, предположим обратное:
$((\neg f \rightarrow \neg g) \rightarrow ((\neg f \rightarrow g) \rightarrow f)) =$ Л
$(\neg f \rightarrow g) \rightarrow f =$ Л $\Rightarrow f =$ Л, $g =$ И
$(\neg f \rightarrow \neg g) =$ И $\Rightarrow f =$ Л, $g =$ Л - получили противоречие

Определение 6. **Правило вывода** — если f и $(f \to g)$ выводимые формулы, то $f, (f \to g)| = g$ (правило modus ponens).

Говорим, что **исчисление высказываний полно**, если любая общезначимая формула выводима из аксиом с помощью modus ponens.

Определение 7. Вывод формулы f из списка формул $\Gamma = g_1, \ldots, g_n$ — это произвольная последовательность формул $f_1, f_2, \ldots, f_m = f$ такая, что каждое $f_i \quad (i = 1, \ldots, m)$ есть либо аксиома, либо элемент списка Γ, либо получено по правилу modus ponens из некоторых f_j , f_k при $j, k \in 1, \ldots, i-1$. Если существует вывод f из Γ, то обозначается это $\Gamma \vdash f$. Список Γ может быть пуст.

Лемма 1. Если f — формула, то $\vdash (f \to f)$.

Доказательство.
$(f \to ((f \to f) \to f)) \to ((f \to (f \to f)) \to (f \to f))$ (по A2)
$(f \to ((f \to f) \to f))$ (по A1)
$((f \to (f \to f)) \to (f \to f))$ (по mp)
$(f \to f)$

Лемма 2 (теорема дедукции Эрбрана). Пусть Γ — произвольный конечный список формул и f, g — формулы, тогда из Γ,$f \vdash g$ вытекает $\Gamma \vdash (f \to g)$.

Доказательство. Это утверждение доказывается индукцией по длине n вывода $g_1, \ldots, g_n = g$ формулы g из Γ,f.

Базис индукции. Если $n = 1$, то g либо аксиома, либо элемент списка Γ,f. Если g — аксиома или элемент списка Γ, то вывод $(f \to g)$ из Γ имеет вид $(g \to (f \to g)), g, (f \to g)$. Если же $g = f$, то нужно использовать вывод $(f \to f)$ из пустого списка.

Индуктивный переход. Если $n > 1$ и g — аксиома, либо элемент списка Γ,f, то поступаем так же, как выше. Если g получено по правилу modus ponens из формул $g_i, g_j, (i, j < n)$, то согласно предположению индукции имеем $\vdash (f \to g_i)$, $\vdash (f \to g_j)$. Заметим, что одна из формул g_i, g_j, например g_j, должна иметь вид $(g_i \to g)$. Для получения вывода $(f \to g)$ из Γ теперь достаточно рассмотреть последовательность, образованную расположенными подряд выводами $(f \to g_i), (f \to g_j)$ из Γ, и присоединить к ней в конце формулы $((f \to (g_i \to g)) \to (((f \to g_i) \to (f \to g)))$ (по A2), $((f \to g_i) \to (f \to g))$(по mp),
$(f \to g)$(по mp).

Лемма 3 (доказательство от противного). Если Γ — список формул и f, g — формулы, то из $, \neg f \vdash g, \neg g$ вытекает $\Gamma \vdash f$.

Доказательство. Так как Γ,$\neg f \vdash g, \neg g$, то по теореме дедукции $\Gamma \vdash (\neg f \to g), (\neg f \to \neg g)$.
$((\neg f \to \neg g) \to ((\neg f \to g) \to f))$ (по A3)
$((\neg f \to g) to f)$ (по mp)
f (по mp)

Лемма 4 (снятие двойного отрицания). Если f — формула, то $\vdash (\neg\neg f \to f)$.

Доказательство. Очевидно, что $\neg\neg f, \neg f \vdash \neg f, \neg\neg f$. По лемме 3 получим $\neg\neg f \vdash f$. Отсюда по теореме дедукции имеем $\vdash (\neg\neg f \to f)$.

Лемма 5. Если f — формула, то $\vdash (f \to \neg\neg f)$.

Доказательство. Докажем, что $\neg\neg\neg f \vdash \neg f$.
$\neg\neg\neg f \to \neg f$ (по лемме 4)
$\neg\neg\neg f$
$\neg f$ (по mp). Следовательно, имеем $f, \neg\neg\neg f \vdash f$. По лемме 3 получаем $f \vdash \neg\neg f$. Отсюда, по теореме дедукции имеем $\vdash (f \to \neg\neg f)$.

Лемма 6. Если f, g — формулы, то $\vdash (\neg f \to (f \to g))$.

Доказательство. Сперва докажем $\neg f, f \vdash g$:
$(f \to (\neg g \to f))$ (A1)
$(\neg g \to f)$ (по mp)
$\neg f \to (\neg g \to \neg f)$ (A1)
$(\neg g \to \neg f)$ (по mp)
$((\neg g \to \neg f) \to ((\neg g \to \neg f) \to g))$ (A3)
$((\neg g \to \neg f) \to g))$ (по mp)
g (по mp) Далее по теореме о дедукции получим: $(\neg f \vdash (f \to g))$
$\vdash (\neg f \to (f \to g))$

Лемма 7. Если f, g, h — формулы, то $((f \to g), (g \to h) \vdash (f \to h))$.

Доказательство. $f \to g, g \to h, f$ (гипотеза) g (по mp из $f \to g$)
h (по mp из $g \to h$)
$(f \to g), (g \to h) \vdash (f \to h)$ (теорема о дедукции)

Лемма 8. Если f, g — формулы, то $(f \to g) \vdash (\neg g \to \neg f)$.

Доказательство.
$f \to g$
$\neg\neg f \to f$ (Л4)
$\neg\neg f \to g$ (Л7)
$g \to \neg\neg g$ (Л5)
$\neg\neg f \to \neg\neg g$ (Л7)
$(\neg\neg g \to \neg\neg f) \to (\neg f \to \neg g)$ (из: $\neg g \to \neg f, f \vdash g$)
$(\neg f \to \neg g)$ (по mp)
$(f \to g) \vdash (\neg g \to \neg f)$

Лемма 9. Если f, g — формулы, то $\vdash (f \to (\neg g \to \neg(f \to g)))$.

Доказательство. $(f, f \to g \vdash g)$ (по mp)
$((f \to g) \to g) \to (\neg g \to \neg(f \to g))$ (Л8)

$$\vdash (f \to (\neg g \to \neg(f \to g)))(\text{Л7}) \begin{cases} f\colon f \\ g\colon (f \to g) \to g \\ h\colon (\neg g \to\neq (f \to g)) \end{cases}$$

Лемма 10. Если f, g — формулы, то $\vdash ((f \to g) \to ((\neg f \to g) \to g)))$.

Доказательство. Применим теорему о дедукции дважды к высказыванию $((f \to g) \to ((\neg f \to g) \to g)))$ в результате чего получим: $f \to g, \neg f \to g \vdash g \quad (*)$.

Докажем это: $(f \to g) \to (\neg g \to \neg f)$ (Л8)
$\neg g \to \neg f$ (по МП)

$(\neg f \to g) \to (\neg g \to \neg\neg f)$ (Л8)
$(\neg g \to \neg\neg f) \to ((\neg g \to \neg f) \to g)$ (A3)
$(\neg g \to \neg f) \to g$(по mp)

Применив modus ponens еще раз получим g. Затем дважды применив теорему о дедукции к высказыванию (*) получим: $\vdash ((f \to g) \to ((\neg f \to g) \to g)))$

Определение 8. Пусть g — формула, I — интерпретация

$$(g)_I = \begin{cases} g, \text{ если } I(g) = \text{ И} \\ (\neg g), \text{ если } I(g) = \text{ Л} \end{cases}$$

Лемма 11 (об интерпретациях). Пусть f — формула логики высказываний; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все переменные, входящие в f, и I — некоторая интерпретация языка логики высказываний. Тогда выполняется $(x_1)_I, \ldots, (x_n)_I \vdash (f)_I$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по числу m логических связок в f. Базис индукции. Если $m = 0$, то f совпадает с x_1, и очевидно, что $(x_1)_I \vdash (x_1)_I$.

Индуктивный переход. Пусть $m > 0$. Рассмотрим следующие два случая. 1) $f = (\neg h)$. Этот случай можно разбить на два подслучая.
а) Если $I(h) =$ И, то есть $(h)_I = h$, то $I(f) =$ Л, значит $(f)_I = \neg\neg h$. По предположению индукции имеем $(x_1)_I, \ldots, (x_n)_I \vdash h$. По лемме 5, $\vdash (h \to \neg\neg h)$. Применим modus ponens и получим $(\neg\neg h)$.

б) Если $I(h) =$ Л, то есть $(h)_I = \neg h$, то $I(f) =$ И, значит $(f)_I = f = \neg h$. Утверждение сводится к предположению индукции.

2)$f = (h_1 \to h_2)$. Этот случай имеет так же несколько подслучаев.

а)Если $I(h_1) =$ Л, то есть $(h_1)_I = (\neg h_1)$, то $(f)_I = f = (h_1 \to h_2)$. По предположению индукции имеем $(x_1)_I, \ldots, (x_n)_I \vdash (\neg h_1)$. По лемме 6, $\vdash (\neg h_1 \to (h_1 \to h_2))$. Применим modus ponens и получим $(h_1 \to h_2)$.

б) Если $I(h_2) =$ И, то есть $(h_2)_I = h_2$, то $(f)_I = f = (h_1 \to h_2)$. По аксиоме A1 имеем $h_2 \to (h_1 \to h_2)$. По предположению индукции имеем $(x_1)_I, \ldots, (x_n)_I \vdash h_2$. Применим modus ponens и получим $(h_1 \to h_2)$.

в) Если $I(h_1) =$ И и $I(h_2) =$ Л имеем $I(f) =$ Л, $(h_1)_I = h_1, (h_2)_I = \neg h_2$ и $(f)_I = \neg f = \neg(h_1 \to h_2)$. По предположению индукции имеем $(x_1)_I, \ldots, (x_n)_I \vdash h_1, (\neg h_2)$. По лемме 7, $\vdash (h_1 \to (\neg h_2 \to \neg(h_1 \to h_2)))$. Применим modus ponens дважды, получим $\neg(h_1 \to h_2)$.

Теорема (о полноте исчисления высказываний). Формула логики высказываний является общезначимой тогда и только тогда, когда она выводима из аксиом A1, A2, A3 с помощью правила modus ponens.

Доказательство.

Достаточность. Если f и $(f \to g)$ — общезначимые формулы, то ясно, что g — тоже общезначима (так как, если g принимет значение Л, то получим (И $\to$ Л) = Л). Таким образом, правило modus ponens из общезначимых формул выводит общезначимые. Схемы аксиом задают общезначимые формулы, значит все выводимые формулы — общезначимы.

Необходимость. Пусть f — произвольная общезначимая формула логики высказываний, $x_1, \ldots, x_n$ — все входящие в нее переменные. Введем для $\sigma \in \{$ И, Л$\}$ обозначение:

$$(f)^\sigma = \begin{cases} f, \text{ если } \sigma = \text{ И} \\ \neg f, \text{ если } \sigma = \text{ Л} \end{cases}$$

Надо показать индукцией по k, что для $\forall 0 \leq k \leq n$ и любого набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ логических констант И, Л выполняется $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_k^{\sigma_k} \vdash f$.

Базис индукции. $k = n$.
$I = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Так как $(x_i)_I = x_i^{\sigma_i}$, то по лемме об интерпретациях, $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n} \vdash (f)_I = f$.

Индуктивный переход. Пусть утверждение уже доказано для некоторого $k, \quad k > 0$, тогда рассмотрим произвольный набор меньшей длины $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1})$ констант И, Л. По предположению индукции, имеем

$$x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}, x_k \vdash f \text{ и } x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}, \neg x_k \vdash f$$

По теореме дедукции $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \vdash (x_k \to f)$ и $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \vdash (\neg x_k \to f)$ По лемме 8 имеем $\vdash ((x_k \to f) \to ((\neg xk \to f) \to f))$. Используем правило modus ponens два раза и получим $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_{k-1}^{\sigma_{k-1}} \vdash f$.

Шаг индукции доказан. При $k = 0$ окончательно получим $\vdash f$.

0.43 Билет 17. Алгоритм сортировки QSort. Теорема о среднем времени работы

Задача сортировки

Предположим, что у нас имеется n действительных чисел:
$x_1, \ldots, x_n \in$ R. Для упрощения, мы будем считать, что все они различны. Также, мы за один раз, то есть со сложностью ***O(1)***, умеем проверять, что $x_i < x_j$, $i \neq j$.

Задача: с помощью таких проверок упорядочить числа в порядке возрастания, то есть получить $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_n}$.

Простейшие алгоритмы сортировки

Задачу сортировки можно решать разными алгоритмами, многие из которых являются оптимальными, имея какое-то преимущество над остальными. Выбор алгоритма сортировки очень сильно зависит от структуры данных. Они обычно оцениваются по 2 параметрам:

- **Время работы**

  Эту классификацию обычно считают самой важной. Оценивают худшее время алгоритма, среднее и лучшее. Лучшее время — минимальное время работы алгоритма на каком-либо наборе, обычно этим набором является тривиальный **[1... n]**. Худшее время — наибольшее время. У большинства алгоритмов временные оценки бывают ***O(nlogn)*** и ***O(*** n^2 ***)***. Среднее время работы алгоритма есть среднее время работы относительно всех входных значений фиксированного размера, выраженное в виде функции от размера входа.

  Память

  Параметр сортировки, показывающий, сколько **дополнительной** памяти требуется алгоритму. Сюда входят и дополнительный массив, и переменные, и затраты на стек вызовов. Обычно затраты бывают ***O(1)***, ***O(logn)***, ***O(n)***.

  Примеры простейших алгоритмов сортировок:

- **Сортировка пузырьком (Bubble Sort)**

  Алгоритм состоит в повторяющихся проходах слева на право по сортируемому массиву. На каждой итерации последовательно сравниваются соседние элементы, и, если порядок в паре неверный, то элементы меняют местами. Средняя работа алгоритма: ***O(*** n^2 ***)***. Затраты на память: ***O(1).***

- **Сортировка вставками (Insertion Sort)**

  На каждом шаге алгоритма мы выбираем один из элементов входных данных и вставляем его на нужную позицию в уже отсортированной части массива до тех пор, пока весь набор входных данных не будет отсортирован. Средняя работа алгоритма: ***O(*** n^2 ***)***. Затраты на память: ***O(1).***

- **Гномья сортировка (Gnome Sort)**

  Это метод, которым садовый гном сортирует линию цветочных горшков. По существу, он смотрит на следующий и предыдущий садовые горшки: если они в правильном порядке, он шагает на один горшок вперёд, иначе он меняет их местами и шагает на один горшок назад. Граничные условия: если нет предыдущего горшка, он шагает вперёд; если нет следующего горшка, он закончил. Средняя работа алгоритма: ***O(*** n^2 ***)***. Затраты на память: ***O(1).***

- **Сортировка слиянием (Merge Sort)**

Разбиваем заданный набор из n действительных чисел на две примерно равные по количеству части. Сортируем каждый из наборов неким алгоритмом сортировки, затем сливаем два набора в один. Средняя работа алгоритма: ***O(nlogn)***. Затраты на память: ***O(n).***

Алгоритм слияния выполняется так: мы сравниваем два самых больших элемента из разных набора и тот, что больше, вставляем на самую крайнюю справа позицию в новом отсортированном наборе. С оставшимися наборами выполняем ту же процедуру, пока не заполнится весь набор. Алгоритм рекурсивен, поэтому сложность зависит от сложности самого себя. Запишем рекурсивное уравнение:

$\boldsymbol{L(2n) = 2L(n) + (2n - 1)}$, если вместо $\boldsymbol{2n}$ использовать 2^n , формула примет вид:

$\boldsymbol{L(\ 2^n\ ) = 2L(\ 2^{n-1}\ ) + (\ 2^n - 1)}$

Алгоритм сортировки QSort

В алгоритме используется 3 шага:

1. Выбрать опорный элемент, его также называют «медианой». Выбор медианы: x_1 , x_n , $x_{n/2}$ или случайным образом.

2. Сравниваем все элементы заданного набора с медианой и делим на 2 кучки (2 поднабора): 1 кучка < **m** < 2 кучка, где **m** – медиана. Количество элементов в каждой из кучек неизвестно, то есть количество элементов одной из кучек может принимать любое значение из неравенства: $0 \leq n' \leq n-1$.

3. Повторить алгоритм для каждой из кучек.

Лучшим исходом для алгоритма сортировки, когда медиана выбирается так, что она является средним элементом набора, то есть два получившиеся поднабора равны или, возможно, различны на один, по количеству элементов. Тогда количество шагов (глубина рекурсии) по порядку равна $O\left(\log_2 n\right)$, так как каждый раз делим получившийся набор пополам. На каждом шаге получаем n количество сравнений. Тогда общая сложность будет по порядку равна $O\left(n \log_2 n\right)$.

Эту оценку можно также вывести из рекурсивной формулы:

$\boldsymbol{L(n) = 2L(\ \tfrac{n}{2}\ ) + n}$.

Формулировка и доказательство теоремы о среднем времени работы алгоритма QSort.

Теорема:

Среднее время работы алгоритма быстрой сортировки равно ***O(nlogn)***.

Доказательство:

Давайте сделаем следующее наблюдение: допустим, что медиана попадает в зону средней половины, то есть:

$$\underbrace{x_1, x_2, ..., x_{n/4}}_{n/4}, \underbrace{x_{n/4+1}, ..., x_{3n/4}}_{n/2}, \underbrace{x_{3n/4+1}, ..., x_n}_{n/4}$$

Если это так, то нужно посчитать количество в среднем шагов, требуемое для рекурсии. Заметим, что сначала имелся набор длины n, потом, в худшем случае, в одной из условных половинок длина станет $\frac{3}{4}n$. Затем повторяя процедуру, получим еще $\frac{3}{4}$ от $\frac{3}{4}n$. Повторяя снова и снова, пока не схолпнется в массив длины 1. Поэтому нам понадобиться не более, чем $\log_{4/3} n$, что по порядку равно $O\left(\log_2 n\right)$. На каждом шаге не более n сравнений, следовательно, в этом случае наша сложность равна $O\left(nlogn\right)$, при предположении, что наша медиана попадает в среднюю половину. Очевидно, что вероятность попадания медианы в среднюю половину на *i-м* шаге равна $1/2$, при условии, что выбор медианы случаен. Теперь, раз медиана окажется в средней половине с вероятностью $1/2$, следовательно, на каждом втором шаге медиана попадет в среднюю половину. Тогда нашему алгоритму в среднем достаточно сделать не более $2\log_{4/3} n$, что по порядку равно $O\left(\log_2 n\right)$, чтобы закончить работу и отсортировать массив. Значит сложность алгоритма в среднем не превосходит по порядку $O\left(n \log_2 n\right)$.

0.44 Билет 18. Алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути в графе и его сложность.

Понятие пути в графе

Пусть дан граф $G = (V, E)$ – ориентированный взвешанный граф, где V – множество вершин, E – множество ребер. $w(u, v)$ – вес ребра $e = (u, v)$, где $u, v \in V$. Веса всех ребер неотрицательны. Множество вершин у ребер, исходящих из вершины v, обозначается через $\Gamma(v)$.

Определение 1. *Ориентированным маршрутом* (или просто *маршрутом*) в графе G называется такая последовательность

$$S = (v_0, e_1, v_1, ..., e_n, v_n)$$

его чередующихся вершин v_i и ребер $e_j = (v_{j-1}, v_j)$ и такой маршрут называем (v_0, v_n)-маршрутом, а вершины v_0 и v_n называем *крайними.*

Определение 2. Маршрут называется *путем*, если все входящие в него вершины, кроме, возможно, крайних, различны.

Определение 3. *Весом пути P* будем называть сумму весов на ребрах в этом пути и будем обозначать $w(P)$.

Определение 4. *Кратчайшим (v_0, v_n)-путем* будем называть (v_0, v_n)-путь с минимальным весом.

Задача поиска кратчайшего пути в графе

Задача о кратчайшем пути состоит в отыскании пути минимального веса, соединяющего заданные начальные и конечные вершины графа G при условии, что хотя бы один такой путь существует.

Описание алгоритма Дейкстры Алгоритм Дейкстры – это алгоритм , который находит кратчайшие пути от одной вершины до всех остальных вершин. Начальную вершину обозначим через s.

На каждой итерации алгоритма любая вершина v графа G имеет метку $l(v)$, которая может быть постоянной или временной. В первом случае $l(v)$ – вес кратчайшего (s, v)-пути. Если же метка $l(v)$ временная, то $l(v)$ – вес кратчайшего (s, v)-пути проходящего через вершины с постоянными метками. Вершину с постоянной меткой также будем называть *закрепленной*, а вершину с временной меткой *незакрепленной.*

Алгоритм Дейкстры

1) Положить $l(s) := 0$ и считать эту метку постоянной. Положить $l(v) := \infty$ для всех $v \in V$, $v \neq s$, и считать эти метки временными. Положить $p := s$.

2) Для всех $v \in \Gamma(p)$ с временными метками выполнить: если $l(v) > l(p) + w(p, v)$, то $l(v) := l(p) + w(p, v)$, иначе не менять.
2-пункт будем называть *процедурой релаксации* вершины v.

3) Пусть W – множество вершин с временными метками l. Найти вершину g, такую что $l(g) = \min\limits_{v \in V} l(v)$. Считать метку $l(g)$ постоянной меткой вершины g.

4) $p := g$. Если не осталось вершин с временными метками l, то закончить алгоритм, иначе перейти к пункту 2.

Доказательство корректности алгоритма Для доказательства корректности алгоритма достаточно доказать, что постоянная метка $l(v)$ каждой вершины v равна весу кратчайшего (s, v)-пути. Будем доказывать по индукции. Пусть вершина v получила свою постоянную метку на k-й итерации, то есть после k-го выполнения пункта 3. При $k = 0$ у нас есть только одна закрепленная вершина (вершина s) и расстояние до нее равно нулю. Значит все верно. Предположим, что оно верно для вершин, получивших свои постоянные метки на итерациях $1, 2, 3, ..., k - 1$. Обозначим через B кратчайший (s, v)-путь. Предположим, что $l(v) > w(B)$. Пусть b – первая незакрепленная вершина в пути B, а все вершины до вершины b закреплены. Значит в пути B есть ребро от закрепленной к незакрепленной, то есть ребро (d, b), где d – закрепленная вершина, b – незакрепленная. Когда мы закрепляли вершину d мы делали релаксацию (пункт 2 в алгоритме). Тогда во время работы алгоритма метка $l(b)$ могла только уменьшаться. Значит $l(b) \leq l(d) + w(d, b)$. Но мы знаем, что на этой итерации (то есть на k-й) среди вершин с временными метками для закрепления мы выбрали вершину v, так как ее метка оказалась наименьшей среди временных меток. Значит $l(b) \geq l(v) > w(B)$. Но с другой стороны, мы знаем, что $w(B) \geq l(d) + w(d, b)$, так как путь B содержит путь от s до d и ребро (d, b), а вершина d закрепленная, то по предположению индукции кратчайшее расстояние от s до d равно $l(d)$. Отсюда

$$w(B) \geq l(d) + w(d, b) \geq l(b) \geq l(v) > w(B).$$

Получили противоречие. Значит $l(v) = w(B)$.

Сложность алгоритма Вычислительные затраты максимальны, когда граф G является полным. В этом случае число итераций алгоритма равно $|G| - 1$, то есть каждый из пунктов 2–4 выполняется $|G| - 1$ раз. Очевидно, что пункт 4 выполняется за время $O(1)$, а для выполнения каждого из пунктов 2 и 3 достаточно времени $O(|G|)$. Таким образом, сложность алгоритма есть $O(|G|^2)$.

0.45 Билет 19. Алгоритм построения минимального остовного дерева и его сложность

Понятие остовного дерева. Задача построения минимального остовного дерева. Описание алгоритма построения минимального остовного дерева. Обоснование сложности алгоритма построения минимального остовного дерева.

Дан взвешенный неориентированный граф G с m вершинами и n рёбрами. Требуется найти такое поддерево этого графа, которое бы соединяло все его вершины, и при этом обладало наименьшим возможным весом (т.е. суммой весов рёбер). Поддерево — это набор рёбер, соединяющих все вершины, причём из любой вершины можно добраться до любой другой ровно одним простым путём.

Такое поддерево называется **минимальным остовным деревом** или просто минимальным остовом. Легко понять, что любой остов обязательно будет содержать $n-1$ ребро.

Алгоритм Прима

На вход подается граф $G(V, E)$. Где вершин - m, ребер - n. На выходе получим T-остов, найденный алгоритмом.

Из V выбирается произвольная вершина i_1 Выбираем минимальное ребро из E, прилежащее к i_1 и добавляем к T ребро e_1 и конечную вершину i_2. (теперь в T лежит i_1, i_2, e_1) Выбираем из уже нового множества ребер E минимальное ребро, прилежащее к i_1 и i_2 и добавляем его к T Итак повторяем пока не запишем все m вершин или $n-1$ ребер.

Доказательство

Пусть G - связный граф $\Rightarrow \exists\, T$ - остов алгоритма, и S - минимальный остов. Очевидно, что T - поддерево G.

Покажем, что веса S и T равны. Рассмотрим добавление ребра(e) в T, при $e \notin S$. a и b - концы e. V - входящие на тот момент в остов вершины ($a \in V$, $b \notin V$). В S a и b соединены при помощи пути - P.

Найдем $\forall$ ребро - g в P с вершинами a и b. Алгоритм выбрал $e \Rightarrow g \geq e$ Удалим g из S и добавим e. Вес остова не увеличится и не уменьшится, т.к. S - оптимален. S - так же остов, т.к. мы замкнули путь P в цикл, и потом удалили из этого цикла ребро.

Итак, мы показали, что можно выбрать S таким образом, что он будет включать ребро e. Повторяя процедуру необходимое число раз получим $S = T \Rightarrow T$-минимален. ■

Сложность

Время работы алгоритма зависит от того, каким образом мы производим поиск очередного минимального ребра.

1) Если искать каждый раз ребро простым просмотром среди всех возможных вариантов, то асимптотически будет требоваться просмотр $O(m)$ рёбер, чтобы найти среди всех допустимых ребро с наименьшим весом. Суммарная асимптотика алгоритма составит в таком случае $O(nm)$, что в худшем случае есть $O(n^3)$, — слишком медленный алгоритм.

2) Этот алгоритм можно улучшить, если просматривать каждый раз не все рёбра, а только по одному ребру из каждой уже выбранной вершины. Для этого, например, можно отсортировать рёбра из каждой вершины в порядке возрастания весов, и хранить указатель на первое допустимое ребро (напомним, допустимы только те рёбра, которые ведут в множество ещё не выбранных вершин). Тогда, если пересчитывать эти указатели при каждом добавлении ребра в остов, суммарная асимптотика алгоритма будет $O(n^2 + m)$, но предварительно

потребуется выполнить сортировку всех рёбер за $O(m \log n)$, что в худшем случае (для плотных графов) даёт асимптотику $O(n^2 \log n)$.

3)Для каждой ещё не выбранной вершины будем хранить минимальное ребро, ведущее в уже выбранную вершину.

Тогда, чтобы на текущем шаге произвести выбор минимального ребра, надо просто просмотреть эти минимальные рёбра у каждой не выбранной ещё вершины — асимптотика составит $O(n)$. Но теперь при добавлении в остов очередного ребра и вершины эти указатели надо пересчитывать. Заметим, что эти указатели могут только уменьшаться, т.е. у каждой не просмотренной ещё вершины надо либо оставить её указатель без изменения, либо присвоить ему вес ребра в только что добавленную вершину. Следовательно, эту фазу можно сделать также за $O(n)$.

Таким образом, мы получили вариант алгоритма Прима с асимптотикой $O(n^2)$.

Алгоритм Крускала

На вход подается граф $G(V, E)$. На выходе получим T-остов, найденный алгоритмом.

Помещаем каждую вершину i_j (j=1,...,m) в дерево T_j и берем произвольную i_1(исходная) помещаем в T. Формируем список ребер E и упорядочиваем по возрастанию весов (e_1<...<e_n). Выбираем минимальное не образующее цикл ребро из E, у которого вершины лежат в разных поддеревьях. Объединяем поддеревья и добавляем ребро к ответу. Итак повторяем пока не запишем все m вершин или $n-1$ ребер.

Доказательство

Пусть e_1,...,$e_{(n-1)}$ ребра остовного дерева в том порядке как их выбирал алгоритм и $e_1 < e_2 < ... < e_{(n-1)}$

Если полученное дерево не минимально, то $\exists$ другое дерево d_1,...,$d_{(n-1)}$, такое что сумма длин d_i меньше суммы длин e_i и $d_1 < d_2 < ... < d_{(n-1)}$.

Может быть $e_1 = d_1$, $e_2 = d_2$ и т.д., но так как деревья разные, то найдется такое место – k, так что $e_k \neq d_k$.

Поскольку e_k выбиралось по алгоритму самым малым из не образующих цикла с ребрами e_1,...,$e_{(k-1)}$, то $e_k < d_k$. Теперь добавим к дереву d_1,...,$d_{(n-1)}$ ребро e_k; в нем появится цикл, содержащий ребро e_k и, может быть, какие-то (или все) ребра e_1,...,$e_{(k-1)}$, но они сами не образуют цикла, поэтому в цикле будет обязательно ребро d из набора d_k,...,$d_{(n-1)}$, причем $d > e_k$.

Выбросим из полученного графа с одним циклом ребро d; мы снова получим дерево, но оно будет на d - короче минимального, что невозможно. Противоречие. ■

Сложность

Сортировка рёбер потребует $O(m \log n)$ операций. Для каждого ребра мы за $O(1)$ определяем, принадлежат ли его концы разным деревьям. Наконец, объединение двух деревьев осуществляется за $O(n)$ простым проходом по массиву хранения вершин. Учитывая, что всего операций объединения будет $n-1$, мы и получаем асимптотику $O(m \log n + n^2)$.

0.46 Билет 20. Теорема Форда-Фалкерсона о максимальном потоке через сеть

Потоки в сетях

Определение 1. *Сетью* называется конечный ориентированный слабо связный не имеющий петель граф G(V,E), в котором выделяются две вершины: s — исток, t — сток, и при этом данный граф — нагруженный, то есть ребра графа $(u, v) \in E$ имеют целые неотрицательные числа(нагрузки) $c(u, v) \geq 0$.

Определение 2. *Стационарным потоком в сети G* называется отображение f(u,v): $E \to \mathbb{N}^+$, где $\mathbb{N}^+$ — множество целых неотрицательных чисел, E — множество ребер, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Нагрузка каждого ребра в потоке не превосходит ребра в сети:
   $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$.
2. Условие стационарности: $\forall u \in U \setminus \{s, t\}$
   $\sum\limits_{v \in V} f(v, u) = \sum\limits_{v \in V} f(u, v)$, где при $(u, v) \notin E$, $f(u, v) = 0$,
   то есть берем любую вершину отличную от истока и стока, тогда сумма пометок по всем исходящим из вершины ребрам равна сумме пометок по всем входящим в эту вершину ребрам.

Определение 3. *Мощностью потока* называется неотрицательная величина, которая определяется следующим образом:

$$\sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s),$$

то есть от суммы пометок по всем исходящим из истока ребрам отнимаем сумму пометок по всем входящим в сток ребрам.

Задача построения максимального потока в сети

В сети есть много стационарных потоков, нам нужно собрать поток с максимальной мощностью. Ответ на даннную задачу дает теорема Форда-Фалкерсона.

Формулировка и доказательство теоремы Форда-Фалкерсона

Определение 4. *Разрезом в сети G(V,E)* называется разбиение множества вершин сети на два непустых непересекающихся класса V_1 и V_2 таких, что $s \in V_1$, $t \in V_2$ и $V_1 \cup V_2 =$ V.

Определение 5. *Чистой величиной разреза* называется следующая величина:

$$\sum_{u \in V_1} \sum_{v \in V_2} f(u,v) - \sum_{u \in V_1} \sum_{v \in V_2} f(v,u),$$

то есть рассматриваем все ребра из V_1 в V_2, называемые прямыми, складываем сумму их потоков и удаляем величину потоков по всем обратным ребрам от V_2 к V_1.

Определение 6. *Величиной разреза* называется сумма потоков по прямым ребрам:

$$\sum_{u \in V_1} \sum_{v \in V_2} f(u,v).$$

Теорема. Для любой сети мощность максимального потока совпадает с величиной минимального разреза.
▷ **Доказательство теоремы.**

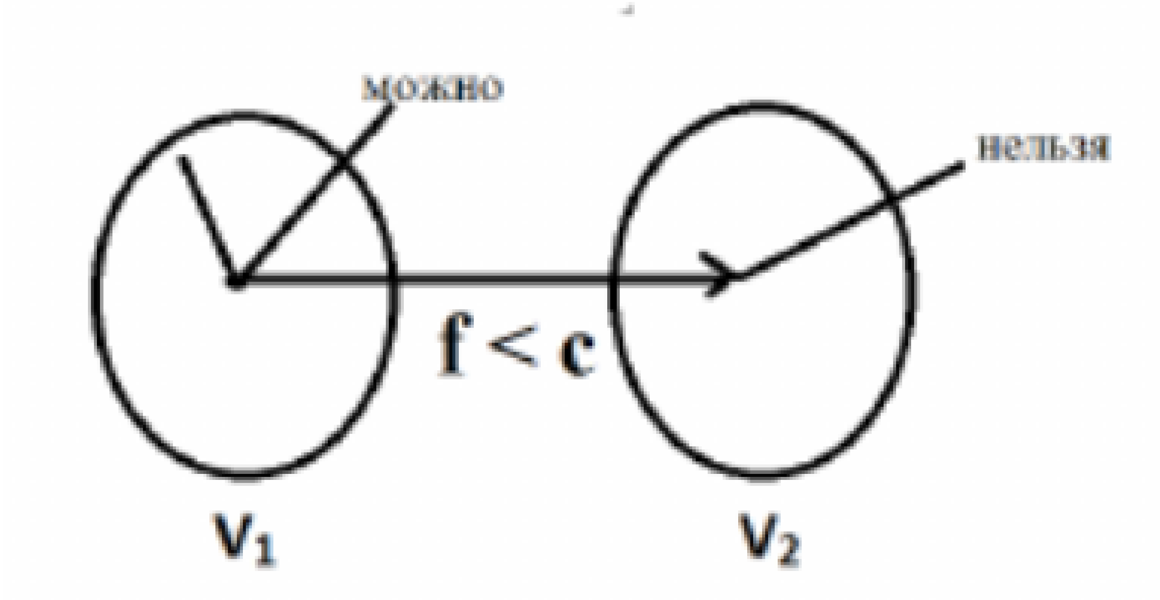
Утверждение. Величина любого разреза больше либо равна мощности любого потока.

Доказательство утверждения. Рассмотрим произвольный поток и сумму по всем вершинам нашей сети $\sum\limits_{u \in V_1}$, а в ней рассмотрим выражение: $\sum\limits_{v \in V} f(u,v)$ - $\sum\limits_{v \in V} f(v,u)$ (то есть, по каждой вершине $u \in V_1$, из всех исходящих из нее нагрузкок ребер отнимаем все входящие в нее нагрузки ребер), по определению данная величина будет потоком, потому что мы суммируем по всем ребрам, сумма по вершинам отличным от s - истока будет равна 0, в силу условия стационарности. Таким образом, эта сумма равна мощности потока. То есть, величину потока представили в виде суммы по всем вершинам компоненты V_1. Но с другой стороны, в этой сумме у нас есть три типа ребер:

1. Ребра, идущие из V_1 в V_2 — *прямые ребра.*
2. Ребра, идущие из V_2 в V_1 — *обратные ребра.*
3. Ребра, идущие из V_1 в V_1 — *внутренние ребра.*

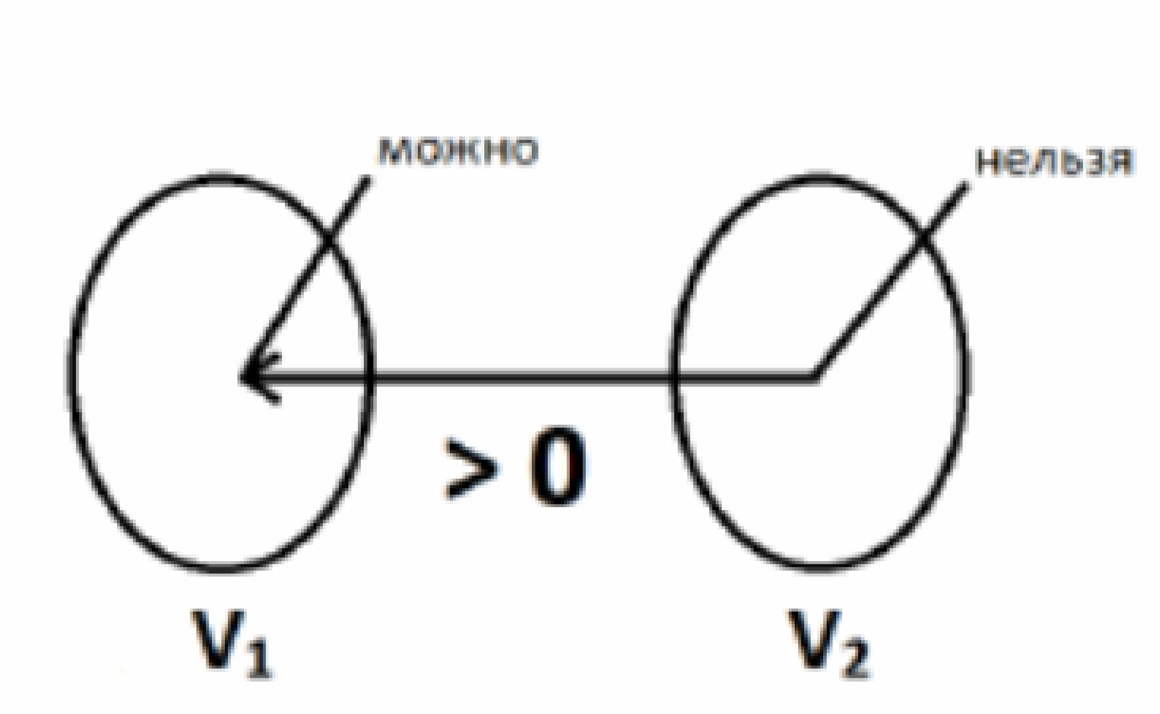
Все ребра 3 типа в сумме дают 0. Таким образом, эта сумма равна разнице суммы нагрузок по прямым ребрам и суммы нагрузок по обратным ребрам разреза. То есть, получили чистую величину разреза. Это значит, что величина потока совпадает с чистой величиной разреза, но чистая величина разреза не превосходит просто величины разреза (так как там есть вычитание неотрицательного числа). Таким образом, мы доказали, что мощность потока не больше величины разреза.

Вернемся к доказательству основного утверждения теоремы. Для того чтобы это доказать, достаточно получить для максимального потока такой разрез, величина которого совпадала бы с мощностью потока. Построим разрез в явном виде. Пусть нам известен максимальный поток в сети. Для него образуем соответствующий разрез. По определению, разрез — это разбиение множества вершин сети на 2 класса V_1 и V_2. В V_1 попадают такие вершины сети, в которых существует насыщающий путь из истока s, в компоненту V_2 — все остальные вершины. Насыщающий путь — это такая последовательность ребер из s в вершину, в которой для каждого ребра выполнены следующие условия: если ребро — прямое, то его пометка должна быть меньше пропускной способности этого ребра в сети, а если ребро — обратное, то его пометка должна быть ненулевой (положительной). Таким образом, мы получили два множества V_1 и V_2. Докажем, что это разрез. Очевидно, что $s \in V_1$, так как из s в s можно найти насыщающий пустой путь. Покажем, что $t \in V_2$, то есть из s в t не существует насыщающего пути. Это очевидно, если из s в t существовал бы насыщающий путь, то по этому пути можно увеличить максимальный поток, но так как поток и так максимальный, этого сделать нельзя. Следовательно, $t \in V_2$. V_1 и V_2 вместе дают V, они не пересекаются, $s \in V_1$, $t \in V_2$. Следовательно, это разрез.



Рассмотрим прямое ребро из V_1 в V_2.
Его нагрузка максимальна, то есть совпадает с пропускной способностью ребра. Это верно, так как если бы было ребро, с нагрузкой меньше пропускной способности, так же нам известно, что в вершину из V_1 существует насыщающий путь из s и мы можем добавить в этот путь прямое ребро, которое не нагружено максимально, значит это тоже насыщающий путь из s в вершину из V_2, а это значит, что вершина должна быть не в V_2, а в V_1 — противоречие. Следовательно, все прямые ребра в нашем разрезе наргружены максимально.

Теперь рассмотрим обратое ребро из V_2 в V_1.



Нагрузка этого ребра нулевая. От противного, предположим, что нагрузка ненулевая. Тогда из s — истока в вершину из V_1 есть насыщающий путь, добавим в него ребро, так как нагрузка ненулевая, то можно хотя бы на 1 запустить насыщающий путь, значит вершина должна быть в V_1, а она лежит в V_2 — противоречие.

Мы показали, что по всем прямым ребрам разреза величина максимальная, по всем обратным — нулевая. Но нам известно, что мощность максимального потока совпадает с чистой величиной разреза, а чистая величина разреза в данном случае и есть величина разреза (так как по обратным ребрам нагрузка нулевая). Все прямые ребра дают нам величину разреза, тем самым мы доказали, что для данного максимального потока найдется разрез, который совпадает с ним по величине. А так как мощность любого потока не больше величины любого разреза, значит мощность максимального потока совпадает с величиной минимального разреза.

Алгоритм отыскания максимального потока в сети (Алгоритм Форда-Фалкерсона)

Этот алгоритм можно сформулиовать следующим образом:

1. Построим некоторый нулевой поток, нагрузка по всем ребрам равна 0.
2. Найдем насыщающий путь от s в t, если такого пути нет, то построенный поток максимален и алгоритм завершается, если такой путь есть, то перейдем к пункту 3.
3. Найденный путь максимально насыщаем (то есть по прямым ребрам добавляем насколько это возможно, а по обратным ребрам — уменьшаем). Далее строим новый поток и переходим к пункту 2.

Можем заметить, что алгоритм Форда-Фалкерсона завершается в том случае, если насыщающего пути от s в t нет, то есть построенный поток максимален. На каждом шаге, на котором найден такой насыщающий путь, алгоритм продолжается. Вместе с тем, на каждом шаге при выполнении пункта 3 образуется хотя бы один насыщающий путь. А так как число путей в сети конечно, то через конечное число шагов алгоритм завершится. Далее строим разрез таким образом, чтобы все вершины, в которые есть насыщающий путь из s относились в V_1, а все остальные — в V_2 , причем $s \in V_1$, $t \in V_2$, то есть из s в s найдется насыщающий пустой путь, а из s в t нет насыщающего пути. Следовательно, построили разрез. Далее, опираясь на доказательство, говорим, что по всем прямым ребрам нагрузка максимальная, а по обратным — нулевая. Нам известно, что мощность максимального потока совпадает с чистой величиной разреза, а так как нагрузка по обратным ребрам нулевая, то величина разреза и есть чистая величина разреза. Все прямые ребра дают нам величину разреза, то есть, для данного максимального потока найдется разрез, который совпадает с ним по величине. Таким образом, мы построили максимальный поток.

0.47 Билет 21. Линейное программирование. Симплекс метод.

Постановки задач линейного программирования. Выпуклые многогранники. Базисный план. Угловая точка. Алгебраическая характеристика базисной точки. Алгоритм перехода од одной базисной точки к другой. Описание симплекс метода.

Линейное программирование

Линейное программирование — математическая дисциплина, посвящённая теории и методам решения экстремальных задач на множествах n-мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств.

Постановки задач линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) – это задача выбора таких неотрицательных значений некоторых переменных, подчинённых системе ограничений в форме линейных неравенств, при которых достигается максимум или минимум данной линейной функции.

Общей (стандартной) задачей линейного программирования называется задача нахождения максимума линейной целевой функции (линейной формы) вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n.$$

Задача, в которой фигурируют ограничения в форме неравенств, называется *основной задачей линейного программирования (ОЗЛП)*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Каждое из ограничений вида

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

задает полупространство. В пересечении все неравенства зададут некоторый многогранник, необязательно ограниченный.

Задача линейного программирования будет иметь *канонический вид*, если в основной задаче вместо первой системы неравенств имеет место система уравнений с ограничениями в форме равенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Систему $Ax = b$ назовем *непрямыми ограничениями*, систему $x \geq 0$ — *прямыми ограничениями.*

Допустимым множеством канонической задачи назовем множество $D = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, \quad x \geq 0\}$.

Основную задачу можно свести к канонической путём введения дополнительных переменных.

Задачи линейного программирования наиболее общего вида (задачи со смешанными ограничениями: равенствами и неравенствами, наличием переменных, свободных от ограничений) могут быть приведены к эквивалентным ЗЛП (имеющим то же множество решений) заменами переменных и заменой равенств на пару неравенств.

Задачу нахождения максимума можно заменить задачей нахождения минимума, взяв коэффициенты c с обратным знаком.

Выпуклые многогранники

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ *выпукло*, если $\forall x_1, x_2 \in F$ и $\forall \lambda \in [0, 1]$ выполняется $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in F$.

Заметим, что каждое из линейных неравенств на переменные ограничивает полупространство в соответствующем линейном пространстве. В результате все неравенства ограничивают некоторый выпуклый многогранник (возможно, бесконечный).

Угловая точка

Пусть M — выпуклое множество. Точка $x \in M$ называется *угловой точкой* множества M, если $\nexists x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2 : \quad x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, при $\lambda \in (0,1)$.

Симплекс-метод

Основным численным методом решения задач линейного программирования является *симплекс-метод.*

Термин «симплекс-метод» связан с тем историческим обстоятельством, что первоначально метод был разработан применительно к задаче линейного программирования, допустимое множество которой имело вид

$$X' = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

(Это множество именуется стандартным симплексом).

Геометрический смысл симплекс-метода состоит в переходе от исходной точки (называемой первоначальной) к некоторой смежной угловой точке (вершине) многогранника ограничений.

Симплекс-метод предназначен для решения задачи линейного программирования в канонической форме

$$\begin{cases} (c,x) \to max \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

где A – матрица размера $m \times n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad c \in \mathbb{R}^n$.

Будем предполагать, что $m < n$ и что в матрице A нет линейно зависимых строк, то есть $rk(A) = m$ (если $m > n$, то в матрице A строки линейно зависимы, то есть можно привести к $m \leq n$; если $m = n$ и $rk(A) = m$, то не имеет места задача оптимизации, так как в этом случае точка, удовлетворяющая непрямым ограничениям, единственна).

Обозначим через $a_1, a_2, ..., a_n$ столбцы матрицы A.

Базисом матрицы A называется набор m линейно независимых столбцов $B = \{A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_m}\}$.

Для удобства будем считать, что на первых m местах матрицы A расположены линейно независимые столбцы, образующие базис матрицы. Представим матрицу A в виде совокупности двух подматриц $A = (B, N)$, где B — базис матрицы. Для получения x, удовлетворяющего системе непрямых ограничений, представим его в виде

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix},$$

где x_B — вектор первых m координат; x_N — вектор $(n-m)$ последних координат вектора x.

Алгебраическая характеристика базисной точки Систему непрямых ограничений можно представить в виде

$$Bx_B + Nx_N = b,$$

откуда

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

По этой формуле будем вычислять вектор x_B, задавая произвольные значения компонентам вектора x_N, тем самым получим x, удовлетворяющий непрямым ограничениям.

Базисный план

Вектор x_B называется *вектором базисных переменных*, а вектор x_N — *вектором небазисных переменных.*

Базисным решением x системы непрямых ограничений, соответствующим базису B назовем частное решение системы алгебраических уравнений

$$Bx_B + Nx_N = b,$$

в котором $x_N = 0$.

При $x_N = 0$

$$x_B = \overline{x} = B^{-1}b.$$

То есть, при $B^{-1}b \geq 0$ x будет удовлетворять системе прямых ограничений $x \geq 0$.

Базисное решение x, удовлетворяющее системе прямых органичений $x \geq 0$, назовем *допустимым базисным решением.*

Базисное решение x называется *вырожденным*, если вектор базисных переменных x_B имеет нулевые компоненты.

Теорема. $x \in D$ является допустимым базисным решением ЗЛП $\Leftrightarrow x \in D$ является угловой точкой.

Доказательство. От противного.

Необходимость. Пусть

$$x = (x_1, x_2, ..., x_m, \underbrace{0, ..., 0}_{n-m})^T,$$

где $x_1 \geq 0, ..., x_m \geq 0$ — допустимое базисное решение ЗЛП. Необходимо доказать, что в этом случае невозможно представление в виде

$$x = \lambda x' + (1 - \lambda)x'',$$

где $x', x'' \in D$ и $0 < \lambda < 1$, другими словами, x — угловая точка D.

Если $x = 0$ — вырожденное допустимое базисное решение, то невозможность его представления в виде $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$, где $0 < \lambda < 1$ и $x' \neq x''$ — допустимые базисные решения, очевидна, то есть $x = 0$ — угловая точка области допустимых решений D.

Пусть допустимое базисное решение задачи $x \neq 0$.
Докажем от противного: предположим, что точка x не является угловой точкой D, то есть существует $x' \neq x'' \in D$, где $x' = (x'_1, ..., x'_m, 0, ..., 0)^T$ и $x'' = (x''_1, ..., x''_m, 0, ..., 0)^T$, что $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$, для любых $\lambda \in (0, 1)$.

В таком случае $Ax = \lambda Ax' + (1 - \lambda)Ax'' = b$. Из допустимости x' и x'', то есть $Ax' = b, \quad Ax'' = b$, следует, что $A(x' - x'') = 0$, где $0 = (0_1, ..., 0_m)^T$ — нулевой вектор. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{m} (x'_j - x''_j)A_j = 0,$$

где $A_j = (a_{1j}, ..., a_{mj})^T$ — вектор-столбец базисной матрицы B, то есть получили тривиальную линейную комбинацию линейно зависимых вектор-столбцов $A_1, A_2, ..., A_m$ матрицы A (так как $x' - x'' \neq 0$). Противоречие с тем, что x — допустимое базисное решение. Следовательно, всякому допустимому базисному решению соответствует угловая точка из области допустимых решений D ЗЛП.

Достаточность. Докажем, что если x — угловая точка из D, то x — допустимое базисное решение из D.

Предположим, что это не так, то есть вектор x, являясь допустимым для нашей задачи, не является допустимым базисным решением. Представим x в виде $x = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)^T$, где $x_j > 0, \quad j = \overline{1, k}$ (номера индексов ненулевых координат). Тогда $A_1, A_2, ..., A_k$ — линейно зависимые векторы и поэтому существует тривиальная линейная комбинация линейно зависимых векторов, то есть существуют $y_1, ..., y_k \in \mathbb{R}$, не все одновременно равные нулю, что справделиво равенство

$$\sum_{j=1}^{k} y_j A_j = 0.$$

Расширим вектор $y^T = (y_1, ..., y_k)$ нулями до n-мерного. Значит,

$$Ay = 0, \quad y \neq 0.$$

Являясь допустимым, x удовлетворяет условию

$$Ax = b.$$

Умножим обе части равенства $Ay = 0$ на некоторый параметр ε и сначала вычтем почленно $Ay = 0$ из $Ax = b$, затем сложим $Ay = 0$ и $Ax = b$:

$$A(x - \varepsilon y) = b, \quad A(x + \varepsilon y) = b.$$

Так как $x_j > 0 \quad (j = \overline{1, k})$, то очевидно, что для последних систем уравнений при достаточно малом положительном ε должно выполняться условие $x \pm \varepsilon y \geq 0$. Тогда эти равенства означают, что n-мерные векторы

$$x' = x + \varepsilon y, \quad x'' = x - \varepsilon y$$

являются допустимыми решениями задачи. При этом из $x' = x + \varepsilon y$ и $x'' = x - \varepsilon y$ имеем $x = (x' + x'')/2$, что противоречит тому, что x — угловая точка. Следовательно, x — допустимое базисное решение. ■

Следствие. Выпуклое множество $D = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, \quad x \geq 0\}$ имеет конечное число угловых точек $\nu(D) \leq C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$.

Доказательство. Максимальное число базисов, извлеченных из матрицы A, равно числу возможностей выбора m столбцов из n, то есть C_n^m, и не все они — допустимые базисные решения.■

Последовательность угловых точек в симплекс-методе выбирается таким образом, чтобы целевая функция при переходе от точки x_k, соответствующей базису B_k, к точке x_{k+1}, соответствующей базису B_{k+1}, строго возрастала, то есть

$$(c, x_k) < (c, x_{k+1}).$$

Суть симплекс-метода составляют 3 правила:

1. Правило оптимальности — позволяет заключить, что x_k является решением задачи.

2. Правило отсутствия решения — позволяет заключить, что ЗЛП не имеет решения.

3. Правило перехода к лучшей угловой точке — указывает новую угловую точку x_{k+1}, для целевой функции которой выполняется строгое неравенство $(c, x_k) < (c, x_{k+1})$.

В каждом шаге симплекс-метода будет справедливо одно из правил. Так как число угловых точек конечно, то за определенное число шагов будет получено решение ЗЛП.

Алгоритм перехода от одной базисной точки к другой

Рассмотрим представление целевой функции

$$c^T x = c_B^T \overline{x} - (c_B^T X - c_N^T) x_N,$$

где $B = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ — базис матрицы A;

$\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m)^T = B^{-1} b$ — вектор значений базисных переменных $\{x_{j_1}, ..., x_{j_m}\}$, то есть $x_{j_i} = \overline{x_i}, \quad i = \overline{1, m}$;

$X = B^{-1} N = \{X_{m+1}, ..., X_j, ..., X_n\}$;

$X_j = B^{-1} a_j$ — координаты разложения небазисного вектор-столбца A_j по базису B.

Назовем *симплекс-разностью* для j-й переменной в базисе B величину

$$\Delta_j = c_B^T B^{-1} A_j - c_j = c_B^T X_j - c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Симплекс-разность можно рассматривать как оценку вектора A_j при данном x_j допустимом базисном решении. Так как координаты разложения базисного вектор-столбца A_j по базису B — единичный вектор-столбец, то есть $X_j = E_j (j = \overline{1, m})$ и $c_B^T E_j = c_j$, то симплекс-разности для базисных переменных — нулевые, а для небазисных — коэффициенты возрастания или убывания целевой функции (так как $x_N \geq 0$).

Значит, для возрастания целевой функции целесообразно увеличивать небазисные переменные с отрицательными симплекс-разностями. Выберем некоторую небазисную переменную $x_t, \quad (t \in J_N$ — множество индексов, соответствующих номерам небазисных вектор-столбцов A_t матрицы $A)$ и выясним вопрос, до какого значения ее можно увеличивать. Рассмотрим

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \geq 0.$$

При $x_t \geq 0$ и при всех остальных небазисных переменных, равных 0, должно выполняться условие

$$x_B = \overline{x} - X_t x_t \geq 0,$$

где $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{mt})^T$. Решая эту систему неравенств относительно x_t, получим $x_{it} x_t \leq \overline{x}_i, \quad x_t \leq \frac{\overline{x}_i}{x_{it}}$, где $x_{j_i} = \overline{x}_i$, откуда

$$x_t = \min_{x_{it} > 0} \left\{ \frac{\overline{x}_i}{x_{it}} \right\}, \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

В случае, если все координаты вектора X_t отрицательные или нулевые $(x_{it} \leq 0, \quad i = \overline{1, m})$, то x_t не ограничена сверху, то есть, бесконечно увеличивая x_t при отрицательной симплекс-разности, можно получить произвольно большое значение целевой функции и в этом случае ЗЛП не будет иметь решения.

Теорема (критерий неограниченности целевой функции, правило выявления отсутствия решения). Если для какого-нибудь допустимого базисного решения x существует хотя бы одна отрицательная симплекс-разность, то есть $\Delta_t < 0 \quad (t \in J_N)$ такая, что для нее все коэффициенты разложения $X_t = B^{-1}A_t$ вектор-столбца A_t матрицы A по базису B не положительны $x_{it} \leq 0 \quad (i = \overline{1,m})$, то это означает, что целевая функция данной ЗЛП на максимум не ограничена сверху на допустимом множестве решений D, то есть

$$c^T x = c_B^T \overline{x} - \Delta_t x_t \to +\infty.$$

Теорема об оптимальности допустимого базисного решения. Если для данного допустимого базисного решения все симплекс-разности $\Delta_k \quad (k = \overline{1,n})$ в текущем базисе неотрицательны, то это решение оптимальное.

Доказательство. Пусть для данного допустимого базисного решения $x = (\overline{x}, 0)^T = (x_1, x_2, ..., x_m, 0_{m+1}, ..., 0_n)^T$ и, следовательно, его базиса

$$B = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$$

выполнены условия теоремы

$$\Delta_k = c_B^T B^{-1} A_k - c_k \geq 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Возьмем любое другое допустимое решение $y \geq 0 \quad (Ay = b)$ канонической ЗЛП. Умножим каждое из неравенств $c_B^T B^{-1} A_k - c_k \geq 0$ на компоненту вектора $y = (y_1, ..., y_n)^T$ с соответствующим номером, которая по условию неотрицательна, и просуммируем неравенства. В результате имеем

$$c_B^T B^{-1} A y - c^T y \geq 0.$$

По условию $Ay = b$. Из $c_B^T B^{-1} b = c_B^T \overline{x}$ получаем $c_B^T \overline{x} \geq c^T y$. ■

Описание симплекс-метода

Дана ЗЛП в канонической форме с невырожденным допустимым базисным решением (выбираем такое):

$$\begin{cases} c^T x \to max \ (min), \\ Ax = b, \\ x = (\bar{x}_{j_1} \dots \bar{x}_{j_m}, 0_{j_{m+1}} \dots 0_{j_n})^T \geq 0. \end{cases}$$

Исходный базис этой задачи составят векторы:

$$B = \{A_{j_1}, \dots, A_{j_m}\}.$$

1. Инициализация

Нужно разложить по исходному базису небазисные вектор-столбцы матрицы A. Ищем координаты $X_j = B^{-1}A_j \ (j \in J_N)$, где J_N — множество номеров небазисных переменных. Разложения базисных вектор-столбцов и значения базисных переменных известны:

$$X_{j_i} = E_i = (0_1 \dots 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1} \dots 0_m)^T,$$
$$\bar{x} = B^{-1} b.$$

2. Условие оптимальности

Если все $\Delta_j \geq 0$ (≤ 0), то данное базисное решение **оптимально**. Процесс решения задачи окончен.
Иначе существует $\Delta_j < 0$ (> 0). Переходим к шагу 3.

3. Условие отсутствия решения

Если существует $\Delta_j < 0$ (> 0) : все координаты X_j не положительны, то есть $x_{ij} \leq 0$ $(i = 1, \dots, m)$, то целевая функция **не ограничена** сверху (снизу) на допустимом множестве. Процесс решения задачи окончен.
Иначе существует $x_{ij} > 0$. Переходим к шагу 4.

4. Итерация (Переход к новому базицу B')

$$\Delta_t = \max_{\Delta_j < 0} |\Delta_j|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Соответствующая вектор-столбцу X_t небазисная переменная x_t вводится в базис. Вычислить отношения $\frac{\bar{x}_i}{x_{it}}$ для всех i, для которых $x_{it} > 0$, и найти минимальное из этих отношений:

$$\frac{\bar{x}_k}{x_{kt}} = \min_{x_{it}>0} \frac{\bar{x}_i}{x_{it}}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Соответствующая k-й строке матрицы A текущая базисная переменная $x_{j_k} = \bar{x}_k$ обращается в нуль и выводится из базиса. t-я вводимая в базис переменная принимает значение $(x_{B'})_{t_k} = x_t = \bar{x}'_k = \frac{\bar{x}_k}{x_{kt}} > 0$.
Переходим к новому базису B' путем замены вектора A_k вектором A_t:

$$\{B'\} = \{B \setminus A_k\} \cup \{A_t\}.$$

Переходим к шагу 2.

0.48 Билет 22. Динамическое программирование. Принцип оптимальности. Уравнение Беллмана.

Модель динамического программирования. Идея метода динамического программирования. Принцип оптимальности Беллмана. Задачи решаемые методами динамического программирования.

Динамическое программирование — это вычисление целевой функции с помощью вычисления аналогичных функций для подзадач. Другими словами, это рекурсивный подсчет значения целевой функции через саму себя от меньшего (в каком-то смысле) набора значений.

1. Рассматривается система, состояние которой обозначаем за x_t. Предполагаем, что время t изменяется дискретно и принимает целочисленные значения 0, 1, 2, ... (фиксирован конечный момент времени). Дальнейшее изменение ее состояния зависит только от данного состояния x_t и не зависит от того, каким путем система пришла в него (процессы без последствия).

2. На каждом следующем шаге выбирается одно из конечного множества Ω_t управлений значение u_t, под действием которого система переходит из предыдущего состояния x_{t-1} в новое x_t. Здесь $x_t = f_t(x_{t-1}, u_t)$.

3. Действие на каждом шаге связано с определенным выигрышем или потерей, которые зависят от состояния на начало шага и принятого решения. Для простоты будем считать, что начальное x_0 и конечное x_T состояния системы заданы. Обозначим через $z_1(x_0, u_1)$ значение функции цели на первом этапе при начальном состоянии системы x_0 и при управлении u_1, через $z_2(x_1, u_2)$ — соответствующее значение функции цели на втором этапе, ..., через $z_i(x_{i-1}, u_i)$ — на i-м этапе, ..., через $z_n(x_{n-1}, u_n)$ — на n-м этапе.

$Z = z(x_0, u) = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i(x_{i-1}, u_i)$ — целевая функция.

4. Требуется найти в каждый момент времени t такое допустимое управление u_t, чтобы получить максимальное значение функции цели за все T шагов. При этом мы должны прийти в финальное состояние x_t.

Принцип оптимальности

Заметим, что наша модель удовлетворяет следующим принципам:
Принцип оптимальности. Каковы бы ни были начальное состояние и начальные решения, последующие решения должны приниматься только исходя из текущего состояния системы.
Принцип погружения. Форма задачи, допускающей использование метода ДП, инвариантна относительно T.
Реализация данных принципов дает гарантию того, что решение, принимаемое в очередном шаге, окажется наилучшим относительно всего процесса в целом, а не узких интересов данного этапа.

Уравнение Беллмана

Обозначим через $F_1(x_{n-1}), F_2(x_{n-2}), ..., F_n(x_0)$ условно-оптимальные значения приращений целевой функции на последнем шаге, двух последних, . . . , на всей последовательности шагов, соответственно.

Тогда для последнего шага:
$F_1(x_{n-1}) = max(z_n(x_{n-1}, u_n)),\ \ u_n \in \Omega_n$.

Для k последних шагов:
$F_k(x_{n-k}) = max(z_{n-k+1}(x_{n-k}, u_{n-k+1}) + F_{k-1}(x_{n-k+1})),\ \ u_{n-k+1} \in \Omega_{n-k+1}$.

0.49 2020

Вопросы по дискретной части

1. Что будет в алгоритме Дийкстры, если веса отрицательные?

2. Когда линейное пространство называется конечномерным? Что такое n-мерное пространство?

3. Замыкание булевской функции содержит $\{0, 1\}$, будет ли она монотонной?

4. Дана линейная самодвойственная функция. От скольких переменных она существенно зависит?

5. Во всяком ли линейном пространстве существует конечный базис? Приведите пример бесконечномерного пространства.

6. Что такое о.д. функция, ее вес, какова связь с конечными автоматами?

7. От какого числа переменных зависит константа 0?

8. Сколько замкнутых классов в P_k? Докажите, что их континуум, используя Т.Мучника.

9. Должна ли задача динамического программирования зависеть от времени? Например, задача о распределении инвестиций.

10. Можно ли так организовать обучающее множество для перцептрона так, чтобы за определенное время был гарантированно получен окончательный результат?

11. Сколько времени работает алгритм qsort в худшем случае?

12. Лемма о немонотонной функции. Дана функция, заданная вектором значений (00110001). Получите из нее отрицание.

13. Сформулировать лемму о нелинейной функции. Применить ее к функции, заданной вектором значений (00111101).

14. Построить разбиение 3-мерного куба на цепи Анселя.

15. Есть элементы: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание и задержка с нулевым состоянием. Получите задержку с единичным начальным состоянием.

16. Дана функция: на вход подается $x(1), \dots, x(n)$ из $\{0, 1\}$, а на выходе $y(1), \dots, y(n)$, где $y(i) = x(1) + \dots + x(i) \quad mod 24$. Будет ли эта ф-я ограниченно-детерминированной?

17. Привести пример конечной полной системы в классе о.-д. ф-й.

18. Чем надо дополнить линейные функции в P_2, чтобы получить полную систему?

19. Привести пример шефферовой функции в $P_2(n)$, существенно зависящей от всех своих переменных.

20. Почему в связном графе существует остов?

21. Какова сложность проверки существования цикла в графе?

22. Зачем нужен алгоритм Прима, почему нельзя просто перебором найти минимальный остов?

23. Планарен ли граф закрытый конверт?

24. Планарен ли граф Петерсона?

25. Почему сойдется алгоритм Форда-Фалкерсона?

26. Почему алгоритм Форда-Фолкерсона сойдется к максимальному потоку?

27. Верно ли, что объединение предполных классов в P_2 равно P_2?

28. Сформулировать постановку задачи симплекс-метода. Привести верхнюю оценку на количество угловых точек в симплекс-методе.

29. Как вывести из пустого списка формул тавтологию ($\neg f \to (f \to g)$)?

30. Привести пример конечного базиса в L из P_2.

31. Сколько элементов в конъюнкции ранга s в n-мерном булевом кубе?

32. Может ли ядровая грань быть регулярной?

33. Локальна ли проверка принадлежности макисмальной грани ДНФ типа сумма тупиковых?

34. Сформулировать условие немоннотонности булевой функции.

35. Сформулировать теорему Кузнецова в P_k.

36. Верно ли, что в булевой алгебре логики класс M лежит в объединении классов T_0, T_1, S?

37. Построить СФЭ как можно меньшей сложности в стандартном базисе, которая реализует сумматор двух переменных и функцию голосования.

38. Что такое фундаментальная система решений?

39. Какие функции порождает в замыкании одноэлементный подкласс из примера в доказательстве теоремы Янова?

40. Какие функции можно удалить из первой формы в P_k, сохранив при этом свойство полноты?

41. Полна ли система полиномов в P_k?

42. Какие вы знаете отличия P_2 от P_k?

43. Какова можность множества всех функций k-значной логики?

44. Сформулировать т. Слупецкого.

45. Найти число элементов во множестве линейных функций, сохраняющих ноль, но не самодвойственных.

46. Сколько минимальных ДНФ у монотонной функции?

47. Сколько остаточных функция у о.-д. функции $y_i = x_1 + \ldots + x_i \pmod 3), x_i, y_i \in Z_3$?

48. Дана схема (подается на 0-задержку, выход задержки и подаются на дизъюнкцию). Запишите в виде канонических уравнения.

49. О.-д. функция задана каноническими уравнениями $\{q(0) = 0, y(t) = x(t) \vee q(t), q(t+1) = x(t)q(t)\}$. Найдите ее вес.

50. Сколько линейных и монотонных булевых ф-й от n переменных.

51. Ф-я трех переменных, задана вектором значений (00101011). Будет ли она линейной?

52. Почему в дереве с n вершинами количество ребер равно $n - 1$?

53. Граф Петерсона планарен?

54. Докажите что $\vdash (\neg f \to (f \to g))$.

55. Привести пример недетерминированной функции. Пример не ограниченно детерминированной ф-ии.

56. Изобразить все цепи Анселя на 3-мерном кубе и на 4-мерном.

57. Привести пример задачи динамического программирования, к которой применимы уравнения Беллмана.

58. Что такое планарный граф?

59. При каких n булев куб размерности n планарен?

60. Где в доказательстве теоремы Мучника работает условие $i \geq 2$ для базисных функций f_i?

61. Сколько шагов в алгоритме Прима?

62. Верно ли, что M лежит в объединении T_0 и T_1?

63. Собрать схему из функциональных элементов в стандартном базисе с как можно меньшей сложностью, которая бы реализовывала функцию голосования и сумматор.

64. Можно ли представить P_2 в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых классов?

65. Верно ли, что замыкание от замыкания равно замыканию в P_2?

66. Существуют ли шефферовы функции в P_k?

67. Привести пример шефферовой функции в P_2, существеннно зависящей от всех своих n переменных.

68. Определение афинного преобразования и пример не афинного преобразования.

69. Возможно ли ослабить ограничение на неотрицательность весов в алгоритме Дейкстры?

70. Сколько существует линейных монотонных функций от n переменных?

71. Коммутативно ли произведение матриц? Если нет, то для каких матриц оно коммутативно?

72. Каковы ограничения на матрицу в постановке задачи, к которой применяется симплекс-метод?

73. Почему на ограниченном допустимом множестве достигается экстремум целевой функции в задачах на симплекс-метод?

74. Всегда ли из полной системы в P_2 можно выделить полную подсистему мощности не выше 4?

75. Доказать предполноту класса T_0.

76. Полна ли в $_2$ система $(S \cap M) \cup (L/M)$?

77. Перечислить свойства оператора замыкания в P_2.

78. Продемонстрировать применение леммы о немонотонной функции на примере функции с вектор-столбцом значений (10011010).

Вопросы по непрерывной части

1. Пример не интегрируемой по Риману функции.

2. Доказать, что ф-я интегрируема по Риману, если для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение, такое, что разность междуу верхней и нижней суммой Дарбу меньше ε.

3. Пусть функция имеет непрерыную производную на $[a, b]$. Будет ли она удовлетворять условию Липшица.

4. Что будет, если в задаче Коши убрать начальные условия?

5. $y' = \sqrt{(1 - y^2)}, \quad y(0) = 1$ - будет ли решение единственно?

6. Всегда ли имеет решение ур-е Рикатти, например, $y' = x^2 + y^2$?

7. Нейтральный элемент в группе - единственный?

8. Является ли поле действительных чисел алгебраически замкнутым? Приведите пример уравнения, не имеющего решения в $\mathbb{R}$.

9. Доказать, что группа бесконечного порядка имеет бесконечно много различных подгрупп.

10. В каком виде следует искать решение уравнения $x' - x = e^t$?

11. Что такое производная функции в точке? А что такое вторая производная?

12. Что такое самосопряженная матрица? Что можно сказать про собственные значения этой матрицы?

13. Определитель Вронского равен нулю. Следует ли из этого линейная зависимость? Предъявите контр-пример.

14. Чему равна производная $Re(z)$?

15. Следует ли дифференцируемость из существования всех частных производных? Приведите контрпример.

16. Пример ряда, сходящегося поточечно, но не равномерно.

17. Сформулировать определение дифференцируемости в точке.

18. Каков геометрический смысл дифференциала?

20. Привести пример конечномерного линейного пространства.

21. Могут ли у одного и того же пространства быть базичы разной мощности?

22. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

23. Сформулировать четыре метода доверительного оценивания параметров нормального распределения.

24. Почему область сходимости ряда Лорана - кольцо?

25. Зависит ли вычет от радиуса интегрирования?

26. Следует ли из равномерной функциональной непрерывности обычная непрерывность?

27. Исследовать на равномерную непрерывность функции $\dfrac{1}{x}$ и x^2 на интервале $(0, 1)$

28. Сформулировать основную идею доказательства теоремы Больцано-Вейерштрасса.

29. Доказать Теорему Коши. Верна ли теорема Коши в многосвязной области?

30. Чему равен комплексный интеграл по единичной окружности с центром в 0 от функции $\dfrac{1}{z}$?

31. Сформулировать определение случайной величины.

32. Какова связь между теоремами Ляпунова и Линдеберга?

33. Доказать, что фундаментальная последовательность сходится.

34. Посчитать сумму ряда по $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

35. Что такое фундаментальная система решений?

36. Решить дифференциальное уравнение $x'' - 2x' + x = 1$

37. Дать определение верхнего предела последовательности и проверить, всегда ли он существует.

38. Что можно сказать о сходимости дифференцируемого степенного ряда на границе радиуса сходимости.

39. Дать определение сходимости ряда.

40. Исследовать на абсолютную и условную сходимоть ряд Лейбница.

41. Сформулировать т. Слупецкого

42. Определение случайной величины

43. Верно ли, что непрерывная функция дифференцируема?

44. В доказательстве Т.Ролля может ли ф-я достигать максимума и минимума в концах отрезка

45. Пример дифференцируемой ф-ии, не имеющей второй производной

46. Дать определение голоморфной функции.

47. Может ли радиус сходимости быть бесконечным?

48. Ряд Лорана фунции $f(z)$, тождественно равной 0.

49. Когда верна ф-ла Коши

50. Определение собственного числа линейного преобразование в конечномерном линейном пространстве. Всегда ли они существуют?

.

51. Как понимать сходимость функционального ряда. Дать определение равномерной сходимости.

52. Определение несобственного интеграла

53. Функция определена на $[a, b]$ и имеет производную во всех точках (a, b). Следует ли непрерывность на $[a, b]$?

54. Какова связь между суммами Дарбу и интегралами Дарбу

55. Привести пример разрывной функции, которая интегрируема

56. Определение О-большого

57. Что такое верхний предел

58. Когда можно почленно дифференцировать функциональный ряд?

59. Разложите e^{x^2} в степенной ряд и найдите радиус сходимости.

60. Дать определение длины дуги

61. Дать определение области

62. Что такое бесконечно малая функция

63. Пример ф-ии 2-переменных, которая дифференцируема в точке, но частные производные не непрерывны

64. Определение дифференцирования в смысле $\mathbb{C}$. Доказать условия Коши-Римана.

65. Решить уравнение $y'' + y' + sinx = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$.

66. Решить систему

$$\begin{cases} x' = y + \dfrac{1}{cost}, \\ y' = -x \end{cases}$$

.

67. Чему равен предел $\dfrac{sinx}{x}$ в 0?

68. Пример функции, у которой существует предел справа в точке, но не существует предела слева в этой же точке.

69. Исследовать на непрерывность функцию $e^{\frac{1}{x}}$, доопределенную в 0 нулем.

70. Существуют ли поля из 4 элементов и если да, то сколько?

71. Как разлагаются на множители многочлены с вещественными коэффициентами?

72. Сформулировать определение системы линейно-независимых функций.

73. Решить $y' + y = 1$.

74. Существует ли поле из 6 элементов?

75. Будут ли непрерывны вещественная и мнимая части у комплексно непрерывной функции?

76. Что такое устранимая особая точка? Какова связь ряда Лорана с типом особой точки?

77. Сформулировать теорему Коши.

78. У каких функций существует первообразная?

78. Верно ли, что непрерывная на отрезке функция ограничена?

79. Какая из функций в паре (плотность, функция распределения) является первообразной?

80. Существует ли непрерывная, но не ограниченная на интервале функция?

81. Коммутативно ли произведение матриц? Если нет, то для каких матриц оно коммутативно?

82. Будут ли равномерно непрерывны функции $\dfrac{1}{x}$ и x^2 на интервале $(0, 1)$?

83. Какова основная идея доказательства теоремы Кантора?

84. Чему равна размерность $C[a, b]$?

85. Решить уравнение $x'' - 2x' + x = 1$.

86. Решить дифференциальное уравнение $y' - y = 1$.

87. Сформулировать условия Коши-Римана.

88. Проверить на аналитичность функции $f(z) = x - iy$ и $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$.

0.50 2018

1. Мощность множеств, сколько замкнутых множеств в P_k, сколько функций в пересечении L_n и S_n.

2. Что такое компонента связности.

3. Пример ограниченной, но неинтегрируемой функции.

4. Найти производную tg.

5. Укладка куба на плоскости.

6. Пример несобственного интеграла.

7. Дана функция, показать, что она равномерно непрерывна.

8. Вывести производную x^x.

9. Пусть $M = \{m_1, ..., m_n\}$, подобрать обучающую последовательность и найти N (теорема Новикова).

10. Дана функция x^2, $e = 1$. При каком дельта она равномерно непрерывна на $[a, b]$?

11. $[f] \ni \{0, 1\}$. f - монотонна?

12. Какой класс функций лежит в пересечении всех предполных классов P_2

13. Почему если $f(x)$ непрерывна, то существует $F(x)$ и $F'(x) = f(x)$?

14. Почему если производная функции равна 0 то это $const$?

15. Расходимость гармонического ряда

16. Принципиальные отличия между P_k и P_2

17. Оценка количества n местных монотонных функций

18. Дана функция x^2, $\varepsilon = 1$. При каком дельта она равномерно непрерывна на $[a, b]$?

19. Количество функций от n переменных в перечении L_n и T_0.