Телекоммуникационные технологии

Теорема Котельникова. Спектры простых сигналов

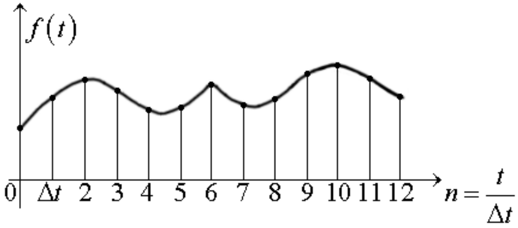
Богач Н.В.

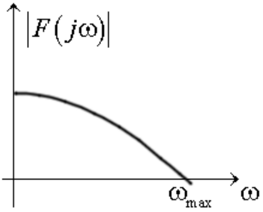
СПбГПУ ИИТУ

9 апреля 2018 г.

Теорема Котельникова

Владимир Александрович Котельников (1908 — 2005). О пропускной способности "эфира"и проволоки в электросвязи (1933 г.):
Любую функцию $f(t)$, состоящую из частот от 0 до ω_{max}, можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через $1/(2f_{max})$ секунд.
Ограничения на спектр частот $0 < \omega \ < \omega_{max}$


$f(t)$
0
Δt
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
$n = \frac{t}{\Delta t}$


$|F(j\omega)|$
ω_{max}
ω

Доказательство

- В общем случае

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- В момент времени

$$t = n\Delta t = \frac{1}{2\, f_{max}} = n\, \frac{2\pi}{2\, \omega_{max}} = \frac{n\pi}{\omega_{max}}$$

функция $f(t)$ принимает значение $f(n\Delta t)$

- Если спектр f(t) ограничен, имеем:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- Запишем ППФ для $f(n\Delta t)$:

$$f(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} F(j\omega)e^{j\omega\frac{n\pi}{\omega_{max}}}d\omega$$

- Разложим $F(j\omega)$ в ряд Фурье на $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$ (путем периодического продолжения с периодом $2\omega_{max}$ до $\pm\infty$)

$$F(j\omega) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\frac{\pi}{\omega_{max}}}$$

-

$$A_n = \frac{2}{2\,\omega_{max}} \underbrace{\int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} F(j\omega) e^{-j\frac{n\pi}{\omega_{max}}\omega} d\omega}_{2\pi f(-n\Delta t)} = \frac{2\pi f(-n\Delta t)}{\omega_{max}}$$

-

$$A_n = \frac{f(-n\Delta t)}{f_{max}} \Rightarrow n\Delta t = \frac{n}{2\,f_{max}}$$

Восстановление функции $f(t)$ по ее значениям в моменты времени $t = n\Delta t$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\frac{\pi}{\omega_{max}}} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{max}}^{\omega_m ax} e^{j\omega t}\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{f(-n\Delta t)}{f_{max}} e^{jn\frac{\pi}{\omega_{max}}} d\omega$$

$$= \frac{1}{\omega_{max}}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}f(-n\Delta t)\int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} e^{j\omega(t-n\Delta t)}d\omega =$$

$$\frac{1}{\omega_{max}}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}f(-n\Delta t)\frac{e^{j\omega(t-n\Delta t)}}{2j(t-n\Delta t)}\Big|_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} =$$

$$\frac{1}{\omega_{max}}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}f(-n\Delta t)\frac{e^{j\omega(t-n\Delta t)}}{2j(t-n\Delta t)}\Big|_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} =$$

$$\frac{1}{\omega_{max}}\underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty}f(-n\Delta t)\frac{\sin\omega_{max}(t-n\Delta t)}{t-n\Delta t}} = f(t)$$

ряд Котельникова

Вывод

Непрерывный сигнал $x(t)$ можно представить в виде ряда:
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\Delta t) \mathrm{sinc}\left[\frac{\pi}{T}(t - kT)\right]$,
где $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$.
Интервал дискретизации удовлетворяет ограничениям
$0 < T \leqslant \dfrac{1}{2f_c}$.
$x(k\Delta t)$ - дискретные отсчёты сигнала $x(t)$.

Спектр гармонического сигнала

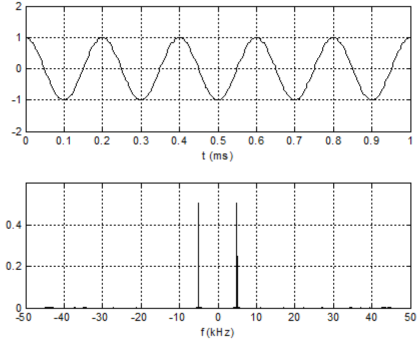


Рис.: $s(t) = cos(2\pi ft + \phi_0)$

Спектры простых сигналов

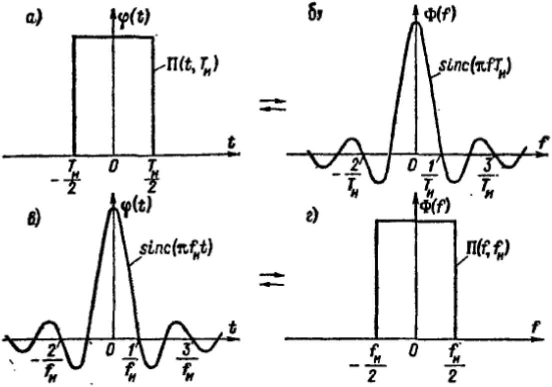


Рис.: a) $s(t) = \prod(t, T_i)$ $S(f) = sinc(\pi f T_i)$
b) $s(t) = sinc(\pi f T_i)$ $S(f) = \prod(t, T_i)$

Спектры простых сигналов. Дельта-импульс

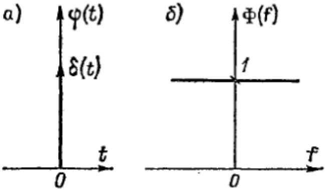


Рис.: a) $s(t) = \delta(t)$ b)$S(f) = 1(f)$

Спектры простых сигналов. Треугольный импульс

$$\Delta(t, T_i) = \frac{2}{T_i} \prod(t, \frac{T_i}{2}) * \prod(t, \frac{T_i}{2})$$

Дискретное преобразование Фурье

Разложим в ряд Фурье периодический сигнал $x(t)$ с периодом T.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\omega_k t}, \qquad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}.$$

Пусть дискретизация сигнала выполнена так, чтобы на периоде T было N отсчетов. Тогда дискретный сигнал имеет вид:

$$x_n = x(t_n),$$

где

$$t_n = \frac{n}{N} T,$$

тогда ряд Фурье для сигнала $x_n = x(t_n)$ имеет вид:

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\omega_k t_n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Используя периодичность комплексной экспоненты:

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn},$$

имеем:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn},$$

где

$$X_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{k+lN}.$$

Умножая скалярно выражение для x_n на $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$ получим:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_k \frac{1-e^{j2\pi(k-m)}}{1-e^{j\frac{2\pi(k-m)}{N}}} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k N\delta_{km},$$

откуда

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn},$$

Дискретное преобразование Фурье является линейным преобразованием.
Переводит вектор временных отсчётов $\vec{x}$ в вектор спектральных отсчётов той же длины.
Может быть реализовано как умножение симметричной квадратной матрицы на вектор: $\vec{X} = \hat{A}\vec{x}$,
Матрица ДПФ $\hat{A}$ имеет вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & e^{-j\frac{8\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \\ 1 & e^{-j\frac{6\pi}{N}} & e^{-j\frac{12\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}3(N-1)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} & \end{pmatrix}.$$